

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Nieuws | News**
- 88 **Onderzoek naar netwerken**
- Maatschappij | Society**
- 89 **Wetenschap en welvaart: een paradoxaal krachtenveld**
Klaas Landsman
- Nieuws | News**
- 96 **Wiskunde nodig om arbeidsmarkt te redden**
Mario van Vliet
- Evenement | Event**
- 97 **NWD: De eerste keer**
Rob van Oord
- Biografie | Biography**
- 100 **Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie**
Teun Koetsier, Jan van Mill
- Onderzoek | Research**
- 113 **A mixed integer non-linear optimization approach to optimize dike heights in the Netherlands**
Ruud Brekelmans et al.
- Onderzoek | Research**
- 119 **Stochastische partiële differentiaalvergelijkingen**
Sonja Cox
- Evenement | Event**
- 122 **NMC 2014: Klaar voor de volgende vijftig jaar!**
Jacob van der Woude
- Evenement | Event**
- 124 **Intuitionistische logica en het scheppend subject**
Mark van Atten, Göran Sundholm
- In Memoriam | Obituary**
- 131 **Leon van den Broek: Buiten het boek om**
Lonneke Boels
- Afscheidsrede | Valedictory Lecture**
- 139 **Tegenlicht**
Odo Diekmann

Rubrieken | Departments

- 79 **Redactioneel**
Jan van Neerven
- 80 **Servicepagina**
- 81 **Agenda**
Patrick Hafkenscheid
- 83 **Nieuws**
Patrick Hafkenscheid
- 111 **Het keerpunt van Eduard Looijenga**
Ionica Smeets
- 137 **In de verdediging**
Geertje Hek
- 146 **Boekbesprekingen**
- 150 **Problemen**

Uitgelicht



Ruud Brekelmans en anderen beschrijven een model voor het optimaliseren van dijkhoogtes.



Lonneke Boels staat stil bij het overlijden van Leon van den Broek.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Barry Koren (b.koren@tue.nl)
Jan van Neerven (j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Patrick Hafkenscheid (p.hafkenscheid@vu.nl)
Mark Timmer (timmer@cs.utwente.nl)

Bureau redactie

Gianni van den Braak
Lætitia Diemer

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuyper (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Derk Pik (JSG Maimonides), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Marco Streng (VU), Jan Ten Thijs Boonkamp (TU/e), Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Programmatuur (CONTEX)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)
Druk
Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor gewone leden bedraagt €80 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen €40. Voor studenten aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding €30. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts €40 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor €20.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256
Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Geurt Jongbloed (TUD, voorzitter), Fetsje Bijma (VU, penningmeester), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL), Jenneke Krüger (SLO), André Ran (VU), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster, Mark Veraar (TUD)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	01-09-2014	verstreken
4	01-12-2014	01-08-2014
1	02-03-2015	01-11-2014
2	01-06-2015	01-02-2015

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

FiSme

Freudenthal Instituut

Op het omslag

De manier waarop de financiering van wetenschappelijk onderzoek geregeld wordt, is in de loop der tijd behoorlijk veranderd. Vanuit de wetenschap is er de nodige kritiek op het huidige financieringsstelsel. Lees de bijdrage van Klaas Landsman in deze discussie op pagina 89.

Really Big Numbers

In april organiseerde het KWG al weer het 50ste Nederlands Mathematisch Congres. Ter gelegenheid van dit jubileum had de organisatie een fraai Delfts blauw magisch vierkant laten maken dat in alle richtingen optelt tot 50. Wie niet tot de gelukkigen behoorde die dit souvenir mee naar huis (of werkkamer) mochten nemen, kon alsnog zijn/haar hart ophalen bij de verscheidene stands. Voor het geval u de kans gemist heeft een leuke wiskundepuzzel of *De Pythagoras Code* aan te schaffen: voor de jarige neef of nicht heeft de AMS nu een leuk alternatief. *Really Big Numbers* is het eerste boek dat de American Mathematical Society uitbrengt voor de jeugd. Ik herinner me hoe ik als kind gefascineerd was door grote getallen: het aantal zandkorrels op aarde, het aantal kilometers in een lichtjaar, het aantal sterren in het heelal en, reus onder de reuzen, het onmetelijk grote getal googol. Allemaal kinderspel vergeleken bij mijn huidige favoriete grote getal (gevonden in een blog van John Baez over een puzzel van Harvey Friedman): de lengte N van het langste woord in een alfabet over drie letters met de eigenschap dat voor alle $m < n \leq N/2$ het blok van de m -de tot en met de $2m$ -de letter niet voorkomt binnen het blok van de n -de tot en met de $2n$ -de letter. Voordat u het opzoekt dient u wel eerst zelf een beredeneerde gok te doen!

Twee grote getallen haalden onlangs het nieuws. Met de honorering van het Zwaartekrachtprogramma Networks haalt de Nederlandse wiskundegemeenschap in één klap een subsidie van 23 miljoen euro binnen voor onderzoek aan de wiskundige en algoritmische aspecten van netwerken. Een prachtig succes voor de betrokken onderzoeksgroepen, een enorme impuls voor een belangrijk stuk wiskunde, en prima reclame voor de maatschappelijke relevantie van wiskunde. Elders in dit nummer meer hierover. Het Zwaartekrachtprogramma past in een wetenschapsbeleid dat streeft naar excellentie door steeds grotere bedragen voor toponderzoek beschikbaar te stellen. Dit is een strategische keuze waar ook nadelen aan kleven: het gaat ten koste van kleinere initiatieven. Buiten de grote prijzen om is het bijvoorbeeld erg moeilijk geworden om een promotieplaats gefinancierd te krijgen. Het draagvlak voor herinvoering van de Open Competitie is groot. Klaas Landsman neemt in zijn bijdrage krachtig stelling in dit debat.

Het onlangs verschenen rapport *Mathematical sciences and their value for the Dutch economy*, geschreven door Deloitte in opdracht van PWN, laat zien in welke mate de Nederlandse economie profiteert van wiskunde. Al is dit voor de buitenstaander niet altijd zichtbaar, niet minder dan 900.000 banen maken essentieel gebruiken van — of zijn afhankelijk van — wiskunde. De directe invloed van wiskunde vertegenwoordigt een waarde van 71 miljard euro. Samengenomen met de indirecte waarde (vertegenwoordigd door de banen die afhankelijk zijn van de wiskunde) en geïnduceerde waarde (de banen die van de uitgaven van deze groepen profiteren) komt de teller uit op 159 miljard euro, 30 procent van het bruto nationaal product. Een *really big number* dat menig wiskundige onwillekeurig doet glimlachen, zo niet enige scepsis ontlokt. Het is duidelijk dat men deze uitspraken met een korrel zout moet nemen, misschien wel met een grote korrel, maar dat doet geen afbreuk aan het belang van de onderliggende boodschap. De rekensom is bovendien eenvoudig en transparant: bepaal per beroepsgroep de procentuele bijdrage van wiskunde en vermenigvuldig dit met het bedrag dat in die beroepsgroep omgaat. Een simpele rekensom die begrijpelijk is voor politici en het pleidooi voor actie in het recente visiedocument *Formulas for Insight and Innovation* veel kracht bijzet. De uitkomsten van het rapport zijn bovendien in lijn met een eerdere vergelijkbare studie van Deloitte over de situatie in Groot-Brittannië, waar de percentages zelfs nog hoger uitvielen.

Er zijn ook kleine getallen. In het zojuist genoemde rapport waarschuwt Deloitte dat Nederland nog steeds hekkensluis is op de lijst met percentages bèta-studenten, al het optimisme over stijgende studentenaantallen ten spijt, en er wordt voorge-rekend hoeveel wiskunde-gerelateerde banen dit op termijn kan kosten. En het aantal wiskundeleraren in ons land is zo klein dat het onlangs het hoofdartikel op de voorpagina van een groot landelijk ochtendblad haalde. Hier liggen grote uitdagingen voor de komende jaren.

Jan van Neerven, hoofdredacteur

Delft Institute of Applied Mathematics, TU Delft

Servicepagina

| Service page

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

□ Bestuurswisselingen

Sinds de ALV van 17 april is het bestuur gewijzigd. Gert Vegter, oud-voorzitter, is uit het bestuur getreden, André Ran is — statutair — afgetreden als voorzitter, en Onno van Gaans is afgetreden als penningmeester. De nieuwe voorzitter is Geurt Jongbloed; Fetsje Bijma is nieuw aangetreden als bestuurslid en penningmeester. Voor de huidige bestuurssamenstelling zie het Colofon van dit nummer of www.wiskgenoot.nl/watis/bestuur.html.

□ Philips Wiskundeprijs voor Promovendi

Tijdens het 50ste Nederlandse Mathematische Congres (NMC 2014) te Delft hebben zes kandidaten een voordracht gegeven in de strijd om de negende Philips Wiskundeprijs. De prijs, een geldbedrag en een wisselbeker, is toegekend aan Roberta Anna Iseppi, promovendus aan de Radboud Universiteit Nijmegen met de voordracht ‘Ghost fields: non-existing particles or existing geometric properties?’.

Platform Wiskunde Nederland

□ Bureau PWN

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

□ Deloitte-rapport en Visiedocument 2025

Het Deloitte-rapport *Mathematical sciences and their value for Dutch economy* is op 10 april aan het ministerie van EZ aangeboden. Dit rapport en het Visiedocument 2025 *Formulas for Insight and Innovation* kunnen gedownload worden van de website van PWN.

□ PWN Nieuwsbrief

PWN publiceert maandelijks een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN-informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven.

European Mathematical Society

□ Abelprijs

De Noorse Academie van Wetenschappen heeft de Abelprijs voor 2014 toegekend aan Yakov G. Sinai, Princeton University en het Landau Instituut voor Theoretische Fysica (RAN) “for his fundamental contributions to dynamical systems, ergodic theory, and mathematical physics”. De prijs is op 20 mei in Oslo uitgereikt door de Noorse kroonprins Haakon. De Abelprijs is een jaarlijkse wiskundeprijs die in 2003 voor het eerst werd uitgereikt. www.euro-math-soc.eu

□ EMS Newsletter

Van de drie-maandelijke EMS Newsletter is de elektronische versie van de meest recente uitgave beschikbaar op de EMS website: www.ems-ph.org/publications.php.

International Mathematical Union

□ IMU Newsletter

De twee-maandelijke IMU Newsletter is beschikbaar via www.mathunion.org/imu-net.

Recente publicaties van het KWG

□ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag, gratis toegang via ‘View Articles’) *Special issue in memory of Nicolaas Govert de Bruijn (1918–2012)*, J.W. Klop, R. Tijdeman, J.J.O.O. Wiegerinck (eds.), Volume 24, Issue 4, 2013.

Zaanen Centennial Special Issue, R. Kaashoek, B. de Pagter (eds.), Volume 25, Issue 2, 2014.

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

77. *Hemelverschijnselen nabij de Horizon*, Henk Broer, €22, 2013.

76. *Inleiding in de Statistiek*, F. Bijma, M. Jonker en A. van der Vaart, €32, 2013.

75. *An Invitation to Functional Analysis*, B. de Pagter en A.C.M. van Rooij, €25, 2013.

□ **Zebra-reeks** (Epsilon Uitgaven)

40. *Kantelpunten en alternatieve evenwichten*, Lia Hemerik, Egbert van Nes en Theo-Jan van de Pol, €10, 2014.

39. *De juiste ondersteuning*, Dolf van den Hombergh en Leon van den Broek, €10, 2014.

38. *SpiroSporen*, Stephan Berendonk en Leon van den Broek, €10, 2013.

37. *Moiré-kunst met niveaulijnen*, Luc Van den Broeck, €10, 2013.

36. *Muziek uitgedrukt in getallen*, Aline K. Honingh en Michiel Schuijjer, €10, 2013.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen naar redactie@epsilon-uitgaven.nl.

Agenda

| Upcoming Events

juni 2014

5–6 juni 2014

□ DIAMANT symposium

Jaarlijks symposium van het DIAMANT-cluster.

plaats Hotel Haarhuis, Arnhem

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

6 juni 2014

□ Bessensap 2014

Evenement waar wetenschap en journalistiek samenkomen.

plaats Media Plaza Utrecht

info www.nwo.nl/bessensap

14 juni 2014

□ Lustrumsymposium toegepaste wiskunde

Symposium ter ere van 45 jaar toegepaste wiskunde in Twente.

plaats Universiteit Twente

info utwente.nl

16–18 juni 2014

□ 11th Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis

Jaarlijks evenement, dit keer onder andere over discrete modellen in de complexe analyse en interpolatie-problemen in meerdere dimensies.

plaats Sevilla

info congreso.us.es/ceacyto/2014

16–20 juni 2014

□ Instanton Counting: Moduli Spaces, Representation Theory and Integrable Systems

Workshop met onderwerpen in de overlap tussen analyse en meetkunde, mede georganiseerd door Sergey Shadrin (UvA).

plaats Lorentz Center, Leiden

info lorentzcenter.nl

19–20 juni 2014

□ Erasmus Energy Forum 2014

Internationaal forum waar wetenschappers uit verschillende vakgebieden de hoofden buigen over de toekomst van energie.

plaats Erasmus Universiteit Rotterdam

info www.rsm.nl/erasmus-energy-forum-2014

23–27 juni 2014

□ From Topological to Stochastic Techniques in Dynamical Systems

Workshop over topologische en stochastische methoden, mede georganiseerd door Jan Bouwe van den Berg (VU) en Bob Rink (VU).

plaats Lorentz Center, Leiden

info lorentzcenter.nl

23–27 juni 2014

□ Geometric Algorithms in the Field

Workshop over meetkundige algoritmes, mede georganiseerd door Maarten Löffler (UU) en Bettina Speckmann (TU/e).

plaats Lorentz Center, Leiden

info lorentzcenter.nl

23–27 juni 2014

□ Stochastic Networks Conference 2014

Twee-jaarlijkse conferentie met als doel wetenschappers met belangstelling voor stochastische netwerken bij elkaar te brengen.

plaats CWI, Amsterdam

info event.cwi.nl/sn2014

30 juni – 2 juli 2014

□ Performance and Control of Large-Scale Networks

Workshop is onderdeel van het 'Probabilistic Structures in Evolution'-programma. Georganiseerd door Sem Borst en Johan van Leeuwen.

plaats Eurandom, TU Eindhoven

info eurandom.nl

30 juni – 4 juli 2014

□ GQT Graduate School and Colloquium

Driedaagse GQT-cursus voor aio's en masterstudenten, gevolgd door een tweedaags GQT-colloquium.

plaats Woudschoten, Zeist

info www.projects.science.uu.nl/GQT

juli 2014

3–13 juli 2014

□ Internationale Wiskunde Olympiade

De 55ste Internationale Wiskunde Olympiade wordt gehouden in Zuid-Afrika.

plaats Kaapstad

info www.imo2014.org.za

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

agenda@nieuwarchief.nl

7–11 juli 2014

21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems

Internationaal symposium voor wiskundigen in de netwerk- en systeemtheorie.

plaats Academiegebouw, Groningen

info rug.nl/mtns2014

7–18 juli 2014

Mathematical Modelling of Infectious Disease

Zomercursus voor masterstudenten, over wiskundige modellen van ziektes. Goed voor 3 studiepunten.

plaats Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

14–18 juli 2014

European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education

7de zomerschool over de geschiedenis en filosofie van wiskundeonderwijs, met lezingen en panels over diverse onderwerpen.

plaats Kopenhagen

info conferences.au.dk/ESU-7

14–18 juli 2014

International Workshop of Operator Theory and its Applications 2014

Internationale workshop over operatorentheorie. Mede georganiseerd door André Ran.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam

info www.math.vu.nl/~ran/iwota2014

21–25 juli 2014

Rigidity and Flexibility in Symplectic Topology and Dynamics

Workshop over de rol van symplectische topologie in dynamica, mede georganiseerd door Federica Pasquotto (VU).

plaats Lorentzcenter, Leiden

info lorentzcenter.nl

21–25 juli 2014

Ordered Banach Algebras

Workshop over geordende Banach-algebra's, mede georganiseerd door Marcel de Jeu (UL) en Ben de Pagter (TU Delft).

plaats Lorentzcenter, Leiden

info lorentzcenter.nl

augustus 2014

18–22 augustus 2014

Combinatorial/Topological Frameworks for Multiparameter Nonlinear Dynamics

Workshop over de rol van topologie in de dynamica, mede georganiseerd door Rob van der Vorst (VU).

plaats Lorentzcenter, Leiden

info lorentzcenter.nl

18–29 augustus 2014

Mathematics and Science Education

Zomercursus voor masterstudenten, over onderwijs in de exacte wetenschappen. Goed voor 3 studiepunten.

plaats Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

18–29 augustus 2014

Theoretical Physics

Zomercursus voor bachelorstudenten, over theoretische natuurkunde. Goed voor 3 studiepunten.

plaats Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

20–23 augustus 2014

EUROCALL2014

Internationale conferentie over 'Computer-assisted language learning' (CALL).

plaats RUG, Groningen

info eurocall2014.nl

22–23 augustus 2014

Vakantiecursus Wiskunde: Nieuwe Tijden

Eerste weekend van de jaarlijkse vakantiecursus voor leraren havo, vwo en hbo. Dit jaar staan de nieuwe examenprogramma's centraal.

plaats TU Eindhoven

info platformwiskunde.nl

25–29 augustus 2014

Population Dynamics and Statistical Physics in Synergy

Workshop is onderdeel van het 'Probabilistic Structures in Evolution'-programma. Mede georganiseerd door Frank den Hollander.

plaats Eurandom, TU Eindhoven

info eurandom.tue.nl

29–30 augustus 2014

Vakantiecursus Wiskunde: Nieuwe Tijden

Tweede weekend van de jaarlijkse vakantiecursus voor leraren havo, vwo en hbo. Dit jaar staan de nieuwe examenprogramma's centraal.

plaats CWI, Amsterdam

info platformwiskunde.nl

september 2014

1–5 september 2014

The Pisot Conjecture

Workshop over het Pisot-vermoeden, mede georganiseerd door Robbert Fokkink (TU Delft).

plaats Lorentz Center, Leiden

info lorentzcenter.nl

21 september 2014

Waar komen kometen vandaan en waar gaan ze naar toe?

Kinderlezing door sterrenkundige Henny Lamers over de banen van hemellichamen.

plaats NEMO, Amsterdam

info e-nemo.nl

27 september 2014

Discovery Festival

Uitgaansnacht-met-inhoud, waarin wetenschap samengaat met muziek, kunst en inspiratie.

plaats Amsterdam, Rotterdam en Eindhoven

info discoveryfestival.nl

26 september 2014

Wiskundetoernooi 2014

Jaarlijkse wiskundewedstrijd voor scholieren.

plaats RU, Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

oktober 2014

8–10 oktober 2014

39ste Woudschotenconferentie

39ste editie van de conferentie over Scientific Computing, met als thema's 'domein decompositie en multifysica' en 'sterk oscillerend gedrag'.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/woudschoten/2014/conferentieN.php

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid
 nieuws@nieuwarchief.nl

Abelprijs toegekend aan Russische wiskundige

De Noorse Academie van Wetenschap en Letteren heeft dit jaar de Abelprijs toegekend aan Yakov G. Sinai. Dit heeft de president van de Academie, Nils Chr. Stenseth op 26 maart bekend gemaakt. Sinai is een Russische wiskundige en theoretisch fysicus en is momenteel werkzaam op de Princeton Universiteit en het Landau Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

De jury prees hem “for his fundamental contributions to dynamical systems, ergodic theory, and mathematical physics”. Sinai is een van de meest invloedrijke wiskundigen van de twintigste eeuw. Behalve dat hij baanbrekende resultaten in de bovengenoemde gebieden heeft gepubliceerd (Kolmogorov–Sinai-entropie, Sinai’s biljart, Sinai’s random walk, enzovoort) verspreid over meer dan 250 artikelen, heeft hij ook nog eens meer dan vijftig promovendi begeleid in zijn leven. Het Abel-comité was ook erg onder de indruk van de brug die Sinai slaat tussen de verschillende gebieden in de wis- en natuurkunde.

Het is niet de eerste prijs die Yakov Sinai heeft ontvangen in zijn leven. In 2013 ontving hij de *lifetime achievement* Leroy P. Steel-prijs. Verder heeft hij de Wolfprijs, de Nemmersprijs, de Henri Poincaré-prijs en de Dobrushin International Award op zijn naam staan.

De Abelprijs is een hoog aangeschreven prijs voor wiskundigen, deze wordt vaak uitgereikt aan wiskundigen die in veel verschillende gebieden actief zijn en internationaal bekend zijn. De prijs omvat onder andere een geldsom van 750.000 euro. De prijs is op 20 mei uitgereikt door de Noorse kroonprins.

abelprize.no

App helpt bij jetlags

Onderzoekers van de Universiteit van Michigan hebben een app ontwikkeld die de genezing van jetlags op een optimale manier laat verlopen. Ze zijn niet de eerste wetenschappers die zich bezighielden met de wiskunde achter de jetlag. Het blijkt dat over een jetlag heen komen in zijn fundamenteen een wiskundig probleem is.

De iPhone-app, genaamd Entrain, is de eerste app die gebruik maakt van een op getallen gebaseerde *entrainment*. Dit is de wetenschappelijke term voor het synchroniseren van dagritmes met de plaatselijke tijd van de dag.

Wetenschappers hebben aangetoond dat vooral licht (met name blauw licht) een grotere invloed heeft op het lichaam dan alleen maar het regelen van de eetritmes bijvoorbeeld. De app geeft een schema waarin je geacht wordt om bijvoorbeeld op bepaalde tijden buiten een roze bril te dragen (dit blokkeert het blauwe licht), of juist in de nacht een blauw licht te bekijken. De app claimt om binnen drie dagen van de jetlag af te zijn, dat is sneller dan de ongeschreven ‘één-dag-per-uur’-regel.

eurekalert.org

De wereld viert 25 jaar web

In maart 1989 diende de wetenschapper Tim Berners-Lee een voorstel in over een nieuwe, revolutionaire manier om het internet te gebruiken om informatie door te sturen. Het document genaamd ‘Information Management: A Proposal’ beschreef onder andere websites, hyperlinks en zelfs ideeën over zoekmachines. Het internet bestond in zeker vorm ervoor al, maar was eigenlijk niet toegankelijk voor de gewone man. Na het indienen kwam de constructie van de software en implementatie van de ideeën, en in 1993 was het World Wide Web eindelijk open voor het publiek. Al eerder vierde het CWI 25 jaar open internet in Nederland.

Meer informatie hierover is te vinden op de website van Piet Beertema, www.godfatherof.nl.

Om het jubileum van het web te vieren kun je de allereerste website bezoeken op de website van CERN. Verder organiseert CERN allerlei initiatieven om het Web te vieren. Zie ook www.webat25.org voor meer informatie over de festiviteiten en <http://first-website.web.cern.ch> voor de eerste website.

cern.ch



Foto: Robert Scoble

Eerste webserver van het World Wide Web.

Brouwermedaille 2014 uitgereikt aan John M. Mather

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap heeft de Brouwermedaille 2014 toegekend aan de Amerikaanse wiskundige John N. Mather (1942), verbonden aan Princeton University. De medaille wordt eenmaal per drie jaar uitgereikt aan een wiskundige die onderzoek van internationaal topniveau heeft verricht. De medaille is op 16 april tijdens het 50ste Nederlands Mathematisch Congres in Delft uitgereikt.

Henk Broer, hoogleraar wiskunde in Groningen en voorzitter van de jury van de Brouwerprijs zegt: "Mather is een veelzijdig en buitengewoon invloedrijk wiskundige wiens werkterrein ligt in het vakgebied dynamische systemen. In het bijzonder betreft dit singulariteitentheorie en de Hamiltoniaanse dynamica, waar hij met gebruik van variationale methoden baanbrekend werk deed aan de zwakke Kolmogorov–Arnold–Moser-theorie en de theorie van Arnold-diffusie. Zijn werk heeft toepassingen in onder andere de populatiedynamica en bij het efficiënt bijsturen van satellieten onder gebruikmaking van de zwaartekracht." Mather is lid van de United States National Academy of Sciences.

De Brouwermedaille werd dit jaar voor de vijftiende keer uitgereikt. De ceremonie bestond uit een laudatio door Henk Broer, de Brouwerlezing door John Mather en de overhandiging van de Brouwermedaille door KWG-voorzitter André Ran.

cwi.nl

Groot tekort wiskundeleraren

Er is een enorm tekort aan wiskundeleraren in Nederland. Dit meldt het *Algemeen Dagblad* en wordt bevestigd door Platform Wiskunde Nederland en NVvW. Het artikel is grotendeels gebaseerd op cijfers van MeesterBaan, een vacaturesite voor banen in het onderwijs. Hieruit blijkt onder andere dat er in de eerste vier maanden van dit jaar 298 vacatures openstaan voor wiskundeleraren. Dat is een verdubbeling in vier jaar tijd. De grootste oorzaak van het fenomeen zou zijn dat er al weinig wiskundestudenten zijn, en dat de afgestuurde wiskundigen vaak ook nog eens kiezen voor het bedrijfsleven in plaats van

voor een baan in het onderwijs. Veel meer dan bij andere vakken die worden gegeven op de middelbare school zijn wiskundigen gewild in het bedrijfsleven. Wiskundigen worden weggekaapt bij de scholen met veel hogere salarissen. Nu worden vaak scheikunde- of natuurkundeleraren ingezet voor de wiskundelessen. Dit heeft soms negatieve gevolgen voor de leerlingen, scheikunde- en natuurkundeleraren kijken toch op een andere manier naar wiskunde dan wiskundigen. De gevolgen zijn volgens Remco van der Hofstad (hoogleraar aan de TU Eindhoven en woordvoerder PWN) enorm, met name omdat de hedendaagse maatschappij steeds meer op wiskunde gaat draaien. Daarom is het belangrijk om leerlingen goed les te geven in het omgaan met cijfers en kwantitatief denken.

AD

Niezen en hoesten verder dan het lijkt

Met het hooikoortsseizoen weer achter de rug is er weer flink geniest in Nederland. Hoewel ongetwijfeld iedereen netjes de hand voor de mond houdt tijdens het niezen blijkt nu dat je beter vier handen kunt gebruiken om de nies- en hoestwolken tegen te houden.

Onderzoekers van MIT hebben aangetoond dat de gaswolken die ontstaan bij het niezen en potentieel infecterende druppeltjes bevatten, veel verder komen dan eerder gedacht. Als je niest zie je hele kleine druppeltjes, maar je ziet niet de onzichtbare gasfase van de wolk. Deze fase zorgt er met name voor dat de kleine druppeltjes heel ver reizen.

Toegepast wiskundige John Nash, co-auteur van het artikel dat hierover is verschenen in de *Journal of Fluid Mechanics* licht toe dat door de wolk te beschouwen als individuele deeltjes, deze deeltjes wel 200 keer verder kunnen komen dan als hele wolk beschouwd.

Deze resultaten zouden mogelijk gevolgen hebben voor hoe architecten en ontwerpers bijvoorbeeld ziekenhuizen en luchtregulatiesystemen bedenken. De onderzoekers van MIT zijn momenteel bezig met het bedenken van nieuwe manieren om naar het probleem te kijken. Bijvoorbeeld door ook de eigenschappen van de lucht waar de gaswolk zich in bevindt mee te nemen in het onderzoek.

eurekalert.org



Foto: Adam Morille

Één euro, één prijs?

In de economie is er zoiets als de 'Wet van één prijs'. Deze wetmatigheid zegt dat dezelfde producten, in theorie, in verschillende economieën voor een gelijke prijs worden verkocht, anders trekken de

markten de prijzen wel gelijk. In de praktijk is er helaas nog weinig betekenisvol onderzoek naar gedaan, en er zijn zelfs onderzoeken gedaan waarin het tegendeel wordt beweerd.

Nu hebben twee econometristen van MIT, samen met een collega van de Universiteit van Chicago, een bewijs geformuleerd voor het convergeren van de prijzen in de Eurozone. Het blijkt dat de landen in Europa die de euro gebruiken qua prijzen onderling 30 tot 50 procent minder snel afwijken dan de andere landen.

De onderzoekers concluderen dat er niet alleen reden is om aan te nemen dat de 'Wet van één prijs' waar is, maar ook dat de munteenheid een beter uitgangspunt is om het verschil in prijzen te zien dan te kijken naar de landen afzonderlijk.

Het onderzoek is gedaan door te kijken naar de grote winkelketens die aanwezig zijn in alle landen, zoals H&M, Zara en Apple. Dit werd mede gedaan omdat de producten van deze winkels vaak op één plek worden gemaakt, waardoor de transport- en productiekosten overal vergelijkbaar zijn, zodat de enige echte factor van belang nog de munteenheid is.

MIT



Foto: Nationaal Archief/Anefy/Rob Bogaerts

Facebook-spelletje is hard

Voor de spelers van het verslavende spelletje Candy Crush Saga op Facebook is er misschien goed nieuws. Wetenschappers hebben aangetoond dat het spelletje NP-hard is. Dit begrip uit de complexiteittheorie betekent zoveel als dat het net zo 'moeilijk op te lossen' is als de moeilijkste problemen die niet snel opgelost kunnen worden. Dit sluit nauw aan bij het P versus NP-probleem dat een van de millenniumproblemen is. In het spelletje Candy Crush Saga is het de bedoeling om in een rooster van gekleurde snoepjes, twee aanliggende snoepjes van plek te laten verwisselen en daarmee drie of meer van dezelfde kleur weg te spelen. Het bord wordt dan van bovenaf weer opgevuld tot een compleet bord.

De wetenschappers hebben het probleem 'Is het mogelijk om gegeven een rooster met snoepjes een bepaalde score te halen?' geanalyseerd en daaruit geconcludeerd dat dit probleem NP-hard is. Zo zou je bijvoorbeeld in een beperkt aantal stappen een Traveling Salesman Probleem kunnen omzetten in een Candy Crush Saga-rooster.

newscientist.com

Toneelstuk met acteurs in verschillende locaties

Samen met de medewerkers van het Vconnect-project hebben onderzoekers aan het CWI gedemonstreerd hoe groepsvideocommunicatie

gebruikt kan worden om een toneelstuk te spelen met acteurs die op hetzelfde moment op verschillende locaties spelen.

Het experiment werd gedaan met acteurs van theatergroep Miracle. Ze speelden een fragment uit *Waiting for Godot*, een toneelstuk van Samuel Beckett. In de scène speelden acteurs op twee verschillende podia, één in Falmouth, in Engeland, en de ander in Vilnius, Litouwen.

Om alle interactie mogelijk te maken waren verschillende camera-communicatiesystemen nodig. Ook was het erg van belang dat het netwerk en de verbindingen waren geoptimaliseerd. Zoals je zou kunnen verwachten is de reactietijd erg belangrijk. Het idee is ook dat het publiek het thuis kan bekijken, waardoor toneelstukken weer een stapje dichter bij huis komen.

Het Vconnect-project heeft als doel het gebruik van hoge kwaliteitsvideo ter gebruik van massacommunicatie binnen gemeenschappen. De technieken die gebruikt zijn bij het langeafstandstoneelstuk zouden mogelijk ook gebruikt kunnen worden voor onderwijs, trainingen of zelfs communicatie tussen groepen mensen.

cwi.nl

Wetenschap en industrie samen aan de slag met big data

Het Leiden Institute of Advanced Computer Science (LIACS) heeft een subsidie gekregen van NWO voor een gezamenlijk project met het CWI, MonetDB, Tata Steel en BMW. Onderwerp van het vier jaar durende onderzoek is de ontwikkeling van een nieuw systeem voor het controleren en optimaliseren van industriële processen. Het zal onderdeel zijn van het NWO-programma 'Challenging Big Data'.

Meestal worden industriële processen in de gaten gehouden via sensoren, die vaak enorme hoeveelheden hoog-dimensionale data binnenkrijgen. In de praktijk wordt veel van deze data niet optimaal gebruikt en gaat veel zelfs verloren.

In het onderzoek zullen database-architecten van het CWI modellen maken en integreren in het door MonetDB geoptimaliseerde database-systeem met dezelfde naam. Voor Tata Steel en BMW is het voordeel voor het meewerken aan dit project dat hun industriële processen worden geoptimaliseerd.

LIACS/CWI



JD Hancock

Goud en brons voor Nederlandse dames op Europese olympiade

Op de derde European Girls' Mathematical Olympiad heeft Michelle Sweering (17) een gouden medaille behaald. Hannah Teeuw (17) won een bronzen medaille. Nooit eerder won een Nederlandse deelnemer goud bij deze prestigieuze wedstrijd. De European Girls' Mathe-

matical Olympiad vond van 10 tot 16 april plaats in Antalya, Turkije. Tijdens deze wedstrijd, die jaarlijks wordt georganiseerd om meisjes te stimuleren hun wiskundetalent te benutten, kregen de leerlingen op elk van de twee wedstrijddagen drie zeer pittige wiskundeopgaven om op te lossen. Hiervoor kregen ze beide dagen vier en een half uur de tijd. Voor iedere opgave waren zeven punten te verdienen.

Met haar 25 punten eindigde Michelle Sweering in het individuele klassement op de achtste plaats, van de 110 deelnemers. In totaal ontvingen 30 van de 110 deelnemers een bronzen medaille, 18 een zilveren medaille en 11 een gouden medaille. In het officiële landenklassement haalde Nederland een elfde plaats. In totaal deden 29 landen mee.

Sietske Tacoma



Hannah Teeuw en Michelle Sweering

CWI is .nl-registrar

Het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) is op 18 februari 2014 .nl-registrar geworden. Daarmee is de cirkel tussen SIDN en het CWI, de organisatie die bakermat is voor het .nl-domein, na 18 jaar weer rond. Het CWI droeg eind januari 1996 het beheer van het .nl-domein formeel over aan de daarvoor opgerichte Stichting Internet Domeinregistratie Nederland. Het CWI is nog steeds houder van de eerste geregistreerde .nl-domeinnaam, cwi.nl.

SIDN beheert het .nl-domein, maar de dienstverlening aan domeinnaamhouders verloopt via registrars die bij SIDN zijn aangesloten. Vaak zijn dit internetproviders, maar ook grote bedrijven die veel domeinnamen registreren of er veel belang aan hechten deze zelf te beheren, kiezen er soms voor om zelf registrar te worden. Alhoewel het aantal .nl-registrars de laatste jaren afneemt, komt het nog regelmatig voor dat een partij zich meldt bij SIDN om .nl-registrar te worden. Maar omdat het CWI en SIDN door het .nl-domein onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn, is het voor beide organisaties toch een bijzonder moment.

SIDN met Piet Beertema

Studie in Cijfers ook voor wo ingesteld

Na de pilot vorig jaar van *Studie in Cijfers* bij een aantal hbo's is het programma inmiddels uitgebreid tot opleidingen op universiteiten in Nederland. Het idee achter het programma is dat potentiële studenten in één keer een overzicht kunnen krijgen van wat hen te wachten staat bij de opleiding. Dit gebeurt aan de hand van een aantal cijfers.

De cijfers zijn gebaseerd op voltijds wo-bacheloropleidingen. De *Studie in Cijfers* geeft aan elke bacheloropleiding zeven cijfers mee, voor: studenttevredenheid, aantal eerstejaars, contacttijd eerstejaars, doorstroom naar het tweede jaar, diploma binnen vijf jaar, en arbeidsmarkt. Naast de betreffende cijfers voor de opleiding komen de cijfers te staan voor het landelijk gemiddelde over alle identieke opleidingen aan andere universiteiten.

Momenteel hebben de meeste universiteiten al de *Studie in Cijfers* toegevoegd in de studiegids. Het beoogde doel is dat in 2014 uiteindelijk al het hoger onderwijs mee doet met het programma.

studiekeuzeinformatie.nl

Beeldvormingstechniek geeft push aan moleculaire zelfassemblage

Een unieke samenwerking tussen chemici en wiskundigen van de TU Eindhoven heeft geleid tot een nieuwe beeldvormingstechniek, die het bestuderen van moleculaire zelfassemblage in ongekend detail mogelijk maakt. De onderzoekers, onder leiding van TU/e-hoogleraren Bert Meijer (ICMS) en Remco van der Hofstadt (W&I), publiceren hun doorbraak in het vooraanstaande tijdschrift *Science*.

Bij moleculaire zelfassemblage worden van de grond af molecuul voor molecuul nieuwe materialen opgebouwd met eigenschappen die in de natuur niet voorkomen. De onderzoeksgroep van prof.dr.ir. Bert Meijer binnen het Institute for Complex Molecular Systems (ICMS) richt zich hierbij op zogeheten supramoleculaire polymeren — uit enkele moleculen opgebouwde lange strengen met een rijk pallet aan mogelijke toepassingen, bijvoorbeeld als biomateriaal in regeneratieve geneeskunde, als goed geleidende nanobuisjes in elektronica of als fotonvoltaïsch materiaal in toekomstige zonnecellen. Om op de piekkleine micro- en nanoschaal — waar zelfassemblage plaatsvindt — zicht te hebben op wat er gebeurt, zijn goede beeldvormingstechnieken vereist. In de afgelopen jaren heeft een revolutionaire techniek zijn intrede gedaan, bekend onder de naam 'super-resolution microscopy', waarbij men op een ingenieuze manier optische afbeeldingen maakt van objecten met afmetingen kleiner dan licht strikt genomen toelaat.

Meijer presenteert in *Science* samen met wiskundige prof.dr.ir. Remco van der Hofstad een nieuwe stap met deze techniek, waardoor moleculaire fenomenen in beeld komen die eerder onzichtbaar bleven. De bijdrage van Van der Hofstad was nodig omdat zich in de moleculaire machinerie die de groep van Meijer bestudeert allerlei willekeurigheden voordoen, met veel ruis in de data als gevolg. Gebruikmakend van stochastische modellen van Van der Hofstad kon het werkelijke plaatje uit deze 'gegevensbrij' gedestilleerd worden. "Het was alsof hiermee de mist boven onze afbeeldingen werd opgetrokken", zegt eerste auteur van de publicatie Lorenzo Albertazzi. Volgens de Italiaanse onderzoeker is het uniek dat chemici en wiskundigen op deze manier samenwerken. "Eigenlijk zou het veel vaker moeten gebeuren, de expertises vullen elkaar goed aan", vindt hij. Volgens Albertazzi zet de nieuwe techniek een belangrijke stap in het begrip van assemblagereacties. In de publicatie demonstreren ze hun aanpak met een bekende reactie waarbij twee strengen met rood en groen gekleurde componenten mengen. "Iedereen dacht altijd dat alleen aan

de uiteinden componenten verwisselden, maar wij laten nu zien dat over de hele lengte van de streng onderdelen aan- en afgevoerd worden.”

TU/e Communicatie Expertise Centrum

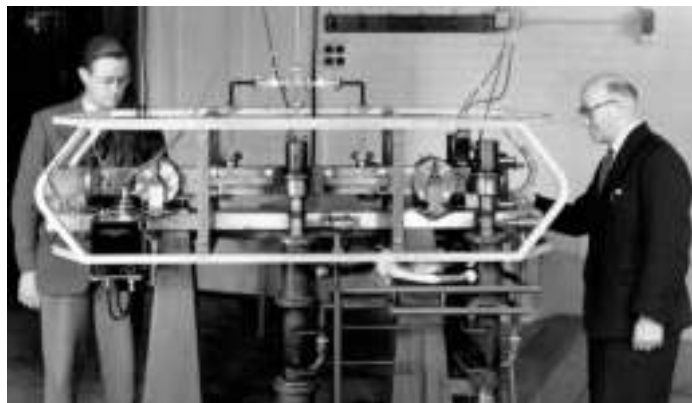
Londonse beurs zal atoomklok gaan hanteren

Binnenkort zullen de klokken op de financiële markten in London overgaan op de atoomklok. De atoomklok is zogezegd de meest accurate manier om tijd bij te houden. De klok maakt gebruik van de ideeën van Lord Kelvin, die beweerde dat tijd gebaseerd op hoe atomen zich gedragen een betere manier is om tijdsintervallen te meten dan welke andere manier dan ook. In het National Physical Laboratory (NPL) in Teddington, Engeland, staat een cesium-atoomklok. Deze meet hoe vaak cesium-atomen springen tussen twee energieniveaus.

De reden voor de invoering van de atoomklok is de exploitatie van tijdsverschillen door de beursgangers. Hoewel de verschillen in tijd vaak minuscuul zijn (Reuters heeft toegegeven de data soms 15 milliseconden te vroeg te publiceren), is dit genoeg tijd voor een computer om razendsnel aandelen te kopen of te verkopen. Naar schatting gaat het in die korte 15 milliseconden om handelingen met een waarde van ongeveer 28 miljoen dollar.

Nu London op weg is naar de atoomklok op de beurs is de hoop dat ook Wall Street er uiteindelijk aan toegeeft. Het is nu nog te duur om ervoor te zorgen dat er directe lijnen zijn naar atoomklokken in New York City.

newscientist.com



De eerste cesium-atoomklok is door Louis Essen gebouwd op het NPL in 1955

Beter vermenigvuldigen en rekenen dankzij rekenspelletjes

Een collectie van online rekenspelletjes heeft geholpen bij de ontwikkeling van rekenvaardigheden voor kinderen in groep 4 en 5. Dit toont het promotieonderzoek van Marjoke Bakker, waarop ze op 16 april gepromoveerd is, aan. De spelletjes variëren van lieveheersbeestjes tellen met behulp van groeperen tot postzegels plakken.

Het onderzoek vond plaats op scholen die gewoon onderwijs geven, en behalve de effecten werd ook gekeken naar de beste manier van spelen. Dit bleek ‘thuis spelen op school nabespreken’ te zijn.

De resultaten waren erg positief. Ongeacht instapniveau of geslacht bleken de leerlingen die de spelletjes speelden meer geleerd te hebben dan de kinderen die er niet aan meededen.

Het onderzoek was een onderdeel van ‘Onderwijs Bewijs’, een programma binnen het ministerie van OCW waarin ‘evidence-based’ onderwijsinnovatie centraal staat. De spelletjes zijn te vinden op de website <http://ws.fisme.science.uu.nl/briks/home.html>.

uu.nl

Roberta Iseppi ontvangt negende Philips Wiskundeprijs

Roberta Iseppi heeft tijdens het 50ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC) te Delft de 9de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi in ontvangst genomen. De prijs bestaat uit een wisseltrofee en een geldbedrag van 1000 euro. Een deskundige jury onder leiding van Michel Dekking had eerst door middel van een preselectie het aantal kandidaten teruggebracht van zestien naar zes. De zes geselecteerde kandidaten mochten hun presentatie houden tijdens het NMC. Vervolgens heeft de jury alle presentaties op een aantal aspecten beoordeeld, waaronder helderheid en wiskundige inhoud. Uiteindelijk heeft de jury gekozen voor de presentatie van Roberta Iseppi van de Radboud Universiteit. Haar onderzoek bestaat uit het vanuit een wiskundig standpunt bestuderen van de kwantisatie van ijktheorieën door middel van een padintegraal benadering die gebruik maakt van zogenaamde ‘ghost fields’. Deze benadering heeft tot de ontdekking geleid dat ‘ghost fields’, die vanuit een fysisch perspectief niet-bestaande deeltjes zijn, in staat zijn om geometrische eigenschappen van het model te kunnen detecteren.

Jacob van der Woude

Lintje voor Jan van de Craats

Op 25 april is prof.dr. Jan van de Craats benoemd tot Ridder in de orde van Oranje-Nassau. Van de Craats is behalve professor aan de Universiteit van Amsterdam heel erg actief in het debat omtrent het wiskundeonderwijs, auteur van diverse boeken voor verschillende doelgroepen en groot liefhebber van het mixen van wiskunde en kunst. Veel scholieren hebben nog altijd profijt van zijn bijdragen aan de rekenmethode *Reken Zeker* en de veranderingen aan diverse andere rekenmethoden. Op de website van Beter Onderwijs Nederland is de editie van de *Staatscourant* te vinden waarin de vermelding van Jan van de Craats staat.

Beter Onderwijs Nederland



Nieuws NWO Zwaartekrachtprogramma

Onderzoek naar netwerken

Het was groot nieuws voor wiskundig Nederland: in december 2013 werd bekend dat het voorstel NETWORKS een grote en bijzonder prestigieuze subsidie in de wacht heeft gesleept. Over een periode van tien jaar wordt 23 miljoen euro geïnvesteerd in onderzoek naar netwerken, die zowel vanuit stochastisch als uit algoritmisch perspectief bestudeerd zullen worden. De deelnemende partijen, te weten de Universiteit van Amsterdam (als penvoerder), de Technische Universiteit Eindhoven, de Universiteit Leiden en het Centrum Wiskunde & Informatica steken gezamenlijk ook nog eens 5 miljoen euro in het programma.

NETWORKS werd geselecteerd als een van de zes voorstellen binnen het Zwaartekrachtprogramma. De jury was unaniem in haar oordeel: een “uitzonderlijk sterk team” met een voorstel dat zich richt op “bijzonder fundamentele, relevante en actuele problemen”. De te onderzoeken thematiek is in belangrijke mate geïnspireerd door de grootschalige hedendaagse netwerken, zoals verkeers-, communicatie- en energienetwerken. Door

een wiskundige bril gezien, zijn dit complexe, dynamische en vaak gedistribueerd opererende structuren. De uitdaging ligt erin algoritmiek te ontwikkelen die zulke netwerken nagenoeg optimaal bestuurt, maar die tegelijkertijd robuust is ten aanzien van lokale stochastische verstoringen.

De stochastiek en algoritmiek zijn wetenschappelijke richtingen die op het grensvlak van de wiskunde, de besliskunde (of ‘ope-



rations research’) en theoretische informatica liggen. Een baanbrekend aspect van NETWORKS is dat het deze disciplines nadrukkelijk bij elkaar wil brengen: optimale besturing van netwerken vereist slimme besturingsregels die bovendien met onzekerheid kunnen omgaan. In flankerende projecten waarin de industrie actief participeert, zullen de bevindingen hun weg vinden in de praktijk.

De toegekende gelden gaan met name geïnvesteerd worden in het aanstellen van personeel. Naast ongeveer 40 promovendi en 20 postdocs, zal de wetenschappelijke staf van de betrokken instituten worden uitgebreid met een zevental tenure-trackers: stafleden die bij gebleken geschiktheid een vaste aanstelling krijgen. Daarmee zal NETWORKS zorgen voor een belangrijke impuls voor de wiskundeteams aan de Nederlandse universiteiten. Daarnaast zal geld besteed worden aan bezoeken van internationale top-onderzoekers, workshops, conferenties en outreach.

Meer informatie is te vinden op de website www.thenetworkcenter.nl, of per e-mail naar m.r.h.mandjes@uva.nl.



Klaas Landsman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Maatschappij

Wetenschap en welvaart: een paradoxaal krachtenveld

Om goed wetenschappelijk onderzoek te kunnen doen, is geld nodig. Dat is altijd zo geweest, maar de manier waarop financiering voor onderzoek geregeld wordt, is in de loop der tijd behoorlijk veranderd. Klaas Landsman, hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit Nijmegen, beschrijft het zijns inziens contraproductieve effect van het Nederlandse en Europese subsidiesysteem voor wetenschappelijk onderzoek. Dit artikel is gebaseerd op zijn *Ethos of Science*-lezing aan de RU op 8 mei 2013 en op zijn voordracht op de jubileumbijeenkomst van de Vakbond voor de Wetenschap (VAWO) op 15 november 2013, en verscheen eerder in *VAWO Visie* (januari 2014).

Louis XIV had in Versailles zo'n 5000 persoonlijke bedienden nodig om hem een mate van gezondheid en comfort te bieden die nu minstens een miljard mensen genieten. Wat heeft deze vooruitgang veroorzaakt? Wat zouden we uit onze samenleving weg moeten nemen om acuut eeuwen terug te vallen? Zelfs de meeste politici begrijpen dat dit de wetenschap is (in haar volle breedte, inclusief bijvoorbeeld filosofie en andere gebieden die niet zozeer onze gezondheid en technologische infrastructuur als ons denken hebben veranderd).

Momenteel ligt de uitdaging tenminste in het Westen weliswaar niet zozeer meer in een nóg verdere vergroting van onze welvaart maar eerder in het handhaven daarvan, inclusief het voorkomen van de ondergang van mens en planeet, maar ook daarbij wordt op nieuw veel, zo niet alles van de wetenschap verwacht.

Hoe bevorder je dus de bijdrage van wetenschap aan welvaart? Dat kan door:

1. de kwaliteit van wetenschap per se te bevorderen;
2. de toepassing van wetenschap op welvaart te bevorderen.

In dit artikel wil ik betogen dat beide doelen momenteel door beleidsmakers op een bezeten doch paradoxale wijze worden nagestreefd, waardoor zij ook niet worden bereikt.

Fenomenologie van kwaliteitsbevordering

De rabiate pogingen van de Nederlandse over-

heid (en navenant de Europese Commissie) om de kwaliteit van de wetenschap *per se* te verbeteren heeft een landschap gecreëerd dat zich sinds eind jaren tachtig onmiskenbaar begon af te tekenen. Laten we eens kijken!

De Top

In een interview in *de Volkskrant* van 12 november 2013 wist staatssecretaris Sander Dekker van OCW onder meer het volgende te melden: "Alles draait om de top, daar kun je geen concessies in doen. De concurrentie is moordend. Maar als je slaagt, is het succes ook internationaal. Nederlanders zijn gewend dat we kiezen voor de top. Het begint met het indienen van nog meer voorstellen."

Waar de meeste actieve wetenschapsbeoefenaren deze laatste zin met een diepe zucht zouden uitspreken (of als onderdeel van geestige causerie bij de kerstlunch van de vakgroep), bedoelde onze staatssecretaris hem met een onbevungen tjakka-enthousiasme (typisch ook voor onze huidige minister-president) juist als aanmoediging!

Toen God nog niet uit Jorwerd was verdwenen lazen politici tenminste de bijbel nog: "Want wie heeft zal nog meer krijgen, en wel in overvloed, maar wie niets heeft, hem zal zelfs wat hij heeft nog worden ontnomen." (Mattheus 25:29)

Inderdaad: afgezien van de ietwat paradoxale formulering (die men in het Nieuwe Testament wel vaker aantreft) voorspelt de evangelist precies ons subsidiesysteem. Aan

het begin van bovenstaand citaat zie ik Dagoberten Duck als neurowetenschapper Peter Hagoort (RU), die subsidies ontving als NWO-Groot (9,5 miljoen), NWO-BIG (25 miljoen), Spinoza (2,5 miljoen), en Zwaartekracht (27,6 miljoen), of de fysicus Leo Kouwenhoven (TUD), die scoorde bij FOM (10 miljoen), ERC (15 miljoen), Spinoza (2,5 miljoen), Zwaartekracht (35,9 miljoen), en recent de topsectoren (4 miljoen, op Matthaeaanse wijze geflankeerd door 5 miljoen van de TUD).

Om misverstanden te voorkomen: Hagoort is een bevriende collega met wie ik ooit nog in een discussieclubje over de Vrije Wil zat, en ook het werk van Kouwenhoven bewonder ik en volg ik op de voet. Aan het andere eind zie ik echter vele collega's (ik laat ze hier anoniem) die minstens even getalenteerd en bevlogen zijn, maar alsmaar achter het net vissen, of aan het "indienen van nog meer voorstellen" niet eens toekomen omdat ze 24 uur per week college geven in een van de vele (bèta noch medische) gebieden waar nauwelijks subsidies voor bestaan, of zelfs dat niet kunnen doen omdat hun wetenschappelijke loopbaan na vele postdoc-jaren een vroegtijdige dood is gestorven.

Newton, Darwin en Einstein daargelaten (die trouwens kansloos zouden zijn in ons huidige subsidiesysteem, zoals al vaak is opgemerkt) is het in deze discussie een misverstand dat de grootverdieners zo veel meer geld krijgen omdat ze zo veel beter zouden zijn, zodat ons systeem nu eenmaal noodzakelijk zou zijn om de kwaliteiten van de allerbesten tot ontplooiing te brengen. Mijn voormalige pianoleraar speelt nu in bejaardenhuizen en met studentenorkesten, maar op het conservatorium gold hij als technisch even goed als zijn jaargenoot Ronald Brautigam, die later de wereldpodia zou bespeelen. Minieme verschillen in aanpak, charisma,

trendgevoeligheid, handigheid, stijl, en vaak ook domweg *geluk* kunnen leiden tot enorme discrepanties in succes.

Een sociologe die goed onder woorden brengt hoe het leven van de academische *have-nots* eruitziet is Rosalind Gill (die later overigens wel degelijk hoogleraar is geworden): “I’m really fed up. I heard yesterday that my grant application was turned down. And one of the referee’s comments was vile — it said something like ‘my first year undergraduates have a better understanding of the field than this applicant does — why are they wasting all of our time’. When I read it it was like a slap in the face, I almost burst out crying in the postroom, but I had a lecture right afterwards so I somehow managed to pull myself together and go and do that. But last night, I just didn’t sleep, I just kept on going over and over with all these negative comments ringing round my head. And you know the worst thing is, they are right: I am useless. I haven’t been able to tell anyone at work about it. I just feel so humiliated. (...) I coped with it once, but how can I deal with this again? After two knock-backs I just don’t know if I can carry on. They’ve just made me feel like I’m nothing.”

Ik kan me aan de andere kant eigenlijk niet anders voorstellen dan dat ook Hagoort en Kouwenhoven en anderen al dat geld intussen zat zijn. De beroemde wetenschapssocioloog Robert Merton (1968), die ook de naam *Matthew Effect* invoerde voor de opeenstapeling van succes en subsidies in de handen van slechts een kleine groep, schreef echter al: “What appears from below to be the summit becomes only another way station. The scientist’s peers and other associates regard each of his scientific achievements as only a prelude to new and greater achievements. Such social pressures do not often permit those who have climbed the rugged mountain of scientific achievement to remain content. It is not necessarily the fact that their own Faustian aspirations are ever escalating that keeps eminent scientists at work. More and more is expected of them, and this creates its own measure of motivation and stress. Less often than expected is there repose at the top.”

Een dieptepunt vormen in dit opzicht de relatief nieuwe Zwaartekrachtsubsidies. Decanen en rectoren, die dergelijke voorstellen voorselecteren (en officieel zelfs indienen), bleken totaal niet geïnteresseerd in het idee achter een bepaald voorstel, de wetenschappelijke kansen die de aanvraag zou bieden, of het uitzonderlijke talent van sommige nog jonge deelnemers: er werd weinig anders gedaan dan het aantal Spinoza- en

ERC-winnaars in de coalities tellen. Men vond dat zelf ook enigszins beschamend, maar “zo werd het spel hogerop nu eenmaal gespeeld”. *It’s all about bucks, kid, the rest is conversation!*

De Competitie

Nu promotieplaatsen in de eerste geldstroom nagenoeg zijn verdwenen en ook de meeste wetenschappelijke apparatuur te duur is geworden voor universiteiten, zijn onderzoekssubsidies nog slechts via (inter)nationale competities te verwerven. Recent tekenen zich binnen dit competitieve systeem dan nog enige opmerkelijke trends af:

1. *De slaagkans bij vrijwel alle competities is laag* (1–15 procent). Dit betekent voor zowel de indieners als de beoordelaars dat een groot deel van hun inspanningen voor niets blijkt te zijn geweest. Welk bedrijf zou tolereren dat 85–99 procent van het verrichte werk niet tot het eindproduct bijdraagt en de prullenbak of de papierversnipperaars in kan?
2. *Subsidies per project hebben de neiging alsmaar groter te worden*. De basiseenheden was ooit 200.000 euro bij een aanvraag voor één promovendus of postdoc uit de NWO Vrije Competitie (inmiddels ‘langdurig gesloten voor aanvragen’, zoals ook het Museum voor de Chinese Volksrevolutie in Beijing in 1990, toen ik daar toevallig was, ‘langdurig gesloten wegens verbouwing’ bleek te zijn). Dit ideale kwantum om een goed idee te realiseren is inmiddels vervangen door subsidies met namen als TOP (1 miljoen), IDEAS (2 tot 3 miljoen), voor mijn eigen vak de Wiskundeclusters (1 miljoen per jaar), et cetera. Al deze subsidies zijn bedoeld voor coalities. In Nederland ligt het maximum momenteel bij de al eerder genoemde Zwaartekrachtsubsidies van rond de 30 miljoen, waar grootscheepse, nationale coalitievorming voor nodig is, zoals gezegd opgezet rond een paar grootverdieners.
3. *Op Europees niveau is tegenwoordig the sky the limit*: de ERC-Synergy grant van 15 miljoen (waarvoor vreemd genoeg dan weer twee of drie onderzoekers genoeg zijn, uiteraard wel met plannen die ‘game-changing’ of tenminste ‘ground-breaking’ moeten zijn) is voor mietjes vergeleken met de *Flagships* van de EU, ter waarde van maar liefst een miljard euro (1000 miljoen). Daarvan zijn er tot nu toe twee toegekend (aan onderzoek naar grafen en naar computationele neuroscience), waarbij de winnende coalities bestaan uit tientallen

universiteiten, onderzoeksinstituten, bedrijven en ... pr-teams.

Om dit in perspectief te plaatsen: er zijn gelukkig nog wel degelijk individuele subsidies. NWO organiseert de *Vernieuwingsimpuls*, met de drie trappen *Veni*, *Vidi* en *Vici*, bedoeld voor aanvragers die maximaal respectievelijk 3, 8, en 15 jaar na hun promotie zitten (en dan heb je voor kersvers gepromoveerden nog de *Rubicon*-beurs om naar het buitenland te gaan). Zoals de naamgeving al suggereert — ik kan me overigens niet voorstellen dat onze oosterburen subsidies zouden noemen naar zegevierende uitspraken van de man die twee millennia na Julius Caesar met vergelijkbare minachting voor mensenlevens Europa onder zijn leiding wilde verenigen — zijn ook deze constructies allerminst bedoeld voor bescheiden onderzoekers met een klein maar fijn idee; integendeel, er wordt gezocht naar jonge overaars! Essentieel voor succes in de Vernieuwingsimpuls is bovendien dat de kandidaat niet alleen uitsluitend de hoogste (A+) beoordelingen krijgt van vakinhoudelijk deskundige referees, maar zich tevens in levende lijve goed kan verkopen aan een interdisciplinair beoordelingspanel. Handig voor astronomen met schitterende plaatjes en honderd *papers*, minder geschikt voor kamergeleerden met een ongepubliceerd proefschrift.

De ERC stelt daar de wat behoedzamer klinkende *Starting Grant*, *Consolidator Grant*, en *Advanced Grant* tegenover, opnieuw bedoeld voor ‘excellente’ onderzoekers die in verschillende carrièrefasen aan *Big Questions* werken (maar zich deze keer niet ook nog eens waar hoeven te maken in een interview, hetgeen een andere selectie geeft). De *Advanced Grant* is qua prestige zelfs vergelijkbaar met de *Spinozapremie* van NWO; trouw aan Mattheus 25:29 wordt aan de meeste winnaars daarvan (tevens leden van de KNAW) later dan weer het *akademie-hooglerarschap* van diezelfde KNAW toebedeeld. Het beeld dat hier ontstaat is dat wij onderzoekers allemaal in competitie met elkaar worden geplaatst, waarbij insiders weten dat zelfs de in toenemende mate afgedwongen coalitievorming niet altijd van harte gaat — ook daar is de vraag wie straks de grootste greep in de pot mogen doen (spontane coalitievorming, waarvan het doel niet ligt in het samen binnenhaken van een subsidie maar in het samen willen begrijpen van iets, is een heel ander verhaal). Het ironische is dat we deze competitie ook nog eens zelf mogen uitvoeren: nadat we de dag hebben doorgebracht met het schrijven van een aanvraag, mogen we de

avond besteden aan de beoordeling van aanvragen van anderen, en de ochtend daarop aan een *mock-interview* voor een collega die zo gelukkig is geweest door de voorselectie te zijn gekomen. Je hoeft geen marxist te zijn om je daaraan te storen.

De Audit

Een overlijdensadvertentie voor Veronica-pionier Rob Out vermeldde dat hij het huidige Nederlandse medialandschap mede vorm had gegeven. Tenminste één persoon heeft al die troep dus expliciet gewild, dacht ik toen ik dat tien jaar geleden las. Ter afsluiting van deze fenomenologie van de kwaliteitsbevordering komen we nu bij een landschap waarvan ik me sterk afvraag wie het deze keer eigenlijk zo heeft gewild: dat van de *audit*.

De traditionele kwaliteitscontrole van de wetenschap bestond eeuwenlang uit *peer review* van publicaties. Dat systeem, weliswaar begonnen met de Inquisitie maar via de *Philosophical Transactions of the Royal Society* in de zeventiende eeuw geëvolueerd tot het huidige systeem, bestaat nog steeds, en al glipt er wel eens iets door de mazen van het net, het functioneert grotendeels naar wens. Daar is sinds de jaren tachtig echter een controlesysteem van jewelste bijgekomen, grotendeels overgewaaid uit het Verenigd Koninkrijk onder Thatcher. In Nederland bestaat dit systeem inmiddels uit:

1. *Onderzoeksvisitaties*, die in een zesjarige cyclus plaatsvinden, en omdat we nog niet genoeg te doen hadden meestal nog worden aangevuld met een *midterm-review*. Het circus is welbekend. Het begint met het schrijven van een *Zelfstudie* (tegenwoordig geheten *Kritische Reflectie*), een anomalie binnen het neoliberale denken die eerder doet denken aan de met de loop van een geweer afgedwongen zelfkritieken van de Grote Proletarische Culturele Revolutie van Voorzitter Mao. Hoe dan ook is de gene die de eer heeft deze te mogen schrijven daar ruim een half jaar mee zoet (mijn score staat inmiddels op drie). Dan de visitatie zelf, en de afwikkeling. Geheel in overeenstemming met mijn bovenstaande paragraaf *De Top* is het inmiddels al lang niet meer goed genoeg om gewoon goed (= 3) te zijn: het excellentie-fetisjisme is inmiddels zo ver doorgeslagen dat een groep die lager scoort dan het maximum van 5 ofwel in een sterfhuiskonstructie wordt geplaatst, ofwel direct van decaan of CvB het genadeschot krijgt uit de loop van het al genoemde geweer (sommige visitatiecommissies lijken daarom te hebben besloten



om iedereen dan maar een 5 te geven). Grappig genoeg wordt dit visitatiesysteem zelf ook weer gevisitied door middel van meta-evaluaties, die helaas geen van alle het advies hebben gegeven het hele systeem maar af te schaffen.

2. *Strategische plannen*. In dit geval moeten het onderzoeksinstituut, de faculteit, en de universiteit, er apart aan geloven (nu in een vijfjarige cyclus): maanden worden besteed aan het schrijven van plannen waarin het in feite maar om één vraag gaat: *hoe denken we met steeds minder geld en steeds minder onderzoekstijd steeds relevanter, beter, excellenter, baanbrekender (...) onderzoek te gaan doen?*

Ook de *sectorplannen*, die soms door de verschillende disciplines op nationaal niveau worden geproduceerd, hebben geen ander doel dan het beantwoorden van deze vraag.

Ik vraag me af wie al deze plannen eigenlijk leest en stel bij dezen voor om ze, passend bij het glossy karakter van de meeste, in de wachtkamer van de psychiater te leggen.

3. *Jaarverslagen*. Nee, dit was nog niet alles! Ieder jaar produceren opnieuw apart het onderzoeksinstituut, de faculteit, en de universiteit, ook nog eens een jaarverslag. En nu het woord 'jaar' dan toch valt, mogen de jaargesprekken, uiteraard gevolgd door zorgvuldige en wederzijds ondertekende verslaglegging, zeker niet ontbreken.

4. *University rankings*. Ook deze (*Shanghai*, *Times Higher Education*,...) moeten tot het auditsysteem worden gerekend. Ze worden deze keer niet uitgevoerd door de slachtoffers zelf, maar universiteiten hebben tegenwoordig wel vaak speciale medewerkers (of zelfs hele afdelingen) in dienst met het doel door puur cosmetische maatregelen hoger in de rankings te komen. Ook *Google* wordt door sommige Nederlandse universiteiten betaald om hoger in hun *page rankings* te komen.

Dit artikel gaat primair over onderzoek. Maar ook het universitaire onderwijs is onderworpen aan een verstikkend auditsysteem, opnieuw op basis van een zesjarige cyclus van visitaties en zelfstudies. Het spreekt vanzelf dat de onderwijsaccreditatie wordt aangevuld met een jaarlijks uitdijende administratieve rompslomp die alleen beroepsmanagers zo gewild kunnen hebben: een *Onderwijsinstituut* (met, jawel, een jaarverslag), *Examencommissie* (idem), en *Opleidingscommissie* (idem), en de nieuwste ziekte geheten *Cursusdossiers* (inmiddels bestaande uit maar liefst twaalf verplichte onderdelen, inclusief een zogenaamde 'toetsmatrijs'). *Zijn we nu allemaal gek geworden?*

Paradoxen van kwaliteitsbevordering

Wat heeft dit op *Top*, *Competitie* en *Audits* gebaseerde systeem van kwaliteitsbevordering ons nu eigenlijk gebracht? Met de laatste zijn we snel klaar. Het oorspronkelijk doel van een audit was de detectie van fraude;

pas later is het (tenminste in het bedrijfsleven) tot een systeem van kwaliteitscontrole geworden. Maar in de wetenschap wordt het kind met het badwater weggegooid. Het is een vuistregel uit de *accountancy* dat de (menselijke en/of financiële) kosten van een audit niet meer mogen bedragen dan 1 procent van het proces dat op die manier onderzocht wordt, en al helemaal niet meer dan hetgeen eventueel wordt gewonnen dankzij de audit. Iedereen die op een universiteit met dit boven in zijn volle breedte geschetste systeem te maken heeft gehad, weet echter donders goed dat deze 1 procent minstens vertienvoudig mag worden, en dat bovendien ten opzichte van het oude *peer review* systeem helemaal *niets* is gewonnen. Het huidige auditsysteem voor de wetenschap bevordert deze dus niet, maar frustriert haar beoefenaren juist.

Gezien het oorspronkelijke doel van het auditsysteem is het daarbij ironisch dat Diederik Stapel niet dankzij dit systeem werd ontmaskerd; hij bekleedde tot kort voor zijn val zelfs de functie van decaan, een functionaris die het vermaledijde systeem mede uitvoert. Stapels oplichterij werd ontdekt door de kleine jongens en meisjes op de kleine *grants* (toen die nog bestonden): zijn dappere promovendi. Pas daarna durfden de grote jongens die het systeem in de lucht houden ook wel een steen naar hem te gooien.

Maar ook het voortdurende streven naar de top door middel van eindeloze competities is contraproductief. Het eerste punt is dat het in de lucht houden van al die subsidierondes net zo tijdrovend en verstikkend is als de audits, en daarmee de wetenschappers van hun werk houdt en demotiveert. Dit werkt uiteraard niet bepaald kwaliteitsbevorderend.

Nog belangrijker is echter dat de typische *The Winner Takes It All*-uitkomsten, versterkt door de steeds grotere subsidies, een gezonde competitie tussen wetenschappers, in de vorm van een collegiaal gevecht om de beste ideeën, juist *ondermijnt*. Als een bepaalde persoon of coalitie binnen een gegeven vakgebied vrijwel al het geld krijgt, is er namelijk geen *level playing field* meer. Dan wordt er in Nederland nog maar op slechts één manier naar een bepaalde discipline gekeken, zoals in de Sovjet-Unie destijds naar biologie. In het bedrijfsleven (waar de hele competitie-ideologie nota bene vandaan komt!) begrijpen de meer verlichte ondernemers en hun lobbyisten bij de overheid dat donders goed, zodat kartelvorming en andere vormen van concurrentievervalsing worden tegengegaan. Juist dan wordt de consument in staat gesteld het beste product voor de laagste prijs

te kopen. Ik ben geen geitenwollensokkentyper dat met uitzicht op zijn moestuintje zijn eigen brood bakt en ben allerminst tegen iedere vorm van competitie: ik ben tegen een vorm die het doel van de competitie ondermijnt. Kartelvorming in de wetenschap wordt nu *beloond*.

Ik sta niet alleen in deze mening. In een interview met de *Notices of the American Mathematical Society* (49/3, 2002) zei de wereldberoemde informaticus Donald Knuth in antwoord op de vraag "What are the five most important problems in computer science?": "I don't like this 'top ten business'. It's the bottom ten that I like. You've got to go for the little things, the stones that make up the wall. (...) Computer science is a tremendous collaboration of people from all over the world adding little bricks to a massive wall. The individual bricks are what make it work, and not the milestones. Next question?"

Fenomenologie van toepassingsbevordering

We gaan nu van de *kwaliteits*bevordering naar de toepassingsbevordering en zien opnieuw dat recent overheidsbeleid een onmiskenbaar landschap heeft gecreëerd.

Het heden

Het eerste kabinet-Rutte voerde in 2011 de *topsectoren* in, gebieden waarin Nederland al zou uitblinken en die door innige samenwerking tussen bedrijfsleven en wetenschap tot nog grotere bloei konden worden gebracht. De keuze viel op de sectoren *Tuinbouw, Agri&Food, Water, Life Sciences & Health, Chemie, High Tech, Energie, Logistiek, Creatieve Industrie* en *Hoofdkantoren*. De politieke oorsprong van deze topsectoren zou door een goed parlementair journalist of historicus nog eens moeten worden opgehelderd, maar mijn hoop dat ze zouden verdwijnen zodra we van Kennis-Kunde-Kassa-kampioen Maxime Verhagen waren verlost, werd helaas niet bewaarheid: ook met de PvdA aan haar zijde gaat de VVD er gewoon mee door. Eerder lijkt sprake van een combinatie van een oud advies van de WRR en een effectieve lobby van VNO-NCW om bedrijven hun R&D voortaan door de overheid te laten betalen. Hoe dan ook is het de bedoeling van de topsectoren om gezamenlijke onderzoeksprojecten van universitaire en industriële partijen te financieren, uiteraard in de hoop dat de B.V. Nederland daar beter van wordt.

Net als over ons medialandschap heb ik eigenlijk nog nooit een goed woord over de topsectoren gehoord. Ze staan onder leiding van uitgerangeerde *captains of industry* en

hoogleraren (in plaats van jonge maatschappelijk bewuste ondernemers en aanstormend wetenschappelijk talent met een visie op de toekomst en niet het verleden), en aanvragers moeten een afschrikwekkend bureaucratisch proces doorlopen om überhaupt een kans op subsidie te hebben. Academici die een poging waagden, geven te kennen dat bedrijven door hun afdeling marketing aanbevolen onderzoek dat ze toch al van plan waren nu met gratis bijstand van een universiteit willen (laten) uitvoeren. Er is nauwelijks belangstelling voor de lange termijn, laat staan voor fundamenteel onderzoek.

Wat me nog het meest heeft verbaasd is de makke houding van zowel NWO als KNAW toen de topsectoren werden ingevoerd, tenminste in de openbaarheid. En dat terwijl NWO gedwongen is maar liefst 50 procent van haar budget aan de topsectoren te besteden en dit geld *linea recta* afgaat van het budget voor fundamenteel onderzoek (bovendien moet bij iedere aanvraag voor het laatste vermeld worden wat de eventuele relevantie voor de topsectoren is). Voor bijvoorbeeld de geesteswetenschappen (maar ook de wiskunde) betekent dit ook letterlijk een korting van 50 procent, aangezien deze in geen enkele topsector vertegenwoordigd zijn en de budgettaire overheveling dus niet kunnen compenseren.

In feite is het nog erger dan dat. De huidige universitaire financieringsmodellen zijn voor een belangrijk deel gebaseerd op aantallen promoties per onderzoeksinstituut. Als deze aantallen afnemen vanwege teruglopen van de externe subsidies, wordt een instituut of discipline dus dubbel gepakt. En dan heeft men nog geluk, want een aantal Nederlandse universiteiten (zoals de VU en de UU, destijds niet toevallig geleid door respectievelijk een econoom en een voormalig politica) hebben het Hoofdlijnenakkoord van 2012 (zie www.vsnw.nl/hoofdlijnenakkoord.html) aangegrepen om hun onderzoek af te stemmen op de topsectoren en de nog te bespreken *Grand Challenges* van de EU, of om meer in het algemeen voor de wind te gaan zeilen door te kiezen voor toepassingsgericht onderzoek (de omstreken opheffing van de Utrechtse Sterrenkunde is een voorbeeld van dit beleid).

Ofschoon de Europese Commissie de Nederlandse regering indertijd schriftelijk heeft gewaarschuwd voor de langetermijngevolgen van de budgettaire verschuivingen bij NWO in verband met de topsectoren, is het wetenschapsbeleid van de EU niet minder top-down gericht. Het achtste kaderprogramma *Horizon 2020* draait zelfs voor 75 procent van het bud-



Humboldt-Universität

get om de *Grand Challenges*: dit zijn *Climate action, resource efficiency, and raw materials; Secure, clean and efficient energy; Food security, sustainable agriculture, Marine and maritime research and the bio-economy; Health, demographic change and wellbeing; Inclusive, innovative and secure societies; Smart, green and integrated transport*.

Hoewel deze thema's een stuk sympathieker klinken dan onze topsectoren en in plaats van het verdienen van geld ook werkelijk bedoeld lijken om tenminste Europa te redden van de ondergang, wordt ook hier slechts 25 procent van het budget overgelaten aan fundamenteel onderzoek. En van die resterende 25 procent wordt dan ook nog eens een miljard (de andere helft is *matching*) besteed aan de al genoemde *Flagships*, waarvan de selectie ongetwijfeld is bepaald door hun economisch potentieel: likkebaardend dromen onze Europese Commissarissen al van een oprolbare smartphone van grafeen die de Amerikaans-Chinese iPhone naar een paleontologisch museum verwijst, om daarmee vervolgens in te kunnen loggen op de Europese supercomputer die ons brein simuleert met het doel Japan te kunnen verslaan in de race om de beste robot die kan worden ingezet om Alzheimer- en andere psychogeriatrische patiënten te verplegen.

Het verleden

Op het eerste gezicht lijkt niets meer voor de hand te liggen dan het bovengeschetste beleid: gewenste toepassingen van de wetenschap worden in kaart gebracht en vervolgens wordt de laatste zo bijgestuurd dat de eerste-

ook daadwerkelijk bereikt worden. Toch werd hier vroeger heel anders over gedacht. Ik beperk me tot twee cruciale perioden.

In 1809 werd de *Universität zu Berlin* opgericht (inmiddels *Humboldt-Universität* geheeten). Dit was niet zomaar een universiteit: zij stond sindsdien model voor vrijwel alle serieuze Europese en Amerikaanse universiteiten (ofwel vanaf hun stichting in de negentiende eeuw of later, ofwel door radicale omvorming vanuit hun oorspronkelijke, veelal middeleeuwse wortels). De twee onderliggende principes van deze nieuwe Duitse universiteit werden met name geformuleerd door de pedagoog en politicus Wilhelm von Humboldt (niet te verwarren met zijn broer Alexander, een eveneens vermaard ontdekkingsreiziger en natuurvorser), de filosoof Johann Gottlieb Fichte en de theoloog Friedrich Schleiermacher.

Het eerste van hun uitgangspunten is de *Einheit von Forschung und Lehre*, volgens welke studenten ("mit der gegen das Festgelegte opponierenden Phantasie") en hoogleraren ("mit ihrem perfektionierten wissenschaftlichen Fachwissen") samen in een academische gemeenschap op zoek zijn naar de waarheid. Daarbij is de hoogleraar geen leraar meer, zoals in het voortgezet onderwijs, en de student geen leerling: de laatste doet onder de bezielende begeleiding van de eerste eigenlijk meteen al onderzoek.

En dit leidt direct tot het tweede principe: dat onderzoek verrichten student en hoogleraar in *Einsamkeit und Freiheit*. Deze begrippen vormen de keerzijden van dezelfde medaille: de vrijheid is die van zowel toepas-

singen als bemoeienis door de staat (in ruil waarvoor de universiteit dan wel loyaal was aan deze staat, een standpunt dat tot in het Derde Rijk hardnekkig werd volgehouden), en de eenzaamheid was die van de "innengeleiteter Mensch, der sich durch persönliche Werthaltungen prinzipieller Art leiten läßt".

Deze ideologie van de Humboldt-Universiteit staat op gespannen voet met werkelijk alle aspecten van het huidige onderzoeksbeleid zoals hierboven beschreven. Een hedendaags politicus zou kunnen vragen hoe Humboldt bijvoorbeeld het klimaatprobleem op zou lossen, of het wereldvoedselprobleem? Daar zou hij dan het volgende op antwoorden: "Dann giesst die Wissenschaft oft ihren wohlthätigen Segen auf das Leben aus, wenn sie dasselbe gewissermassen zu vergessen scheint (...) Ihr wahrer Wert [dat wil zeggen van de *Universität*] zeigt sich darin, den menschlichen Geist so zu bilden, dass er den schwer zu entdecken Punkt nicht verfehlt, auf welchem Gedanke und Wirklichkeit sich begegnen und freiwillig in einander übergehen."

Met andere woorden: die toepassingen komen spontaan, als het ware 'vrijwillig': de staat hoeft dat proces absoluut niet te forceren. Het begint met eenzaamheid en vrijheid, en een onzichtbare hand doet de rest. Men kan op dit punt echter tegenwerpen dat Humboldt c.s. het eigenlijk over de geesteswetenschappen hadden: zo iets als een bètafaculteit hadden ze toen in Berlijn nog niet. Maar dat gold wel voor de talloze universiteiten die later vooral buiten Duitsland op Humboldtse grondslag werden (om)gevormd, en zo aan de basis stonden van de wetenschappelijke en technologische vooruitgang in de negentiende en twintigste eeuw.

Wat Duitsland zelf betreft is de ironie van de geschiedenis dat de eenheid van onderzoek en onderwijs juist daar werd ondergraven door eerst de oprichting van de Kaiser-Wilhelm-Instituten (na de Tweede Wereldoorlog omgedoopt tot Max-Planck-Instituten) en later de Fraunhofer- en Helmholtz-Instituten, maar ook die gingen en gaan nog steeds uit van het principe van *Einsamkeit und Freiheit*. Dat geldt met name ook voor de primair op toepassingen gerichte Fraunhofer-Instituten! Er is een groot verschil tussen de visionaire jonge ingenieur die vanuit een diepe kennis van de Fourier-transformatie en een toevallige belangstelling voor digitale muziek de MP3-compressie bedenkt, en de permanent met ontslag bedreigde medewerker van de R&D-afdeling van een bedrijf waarvan de marketingchef hem de zoveelste cosmetische verbetering aan hun producten laat bedenken

om de verkoopcijfers en daarmee uiteindelijk de aandelenkoers op te voeren.

Bovendien ging het in de tweede periode die ik nu kort onder de loep wil nemen zeer expliciet om de bèta-wetenschappen (en de geneeskunde), met soortgelijke conclusies. Het rapport *Science, The Endless Frontier* van Vannevar Bush (geen familie van), in 1945 aangeboden aan president Roosevelt, wordt in de wereld van het wetenschapsbeleid een welhaast bijbelse status toegedicht.

Hoe groot zijn invloed nu werkelijk was is omstreken, maar vele opmerkingen van Bush zijn ook nu nog hartverwarmend: "...without scientific progress no amount of achievement in other directions can insure our health, prosperity, and security as a nation in the modern world. (...) If the colleges, universities, and research institutes are to meet the rapidly increasing demands of industry and Government for new scientific knowledge, their basic research should be strengthened by use of public funds. (...) Support of basic research in the universities and research institutes must leave the internal control of policy, personnel, and the method and scope of the research to the institutions themselves. This is of the utmost importance."

Bush schreef dit als iemand die (bestuurlijk) zeer nauw betrokken was bij het Manhattan Project, en alleen al daardoor maar al te goed beseftte dat de naderende overwinning van de Verenigde Staten nu niet bepaald het oorspronkelijke doel van de atoomfysica was geweest.

Van wetenschap naar welvaart

Meer in het algemeen suggereren Humboldt (zij het op een wat zweverige manier) en Bush (expliciteer, tevens gebruikmakend van zijn achtergrond als ingenieur) de volgende route van wetenschap naar welvaart: 'nieuwsgierigheidsgedreven' geleerden verrichten vanuit hun *Einsamkeit und Freiheit* fundamenteel onderzoek. 'Toepassingsgerichte' wetenschappers selecteren daaruit met een apart talent de resultaten waar iets mee gedaan kan worden dat het fundamentele ontstijgt, waarna ingenieurs er een product van maken. Dit wordt vaak het *lineaire model* of het *Science Push Model* genoemd.

Het lijkt geen twijfel dat dit proces bijzonder verspillend is. Ten eerste leidt de meeste fundamentele wetenschap tot niets. Van het kleine aandeel *interessant* zuiver onderzoek is dan weer slechts een fractie toepasbaar. En van die fractie van een fractie is ten slotte slechts een klein deel ook echt welvaartsbevorderend. Maar dit derde-orde-effect van

fundamenteel onderzoek is wel de oorsprong van vrijwel al onze welvaart! Daar komt bij dat de geschiedenis leert dat niet alleen bij de atoombom, maar bij vrijwel iedere echt maatschappelijk belangrijke technologie, het pad van het oorspronkelijke idee naar de uiteindelijke toepassing hoogst onvoorspelbaar bleek, grotendeels zelfs toevallig. Van dit mechanisme zijn talloze voorbeelden, van elektriciteit tot het World Wide Web (dat zoals bekend is ontstaan vanuit de zoektocht naar het Higgs-deeltje op CERN), maar laat ik me beperken tot twee ontwikkelingen die ik als bijzonder frappant beschouw.

De moderne computer is niet uitgevonden door zakenmannen als Bill Gates of Steve Jobs, maar door de wiskundigen Alan Turing en John von Neumann. De essentiële eigenschap van zelfs een iPhone is dat hij *universeel* is in de zin dat in principe ieder programma kan worden uitgevoerd. Dat blijkt mogelijk te zijn omdat er geen principieel verschil is tussen programma's en de data die ingelezen worden. Dit was een buitengewoon diep inzicht van Turing en von Neumann, die daar nooit op zouden zijn gekomen zonder hun eerstehands kennis van eerdere ontwikkelingen in de grondslagen van de wiskunde, waar bij David Hilbert en Kurt Gödel een hoofdrol speelden. Om een lang verhaal kort te maken: de computer is voortgekomen uit vragen rond waarheid en bewijsbaarheid in de wiskunde.

De toekomstige computer is nog niet uitgevonden, maar mochten er ooit werkende kwantumcomputers komen (met verstrekkende gevolgen voor onze maatschappij), dan is dat een gevolg van het Bohr-Einstein-debat van 1927-1949 over de grondslagen van de kwantummechanica. Dit was een van de grote intellectuele discussies uit de geschiedenis, waar niets minder op het spel stond dan de aard van de werkelijkheid en de vraag of zuiver toeval bestaat (maar ook niets meer dan dat, zoals de beste manier om kwantummechanica toe te passen op oorlogvoering of de gerelateerde vraag hoe Europa destijds haar technologische voorsprong op de Verenigde Staten en Japan zou kunnen handhaven). Ook Schrödingers Kat heeft nauw met deze discussie te maken. Vanuit dat wereldvreemde debat (Einstein werd er door Pauli en andere tijdgenoten zelfs om uitgelachen) is er een directe, maar in iedere stap weer bizarre en sensationele lijn naar zogenaamde EPR-correlaties, verstrengeling, Bell-ongelijkheden, en uiteindelijk dan kwantumcomputers.

Let wel: niet *alle* welvaartsbevorderende technologieën zijn op die manier tot stand gekomen; airconditioning is een tegenvoor-

beeld. Ook is terecht gewezen op de rol van iemand als Pasteur, die op fundamentele wijze naar vooropgezette toegepaste (en zelfs commerciële) vragen keek. Na (en heel soms dus tijdens) de prille fase van *Science Push* is vroeg of laat *altijd* sprake van *Application Pull*, ook bij de (kwantum)computer. De vraag is echter of die *Pull* door grote programma's kan worden afgedwongen, of dat er beter in een goed geoutilleerde en gemotiveerde werkvloer kan worden geïnvesteerd.

Paradoxen van toepassingsbevordering

Zowel de Nederlandse regering als de Europese Commissie hebben oog voor de bepalingen van de rol van wetenschap voor onze toekomst (en die van onze kinderen en flora en fauna). Dat is al heel wat. Gegeven dit inzicht is het deel van de begroting dat naar deze cruciale sector gaat vervolgens lachwekkend, maar als het geld goed besteed zou worden mogelijk toch nog afdoende. Het wordt echter niet goed besteed, omdat deze overheden net als de Zonnekoning de bepalende rol zelf in handen hebben genomen (maar dan in een hedendaagse marktvariant, waarin de wetenschap een soort *Monopoly* rond topsectoren en *Grand Challenges* is geworden). Een dergelijke top-downplanning van toepassingen brengt deze echter juist verder weg: grootschalige langetermijnplanning onderdrukt creativiteit, fascinatie, serendipiteit, en het speelse karakter van wetenschap in het algemeen. En laten dat nu net de basiscomponenten van *succesvolle* wetenschap zijn.

De diepste toepassingen van de wetenschap zijn vrijwel zonder uitzondering onverwacht, begonnen met het op ogenschijnlijk irrationele wijze najagen van een of andere droom of zelfs hallucinatie, die echter nog net in goede banen kon worden geleid door een adequate opleiding, een kritische omgeving van collega's en mentoren, en, het zij toegegeven, vaak ook realiteitszin bevorderende eeroezucht. Het financieren van een goede kweekvijver voor talent (inclusief senioronderzoekers die de tijd kunnen nemen voor onderwijs en begeleiding) is daarmee honderd keer belangrijker dan het alsmaar meer geld geven aan degenen die hun hals al vol olympische medailles hebben hangen en het leren zwemmen van kinderen aan zure badmeesters met een haak overlaten.

Maar meer dan dat is de fout van megaplanning en megasubsidies dat over het hoofd wordt gezien dat grote ontwikkelingen een accumulatie zijn van vele kleine. Dat geldt in de zakenwereld net zo goed als in de wetenschap: "Succes is niet een kwestie van één



Boekillustratoren Jan en Casper Luyken, Amsterdam Museum

Aanbidding van het gouden kalf, Prent uit "Mosaïze historie der Hebreeuwse kerke", 1700

grote stap, maar van heel veel kleine stapjes. Je moet niet denken: ik wil vijftig winkels neerzetten. Je moet eerst die ene winkel goed doen. Je moet die ene bh goed kunnen maken.” (Marlies Dekkers)

Epiloog: Der Mensch ist was er isst

Marlies Dekkers ging kortgeleden failliet, omdat ze zich niet aan haar eigen raad hield en te veel winkels in te dure locaties had neergezet. De wetenschap moet zo langzamerhand ook oppassen, al is haar dreigende bankroet eerder moreel dan financieel.

Bij de bovenstaande analyse kom je namelijk niet om de vraag heen hoe het huidige financieringssysteem voor wetenschap de inhoud en moraal van deze zelfde wetenschap beïnvloedt. In 1850 gaf Ludwig Feuerbach op Kants fundamentele vraag “Was ist der Mensch?” het (zeker voor een Duitser) niet ongeestige antwoord: “Der Mensch ist, was er isst.” Karl Marx, deze keer bloedserieus, draaide tien jaar later op soortgelijke wijze het toen gangbare Duitse Idealisme om met zijn opmerking dat niet het bewustzijn van de mens het materiële bestaan bepaalt,

maar juist omgekeerd; dit wordt in het Marxisme ook wel geformuleerd als het idee dat “de basis de bovenbouw bepaalt”.

Met het financieringssysteem als de materiële basis en de wetenschap zelf in de rol van het bewustzijn c.q. de bovenbouw is het gevaar dus niet denkbeeldig dat de vorm van de financiering en het daarbij behorende auditsysteem door de wetenschap geïnternaliseerd worden. En inderdaad, zoals vele anderen ook al hebben opgemerkt worden de *performance indicators* waar ons competitieve financieringssysteem om draait (zoals h-indices, aantallen en omvang van subsidies, enzovoort) niet alleen door beleidsmakers maar ook door veel wetenschappers zelf als criteria voor succes en reden voor een feestje gezien. Zo kregen (wetenschappelijke) medewerkers van de RU op 14 november 2011 een mysterieuze e-mail van ons College van Bestuur, met de inhoud: “Graag nodigen wij u uit voor een bijzondere gebeurtenis voor onze universiteit, die pas donderdag bekend gemaakt mag worden. Samen met u willen we deze mijlpaal vieren, donderdag 15/11 om 16.00 uur in het restaurant van het

Huygensgebouw. Wij stellen het op prijs als u op deze korte termijn ruimte in uw agenda vrij kunt maken. Wij laten u nog per e-mail weten wat de bijzondere gebeurtenis behelst.” Daar was ik wel benieuwd naar! Zou de paus op bezoek komen? Was het Higgs-deeltje eindelijk ontdekt? Hadden onze astronomen een nieuw zwart gat gezien (sic)? Was een zeer bijzonder middeleeuws manuscript aan de universiteitsbibliotheek geschonken? Nee hoor: het ging om de toekenning van twee Zwaartekrachtsubsidies aan coalities waar groepen van de RU deel uitmaakten (eentje zelfs als PI, u raadt het al, Peter Hagoort!).

Ook hier had Marx in *Das Kapital* een mooie uitdrukking voor: het *Warenfetischismus* (*commodity fetishism*), waarin de sociale relaties tussen personen worden vervangen door (financiële) relaties tussen de handelswaar die zij produceren. Het beschouwen van wetenschap als handelswaar is al treurig genoeg, maar de huidige aanbidding van het Gouden Kalf in de vorm van onderzoekssubsidies en publicatieaantallen leidt uiteindelijk niet tot rijkdom maar tot faillissement. ←

Mario van Vliet

Deloitte, Rotterdam

Nieuws Rapport Deloitte over belang wiskunde voor de economie

Wiskunde nodig om arbeidsmarkt te redden

Op 10 april heeft Hans van Duijn, voorzitter van PWN, het rapport *Mathematical sciences and their value for the Dutch economy* officieel aangeboden aan de directeur-generaal van het Ministerie van Economische Zaken. Dit artikel is gebaseerd op de tekst die Mario van Vliet, lid van de Raad van Bestuur van Deloitte, uitsprak tijdens de presentatie van dit rapport in Nieuwspoort.

Wiskunde verdient jaarlijks 160 miljard euro voor de BV Nederland. Dat is de uitkomst van het onderzoek dat Deloitte Consulting in opdracht van Platform Wiskunde Nederland heeft uitgevoerd.

Voordat ik hier verder op in zal gaan, wil ik eerst stilstaan bij de vraag wat we precies bedoelen met wiskunde. In ons rapport hebben we het over mathematical sciences. Hiermee bedoelen wij alle activiteiten die samenhangen met wiskunde, statistiek, procesoptimalisatie en besiskunde, die worden ondernomen door wetenschap, school, mens en bedrijf. Velen van ons gebruiken wiskunde in de dagelijkse praktijk: docenten, accountants, piloten, adviseurs, artsen, en ga zo maar door, wiskunde staat aan de basis van vele disciplines, het is een basisvaardigheid. Deloitte heeft onderzoek gedaan naar de toegevoegde waarde van deze vorm van basisvaardigheid voor de samenleving. Wat blijkt, is dat onze economie hier in sterke mate van afhankelijk is.

Ten eerste constateren wij dat er in onze samenleving 900.000 fulltime banen direct afhankelijk zijn van wiskunde in de dagelijkse praktijk. Omdat in een economie nu eenmaal alles samenhangt, zijn er ook nog eens 1,4 miljoen fulltime banen indirect afhankelijk van wiskunde. Daardoor hangt een kwart van onze werkgelegenheid, in meer of mindere mate af van wiskunde. Bovendien blijkt dat, omdat deze beroepen ook nog eens meer dan een gemiddeld salaris verdienen, maar liefst 30 procent, oftewel 160 miljard euro, van ons bruto nationaal product wordt verdiend door deze beroepsgroepen. Cijfers die er niet om liegen.

Maar er is meer. U hebt mogelijk het persbericht gelezen 'Wiskunde nodig om de arbeidsmarkt te redden', een kop die u waarschijnlijk niet zou verwachten bij een rapport over de toegevoegde waarde van wiskunde aan de samenleving. En dat in een tijd dat onze economie langzaam uit het dal kruipt en bedrijven en consumenten voorzichtig aan weer positiever worden. Wij hopen met dit rapport urgentie te creëren, want hoewel het aangeeft dat onze economie in een belangrijke mate gestimuleerd wordt door wiskunde, zijn er ook acute zorgen.

De voornaamste zorg die van grote maatschappelijke relevantie is, is dat we ons aan de vooravond begeven van een trend die onze arbeidsmarkt drastisch gaat veranderen. Technologie vervangt langzaam, maar gestaag, steeds meer menselijke activiteiten. Op zich niets nieuws, we zijn al sinds het begin van de industriële revolutie gewend dat, vooral, lage-lonen-arbeid wordt vervangen door automatisering. Maar nu is technologie op het punt gekomen dat het in staat is om complexe structuren en processen te begrijpen, te interpreteren, met een mate van betrouwbaarheid die het menselijke brein evenaart. We zien dit nu al op internet waar zoekmachines ongevraagd met passende aanvullingen komen in de vorm van nieuwe vragen. Hoewel deze toepassingen bijdragen aan het verhogen van onze arbeidsproductiviteit, dragen ze ook bij aan het vervangen van mensen door technologie. Mensen die zijn opgeleid om exact hetzelfde te doen als technologie: het interpreteren en verwerken van inhoud. Het grootste deel van onze middenklasse werkt in een baan met een dergelij-

ke strekking. Denk aan ondersteunende functies zoals administratie, helpdesk, boekhouden, maar ook functies in de primaire processen zoals verkoop, diagnosestelling door een psycholoog of arts; technologie neemt steeds meer taken over van de mens. Niet ineens, maar geleidelijk en gestaag. Er zijn voorspellingen dat, als gevolg van deze ontwikkelingen, in dertig jaar tijd een aanzienlijk deel van de middenklasse zonder baan komt te zitten omdat zij vandaag wordt opgeleid om inhoud te interpreteren en te verwerken. Maar deze mensen hebben over dertig jaar misschien geen werkmogelijkheden meer omdat zij zijn opgeleid voor iets dat technologie tegen die tijd heeft vervangen.

Waar heeft de arbeidsmarkt dan wel behoefte aan in dertig jaar tijd? Dat zijn die werkzaamheden die zeer moeilijk te vervangen zijn door technologie. Denk aan die beroepen waar hand-oogcoördinatie van belang is, zoals stukadoors en bakkers, en aan die beroepen die vragen om creativiteit en expressie, zoals kunstenaars en architectuur. Verder zullen er steeds meer mensen nodig zijn als achtervang voor technologie; om technologie te begrijpen, te vertalen naar de menselijke context, te onderhouden en te controleren. Daarvoor moet je wel begrijpen hoe de logica van technologie is opgebouwd. En welk vak is er nu meer bezig met logica dan wiskunde?

We leiden echter veel te weinig wiskundigen op. Hoewel het beter is dan vijf jaar geleden, lopen we achter op alle landen in Europa. Gaat Nederland de technologieboot straks missen? Gaan bedrijven zich in andere Europese landen vestigen omdat wij de taal van de toekomst niet spreken, niet Engels of Chinees, maar wiskundige logica achter technologie? Kampen wij straks met een overschot aan personen zonder wiskundige achtergrond op onze arbeidsmarkt? Het zijn grote zorgen, die hoewel ver weg, vandaag om actie vragen.



Rob van Oord

Waddinxveen

robvanoord@tiscali.nl

Evenement 20ste Nationale Wiskunde Dagen

De eerste keer

Op vrijdag 31 januari en zaterdag 1 februari hebben een kleine 700 wiskundeleraren en andere belangstellenden deelgenomen aan de Nederlandse Wiskunde Dagen. Dit jaarlijkse evenement vond dit jaar voor de twintigste keer plaats. Nieuwe ontwikkelingen en vergeten hoogtepunten wisselen elkaar af. Rob van Oord, afzwaaiend docent aan het Coenecoop College in Waddinxveen, doet verslag.

Eigenlijk zou ik 'de laatste keer' moeten schrijven, want ik ben per 1 februari 2014 met FPU gegaan. Wie weet was dit mijn laatste NWD. Maar bij een conferentie waar het onder andere over 'Wiskunde en seks' gaat hoort natuurlijk 'de eerste keer'. Toch denk ik bij seks aan andere dingen dan die in de gids staan. Op de NWD kwamen meer de statistische zaken bij seks aan de orde, zo werd in het vierde blok (Sex and the City) duidelijk dat je beter in Amsterdam kan wonen als single dan in Apeldoorn, hoewel het percentage singles in Amsterdam twee keer zo groot is als in Apeldoorn, maar je hebt veel meer contactmogelijkheden per tijdseenheid dan in Apeldoorn. Toch is de kans op een partner weer kleiner omdat er relatief veel single vrouwen in Amsterdam wonen. Professor Pieter Gautier bekijkt de wereld als econoom vanuit een andere hoek. Hij gebruikte een unieke Deense dataset met veel gegevens over inwoners om enkele stellingen over kansen op partnerschap en echtscheidingen toe te lichten.

Lucky Luke

Maar laat ik bij het begin starten: nadat Michiel Doorman even had stilgestaan bij het grote verlies in wiskundeland van onze vriend Leon van den Broek werd de twintigste NWD geopend door Hans van Duijn. Hij is de voorzitter van het Platform Wiskunde Nederland (PWN)¹. Veel van de aanwezigen hadden misschien nog niet gehoord van dit overkoepel-

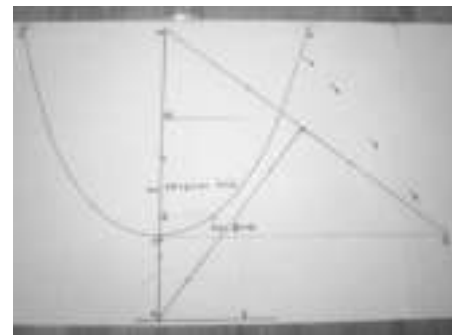
lend orgaan waarin alle wiskundemensen van Nederland samengebracht zijn. Ik heb van het begin af aan deel uitgemaakt van een van de vijf commissies van PWN, de Commissie Onderwijs. Helaas voelde het bij mij als een te log lichaam. Het duurde maar voordat er dingen van de grond kwamen. Misschien was ik ook niet de juiste persoon. Hans pleitte voor lerarenopleidingen op maat. Wiskunde moet worden opgestuwd in de vijf Grand Challenges van deze tijd.

De eerste plenaire lezing kwam van Don Zagier. Deze man spreekt sneller dan zijn schaduw, om die reden wordt hij ook wel de Lucky Luke van de wiskunde genoemd. Een zuivere getaltheoreticus die met vuur vertelde over de Indiase klerk Ramanujan die in een brief aan de beroemde Engelse wiskundige Hardy vertelt over zijn ontdekkingen van partities van n . Twaalf bladzijden formules die de wereld op zijn kop zetten. Ramanujan noemde deze nieuwe functies modulaire vormen. De eerste voorbeelden waren nog goed te volgen: $P(4) = 5$ want je kunt 4 op vijf manieren verdelen in (sommen van) gehele getallen, $4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1$. En $P(5) = 7$, makkelijk na te gaan. $P(200) = 3972999029388$, is al moeilijk om zelf te vinden. Daarna ging Don in sneltreinvaart door naar een formule van Euler, de θ -functies en de mock(=net niet)- θ -functies. Een prachtig pleidooi hoe de wiskunde met stappen en sprongen door beroemde

wiskundigen in de tijd vooruit gaat. Tijd voor de lunch en om wat bekenden op te zoeken, want de NWD hebben voor velen van ons ook de functie van een reünie. Er heerst een nieuw culinair klimaat in het congrescentrum, het smaakt niet alleen heerlijk, het ziet er ook gezellig uit. Zo was het voor mij *de eerste keer* dat ik satéstokjes at uit een glas en bouwsels maakte van kubusvormige blokjes kibbeling.

Kettinglijn

Omdat ik ooit in mijn studie als een van de eerste studenten probeerde af te studeren in de geschiedenis van de wiskunde bij professor Henk Bos, koos ik in mijn eerste blok voor de lezing² van Viktor Bläsjö, een Zweed, ook student aan het Mathematisch Instituut in Utrecht. Via eenvoudige wiskunde met gelijkvormige driehoeken werd de eerste wet van Newton bewezen. Newton deed dit door de baan van de maan in infinitesimale stukjes tijd te bekijken. De maan zou in één seconde 1,36 mm in de richting van de aarde worden getrokken, gegeven de bekende omlooptijd van 28 dagen



Figuur 1 Zelfgemaakte kettinglijn.

$(27,321661) = 2,36 \times 10^6$ seconden en de $2\pi R = 2,4156 \times 10^9$ meter omtrek van de (aangenomen) cirkelbaan ($R = 384.450.000$ m = gemiddelde afstand maan-aarde). Dus per seconde $2,41/2,36 \times 10^3 \approx 1022$ meter in de richting van de raaklijn. Uit de verhouding $x : 1022 = 1022 : (2R)$ geeft $x = 0,00136$ m. Zou de maan zestig maal dichterbij de aarde zitten dan zou hij per seconde 5,89 meter dichterbij de aarde getrokken worden. Ook met gelijkvormigheid kan de wet van Kepler over gelijke oppervlakten worden aangetoond. De kettinglijn (van Leibniz) is ook een mooi staaltje van eenvoudige wiskunde. De kettinglijn oftewel de 'linea Catenaria vel Funicularis' kun je in een bananendoos nabootsen. Het was Leibniz niet begonnen om een formule van de kettinglijn, de cosinushyperbolicus maar hoe je $e \log a (\ln a)$ kan vinden vanuit de kettinglijn. Leibniz noemde de kromme van $y = e^x$ dan ook de 'linea logarithmica'. Koop een kettinkje bij de HEMA (2 euro), prik de uiteinden even hoog op (een papier op) de bodem in een rechtopstaande bananendoos. Zie Figuur 1. Noem M het midden van de prikpunten A en B , teken een verticale as door M . Prik het laagste punt T vast. Strek de rechterhelft van de ketting uit in horizontale richting (rechts van T). Noem dit uiteinde S . Teken de middelloodlijn van MS . Het snijpunt van deze middelloodlijn met de verticale as is O (de oorsprong). De eenheid op de assen is nu bepaald op $TO = 1$. Als je nu op deze schaal $\frac{1}{2}(a + 1/a)$ op de verticale

as tekent, en vanaf dat punt (op de y -as) een horizontale lijn naar de kettinglijn trekt, dan geeft de projectie van dat punt op de x -as precies $x = \ln a$ op de x -as. Dit is te begrijpen als je bedenkt dat $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + 1/e^x)$. Zo is bij $y = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2})$ meteen te zien dat $e^x = 2$, dus $x = \ln 2$. Het afleiden van de formule van de kettinglijn vraagt om toepassen van de natuurkunde wetten van de zwaartekracht. De potentiële energie is minimaal in de punten op de kettinglijn.³

Origami

Na de theepauze begaf ik me naar de workshop van Luuk Hoevenaars. Op dit tijdstip waren er nog veel meer interessante workshops waar ik uit had willen kiezen, maar je kunt er maar een van de 13 bijwonen. Omdat ik zelf ook fan ben van origami en origami-architectuur⁴, liet ik me door de lessen die op het Junior College gegeven zijn voor de module 'constructies met passer en liniaal,...' inspireren. De eerste opdracht in de workshop ging over het 'vouwen' van een parabool. Die benadering van een parabool, door het vouwen van een groot aantal raaklijnen, heb ik laatst weer in mijn 6 vwo wiskunde B-groep gedaan. Er is al een mooie examenopgave over paraboolvouwen geweest.⁵ De tweede opdracht, de trisectie van een hoek, is niet mogelijk met passer en liniaal. Hiermee kunnen slechts problemen worden opgelost van tweedegraadsvergelijkingen. Omdat je bij origami tegelijk twee verschillende punten naar

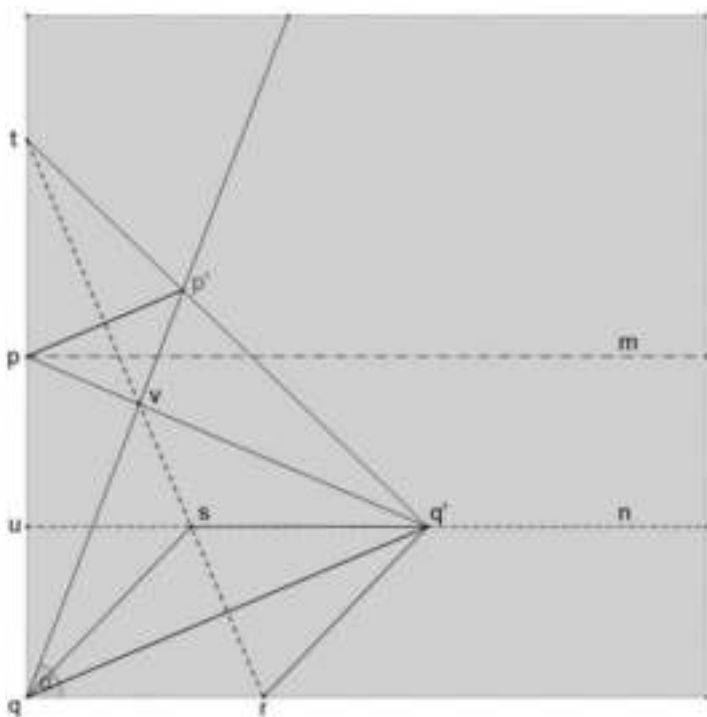
twee verschillende lijnen kunt vouwen, is er een fraaie manier om een gegeven hoek in drieën te delen. Zie Figuur 2.

3D-printer

Na de workshopronde maar eens wat rondkijken bij alle stands en de kunstobjecten van Rinus Roelofs. Zie Figuur 3. Ik weet nog hoe ik jaren geleden vol verbazing mijn eerste matrixprint uit een Epson zag rollen, maar nu was het *de eerste keer* dat ik een 3D-printer aan het werk zag. Werkelijk vernuftig. Laagje voor laagje zag ik een icosaeëder worden opgebouwd door twee heen en weer schuivende stangen met daarop een computergestuurd lijnapparaatje dat een plastic draad smeltend tot grote hoogten opstuwt. Swier, bedankt dat je ons de primeur gaf om hiervan te genieten.

Chocolade

Tijd voor een pilsje en daarna aan tafel. *De eerste keer* dat we met 700 personen aan tafel gingen in het Atrium. We konden aanschuiven aan bijzonder sfeervol gedekte tafels met kaarsen en flessen wijn. Tijdens het diner kregen we een optreden van Jan Beuving en Daan van Eijk.⁶ Op weergaloze wijze wisten ze allerlei wiskundige vondsten op een hilarische manier te vertonen. Natuurlijk was er Pythagoras met zijn driehoeksverhouding, maar ook een canon over sinus en cosinus, waarbij de heren simultaan de stand van beide grafieken zongen Jan de sinus en Daan de cosinus: op/top, top/neer, neer/top, top/op, enzovoort. Veel aandacht was er ook voor het rekenwonder Wim Klein die voor de intrede van de computer een aantal jaren werkzaam was voor berekeningen bij het CERN. Toen hij na de intrede van steeds snellere computers overbodig werd, legde Wim zich toe op shows waarin het publiek hem sommen opgaf die hij in no time uitrekende. Het tweede optreden kwam van Vincent van der Noort, een nerd die in een grote spraakwaterfall liet zien waarom getallen je beste vrienden zijn. Met sprankelende raadsels liet hij zien hoe verwarrend wiskunde kan zijn. De eerste ging over een bak met 50 rode en 50 zwarte sokken. In het donker moet je net zo veel sokken pakken tot dat je zeker weet dat je een juist paar hebt. Hoeveel sokken moet je pakken? Ogen dicht en denken. Probeer dit tijdens een familiebijeenkomst eens uit. Hoeveel zullen er denken dat het 51 is? Van het driedeurenprobleem bij een quiz werden verschillende varianten opgedist. Verwarrend, dat wel. Op elke tafel lag een plak chocolade met 24 stukjes (een reep van 3 bij 8). De vraag is hoeveel keer



Figuur 2 Trisectie van een hoek (α).



Figuur 3 Object Rinus Roelofs.

je minimaal moet breken om de reep in allemaal losse brokjes te delen. Wie wint krijgt de reep. Pure wiskunde en pure chocola. Op de NWD-website vind je nog meer raadsels en oplossingen.

Sfinx en piramides

Tijdens het avondprogramma was er weer de wiskundequiz die gewonnen werd door Henk Röling. Proficiat, Henk. Ik vond eerst ontspanning bij de vele spelletjes die weer in de hal waren uitgesteld. Met het oog op de spelletjes die ik met mijn kleinkind(eren) ga spelen, vond ik Khet, met sfinx en piramides, erg leuk. Strategisch spel met laserstralen. Een modern soort schaken, strategisch denken waarbij je via spiegeltjes de 'koning' van je tegenstander moet uitschakelen. Ik heb het al vast aangeschaft. Daarna nog naar de dansvloer. Lekker gedanst (geen chacha of rumba helaas) met Marjan en haar collega Frederique, die aanvankelijk was uitgeloot voor de NWD. Maar als je een boeiende workshop instuurt, kun je er toch heen, en nog gratis ook. Dus collega's die uitgeloot worden, zend een mooie workshop in. Wie weet kom je er dan toch nog in.

Hollen

Na een superkort nachtje vroeg op voor de *Funrun*. Ik kreeg halverwege een dipje, of het nu door de wind kwam of van de banaan, ik kwam zo'n beetje als laatste binnen. Kon na



Figuur 4 Gehaakt Lorenz-oppervlak.

een kort sprintje toch nog enkele dames voorblijven. Maar ik vind dat het aantal deelnemers wel steeds minder is. Kom op mensen, voor zo'n mooi T-shirt kun je ook zonder trainen best 6 km hollen volhouden. De kleur dit jaar was diep rood met het Lorenz-oppervlak achterop.

Binomen

In de eerste workshop zaterdagochtend, over binomen, liet Steven Wepster zien hoe de Klassieke Grieken worstelden met de irrationale getallen. Bij hen kwamen binomen voor als je bijvoorbeeld de zijde en de diagonaal van een vierkant achter elkaar legt. Zij noemden de twee lijnstukken incommensurabel, 'onmeetbaar', omdat er geen geheel veelvoud van de een even groot kan zijn als een geheel veelvoud van de ander. Zij kenden er geen getalswaarden aan toe. Simon Stevin probeerde de meetkundige classificatie van Euclides om te zetten in rekenkundige voorbeelden. Daarbij kwam hij met binomen, geheel getal plus (veelvoud van) een wortel, en apotomen, geheel getal min (veelvoud van) een wortel. Ook kon hij via een handige methode wortels uit een binoom vereenvoudigen. Schrijf $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ als $p + \sqrt{q}$. Dit is slechts mogelijk onder bepaalde voorwaarden. Voorbeeld:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{A + B} \quad \text{met } A > B.$$

Neem dan $C^2 = A^2 - B^2$, dus $C^2 = 4 - 3 = 1$. Dan is

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{1}{2}(A + C)} + \sqrt{\frac{1}{2}(A - C)} \\ &= \sqrt{1\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dit is makkelijk te zien door $\sqrt{\frac{1}{2}(A + C)} + \sqrt{\frac{1}{2}(A - C)}$ te kwadrateren:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C) \\ &+ 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}(A + C)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(A - C)\right)} \\ &= A + 2\sqrt{\frac{1}{4}(A^2 - C^2)} = A + B. \end{aligned}$$

In de hand-out op de website kun je lezen hoe dat verder gaat.

Huisvlijt

Na de laatste lezing die ik bijwoonde over Seks and the City door Professor Gautier

kwam de slotlezing door professor Hinke Osinga. Zij is de eerste vrouwelijke wiskundehoogleraar aan de Universiteit van Auckland (NZ). Deze sprankelende, van oorsprong Friese jonge vrouw, met een hoog Doutzengehalte, gaf een wervelende show weg over het ontstaan van de Lorenz-attractor en de chaostheorie. Voor mij blijft het vooralsnog een raadsel hoe ik zelf op mijn pc die mooie plaatjes tevoorschijn kan toveren. Wie weet vind ik ooit nog eens een site waarop ik alleen de waarden van σ , ρ en β kan kiezen en dat dan hupsakee het ene mooie plaatje na het andere verschijnt. De plaatjes zijn gebaseerd op de Lorenz-vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sigma(y - x), \\ y'(t) &= x(\rho - z), \\ z'(t) &= xy - \beta z. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen liggen ten grondslag aan chaotisch gedrag. Doorgaans neemt men $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ en varieert men ρ . Bij $\rho = 28$ vertoont het systeem chaotisch gedrag, maar voor andere waarden van ρ vertoont het geknoopte periodieke banen. Klapstuk was het door Hinke zelf gehaakte Lorenz-oppervlak. Zie Figuur 4. Vijfentachtig uren huisvlijt leverden dit fantastische resultaat. Kunstenaar Benjamin Storch heeft daarna volgens hetzelfde procedé als waarmee het oppervlak gehaakt is, er een van metaal gemaakt.

Tot slot

Moe maar voldaan besloten we de NWD met een heerlijke lunch. Ik ben blij dat ik twee nieuwe collega's heb kunnen meenemen naar deze onvergetelijke dagen. Hopelijk raken zij ook weer geïnspireerd om mooie dingen te doen en te laten zien in hun wiskundelessen. In elk geval heb ik ze weer veilig thuis gebracht. Dit is de eerste keer dat ik een verslag van de NWD schrijf voor zowel *Euclides* en het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Hopelijk is dat niet de laatste keer. 

Noten

- 1 Zie www.platformwiskunde.nl.
- 2 Zie voor alle handouts www.fi.uu.nl/nwd.
- 3 E. Hairer en G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, 2008.
- 4 Hand-out NWD 2013 Workshop Verpakkingen.
- 5 Eindexamen wiskunde B1,2, 2008, tijdvak 1, Een parabool vouwen, vragen 4, 5 en 6.
- 6 Zie www.janendaan.nl voor hun nieuwste show *Reken maar nergens op*.

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit Amsterdam
t.koetsier@vu.nl

Jan van Mill

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
j.vanmill@uva.nl

Biografie Irmgard Gawehn (1900–1977)

Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie

Irmgard Gawehn was een Duitse topologe die van 1928 tot 1930 assistent was van L.E.J. Brouwer aan de Universiteit van Amsterdam. Zij promoveerde aan de Universiteit van Heidelberg en de tekst van haar dissertatie werd in 1928 gepubliceerd in de *Mathematische Annalen*. In haar proefschrift wordt (onder meer) een fraaie topologische karakteriseringsstelling van het boloppervlak bewezen. In de tachtiger jaren van de vorige eeuw zaaide Hans Freudenthal (1905–1990) met betrekking tot Irmgard Gawehn ernstige twijfel. Volgens hem had zij haar dissertatie niet zelf geschreven. In dit artikel gaan Teun Koetsier en Jan van Mill zowel in op de topologische karakterisering van variëteiten als op de beweringen van Freudenthal. Ze komen tot de conclusie dat er onvoldoende gronden zijn om aan te nemen dat Gawehn heeft gefraudeerd.

Fraude in de wetenschappelijke wereld heeft de laatste jaren de belangstelling van zowel de pers als de universitaire wereld. Aan de carrière van Henk Buck van de Technische Universiteit Eindhoven, lid van de Koninklijke Academie van Wetenschappen (KNAW), die naar de verwachting van velen een Nobelprijs zou gaan winnen, kwam een voortijdig einde toen hij in samenwerking met Jaap Goudsmit van de Universiteit van Amsterdam in 1990 in *Science* een artikel publiceerde over de ontwikkeling en de werking van een nieuw medicijn tegen hiv, dat op omstreden onderzoek bleek te zijn gebaseerd. René Diekstra van de Universiteit Leiden legde zijn functie neer nadat een commissie onder voorzitterschap van de Groningse hoogleraar persoonlijkheidspsychologie, Willem Hofstee, conclu-

deerde dat zijn wetenschappelijke handelen ‘onzorgvuldig’ was geweest. Oud-hoogleraar Mart Bax van de Vrije Universiteit in Amsterdam heeft zich zo’n twintig jaar lang schuldig gemaakt aan ernstig wetenschappelijk wan-gedrag, valsheid in geschrifte en zelfplagiaat. Diederik Stapel van de Universiteit Tilburg heeft in publicaties gebruik gemaakt van vervalste gegevens. Soms wordt iemand ten onrechte van fraude beschuldigd. Dat zou het geval kunnen zijn bij VU-toeconoom Peter Nijkamp die wordt beschuldigd van ettelijke gevallen van zelfplagiaat. De VU heeft een onderzoekscommissie ingesteld.

Wetenschappelijke fraude is iets van alle tijden. Het varieert van kleine fraude, als het selectief weglaten van onwelgevallige resultaten of het niet citeren van een colle-

ga wiens werk je wel hebt gebruikt, tot aan omvangrijke fraudes, zoals het vervalsen van gegevens.¹ Het is bekend dat door het beleid van universitaire bestuurders die te veel waarde toekennen aan citatieanalyses en impactfactoren, de huidige generatie onderzoekers onder grote druk staat. Wetenschappelijke tijdschriften krijgen vaker dan voorheen stukken aangeboden die geheel of gedeeltelijk op plagiaat berusten. In dit artikel gaat het om een beschuldiging van fraude in de wiskunde. Daarbij speelt de topologe Irmgard Gawehn (1900–1977) de centrale rol. Zij promoveert aan de Universiteit van Heidelberg. In de dissertatie wordt (onder meer) een fraaie topologische karakteriseringsstelling van het boloppervlak bewezen en de tekst van de dissertatie wordt in 1928 gepubliceerd in de *Mathematische Annalen*[18]. Aan het begin van dat jaar wordt zij assistent bij L.E.J. Brouwer (1881–1966) aan de Universiteit van Amsterdam. Zij is een vrouwelijke topoloog die aan het begin staat van geweldige ontwikkelingen die uiteindelijk leiden tot topologische karakteriseringsstellingen van eindig-dimensionale variëteiten, resultaten waar topwiskundigen over de gehele wereld hun krachten aan hebben gewijd. In de tachtiger jaren van de vorige eeuw zaait Hans



Drie foto's van Irmgard Gawehn (1900–1977). De eerste foto van Irmgard Gawehn komt uit het Universitätsarchiv Heidelberg, de tweede uit het Brouwer-archief en de derde uit een privéarchief.

Freudenthal (1905–1990) met betrekking tot Irmgard Gawehn ernstige twijfel. Volgens hem heeft zij haar dissertatie niet zelf geschreven, maar is het werk van de hand van een mannelijke topoloog, die een minnaar van Gawehn zou zijn geweest. Zowel in de Nederlandse versie als in de wetenschappelijke Engelse versie van zijn mooie biografie van Brouwer bespreekt Dirk van Dalen de kwestie. Op basis van gesprekken met Freudenthal concludeert hij: “Gawehn heeft haar dissertatie inderdaad niet zelf geschreven” [10, p. 325] en [11, p. 568]. Reden genoeg voor ons om de zaken eens op een rij te zetten. De ingrediënten van het verhaal zijn: een prachtig topologisch resultaat, een zware beschuldiging aan het adres van een topologe en een mysterieuze maar briljante topologische ghostwriter. We zullen ingaan op de wiskundige kant van het verhaal en een doorkijkje geven naar spannende ontwikkelingen die mede zijn voortgekomen uit het centrale resultaat in de dissertatie van Gawehn. We gaan ook in op de fraudekwestie en we zullen tot een andere conclusie komen dan Freudenthal.

Topologische karakterisering van variëteiten

Onder een *topologische ruimte* wordt in dit artikel een deelruimte van een euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ verstaan.

Topologen zijn verzot op stellingen die de topologie van belangrijke structuren in eenvoudige termen vatten. Een belangrijke en bekende stelling in dit verband is die van Brouwer [5]: de *Cantor-verzameling*² is de unieke niet-lege compacte topologische ruimte C die geen geïsoleerde punten³ bezit en van (topologische) dimensie⁴ nul is. Bezie het product $X = C \times C$ in $\mathbb{R}^2$. Het is eenvoudig na te gaan

dat X voldoet aan de criteria van Brouwers stelling en dus zijn C en X topologisch dezelfde objecten. Het leuke van een goede karakteriseringsstelling is dat als die eenmaal is gevonden, het herkennen van topologisch equivalente structuren veelal een trivialiteit is geworden.

Het bewijs van Brouwers karakterisering van de Cantor-verzameling is eenvoudig. Stel dat er twee ruimten X en Y zijn die aan de voorwaarden van Brouwer voldoen. Je kunt dan gemakkelijk twee isomorfe eindig vertakkende bomen T_X en T_Y bestaande uit clopen⁵ partities van X respectievelijk Y construeren met de eigenschap dat de doorsnijding van elk van hun takken uit precies één element bestaat. Een punt van X correspondeert met een unieke tak in T_X die op zijn beurt correspondeert met een unieke tak in T_Y waardoor een uniek punt $f(x)$ uit Y wordt bepaald. De aldus gevonden functie $f : X \rightarrow Y$ is een homeomorfisme. Voor een precies bewijs, zie Van Mill [26, Theorem 1.5.5].

Een *variëteit* is een topologische ruimte die lokaal niet kan worden onderscheiden van een euclidische ruimte van een specifieke dimensie. Een lijn en een cirkel zijn eendimensionale variëteiten, een vlak en het oppervlak van een bal zijn tweedimensionale variëteiten. Elk punt van een n -dimensionale variëteit heeft een omgeving die homeomorf is met een open deelverzameling van de n -dimensionale euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$. Variëteiten staan centraal in onder meer de meetkunde en de theoretische natuurkunde. Je kunt er complexe structuren mee beschrijven, bijvoorbeeld door ze uit te rusten met additionele structuren zoals groepsstructuren, differentieerbare structuren en speciale metrieken. In de algemene relativiteitstheorie

spelen vierdimensionale variëteiten een belangrijke rol om grip te krijgen op ruimte en tijd.

Hoe zou je eenvoudige structuren zoals de reële rechte $\mathbb{R}$ en de cirkel

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

topologisch kunnen karakteriseren? Ward [43] bewees in 1936 dat $\mathbb{R}$ de unieke lokaal compacte samenhangende topologische ruimte X is met de eigenschap dat $X \setminus \{x\}$ voor elke x in X in precies twee componenten uiteen valt. Eerder, in 1920, had Moore [29] bewezen dat $\mathbb{S}^1$ de unieke compacte samenhangende topologische ruimte X is met de eigenschap dat $X \setminus \{x, y\}$ voor elk tweetal verschillende punten x en y in X onsamenvallend is. Deze resultaten lijken eenvoudig, maar gaan die van een tentamenopgave aan een eerstejaarsstudent verre te boven.

Een topologische kopie van $\mathbb{S}^1$ in een ruimte X wordt ook wel een *enkelvoudig gesloten kromme* in X genoemd.

Een lastiger noot om te kraken is het boloppervlak $\mathbb{S}^2$ in $\mathbb{R}^3$, dat wil zeggen,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De Stelling van Jordan [21] uit 1893 dat elke enkelvoudig gesloten kromme K in $\mathbb{R}^2$ het vlak verdeelt in precies twee componenten waarvan K de gemeenschappelijke rand is, bleek hier de sleutel tot succes. Dit resultaat draagt de naam van Jordan, maar het eerste correcte bewijs ervan werd gevonden door Veblen [41] in 1905. Een topologische karakterisering van $\mathbb{S}^2$ (van tweedimensionale variëteiten, respectievelijk) werd op verschillende plaatsen in de wereld ongeveer gelijktijdig

gevonden door Gawehn [18], Kuratowski [24], Wilder [44], Claytor [8] en Zippin [48]. Zie ook de artikelen van Van Kampen [22], Young [47] en Roberts [35]. Het laatste woord leek te komen van Bing [2]. Hij bewees dat $\mathbb{S}^2$ topologisch het unieke Peano-continuüm⁶ X is dat wordt gescheiden door elke enkelvoudig gesloten kromme in X , maar door geen enkel puntenpaar. Dit resultaat wordt beschouwd als een van Bings eerste baanbrekende resultaten. Bing was kennelijk niet bekend met het artikel van Gawehn [18] want hij verwijst niet naar haar (ook niet in zijn monumentale werk [4]). Kuratowski [25, p. 529] en Wilder [45] bleken gezien hun verwijzingen wel op de hoogte. Bings resultaat is wel sterker. Zijn enkelvoudig gesloten krommen K scheiden de ruimte in kwestie. Bij Gawehn wordt verondersteld dat een enkelvoudig gesloten kromme K waar zij belangstelling voor heeft de ruimte in precies twee componenten uiteen doet vallen, waarvan K de gemeenschappelijke rand is.

De bewijzen van deze resultaten en dus ook dat van Gawehn lijken op het boven geschetste bewijs van de topologische karakterisering van de Cantor-verzameling. Zij X een ruimte die aan de voorwaarden genoemd in een der karakteriseringsstellingen voldoet. Stel dat we willen bewijzen dat X homeomorf is met de variëteit S . Deze variëteit staat willekeurig fijne triangulaties toe die door ingenieuze topologische constructies ‘isomorf’ kunnen worden nagebootst in de ruimte X . Precies zoals boven geeft dit een homeomorfisme tussen S en X . Vanwege samenhang, is het maken van een isomorf stelsel ‘partities’ echter veel en veel ingewikkelder dan in het geval van de Cantor-verzameling. Het geniale van het bewijs van Gawehn zit hem in de wijze waarop ze deze problemen oplost.

Uit dit alles blijkt dat Gawehns wetenschapsgebied erg in de belangstelling stond, geen wonder dus dat Brouwer in haar geïnteresseerd was.

Gawehn deed de beginstappen in het formidabele project van het topologisch karakteriseren van variëteiten. We slaan heel veel over en formuleren slechts in zeer algemene termen de uitkomsten van dit project. In 1977 bewees Edwards [16] dat bepaalde afbeeldingen van variëteiten van (topologische) dimensie tenminste 5 waarvan het bereik eindig-dimensionaal is, willekeurig dicht kunnen worden benaderd door homeomorfismen. Dergelijke afbeeldingen heten *krimpbaar*. Laat voor het gemak X en Y compacte ruimten zijn. Een continue surjectie $f : X \rightarrow Y$ heet *krimpbaar* als voor elke $\varepsilon > 0$ een home-

omorfisme $\varphi : X \rightarrow X$ bestaat met de volgende eigenschappen:

- voor elke $\mathcal{Y} \in \mathcal{Y}$ is de verzameling $\varphi(f^{-1}(\{\mathcal{Y}\}))$ van diameter kleiner dan ε ,
- de afstand tussen $f \circ \varphi$ en f is kleiner dan ε .

De vezels van de functie f worden door φ uniform gekrompen tot verzamelingen van diameter kleiner dan ε (dit verklaart de terminologie). Vanuit het ‘standpunt’ van de ruimte X is dit dus een formidabel gebeuren. Vanuit het ‘standpunt’ van de ruimte Y gebeurt er niet veel, want voor kleine $\varepsilon > 0$ is $f \circ \varphi$ slechts een kleine aanpassing van de functie f .

Het begrip krimpbaarheid van een afbeelding is afkomstig van Bing [3] die bewees dat $f : X \rightarrow Y$, waarbij X en Y compacte topologische ruimten zijn, krimpbaar is precies dan wanneer f willekeurig dicht kan worden benaderd door homeomorfismen. In het bijzonder zijn X en Y homeomorfe topologische ruimten.

Stel je wilt bewijzen dat de compacte ruimten X en Y homeomorf zijn. Volgens Bing kun je dat doen door een krimpbare afbeelding f van X op Y te construeren en daaruit te concluderen dat X en Y inderdaad homeomorf zijn. Dat lijkt een zeer omslachtige weg om tot het gewenste doel te komen. De kracht van de methode zit hem er echter in dat al het ‘werk’ gedaan dient te worden in de ruimte X en dat Y een ondergeschikte rol speelt. Als X bijvoorbeeld een variëteit is, dan kan diepe meetkunde ingezet worden om van bepaalde afbeeldingen te bewijzen dat ze krimpbaar zijn. In een variëteit kun je nou eenmaal veel beter ‘duwen en trekken’ dan in een willekeurige topologische ruimte. En dat is precies wat Edwards deed.

De vraag werd opgeworpen tussen welke topologische ruimten krimpbare afbeeldingen bestaan en meer in het bijzonder, krimpbare afbeeldingen waarvan het domein een variëteit is.⁷ Quinn [33–34] bewees in 1987 dat naast natuurlijke voorwaarden zo’n afbeelding op een ruimte Y bestaat precies dan wanneer een zekere vervelende $\mathbb{Z}$ -waardige lokale index $i(Y)$ gelijk is aan 0. Bryant, Ferry, Mio en Weinberger [6] bewezen ten slotte in 1996 dat er Y ’s bestaan die voldoen aan de natuurlijke voorwaarden maar waarvoor $i(Y)$ ongelijk is aan 0. Zie Daverman [13] voor meer details en referenties. Het duurde meer dan zeventig jaar alvorens dit project dat in feite door Gawehn en anderen rond 1925 was begonnen, volledig was afgerond.⁸

Merk op dat deze bewijsmethode een geheel andere is dan die boven werd geschetst voor de topologische karakterisering van $\mathbb{S}^2$

waarbij isomorfe triangulaties werden ‘nagebootst’.

Als je weet dat een zekere topologische ruimte X een variëteit is, dan is het niet altijd duidelijk welke variëteit het betreft. Denk maar aan het bekende in 1905 geformuleerde vermoeden van Poincaré: is elke compacte driedimensionale topologische variëteit (zonder rand) met triviale fundamentealgroep homeomorf met $\mathbb{S}^3$? Uiteraard wordt met $\mathbb{S}^3$ de verzameling

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

bedoeld. Het is de meeste wiskundigen bekend dat deze vraag pas in 2002 en 2003 werd opgelost door Perelman [30–32] en dat het hier gaat om een van de grootste wiskundige doorbraken ooit.

Irmgard Gawehn en haar omgeving

Beknopte levensloop tot 1928

Irmgard Gawehn wordt op 20 februari 1900 in Memel geboren.⁹ Memel is een Pruisische handelsstad die tegenwoordig Klaipėda heet en in Litouwen ligt. Haar vader is Hermann Gawehn, scheepsmakelaar, koopman en op een zeker moment ook de Spaanse consul te Memel. Vader en dochter wonen op het adres Breitestraße 13 in Memel. Irmgard Gawehn bezoekt daar tussen 1906 en 1916 het ‘Lyzeum’ en van 1916 tot 1920 het ‘Oberlyzeum’. Rond Pasen 1920 verwerft ze op dat Oberlyzeum het diploma onderwijzeres. Vervolgens doet ze aan de Oberrealschule in Königsberg, zo’n 200 km ten zuiden van Memel, aanvullende examens wiskunde, natuurkunde en schei-



Irmgard Gawehn in 1922



Breitestraße, Memel, rond 1915, waar de familie Gawehn op nummer 13 woont.

kunde. Daarna vertrekt ze naar Heidelberg waar ze voor het wintersemester 1920/21 een kamer vindt op het adres Leopoldstraße 57.

Later verhuist ze naar de Bergstraße 25. Vanaf het zomersemester 1920 loopt ze voorname college bij de hoogleraren Becker, Curtius, Lenard, Liebmann, Perron, Pfeiffer en Rosenthal. Ze is ambitieus, want in het zomersemester van 1922 volgt ze colleges in Göttingen, op dat moment het centrum van wiskundige activiteit in de wereld. Na haar verblijf in Göttingen is haar adres Weberstraße 9 in Heidelberg. In de tweede helft van 1924 begint ze aan haar proefschrift. Dan woont ze in de Beethovenstraße op nummer 9.

Op 29 april 1925 is het proefschrift af. Ze levert de handgeschreven dissertatie getiteld *Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten* in en ze is klaar voor de promotie. Helaas is dat manuscript verloren gegaan. Op 28 en 29 mei 1925 doet ze de mondelinge examens die onderdeel uitmaken van de verwerving van de doctorstitel. Ze doet wiskunde bij Rosenthal en Liebmann, filosofie bij Jaspers en chemie bij Curtius. Ze was eerst van plan natuurkunde naast chemie als bijvak op te nemen, maar ze voelt zich sterker in filosofie, schrijft ze op 9 mei 1925 als ze verzoekt of ze natuurkunde door filosofie mag vervangen.¹⁰ Die mondelinge examens verlopen goed. Rosenthal beoordeelt haar kennis van de wiskunde als *zeer goed* en deels *uitstekend*. Liebmann beoordeelt de antwoorden op zijn vragen met *goed*. Haar kennis van filosofie wordt door de beroemde filosoof Karl Jaspers als *zeer goed* beoordeeld. Haar kennis van de scheikunde wordt door Curtius *volgende* en deels *goed* gevonden. De dissertatie wordt door Rosenthal beoordeeld. In zijn

‘Gutachten’ spreekt hij van ‘scherpzinnig en doelbewust denkwerk’. Hij adviseert vanzelfsprekend om de dissertatie te accepteren.

Met de dissertatie levert Gawehn ook een zogenaamde ‘Eidesstattliche Erklärung’ in waarin ze verklaart de dissertatie zonder ongeoorloofde hulp te hebben gemaakt. Dat laatste is nog steeds niet ongebruikelijk in Duitsland. De tekst luidt: Ik verklaar hierbij in plaats van een eed (an Eides statt) dat ik het voorliggende werkstuk, *Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, zonder ongeoorloofde hulp heb vervaardigd.

Rosenthal heeft Gawehn ongetwijfeld geholpen met haar dissertatie. Een voetnoot bij het artikel in de Annalen in 1928 zegt: “Die Arbeit ist, auf Veranlassung und Unter Wertung mancher wertvollen Ratschläge von Herrn Prof. Rosenthal entstanden.” Een dergelijk dankwoord is niet ongewoon bij een artikel dat gebaseerd is op een dissertatie. Het is opvallend dat ze de doctorsgraad officieel pas meer dan drie jaar later, op 30 januari 1931, verwerft. Dat is overigens een formali-

teit die waarschijnlijk wegens haar verblijf in Berlijn en later in Nederland is uitgesteld. Gawehn gaat in 1925 naar Berlijn voor verdere studie. Daar houdt ze zich met filosofie bezig [11, p. 568].

Opvallend is dat Gawehn over de studie wiskunde en de promotie in totaal zo’n vijf jaar doet. Vandaag de dag zou haar snelheid als spectaculair worden gezien. In die tijd kwam zo’n korte periode wel vaker voor, maar ook toen was het uitzonderlijk. Ze moet een briljante studente zijn geweest, niet voor niets schrijft Van Dalen [11, p. 568] dat aan het eind van haar studie Gawehns reputatie in Heidelberg legendarisch was. Gawehn is dan een jonge, briljante vrouw van 25 jaar die een veelbelovende toekomst tegemoet lijkt te gaan.

Irmgard Gawehn in Nederland

Brouwer krijgt vermoedelijk eind 1925 of begin 1926 als redactielid van de *Mathematische Annalen* de dissertatie van de 25-jarige Duitse promovenda Irmgard Gawehn uit Heidelberg toegestuurd. Op dat moment is Karl Menger (1902–1985) assistent bij hem. Brouwer beoordeelt zelf het manuscript maar laat Menger de correspondentie met betrekking tot de publicatie voeren.

Op 13 december 1926 schrijft Brouwer aan Heinz Hopf (1894–1971), die toen net in Berlijn Privatdozent geworden is en daar contact met Irmgard Gawehn heeft, dat hij op basis van het manuscript de conclusie trekt dat Fräulein Gawehn nog onvoldoende boven de stof staat. Ze maakt nog te gemakkelijk fouten. Brouwer heeft echter duidelijk belangstelling voor Gawehn, want hij stelt voor dat ze eerst in Duitsland haar ‘Staatsexamen’ en daarmee ook een onderwijsbevoegdheid voor gymnasium behaalt. Daarna zal ze bij hem in Amsterdam assistent kunnen worden.

Dan volgt een tegenslag voor Irmgard Ga-

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit: „Über 2-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeiten“ ohne unzulässige Hilfe angefertigt habe.

Irmgard Gawehn

Figuur 1 De door Irmgard Gawehn in 1925 overlegde en ondertekende Eidesstattliche Erklärung.

wehn. Ze slaagt in 1927 niet voor het mondelinge staatsexamen. Volgens latere mededelingen van Freudenthal maakt Feigl deel uit van de commissie en weigert die haar te laten slagen.¹¹ Irmgard werkt in die periode aan een artikel over een filosofisch onderwerp. Op 9 april 1927 vraagt Brouwer Hopf in een brief om zich om Gawehn te bekommeren zodat het filosofische artikel weldra gedrukt kan worden [11, p. 568]. Het artikel is echter nooit verschenen en wat het onderwerp is weten we niet. Ondanks het niet behalen van het Staatsexamen wordt Irmgard Gawehn toch assistent bij Brouwer aan de Universiteit van Amsterdam.¹² Ze wordt op 1 januari 1928 aangesteld, maar ze arriveert vermoedelijk pas midden februari.¹³

Zij is op dat moment de tweede vrouwelijke assistent in de wiskunde aan een universiteit of hogeschool in Nederland.¹⁴ Het lijkt Gawehn voor de wind te gaan. Haar dissertatie verschijnt in de *Annalen* en ze verhuist naar Amsterdam, het Mekka van de topologie van die dagen. Niet alleen is Brouwer daar op het toppunt van zijn roem. Maar ook Witold Hurewicz (1904–1956), een van de grondleggers van de algebraïsche topologie, is van 1927 tot 1936 verbonden aan de Universiteit van Amsterdam, eerst als assistent van Brouwer en later als privatdocent. De andere daar aanwezige briljante topoloog is Menger, waar Brouwer het weldra mee aan de stok zou krijgen over de dimensietheorie; Menger zou Brouwer beschuldigen van geschiedvervalsing.¹⁵ Het is een spannende tijd waarin van alles gebeurt. Talloze topwetenschappers komen naar Amsterdam om met Brouwer over wiskunde te spreken. Alles rondom Brouwer zindert van de energie, spanningen en conflicten. Dit is prachtig beschreven in de boeken van Van Dalen [9, 11]. Zie ook Van Mill [27] voor een recente verhandeling over Brouwers dimensionsgrad.

Op 30 april 1928 schrijft Brouwer aan Eva Werneck dat Husserl, die op dat moment in Amsterdam is, Gawehn als de intelligentste persoon die hij in Nederland heeft ontmoet beschouwt [11, p. 567]. Volgens Van Dalen schrijft Husserl ook aan Heidegger dat Irmgard Gawehn grote indruk op hem heeft gemaakt [10, p. 325].

Gawehn blijft drie jaar lang tot 16 november 1930 aan als assistent van Brouwer. Ze wordt opgevolgd door Freudenthal. Gawehn gaat daarna terug naar Memel via Heidelberg, waar ze haar promotie formeel afrondt. In 1931 staat ze weer ingeschreven op haar oude adres in Memel bij haar vader.¹⁶ We vermoeden dat Hermann Gawehn rond 1932 over-

lijdt, want Irmgard besluit om terug te gaan naar Nederland en in 1935 is het huis Breitestraße 13 te Memel niet meer in het bezit van haar vader. Op 10 juni 1933 vestigt Irmgard Gawehn zich in Blaricum, de gemeente waar ook de familie Brouwer woonachtig is, op het adres Langeweg 6.¹⁷ Veelzeggend is dat ze bij de gemeente opgeeft geen beroep te hebben. Ze is de hoofdbewoonster van het huis. Enige tijd verhuurt ze een kamer aan een onderhuurder, mejuffrouw W.J. Willard, een costumiëre uit Laren. Op 27 december 1938 wordt Irmgard Gawehn opgenomen in een psychiatrische inrichting. Haar persoonskaart vermeldt dat ze op die datum verhuist naar het adres Dolderscheweg 164 in Zeist. Dat is het adres van de Willem Arntz Hoeve in Den Dolder. Haar dossier is vernietigd en we zullen vermoedelijk nooit met zekerheid weten waarom ze wordt opgenomen.¹⁸

Het feit dat ze bijna veertig jaar tot aan haar dood in de inrichting zal verblijven wijst naar alle waarschijnlijkheid op een chronische psychiatrische ziekte. Op 29 april 1960 verhuist Irmgard Gawehn vanuit Den Dolder naar de Agnietenstraat 2 te Utrecht.¹⁹ Dat is het adres van het Willem Arntsz Huis, dat ook bij de Willem Arntsz Stichting hoorde en waar in die tijd voor een groot deel chronische en oudere patiënten verbleven. De verhuizing geeft aan dat men in 1960 de hoop op herstel definitief opgeeft, zo dat al niet eerder is gebeurd. Irmgard Gawehn verbleef in het Willem Arntsz-huis op open afdelingen en had de mogelijk-

heid om een wandelingetje buiten de deur te maken. “De professor in de wiskunde”, zoals sommigen haar noemden, was een vriendelijke maar gereserveerde, kwetsbare vrouw met een doorrookte stem en een onmiskenbaar Duits accent. De houding op de foto uit 1975 — het hoofd naar rechts gebogen en de linkerhand met gestrekte vingers naast het hoofd — is heel karakteristiek voor haar. De psychiaters die wij raadpleegden deelden ons mee dat dit soort typische lichaamshoudingen in de psychiatrie wel worden aangeduid met de term ‘maniërisme’ en dat komt met name voor bij chronische psychosen zoals schizofrenie. Irmgard Gawehn overlijdt op maandag 11 april 1977 na een verblijf van 39 jaar in een inrichting, meer dan de helft van haar leven.

Irmgard Gawehn volgens Hans Freudenthal

Op 25 juni 1926 geeft Gawehn in Berlijn haar eerste colloquiumvoordracht over het onderwerp van haar dissertatie. Freudenthal herinnert zich later dat de voordracht onbegrijpelijk was en Gawehn er niet in slaagde om duidelijk te maken waar het over gaat [11, p. 568]. Serieuzer is dat Gawehn in 1927 niet slaagt voor het mondelinge staatsexamen (zie boven).²⁰ Volgens Freudenthal stelde de examencommissie vragen over allerlei onderwerpen en kon zij de examinatoren niet overtuigen van haar wiskundige kennis [11, p. 520].

In Amsterdam gaat het volgens Freudenthal definitief mis. In een interview in de tachtiger jaren zegt hij het volgende: “Eind 1930



De boerderij midden op het schilderij bestond in de dertiger jaren uit drie huizen met de nummers Langeweg 4, 6 en 8 te Blaricum. Gawehn woonde in het middelste huis. Het huis heeft nu een rieten dak en omvat twee huizen met twee huisnummers: 6 en 8.



Foto: privésarchief

Irmgard Gawehn in 1975

was ik uit Berlijn naar Nederland gekomen als assistent naast Hurewicz bij Brouwer. Ik volgde daar Irmgard Gawehn op, over wie een heel boek te schrijven zou zijn — dat heb ik overigens gedaan, maar nooit gepubliceerd. Irmgard Gawehn was een bijzonder mooie vrouw die in Heidelberg bij Rosenthal een geniaal proefschrift had geschreven op het gebied van de topologie. Later dook zij op in filosofische kringen in Berlijn en had ook op dat terrein de naam geniaal te zijn. In Nederland bleek echter al gauw dat ze niets wist van wiskunde, noch van filosofie. Later heeft zij nog een rol gespeeld in het Larense Kunstenaarsmilieu, in de oorlog is ze in een krankzinnigen-gesticht gestorven. Een mogelijke verklaring is dat zij een abnormaal inlevingsvermogen had in de geest van de personen waar zij verliefd op werd — een wiskundige in Heidelberg en een filosoof in Berlijn.” [1, p. 118].

Tegen Van Dalen zei Freudenthal dat hij ooit met de promotor van Gawehn in Heidelberg, Arthur Rosenthal, heeft gesproken en dat die tegenover hem had toegegeven dat ze buitengewoon populair was bij de mannelijke studenten en dat een van hen de dissertatie had geschreven [11, p. 568]. Van Dalen vertelde ons dat Freudenthal ook de naam van de ware auteur van Rosenthal had gehoord, maar dat hij die naam niet prijs wilde geven.

Zich baserend op Freudenthal beschrijft Van Dalen [11, p. 506] dat Gawehn volgens ‘local gossip’ in een inrichting opgenomen wordt nadat haar laatste minnaar de relatie heeft verbroken. De vele relaties die ze voordien had, placht ze altijd zelf te verbreken. Volgens Freudenthal bezoeken Cor Jongejan, Brouwers secretaresse en vriendin en

Lize Brouwer, de vrouw van Brouwer, Irmgard Gawehn regelmatig in Den Dolder. Het contact met de familie Brouwer blijft dus in stand na haar opname, ondanks haar deplorabele toestand. We weten niet hoe lang dat duurt. Lize overlijdt in 1959 en Cor in 1968, twee jaar na de dood van Brouwer.

Arthur Rosenthal en de mystery topologist

Heeft Freudenthal gelijk?

Freudenthals uitspraken werpen plotseling een totaal ander licht op het leven van Irmgard Gawehn. Ze zou zich schuldig hebben gemaakt aan ernstig frauduleus handelen. Ze zou haar dissertatie door een ander hebben laten schrijven. Ze zou geen briljante wiskundige maar een briljante oplichtster zijn. En dat zou zo vast staan als een huis, want niemand minder dan haar eigen promotor zou dat hebben bevestigd. En waarom zouden we twijfelen aan het woord van Freudenthal? Dirk van Dalen deed dat niet — iets wat wij ons overigens kunnen voorstellen — en met de verschijning van de Nederlandse en de Engelstalige versie van de biografie van L.E.J. Brouwer zijn de verhalen van Freudenthal over Irmgard Gawehn onderdeel van de officiële geschiedschrijving betreffende Brouwer geworden. Toch roept het beeld dat Freudenthal van Gawehn schetst vragen op. Heeft Arthur Rosenthal zich laten oplichten of was hij misschien zelf betrokken bij de fraude? En zou hij dat echt zomaar in een gesprek met Freudenthal hebben toegegeven? En wie is dan de ware schrijver van de dissertatie? Levert de inhoud van het proefschrift op dit punt aanwijzingen? We nemen nu eerst de verhalen

van Freudenthal als uitgangspunt. Dat leidt tot een interessante zoektocht die echter geen feiten oplevert die de visie van Freudenthal ondersteunen.

Gawehns promotor Arthur Rosenthal

Wie is Rosenthal? Arthur Rosenthal (1887–1959) wordt in Neurenberg geboren, is de zoon van een zakenman en groeit op in München. Hij promoveert in 1909 op een proefschrift getiteld *Untersuchungen über gleichflächige Polyeder*. Hij werkt eerst in München en hij wordt in 1922 hoogleraar in Heidelberg. Dat betekent dat hij Gawehn pas leert kennen als ze uit Göttingen terugkomt. Rosenthal is van 1932–1933 decaan van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen in Heidelberg. Omdat hij een jood is, wordt hij in 1935 gedwongen met pensioen te gaan. Hij emigreert in 1939 naar Nederland. Er is in het Stadsarchief Amsterdam een ‘persoonskaart’ van hem en volgens die kaart wordt hij op 27 juli 1939 ingeschreven als ingezetene in Amsterdam. Hij woont daar op de Linnaeusparkweg in bij de familie Gazan. Op 2 maart 1940 verhuist hij volgens zijn persoonskaart naar Princeton. In de Verenigde Staten werkt hij aan de universiteiten van Michigan, New Mexico en Purdue. In 1954 krijgt hij eerherstel in Heidelberg. Rosenthal is een meetkundige, in het bijzonder bestudeert hij de classificatie van reguliere polyhedra en Hilberts axioma’s. Hij werkt ook in de analyse, de topologie, de ergodentheorie en de theorie van dynamische systemen. Hij heeft zeven PhD-studenten, waaronder Irmgard Gawehn. Hij sterft in 1959 in Lafayette (Indiana).



Foto: Werry Cone, Trouw (1987)

Hans Freudenthal (1905–1990)



Arthur Rosenthal (1887–1959)

Bestudering van Rosenthals werk brengt snel aan het licht dat zijn interesse uitgaat naar abstracte wiskunde. In 1940 publiceert hij het artikel 'Verallgemeinerungen des Raumbegriffes' in *Christiaan Huygens*, een Nederlands tijdschrift [36]. Dit artikel zou heel wel geschreven kunnen zijn in de tijd dat Rosenthal in Nederland verblijft. Het is een artikel over wat we vandaag de dag *algemene topologie* zouden noemen. Hij heeft het over metrische ruimten, Fréchetruimten, limieten van rijen, separabiliteit in metrische ruimten, hij bewijst de separabiliteit van de Hilbert-ruimte ℓ^2 , is bekend met de Urysohn-ruimte, definieert het eerste aftelbaarheidsaxioma, het tweede aftelbaarheidsaxioma, stelt de vraag naar de metriseerbaarheid van topologische ruimten,²¹ en vraagt naar een topologische karakterisering van de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ en ruimten gemodelleerd daarover (vermoedelijk niet in het besef wat dat voor voeten in de aarde zou hebben. In dat laatste verband vermeldt hij het resultaat van zijn studente Irmgard Gawehn, haar prachtige topologische karakterisering van het boloppervlak. Rosenthal blijkt zeer wel ingevoerd te zijn in de algemene topologie en stelt formidabele problemen aan de orde, zoals de metriseerbaarheid van algemene topologische ruimten en de topologische karakterisering van variëteiten. Ook blijkt hij trots te zijn op het werk van zijn studente Irmgard Gawehn.

Het Freudenthal-archief bevat enkele tientallen brieven die Freudenthal en Rosenthal

elkaar schreven in de periode van 29 maart 1940 tot 9 november 1954. De brieven hebben een vriendschappelijke toon, maar zijn formeel. De heren tutoyeren elkaar niet. Rosenthal moet een erg formele man geweest zijn. Jaap Korevaar heeft hem meegemaakt aan Purdue in de periode 1949–1951.²² Hij karakteriseert Rosenthal als een afstandelijke man die wat leek neer te kijken op de vele met onderwijstaken overladen gewone stafleden en niet deelnam aan de informele 'parties'. Freudenthal en Rosenthal schrijven niet over wiskunde maar veeleer over het wel en wee van de families en het lot van collega-wiskundigen in die roerige tijden rond de Tweede Wereldoorlog. Acht kisten met boeken en andere bezittingen van Rosenthal blijken in Rotterdam achtergebleven te zijn en verbrandden in het bombardement van 1940. Na de oorlog stuurt Rosenthal pakketten met goederen die in Nederland schaars zijn. Op 17 november 1945 bedankt Freudenthal bijvoorbeeld voor een paar bretels dat hij uit de VS mocht ontvangen en waarvan hij onder de indruk is. Alles wijst erop dat Freudenthal en Rosenthal regelmatig contact hebben gehad in de periode tussen juli 1939 en maart 1940. Uit de briefwisseling blijkt bijvoorbeeld dat Rosenthal in december 1939 sinterklaas viert bij de Freudenthals op het adres Newtonstraat 75 in Amsterdam. De heren ontmoeten elkaar na het vertrek van Rosenthal naar de Verenigde Staten in 1940 pas weer op het International Congress of Mathematicians in Amsterdam in 1954. Het ligt voor de hand dat het gesprek tussen Freudenthal en Rosenthal over Gawehn in 1939 heeft plaatsgevonden. De opname van Gawehn in de inrichting was toen minder dan een jaar geleden. Gezien het formele karakter van de briefwisseling vraag je je af op welke manier ze over Gawehn hebben gesproken.

Gawehns proefschrift

Bij lezing van Gawehn [18], het artikel dat op haar proefschrift is gebaseerd, vallen een aantal zaken op. De inleiding is 'zwaar', met veel voetnoten met daarin historische beschouwingen die alles in perspectief plaatsen, en precies: de meeste belangrijke begrippen worden nauwkeurig omschreven. Moore [28] blijkt een belangrijk hulpresultaat te hebben bewezen.²³ Na de inleiding is de stijl compacter en wordt het complexe bewijs stap voor stap uitgewerkt. Het is een technisch zeer gecompliceerd bewijs dat meetkundig van aard is. Vandaag de dag zou het artikel van Gawehn tot de zogenaamde *meetkundige topologie* of de *continuümtheorie* worden gerekend. Dat is een andere tak van

sport dan de *algemene topologie* waar haar promotor Rosenthal zich toe voelde aangetrokken. Zoals we al hebben opgemerkt in de vorige paragraaf, stoelt haar bewijs op de Stelling van Jordan en construeert zij steeds fijnere 'isomorfe' triangulaties van topologische ruimten. Het artikel eindigt met voorbeelden die laten zien dat bepaalde voorwaarden essentieel zijn. Hier is geen gering talent aan het woord, Freudenthal noemt het werk niet voor niets 'geniaal'.

The mystery topologist

Het proefschrift van Gawehn is meer dan excellent en is technisch van zeer hoog niveau. Ook is het een bewijs van slechts één stelling, de topologische karakterisering van tweedimensionale variëteiten. Iemand heeft de kerngedachte geleverd en die is daarna bekwaam uitgewerkt. Als Gawehn hulp heeft gehad, van wie dan wel? In dit verband is Rosenthal zelf, gezien de aard van zijn werk, niet de eerste waar wij aan denken. Het profiel van de ideale kandidaat is dit. We zoeken een man die in de jaren 1924–1925 jong was en op de een of andere manier in die periode Gawehn gekend zou kunnen hebben. Verder moet hij een specialist zijn geweest, onder meer in wat we tegenwoordig de *meetkundige topologie* noemen. Daarnaast moet hij hebben beschikt over een uitzonderlijk talent, zodat hij moeiteloos Gawehn kon assisteren. Zoals we hebben gezien was het volgens Freudenthal een mannelijke student. De lijst van studenten aan de universiteit in Heidelberg in de jaren dat Irmgard Gawehn studeerde, voor zover we die hebben kunnen inzien, levert geen briljante topologen op. Als we het woord student ruim interpreteren zijn er wel enkele kandidaten te vinden. Het profiel past op Heinz Hopf (1894–1971). Hij was jong in die tijd, 30 jaar, en nog ongehuwd. Hij studeert een jaar in Heidelberg net voordat Gawehn daar arriveert. Zijn zus studeert daar dan ook. Hopf promoveert in 1925 in Berlijn, precies de plek waar Gawehn na haar promotie naartoe ging. Hij werkt in de meetkundige/algebraïsche topologie en had de begeleiding van Gawehn er makkelijk naast kunnen doen. Freudenthal promoveert bij Hopf. Dat zou kunnen verklaren waarom Freudenthal zijn naam niet wilde noemen. Hopf voldoet aan ons profiel, maar meer ook niet. Er is verder niets dat erop wijst dat zijn naam gevallen is in het gesprek tussen Rosenthal en Freudenthal. Gawehn studeert in 1922 een semester in Göttingen. Mogelijk heeft ze de man die haar later geholpen zou hebben daar ontmoet. Je kunt dan aan Hellmuth Kneser (1898–1973) denken. Ook jong in die tijd.

Hij kan Gawehn in 1922 in Göttingen eigenlijk niet gemist hebben. Hij had de kerngedachte en eventuele hulp bij de uitwerking van de dissertatie zeker kunnen leveren. Kneser promoveert in 1921 bij Hilbert en wordt in 1922 in Göttingen assistent en snel daarna privaattoecent. Kneser werkt in verschillende delen van de wiskunde en ook in de topologie. Ook bij hem kan men zich heel goed voorstellen dat hij Gawehn zou hebben kunnen helpen zonder zijn eigen werk te schaden. Kneser voldoet aan het profiel, maar ook in zijn geval is er verder niets dat erop wijst dat hij de gezochte briljante topoloog ook echt zou zijn. Hetzelfde geldt voor Reinhold Baer (1902–1979) die ook aan het profiel voldoet. Hij is jong. Baer blijft in 1922 in Göttingen en hij promoveert bij Kneser in 1925. Hij werkt in het goede gebied en hij heeft veel talent. Ook Baer had de begeleiding van de dissertatie van Gawehn er wel bij kunnen doen. We moeten constateren dat deze zoektocht niets oplevert. Ook als we meer in detail inzoomen op het topologisch werk van Hopf, Kneser of Baer vinden we niets dat wijst op een directe link met de dissertatie van Gawehn. De mystery topologist is onvindbaar.

Freudenthals conclusies nader beschouwd

In de visie van Freudenthal wist Irmgard Gawehn niets of vrijwel niets van wiskunde, maar beschikte ze over toverkracht. In het gesprek met mannen slaagde ze er vele jaren lang telkens weer in om hen het gevoel te geven dat zij hen totaal begreep. De ene na de andere hooggeleerde examiner ging voor de bijl. De mystery topoloog deed haar zelfs een briljant stuk wiskunde cadeau. Deze mogelijkheid is uiterst intrigerend en van zijn standpunt uit gezien had Freudenthal groot gelijk toen hij Irmgard Gawehn als ideale hoofdpersoon van een roman beschouwde. Wij hebben deze mogelijkheid ook serieus genomen en in detail het leven van Irmgard Gawehn onder de loep genomen voor zover dat nog naspeurbaar is. We hebben echter geen nieuwe feiten kunnen vinden die de visie van Freudenthal ondersteunen. In tegendeel, als we de levensloop van Irmgard Gawehn overwegen dan wordt het verhaal van Freudenthal alsmaar onwaarschijnlijker.

Uit het bovenstaande is gebleken dat Irmgard Gawehn zeer goed functioneerde tot en met haar 25ste levensjaar. Er lijkt daarna een 'knik' in haar levenslijn te hebben plaatsgevonden, zoals psychiaters dat noemen. In de eerste periode van haar leven is zij flamboyant en talentvol, maar daarna gaat het snel bergafwaarts. Zij herstelt niet en er komt niets

meer uit haar vingers. Gezien de samenstelling van de populatie van langdurig verpleegden in de Willem Arntsz Hoeve in die tijd, is er een zeer grote kans dat zij aan schizofrenie leed. De karakteristieke pose op de foto uit 1975 wijst eveneens in die richting. Naar de mening van de psychiaters met ervaring op dit punt die wij raadpleegden, is dit een redelijke veronderstelling. De ziektegeschiedenis van Irmgard Gawehn lijkt er ook mee in overeenstemming. De verschijnselen van schizofrenie ontwikkelen zich geleidelijk. Voordat de verschijnselen van de aandoening ontstaan, ontwikkelen veel patiënten zich normaal. De ziekte openbaart zich bij mannen meestal voor het 25ste levensjaar, bij vrouwen gemiddeld vijf jaar later dan bij mannen (Hengeveld en Van Balkom [19, p. 225]).

Los van de precieze diagnose is het een feit dat Irmgard Gawehn 39 jaar — meer dan de helft van haar leven — in een inrichting heeft doorgebracht en dat een invaliderende psychiatrische ziekte daarvan de oorzaak moet zijn geweest. Het verhaal dat een verbroken relatie de oorzaak is van haar blijvende opname en dat volgens Freudenthal van Rosenthal afkomstig is,²⁴ moeten we van de hand wijzen.

Freudenthals verhaal bevat nog meer dubieuze details. Volgens Freudenthal, sprekend in of kort voor 1987, overleed Gawehn in de Tweede Wereldoorlog. Tegen Dirk van Dalen zei hij dat ze na de Tweede Wereldoorlog overleed. De eerste bewering is onwaar, de tweede is waar maar zegt niet veel: elke lezer van dit

stuk zal na de Tweede Wereldoorlog overlijden! Om precies te zijn, Irmgard Gawehn overleed in 1977. Verder zou zij volgens Freudenthal in de dertiger jaren in het kunstenaarsmilieu in het Gooi een rol hebben gespeeld. Volgens haar persoonskaart heeft ze van 10 juni 1933 tot 27 december 1938 in Blaricum gewoond. We hebben niets kunnen ontdekken over de rol die ze in die periode gespeeld zou hebben in het kunstenaarsmilieu aldaar. Lien Heyting, de auteur van een klassiek boek over dat milieu in de periode 1880–1920 [20] had nog nooit van Irmgard Gawehn gehoord toen wij haar raadpleegden.

Rosenthal, de promotor van Gawehn, heeft veel in Gawehn gezien. Zij slaagde in Heidelberg met glans voor haar examens, die zij toch geheel zelf heeft moeten afleggen. Gawehn moet een prima indruk hebben gemaakt op de vier examinatoren. Het is misschien voor een goede toneelspeelster mogelijk om één examiner voor de gek te houden, misschien zelfs twee, maar vier examinatoren uit vier verschillende vakgebieden een rad voor de ogen draaien is schier onmogelijk. Rosenthal was een behoorlijk wiskundige, die tot op hoge leeftijd actief is gebleven. Hij moet hebben geweten wat voor wiskundig vlees hij in de kuip had. Hij moet ook hebben geweten dat Gawehn naar Brouwer ging, de toptopoloog van die dagen. Als zij een toneelspeelster was, dan wist hij dat zijn reputatie daaronder zou gaan leiden. Het is dan ook vreemd dat hij haar heeft laten gaan, zonder Brouwer enigszins te informeren. In zijn artikel uit



Irmgard Gawehn, Bertus Brouwer, Dolly Kiehl, Willem Langhout en Tine Langhout-Vermey

1940 verwijst Rosenthal op volstrekt natuurlijke wijze in positieve zin naar de dissertatie van Gawehn. Dit is helemaal in overeenstemming met wat hij tien jaar na de promotie van Gawehn in 1935 in een ‘Gutachten’ met betrekking tot een andere dissertatie schreef: “Meine Schülerin Irmgard Gawehn hatte in ihrer wertvollen Heidelberger Dissertation (erschieden in *d. Math. Ann.* 98, 1927) eine sehr durchsichtige Charakterisierung der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch ausschliesslich innere topologische Eigenschaften gegeben, wobei die Forderung des Jordanschen Kurvensatzes im kleinen eine entscheidende Rolle spielt.”

In Heidelberg en Göttingen was Gawehn studente. Nadat ze in de luwte van Heidelberg was gepromoveerd kwam ze in Berlijn in de grote wereld terecht. Dat kan heel moeilijk zijn. Toen ze in Amsterdam arriveerde, werd ze geconfronteerd met Brouwer, met Menger en met Hurewicz, drie absolute geweldenaars. Niet weinigen met enig talent voor wiskunde zouden zich in de aanwezigheid van zoveel genialiteit gereduceerd hebben kunnen zien tot degenen die slechts secretariële werkzaamheden uitvoeren. Zo zou het ook Irmgard Gawehn kunnen zijn vergaan en in zo’n situatie helpen zich geleidelijk openbarende psychische problemen niet. En verder houdt Brouwer Gawehn drie jaar lang in dienst.¹⁵ Dat is toch wonderlijk als ze echt niets voorstelde. Dit laatste zou overigens ook een daad van menslievendheid hebben kunnen zijn, Brouwer had een sterk rechtvaardigheidsgevoel en hij zou een tamelijk hulpeloze assistente niet op straat zetten.

Freudenthal stelde dat Gawehn in Berlijn een volstrekt onbegrijpelijke voordracht hield. Dat zegt niet zoveel. Menig jong promovendus staat bol van de zenuwen bij het

presenteren van zijn of haar eerste resultaten. En er zijn talloze topwiskundigen die de kunst van het presenteren nooit onder de knie krijgen en tot op hoge leeftijd totaal onbegrijpelijke voordrachten houden. Het is aanmerkelijker het disfunctioneren van Gawehn in die periode te verklaren uit de zich toen al manifesterende psychische klachten in plaats van uit onkunde. Ook het niet slagen voor het mondelinge staatsexamen kan hieruit worden verklaard.

Wij kennen het geval van een wiskundige waarvan zijn promotor zegt dat hij een van de weinige echt grote talenten is geweest die bij hem promoveerden. Bij deze man is schizofrenie geconstateerd en hij heeft na zijn promotie geen wetenschappelijk werk meer verricht. De overeenkomst met het leven van Gawehn is frappant. Briljante mensen aan wier carrière een vroegtijdig einde komt door ernstige psychische problemen bestaan echt. Men kan in dit verband ook aan John Nash (1928) denken, bij wie zich rond zijn dertigste schizofrenie openbaarde, waardoor hij tientallen jaren weinig of niets produceerde.

Tot slot nog enkele gedachten gewijd aan de mystery topoloog. Het is ondenkbaar dat Perelman de oplossing van het Poincaré-vermoeden zou hebben ‘weggegeven’ aan een promovendus; wiskundigen zijn wel goed maar niet gek. Elke wiskundige kan invoelen waarom Perelman vanuit principiële gronden de Fieldsmedaille heeft geweigerd en de prijs van één miljoen dollar van het Clay-instituut niet heeft geïncasseerd, alhoewel weinigen zijn voorbeeld zouden hebben gevolgd. Maar niemand had het kunnen begrijpen als hij de eer van de oplossing van het vermoeden van Poincaré aan een ander zou hebben gelaten.²⁵ Niet voor niets schreef Hugo Brandt Corstius, in de wiskunde afgestudeerd

als topoloog, in de wetenschapsbijlage van *NRC Handelsblad* van 25 januari 1996 het volgende: “Elke wiskundige is geniaal. Als hij niet geniaal meer is, moet hij wat anders gaan doen. Zo werd Alexander Rinnooy Kan bankier, Mient Jan Faber oorlogshitser, Paul Verhoeven filmer, Philip Glass componist, Hans Ree schaker en columnist, en trekt Frits Bolkestein stemmen door de kinderen van illegalen van school te sturen. Ze zullen in hun nieuwe bezigheden misschien ook geniaal zijn, maar ik weet zeker dat ze veel liever de Knoop van Rinnooy Kan, de Faber-lijn of de stelling van Verhoeven hadden uitgevonden en zo voor eeuwig beroemd zouden zijn geworden.”²⁶

Zou de topologische minnaar van Gawehn zo verliefd zijn geweest dat hij bereid was haar geheel de eer van een topresultaat te gunnen? Het lijkt erg onwaarschijnlijk.

Als je alles op een rij zet dan blijkt dat er naast de verklaringen van Freudenthal niets maar dan ook helemaal niets te vinden is dat de beschuldiging van fraude ondersteunt.

Kortom, Irmgard Gawehn was een briljante topologe. Zo moet zij de geschiedenis in gaan. ←

Dankbetuiging

De auteurs danken de volgende mensen en instellingen voor hun steun bij het schrijven van dit artikel: Renate Tobies, Walter Purkert, Ruediger Thiele, Lien Heyting, Gerard Bongers, Jaap Korevaar, Joost Vijselaar, Dirk van Dalen, Ineke Hilhorst, Rosemarie Huver, Mathisca de Gunst, Marijke Hilhorst, Karl Heinz Hoffman, Geertje van Mill, Josine van Mill, Dieter Remus, Astrid Oostveen, Liesbeth Sesink, Ruud Coenen, Alex de Ridder, Piet Eikelenboom, Willem van Tilburg, Joost Kievit, Wim Udo, Vera ten Broeke-Abels, Bea Koetsier, Fred Drissen, Stadsarchief Amsterdam, Universitätsarchiv Heidelberg, Historische Kring Blaricum, Streekarchief Gooi en Vechtstreek, Noord-Hollands Archief, Utrechts Archief.

Noten

- 1 Zie het interessante artikel ‘Frauderen is gemakkelijk en gebeurt overal’ van René Franssen in het *Nederlands Dagblad* van vrijdag 1 november 2013.
- 2 De *Cantor-verzameling* is de verzameling die je krijgt door uit het interval $[0, 1]$ het middelste derde interval weg te laten, dan uit de overblijvende twee intervallen de middelste derden en

ga zo maar door. Deze verzameling werd door Cantor [7] in 1883 geïntroduceerd als een compacte verzameling van Lebesgue-maat nul met dezelfde kardinaliteit als die van de reële getallen $\mathbb{R}$. Door intervallen weg te laten waarvan de som der lengten gelijk is aan $\varepsilon > 0$, krijg je een analoge structuur van Lebesgue-maat $1 - \varepsilon$.

- 3 Een punt x van een topologische ruimte X heet *geïsoleerd* als $\{x\}$ een open verzameling van X is.
- 4 Het gaat hier inderdaad om *topologische* dimensie. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld in de dynamica vele verschillende dimensiebegrippen waaronder Hausdorff-dimensie. De standaard Cantor-verzameling heeft topologi-

- sche dimensie 0 en Hausdorff-dimensie $\log_3(2)$.
- 5 Een deelverzameling U van een topologische ruimte X heet *clopen* als U zowel open als gesloten is. Een topologische ruimte X heeft topologische dimensie 0 precies dan wanneer haar clopen verzamelingen de topologie genereren.
 - 6 Een *Peano-continuüm* is een lokaal samenhangend continuüm.
 - 7 Dranishnikov [15] en Edwards (zie Walsh [42]) losten gemotiveerd door deze vraag diepe en oude vragen op in de cohomologische dimensietheorie.
 - 8 We laten hier de ongeveer gelijktijdige ontwikkelingen voor *oneindig-dimensionale* variëteiten buiten beschouwing, zie Toruńczyk [39–40], Koetsier en van Mill [23] en Dijkstra, Levin en van Mill [14].
 - 9 In het Universitätsarchiv Heidelberg bevinden zich meerdere documenten die betrekking hebben op Gawehn. Er zijn twee ingevulde formulieren waarmee ze verzocht te worden ingeschreven. De eerste is gedateerd 3 mei 1920. De tweede is gedateerd 18 oktober 1922. Uit de tweede blijkt dat ze in de zomer van 1922 in Göttingen heeft gestudeerd en dus even uitgeschreven was. Ze studeerde dus twee keer twee jaar in Heidelberg en het archief heeft ook voor beide periodes een diploma (Abgangszeugnis) van Gawehn. Er zijn ook twee met die twee periodes corresponderende identiteitsbewijzen, waarvan de laatste van een foto is voorzien. Zie Figuur 1. Er is vervolgens het verzoek van Gawehn om toegelaten te worden tot de promotie en een verzoek van de decaan van de faculteit gedateerd 29 april 1925 om Gawehn tot het promotie-examen in de vakken wiskunde, natuurkunde en chemie toe te laten. Het woord natuurkunde is later doorgestreept en vervangen door filosofie. Dat verzoek ging vergezeld van een handgeschreven levensbeschrijving, die eveneens in het archief aanwezig is, en een handgeschreven dissertatie, die verloren is gegaan. Er is een handgeschreven verzoek van Gawehn, gedateerd 9 mei 1925, waarin zij verzoekt om het bijvak natuurkunde te vervangen door filosofie. Liebmann, die toen prodecaan was, schrijft erbij dat zoiets al vaker is voorgekomen en men vond het goed. De decaan stelt als promotietijdstip voor: vrijdag 29 mei 1925, om 6 uur. Plaats: Het Geologische Instituut, Hauptstraße 52. Op 25 mei krijgt Gawehn een uitnodiging van de decaan voor het examen. Die uitnodiging bevindt zich ook in het archief. Daarop staat dat het examen chemie al op 28 mei plaatsvindt en het tentamen filosofie op 29 mei om 5 uur op het adres Ploeck 66 te Heidelberg. Het valt op dat ze op 29 mei om 5 uur examen deed bij Jaspers en binnen een uur ook nog 600 meter moest lopen ten einde om 6 uur op tijd te zijn voor het examen wiskunde. Het oordeel van de examinatoren na die drie examens bevindt zich ook in het archief. In het archief is er ook een ongedateerde Eidesstattliche Erklärung van Gawehn. Zie Figuur 1. Tenslotte bevat het archief een 30 januari 1931 gedateerde bul, die verleend wordt op grond van het examen in 1925 en de gepubliceerde dissertatie. Het examen krijgt als ‘Gesamtnote’ ‘mit sehr gutem Erfolg’ en de dissertatie krijgt geen cijfer maar wordt beschreven als ‘ein Zeugnis wissenschaftlicher Bildung und ausgezeichneten Scharfsinnes’.
 - 10 Van Dalen [11, p. 520, voetnoot 87] vergist zich als hij stelt dat ze naast filosofie ook examen natuurkunde deed bij Lenard.
 - 11 Bron: e-mail aan de auteurs van Dirk van Dalen.
 - 12 In het archief van de Universiteit van Amsterdam dat zich in het Stadsarchief Amsterdam bevindt (onder nummer 1020), is er maar één document waarin de naam van Gawehn voorkomt. Dat bevindt zich in het onderarchief van de curatoren en is de lijst met assistenten van de hoogleraar Brouwer per jaar en met het inkomen erachter. Archief 279, nr. 375, Assistenten bij het Hooger Onderwijs van 1921/22 tot en met 1931/32. Het is een soort boekhouding. Curatoren betaalden de assistenten en er moest dus bijgehouden worden hoeveel en waaraan er werd besteed. De benoeming van assistenten was klaarblijkelijk geheel een zaak van de hoogleraar en waarvan hij niet eens in de vergadering van hoogleraren melding deed. In de handgeschreven notulen over 1922–1930 van die vergaderingen (van de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen) lijkt Gawehn nergens aan de orde te komen, terwijl Brouwer wel veel aan het woord is. In de 914de vergadering van de hoogleraren (3 februari 1937) van de faculteit wordt besloten dat voortaan hoogleraren moeten melden dat ze een andere conservator hebben aangesteld. Dat wordt vanaf dat moment in het faculteitsreglement opgenomen.
 - 13 Zie de brief van Brouwer aan Eva Wernecke van 15 februari 1928 [12].
 - 14 Aan de Technische Hogeschool Delft werd Johanna H.M. Manders (1892–1989) na haar afstuderen in de elektrotechniek in 1916 assistent bij Jan Arnold Schouten, zo’n tien jaar voordat Irmgard Gawehn aan de UvA werd aangesteld (Schongs [37] en Struik [38]). Johanna Manders promoveerde in 1919 bij Schouten en werkte tot aan haar pensionering in 1956 bij de Octrooiraad in den Haag. Tot 1945 was ze daarnaast verbonden aan de Technische Hogeschool Delft.
 - 15 Bron: Stadsarchief Amsterdam, Archief 279, nr. 375, Assistenten bij het Hooger Onderwijs van 1921/22 tot en met 1931/32. Gawehn kwam in dienst van de Universiteit van Amsterdam op 1 januari 1928 en werd op 16 november 1930 naadloos opgevolgd door Freudenthal. De andere assistenten bij Brouwer waren op dat moment Karl Menger, Witold Hurewicz (die er al langer was) en mejuffrouw Cor Jongejan (die er ook al langer was). Cor Jongejan was secretaresse en later vriendin, huisgenote en na de dood van de vrouw van Brouwer in feite diens levensgezel. Menger valt bij het academisch jaar 1928/29 af en tot 16 november 1930 zijn Hurewicz en Jongejans naast haar de andere assistenten. Menger, Hurewicz en Gawehn verdienen 3000 + 500 per jaar en Jongejan krijgt 1500 per jaar.
 - 16 Bron: <http://wiki-de.genealogy.net/Breite.Stra%C3%9Fe.in.Memel#Haus.Nr.13>.
 - 17 Bron: haar persoonskaart, Centraal Bureau voor Genealogie.
 - 18 Gezien het feit dat het om medische gegevens gaat en hier geheimhouding voor geldt, is het overigens de vraag of we toegang tot dat dossier zouden hebben gekregen. We hebben in het Utrechts Archief en in het Noord-Hollands Archief te Haarlem de archieven ingezien van de rechtbanken in Utrecht en in Amsterdam die in 1939 machtigingen verleenden om patiënten gedwongen in een psychiatrische inrichting op te nemen. We hebben daar geen Irmgard Gawehn betreffende machtiging gevonden. Dat is jammer omdat zulke machtigingen altijd een diagnose bevatten. Mogelijk is Gawehn vrijwillig opgenomen.
 - 19 Op 30 augustus 1973 verandert het adres van Irmgard Gawehn nog een laatste keer. Ze ‘verhuist’ naar de Vrouwjutenstraat 27. Dat betreft echter geen echte verhuizing; het adres verandert door de verplaatsing van de ingang van de inrichting.
 - 20 Dit is merkwaardig want, zoals werd opgemerkt in de vorige paragraaf, slaagde Gawehn met vlag en wimpel voor de examens in Heidelberg.
 - 21 Deze vraag werd onafhankelijk door Nagata, Smirnov en Bing opgelost. Zie Engelking [17] voor details.
 - 22 In de jaren 1945–1960 was er veel verloop bij de wiskunde aan Purdue University. Veel jonge mensen werden goedkoop ingehuurd, maar bleven niet lang. In Amerika ging het volgende gezegde toen rond: “Je bent geen wiskundige als je nooit aan Purdue geweest bent, maar je bent ook geen wiskundige als je er nog altijd bent!”. Aldus Jaap Korevaar.
 - 23 R.L. Moore (1882–1974) was een van de meest invloedrijke Amerikaanse wiskundigen uit de eerste helft van de twintigste eeuw. Wilder [46] merkt daar het volgende over op: *Whether this was due more to his famous teaching method (the ‘MOORE Method’) or to his creative work in mathematics is debatable; the current folklore seems to credit the former.*
 - 24 Bron: e-mail aan de auteurs van Dirk van Dalen.
 - 25 De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat de auteurs zich hier enigszins door hun eigen verhaal laten meeslepen. De Stellingen van Gawehn en Perelman zijn namelijk van een geheel andere orde.
 - 26 De lezer dient deze satire niet al te serieus te nemen. Het is ook impliciete zelfspot; Hugo Brandt Corstius is van wiskundige tot columnist verworpen.

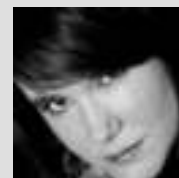
Referenties

- 1 G. Alberts, F. van der Blij en J. Nuis, eds., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*, CWI, 1987.
- 2 R.H. Bing, The Kline sphere characterization problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 644–653.
- 3 R.H. Bing, A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Annals of Math.* 56 (1952), 354–362.
- 4 R.H. Bing, *The Geometric Topology of 3-Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.
- 5 L.E.J. Brouwer, On the structure of perfect sets of points, *Proc. Akad. Amsterdam* 12 (1910), 785–794.
- 6 J. Bryant, S. Ferry, W. Mio en S. Weinberger, Topology of homology manifolds, *Ann. of Math.* (2) 143 (1996), 435–467.
- 7 G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmanichfaltigkeiten, *Math. Ann.* 21 (1883), 545–591.
- 8 S. Clatyor, Topological immersion of Peanian continua in a spherical surface, *Ann. of Math.* (2) 35 (1934), 809–835.
- 9 D. van Dalen, *Mystic, Geometer, and Intuitionist – The life of L.E.J. Brouwer. Vol. 1, The Dawning Revolution*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.
- 10 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer, een biografie*, Bert Bakker, Amsterdam, 2001.
- 11 D. van Dalen, *Mystic, Geometer, and Intuitionist – The life of L.E.J. Brouwer. Vol. 2, Hope and Disillusion*, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- 12 D. van Dalen, ed., *Companion to the Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, 2011.
- 13 R.J. Daverman, *Decompositions of Manifolds*, Academic Press, New York, 1986.
- 14 J.J. Dijkstra, M. Levin en J. van Mill, *A Short Proof of Toruńczyk's Characterization Theorems*, preprint, 2013.
- 15 A.N. Dranišnikov, On a problem of P.S. Alexandrov, *Matem. Sbornik* 135 (1988), 551–557.
- 16 R.D. Edwards, The topology of manifolds and cell-like maps, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, pp. 111–127.
- 17 R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 2nd ed., 1989.
- 18 I. Gawehn, Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 98 (1928), 321–354.
- 19 M.W. Hengeveld en A.J.L.M. van Balkom, eds., *Leerboek psychiatrie*, De Tijdstroom, Utrecht, 2005.
- 20 L. Heyting, *De wereld in een dorp, schilders, schrijvers en wereldverbeteraars in Laren en Blaricum, 1880–1920*, Meulenhoff, Amsterdam, 1994.
- 21 C. Jordan, *Cours d'analyse*, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1893.
- 22 E.R. van Kampen, On some characterizations of 2-dimensional manifolds, *Duke Math. J.* 1 (1935), 74–93.
- 23 T. Koetsier en J. van Mill, By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of mathematics, in *History of Topology*, I. M. James, ed., North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 199–239.
- 24 K. Kuratowski, Une caractérisation topologique de la surface de la sphère, *Fund. Math.* 13 (1929), 307–318.
- 25 K. Kuratowski, *Topology II*, Academic Press, New York, 1968.
- 26 J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- 27 J. van Mill, Brouwers dimensionsgrad: controverse en verwarring, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/14 (2013), 130–138.
- 28 R.L. Moore, On the foundations of plane analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 17 (1916), 131–164.
- 29 R.L. Moore, Concerning simple continuous curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* 21 (1920), 333–347.
- 30 G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv DG 0307245, 2003.
- 31 G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv DG 0303109, 2003.
- 32 G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv DG 0211159, 2002.
- 33 F. Quinn, Resolutions of homology manifolds, and the topological characterization of manifolds, *Invent. Math.* 72 (1983), 267–284.
- 34 F. Quinn, An obstruction to the resolution of homology manifolds, *Michigan Math. J.* 34 (1987), 285–291.
- 35 J.H. Roberts, A point set characterization of closed 2-dimensional manifolds, *Fund. Math.* 18 (1932), 182–193.
- 36 A. Rosenthal, Verallgemeinerungen des Raum-begriffes, *Chr. Huygens* 18 (1940), 234–250.
- 37 W.W. Schongs, Johanna Manders, electrotechnisch ingenieur (1892–1989): in het spoor van Aletta Jacobs, *De ingenieur* 107 (1995), 34–36.
- 38 D.J. Struik, Levensbericht van Jan Arnoldus Schouten (28 augustus 1883 – 20 januari 1971), *Jaarboek Ned. Akad. Wetenschappen* (1971), 94–100.
- 39 H. Toruńczyk, On CE-images of the Hilbert cube and characterizations of Q-manifolds, *Fund. Math.* 106 (1980), 31–40.
- 40 H. Toruńczyk, Characterizing Hilbert space topology, *Fund. Math.* 111 (1981), 247–262.
- 41 O. Veblen, Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 6 (1905), 83–98.
- 42 J.J. Walsh, Dimension, cohomological dimension and cell-like mappings, *Shape Theory and Geometric Topology Conference, Dubrovnik, Lecture Notes in Mathematics* 870, (S. Mardešić and J. Segal, eds.), Springer, Berlin, 1981, pp. 105–118.
- 43 A.J. Ward, The topological characterisation of an open linear interval, *Proc. London Math. Soc.* 41 (1936), 191–198.
- 44 R.L. Wilder, A converse of the Jordan-Brouwer separation theorem in three dimensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 32 (1930), 632–657.
- 45 R.L. Wilder, *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 32, American Mathematical Society, New York, 1949.
- 46 R.L. Wilder, The mathematical work of R.L. Moore: its background, nature and influence, *Arch. Hist. Exact Sci.* 26 (1982), 73–97.
- 47 G.S. Young, Jr., Spaces in which every arc has two sides, *Ann. of Math.* (2) 46 (1945), 182–193.
- 48 L. Zippin, A study of continuous curves and their relation to the Janiszewski-Mullikin theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 31 (1929), 744–770.

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden

i@ionica.nl



Het keerpunt van Eduard Looijenga

Eigenlijk is het allemaal niet zo anders in China

In 2009 reist wiskundige Eduard Looijenga (1948) voor het eerst naar China als jurylid van een wiskundecompetitie. Looijenga raakt erg onder de indruk van het niveau van de wiskunde in China en het gevoel dat alles daar in opbouw is. Na zijn emeritaat verhuist hij naar Beijing om te gaan werken bij het Mathematical Sciences Center. Looijenga ziet zijn vertrek niet als een keerpunt: "Het is min of meer hetzelfde werk als ik deed aan de Universiteit Utrecht. Ik doe nog steeds wat ik graag doe."

Hoe reageerde u toen u de eerste keer werd uitgenodigd om naar China te komen?

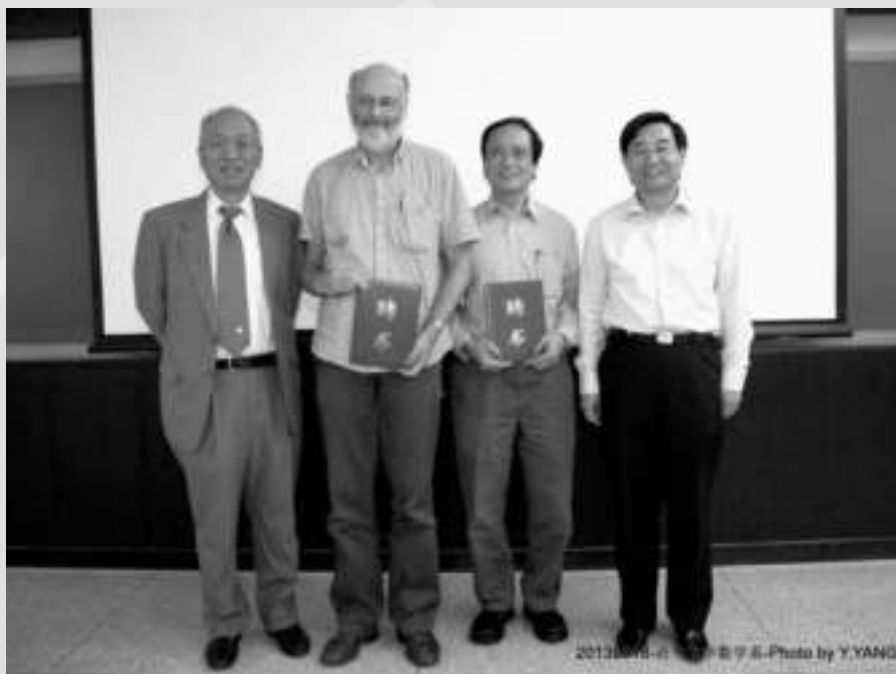
"Dat liep een beetje vreemd. Ik was de prullenmand van mijn mailbox aan het legen toen ik ineens een mail aantrof van Shing-Tung Yau, de eerste Chinese Fieldsmedailist. Dat was schrikken, ik vroeg me af wat voor mails er nog meer in de prullenmand belandden. Ik wist ook niet wat ik van die uitnodiging moest denken. Eerst leek het alleen om de opening van een instituut te gaan, en ik aarzelde. Er was geen wetenschappelijk programma en ik wilde niet alleen gaan om die opening luister bij te zetten. Maar toen kwam er een tweede mail waaruit bleek dat er ook een lidmaatschap van een jury bij hoorde, van de zogenaamde Yau-award voor scholieren. Dat leek me een stuk aantrekkelijker en ik besloot te gaan. Ook omdat ik nog nooit in China was geweest. Het was een grote verrassing hoe hoog het niveau van de scholieren was."

Overwoog u toen al om na uw emeritaat naar China te gaan?

"Nee, daar was ik niet mee bezig. Toen het emeritaat eraan kwam, vroeg ik me wel af wat ik met de rest van mijn leven wilde doen. Ik had nooit gedacht dat dit zou kunnen,

maar toen ze me vroegen, vond ik het helemaal geen gek idee. Je plant je leven niet, dingen overkomen je. Nu doe ik iets dat ik altijd al leuk heb gevonden: niet alleen onderzoek, maar ook juist het onderwijs. Die kans

krijg ik hier. Er wordt hier in China duidelijk iets opgebouwd, het is mooi om daarbij betrokken te zijn. Overigens is het heel curieus dat de mail waarin ze me een baan aanboden óók was kwijtgeraakt. Ik kreeg ineens een mail van de directeur van het instituut dat ze me een beter aanbod wilden doen. Terwijl ik niets wist van een aanbod. Toen bleek dat ik twee maanden daarvoor een mail van Yau met een aanbod voor een positie had gekregen. Zij dachten waarschijnlijk dat ik een heel goede onderhandelaar was.



Eduard Looijenga tijdens zijn 'welkomstceremonie' in Beijing

Toen moest ik even goed nadenken over het aanbod. Natuurlijk ging dat niet om het geld, ik moest vooral samen met mijn vrouw beslissen of we wilden vertrekken. Het is in zekere zin een avontuur, maar een avontuur zonder al te grote risico's. Ik ben tenslotte gepensioneerd, dus als het in Beijing toch niet goed meer bevalt, dan kan ik van de ene op de andere dag stoppen en teruggaan. Mijn contract loopt tot ik 74 ben. Ik weet niet of ik dat volhoud. Je weet niet hoe goed het geestelijk en lichamelijk welzijn nog is tegen die tijd."

Werkt u daar aan de universiteit?

"Ik ben verbonden aan het Mathematical Sciences Center van de Tsinghua Universiteit. Het centrum staat in principe los van de universiteit, maar de mensen die er werken geven er wel college. De bedoeling is om de wiskunde-afdeling van de universiteit een soort boost te geven. Je hebt twee universiteiten vlak bij elkaar liggen, de Peking Universiteit en die van Tsinghua, daartussen is een gezonde rivaliteit. Een beetje zoals tussen Harvard en MIT. Het zijn allebei top-universiteiten, maar hen trof een heel verschillend lot tijdens de culturele revolutie. De Peking Universiteit is er min of meer ongeschonden doorgekomen, maar bij Tsinghua is er destijds heel rigoureuze afstand genomen van elk zuiver wetenschappelijk onderzoek. Die mensen zijn weggestuurd, waarschijnlijk naar het platteland om aardappelen te rooien. Dat gebeurde ruim veertig jaar geleden, maar die effecten zijn nog steeds voelbaar. Men hoopt nu het instituut weer op te bouwen en Chinezen die in het buitenland carrière hebben gemaakt te verleiden om terug te komen."

Zijn de studenten anders dan in Nederland?

"Er is een ander arbeidsethos. Mijn college was bijvoorbeeld ingepland voor maandagochtend, de eerste dag van de week en dan gelijk om acht uur 's morgens. Dat vond ik wel wat veel van het goede en ik vroeg de administratie om het college te verplaatsen. Het tweede dat me werd aangeboden waren avondcolleges tot acht uur 's avonds. Ook dat werd me een beetje te gortig en dat is veranderd, maar het geeft aan dat de studenten van acht uur 's morgens tot acht uur 's avonds beschikbaar zijn om college te lopen. Een half etmaal per dag. De onderwijs-taak is niet zwaarder dan ik gewend ben, maar een vak met vier uur college per week had ik heel lang niet gedaan. Ik geef een inleidend vak aan masterstudenten, maar de

beste studenten zijn bachelorstudenten. Zij hebben de ambitie om na hun bacheloropleiding verder te studeren aan een topuniversiteit in de Verenigde Staten."

Dus de masterstudenten die overblijven in China zijn zeker niet zo goed?

"Ik heb over kwaliteit niets te klagen, ook dat zijn nog heel goede studenten. De Peking Universiteit en Tsinghua Universiteit kunnen samen jaarlijks ongeveer zesduizend studenten aannemen. Het aantal aanmeldingen overstijgt de miljoen. Het is me nog steeds onduidelijk hoe ze de selectie doen. Het lijkt me ondoenlijk om alle aanmeldingen serieus te bekijken. Maar de studenten die in de zaal zitten zijn dus erg goed."

U geeft uw colleges in het Engels, spreekt u wel Chinees?

"Nee, en dat zie ik ook niet gauw gebeuren. Ik blijf het proberen, maar ik maak me daar niet al te veel illusies over. Op mijn leeftijd gaat het ook minder makkelijk. Je moet bij het Chinees zoveel leren voor je een zinnetje goed kunt begrijpen of uitspreken. Allereerst zijn er de karakters: pakweg vijftienghonderd die regelmatig gebruikt worden en duizend die iets minder gangbaar zijn. Een ontwikkelde Chinees kent die allemaal, maar ze worden niet even vaak gebruikt. Als je er een stuk of vijftig kent, dan herken je al de helft van de karakters die je om je heen ziet. De karakterfrequentie piekt daar. En dan komt de uitspraak er nog eens bij. Chinees is een toontaal; elk karakter kan op verschillende manieren worden uitgesproken. Er zijn vier tonen en dat let erg nauw. Als je bijvoorbeeld een taxichauffeur instructies geeft om naar de Tsinghua Universiteit te gaan dan moet je de naam Tsinghua een aantal keren herhalen voor zo'n man het ineens begrijpt: "Ah, Tsinghua". Terwijl jij zelf denkt dat je het de hele tijd al zo uitsprak. Het is opmerkelijk hoe goed de studenten Engels spreken. Ik ga ervan uit dat de energie die hen dat kost, vergelijkbaar is met de moeite die ik moet getroosten om het Chinees machtig te worden."

Hoe is de status van wiskunde aan de universiteit?

"Het is voor mij moeilijk om specifiek iets over wiskunde te zeggen. De academicus in het algemeen heeft in China een wat hogere status dan in Nederland. Dat hangt samen met het confucianisme, dat veel waarde hecht aan geleerdheid. Dat zie je aan veel

dingen. In september zag ik op de campus bijvoorbeeld allemaal studenten lopen met bossen bloemen. Dat vond ik opmerkelijk, maar ik schonk er verder geen aandacht aan. Tot ik de volgende dag zelf zo'n bos bloemen kreeg van een oud-student die me vertelde dat het *teacher's day* was. Dat zie je in Nederland niet zo snel gebeuren."

Wat heeft u het meest verbaasd in China?

"Eigenlijk dat het allemaal niet zo anders is. Je verwacht dat je terecht komt in een wereld die volstrekt anders is dan de onze, maar ik ontdekte dat de verschillen veel kleiner zijn dan ik me had voorgesteld. Als je op die campus rondloopt, dan zie je natuurlijk allemaal Chinese studenten. Maar hun manier van kleden, hun gedrag, dat ze voortdurend op mobieltjes kijken, dat is allemaal hetzelfde als in Nederland. Het soort mails die je van het wiskunde-instituut krijgt zijn ook vergelijkbaar met wat je in Nederland ziet. De dingen worden niet zoveel anders aangepakt. Wel is het hele idee van privacy volstrekt onderontwikkeld. Het wachtwoord bij mijn e-mailaccount was de datum dat het instituut begon, waarschijnlijk had iedereen hetzelfde wachtwoord. De collegezaal hangt vol met camera's. Ik was al gewaarschuwd dat ik altijd op tijd moet zijn bij mijn colleges, anders kunnen studenten me rapporteren bij de leiding. Die studenten doen dat niet zo gauw, maar ik stond toch wel even gek te kijken naar alle webcams in de collegezaal. Even verderop houdt iemand in een controlekamer via allemaal grote schermen in de gaten wat er gebeurt in alle collegezalen."

Vindt u dat niet ongemakkelijk?

"Ik vind het geen goed idee, maar ik vrees dat ik geen keus heb."

Zou u collega's aanraden om na hun emigratie naar Beijing te komen?

"Iedereen zit anders in elkaar. Maar wat heb je te verliezen? Je kunt het gewoon proberen en als het na een jaar niet bevalt, dan ga je terug."

Zie ook Eduard Looijenga's verslag van zijn eerste bezoek aan China: 'Opklaringen in het Oosten', NAW 5/11, juni 2010.

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar i@ionica.nl.

Ruud Brekelmans

School of Economics and Management
Tilburg University
r.c.m.brekelmans@uvt.nl

Carel Eijgenraam

Centraal Planbureau
Den Haag
c.j.j.eijgenraam@cpb.nl

Dick den Hertog

School of Economics and Management
Tilburg University
d.denHertog@uvt.nl

Kees Roos

Faculty EEMCS
TU Delft
c.roos@tudelft.nl

Research

A mixed integer non-linear optimization approach to optimize dike heights in the Netherlands

In the Netherlands, dike rings protect a large part of the country against flooding. In this article, Ruud Brekelmans, Carel Eijgenraam, Dick den Hertog and Kees Roos describe an optimization model that has been developed to optimize dike heights in the Netherlands. The project led to a saving of €7.8 billion and has won the prestigious international Franz Edelman Award.

This paper is based on the material in two earlier papers, [1] and [5], that were published in the journals *Operations Research* and *Interfaces*, respectively. It describes the optimization model that has been developed to optimize dike heights in the Netherlands. Moreover, it briefly describes the high impact of the results of this project on political decision making in the Netherlands. The project was awarded with the INFORMS Franz Edelman 2013 Award. For more details on the validation of the model, the method used, and the political process and impact, we refer to these papers.

In the Netherlands, dike rings, consisting of dunes, dikes and structures, protect a large part of the country against flooding. After the catastrophic flood in 1953, a cost-benefit model was developed by van Dantzig [2] to determine optimal dike heights. The objec-

tive of the cost-benefit analysis (CBA) is to find an optimal balance between investment costs and the benefit of reducing flood damages, both as a result of heightening dikes. The question then becomes when and how much to invest in the dike ring. In [6] we improve and extend van Dantzig's model. In that paper we show how to properly include economic growth in the cost-benefit model, and how to address the question when to invest in dikes. All these models consider dike rings that consist of a homogeneous dike. This means that all parts in the dike ring have the same characteristics with respect to investment costs, flood probabilities, water level rise, et cetera.

Many dike rings in the Netherlands, however, are non-homogeneous, consisting of different segments that each have different characteristics. Differences occur, for instance, if

along a dike ring in the delta area a river dominated regime changes into a sea dominated regime, or if a dike ring contains a large sluice complex. Currently, there are dike rings with up to ten segments in the Netherlands. In this non-homogeneous case, it is not necessary and not desirable to enforce that all these segments are heightened simultaneously and by exactly the same amount. Hence, the decision problem for the non-homogeneous case concerns when and how much to invest in each individual dike segment.

In the current paper, we consider the extension of the homogeneous case in [6] to the non-homogeneous case. The research has been carried out as part of a project initiated by the government. The project's main goal is to support decision-making with respect to setting new flood protection standards for the dike rings in the Netherlands. Efficient flood protection standards can be derived from the optimal investment strategy and the resulting flood probabilities. How this can be done is explained in [5]. Here we confine ourselves to a description of the first stage: finding the



The catastrophic North Sea flood of 1 February 1953

Foto: beeldbank.rws.nl, Afdeling Multimedia Rijkswaterstaat

optimal investment strategy. In order to lay a firm base for the new standards, the 53 larger dike rings in the Netherlands need to be analysed thoroughly. This requires that particular scenarios can be analysed within a reasonable amount of time, where each scenario represents a certain instance of the model parameters such as economic growth, interest rate, water level rise, flood characteristics, investment costs and so on.

It is shown in [6] that the homogeneous case can be solved analytically. Unfortunately, we did not succeed in solving the non-homogeneous case analytically. In this paper we show how the non-homogeneous dike height optimization problem can be modelled as a Mixed Integer Non-linear Programming (MINLP) problem.

In addition to the MINLP formulation of the decision problem, we constructed an iterative optimization algorithm that speeds up the solution time considerably. The algorithm has been implemented in AIMMS, which has subsequently been integrated in user-friendly software to perform the dike ring analysis

[3–4]. The final results have had a big impact in the political decision making process.

Non-homogeneous Optimization Problem

Problem formulation

In this section we present our model for the non-homogeneous dike height optimization problem. The model is an extension of the homogeneous problem, as introduced in [6]. The reader is referred to [6] for the foundation of the common model parts. A dike ring protects a certain area of land against flooding. The number of segments is denoted as L ($L \geq 1$). A dike ring is said to be non-homogeneous if $L > 1$, and homogeneous otherwise. All segments can be heightened independently of each other. Moreover, each segment has its own properties with respect to investment costs and flood probabilities. To indicate the dependence of a model parameter on a particular dike segment, a subscript l ($l = 1, \dots, L$) will be added to this parameter. The set of all segments is denoted by $\mathcal{L}$.

The objective is to find an investment plan that minimizes the expected total costs. Only

investments in a finite planning horizon $[0, T]$ are considered. An investment plan is represented by a tuple $(\mathbf{U}, \mathbf{t})$, with $\mathbf{U} \in \mathbb{R}_+^{L \times (K+1)}$ and $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_K)^T$. The vector $\mathbf{t}$ represents the possible timings of dike segment heightenings, where $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_K < T$. Hence, $K + 1$ is an upper bound on the number of segment heightenings in the planning horizon. For notational convenience, we denote $t_{K+1} = T$. The matrix $\mathbf{U}$ represents the segment heightenings, where the element $\mathbf{U}_{lk} = u_{lk}$ is the heightening (cm) of segment l at time t_k ($l = 1, \dots, L$, $k = 0, \dots, K$). Of course, heightenings are assumed to be non-negative. If $u_{lk} = 0$, then this means that segment l is not heightened at time t_k . The l -th row of $\mathbf{U}$, with the $K + 1$ heightenings of dike segment l , is denoted by $\mathbf{u}^{(l)}$.

Throughout the remainder of this paper we use the following notation for the cumulative segment heightening and the absolute segment height at time t ($t \geq 0$):

$$h_{lt} = \sum_{k: t_k \leq t} u_{lk} \quad \text{and} \quad H_{lt} = H_{l0}^- + h_{lt},$$

where H_{l0}^- is the absolute height of segment l immediately prior to a possible heightening at time $t = 0$. For notational convenience, we also use $h_{lk} = h_{lt_k}$ and $H_{lk} = H_{lt_k}$. Note that it follows from this definition that the segment height is a non-decreasing step function. Moreover, this implicitly means that heightenings are measured at the moment that the investment actions are completed. A lead time is not modelled.

The flood probability of segment l at time t is given by

$$P_{lt} = P_{l0}^- \exp(\alpha_l(\eta_l t - h_{lt})), \quad (1)$$

with P_{l0}^- (1/year) the initial flood probability, α_l (1/cm) the parameter of the exponential distribution for extreme water levels and η_l (cm/year) the structural increase of the water level. Both the hydraulic conditions and the quality of the dike segment are summarized by one indicator: height above the level that corresponds to the flood probability P_{l0}^- . The weakest segment fully determines the flood probability of the entire dike ring. Hence, we define the flood probability of the entire dike ring at time t by $P_t = \max_{l \in \mathcal{L}} P_{lt}$.

A property that all segments have in common is that they protect the same area of land. Hence, if there is a flood, the damage does not depend on the segment in which a breach occurs. Furthermore, the potential

damage costs increase in time with the economic growth rate γ . The damage costs do, however, also depend on the resulting height of the water level within a dike ring after a flood. In particular, along rivers the damage costs increase by the rise in the height of the lowest segment (in absolute height). Putting all this together yields the following damage costs, at time t , in the case of a non-homogeneous dike ring:

$$V_t = V_0^- \exp \left(\gamma t + \zeta \left(\min_{l \in \mathcal{L}} H_{lt} - \min_{l \in \mathcal{L}} H_{l0}^- \right) \right),$$

with V_0^- the initial damage costs and ζ (1/cm) the parameter that represents the increase in damage costs depending on the height of the lowest dike segment.

The expected damage costs at time t is given by the product of the flood probability and the damage costs:

$$\begin{aligned} S_t &= P_t V_t \\ &= \max_{l \in \mathcal{L}} S_{l0}^- \exp \left(\beta_l t - \alpha_l h_{lt} + \zeta \left(\min_{l \in \mathcal{L}} H_{lt} - H_{l0}^- \right) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

where $S_{l0}^- = P_{l0}^- V_{l0}^-$, $\beta_l = \alpha_l \eta_l + \gamma$ and $l_0 = \arg \min_l H_{l0}^-$. By using the fact that the segment heights remain unchanged in the interval $[t_k, t_{k+1})$, the total expected damage in this interval can be written as

$$\begin{aligned} &\int_{t_k}^{t_{k+1}} S_t \exp(-\delta t) dt \\ &= \exp(-\zeta H_{l_0} 0) \\ &\quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp \left(-\delta t + \zeta \min_{l \in \mathcal{L}} H_{lt} \right) \\ &\quad \cdot \max_{l \in \mathcal{L}} \left(S_{l0}^- \exp(\beta_l t - \alpha_l h_{lk}) \right) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

where δ is the discount rate.

From an optimization point of view there are two problems with the integral in (3):

- The minimum absolute segment height $\min_l H_{lt}$ cannot be incorporated in an optimization model as a convex constraint.
- Even though the segment heights do not change during the interval $[t_k, t_{k+1})$, the segment flood probabilities P_{lt} as defined by (1) increase monotonically in time. Hence, the segment l for which the maximum flood probability is obtained may change during the interval $[t_k, t_{k+1})$.

If we want to use (3) in a MINLP model, then we have to make some assumptions about these two issues. The minimum operator in

(3) refers to the fact that the size of the damage depends on the segment that is lowest in absolute height. Since in practice it is usually clear which of the segments along rivers is the lowest in absolute height, it is assumed that this segment is known in advance. Let this dike segment be denoted by l^* . It turns out that, for the dike rings in the Netherlands, this assumption is always satisfied.

An obvious approach to deal with the maximum operator in (3) is to interchange the integral and the maximum operator. Note that this yields a lower bound for (3), which introduces an error only if the segment for which the maximum is obtained changes within the interval $[t_k, t_{k+1})$. Clearly, the effect of the error will be more serious if the length of the interval is longer, and consequently this should be taken into account when defining the intervals. In the implementation of the MINLP model to be introduced in the next subsection, we shall make sure that these intervals are small enough to guarantee a sufficiently accurate approximation.

Using the two assumptions from above, (3) can be approximated by

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{t}) &= \max_{l \in \mathcal{L}} \frac{S_{l0}^-}{\beta_{l1}} \\ &\quad \exp \left(\zeta (H_{l^* t_k} - H_{l_0}^-) - \alpha_l h_{lk} \right) \\ &\quad \cdot \left[\exp(\beta_{l1} t_{k+1}) - \exp(\beta_{l1} t_k) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

with $\beta_{l1} = \beta_l - \delta$. The total expected damage in the planning horizon $[0, T)$ is then approximated by

$$\mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{t}) = \sum_{k=0}^K \mathcal{E}_k(\mathbf{U}, \mathbf{t}).$$

Note that for a fixed investment plan, it is possible to evaluate the size of the approximation error, since we can accurately evaluate the minimum and maximum operators in (3). This evaluation can be used to obtain a true comparison between investment plans with different discretization schemes.

To take into account the period after the planning horizon, it is assumed that there are no changes to the expected damage after T , and hence no more investments are required. Thus, the discounted expected damage after the planning horizon is $S_T \int_T^\infty \exp(-\delta t) dt$, which can be approximated analogously to (4), i.e.,

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}, \mathbf{t}) = \max_{l \in \mathcal{L}} \frac{S_{l0}^-}{\delta} \exp \left(\beta_{l1} T - \alpha_l h_{lK} + \zeta (H_{l^* t_K} - H_{l_0}^-) \right). \quad (5)$$

The investment costs associated with the heightening of segment l at time t_k depend, of course, on the actual amount of the heightening. The costs, however, are assumed to be independent of the heightening of other segments, regardless of the moments of these heightenings. We use the same investment cost function as introduced by [1], and refer to it as *exponential* investment costs. For any *positive* heightening u_{lk} , the exponential investment costs are given by

$$\begin{aligned} I_{lk}(\mathbf{u}^{(l)}) &= (c_l + b_l u_{lk}) \exp \left(-\lambda_l \sum_{i=0}^k u_{li} \right), \\ \mathbf{u}^{(l)} &\in \mathbb{R}_+^{K+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Hence, the investment costs depend on the amount of the heightening and the amount of the total heightening up to time t_k . Since there are no investment costs when there is no heightening, the investment cost function is discontinuous at zero, i.e.,

$$\mathcal{I}_{lk}(\mathbf{u}^{(l)}) = \begin{cases} I_{lk}(\mathbf{u}^{(l)}) & \text{if } u_{lk} > 0, \\ 0 & \text{if } u_{lk} = 0. \end{cases}$$

The total discounted investment costs in the planning horizon are then given by

$$\mathcal{I}(\mathbf{U}, \mathbf{t}) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=0}^K \mathcal{I}_{lk}(\mathbf{u}^{(l)}) \exp(-\delta t_k).$$

Since the objective is to minimize the sum of the investment costs and expected damage costs, the resulting optimization model can now be formulated as

$$\begin{aligned} &\min I(\mathbf{U}, \mathbf{t}) + \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{t}) + \mathcal{R}(\mathbf{U}, \mathbf{t}) \\ &\text{s.t. } \mathbf{U} \in \mathbb{R}_+^{L \times (K+1)}, \\ &\quad t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_K < T. \end{aligned} \quad (7)$$

MINLP model

This section discusses how the general dike height optimization problem (7) can be transformed into a mathematical optimization model that can be solved using optimization solvers. The problem as stated by (7) can be considered as a Non-Linear Programming (NLP) model since the decision variables $\mathbf{U}$ and $\mathbf{t}$ are continuous and the objective function's components are clearly non-linear.

Dike ring	Segments	MINLP objective (M€)	True objective (M€)	Solution time (min)
10	4	107.51	107.51	0.52
13	4	10.38	10.38	0.07
14	2	94.04	94.04	0.54
16	8	1044.45	1046.08	6.24
17	6	377.05	377.37	3.33
21	10	217.40	217.71	2.23
22	5	373.98	374.08	7.62
36	6	395.65	395.65	60.19
38	3	136.26	136.29	59.33
43	8	486.72	488.10	1.65
47	2	16.57	16.57	8.54
48	3	42.92	42.92	2.77

Table 1 Results optimization algorithm for a selection of dike rings.

From an optimization point of view, however, there are some issues that prevent us from actually solving the problem as stated by (7): the discontinuity of the investment cost functions at zero, and the approximation error of the expected damage in (4). The latter issue forces us to discretize the planning horizon, since continuous time variables could result in large intervals and consequently serious approximation errors. The discontinuity of the investment cost function can be resolved by discretization of the heightenings as well, or by adding binary decision variables that indicate whether a heightening is actually greater than zero or not. If both the moments and the amounts of the heightenings are discretized, then, theoretically, the problem can be solved using a dynamic programming approach. Unfortunately, the state space grows too large if multiple segments are considered, which implies that a dynamic programming approach is not applicable. Therefore, we consider a MINLP approach with discretization of the planning horizon only.

Next, the reformulation of problem (7) into a MINLP model is discussed. We assume that a discretization scheme $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_{K+1})$ with $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_K < t_{K+1} = T$ has been prefixed. The MINLP model then becomes:

$$\min \sum_{l=1}^L \sum_{k=0}^K \exp(-\delta t_k)(c_l y_{lk} + b_l u_{lk}) \cdot \exp\left(-\lambda_l \sum_{i=0}^k u_{li}\right) + \sum_{k=0}^K E_k + R \quad (8)$$

$$\text{s.t. } E_k \geq \frac{S_{l0}^-}{\beta_{1l}} \exp\left(\zeta(H_{l*} - H_{l0}^-) - \alpha_l h_{lk}\right) \cdot \left[\exp(\beta_{1l} t_{k+1}) - \exp(\beta_{1l} t_k)\right], \quad (9)$$

$$l = 1, \dots, L, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$R \geq \frac{S_{l0}^-}{\delta} \exp\left(\beta_{1l} T - \alpha_l h_{lK}\right) + \zeta(H_{l*} - H_{l0}^-), \quad (10)$$

$$l = 1, \dots, L,$$

$$h_{lk} = \sum_{i=0}^k u_{li}, \quad (11)$$

$$l = 1, \dots, L, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$H_{lk} = H_{l0}^- + h_{lk}, \quad (12)$$

$$l = 1, \dots, L, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$0 \leq u_{lk} \leq y_{lk} M, \quad y_{lk} \in \{0, 1\}, \quad (13)$$

$$l = 1, \dots, L, \quad k = 0, \dots, K,$$

$$h_{lk}, H_{lk}, E_k, R \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

$$l = 1, \dots, L, \quad k = 0, \dots, K.$$

The objective function (8) includes the exponential investment costs with the fixed cost component c_l multiplied by y_{lk} . The binary variables y_{lk} combined with (13) are required to ensure that either $u_{lk} = 0$ and the investment costs in the objective function are zero, or $u_{lk} > 0$ and the investment costs are equal to $I_{lk}(\mathbf{u}^{(l)})$. In (13), M denotes an upper bound of the highest possible dike heighten-

ing. The auxiliary variables E_k and R represent the expected damage costs in $[t_k, t_{k+1})$ and $[T, \infty)$ respectively. Constraints (9) and (10) are used to model the damage costs as convex constraints without using the maximum operator, as occurs in (4).

It is clear that the optimal solution to problem (8)–(14) is fully determined by the decision variables u_{lk} ($l = 1, \dots, L, k = 0, \dots, K$). These decision variables could be considered the ‘pure’ decision variables of problem (8)–(14), which, together with the discretization scheme $\mathbf{t}$, represent the investment plan $(\mathbf{U}, \mathbf{t})$ that answers the fundamental questions of *when* and *how much* should be invested in dike heightening.

Implementation issues

One of the project goals, set by Deltares, was that the model (8)–(14) could be solved for all major dike rings in a reasonable amount of time without the necessity to tune the algorithm’s settings for specific dike rings. We were able to design a generic solution method that can solve any particular instance of the model without any fine-tuning. The model (8)–(14) has been implemented in AIMMS. Moreover, the software company HKV has integrated this model in the software package OptimiseRing [3–4], used by the actual performers of the cost-benefit analysis. We used the AIMMS Outer Approximation (AOA) method that is implemented in AIMMS to solve the MINLP problems.

A heuristic algorithm is needed because MINLP (8)–(14) cannot be solved in reasonable time for dike rings with more than six segments. For example, we used a dedicated discretization scheme to reduce the number

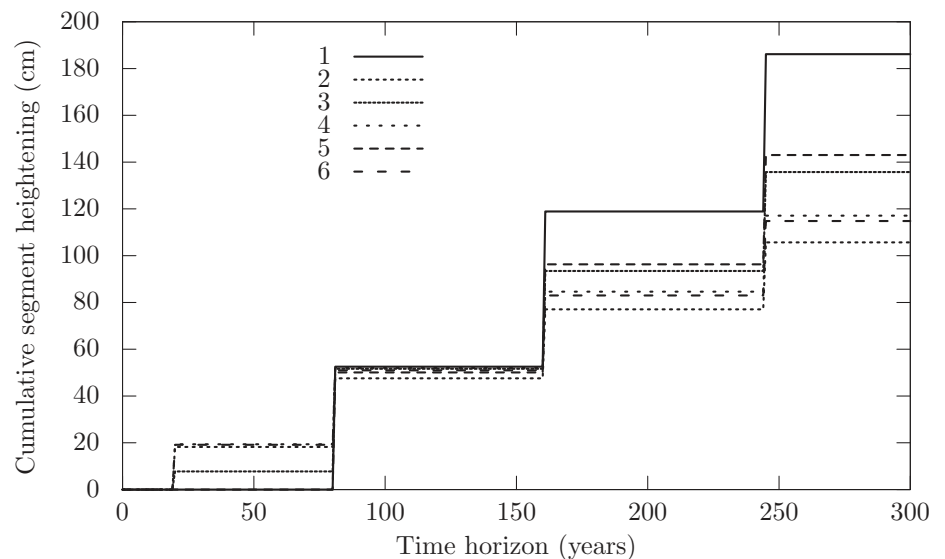


Figure 1 Cumulative segment heightenings for a dike ring with six segments.

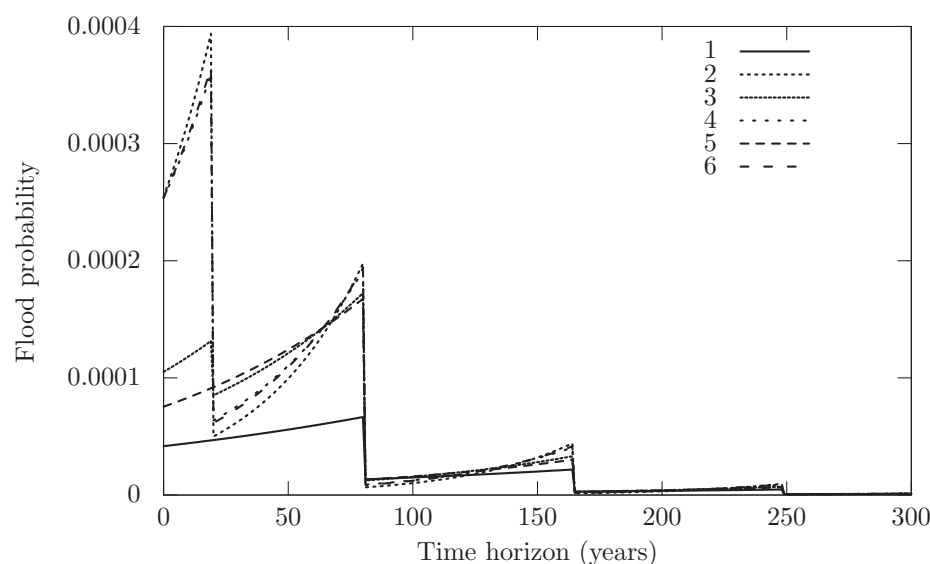


Figure 2 Segment flood probabilities for the same dike ring as in Figure 1.

of variables, and we added (nearly) redundant constraints to reduce the search space. Moreover, since it is clear that model (8)–(14) requires the input of several parameters, which in practice are often uncertain, we also developed a regret approach to obtain a solution that is robust with respect to these uncertainties. For more details we refer to [1].

Numerical results

As discussed in the previous section, the optimization algorithm has been implemented in AIMMS using the AOA solver. All numerical results in this section were obtained using AIMMS 3.8.5 with CPLEX 11.2 and CONOPT 3.14G on a PC with an Intel Core 2 CPU processor.

A database with data about the dike rings in the Netherlands was provided by Deltares. This database contains all relevant parameters for the non-homogeneous dike height optimization problem.

Overview dike rings

A selection of the dike rings from Deltares'

database was optimized by our optimization algorithm. For all experiments we used common values for the discount rate per year ($\delta = 0.0247$) and the economic growth rate per year ($\gamma = 0.019$). A summary of the results for the exponential investment costs is shown in Table 1. The first two columns give the dike ring number along with the number of segments in the dike ring. The third column gives the MINLP model's objective value of the algorithm's final iteration. The fourth column gives a true evaluation of this objective value that does not suffer from an approximation error in the expected damage. It can be seen that the MINLP's objective is indeed a lower bound and that the approximation error is very modest, which indicates that the approximation of the expected damage is suitable for our MINLP model.

The fifth column in Table 1 gives the solution time in minutes. There does not appear to be a clear relationship between the number of segments and the solution time. This is mainly due to the fact that the discretization scheme is created in such a way that the

number of resulting decision variables does not depend on the number of segments. In other words, a dike ring with more segments has a rougher discretization scheme than a dike ring with less segments, as explained in [1].

For the same set of experiments, Table 2 shows the moments of the first three updates of the dike rings, which correspond to one or more segment heightenings taking place at the same point in time. In addition, the table shows the effect the heightenings have on the dike ring's flood probability, i.e., the flood probabilities just before and just after the updates are listed. For the new safety standards in this example, there are five out of twelve dike rings that require immediate segment heightenings at $t = 0$. The results also clearly indicate that the flood probabilities just prior to a heightening decrease over time. This is a result of the economic growth, which increases the damage costs if a flood occurs, and therefore it is beneficial to let the flood probabilities decrease over time.

Let us take a closer look at the resulting solution for a dike ring with six segments. Figures 1 and 2 give a graphical overview of the final solution obtained with the iterative algorithm. Figure 1 shows the cumulative heightenings of the six segments during the 300-year planning horizon. Figure 2 shows the resulting segment flood probabilities. It can be seen that the two segments 1 and 5 are not heightened together with the other segments at $t = 20$. Figure 2 also shows why it is not necessary to heighten these two segments: their flood probabilities are still very low compared to the other segments. Although in this particular example there is a moment at which not all segments are heightened simultaneously, the figure clearly demonstrates why simultaneity very frequently leads to very good, or even optimal, results. Recall that a dike ring's flood probability is determined by the maximum segment flood probability. Hence,

Dike ring	First heightening			Second heightening			Third heightening		
	t	$P^-(t)$	$P^+(t)$	t	$P^-(t)$	$P^+(t)$	t	$P^-(t)$	$P^+(t)$
10	68	6.6×10^{-4}	6.7×10^{-5}	156	1.2×10^{-4}	1.4×10^{-5}	244	2.5×10^{-5}	2.9×10^{-6}
13	140	1.8×10^{-4}	1.6×10^{-5}	244	3.7×10^{-5}	2.5×10^{-6}	-	-	-
14	36	1.5×10^{-4}	2.3×10^{-5}	104	4.6×10^{-5}	6.5×10^{-6}	168	1.3×10^{-5}	1.8×10^{-6}
16	0	5.0×10^{-4}	2.8×10^{-4}	40	3.7×10^{-4}	7.7×10^{-5}	105	1.2×10^{-4}	2.5×10^{-5}
17	20	3.8×10^{-4}	9.1×10^{-5}	81	1.9×10^{-4}	1.3×10^{-5}	165	4.3×10^{-5}	2.9×10^{-6}
21	0	5.0×10^{-4}	2.5×10^{-4}	45	5.2×10^{-4}	5.3×10^{-5}	120	1.5×10^{-4}	1.4×10^{-5}
22	7	5.2×10^{-4}	4.5×10^{-5}	100	1.1×10^{-4}	8.5×10^{-6}	200	2.3×10^{-5}	1.2×10^{-6}
36	36	1.1×10^{-3}	1.7×10^{-4}	102	4.1×10^{-4}	6.3×10^{-5}	165	1.5×10^{-4}	2.4×10^{-5}
38	0	6.7×10^{-4}	2.7×10^{-4}	28	4.6×10^{-4}	1.9×10^{-5}	126	8.6×10^{-5}	3.2×10^{-6}
43	0	2.7×10^{-4}	2.7×10^{-4}	30	4.6×10^{-4}	3.9×10^{-5}	120	9.7×10^{-5}	7.3×10^{-6}
47	30	2.5×10^{-4}	1.2×10^{-5}	120	4.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	200	1.6×10^{-5}	5.8×10^{-7}
48	0	2.8×10^{-4}	1.2×10^{-5}	77	3.0×10^{-5}	2.9×10^{-6}	154	7.1×10^{-6}	6.6×10^{-7}

Table 2 Moments (in years measured from the start of the planning horizon) of the first three dike ring updates and the flood probabilities just before ($P^-(t)$) and after ($P^+(t)$) the updates.



if a single segment is not heightened simultaneously with the other segments, then it is likely that this segment's flood probability will become, or even remain, the dike ring's maximum flood probability. The benefit of heightening the other segments, in terms of decreasing the expected damage, is therefore usually smaller than the incurred investment costs. Finally, we remark that this is an example of a dike ring where, in the optimal solution, not all segments are always heightened simultaneously. Very often this is the case, however.

Practical impact

The ultimate goal of our project was to give recommendations for new flood protection standards in the Netherlands. In [5] it is described how to construct flood protection standards based on the optimal investment strategy resulting from our MINLP model.

Based on the final results, published in [7–8], we concluded that increasing the legal protection standards of all dike-ring areas tenfold, as the Second Delta Committee recommended, is unnecessary. The current protection standards are (more than) appropriate, except for three regions: a part of the dike rings along the Rhine and Meuse Rivers (i.e., part of the areas that now have a standard of 1/2000 or 1/1250 per year), the southern part of dike ring 8 Flevoland (comprising the large, rapidly growing city of Almere), and some dike rings (e.g., 20) near Rotterdam.

The Water Advisory Committee, chaired by Crown Prince (currently the King) Willem-Alexander, discussed the final report of the CBA WV21 [7] and endorsed our results in a letter dated 9 March 2012. The House of Parliament discussed the report on 5 December 2011 and 4 April 2012. In an unanimous motion on 17 April 2012, the parliament asked the government to present a concrete proposal for new legal standards in 2014, explicitly referring to the three regions named in [7–8] and under the condition that improvements are justified by a CBA. The state secretary of the Ministry of Infrastructure and the Environment (I&M) followed the report's results and recommendation: A tenfold increase in protection standards for all dike-ring areas is not needed and only the protection standards in the three regions named in the report need improvement.

The state secretary therefore instructed the Delta Commissioner to adapt, as necessary, the protection standards derived for these areas according to local situations, and to ensure that a minimal protection level is guaranteed everywhere in a dike ring area. On 26 April 2013, the Minister of I&M, Melanie

Schultz van Haegen, confirmed these conclusions in a policy letter to the parliament.

The Delta Commissioner has announced that his proposal for new flood protection standards will closely follow the main conclusions of this project, which have already been recognized in discussions with the water boards and the provinces. In 2014, the cabinet will take a decision on these proposals. In 2015, the final decision on the improvement of these protection standards will be taken in parliament, such that new standards — after approval of the law in parliament — will be legally effective by 2017. Finally, in a letter dated 27 November 2012, the chairman of the renowned Second Delta Committee agreed with these conclusions, which clearly deviate from the committee's earlier advice. Compared to this earlier recommendation, this successful application of operations research yields both a highly significant increase in protection for these regions (in which two-thirds of the benefits of the proposed improvements accrue) and approximately 7.8 billion Euro in cost savings. ◀

Acknowledgements

We wish to thank all members of the project team 'Optimal safety standards' for offering us their very useful knowledge and expertise. We are particularly grateful to Jarl Kind, Carlijn Bak (both Rijkswaterstaat and Deltares) and Matthijs Duits (HKV) for their extensive support. We would like to emphasize that this project was a multi-disciplinary project and that our model relies heavily on many research results carried out by the following organizations: CPB Netherlands Bureau for Economic Policy Analysis, Rijkswaterstaat, Deltares, HKV, KNMI, and Ministry of Infrastructure and the Environment. Without them, this project would not have been possible. We also wish to thank the editors of both *Operations Research* and *Interfaces* for getting permission to combine parts of the papers [1] and [5] in the current paper.

References

- 1 R.C.M. Brekelmans, D. den Hertog, C. Roos and C.J.J. Eijgenraam, Safe dike heights at minimal costs: The non-homogeneous case, *Operations Research* 60 (2012), 1342–1355.
- 2 D. van Dantzig, Economic decision problems for flood prevention, *Econometrica* 24 (1956), 276–287.
- 3 M.T. Duits, *OptimaliseRing. Technische documentatie van een numeriek rekenmodel voor de economische optimalisatie van veiligheidsniveaus van dijkkringen. Versie 2.0*, HKV rapport PR1377, HKV Lijn in Water, 2009 (in Dutch).
- 4 M.T. Duits, *OptimaliseRing. Testrapport. Versie 2.0*, HKV rapport PR1377, HKV Lijn in Water, 2009 (in Dutch).
- 5 C.J.J. Eijgenraam, J. Kind, C. Bak, R.C.M. Brekelmans, D. den Hertog, M. Duits, C. Roos, P. Vermeer and W. Kuijken, Economically efficient standards to protect the Netherlands against flooding, *Interfaces* 44 (2014), 1–15.
- 6 C.J.J. Eijgenraam, R.C.M. Brekelmans, D. den Hertog and C. Roos, Flood prevention by optimal dike heightening, under review for *Management Science* (2014).
- 7 J. Kind, *Maatschappelijke kosten-batenanalyse Waterveiligheid 21e eeuw* (Cost-benefit analysis water safety 21st century), Technical Report 1204144-006-ZWS-0012, Deltares, Delft, 2011 (in Dutch).
- 8 J. Kind, Economically efficient flood protection standards for the Netherlands, to appear in *Journal of Flood Risk Management* (2014).

Sonja Cox

Seminar für Angewandte Mathematik

Departement Mathematik

ETH, Zürich

sonja.cox@sam.math.ethz.ch

Onderzoek Stieltjesprijs 2013

Stochastische partiële differentiaalvergelijkingen

Op de WONDER-lezingenmiddag van 13 december 2013 is de Stieltjesprijs 2012 uitgereikt aan Sonja Cox. Deze jaarlijkse prijs eert het beste wiskundig proefschrift verdedigd aan een Nederlandse universiteit in het desbetreffende jaar. Sonja promoveerde in Delft op het proefschrift *Stochastic Differential Equations in Banach Spaces: Decoupling, Delay Equations and Approximations in Space and Time* bij promotor Jan van Neerven. Naar aanleiding van deze prijs vertelt zij hier over haar onderzoeksgebied; in het bijzonder wordt uitgelegd wat een stochastische partiële differentiaalvergelijking is en hoe men die numeriek kan simuleren.

Stel u wilt de oplossing van een stochastische partiële differentiaalvergelijking (SPDV) simuleren... Waarschijnlijk komen er nu meteen enkele vragen bij u op, zoals:

- Wat is een stochastische partiële differentiaalvergelijking ook alweer?
- Waarom zou ik een simulatie van de oplossing willen?
- Hoe wordt een dergelijke simulatie gemaakt?
- Waarom word ik met ‘u’ aangesproken?

Doel van dit artikel is deze vier vragen te beantwoorden, beginnende bij de laatste (en makkelijkste): de gehanteerde beleefdheidsvorm is het gevolg van mijn verblijf in het Duitstalig gebied.

Enkele interessante SPDV's

Een stochastische partiële differentiaalvergelijking is een partiële differentiaalvergelijking met een ruisterm, die toevallige invloeden beoogt te beschrijven. Men kan denken aan onzekerheden in de parameters van het model, externe of interne ruisbronnen zoals thermische ruis en afrondingsfouten bij simulaties. Slechts bij hoge uitzondering is het mogelijk

de oplossing van een SPDV in gesloten vorm op te schrijven. Om toch enig inzicht te krijgen in de aard van de oplossing kan men die simuleren op een computer.

De bekendste voorbeelden van SPDV's komen uit de natuurkunde, bijvoorbeeld de stochastische Navier–Stokes-vergelijking en de Kardar–Parisi–Zhang-vergelijking (KPZ-vergelijking) — die laatste wordt onder andere gebruikt als een model voor random grensvlakken. Het probleem van deze vergelijkingen is dat ze in hoge mate niet-lineair zijn en dat men bovendien in het algemeen geïnteresseerd is in ruis die nogal ‘wild’ van aard is, de zogenaamde *additieve witte ruis* (zie onder). Voor de KPZ-vergelijking is pas recent een oplossingsconcept ontwikkeld (en dan ook voor enkele speciale gevallen), zie [7] en het artikel van Jan van Neerven in het vorige nummer van dit blad. Het is voorlopig nog een uitdaging simulatiemethoden te ontwikkelen voor deze vergelijkingen.

De stochastische Burgers-vergelijking is een voorbeeld van een SPDV die behapbaar en toch interessant is. De deterministische

Burgers-vergelijking is een vereenvoudiging van de Navier–Stokes-vergelijking, die geen turbulent gedrag kan modelleren. Dit gebrek poogt men dan op te heffen door een stochastische term toe te voegen, hetgeen de stochastische Burgers-vergelijking oplevert. Deze vergelijking is weliswaar ook in hoge mate niet-lineair (de niet-lineairiteit is nauw verwant aan de niet-lineairiteit in de KPZ-vergelijking), maar in de eendimensionale setting met additieve witte ruis is de convergentie van numerieke schema's inmiddels bewezen, zie bijvoorbeeld [1–2].

Ook de stochastische Cahn–Hilliard-vergelijking geniet veel aandacht. De deterministische Cahn–Hilliard-vergelijking, die eveneens niet-lineair is, beschrijft hoe een mengsel van twee vloeistoffen zich opsplijt in gebieden die puur uit één van de twee vloeistoffen bestaan. In een artikel uit 1970 merkt H. Cook op dat als men de Cahn–Hilliard-vergelijking uitbreidt met een stochastische term, de oplossing beter overeenkomt met de waarnemingen. Zie bijvoorbeeld [8] voor numerieke simulaties van deze vergelijking.

Het zal u niet ontgaan zijn dat de bovengenoemde vergelijkingen allemaal niet-lineair zijn. Ik noem deze voorbeelden omdat ik denk dat ze interessant zijn, maar ook omdat de theorie voor numerieke simulaties van niet-lineaire SPDV's pas in de laatste jaren goed op gang is gekomen — het is dus momenteel een interessant gebied.

Wat is een SPDV?

Een stochastische partiële differentiaalvergelijking is een partiële differentiaalvergelijking die gedreven wordt door ruis. Om dit uit te leggen, beginnen we eerst heel eenvoudig met een gewone differentiaalvergelijking: zij $u_0 \in \mathbb{R}$, zij $a: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, $a(0) = 0$, en zij $b: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Beschouw de vergelijking

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u(s) da(s) + \int_0^t b(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Het is welbekend (dan wel eenvoudig te controleren) dat de unieke oplossing van deze vergelijking wordt gegeven door

$$u(t) = e^{a(t)} \left(u_0 + \int_0^t e^{-a(s)} b(s) ds \right), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Stel nu dat de afbeeldingen $\int_0^t a(s) ds$ en $\int_0^t b(s) ds$ stochastisch zijn, dat wil zeggen, zij $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ een kansruimte, zij voor elke $t \in [0, \infty)$ toevalsgetallen $\Omega \ni \omega \mapsto A(t, \omega) \in \mathbb{R}$ en $\Omega \ni \omega \mapsto B(t, \omega) \in \mathbb{R}$ gegeven (met andere woorden: $A, B: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zijn stochastische processen), en beschouw nu de vergelijking

$$U(t, \omega) = u_0 + \int_0^t U(s, \omega) dA(s, \omega) + B(t, \omega), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Voor de meeste modellen is het zeer aannemelijk dat de ruis ongecorrleerd is in de tijd. Om dat te garanderen neemt men aan dat de stochastische processen A en B *onafhankelijke incrementen* hebben, dat wil zeggen: $A(t) - A(s)$ is onafhankelijk van $\{A(r): r \in [0, s]\}$ voor alle $0 \leq s \leq t \leq \infty$. Dit heeft echter tot gevolg dat de processen A en B — mits niet op al te triviale wijze gekozen — bijna zeker (dat wil zeggen met kans één) nergens differentieerbaar zijn. Er moet dus enig werk worden verricht om een zinvolle betekenis te geven aan de oplossing van de vergelijking (3).

Om een concreet voorbeeld te geven: als $A(t, \omega) = \alpha t + \beta W(t)$, $B(t, \omega) = 0$, waarbij $W: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ een Brownse beweging is en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dan interpreteert men de integraal met betrekking tot A in (3) in het algemeen als een Itô-integraal. In dat geval wordt

de oplossing van (3) gegeven door

$$U(t, \omega) = u_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta W(t, \omega)}, \quad (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega. \quad (4)$$

Merk op dat men op grond van vergelijking (2) de term $-\frac{1}{2}\beta^2 t$ in de exponent niet direct zou verwachten — deze term ontstaat door het gebruik van de Itô-integraal.

Een goede interpretatie voor de oplossing van een stochastische *partiële* differentiaalvergelijking is nog lastiger, aangezien er dan ruis in de tijd en in de ruimte kan optreden. Een concreet voorbeeld van een SPDV is de stochastische warmtevergelijking:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} U(t, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} W(t, x), \\ (t, x) &\in [0, T] \times [0, 1]; \\ U(0, x) &= U_0(x), \quad x \in [0, 1]; \\ U(t, 0) &= U(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (5)$$

De term $+\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} W(t, x)$ wordt *additieve witte ruis* genoemd. Men kan dit interpreteren als de afgeleide in de tijd en in de ruimte van een tweedimensionaal Gaussisch veld (een soort tweedimensionale Brownse beweging). Aangezien dit toevalsveld bijna zeker zowel in de tijd als in de ruimte nergens differentieerbaar is (laat staan in de tijd *en* in de ruimte), is het niet triviaal om een interpretatie te geven aan de oplossing van (5).

In deze sectie hebben we alleen lineaire vergelijkingen beschouwd, maar hopelijk heeft u nu een idee van wat stochastische partiële differentiaalvergelijkingen zijn. Klassieke boeken over SPDV, waarin onder andere vergelijking (5) en de stochastische Burgers-vergelijking worden behandeld, zijn [5] en [6].

In [10] worden SPDV's met niet-Gaussische ruis behandeld. Een mooie inleiding voor SPDV's geïnterpreteerd als SDV's in een Banach ruimte is te vinden in [9].

Numerieke methoden

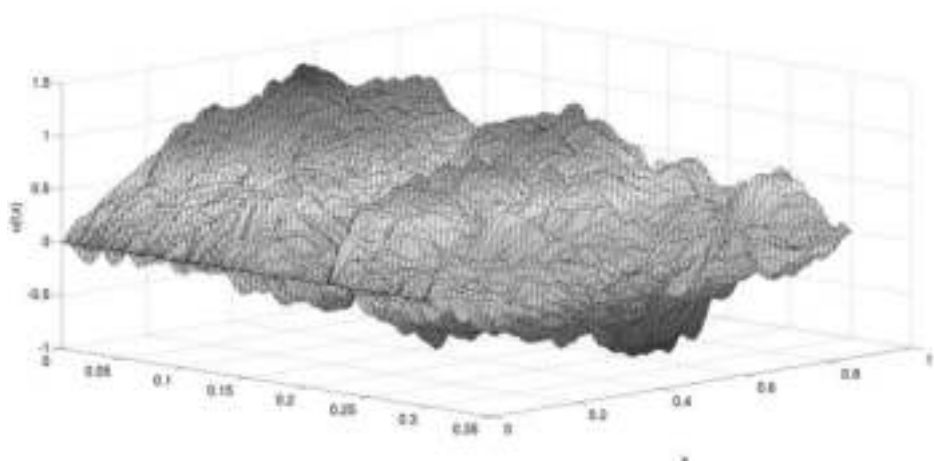
Het verschil tussen een simulatie van een deterministische PDV en een stochastische PDV is uiteraard dat men — naast discretisaties in de ruimte en de tijd — ook een discretisatie in de waarschijnlijkheidsruimte moet maken. Alvorens dat te doen dient men zich de vraag te stellen waarin men geïnteresseerd is. In sommige gevallen volstaat wellicht een plaatje van één mogelijk oplossingspad $(x, t) \mapsto U(t, \omega)(x)$ met $\omega \in \Omega$ vast (zie Figuur 1). In dat geval hoeft men feitelijk alleen een tijds- en ruimtediscretisatie te maken. Voor een SPDV met een globale oplossing is het vaak niet moeilijk aan te tonen dat deze discretisatie bijna zeker met een bepaalde snelheid convergeert (zie bijvoorbeeld [3, Hoofdstuk 8]), hetgeen een dergelijke simulatie enige waarde verleent.

Meestal is men echter niet geïnteresseerd in één enkel oplossingspad, maar in een stochastische kwantiteit die afgeleid wordt van de oplossing U , zoals de verwachte maximale waarde van de oplossing van (5) op $[0, t] \times [0, 1]$:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t], x \in D} |U(s, x)| \right],$$

of misschien de verwachte totale energie op tijdstip t :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 U^2(t, x) dx \right],$$



Figuur 1 Een simulatie van één mogelijk oplossingspad voor (5), verkregen door een impliciete Euler-approximatie in de tijd en een spectrale Galerkin-approximatie in de ruimte.

of, in de meest algemene vorm: $\mathbb{E}[g(U)]$, waarbij $g : C([0, \infty) \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$.

Wanneer men geïnteresseerd is in $\mathbb{E}[g(U)]$, waarbij U de oplossing is van een stochastische *gewone* differentiaalvergelijking in $\mathbb{R}^d$ met Gaussische ruis kan men een beetje vals-spelen: in dat geval wordt de afbeelding

$$[0, \infty) \times \mathbb{R}^d \ni (t, x) \mapsto \mathbb{E}(g(U(t)) | U(0) = x)$$

beschreven door een (deterministische!) tweede-orde-partiële differentiaalvergelijking, de zogenaamde *voorwaartse Kolmogorov-vergelijking*. Men kan dus in plaats van de stochastische differentiaalvergelijking de bijbehorende Kolmogorov-vergelijking simuleren. Deze insteek is echter erg inefficiënt als de dimensie d groot is, dus in het bijzonder bij stochastische *partiële* differentiaalvergelijkingen, waarbij $d = \infty$.

Een andere insteek is de zogenaamde *stochastische Galerkin-methode*, waarbij men op zoek gaat naar een orthonormale basis in de beeldruimte van de ruis en de ruis aan de

hand van deze basis modelleert. Deze methode werkt met name goed voor elliptische partiële differentiaalvergelijkingen met additieve ruis.

Ten slotte kan men nog een Monte Carlo methode gebruiken om $\mathbb{E}[g(U)]$ te benaderen:

$$\mathbb{E}[g(U)] \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(U^{m,N}),$$

waar $N, M \in \mathbb{N}$, en waar $(U^{m,N})_{m=1}^M$ onafhankelijke realisaties zijn van approximaties van de oplossing van de SPDV, verkregen door middel van discretisatie in de ruimte en in de tijd (N is een parameter die een indicatie geeft van de nauwkeurigheid van de tijd-ruimtediscretisatie). Deze insteek werkt voor een grote klasse van problemen, maar is nogal duur: de convergentieorde van de discretisaties in ruimte en tijd van een SPDV is in het algemeen kleiner dan die van een deterministische PDV, en daar bovenop komt nog de relatief dure Monte Carlo-simulatie.

Tot slot

Nu we zover gekomen zijn, vraagt u zich misschien af hoe dit vakgebied zich verder ontwikkelt. Zoals gezegd, zijn er vele interessante niet-lineaire problemen waarvoor nog geen convergente simulatiemethoden bekend zijn. Ook voor niet-Gaussische ruis zijn nog weinig methoden bekend. Daarnaast wordt er naarstig gezocht naar methoden om de Monte Carlo-simulatie efficiënter te maken. Ten slotte blijkt het voor SPDV's lastig te zijn theoretisch aan te tonen dat de convergentieorde in de zwakke zin twee maal zo groot is als de convergentieorde in de sterke zin (een bekend fenomeen voor gewone stochastische differentiaalvergelijkingen).

Betreffende de niet-lineaire SPDV's heb ik samen met Martin Hutzenthaler en Arnulf Jentzen, bij wie ik in Zürich als post-doc ben aangesteld, onderzocht hoe een perturbatie van de beginwaarde de oplossing van bepaalde klassen niet-lineaire S(P)DV's beïnvloedt [4]. Dit is een eerste stap in de richting van het schatten van de convergentiesnelheid van een tijdsdiscretisatie. 

Referenties

- 1 A. Alabert en I. Gyöngy, On numerical approximation of stochastic Burgers' equation, in *From stochastic calculus to mathematical finance*, Springer, Berlin, 2006, pp. 1–15.
- 2 D. Blömker en A. Jentzen, Galerkin approximations for the stochastic Burgers equation. *SIAM J. Numer. Anal.* 51 (2013), 694–715.
- 3 S. Cox, *Stochastic Differential Equations in Banach Spaces: Decoupling, Delay Equations, and Approximations in Space and Time*, proefschrift, TU Delft, 2012.
- 4 S. Cox, M. Hutzenthaler en A. Jentzen, Local Lipschitz continuity in the initial value and strong completeness for nonlinear stochastic differential equations, preprint available at arXiv:1309.5595.
- 5 G. Da Prato en J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- 6 G. Da Prato en J. Zabczyk, *Ergodicity for infinite-dimensional systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series 229, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- 7 M. Hairer, Solving the KPZ equation, *Ann. of Math.* (2) 178 (2013), 559–664.
- 8 M. Kovács, S. Larsson en A. Mesforush, Finite element approximation of the Cahn-Hilliard-Cook equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 49 (2011), 2407–2429.
- 9 J. van Neerven, *Stochastic Evolution Equations*, Lecture Notes of the 11th Internet Seminar, TU Delft; OpenCourseWare, ocw.tudelft.nl, 2008.
- 10 S. Peszat en J. Zabczyk, *Stochastic partial differential equations with Lévy noise*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 113, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. An evolution equation approach.

Jacob van der Woude

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

j.w.vanderwoude@tudelft.nl

Evenement 50ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2014)

Klaar voor de volgende vijftig jaar!

Op 16 en 17 april is het 50ste Nederlands Mathematisch Congres gehouden. Gastheer was de afdeling Toegepaste Wiskunde van de faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI) van de Technische Universiteit Delft (TUD). Het congres werd gehouden onder auspiciën van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) en werd georganiseerd in samenwerking met de Universiteit Leiden. Mede-organisator Jacob van der Woude blikt terug op deze jubileumeditie.

Het Nederlands Mathematisch Congres is de jaarlijkse ontmoetingsplaats voor wiskundig Nederland. Daarom had het organisatiecomité een grote verscheidenheid in de lezingen aangebracht. Er waren lezingen van theoretisch tot toegepast, door jonge beginnende en oude gearriveerde sprekers, voor wetenschappers en docenten/studenten, gebaseerd op 'state-of-the-art'-wiskunde, maar ook op wiskunde die al eeuwen bestaat. Kortom, een gevarieerd programma, met voor ieder wat wils.

Brouwer, Beeger en boeken

Dit jaar was er tijdens het congres een aantal speciale evenementen. Niet alleen werd

het vijftigjarig jubileum van het congres gevierd, maar ook werd de driejaarlijkse Brouwermedaille uitgereikt aan John Mather (Princeton). Verder werd de tweejaarlijkse Beegerlezing gegeven door Daniele Micciancio (San Diego) en werd de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi uitgereikt aan Roberta Iseppi (RU).

Naast de lezingen konden de congresgangers rondneuzen bij een aantal stands met (antieke) boeken (van onder anderen Huygens) en andere wetenswaardigheden over wiskunde. Natuurlijk was er ook gelegenheid om collega's te ontmoeten. Dat kon tijdens de koffie- en theepauzes, de lunches en tijdens de receptie vanwege het vijftigjarig



André Ran, aftredend voorzitter van het KWG, heeft de Brouwermedaille aan John Mather overhandigd

jubileum en ter ere van de ontvanger van de Brouwermedaille.

Rapporten over de toekomst

Het congres werd geopend door Karel Luyben, rector van de TUD, die in zijn toespraak inging op het rapport *Mathematical sciences and their value for the Dutch economy* door Deloitte, geschreven in opdracht van het Platform Wiskunde Nederland (PWN), dat op 10 april in Nieuwspoor (aan de politiek) gepresenteerd is en waarin de economische waarde van de wiskunde in het algemeen voor Nederland becijferd wordt op 160 miljard euro op jaarbasis. Ook ging de rector in op het PWN-rapport *Formulas for Insight and Innovation, Mathematical Sciences in the Netherlands 2025*, met een visie voor de toekomst van de wiskunde.

Uit zijn woorden bleek dat de rector zich achter de conclusies uit het rapport en het visiedocument kon scharen. Hetzelfde kon overigens ook gezegd worden over Rob Fastenau, decaan van EWI, die bij de afsluiting van het congres ook naar beide documenten verwees en de conclusies en standpunten daarin onderschreef. Kortom, voor de bestuurders van



Philipsprijswinnares Roberta Iseppi met Erik Koelink die ooit aan de wieg van de prijs gestaan heeft



Felix Otto over stochastische homogenisatie

de TUD is het belang en de rol van de wiskunde in de toekomst wel duidelijk, rest nu nog de politiek te overtuigen dat de huidige maatschappij niet zonder de wiskunde kan.

Voordrachten

De openingsvoordracht werd gegeven door Volker Mehrmann. Hij sprak over de eigenwaardeproblemen en numerieke lineaire algebra die aan de orde komen bij onderzoek naar het piepen van remmen van auto's en hoe dit piepen te voorkomen. Uit zijn verhaal bleek dat de standaardmethoden vaak niet voldoen en dat speciaal door wiskundigen ontworpen methoden nodig zijn.

In de Brouwerlezing vertelde John Mather over het welbekende n -lichamen-probleem en de abstracte voorstelling van de bijbehorende Hamilton-vergelijkingen met de diverse graden van vrijheid. Verder besprak hij onder andere de stabiliteit van het zonne-

stelsel, quasi-periodieke banen en invariante krommen.

In een heldere Beegerlezing sprak Daniele Micciancio over 'Lattice problems, sphere packings and the kissing number'. Hij legde uit hoe deze begrippen gebruikt kunnen worden in de cryptografie en schetste de relatie met het bekende LLL-algoritme.

Ter ere van het vijftigjarig jubileum hield Herman te Riele een plenaire voordracht over de geschiedenis van het NMC. Hij verlevendigde zijn lezing met anekdotes en foto's.

Monique Laurent schetste in haar plenaire lezing de rol van 'polynomial optimization' bij de aanpak van problemen waarvan de oplossing 'moeilijk' te bepalen is. Het centrale idee is hierbij om de problemen om te schrijven naar vormen waarin zoveel mogelijk gebruik gemaakt wordt van 'sums of squares' en de benadering van optimale oplossingen met behulp van semidefiniete optimalisering.

Aad van der Vaart sprak in zijn plenaire voordracht over de toepassing van Bayesiaanse methoden om parameters in kansverdelingen van data te schatten. De resultaten die deze methoden geven in de moderne setting van 'big data' geven nieuwe perspectieven en leiden tot nieuwe inzichten.

De slotvoordracht werd verzorgd door Felix Otto. Hij sprak over elliptische vergelijkingen, waarbij de coëfficiënten zich stochastisch laten beschrijven. Het is bekend dat de oplossingen zich gedragen als de oplossingen van elliptische problemen met homogene deterministische coëfficiënten. Een van de vragen waarop tijdens de voordracht antwoord gegeven werd is: hoe dicht ligt de oplossing bij de homogene oplossing? Om zulke kwantitatieve eigenschappen van de oplossingen te



Volker Mehrmann over piepende remmen

beschrijven werden verschillende connecties gemaakt tussen 'statistische mechanica' en 'stochastische homogenisatie'.

Templates

Het Nederlands Mathematisch Congres is een jaarlijks terugkerend evenement waarbij de wiskunde centraal staat. Daarbij is het zaak om goede lezingen door excellente wiskundigen te laten verzorgen die de laatste stand van zaken kunnen toelichten of bepaalde minder bekende aspecten van de wiskunde onder de aandacht van een groter publiek kunnen brengen. Kortom, de verscheidenheid en wiskundige inhoud van de lezingen moet centraal staan bij de organisatie van het congres. En dat lukt ook ieder jaar wel weer, maar toch is een organisatiecomité van een NMC ook altijd weer bezig met bijzaken die iedere keer opnieuw veel tijd en energie kosten.

Vandaar dat het organisatiecomité dit jaar getracht heeft een aantal 'templates' te ontwikkelen waar comités in de toekomst gebruik van kunnen maken. Zo is er een website voor het congres gemaakt, onder de vlag van het KWG, die ieder jaar opnieuw gebruikt kan worden. De basis is er, alleen de inhoud moet jaarlijks aangepast worden. Ook is er een Facebook-pagina gestart die gebruikt kan worden voor aankondigingen, herinneringen, foto's, et cetera. Verder kan de betaling voor deelname aan het congres voortaan via een rekeningnummer van het KWG gedaan worden, waarmee de lokale financiële administratie gedeeltelijk ontzien kan worden. Ten slotte is er een template voor de poster en het programmaboekje gemaakt in een stijl waaraan het Nederlands Mathematisch Congres in de toekomst te herkennen is.

Met dit alles is een aantal bijzaken bij het organiseren van een NMC al op voorhand geregeld en kan de organisatie zich meer op de inhoud van het congres richten. Hiermee is het Nederlands Mathematisch Congres klaar voor de volgende vijftig jaar!

Met dank aan Marcel de Jeu en Mark Veraar voor tekstbijdragen en Cor Kraaikamp voor de foto's.



Aandacht voor het programma en foto's voor later

Mark van Atten

SND

CNRS, Université Paris IV

vanattenmark@gmail.com

Göran Sundholm

Instituut voor Wijsbegeerte

Universiteit Leiden

goran.sundholm@gmail.com

Evenement Tachtigste verjaardag Dirk van Dalen

Intuitionistische logica en het scheppend subject

Op 20 December 2012 bereikte Dirk van Dalen, intuïtionist en biograaf van L.E.J. Brouwer, de leeftijd van tachtig jaar. Om dat te vieren werd op 11 januari 2013 een feestelijke middag georganiseerd in Utrecht. Daarbij sprak Mark van Atten, oud-promovendus van Van Dalen, een rede uit. Dit artikel is de licht aangepaste tekst die hij hiervan samen met Göran Sundholm schreef.

Het eerste deel van deze voordracht gaat over Brouwers reden het principe van de uitsloten derde niet als logische wet te aanvaarden, en is gebaseerd op ons gezamenlijk onderzoek.¹ Het tweede deel gaat over Brouwers notie van de ideale wiskundige, ofwel, zoals hij dat zelf noemde, 'het scheppend subject', en komt voor de mogelijk gepeperde rekening van Van Atten alleen. Beide onderwerpen hebben sinds lang Van Dalens bijzondere belangstelling.

Intuitionistische logica

Hoewel Brouwer zijn algemene ideeën over logica en het verband tussen logica en wiskunde al in zijn dissertatie uiteengezet had, trok hij de revisionistische conclusies daaruit eerst in zijn artikel 'De onbetrouwbaarheid der logische principes' [7]. Hij schreef dat niet lang na zijn promotie en publiceerde het in het *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* in 1908. Brouwer introduceert de vraag naar de betrouwbaarheid van de logica in de zuivere wiskunde, en maakt die vraag aannemelijk door eerst van twee andere gebieden te laten zien dat men daar op de logica niet rekenen kan, namelijk de natuurwetenschappen en de wijsheid. Zijn opvatting van logica daar is die uit zijn dissertatie: logica bestudeert patronen in talige weergaven van wiskundige bouwhandelingen. Het lijkt of Brouwer daarmee de logica haar traditionele context-onafhankelijkheid ontnemt, maar in zekere

zin geeft hij die met de andere hand weer terug door al het exact denken als toegepaste wiskunde te zien.

Voor Brouwer is het criterium voor de correctheid van een conclusie uit bepaalde premissen dat ik de constructie die de conclusie vereist, kan maken als ik vooronderstel dat ik al constructies voor de premissen gevonden heb. De hypothese hier is dus een epistemische: ik neem aan dat de premissen gekend zijn, niet alleen dat ze waar zijn. Brouwer zou zelf zo'n onderscheid overigens niet kunnen maken, omdat er volgens hem geen niet-ervaren waarheden bestaan, en ik bij het vooronderstellen van de waarheid van een propositie dus vanzelf ook vooronderstel dat ik heb ervaren dat die propositie waar is, dat wil zeggen, dat ik er een bewijs voor heb. Dit geeft natuurlijk een belangrijk verschil aan met de notie van hypothese die in de natuurlijke deductie gebruikt wordt. Daar betekent het stellen van een hypothese immers het aannemen dat A waar is, of ik er nu een bewijs van heb of niet. In feite is de Brouweriaanse implicatie dan ook niet die uit Gentzens Natuurlijke Deductie, maar moet zij begrepen worden als een regel waaronder de hele wiskunde gesloten is. Het betekent ook dat de betekenisverklaring van de intuitionistische logica niet gegeven moet worden in termen van bewijscondities, maar van assertiecondities (wat Heyting in zijn boek uit 1956 ook inderdaad doet [37, hoofdstuk 7]). Deze sugges-

tie hebben Sundholm en ik eens uitgewerkt aan de hand van Brouwers Barrièrestelling, en ik zal er hier niet verder op ingaan [49].

In zijn artikel beschrijft Brouwer het probleem van de logica in de natuurwetenschappen als het traditionele probleem van inductie. Er is geen zekerheid dat een wiskundig model dat een aantal gedane waarnemingen verklaart vervolgens ook correcte voorspellingen zal maken. Maar de rol van de logica is om uit uitspraken in het wiskundig model andere uitspraken in dat model af te leiden. Het kan dus makkelijk gebeuren dat uit premissen die met waarnemingen overeenkomen langs logische weg conclusies worden getrokken die dat niet doen. En dus is de logica daar onbetrouwbaar.

In wijsheid is de logica onbetrouwbaar om een andere reden. In Brouwers opvatting vooronderstelt de logica immers de aanwezigheid van wiskundige constructies, maar in de wijsheid zijn die er volgens hem niet. Wiskunde accepteert tijdbewustzijn, en heeft die nodig voor haar opbouw. Wijsheid verwerpt tijdbewustzijn, omdat dat het onderscheid tussen subject en object teweegbrengt, en zo het bewustzijn uit zijn 'diepste tehuis' houdt, waar dat onderscheid niet bestaat.² Om logica op wijsheid toe te kunnen passen, zou je er dus een wiskundige structuur aan moeten opdringen die het van huis uit niet heeft. Dat kan de inhoud ervan alleen maar verwringen, en er is geen reden aan te nemen dat logische conclusies uit verwrongen inhouden zelf wel inhoudelijk accuraat zijn.

Wiskunde nu verschilt van de natuurwetenschappen alleen al hierdoor, dat ze van alle waarnemingsinhoud abstraheert; en wiskunde verschilt van wijsheid omdat, wanneer



Dirk van Dalen

er aan wiskunde logica te pas komt, die toegepast wordt op iets dat zelf wiskundige structuur heeft. De vraag is dan of logica in de wiskunde *wel* betrouwbaar is, en Brouwers conclusie is van niet. Hij beredeneert dat op constructieve wijze, dat wil zeggen door een voorbeeld te geven van een logisch principe dat in de wiskunde onbetrouwbaar is, het principe van de uitgesloten derde. De abstracte mogelijkheid van onbetrouwbare principes had Brouwer echter al in zijn dissertatie gezien [6, pp. 132–133 en Stelling XX]. Het argument daar was dat de betrouwbaarheid van logisch

redeneren afhankelijk is van de wiskundige context waarin het wordt toegepast: het is immers de context die bepaalt of een logische redenering inderdaad een soort tegoedbon is die kan worden ingewisseld voor een wiskundige constructie. Brouwer verwierp daar bijvoorbeeld pogingen met behulp van logica iets te weten te komen over niet-constructieve objecten, die voor hem immers geen werkelijk wiskundige structuur hebben. In dat geval ligt de fout zagezegd aan de kant van het object; Brouwer maakte nog geen bezwaar dat ligt aan de kant van de logica. Maar dat komt al-

leen omdat hij toen de uitgesloten derde nog verkeerd begreep, als “niet- A impliceert niet- A ” [6, p. 131]. Dirk van Dalen heeft laten zien hoe deze foutieve lezing teruggaat op Brouwers leraar logica, Bellaar Spruyt.³ Een jaar later leest Brouwer het principe correct als “ A is bewijsbaar, of niet- A is bewijsbaar” [21, pp. 3–4]. Het artikel over de onbetrouwbaarheid is dus in twee opzichten een stap vooruit vergeleken bij de dissertatie: Brouwer corrigeert zijn lezing van de uitgesloten derde, en daarmee is hij dan in staat te laten zien dat ook in de wiskunde zelf een traditioneel logisch principe onbetrouwbaar is.

Brouwers redenering is eenvoudig: sommige traditionele principes behouden construeerbaarheid, maar uitgesloten derde doet dat niet. Zolang ik alleen die eerste principes blijf gebruiken, kan ik mijn wiskundige constructies verlaten, zuiver logisch verder redeneren, en toch zeker zijn dat de conclusie waar ik op uitkom weer door wiskundige constructies kan worden gewettigd. Maar als ik onderweg de uitgesloten derde gebruik, dan verlies ik in het algemeen die zekerheid, omdat ik nu eenmaal niet zeker weet dat ik een willekeurige propositie hetzij bewijzen, hetzij weerleggen kan.

Brouwer was niet de eerste die kritiek of twijfel uitte over het nut of zelfs de geldigheid van de uitgesloten derde in de wiskunde. Reeds Kronecker betwistte het gebruik van dit principe en van de daarmee verwante definities op grond van onbesliste gevalsonderscheidingen [44, p. 11n]. Zijn promovendus Jules Molk⁴ schreef in 1885 in zijn dissertatie:

“Les définitions devront être algébriques et non pas logiques seulement. Il ne suffit pas de dire: ‘Une chose est ou elle n’est pas’. Il faut montrer ce que veut dire être et ne pas être, dans le domaine particulier dans lequel nous nous mouvons. Alors seulement nous faisons un pas en avant.” [45, p. 8]

Overigens citeert ook Van Dalen dat “Il ne suffit pas de dire: ‘Une chose est ou elle n’est pas’”, in zijn boek *Filosofische Grondlagen van de Wiskunde* waar het een van de motto’s is bij het hoofdstuk over het intuitionisme [18, p. 19].⁵ Dat boek was, toen ik het op de middelbare school las, mijn eerste kennismaking met Van Dalen. Jules Molk kwam jaren na zijn promotie nog eens uitgebreid op de zaak terug. De gelegenheid dat te doen bestond in de uitgave van een Franse versie van de onder redactie van Felix Klein uitgegeven *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* [42]. Molk vertaalde en bewerkte daarvoor artikelen van Pringsheim over elementaire analyse. In een

toegift beschrijft Molk als volgt het ‘Point de vue de L. Kronecker’:

“L’Analyse doit, d’autre part, se garder de considérations générales d’ordre logique étrangères à son objet. Les définitions ne doivent introduire en Analyse que des notions auxiliaires facilitant l’étude des divers groupes naturels que l’on forme pour étudier les propriétés des nombres. Ces notions auxiliaires doivent avoir un caractère arithmétique et non logique seulement, en sorte qu’elles ne sauraient porter que sur des groupes dont chaque élément puisse être effectivement obtenu au moyen d’un nombre fini d’opérations, et non sur des groupes simplement déterminés par une convention logique non-contradictoire.

De même l’évidence logique d’un raisonnement ne suffit pas pour légitimer l’emploi de ce raisonnement en Analyse. Pour avoir donné une démonstration mathématique d’une proposition, il ne suffit pas, par exemple d’avoir établi que la proposition contraire implique contradiction. Il faut donner un procédé permettant d’obtenir, au moyen d’un nombre fini d’opérations arithmétiques au sens ancien du mot, effectuées sur les éléments que l’on envisage, le résultat qu’énonce la proposition à démontrer. C’est ce procédé qui constitue l’essence de la démonstration; il ne vient pas s’y ajouter. [...]

Le principe de l’économie dans la science, économie de temps, économie d’efforts, nous amène en Analyse les nombres rationnels absolus et relatifs: cette introduction est légitime, puis qu’elle n’a pour effet que d’abrégier les déductions sans en changer le caractère. À toute proposition concernant les nombres rationnels, exprimée par une égalité par exemple, correspond une congruence prise suivant un module ou un système de modules toujours faciles à déterminer. [...]

Le caractère des démonstrations est, au contraire, complètement changé par l’introduction de nombres irrationnels quelconques. On ne peut d’ailleurs donner de ces nombres qu’une définition logique, les déterminant, mais ne les définissant pas mathématiquement. C’est cette définition logique (mais non mathématique) qui confère aux ensembles (infinis) de nombres rationnels, que l’on dit définir des nombres irrationnels quelconques, le caractère d’une suite organique. Ces nombres ne peuvent donc, suivant L. Kronecker, figurer à aucun titre dans la démonstration définitive d’une proposition d’Analyse.” [46, pp. 159–160]

Ik citeer dit zo uitvoerig omdat parallellen met Brouwers artikel uit 1908 zo duidelijk en

tot in de details aanwezig zijn: het verwerpen van indirecte existentiebewijzen; het verbod zich te beperken tot blind, louter symbolisch redeneren; en de uitdrukkelijke scheiding van bewezen en niet-contradictoire proposities. Nu verscheen deze *Encyclopédie* in afleveringen en werd het fascicule met Molks toegift gepubliceerd in 1904. Navorsingen door Sundholm hebben uitgewezen dat er toentertijd één bibliotheek in Nederland was die de opeenvolgende fascicules kocht: de universiteitsbibliotheek te Amsterdam. Deze passages van Molk staan op de allerlaatste bladzijden van fascicule 1, en fascicule 2 verscheen in mei 1907, een paar maanden na Brouwers promotie in februari. Stel je voor, heeft Sundholm me na zijn speurwerk gezegd, dat iemand toen die nieuwe aflevering opzocht, en de blik liet vallen op die laatste bladzijden van aflevering 1... Maar voordat we Brouwer nu gaan verdenken van plagiaat, moeten we ook vaststellen dat noch in de aantekenschriftjes waarin de studieuze Brouwer zijn dissertatie voorbereidde,⁶ noch in die dissertatie zelf, noch in zijn omvangrijke correspondentie enige verwijzing staat naar het artikel van Pringsheim en Molk, of naar enig ander artikel uit de Duitse dan wel Franse versie van deze encyclopedie, of naar enig ander geschrift van Molk. Maar ik kan natuurlijk niet verhinderen dat deze overweging naar twee kanten uitgelegd kan worden.

Parallellen met Brouwers artikel zijn ook te vinden in een latere tekst, van weer iemand anders, Edmund Husserl.⁷ Ik denk aan diens opstel ‘Vom Ursprung der Geometrie uit 1936.’⁸ Met de meetkunde als voorbeeld bespreekt Husserl daar de merkwaardige omstandigheid dat taal, schriftelijke overlevering, aan de ene kant een voorwaarde is voor het bestaan van een wetenschap als een gedeelde traditie van voortschrijdende inzichten, maar aan de andere kant die traditie voortdurend van binnenuit bedreigt. Bedreigt, omdat een verstaander een mededeling niet alleen op een actieve manier kan begrijpen, door die zelf te doordenken en zo het medegedeelde inzicht zelf te reproduceren, maar ook op een passieve manier, waarbij de mededeling aangenomen wordt zonder te proberen de oorspronkelijke evidentie ervoor zelf te herhalen. (Natuurlijk zijn dit de twee extremen en is iemands begrip van een gegeven mededeling in werkelijkheid meestal deels actief, deels passief.) Het passieve begrip nu kan besmet worden door allerlei associaties, waardoor betekenselementen worden toegevoegd die niet voortgekomen zijn

uit de oorspronkelijke context van de mededeling. Zo kan er een talige constructie ontstaan die we tot de wetenschap in kwestie rekenen en schriftelijk aan de traditie toevoegen, zonder dat we op dat moment *zekerheid* hebben dat ook zij een gedachte uitdrukt die in authentiek denken evident gemaakt kan worden. Als we ons daar niet van bewust zijn, en niets doen om die nieuwe uitspraak te controleren, dan zijn we slachtoffer geworden van de ‘Verführung der Sprache’ [39, p. 372].

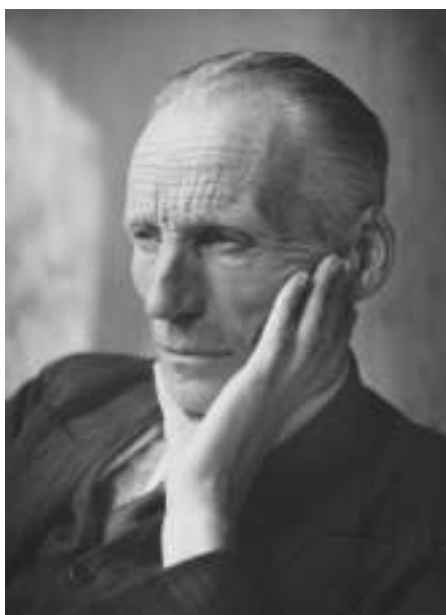
Husserls betoog is omvattender en genuanceerder dan ik het nu kan weergeven, maar het is duidelijk dat zijn argument hier analoog is aan dat van Brouwer over de logica. Weliswaar richt Husserl zich op de feilbaarheid van passief begrepen taal, en niet zoals Brouwer op de feilbaarheid van tijdelijk niet geïnterpreteerde en in die zin geheel niet begrepen taal, maar in beide gevallen is het relevante contrast dat met taal die een authentieke en evidente gedachte uitdrukt. Ik vermoed dat Husserl deze tekst van Brouwer nooit gekend heeft — een andere trouwens aantoonbaar wel, een die niet onbelangrijk is in dit verband, namelijk de ‘Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus’ uit 1928 [10], waarin Brouwer zijn eerdere artikel en de conclusie daarvan uitdrukkelijk noemt.⁹

De remedie die Husserl voorstelt is de innerlijke ontwikkeling van een wetenschap te reconstrueren en na te gaan waar de taal ontspoorde door het contact met de authentieke en evidente gedachte te verliezen. Het is duidelijk dat Brouwer van begin af aan, toen hij van Husserl nog niet wist, zijn eigen project zo gezien heeft.

In de twintigste-eeuwse wijsbegeerte en cultuurkritiek heeft die tekst van Husserl over de oorsprong van de meetkunde een belangrijke rol gespeeld. Voor de geschiedschrijving is het daarom vermeldenswaard dat een eerste aanzet ertoe, daterend rond 1922 en getiteld ‘Kritik der Geometrie als positiver Wissenschaft’, geschreven is op de achterkant van enkele bladzijden van het Habilitationschrift van Oskar Becker¹⁰ uit datzelfde jaar, en daar kennelijk door geïnspireerd was.¹¹ Dat Habilitationsschrift heette ‘Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung’, gepubliceerd als [2], en was uitdrukkelijk gemotiveerd door het in de grond fenomenologische karakter van Brouwers theorie van het continuüm, die toen net nieuw was. Van een misschien niet beslissende, maar toch duidelijke invloed van het intuitionistische denken op de ontwikkeling van de fenomenologie kan hier daarom denk ik wel gesproken worden,

een invloed die trouwens voorafging aan de bekendere maar volgens mij ook beperktere in de andere richting, die tot uitdrukking komt in Heytings uitleg van de intuitionistische logica in zijn voordracht te Königsberg in 1930 (gepubliceerd als [36]). Heyting verklaart daar dat een wiskundige uitspraak een verwachting uitdrukt, namelijk de verwachting dat er een bepaald bewijs bestaat, en hij zegt ook, onder verwijzing naar Becker [3], dat je dat nog beter kunt verwoorden in fenomenologisch vocabulaire: een uitspraak drukt een intentie uit, die in het vinden van een bewijs vervuld wordt. Maar in later werk geeft Heyting hier geen vervolg aan, en het is uiteindelijk niet meer dan een momentane terminologische precisering geweest.

Ik keer terug naar Brouwers artikel uit 1908. Veel directe invloed lijkt het niet gehad te hebben, behalve natuurlijk op Heyting. Een interessante uitzondering is Griss.¹² De keuze uit Brouwers correspondentie die Van Dalen onlangs gepubliceerd heeft, bevat een brief van Griss aan Brouwer uit 1941 [22, pp. 2142–2146]. Het is daar dat Griss, in directe aansluiting op uitspraken in Brouwers artikel, zijn negatielose wiskunde en de filosofische motivatie daartoe aan Brouwer bekend maakt. Griss publiceerde over dit onderwerp vanaf 1944 [32], en Brouwer reageerde daarop in 1948 met zijn ‘Essentieel negatieve eigenschappen’ [13]. Helaas liet hij het daarin bij een wiskundige constructie waarin de negatie onontbeerlijk is, op zichzelf natuurlijk al spectaculair genoeg,¹³ maar zonder daarnaast aan te geven hoe zijn filosofisch begrip van de negatie afwijkt van dat van Griss.



L.E.J. Brouwer

Het scheppend subject

Ik kom nu tot mijn tweede thema.¹⁴ In die correspondentie van Brouwer is ook opgenomen de brief uit 1928 waarin hij Heyting bedankt voor het toesturen van diens gedeeltelijke formalisering van de intuitionistische wiskunde [22, pp. 1521–1522]. Hij moedigt Heyting aan het stuk te publiceren en daartoe nog wat uit te breiden. Brouwer suggereert het begrip ‘Gesetz’ te formaliseren. Het bedoelde begrip is dat van de spreidingswet; het begrip wet als in wetmatige keuzerij is daar een speciaal geval van. Heyting [35] doet dat niet, en formaliseert alleen de voorwaarden waaraan een species van eindige rijtjes moet voldoen om door een wet gegeven te kunnen zijn. In 1962 schrijft Heyting dat een van Brouwers motiveringen om keuzerijen in te voeren juist was dat het begrip ‘wet’ volledig onhandelbaar is, en dat als de notie van recursieve functie toen al had bestaan, Brouwer wel eens besloten zou kunnen hebben zich daar dan maar toe te beperken [38, p. 195]; en je kunt vermoeden dat Heyting het hier behalve over Brouwer ook over zijn vroegere ik heeft. Helemaal overtuigend vind ik Heytings suggestie niet, want Brouwer had ook de algemenere motivatie dat als een reëel getal gegeven moet worden door een wet of een definitie of een formeel bewijs, allemaal dingen die wat hun verdere aard ook moge zijn in ieder geval talige objecten zijn, dat er nooit meer dan een aftelbare hoeveelheid van oplevert [11, p. 3], en dat bezwaar zou ook gegolden hebben voor recursieve functiedefinities. Natuurlijk is het dan de vraag of het soms beter kan. Brouwer dacht van wel, maar vandaag de dag zijn onder de constructivisten zij die, liever dan keuzerijen te moeten accepteren, Brouwers kritiek maar onbeantwoord laten en met technische trucs de schijn op proberen te houden veruit in de meerderheid, wat overigens niet wil zeggen dat zij ook gelijk hebben. Brouwer was natuurlijk een beetje de man uit het gedicht ‘The Road not Taken’ van Robert Frost:

*Two roads diverged in a wood, and I —
I took the one less traveled by
And that has made all the difference.*

De ontwikkeling van de recursietheorie zou natuurlijk pas jaren na Brouwers invoering van de keuzerijen beginnen. Maar in haar recente boek *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl* benadrukt Stefania Centrone terecht het nu en toentertijd weinig bekende feit dat Husserl misschien wel de eerste was die de vraag stelde naar een algemene theorie van alle mogelijke rekenkundige functies en hun reductie tot een klein aantal normaalvormen [16, pp. 54–61, 98]. Dit in

zijn *Philosophie der Arithmetik* uit 1891 [40, hoofdstuk 13].

Husserl introduceert en bespreekt daar een bepaalde klasse van functies en met goede wil is er wel wat te zeggen voor de opmerking van Ettore Casari, door Centrone verder uitgewerkt, dat die klasse extensioneel heel dicht bij de partieel recursieve functies komt. Maar het is ook zo dat Husserl geen enkele aanzet of bijdrage heeft geleverd tot het oplossen van het grotere vraagstuk dat erin bestaat aannemelijk te maken dat een bepaalde klasse van functies precies *alle* berekenbare functies bevat. Interessanterwijs kun je Turings argument uit 1936 voor diens bewering dat berekenbaarheid samenvalt met partiële recursiviteit [52] met recht een exercitie van fenomenologische aard noemen. Het is een reflectie op de handelingen die een geïdealiseerd rekenend mens kan uitvoeren, en op hoe die handelingen afhankelijk zijn van eigenschappen van diens geest en waarneming. Het was dat argument, van een type dat in de discussie over berekenbaarheid in de jaren dertig nog niet eerder was gebruikt, dat Gödel over de streep trok om de berekenbare functies te identificeren met de partieel recursieve; twee jaar daarvoor had hij Church, die tot dezelfde conclusie was gekomen, nog niet willen geloven [29, p. 348n.3 en pp. 369–71]. Let wel, de berekenbaarheid waar het hier om ging is mechanische berekenbaarheid. Gaandeweg raakte Gödel ervan overtuigd dat er functies zouden kunnen zijn die de menselijke geest wel kan berekenen maar niet langs mechanische weg; met andere woorden, dat er misschien functies bestaan die wel effectief zijn maar niet recursief.

Het is in dit verband instructief te zien hoe Gödel de voetnoot over Turing in zijn *Dialectica*-artikel uit 1958 wijzigt in de versie van 1972. Eerst schreef Gödel:

“A.M. Turing hat bekanntlich mit Hilfe des Begriffs einer Rechenmaschine eine Definition des Begriffs einer berechenbaren Funktion erster Stufe gegeben. Aber wenn dieser Begriff nicht schon vorher verständlich gewesen wäre, hätte die Frage, ob die Turingsche Definition adäquat ist, keinen Sinn.” [25, p. 283]

In 1972 wordt dat:

“It is well known that A.M. Turing has given an elaborate definition of the concept of a *mechanically* computable function of natural numbers. This definition most certainly was not superfluous. However, if the term ‘mechanically computable’ had not had a clear, although unanalyzed, meaning before, the question as to whether Turing’s definition is adequate would be meaning-

less, while it undoubtedly has an affirmative answer.” [27, p. 275n.5]

Het verschil is dat Gödel nu de mechanische aard van Turings notie benoemt en benadrukt. Voor zijn eigen notie van ‘computable functional’ eist hij alleen dat de berekenbaarheid ‘constructief evident’ moet zijn. Het had voor de hand gelegen om dan in een moeite door ook de vraag naar constructief evidente maar niet-mechanische berekenbaarheid te stellen. Dat doet Gödel hier weliswaar niet, maar in een ander klad voor de herziening van *Dialectica* wel:

“It must be admitted that the construction of a well-defined procedure which could actually be carried out (and would yield a non-recursive number-theoretic function) would require a substantial advance in our understanding of the basic concepts of mathematics.” [28, p. 306]

Welnu, zegt de intuitionist, die ‘substantial advance’ hebben wij al gemaakt. Er is in de intuitionistische literatuur minstens drie keer een voorbeeld van een effectieve maar niet-recuratieve functie gegeven, door Van Dalen [18, p. 40n.3], door Wim Gielen (gepubliceerd in [50, p. 35]), en door Albert Drăgalin [24, pp. 134–135]. Ze komen alle drie op hetzelfde neer, en gaan terug op een constructie ontsproten aan het brein van de Amerikaanse filosoof Saul Kripke, die deze zelf niet gepubliceerd heeft.

De presentatie van Van Dalen is de meest elegante, omdat die het eenvoudigst is en het dichtst op het scheppend subject zit. Hij gebruikt Kreisel’s zogeheten theory of the creating subject, dat wil zeggen de volgende drie schema’s, waar $\Box_n p$ staat voor ‘Het scheppend subject heeft op tijdstip n een bewijs voor propositie p ’:

$$(CS1) \quad p \leftrightarrow \exists n \Box_n p,$$

een propositie p is waar dan en slechts dan als het scheppend subject het op een gegeven moment bewijst.

$$(CS2) \quad \forall n \forall m (\Box_n p \rightarrow \Box_{n+m} p),$$

het scheppend subject vergeet nooit wat het bewezen heeft.

$$(CS3) \quad \forall n (\Box_n p \vee \neg \Box_n p),$$

op ieder moment kan het scheppend subject uitmaken of het p al bewezen heeft of niet.

Merk overigens op dat, naar aanleiding van wat ik aan het begin al even zei, het hier beter zou zijn schematische regels in plaats

van axiomaschema’s te geven. Dat maakt ook een verschil voor hun rechtvaardiging: CS1 is als de logische implicatie van links naar rechts die het suggereert nauwelijks te rechtvaardigen, want waarom zou uit een bewijs van p , of het subject dat nu kent of niet, met louter logica een moment n te extraheren zijn waarop het subject p bewijst? Maar van de corresponderende regel is de correctheid makkelijk in te zien. Immers, als ik per hypothese een bewijs van p heb, dan heb ik dat natuurlijk op een bepaald moment verkregen. Ik laat dit punt hier en in de rest van dit artikel terzijde.

Sommige constructivisten willen CS niet accepteren wegens de expliciete verwijzingen naar de tijd, die zij onwiskundig of op zijn best heel exotisch vinden, maar zij accepteren weer wel Kripkes Schema:

$$(KS) \quad \exists \alpha (\exists n \alpha(n) = 1 \rightarrow p).$$

KS is afleidbaar uit CS en alle bekende argumenten die CS gebruiken kunnen ook met KS gegeven worden. In het gebruik is KS vandaag de dag populairder dan CS. Maar vanuit Brouweriaans standpunt, waar de tijdparameter in alle wiskunde en haar ontwikkeling ingebakken is, worden CS en KS op gelijke gronden gerechtvaardigd. Het argument voor KS verloopt dan als volgt (en je zou je kunnen afvragen hoe een niet-intuitionistische constructivist het dan anders zou kunnen doen): de wiskundige activiteit van het scheppend subject vindt plaats in de tijd, beginnend bij de eerste oerintuïtie, en dan stap voor stap verder. Voor een gegeven propositie p kan het subject dan besluiten om elke zoveel tijdseenheden even te kijken of hij op een van de voorgaande stappen een bewijs van p verkregen heeft, en de resultaten van deze waarnemingen bijhouden in een keuzerij.

Hoewel dit argument laat zien dat KS intuitionistisch volslagen natuurlijk is, heeft Georg Kreisel toch eens het bezwaar aangevoerd dat juist van Brouwers standpunt deze rechtvaardiging iets arbitrairs heeft, omdat erin verondersteld wordt dat wiskundige evidenties zich aan ons voordoen in een ω -reeks, maar Brouwer tegelijk mentale wiskundige bewijzen van transfinitie lengte toelaat [43, p. 128]. Daarom ook vermoedde Kreisel bij die gelegenheid dat argumenten dat KS inconsistent is met de Church–Turingthese tekortschieten om die these helemaal te weerleggen. Denkkelijk had hij hier de mogelijkheid voor ogen dat de recursiviteit van een bepaalde rij wel eens alleen in een mentaal

bewijs van transfinitie lengte aangetoond zou kunnen worden. Maar ik zie hier noch het arbitraire noch het tekortschietende: immers, de transfinitie boomstructuur die ten grondslag ligt aan een mentaal bewijs van transfinitie lengte is een potentieel oneindige structuur die we, volgens Brouwers theorie van transfinitie welordeningen, in een ω -reeks van stappen construeren, en niet in een lange [8, p. 22]. Dat betekent ook dat als we informatie uit zo’n transfinitie bewijs willen gebruiken, we die daar in een ω -reeks van stappen uithalen, want de enige toegang die we tot zo’n bewijs hebben is via zijn constructie. Natuurlijk heeft Kreisel gelijk als hij vervolgt dat inconsistentie van KS met de Church–Turingthese de vraag openlaat of constructieregels die niet naar een ordening van onze wiskundige bewijzen verwijzen dan wel allemaal recursief zijn. Daar heb ik vandaag niets over te zeggen.

John Myhill heeft gezien dat Kripkes Schema al door Brouwer zelf geformuleerd is, althans, een instantiatie ervan [48, p. 295], [15, p. 4]. Sommigen zien in dat verschil voldoende grond om te betwijfelen dat Brouwer het algemene schema accepteert, maar er is geloof ik geen argument te bedenken dat wel Brouwers instantiatie rechtvaardigt maar niet de algemene versie. Dit omdat de aard en opbouw van de propositie in kwestie eigenlijk geen rol spelen in het schema zelf. Terecht stellen anderen, waaronder Van Dalen, dan ook voor om voortaan te spreken over ‘het Brouwer–Kripke-Schema’, niet KS maar BKS.

In combinatie met andere principes heeft BKS gevolgen voor de logica. Uit BKS en het continuïteitsprincipe voor keuzerijtes¹⁵ bijvoorbeeld volgt dat Markov’s Principe

$$(MP) \quad \forall \alpha (\neg \neg \exists x \alpha(x) = 1 \rightarrow \exists x \alpha(x) = 1)$$

tot een tegenspraak leidt [24, p. 134]. Een ander bekend effect is dat BKS en MP samen het principe van de uitgesloten derde geven, wat voor Brouwerianen natuurlijk als nog een weerlegging van MP geldt [51, p. 237].

Dat BKS ook concrete wiskundige gevolgen heeft, even afgezien van de niet-recuratieve functie die we zo zullen zien, is aangetoond door Van Dalen in papers uit 1975 en 1997. Het eerste, ‘The use of Kripke’s schema as a reduction principle’ [17], laat zien hoe je met BKS een intuitionistische versie van de machtsverzameling van de natuurlijke getallen kunt maken. Het tweede artikel, ‘How connected is the intuitionistic continuum?’ [19], bouwt voort op Brouwers resultaat dat het continuüm niet gesplitst kan wor-

den [9, p. 66n.10], dat wil zeggen dat als $\mathbb{R}$ de vereniging van twee disjuncte verzamelingen A en B is, dan is één van die twee $\mathbb{R}$ zelf en de andere dus leeg. Met een beroep op BKS laat Van Dalen zien dat ook het continuüm waaraan het punt 0 onttrokken is, onsplitsbaar blijft, en dat je met het continuïteitsprincipe voor keuzerijtjes en barinductie er ook nog bij kunt bewijzen dat het continuüm waaraan *alle* rationale getallen zijn onttrokken, nog steeds onsplitsbaar is. Later heeft Van Dalen dat nog versterkt: iedere negatieve, dichte deelverzameling van $\mathbb{R}$ is onsplitsbaar [20].

Nu dan Kripkes functie zoals gegeven door Van Dalen. Neem voor K een willekeurige recursief opsombare, maar niet recursieve verzameling.¹⁶ Definieer

$$f(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{als } \Box_m n \notin K, \\ 1 & \text{als niet } \Box_m n \notin K, \end{cases} \quad (1)$$

Dan geldt:

$$n \notin K \leftrightarrow \exists m f(n, m) = 0. \quad (2)$$

Het argument hiervoor is als volgt. Van rechts naar links: Neem aan dat $\exists m f(n, m) = 0$ voor een gegeven n . Uit de definitie van f volgt dan dat er een m geconstrueerd kan worden zó dat $\Box_m n \notin K$. Wat het scheppend subject bewijst is correct, dus $n \notin K$.

Van links naar rechts: Neem aan dat $n \notin K$. Op grond van CS1 betekent dit dat het

subject dit op een bepaald moment m bewezen heeft. Door terug te kijken op zijn activiteit kan het subject die m construeren; en dat levert de getuige op voor de kwantor rechts.

Voor het scheppend subject is f een effectieve functie, omdat het voor elk gegeven moment m (in verleden of toekomst) en voor elke n op grond van CS3 kan bepalen of $f \Box_m n \notin K$. Stel nu dat $f(n, m)$ recursief is; dan is de projectie $\{n | \exists m f(n, m) = 0\}$ recursief opsombaar. Maar die verzameling is het complement van K , en dus is K recursief. Tegenspraak.

In zijn boek *Foundations of Constructive Mathematics* geeft Michael Beeson een overweging die, hoewel hij voorbeelden als deze functie niet bespreekt, er wel een kritiek op impliceert [4, p. 56]. Hij stelt dat de vraag of het scheppend subject een specifieke niet-recursieve keuzerij kan genereren louter speculatief moet blijven, omdat wij niet in staat zijn een niet-recursieve rij te laten zien die gegenereerd is door een geïdealiseerde wiskundige die doorwerkt tot in de eeuwigheid. Dit lijkt me een *non sequitur*. Het achterliggende idee van Beesons argument is blijkbaar dat wij gewone stervelingen alleen dat kunnen laten zien wat volledig gespecificeerd kan worden middels een eindige hoeveelheid informatie; voor rijtjes betekent dat dat die ofwel eindig moeten zijn, ofwel oneindig maar gegeven middels een wet, die in tegenstelling tot die rij zelf een eindig object is, en dus voor ons te bevatten. Maar wat dan

nog? Het gegeven voorbeeld van een niet-recursieve functie laat zien dat het scheppend subject die berekenen kan, en dat is alles wat gevraagd werd.

Iemand zou hierop weer kunnen antwoorden dat intuïtionisten beweren de wiskunde te zien als een scheppen in de menselijke geest; maar als die niet-recursieve rij alleen door een sterk geïdealiseerde wiskundige gezien kan worden, wat zegt dat dan nog over ons? Toch wel iets belangrijks, denk ik. Want de idealisering waarmee we het scheppend subject definiëren meten ons weliswaar onbepaalde tijd en onbepert geheugen toe, maar geen *soorten* handelingen die een echt mens niet nu ook al uit kan voeren, zij het in het klein. (Merk hier op dat ik in het bijzonder Van Dalens functievoorschrift erbij kan nemen en functiewaarden kan gaan berekenen; en ook al zal ik tijdens mijn leven slechts een eindig aantal waarden daarvan berekenen, men zal pas als de Heere mij weggehaapt heeft kunnen zeggen *welk* eindig rijtje dat is, en niet van tevoren.) Als we daarentegen op dezelfde manier een echte computer idealiseren, berekent die nog steeds alleen recursieve functies. Als je Chomsky's onderscheid tussen 'performance' en 'competence' gebruikt, kun je concluderen dat de correcte performance van een rekenend mens niet boven die van een echte computer uitstijgt, maar de competence wel. Hoewel het extensioneel voor echte mensen dus geen verschil maakt, moet onze geest dan toch echt anders in elkaar zitten dan een computer. 

Noten

- Onderzoek gedaan bij het maken van onze nieuwe Engelse vertaling van Brouwers artikel 'De onbetrouwbaarheid der logische principes' [7], te verschijnen, met onze inleiding, in *History and Philosophy of Logic*. Een Franse versie daarvan wordt gepubliceerd in de *Revue d'histoire des sciences*.
- Zie voor dit punt ook Brouwers latere artikelen [12] en [14]. Beide — het tweede in de vorm van het eerste, Nederlandstalige manuscript — zijn opgenomen in de recente Epsilon-uitgave [23].
- Cornelius Bellaar Spruyt (1842–1901) promoveerde in 1867 bij Buys Ballot op *Over de electromotorische kracht van het element van Daniël bij verschillende temperaturen* en werd in 1877 hoogleraar te Amsterdam met als leeropdracht 'Geschiedenis van de wijsbegeerte, de logica, de metaphysica en de zielkunde'. Wat hij Brouwer over logica onderwezen heeft kan nagelezen worden in [5].

- Jules Molk (1857–1914), Frans wiskundige. Hoofdwerk: *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* [47].
- De andere twee zijn "Die Zeit macht die Arithmetik möglich" (A. Schopenhauer) en "I study mathematics as a product of the human mind and not as absolute" (E. Post).
- Deze schriftjes zijn bewaard in het Brouwer-archief te Utrecht.
- Edmund Husserl (1859–1938), Duits filosoof, grondlegger van de fenomenologie. Overigens was de latere Gödel hevig geïnteresseerd in de fenomenologie en haar toepassing in de grondslagen van de wiskunde [26].
- Posthuum gepubliceerd; eerst in iets gewijzigde vorm in 1939, later ongewijzigd in [39, pp. 365–386].
- Een kaart in een oude catalogus van Husserls eigen bibliotheek, beide nu in het Husserl-

- archieft Leuven, laat zien dat hij van dit artikel een overdruk bezat. Helaas is die overdruk zelf daar niet meer aanwezig.
- Oskar Joachim Becker (1889–1964), Duits wiskundige, filosoof, en wetenschapshistoricus. Promotie bij Hölder en Rohn in 1910 op het proefschrift *Über die Zerlegung eines Polygons in exklusive Dreiecke auf Grund der ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung*; Habilitation bij Husserl in 1923, daarna hoogleraar in de wijsbegeerte in Bonn tot 1955.
- Husserls tekst is gepubliceerd in [41, pp. 380–383]. Zie ook de aantekening van de tekstbezoeker daarover op p. 692.
- George François Cornelis Griss (1898–1953), Nederlands wiskundige en filosoof. Promotie bij Weitzenböck in 1925 op *Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren*.
- Dat wil zeggen als Brouwers argument de reik-

wijdde zou hebben die hij eraan toekent. Maar hij laat alleen zien dat je de eigenschap niet op de meest voor de hand liggende manier positief kan maken. Hij geeft geen argument dat het ook niet equivalent kan zijn aan een *andere* positieve eigenschap. Iets overhaast is Brouwer hier dus wel. Dank aan Wim Veldman, die dit in conversatie na deze voordracht benadrukte.

14 Vanaf hier valt de tekst onder de verantwoor-

delijkheid van Van Atten alleen.

15 Een veelgebruikte vorm van dit principe luidt $\forall \alpha \exists x A(\alpha, x) \rightarrow \forall \alpha \exists m \exists x \forall \beta (\beta m = \alpha m \rightarrow A(\beta, x))$, waar α en β variabelen zijn voor keuzerijen van natuurlijke getallen, m en x voor natuurlijke getallen, en αm staat voor $\langle \alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(m-1) \rangle$, dat wil zeggen het initieel segment van α van lengte m . Brouwer gebruikte dit principe samen met zijn Bar-

riërestelling om te bewijzen dat alle totale functies $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn [9]. Zie [1] voor een discussie van rechtvaardigingen van het continuïteitsprincipe en een voorstel daartoe.

16 Bijvoorbeeld het complement van de Cantor-verzameling. Metamathematisch voorbeeld: De verzameling Gödelgetallen van de proposities die in PA formeel bewijsbaar zijn.

Referenties

- 1 M. van Atten en D. van Dalen, Arguments for the continuity principle, *Bulletin of Symbolic Logic* 8 (2002), 329–347.
- 2 O. Becker, Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* VI (1923), 385–560.
- 3 O. Becker, Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene, *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung* VIII (1927), 440–809.
- 4 M. Beeson, *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*, Springer, Berlin, 1985.
- 5 C. Bellaar Spruyt, *Leerboek der Formeele Logica, Bewerkt naar de Dictaten van Wijlen Prof. Dr. C.B. Spruyt door M. Honigh*, Vincent Loosjes, Haarlem, 1903.
- 6 L.E.J. Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde*, dissertatie, Maas en Van Suchtelen, Amsterdam, 1907.
- 7 L.E.J. Brouwer, De onbetrouwbaarheid der logische principes, *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* 2 (1908), 152–158.
- 8 L.E.J. Brouwer, Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre, *KNAW Verhandelingen* 5 (1918), 1–43.
- 9 L.E.J. Brouwer, Über Definitionsbereiche von Funktionen, *Mathematische Annalen* 97 (1927), 60–75.
- 10 L.E.J. Brouwer, Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, *KNAW Proceedings* 31 (1928), 374–379.
- 11 L.E.J. Brouwer, *Die Struktur des Kontinuums*, Komitee zur Veranstaltung von Gastvorträgen ausländischer Gelehrter der exakten Wissenschaften, Wien, 1930.
- 12 L.E.J. Brouwer, Willen, weten, spreken, in: L.E.J. Brouwer e.a., red., *De Uitdrukkingswijze der Wetenschap: Kennistheoretische Openbare Voordrachten Gehouden aan de Universiteit van Amsterdam gedurende de Kursus 1932–1933*, Noordhoff, Groningen, 1933, pp. 45–63.
- 13 L.E.J. Brouwer, Essentieel negatieve eigenschappen, *Indagationes Mathematicae* 10 (1948), 322–323.
- 14 L.E.J. Brouwer, Consciousness, philosophy and mathematics, in: E.W. Beth, H.J. Pos en J.H.A. Hollak, eds., *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy, Amsterdam, 1948*, 3 (1949), 1235–1249.
- 15 L.E.J. Brouwer, Points and spaces, *Canadian Journal of Mathematics* 6 (1954), 1–17.
- 16 S. Centrone, *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*, Springer, Dordrecht, 2010.
- 17 D. van Dalen, The use of Kripke's schema as a reduction principle, *Journal of Symbolic Logic* 42 (1975), 238–240.
- 18 D. van Dalen, *Filosofische Grondslagen van de Wiskunde*, Van Gorcum, Assen, 1978.
- 19 D. van Dalen, How connected is the intuitionistic continuum?, *Journal of Symbolic Logic* 62 (1997), 1174–1150.
- 20 D. van Dalen, From Brouwerian counterexample to the Creating Subject, *Studia Logica* 62 (1999), 305–314.
- 21 D. van Dalen (red.), *L.E.J. Brouwer en de Grondslagen van de Wiskunde*, Epsilon Uitgaven deel 51, 2001.
- 22 D. van Dalen (ed.), *The Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, London, 2011, supplement, <http://extras.springer.com>.
- 23 D. van Dalen (ed.), *L.E.J. Brouwer – van Mystiek tot Wiskunde*, Epsilon Uitgaven deel 74, 2013.
- 24 A. Dragalin, *Mathematical Intuitionism: Introduction to Proof Theory*, American Mathematical Society, Providence (RI), 1988 [oorspronkelijke uitgave Moskou, 1979].
- 25 K. Gödel, Über eine bisher noch nicht benutzte Erweiterung des finiten Standpunktes, *Dialectica* 12 (1958), 280–287.
- 26 K. Gödel, The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, manuscript, posthuum gepubliceerd in [31, pp. 374–387].
- 27 K. Gödel, On an extension of finitary mathematics which has not yet been used, vertaalde en uitgebreide versie uit 1972 van [25], posthuum gepubliceerd in [30, pp. 271–280].
- 28 K. Gödel, Some remarks on the undecidability results, opmerkingen uit 1972 bedoeld voor publicatie in *Dialectica*, posthuum gepubliceerd in [30, pp. 305–306].
- 29 K. Gödel, *Publications 1929–1936*, Vol. 1 van S. Feferman et al., eds, *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- 30 K. Gödel, *Publications 1938–1974*, Vol. 2 van S. Feferman et al., eds, *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- 31 K. Gödel, *Unpublished Essays and Lectures*, Vol. 3 van S. Feferman et al., eds, *Collected Works*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- 32 G.F.C. Griss, Negatieloze intuitionistische wiskunde, *Verslagen Akademie Amsterdam* 53 (1944), 261–268.
- 33 A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik I, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), 42–56.
- 34 A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik II, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), 57–71.
- 35 A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik III, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), 158–169.
- 36 A. Heyting, Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik, *Erkenntnis* 2 (1931), 106–115.
- 37 A. Heyting, *Intuitionism: An Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
- 38 A. Heyting, After thirty years, in: E. Nagel et al., *Logic, Methodology, and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford University Press, Stanford, 1962, pp. 194–197.
- 39 E. Husserl, *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendente Phänomenologie. Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie*, W. Biemel, ed., Martinus Nijhoff, Den Haag, 1954.
- 40 E. Husserl, *Philosophie der Arithmetik*, L. Eley, ed., Martinus Nijhoff, Den Haag, 1970.
- 41 E. Husserl, *Einleitung in die Philosophie: Vorlesungen 1922/23*, B. Goossens, ed., Kluwer, Dordrecht, 2002.
- 42 F. Klein (ed.), *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, B.G. Teubner Verlag, Leipzig, 1904–1935.
- 43 G. Kreisel, Church's Thesis, a kind of reducibility axiom of constructive mathematics, in: A. Kino et al., eds, *Intuitionism and Proof Theory. Proceedings of the Summer Conference at Buffalo, NY, 1968*, North-Holland, Amsterdam, 1970, pp. 121–150.
- 44 L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), 1–122.
- 45 J. Molk, Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination, *Acta Mathematica* 6 (1885), 1–165.
- 46 J. Molk, Nombres irrationnels et notion de limite. Exposé, d'après l'article allemand de A. Pringsheim, in: *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. 1, vol. 1, fasc. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1904, pp. 133–160.
- 47 J. Molk en J. Tannery, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* (4 vols), Gauthier-Villars, Paris, 1893–1902.
- 48 J. Myhill, Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis, *Logique et Analyse* 35 (1966), 280–297.
- 49 G. Sundholm en M. van Atten, The proper interpretation of intuitionistic logic: on Brouwer's demonstration of the Bar Theorem, in: M. van Atten et al., eds, *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007): The Cerisy Conference*, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 60–77.
- 50 H. de Swart, *Intuitionistic Logic in Intuitionistic Metamathematics*, dissertatie, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1976.
- 51 A. Troelstra en D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- 52 A. Turing, On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society* II, Series 42 (1936), 230–265.

Lonneke Boels

Alaka

Delft

l.boels@alaka.nl

In Memoriam Leon van den Broek (1947–2013)

Buiten het boek om

Op 8 december 2013 overleed heel onverwacht Leon van den Broek op 66-jarige leeftijd aan een hartstilstand. Voor veel mensen uit het wiskundeonderwijs was Leon geen onbekende. Lonneke Boels, die met hem samenwerkte voor *W4Kangoeroe*, blikt terug op het leven van een bevlogen wiskundige.

Terwijl ik dit schrijf, zit ik in de kraam van de Kangoeroewedstrijd op het Nederlands Mathematisch Congres tijdens een rustig moment. Leon deed deze kraam altijd. Het is ongelooflijk wat Leon allemaal deed. Ik wist al dat het veel was, maar pas na zijn dood werd mij de omvang duidelijk van waar Leon allemaal aan had bijgedragen.

Leon stond aan de wieg van allerlei vernieuwingen in het wiskundeonderwijs. Zo schreef hij samen met een aantal collega's *de Wageningse Methode*, een methode die nog steeds bestaat en geschreven wordt voor en door wiskundedocenten. De methode was de eerste die praktische toepassingen in het boek opnam en het boek bovendien toegankelijk maakte voor leerlingen en niet alleen voor hun docenten. 'Wiskunde, dat kun je begrijpen' had zijn slogan kunnen zijn (naar de titel van een boek van Martin Kindt en Ed de Moor). Hij moest niets hebben van onbegrepen trucjes aanleren en wilde tegelijkertijd de leerlingen de schoonheid van wiskunde laten zien. Wiskunde moet dicht bij de belevingswereld van de leerling liggen en voor een grote groep leerlingen toegankelijk zijn. Hij kon zich vreselijk boos maken over leerlingen en volwassenen die opgewekt beweerden dat ze slecht in wiskunde waren [7]. Iedereen kon immers wiskunde leren, als het maar op de juiste manier werd uitgelegd. Leon zei hierover: "Een constructie of berekeningswijze hoort voor de leerling niet correct te zijn omdat die in het boek staat, maar omdat hij zelf vindt dat die juist is. Voorop staat begrip: liever helemaal geen wiskunde dan onbegrepen routines." [8]

De Wageningse Methode

In zijn werk voor *de Wageningse Methode* is dat terug te vinden. Neem bijvoorbeeld de opgave in Figuur 1 [12]. Net als in het vernieuwde examenprogramma wiskunde wordt hierin algebra eerst meetkundig ingeleid om te zorgen dat leerlingen zich bij de algebraïsche expressie iets kunnen voorstellen. In een volgende opgave (Figuur 2) wordt gecontroleerd of de ontdekte regel ook in een andere situatie geldt, namelijk met negatieve getallen. De context wordt losgelaten om verder abstraheren mogelijk te maken en de

kracht van algebra te ontdekken. Wiskunde moet je doen, vond Leon. In *de Wageningse Methode* zijn daarvan veel voorbeelden te vinden. Een mooi voorbeeld daarvan zijn de optische illusies die leerlingen al in het eerste hoofdstuk van de eerste klas aan het denken zetten, zie Figuur 3 [25]. Een subtiel maar heel belangrijk verschil met andere methoden is dat er niet wordt gevraagd op welke manier je kunt controleren of de cirkel ook echt een cirkel is. Dat suggereert namelijk dat de leerling de enig juiste en al lang bekende manier moet vinden. Maar vaak zijn er vele wegen naar Rome, waarvan sommige misschien zelfs onontdekt. De leerling mag dus zelf een manier bedenken. Dat het denken van leerlingen wordt gestimuleerd, is kenmerkend voor deze methode en voor Leons werk.



Leon van den Broek

Op twee manieren

In figuur 1 zie je drie vierkanten, de lichtkleurige hebben oppervlakte 100 en 36 cm^2 . De donkere heeft oppervlakte 64 cm^2 .



Figuur 1

De drie vierkanten worden op elkaar geplakt zoals in figuur 2.

Hoeveel cm^2 lichtgrijs zie je nog in de geplakte figuur? Je kunt dit op twee manieren berekenen, met en zonder haakjes. Schrijf op hoe.

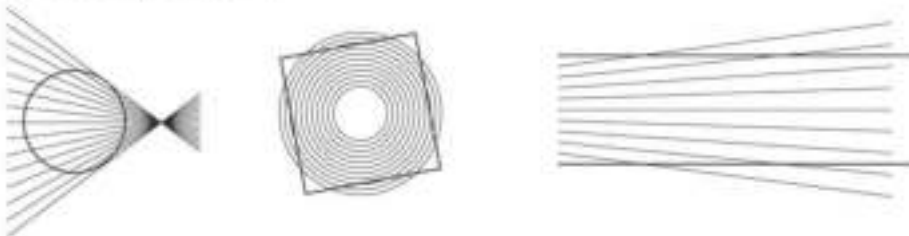
Figuur 1 Opgave van Leon uit de *Wageningse Methode*.

In opgave 24 heb je een voorbeeld van de regel $a - (b - c) = a - b + c$ gezien.

- a Controleer of die regel ook geldt voor $a = -3$, $b = -7$, $c = 10$ en voor $a = -3$, $b = 8$, $c = -11$.

Figuur 2 Opgave van Leon uit de *Wageningse Methode*.

Bekijk de drie twielflachtige plaatjes.



Is de cirkel echt een cirkel? (plaatje links)
Is het vierkant echt een vierkant? (plaatje midden)
Zijn de (dikke) lijnen **evenwijdig** (dat wil zeggen: overal even ver van elkaar af)? (plaatje rechts)
Verzin een manier om dat te controleren. Schrijf op hoe jij dat gedaan hebt.

Figuur 3 Opgave uit de digitale versie van de *Wageningse Methode* voor klas 1 HV [25].

Voor een voetbalwedstrijd moeten alle lijnen opnieuw getrokken worden. Dat gebeurt met een krijtkar. Zoals je ziet moeten er rechte lijnen en cirkels op het veld getrokken worden.

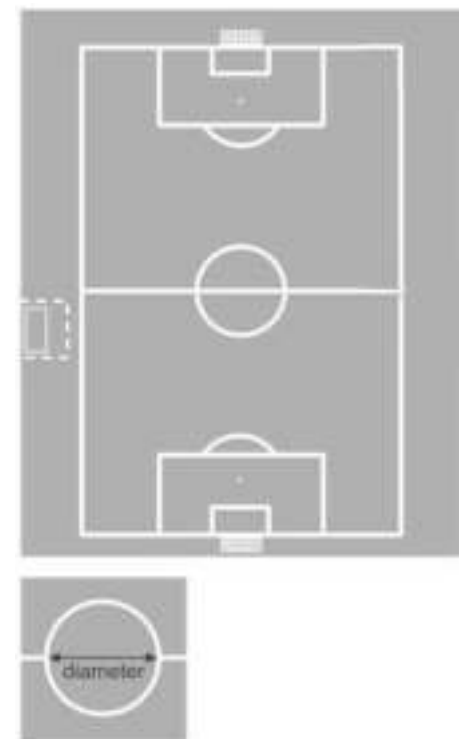
- a Voor de *rechte lijnen* moet de krijtkar kaarsrecht vooruit geduwd worden. Heb je enig idee hoe je ervoor zou kunnen zorgen dat je niet afwijkt met de kar?
- b Heb je ook een idee over hoe je de *cirkels* mooi rond zou kunnen krijgen?
- c De lijnen van het doelgebied moeten *loodrecht* (=haaks) op de achterlijn getrokken worden. Hoe zou je dat kunnen doen?

Figuur 4 Startopgave uit de digitale versie van de *Wageningse Methode* voor klas 1 HV [24].

Een ander voorbeeld waarin die denkvaardigheden worden ontwikkeld, is de startopgave van klas 1 havo-vwo over een voetbalveld, zie Figuur 4 en 5. Er worden vragen gesteld zoals iedereen die zou kunnen stellen en die passen bij de leeftijd van deze leerlingen. Merk op dat ook hier weer niet wordt gevraagd naar de juiste methode maar naar een idee. “Hoe zou je dat kunnen doen?”

Gelukkig heeft Leon zijn werk hierin tijdig overgedragen. *De Wageningse Methode* kent inmiddels een flink aantal enthousiaste docenten die ervoor zorgen dat de methode voort blijft bestaan. Eén ervan is Henk Reuling. Zijn website henkreuling.nl bevat vele originele oefeningen, vaak met een spelelement, om de wiskundige vaardigheden van leerlingen en hun inzicht in de wiskunde te vergroten [2]. Voor wie echter denkt dat ICT de docent kan vervangen, had Leon een misschien teleurstellende boodschap die overigens ook door uitgebreid wetenschappelijk onderzoek wordt bevestigd: de docent is bepalend voor het resultaat van een klas.

Het was overigens ook Leon die ervoor zorgde dat *de Wageningse Methode* aansluiting vond bij VO-content. Hierdoor is al het materiaal van *de Wageningse Methode* digitaal en gratis beschikbaar, óók voor niet-deelnemers aan VO-content. Via de website van *de Wageningse Methode* en van VO-content is het materiaal te vinden, inclusief

Figuur 5 Plaatje van het voetbalveld in de digitale versie van de *Wageningse Methode*.

Een tegel is van de muur gevallen.



Anne heeft nog drie extra tegels:
Welke tegels passen?



- A. 1 en 2 B. 1 en 3 C. 2 en 3 D. alle drie E. geen enkele

Figuur 6 Opgave van Leon uit de wiskundewedstrijd Kangoeroe wizFUN 2013 voor groep 4, opgave 21.

Tiphaine dispose d'un tas de pièces de cette forme :



Elle veut en mettre le plus possible dans un rectangle de 4 sur 5.

Les pièces ne doivent pas se recouvrir.

Combien de pièces, au maximum, pourra-t-elle placer ?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



Figuur 7 Franse opgave van Leon uit de wiskundewedstrijd Kangoeroe wizSMART 2013 voor groep 7,8 opgave 15 in de Nederlandse versie.

Anne hat einige identische graue Figuren, so wie im Bild zu sehen ist. Wie viele solcher Figuren kann sie maximal ohne Überlappung auf das 5×4 Rechteck legen?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



Figuur 8 Dezelfde opgave als in Figuur 7, maar nu in de Oostenrijkse versie van wizSMART 2013.

There are five families living in my road. Which of the following could not be the mean number of children per family that live there?

- A 0.2 B 1.2 C 2.2 D 2.4 E 2.5

Figuur 9 Opgave van Leon in het Verenigd Koninkrijk die ook in wizBRAIN 2013 voorkomt voor klas 3 en 4 vmbo en klas 1,2,3 havo en 2 vwo (opgave 8).

8. Marie berechnet die durchschnittliche Anzahl der Kinder von Familien ihres Dorfes. Im Dorf leben fünf Familien. Welches Ergebnis kann sie nicht erhalten?

- (A) 1,0 (B) 1,2 (C) 1,3 (D) 1,4 (E) 2,0

Figuur 10 Dezelfde opgave als in Figuur 9, maar nu in de Oostenrijkse versie van 2013.

vele applets – waaronder ook die van Henk Reuling – bijvoorbeeld de applet *driehoek tekenen* voor klas 1 [26].

De Kangoeroewedstrijd

Een van de andere van vele terreinen waarop Leon actief was, is de Kangoeroewedstrijd. Hij nam in het najaar van 2000 het stokje van Jan Donkers en de Technische Universiteit Eindhoven over bij het organiseren van deze wedstrijd. Met de Radboud Universiteit Nijmegen werd overeengekomen dat deze voor ten minste vijf jaar de wedstrijd zou ondersteunen. Dat doet deze universiteit vele jaren later nog steeds en dat is mede aan Le

on te danken. Ruim tien jaar later had zijn directeurschap inmiddels overgedragen aan Martin Winkel. Achter de schermen bleef hij echter flink actief. Velen kennen hem van de kraam met prijzen van voorgaande Kangoeroewedstrijden waarin hij onvermoeid en met veel humor reclame maakte voor de wedstrijd tijdens de Nationale Wiskundedagen, het Panamaprogram, de Nationale Rekendagen, et cetera. Daarnaast ging hij elk jaar naar het internationale Kangoeroe-congres waar de opgaven voor het volgende jaar worden vastgesteld. Hier kende hij vrijwel iedereen en heeft hij in zo ongeveer alle commissies gezeten. In het vliegtuig op weg naar het congres, nam

hij het 'smoelenboek' van de organisatie door en repeteerde hij hardop alle namen. Zo kon hij iedereen bij de begroeting benoemen bij naam en ook vertellen van welk van de meer dan vijftig landen de deelnemer was.

Leon produceerde bovendien enorme hoeveelheden opgaven. Vorig jaar waren dat er ongeveer zestig, waarvan er vele in de wedstrijdset werden gekozen. In de Figuren 6 tot en met 10 staan enkele voorbeelden van opgaven van Leon die in 2013 in de wedstrijdsets van de diverse landen zijn gekozen.

Leons opgaven waren zeer creatief en oorspronkelijk, en elke opgave was uniek. Zijn opgaven waren zo bijzonder dat Nederland er jaarlijks een prijs mee won. Sinds 2012 looft de internationale organisatie van de Kangoeroewedstrijden een prijs uit voor het land met het grootste aantal gekozen opgaven in de wedstrijdset. Het was vooral dankzij Leon dat we die prijs steeds opnieuw kregen.

Maar ook achter de schermen van de Kangoeroewedstrijd deed hij nog enorm veel. Veel spelletjes werden door hem geselecteerd. Bij het jaarlijks aandenken schreef Leon vele teksten voor het bijbehorende boekje, zoals bij het onder studenten populaire spel 'Lights out' [9]. In dit boekje staan tips over wat je met het aandenken kunt doen, oplossingen voor spellen die als prijs bij de wedstrijd worden geleverd, spelvarianten of zaken om over door te denken, enzovoorts. Leon schreef ook verschillende artikelen en persberichten over de Kangoeroewedstrijd.

Toen ik nog maar net betrokken was bij de opgavencommissie van de Kangoeroewedstrijd, heb ik tegenover Leon eens laten vallen dat het een goed idee zou zijn om alle opgaven van de Kangoeroewedstrijd te digitaliseren en zo digitaal beschikbaar te maken. Hij ging er mee aan de slag en organiseerde mensen en middelen en inmiddels kun je op de website interactief oefenen. Hierdoor zijn de opgaven per onderwerp beschikbaar, hetgeen gebruik in de klas veel gemakkelijker maakt, bijvoorbeeld als opwarmer (energizer) van een les. Naast opgaven per onderwerp zijn ook complete digitale versies van wedstrijdsets met opgaven beschikbaar [22].

In een interview met *de Volkskrant* van 23 januari 2006 zegt Leon over de Kangoeroewedstrijd: "Tegenwoordig is het in het onderwijs belangrijk de sleur te doorbreken. Je moet de aandacht van de leerlingen zien te pakken. Zo'n wedstrijd gaat leven op een school. Kinderen moeten het weer leuk gaan vinden ergens echt voor te gaan zitten en uit te zoeken hoe het in elkaar zit. Ik geef toe, dat is tegen de maatschappelijke trend in, de consumptie-



Figuur 11 Beschrijving van het spel 'Lights out' in het boekje dat deelnemers van de Kangoeroewedstrijd bij hun aandenken krijgen. De uitleg staat ook op de website van W4Kangoeroe.

maatschappij is uit op makkelijk gebruik en snel genot. Ik vraag me wel eens af: zijn mensen nog wel bereid ergens over na te denken?" [14]. In datzelfde interview zegt hij even later: "Vroeger deed je als docent de som voor en liet je de leerlingen die in eindeloze variaties nadoen. Zo kunnen ze wel veel sommen maken, maar begrijpen niet waarom ze het zo doen. Zodra je formalisme invoert, dood je het begrip. Daarom proberen we aan te sluiten bij de beleevingswereld van de leerling."

Op het Panamacongres, een congres voor lerarenopleiders op de pabo, gaven Leon en ik

een aantal jaren geleden samen een workshop over het ontwikkelen van wiskundig denken aan de hand van Kangoeroe-opgaven voor de basisschool [3]. De plaatjes voor de opgaven van deze wedstrijd worden al sinds jaar en dag gemaakt door zijn broer Ad van den Broek die ook veel ander werk van Leon en collega's illustreerde (*de Wageningse Methode*, de strip *Fie en Pie*, enzovoorts).

Vlak voor zijn dood maakte Leon zich nog sterk voor de SMART-finale, een finale voor de beste dertig leerlingen uit groep 7 en de beste dertig leerlingen uit groep 8 die dit jaar



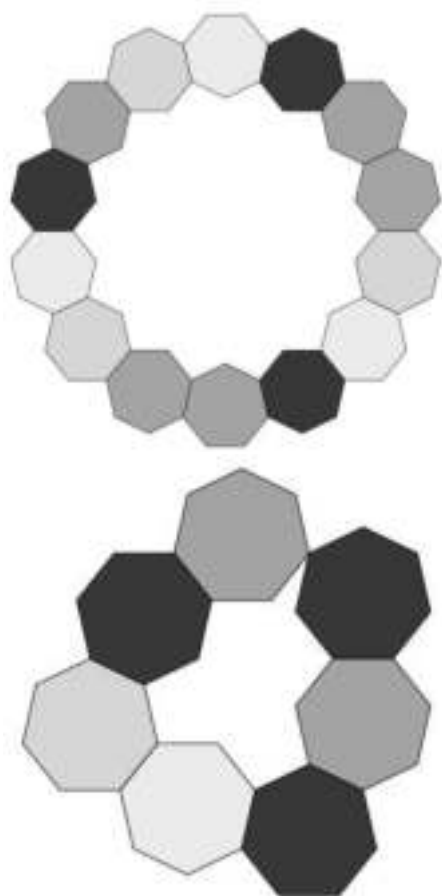
Figuur 12 Dia uit de PowerPoint-presentatie op het Panamacongres.

voor het eerst in juni wordt gehouden in het museum Boerhaave. Met opgaven vergelijkbaar met de moeilijkere opgaven van de Kangoeroewedstrijd en enkele open opgaven, vergelijkbaar met die van de Junior Olympiade, worden deze leerlingen uitgedaagd om nog een stap verder te gaan in hun wiskundig denken.

Mijn mooiste Mathe

Leon was auteur van verschillende boeken en boekjes. Zijn lievelingsboek was *Mijn mooiste Mathe* [7]. Het boek biedt een verzameling verschillende soorten wiskundige puzzels, problemen en uitdagingen, veel pittig tot zeer pittig. De uitleg bij wiskundige problemen is beperkt en daagt uit tot verder denken en uitzoeken. Een enkel probleem is eenvoudig, bijvoorbeeld het oud Romeins spel 'De ronde molen' of het bouwen van een regelmatig viervlak met vier onregelmatige tienvlakken. Met hartjes wordt de moeilijkheidsgraad aangegeven. Het probleem van het zwaartepunt van de piramide is met vier hartjes zodoende een moeilijk probleem. Het enige probleem met vijf hartjes gaat over ... lesgeven.

Een van Leons stokpaardjes over lesgeven was dat je dat vooral regelmatig 'buiten het boek om' moest doen. Hij vond dat zo belangrijk dat er een apart document op de website van *de Wageningse Methode* aan is gewijd [27]. Er staan maar liefst acht argumenten in om eens een les buiten de methode om te geven. Een les die je zelf ontwerpt, zorgt ervoor dat leerlingen actiever met de stof bezig zijn, meer leren, meer plezier hebben, meer betrokken zijn, creatiever worden, enzovoorts. Op de site staan ook verschillende concrete lessuggesties. Een hele bijzondere is de lessuggestie over kransen en die als document met knipblad beschikbaar is op de website van *de Wageningse Methode* [10]. Deze gaat over hoeken en regelmatige veelhoeken, en wie ooit kerstkaarten van hem kreeg, weet dat een van zijn kerstkaarten hieraan was gewijd. De vraag luidde iets als: kun je van elk regelmatig veelvlak een gesloten krans maken? Met de applet *kransen* kun je deze vraag (en nog veel meer vragen) over de krans beantwoorden. Het binnenste gedeelte van de krans vormt een ster. Is dat altijd zo? Kun je nog meer kransen maken met een regelmatige zevenhoek of is dit de enige? Kun je vooraf voorspellen hoeveel veelhoeken je nodig hebt als je een regelmatige krans wilt maken? Het zijn vragen die bijna automatisch boven komen drijven als je er even over nadenkt. U merkt het bovendien: de vragen stellen gaat veel sneller dan ze beantwoorden.



Figuur 13 Gesloten regelmatige krans met zevenhoeken en een variatie gemaakt met de applet *kransen*.

Zebra-boekjes

Naast genoemde boeken schreef Leon maar liefst zes Zebra-boekjes, samen met verschillende co-auteurs. In *Spelen met gehele* [17] wordt het geheim van natuurlijke gehele getallen ontrafeld met de hulp van rollende biljartballen, draaiende tandwielen en springende kikkers. Het doel is om leerlingen te laten kennismaken met de kracht van bewijzen in de wiskunde, af en toe zelf nieuwe stof te laten ontdekken en ontdekkingen te laten doen op het gebied van Getaltheorie en Algebra.

In *Getallenbrouwerij* [21] wordt modularekenen besproken evenals ‘gektallen’, getallen die naar links eindeloos doorlopen. Getal-

lenbrouwerij heeft niet voor niets als subtitel ‘alternatief rekenen’. Het lijken net getallen, maar zijn eigenlijk rijen. Gekke getallen dus. Je kunt er mee rekenen, maar soms gaat het dan toch anders. Het derde hoofdstuk gaat over complexe getallen. Bij de introductie van modularekenen komt Sjeherazade aan bod, die 1001 nachten verhalen vertelt en wordt de lezer uitgedaagd om de beste strategie te bedenken bij een Nimspel (lucifers wegnemen van een hoop waarbij je minimaal één en maximaal vier lucifers mag pakken; wie de laatste pakt, verliest). Afhankelijk van het aantal lucifers dat er ligt, is er een winnende strategie of verlies je altijd.

In *Nullen en enen* [18] worden alternatieve getalstelsels onder de loep genomen, zoals het binaire rekenen en het rekenen in het land van Okt (achttallig stelsel). Het boekje behandelt de onderwerpen zeer gedegen en legt verrassende verbanden, zoals met de hoekpunten van de kubus. Zoals we gewend zijn van Leons werk, worden leerlingen hierdoor uitgedaagd om zelf nieuwe ontdekkingen in de wiskunde te doen.

In *Blik op oneindig* [13] wordt het begrip van oneindig verkend. Nadat eerst een aantal wiskundige dilemma’s uit voorgaande eeuwen aan leerlingen worden voorgelegd, zonder deze dilemma’s direct op te lossen of te verklaren, wordt het begrip oneindig eerst in zijn historische context geplaatst. Daarna volgt het rekenen met oneindig. Dat zulke wiskunde niet alleen leuk is, maar met humoristische voorbeelden kan worden verduidelijkt, maakt het verhaal van de gasten in hotel oneindig duidelijk. In dat hotel is oneindig veel plaats... Hoe dat afloopt, moet u zelf maar lezen maar wie het Hilbert-hotel kent, kan wel vermoeden hoe dit ongeveer gaat. In de stripreeks *Fie en Pie* op de website van de *Wageningse Methode* staat een strip die het begrip oneindig — en de problemen die dat begrip geeft — voor leerlingen op een overzichtelijke wijze behandelt. Ook hier komt het beroemde hotel weer in voor. Het leuke van de strip is niet alleen de inhoud, maar ook dat het laat zien dat wiskundigen lang niet altijd ‘di-

rect’ de ‘juiste’ oplossing voor een probleem hebben gevonden. Kijk bijvoorbeeld eens in de strip wat Bolzano hierover heeft gezegd. De strip heet ‘Verstand op nul, blik op oneindig’ en staat onderaan op de pagina (even naar beneden scrollen dus) [11].

In *SpiroSporen* [1] wordt de wiskundige achtergrond van de spirograaf uitgezocht. Je kunt er de prachtigste figuren mee tekenen: astroïde, deltoïde, ellipsen en zelfs ... een rechte lijn. ‘Zonder vragen geen wiskunde’, is de titel van een paragraaf uit het boekje en zo is het inderdaad. Kun je met een spirograaf ook een vierkant tekenen, is één van die vragen? Het zijn geen makkelijke vragen en de wiskunde erachter is eveneens lastig, maar daarom niet minder interessant. Wat het boekje bovendien zo leuk maakt, is dat het benaderen van het probleem met eenvoudigere figuren, zoals rechthoeken, de moeilijke problemen vereenvoudigen en toegankelijker maken (bijvoorbeeld: de benadering van de haaienvin met stroken). Ondanks het wiskunde C-achtige onderwerp van het boekje, is het alleen geschikt voor leerlingen met wiskunde B (en D).

In *De juiste ondersteuning* [16] maakt Leon opnieuw de wiskunde praktisch. Hij schreef het boekje samen met zijn vriend en studiegenoot Dolf van den Hombergh. Wat is eigenlijk stabiel evenwicht? Wat is het zwaartepunt? Hoe kun je dat vinden, construeren, berekenen? Hoewel de wiskunde in het boekje lang niet voor iedereen zonder uitleg te volgen zal zijn, maken de afbeeldingen wel duidelijk waar het om gaat. Het maakt bovendien duidelijk hoe nauw wiskunde en natuurkunde verweven zijn. Hierdoor is het boekje niet alleen veel minder saai dan andere boekjes, maar nodigt het bovendien uit tot doordenken en experimenteren. Het boekje is postuum verschenen.

Wiskunde C/D en Ratio

Bij de vernieuwing van de wiskunde examenprogramma’s was Leon intensief betrokken. Voor wiskunde D schreef hij voor zijn leerlingen een inleiding op de analytische meetkunde. Met een grappig voorbeeld (zoek de schat) wordt dit vakgebied voor leerlingen ontsloten. Hoewel de wiskunde eenvoudig lijkt en begint, duikt het materiaal snel de diepte in. Het leuke van het materiaal is echter wel dat leerlingen al snel zelf ontdekkingen (moeten) doen en worden uitgedaagd tot zelf nadenken over de gestelde problemen. Hoewel er veel opgaven in voorkomen, is het dus weer beslist geen simpel sommetjes maken [5].



Figuur 14 Deel uit strip *Pie en Fie* over oneindig.



Figuur 15 Leon van den Broek, Edinburgh, Schotland, november 2013. Uitwisseling van cadeaus tijdens het jaarlijkse internationale Kangoeroe-congres.

Leons kracht was dat hij niet alleen materiaal schreef voor de allerbegaafsten met een wiskundeknobbel maar ook aantrekkelijke wiskunde ontwikkelde voor leerlingen met een Cultuur en Maatschappij-profiel dus met wiskunde C. Wiskunde in de kunst: 'Perspectief' [6]; dit materiaal gaat over kijkdozen, kijklijnen en perspectief in de kunst. Hier wordt

wiskunde gebruikt op een manier die voor de doelgroep zeer bruikbaar is. Met toestemming wordt ook materiaal van andere auteurs gebruikt, bijvoorbeeld van Agnes Verweij.

Leon leverde een belangrijke bijdrage aan de inzichten over de mogelijkheden en beperkingen van ICT. Prof.dr. Frans Keune, inmiddels emeritus hoogleraar, nam het initiatief voor de digitale methode *Ratio*. Hij kondigde deze al aan in zijn oratie [19]. Leon was een van de docenten die aan *Ratio* een flinke bijdrage leverde. *Ratio* is een volledig digitale methode voor begaafde vwo-leerlingen [20]. Hoewel de methode digitaal is, is de docent hierin beslist niet overbodig. De vele moeilijkheden die leerlingen tegenkomen bij het doorwerken van het materiaal worden pas echt leermomenten als ze op enigerlei wijze in de klas worden besproken. Op de site van *Ratio* zijn ook enkele voorbeelden voor praktische opdrachten voor wiskunde opgenomen, zoals krasloten, De Telduivel en de abcd-formule, waarin bijvoorbeeld een meetkundige uitleg van het kwadraat afsplitsen voorkomt (te vinden onder AZL/wiskunde D op de site).

Radboud Universiteit

Leon van den Broek werd in 1947 geboren in Gemert. Hij doorliep de hbs en studeerde wiskunde in Nijmegen waar hij in 1974 promoveerde bij prof.dr. A.C.M. van Rooij op het

proefschrift *Measure Theory on Hilbert Space* [4]. Van 1973 tot 2007 was hij als docent verbonden aan het R.S.G. Pantarijn (voorheen Wagenings Lyceum) waar hij samen met collega's *de Wageningse Methode* schreef. Inmiddels was hij ook verbonden aan de Radboud Universiteit in Nijmegen waarvoor hij onder meer het wiskundetoernooi voor middelbare scholieren organiseerde, tutor was, de WiskundeDialog en de nascholingsdagen voor wiskundedocenten organiseerde en de AZL (Actief Zelfstandig Lerende), later de ASL-groep, leidde.

Leon deed nog heel veel meer. Hij maakte opgaven voor de wiskundeolympiade, de wiskunde A- en B-dag, keek veel werkstukken na, zat in de opgavencommissie van het CSE – veel langer dan voorgeschreven – vanwege zijn enorme inbreng. En dan heb ik nog niets gezegd over zijn (toekomstige) rol bij de Digitale Wiskunde Oefenomgeving (DWO) van het Freudenthal Instituut, de MMM, en is ook zijn rol bij de Radboud Universiteit onderbelicht gebleven. Dat Leons rol ook hierin groot is geweest, blijkt wel uit het feit dat Leon door de Radboud Universiteit wordt geëerd met een jaarlijkse Leon van den Broek-lezing. Tijdens de WiskundeDialog 2014 van 13 mei jongstleden was dit de slotlezing met als titel: 'De opmerkelijke rij 1, 1, 1, ...'. De lezing werd gehouden door Arno van den Essen (Radboud Universiteit, faculteit FNWI). ➔

Referenties

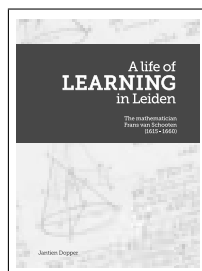
- Stephan Berendonk en Leon van den Broek, *SpiroSporen – tekenen met de spirograaf*, Zebra-reeks, deel 38, Epsilon Uitgaven, 2013.
- Lonneke Boels, Rubriek Wiskunde digitaal, Online loco en mini-memory, *Euclides* 89-6 (2014).
- Lonneke Boels en Leon van den Broek, *Wiskundig denken ontwikkelen, Panamacongres Opbrengst gericht werken*, 2012, www.fi.uu.nl/panama/conferentie/archief.conf/2012/Leon%20vd%20Broek%20W4Kangoeroe.pdf
- Leon van den Broek, *Measure Theory on Hilbert Space*, proefschrift, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1974.
- Leon van den Broek, *Lesmateriaal cTwo vwo wiskunde D*, Freudenthal Instituut, 2006, www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/MateriaalDomeinen-WiskundeD/AnalytischeMeetkundeVwo/wel-come.html
- Leon van den Broek, *Lesmateriaal cTwo vwo wiskunde C*, Freudenthal Instituut, 2007, www.fi.uu.nl/ctwo/lesmateriaaldir/ExperimenteelLesmateriaal/VWO%20Wiskunde%20C/Vorm%20en%20Ruimte
- Leon van den Broek, *Mijn mooiste Mathe*, Nijmegen, 2007.
- Leon van den Broek, *Recensie vernieuwing Wageningse Methode*, 2012, www.wageningse-methode.nl/wordpress-2012-12/wp-content/uploads/2012/11/Recensie-VernieuwingWM.pdf
- Leon van den Broek, *Lights out*, W4Kangoeroe, 2012, www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/files/5013/5730/0993/lights.out.pdf
- Leon van den Broek, *Wageningse Methode*, lessuggestie kranen, 2013, www.wageningse-methode.nl/m/Lessuggesties/Kransen/Lessuggestie.pdf
- Leon van den Broek en Ad van den Broek (tekeningen) e.a., *Verstand op nul, blik op oneindig*, www.wageningse-methode.nl/leerlingen/fie-pie
- Leon van den Broek, Dolf van Hombergh e.a., *Wageningse Methode havo-vwo leerjaar 2*.
- Leon van den Broek en Arnoud van Rooij, *Blik op Oneindig*, Zebra-reeks, deel 25, Epsilon Uitgaven, 2007.
- Robin Gerrits, Het vak wiskunde staat niet langer meer op een voetstuk, *De Volkskrant*, 23 januari 2006.
- Dolf van den Hombergh en Leon van den Broek, *Meetkunde in beweging*, Nationale Wiskunde Dagen, 2011, www.fi.uu.nl/nwd/nwd2011/handouts/NWD-Meetkunde%20met%20coördinaten.ppt
- Dolf van den Hombergh en Leon van den Broek, *De juiste ondersteuning – zwaartepunten door de eeuwen heen*, Zebra-reeks, deel 39, Epsilon Uitgaven, 2014.
- Ruud Jeurissen en Leon van den Broek, *Spelen met Gehelen*, Zebra-reeks, deel 12, Epsilon Uitgaven, 2002.
- Ruud Jeurissen en Leon van den Broek, *Nullen en Enen – Binaire getallen, hyperkubussen en fout verbeterende codes*, Zebra-reeks, deel 19, Epsilon Uitgaven, 2005.
- Frans Keune, *Naar de knoppen*, oratie 21 april 1998, www.math.kun.nl/~keune/oratie/oratie.html
- Frans Keune, Leon van den Broek, Lodewijk van Schalkwijk, Saskia Oortwijn, Mijke Campschroer, Mascha Honsbeek, Daan Wanrooy, Christian Eggermont en Dolf van den Hombergh, *Ratio*, Radboud Universiteit Nijmegen, 2005, www.ratio.ru.nl
- Arnoud van Rooij en Leon van den Broek, *Getal-lenbrouwerij – alternatief rekenen*, Zebra-reeks, deel 29, Epsilon Uitgaven, 2009.
- W4Kangoeroe, *Interactief oefenen, Wereld Wijde Wiskunde Wedstrijd Kangoeroe*, 2014, www.w4kangoeroe.nl/kangoeroe/historie/interactief-oefenen
- Peter de Waard, In Memoriam Leon van den Broek, *De Volkskrant*, 31 december 2013.
- De Wageningse Methode* voor klas 1 HV, Intro, www.mathunited.nl/MathUnited/view?comp=lj1-hv-ho1&subcomp=lj1-hv-ho1-01&variant=basis.wm&item=1
- De Wageningse Methode* voor klas 1 HV, Passer en geodriehoek, www.mathunited.nl/MathUnited/view?comp=lj1-hv-ho1&subcomp=lj1-hv-ho1-02&variant=basis.wm&item=1
- De Wageningse Methode*, Applet driehoek tekenen voor klas 1, www.wageningse-methode.nl/applets/driehoek.tekenen.468.html
- De Wageningse Methode*, De filosofie van lessuggesties 'buiten het boekje', www.wageningse-methode.nl/cd/Lessuggesties/filosofie.pdf

In de verdediging

| In defence

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl



A life of learning in Leiden. The mathematician Frans van Schooten (1615–1660)

Jantien Doppe

Op 12 februari 2014 promoveerde Jantien Doppe bij prof.dr. Jan Hogendijk op het proefschrift *A life of learning in Leiden. The mathematician Frans van Schooten (1615–1660)*. Doppe glimlacht bij de gedachte dat zij dit Leids-getinte proefschrift met twee Leidse paranimfen aan haar zijde verdedigde aan de Universiteit Utrecht. Sterker nog, ze is zelfs een van de gezichten van die universiteit: foto's van haar worden gebruikt in huisstijl van de UU.

Voordat ze begon aan haar promotiewerk, had Doppe zowel wiskunde als middeleeuwse geschiedenis gestudeerd. Ze was dus goed voorbereid op het doen van onderzoek in de geschiedenis van de wiskunde. Dat is echt iets anders dan 'standaard' wiskundig onderzoek. Daar waar andere aio's aan het Mathematisch Instituut stellingen probeerden te formuleren en te bewijzen, zat Doppe met haar neus in bronnenmateriaal. Gelukkig was ze dankzij haar studie al vertrouwd met het doen van historisch onderzoek en had ze al vele uren in archieven doorgebracht. De combinatie van achtergronden in de geschiedenis en de wiskunde is ook duidelijk te zien in haar proefschrift. Sommige stukken zijn erg historisch van aard; voor andere delen wordt meer technische, wiskundige kennis van de lezer verwacht.

Een onbekende wiskundige?

Op de vraag hoe ze erop kwam om zo'n 'onbekende wiskundige' te bestuderen, antwoordt Doppe dat het meteen duidelijk is dat die vraag niet door een historicus gesteld wordt. Want dat Frans van Schooten in de 21ste eeuw geen grote naam is, zegt niets over het aanzien dat hij al dan niet had in zijn eigen tijd. Als historicus vindt Doppe het belangrijk om iemand in de juiste context te bestuderen, en in de zeventiende eeuw was Van Schooten een gerespecteerd wiskundige, wiens naam bekend was in heel Europa.

Toen Doppe begon als aio stond vast dat ze "iets met zeventiende-eeuwse wiskunde in de Nederlanden" zou doen. Maar hoe en wat precies moest ze nog uitvinden. Het eerste jaar heeft ze besteed aan het inventariseren van wat er al gedaan was en wat nog niet. "Vooral dat laatste is lastig, omdat je daarvoor al aardig de bronnen in moet duiken", aldus Doppe. Uiteindelijk kwam ze Van Schooten op het spoor en bleek dat er met de collectie handschriften in Groningen bijzonder weinig was gedaan. Dat was de start van haar eigenlijke onderzoek.

Proefschrift in drie delen

Frans van Schooten jr. (1615–1660) was een van de meest invloedrijke Nederlandse wiskundigen uit de zeventiende eeuw. Hij was onder andere de privéleraar van Johan de Witt en Christiaan Huygens. Hij is het meest bekend geworden door zijn twee Latijnse edities (1649, 1659–61) van de *Géométrie* (1637) van Descartes, welke oorspronkelijk in

het Frans was verschenen als een van de essays behorende bij de *Discours de la Methode*. De *Géométrie* was een baanbrekend werk. Voor het eerst werd het verband gelegd tussen een kromme in het vlak enerzijds, en een algebraïsche vergelijking in twee onbekenden anderzijds. Onze Cartesische coördinatenstelsels en het gebruik van variabelen x en y vinden hier hun oorsprong. Van Schooten maakte niet alleen de Latijnse vertaling, maar voorzag het werk ook van uitgebreid commentaar. In de editie van 1659–61 nam hij bovendien een aantal studies van zijn studenten op, en dit werk werd het standaardwerk in de zeventiende eeuw voor wie de Cartesiaanse meetkunde wilde bestuderen. In feite zorgde Van Schooten ervoor dat de vernieuwende wiskunde van Descartes breed bekend werd.

In haar proefschrift bestudeert Dopper Van Schooten in de context van zijn eigen tijd en in samenhang met eigentijdse ontwikkelingen en gebruiken, zowel binnen de wiskunde als buiten de wiskunde. Van Schootens *mathematical life of learning in Leiden* omvat zijn wetenschappelijke, geleerde werk, zijn private lessen en zijn publieke lessen aan de Duitse Mathematicque te Leiden.

Het eerste deel van het proefschrift is een biografie, deels gebaseerd op ongepubliceerd archiefmateriaal. Het levert nieuwe informatie over Van Schootens leven en werk. Zo blijkt dat Van Schootens benoeming tot hoogleraar aan de Duitse Mathematicque in 1646 het resultaat was van een weloverwogen strategie van de familie Van Schooten, waarvan de wortels reeds tien jaar eerder te vinden zijn.

Het tweede deel van het proefschrift onderzoekt Van Schootens houding ten opzichte van Cartesiaanse wiskunde en de nalatenschap van Descartes aan de hand van een casestudie van het zogenaamde ‘Pappusprobleem’, een van de centrale problemen in de *Géométrie* van Descartes.

In het derde deel bestudeert Dopper het onderwijs dat Van Schooten gaf aan de Duitse Mathematicque, een wiskundig programma aan de Universiteit Leiden. Dit programma was opgericht in 1600 om ‘ingenieurs’ op te leiden voor het leger, maar in de loop der tijd verbreedde het publiek zich en gingen ambachtslieden en (aankomende) kooplieden de lessen bijwonen.

Ten slotte bevat het proefschrift een gedetailleerde beschrijving van zestien ongepubliceerde wiskundige handschriften uit de Universiteitsbibliotheek Groningen. De meeste van deze handschriften hebben een relatie met Van Schooten of zijn familie.

Doppers belangrijkste resultaat is dat er nu een completer beeld is van de wiskundige Frans van Schooten. Tot nu toe kwam hij alleen zijdelings aan bod, veelal slechts in combinatie met zijn inspanningen voor de verspreiding van het Cartesiaanse wiskundige gedachtegoed.

Een keerzijde aan loyaliteit

Het mooiste aan haar proefschrift vindt Dopper dat ze laat zien dat Van Schooten Descartes zeer hoog achtte, maar dat daar ook een keerzijde aan zat: daar waar de loyaliteit voor Descartes op gespannen voet met de wiskundige waarheid kwam te staan, won de loyaliteit het van de wiskunde. Dat is te zien in de wijze waarop Van Schooten omging met het Pappusprobleem. De oplossing die Descartes daarvoor had gegeven was incompleet en werd bekritiseerd door tijdgenoten met wie Van Schooten in contact stond. Van Schooten identificeerde zich zo met Descartes dat hij niet in staat was om te gaan met de gerechtvaardigde kritieken. Toen ook hij inzag dat die strategie onhoudbaar was, ver-

anderde hij zijn discours en probeerde hij aan te tonen dat de kritiek ongefundeerd was, omdat Descartes deze kritiek al had gepareerd in de *Géométrie*. Naar Doppers mening is het verweer van Van Schooten zeer ongeloofwaardig, maar maakt het de wiskundige ook weer heel menselijk. En in deze historie valt Van Schooten ook door de mand, want het wordt pijnlijk duidelijk dat hij het Pappusprobleem zelf niet goed doorgrondt.

De Pappus-casestudie leverde ook een leuk extraatje op. Dopper heeft een nieuwe interpretatie gegeven voor de wijze waarop Descartes en Van Schooten omgingen met algebraïsche notatie bij substituties. Deze wijkt sterk af van wat tegenwoordig gebruikelijk is. Doppers interpretatie verklaart een passage in de *Géométrie* waarvan tot dusver werd aangenomen dat Descartes een vergissing had gemaakt, of dat er een drukfout in geslopen was.

Een spanning tussen traditie en innovatie

Tot nu toe namen historici aan dat het programma van de Duitse Mathematicque statisch was, maar Dopper ontdekte aan de hand van ongepubliceerde manuscripten dat Van Schooten verscheidene innovaties doorvoerde. Hij vergrootte de rol van theorie in zijn lessen met als doel de leerstof eenvoudiger te maken voor zijn toehoorders. Hij herzag de bestaande lessenreeks over aritmetica en fortificatie en hij introduceerde nieuwe vakken zoals perspectief, logaritmes en algebra. Van Schootens algebraïsche aanpak bij het oplossen van problemen in algebra en meetkunde was innovatief, maar hij bleef trouw aan de oude zestiende-eeuwse algebraïsche notatie en gebruikte nergens de nieuwe notatie van Descartes. Alleen in zijn privécolleges buiten de Duitse Mathematicque onderwees hij de nieuwe wiskunde van Descartes.

Proefschrift schrijven naast een voltijdsbaan

Dopper is tevreden met haar proefschrift en heeft genoten van de afsluitende verdediging: “Ik straalde zo, dat ik er de rest van de dag kramp van in mijn wang had.” Maar het aio-schap viel haar niet altijd makkelijk. Ze heeft geworsteld met de eenzaamheid van het onderzoek. Binnen het Utrechtse Mathematisch Instituut was ze de enige aio in de geschiedenis van de wiskunde en zelfs binnen Nederland is de groep mensen die onderzoek doet dat raakvlakken heeft met het hare beperkt. Dopper heeft nu dan ook de bewuste keuze gemaakt om haar carrière buiten de wetenschap voort te zetten. Na ruim twaalf jaar universiteit was ze reuze nieuwsgierig naar de wereld daarbuiten, en naar wat ze daar kan doen met haar kennis.

Sinds oktober 2012 werkt ze bij de afdeling vermogensbeheer van PGGM, een pensioenuitvoeringsorganisatie. Ze is medeverantwoordelijk voor beleggingen in verzekeringsgerelateerde producten. Kort gezegd komt het erop neer dat het pensioenfonds risico op schade als gevolg van een natuurramp, zoals een orkaan of aardbeving, overneemt van verzekeraars. Bij de risico-inschatting wordt gebruik gemaakt van wiskundige modellen en simulaties, waarbij een wiskundige achtergrond goed van pas komt.

Dit betekent ook dat Dopper haar proefschrift heeft afgerond naast een voltijdsbaan. Dat was erg zwaar en ze is erg blij dat het werk nu volbracht is. Ze bekijkt nu nog of ze een handelseditie van het proefschrift kan uitbrengen, zodat haar onderzoek voor een toekomstige generatie historici van de wiskunde makkelijk beschikbaar zal zijn. En wat de toekomst verder zal brengen? Dat ligt nog helemaal open. ←

Odo Diekmann

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
o.diekmann@uu.nl



Odo Diekmann

Afscheidsrede

Tegenlicht

Op 5 november 2013 nam Odo Diekmann afscheid als hoogleraar toegepaste wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Als toegepast wiskundige hield hij zich niet alleen met wiskunde bezig, maar ook met theoretische biologie, met name met modellen voor de verspreiding van besmettelijke ziekten en economie. In zijn afscheidsrede kijkt hij terug op het toeval dat soms richtingbepalend was.

Het leven begint met wachten tot het echte leven begint. En dan opeens is er het besef dat ervoornamelijk verleden tijd is. Het stuk daartussen is merkwaardig snel verlopen. In het boek *À l'ombre des jeunes filles en fleurs*, oftewel 'In de schaduw van de bloeiende meisjes', onderdeel van *À la recherche du temps perdu*, verwoordt Marcel Proust dit als vreselijk pijnlijke vermoedens over (ik citeer): "de omstandigheid dat (terwijl ik mij elke dag als op de drempel van een nog onaangeroerd leven beschouwde dat pas de volgende zou beginnen) mijn bestaan reeds een aanvang had genomen, erger nog, dat datgene wat zou volgen niet zo veel zou verschillen van wat voorafgegaan was. Het tweede vermoeden, dat eigenlijk slechts een andere vorm van het eerste was, was dat ik klaarblijkelijk niet buiten de tijd bestond, maar onderworpen was aan de wetten daarvan, precies als de personen in een roman die mij om deze reden met zoveel weemoed vervuld hadden, als ik, weggedoken in mijn rieten strandstoel in Combray, hun levensloop las. Theoretisch weet men dat de aarde draait, maar in werkelijkheid merkt men het niet, de grond waarop men loopt schijnt zich niet te bewegen en zo leeft men rustig verder. Zo is het ook met het leven. Om zijn voortgang merkbaar te maken zijn romanschrijvers wel gedwongen de loop van de wijzer sterk te versnellen en de lezer tien, twintig, dertig jaar

in twee minuten te laten doorlopen.

Bovenaan een bladzijde heeft men een hoopvolle minnaar achtergelaten en onderaan de volgende vindt men hem terug als tachtigjarige, die op de kleine met gras begroeide binnenplaats van een bejaardenhuis moeizaam zijn dagelijkse wandeling maakt en nauwelijks antwoord geeft op de aan hem gestelde vragen, daar hij het verleden al lang vergeten is."

Gelukkig heb ik dat laatste stadium nog niet bereikt en kan ik me de verlopen tijd tamelijk helder voor de geest halen. Maar waarom zou ik? Wel, als een periode formeel ten einde loopt, komt de neiging om terug te blikken vanzelf opzetten. En misschien levert terugkijken wel een andere invalshoek en daarmee nieuwe inzichten.

De historica Annie Romein-Verschoor gaf haar autobiografie de veelzeggende titel *Omzien in verwondering*. Herbezien in het tegenlicht van de ondergaande zon, van de door de verlopen tijd geschapen afstand, verliezen veel gebeurtenissen die ons leven bepalen hun vanzelfsprekendheid. De lijnen van geleidelijkheid getuigen lang niet altijd van doelgerichtheid, zijn vaak terug te voeren op toeval dat in kleine hoekjes zit.

Bijvoorbeeld, dat ik nu hier het woord tot u richt, met mathematische biologie als belangrijkste onderwerp, komt doordat ik geld

wilde verdienen. Niet vandaag, niet gisteren, maar in het najaar van 1971 toen mijn oudste dochter Katja op komst was. Ik was voor drie middagen in de week kandidaats-assistent bij het natuurkunde practicum van de UvA, de Universiteit van Amsterdam, en, mede omdat ik in toenemende mate vooral genoot van de wiskundeonderdelen van mijn studie, leek het me aantrekkelijk om daarnaast twee halve dagen assistent bij wiskunde te worden, om ons inkomen wat op te peppen. Dus toog ik naar hoogleraar toegepaste wiskunde Lauwerier, van wie ik een heel aantal colleges met plezier had gevolgd. Hij hoorde mij belangstellend aan, zei dat er op de UvA niets vrij was, maar dat hij ook verbonden was aan het Mathematisch Centrum (waar ik, eerlijk gezegd, nog nooit van gehoord had) en dat daar wellicht wel mogelijkheden waren, maar dan voor de volle aanstelling van vijf halve dagen.

En zo kwam ik dankzij toevallige omstandigheden terecht bij wat ik beschouw als mijn eigenlijke leerschool, het Mathematisch Centrum, tegenwoordig CWI, Centrum Wiskunde & Informatica geheten, waar ik de kunst van door nieuwsgierigheid gedreven onderzoek kon afkijken van zeer inspirerende collega's en waar ik werd ingewijd en meegesleept, met name ook door adviseur Bert Peletier, in het organiseren van werkgroepen, colloquia en zomerscholen, met geen ander doel dan iets trachten te begrijpen, iets onder de knie te krijgen.

Al in 1971 werd er op het Mathematisch Centrum een werkgroep biomathematica in het leven geroepen, een ontmoetingsplaats

voor toegepast wiskundigen en biologen van diverse pluimage, variërend van meer medisch/fysiologisch tot meer ecologisch gericht. Multidisciplinair avant la lettre! In dat kader ontmoette ik Hans Metz, een Leids theoretisch bioloog met enorme kennis van, en belangstelling voor, de wiskunde. Hans fungeert voor mij tot op de dag van vandaag als leermeester wat betreft de vele facetten van de biologie en, tegelijkertijd, als richtingwijzer, inspirator en wegbereider van onderzoek op het raakvlak van wiskunde en biologie. Het feit dat wij in 1985 als duo werden uitverkoren om de leerstoel mathematische biologie aan de Universiteit Leiden te bezetten, illustreert zowel onze verbondenheid als onze vruchtbare complementariteit.

Omzien mag dan tot verwondering leiden over de beslissende invloed van toevalligheden op de weg die het leven neemt, als ik op eenzelfde manier terugkijk op de resultaten van mijn onderzoek, dan winnen die juist aan vanzelfsprekendheid en geldt de verbazing eigenlijk alleen de hoeveelheid tijd die het gekost heeft om de mist te verdrijven. Op gevaar af dat een deel van u na afloop zegt dat er geen touw aan vast te knopen viel, wil ik proberen iets te vertellen over de inzichten die dat onderzoek heeft opgeleverd. Ik begin met te omschrijven wat er nu precies 'toegepast' is aan de toegepaste wiskunde die ik beoefen, besteed vervolgens aandacht aan de conceptuele kant van de modelbouw en ga dan geleidelijk over op de wiskundige vergelijkingen en de mogelijkheden om deze te analyseren. De resultaten van zo'n analyse leiden, na interpretatie, tot inzichten omtrent de samenhang tussen mechanismen en fenomenen.

Wiskunde die zich bezighoudt met biologie valt onder de noemer toegepaste wiskunde. Daarbij kan het best om heel theoretische biologie gaan, het bijvoeglijk naamwoord verwoordt het perspectief van de wiskunde en drukt niet uit dat het noodzakelijkerwijs om toegepaste wetenschap gaat. Tussen de biologische bestrijding van witte vlieg in groentekassen en het principe van gelineairiseerde stabiliteit voor delay-vergelijkingen bestaat een verband, maar het is duidelijker, vind ik, om te denken aan een via-via-verbinding in de vorm van een keten van mensen, met twee aan twee zowel overlappende belangstelling alsook voldoende gedeeld taaleigen. De gapende kloof wordt overbrugd dankzij samenwerking met tussenstapjes, een efficiënt proces met als enig nadeel dat het langzaam en onvoorspelbaar verloopt (en daardoor, ten onrechte, niet altijd serieus wordt genomen als de modieuze roep om valorisatie klinkt).

Zelf heb ik me inderdaad vooral bezig gehouden met theoretische biologie, en dan met name met populatiedynamica, met in het bijzonder aandacht voor de verspreiding van infectieziekten. Het opsporen van verbanden, tussen mechanismen op individuniveau enerzijds en fenomenen op populatieniveau anderzijds, is daarbij de rode draad.

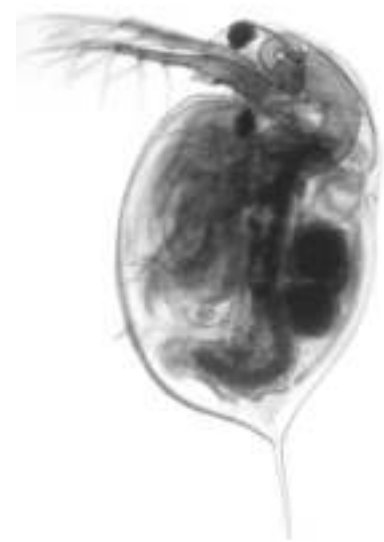
Want inderdaad, een populatie bestaat uit individuele organismen. En dat individuen op tal van manieren van elkaar kunnen verschillen, hoef ik u niet te vertellen. In een bepaalde context zijn sommige van die verschillen relevant en andere irrelevant. Laten we afspreken dat 'relevant' in de huidige context betekent 'van invloed op toekomstige aantallen'. En laten we de kenmerken, die aan het totaal van relevante verschillen ten grondslag liggen, samenvatten onder de noemer 'individoestand'. Als ik nu als voorbeeld van individoestand de leeftijd van een mens geef, dan is het u meteen duidelijk dat de specificatie van de individoestand inderdaad een voorspellende waarde heeft wat betreft voortplanting en overleving, maar ook dat het een grove vereenvoudiging van de werkelijkheid is om te beweren dat de leeftijd alle relevante informatie voor zo'n voorspelling bevat. Door het woord 'toestand' te gebruiken, geef ik aan dat ik er desondanks voor kies te doen alsof, met in mijn achterhoofd de hoop dat de overige verschillen uitmiddelen als ik naar de populatie als geheel ga kijken. En ik ben niet de enige: de humane demografie is in hoge mate gebaseerd op het willens en wetens veronachtzamen van alles wat niet door de leeftijd bepaald wordt. De eufemistische benaming hiervoor is 'idealisatie' en modelbouw zonder idealisatie is ondenkbaar, namelijk onwerkbaar. Trouwens, als ik voor de in Figuur 1 afgebeelde watervlo de grootte van een individu tot toestand verklaar, dan zal maar een enkeling onder u de wenkbrauwen fronsen: voor organismen die verder van ons afstaan, hebben we weinig moeite met over een kam scheeren en gaat het idealiseren dan ook meestal moeiteloos.

Onder 'individoestand' versta ik dus een representatie van de voor het bepalen van de toekomst relevante informatie over de opbouw, zeg maar het inwendige, het interne, van een individu. De toestand vat het verleden samen, in de zin dat verdere informatie over de in de loop van het leven tot dusver ondervonden levensomstandigheden, de zogeheten 'input', niets toevoegt aan onze mogelijkheden om de toekomst te voorspellen. Die levensomstandigheden zijn de relevante externe factoren, zij beschrijven de wereld

waarin het individu leeft. We noemen ze 'omgevingsvariabelen'. In het geval van de watervlooiën moet u denken aan de voedselconcentratie, de concentratie van de algen in het water dat de watervlooiën filteren om aan de kost te komen. In dat geval kunt u het woord input letterlijk opvatten. Maar ook de hoeveelheid van op de loer liggende vissen is een omgevingsvariabele, want bepalend voor de overlevingskansen van de watervlooiën. In z'n algemeenheid moet u dus input ruim interpreteren.

Met toestand voor het inwendige en omgevingsvariabelen voor het uitwendige als uitgangspunt, moet een modelbouwer nu specificeren hoe de individoestand verandert, wat de kans op overleven is en in welke mate voor nageslacht wordt gezorgd. Zolang de omgevingsvariabelen als gegeven worden beschouwd, zijn individuen onafhankelijk van elkaar. Afhankelijkheid, oftewel interactie, ontstaat doordat individuen op hun beurt invloed op de omgeving uitoefenen. Er is feedback en ook die moet gemodelleerd worden. Opnieuw leveren de watervlooiën een verhelderend voorbeeld: de algenconcentratie wordt mede beïnvloed door consumptie, door het filteren van de watervlooiën zelf. Ik kom hier straks nog uitgebreid op terug.

De stap naar het populatieniveau is nu slechts een kwestie van boekhouden. De populatie toestand is domweg een specificatie van de aantallen individuen in de verschillende mogelijke individoestanden. Oftewel, in wiskundig jargon, een maat op de ruimte van individoestanden, al dan niet in de vorm

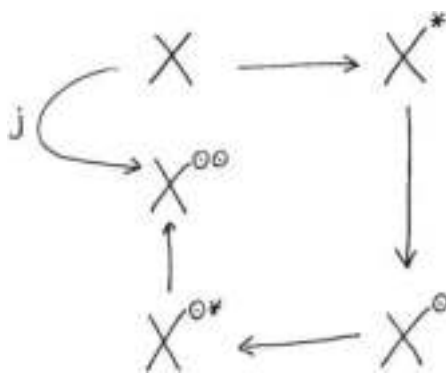


Figuur 1

van een dichtheid. En de dynamica van de populatie toestand wordt gegenereerd door een partiële differentiaalvergelijking. Maar dan? Dan begint de wiskunde. En dat valt soms tegen. Samen met Hans Metz en Mats Gyllenberg uit Helsinki heb ik jarenlang mijn tanden stuk gebeten op het ontwikkelen van een algemene theorie voor dynamische systemen gegenereerd door deze partiële differentiaalvergelijkingen. Faliekante mislukking is de enige manier om het resultaat van deze zoektocht te omschrijven.

Wellicht waardeert u het dat ik dat ruiterlijk erken, maar vraagt u zich af waarom ik dat met een vrolijk gezicht doe en niet met lede ogen. Allereerst is dat omdat een intellectuele zoektocht door onbekend gebied met goede vrienden, in mijn geval dus Mats en Hans, een enorm genoegen is, ongeacht het uiteindelijke resultaat. Maar een belangrijkere tweede reden is dat, zoals zo vaak, een andere weg wel tot het beoogde doel heeft geleid. Die andere weg zie je niet als je er geen oog voor hebt. Onze ogen werden geopend tijdens een verblijf voor *research in triples* in Oberwolfach, het wiskunde Walhalla in het Zwarte Woud. De natuur daar nodigt uit tot lange wandelingen en, workaholics als we zijn, poogden we in onze gesprekken tijdens die wandelingen vaak om te doorgronden waarom we maar steeds vastliepen. We proefden alternatieven op het puntje van onze tong, vaak de zin inslikkend voordat hij uitgesproken was, omdat het tijdens het formuleren al duidelijk werd dat het om een doodgeboren geesteskindje ging. En dan opeens de openbaring van binnen uit: als we de boekhouding totaal anders aanpakken dan ... Het leek in eerste instantie haast te mooi om waar te zijn.

Het 'puntje-puntje-puntje'-idee is eigenlijk heel eenvoudig. De huidige toestand van een individu wordt, zoals we al zagen, volledig bepaald door de toestand bij geboorte en het verloop van de omgevingsvariabelen, de input, in het tijdvak tussen geboorte en nu. En ook de overlevingskans wordt volledig door dat verloop van de omgevingsvariabelen bepaald. Wanneer je nu, voor iedere mogelijke toestand bij geboorte, specificeert hoeveel individuen hoelang terug geboren werden en, bovendien, welke waarden de omgevingsvariabelen in het verleden aannamen, dan leg je daarmee de huidige populatietoestand volledig vast. De vergelijkingen die het updaten van deze informatie beschrijven zijn nu geen partiële differentiaalvergelijkingen, maar delay-vergelijkingen, dat wil zeggen vergelijkingen waarbij het verleden expliciet in



Figuur 2

de formulering is betrokken. In feite is een delay-vergelijking een regel om eenduidig een functie van de tijd voort te zetten naar de toekomst, op basis van het bekend veronderstelde verleden. Via opschuiven van de tijd definieer je vervolgens een dynamisch systeem.

So what, vraagt u zich af. Zijn we hiermee ook maar iets opgeschoten? Jazeker, want voor delay-vergelijkingen had ik, jaren eerder, samen met Mats en met Horst Thieme, Henk Heijmans, Philippe Clément, Stephan van Gils, Sjoerd Verduyn Lunel en Hans-Otto Walther een afdoende algemene theorie ontwikkeld. De motivatie, destijds, was het onder één wiskundige noemer brengen van leeftijdsgestructureerde populatiemodellen en de, vooral door Jack Hale ontwikkelde, theorie van differentiaalvergelijkingen met delay. We kwamen nooit eerder op het idee om ook de grootte-gestructureerde watervlo-modellen onder deze noemer te brengen, omdat het heel onnatuurlijk is het verleden van de omgevingsvariabelen bekend te veronderstellen. Dat is inderdaad een andere, en meer discutabele, vorm van idealisatie. Maar dat probleem lost zichzelf op met een beetje geduld: wat we over zekere tijd verleden noemen, is wat nu nog de toekomst is, en die toekomst construeren we middels onze regel voor voortzetting.

De technische moeilijkheid met de partiële differentiaalvergelijkingen strekt zich ook uit tot de delay-vergelijkingen, maar in een iets mildere vorm omdat we in feite beperkingen opleggen aan de klasse van populatietoestanden die we als beginconditie toelaten. Voor delay-vergelijkingen was het ons gelukt om via dualiteit een natuurlijke uitbreiding van de oorspronkelijke setting te definiëren en wel zo dat, dankzij deze uitbreiding, de moeilijkheid wordt overwonnen. Die uitbreiding via dualiteit wordt weergegeven in het diagram dat in Figuur 2 staat afgebeeld. Als mijn gehoor enkel en alleen uit wiskundigen had bestaan, dan had ik een uur over dat dia-

gram en allerlei aanverwante zaken [2–5] door kunnen zagen. Nu laat ik het bij dat plaatje, als symbolische illustratie van het feit dat populatiebiologie tot interessante wiskunde kan leiden.

En hoe zit het omgekeerd? Levert die wiskundige beschrijving iets op waar de biologie wat aan heeft? Nu kom ik weer met mijn keten van mensen op de proppen, maar dan met een beetje naam en toenaam, in de zin dat ik mensen noem met wie ik interesses deel en goed kan praten. Houdt u daarbij in uw achterhoofd dat het van daaruit weer doorgaat, richting onderwerpen zoals zuivering van afvalwater, biologische bestrijding van plagen, herstel van commercieel interessante vispopulaties, vaccinatie tegen kinkhoest en antibiotica resistentie van bacteriën.

Dat ik het over watervlooiën heb, gaat terug op de toxiciteitsexperimenten die Bas Kooijman, nu hoogleraar theoretische biologie bij de Vrije Universiteit, lang geleden bij TNO deed. Zoals u op zijn website [12] kunt zien, is daar inmiddels het omvangrijke bouwwerk van Dynamic Energy Budget-theorie uit voortgekomen. De populatiemodellen waar ik het over heb, hielpen om de experimentele gegevens te vertalen naar effecten op natuurlijke populaties in het veld. Aan de UvA houdt academie-hoogleraar Maus Sabelis zich vooral bezig met de ecologie en evolutie van mijten. Een gezamenlijke promovendus, Vincent Jansen, is inmiddels hoogleraar mathematical biology aan de Royal Holloway University of London. De populatiemodellen waar ik het over heb, spelen een rol bij de analyse van het milker-killer-dilemma [1, 11] waar roofmijten voor staan als ze een lokale kolonie spintmijten exploiteren. In een onlangs verschenen boek [10] laten André de Roos, een promovendus van Hans en mij en al geruime tijd collega van Sabelis, en Lennart Persson uit Umea, zien dat predatie de negatieve effecten van voedselcompetitie van de prooi kan verminderen. U moet dan denken aan zoiets als het krenten van druiven: je vergroot de opbrengst door te verwijderen. Het resultaat is positieve dichtheidsafhankelijkheid, in de zin dat er meer prooi komt als er meer predatiedruk is, als er meer gejaagd wordt. Het soort populatiemodellen waar ik het over heb speelt in hun analyse de hoofdrol. Stelt u zich nu tot slot voor dat die predator kabeljauw heet en dat deze op zijn beurt intensief wordt bevestigd door mensen. Het samenspel van dat vissen en de positieve dichtheidsafhankelijkheid kan dan bij geleidelijke intensivering van de visserij leiden tot een plotselinge dramatische inkrimping van de kabeljauw populatie,



een inkrimping die niet ongedaan te maken is door vervolgens minder te gaan vissen.

En dan zijn er, helaas, de besmettelijke ziekten. Dat 'helaas' slaat op het feit dat u en ik die ziekten liever kwijt dan rijk zijn. Als het gaat om de toepasbaarheid van modellen die zich laten formuleren in termen van delay-vergelijkingen, kun je 'helaas' gerust door 'gelukkig' vervangen.

Epidemiemodellen zijn in zoverre speciaal, dat de populatie van pathogeen, meestal een virus of een bacterie, figuurlijk verborgen maar meer letterlijk geborgen zit in wat eufemistisch de gastheer wordt genoemd. Toestand bij geboorte moet u nu opvatten als toestand op het moment dat het gastheerindividu besmet wordt. Besmetting vindt plaats tijdens contacten tussen gastheren onderling en dus is het modelleren van het contactproces een essentiële bouwsteen. Al op het CWI organiseerden we colloquia met deelnemers uit de hoek van de humane-, de veterinaire- en de planten-epidemiologie. De wiskunde fungeerde daarbij als de verbindende schakel. Belangrijke gangmakers en vormgevers waren Mart de Jong, nu hoogleraar in Wageningen, Hans Heesterbeek, bij Hans Metz en mij gepromoveerd en nu hoogleraar bij diergeneeskunde en Mirjam Kretzschmar, nu werkzaam bij zowel het RIVM als bij het Julius Centrum van het UMCU en drijvende kracht achter het UCID [13], het Utrecht Center for Infection Dynamics, een samenwerkingsverband waar de Utrechtse wiskunde intensief bij betrokken is. De kiem voor dat UCID werd gelegd toen theoretisch bioloog Rob de Boer mij een jaar of dertien geleden in contact bracht met de in antibioticaresistentie gespecialiseerde internist Marc Bonten. Dat leidde tot vruchtbare samenwerking en een van onze gezamenlijke promovendi, Martin Bootsma, is nu werkzaam bij zowel geneeskunde als wiskunde. Hij is dus in wel heel letterlijke zin een verbindende schakel.

Wat ik vooral probeer te betogen, is dat het formuleren en analyseren van algemene modellen een essentieel onderdeel van de theoretische populatiedynamica en epidemiologie is, maar dat er vaak nog een volgende specificatiestap nodig is om uit te komen bij de praktische problemen van volksgezondheid, veestapelgezondheid en gewasbescherming. Via een aantal tussenschakels is er een bijdrage van vrij abstracte wiskunde aan het bestrijden van specifieke besmettelijke ziekten. Die bijdrage is deels formeel, in de zin dat je kunt aangeven hoe een zekere wiskundige uitspraak zich vertaalt in een epidemiologisch inzicht. Maar zeker zo belangrijk is de

informele bijdrage die geleverd wordt tijdens gesprekken en brainstormsessies. Het formuleren van een model werkt op zich al verhelderend, het brengt inconsistenties in ons denken en leemtes in onze kennis aan het licht, het fungeert als een schijnwerper die meedogenloos de zwakke plekken in ons begrip uitlicht.

Kortom, aan biologische en medische motivatie geen gebrek en al leveren de wiskundige inspanningen in eerste instantie vooral algemene theoretische inzichten op, in een volgende vertaaltap worden deze toegepast bij het oplossen van heel concrete problemen.

En wat betreft de wiskundige kant kom ik samenvattend tot de conclusie dat inmiddels twee zaken grondig zijn opgehelderd:

- We weten hoe we systematisch modellen voor de dynamica van gestructureerde populaties kunnen formuleren in termen van delay-vergelijkingen.
- We weten hoe we wiskundig analytisch moeten omgaan met de dynamische systemen die door deze delay-vergelijkingen via opschuiven van de tijd gegenereerd worden.

Je zou denken dat de klus geklaard is, dat de wiskundigen nu tevreden achterover kunnen leunen en de rest van het werk kunnen overlaten aan modelbouwers die dicht bij de concrete toepassingen staan. Jammer genoeg is dat niet zo. Via deze constatering gaat terugkijken nu als vanzelf over in speculeren over de toekomst. Maar laat ik eerst uitleggen waarom we er nog niet zijn.

Om in detail gespecificeerde complexe modellen te analyseren, moet er gerekend worden. Numerieke bifurcatietheorie, zoals met name ontwikkeld door mijn collega Yuri Kuznetsov [6], geeft een systematische aanpak. Om die aanpak in praktijk te brengen, heb je software tools nodig. En die ontbreken. Het ontwikkelen van zulke tools is, helaas, een heidens karwij [9]. Nog niet zo lang geleden laaide, al luisterend naar een voordracht van Dimitri Breda uit Udine, de hoop in mij op dat er een korte weg bestaat die naar het beoogde doel leidt. Het idee is om via Lagrange-interpolatie de delay-vergelijkingen te benaderen door gewone differentiaalvergelijkingen en vervolgens bestaande en goed geteste tools voor numerieke bifurcatieanalyse van gewone differentiaalvergelijkingen toe te passen. Die hoop koester ik nog steeds. En hoop doet, zoals u weet, leven en werken! De toekomst zal leren of deze hoop al dan niet het epitheton 'gerechtvaardigd' verdient.

Aan het begin van deze rede heb ik, zelf enigszins verwonderd, geconstateerd dat

mijn bemoeienis met mathematische biologie niet voortkwam uit al jong gevoelde motivatie gepaard aan doelgerichtheid, maar meer uit plezier in dingen die min of meer bij toeval op mijn weg kwamen. Daarna heb ik lang uitgeweid over de stukjes wiskunde en de beetjes populatiebiologie waar ik me in de loop van vele jaren mee heb bezig gehouden. Misschien is het me zelfs gelukt u van het maatschappelijk nut van de mathematische biologie te overtuigen. Maar niets wijst er tot nu toe op dat we via mathematische biologie ook iets kunnen leren over het maatschappelijke gebeuren, over politieke en bestuurlijke regelprocessen. Het was voor mijzelf vrij verrassend om op een gegeven moment te ontdekken dat dat wel degelijk het geval is, dat een onderdeel van de mathematische biologie, namelijk adaptieve dynamica, veel inzicht kan verschaffen in de niet zo toevallige aspecten van ons maatschappelijk handelen. In, zeg maar, het spel en de spelers. Ik kan de verleiding niet weerstaan u ook daar iets over te vertellen.

Adaptieve dynamica [14] beschrijft biologische evolutie als gevolg van natuurlijke selectie en mutatie, met voorbijgaan aan genen en seksuele voortplanting, maar volle aandacht voor het fenotype (dat is zoiets als de individutoestand, maar dan op iets hoger niveau) en de ecologische feedback-loop via omgevingsvariabelen, waar ik u al eerder over vertelde. Het is evolutionaire speltheorie waarbij de payoff bestaat uit nageslacht en de onderlinge wisselwerking indirect verloopt via zaken als voedsel en het risico om door een predator verschalkt te worden. Adaptieve dynamica bouwt dus voort op het soort populatiemodellen waar ik het al de hele tijd over heb, maar vraagt zich af of de ingrediënten van deze modellen wellicht vorm kregen tijdens een evolutionair proces op zeer lange tijdschaal. Met name moet u dan denken aan eigenschappen van individuen die bepalend zijn voor gedrag en fysiologie. Die eigenschappen vatten we samen onder de 'fenotype'-noemer en competitie tussen populaties van individuen met verschillend fenotype wordt beslecht op de relatief korte ecologische tijdschaal. Mutaties leiden op de lange evolutionaire tijdschaal tot nieuwe fenotypen die hun geluk kunnen proberen in het toernooi van de ecologische interactie. Geluk is hierbij niet helemaal het goede woord, want het gaat om een behendigheidsspel en beslist niet om een loterij, ook al speelt in de beginfase, als de aantallen nog klein zijn, een kansproces een belangrijke rol.

Ik stond er met mijn neus bovenop toen de adaptieve dynamica in Leiden door Hans Metz en Stefan Geritz ontwikkeld werd en heb er later met veel plezier les over gegeven in internationale zomerscholen.

Ik wil nu proberen om via een eenvoudig voorbeeld aan te tonen dat adaptieve dynamica ons begrip van sociale en economische processen kan vergroten. En, omdat 'begrijpen' ook altijd iets in zich heeft van 'in je greep krijgen', zodoende kan bijdragen aan wijs beleid. Wanneer we zeggen dat evolutie leidt tot optimale aanpassing aan de omgeving, klinkt dat positief en dus prettig. De weg gaat als het ware altijd omhoog. Maar we gaan er dan aan voorbij dat er terugkoppeling is, dat die omgeving zelf verandert als gevolg van de aanpassing.

Herinnert u zich de watervlo nog? Als we voor het gemak de vissen even vergeten, is er maar één ding dat telt: de concentratie van algen in het water dat gefilterd wordt. De omgeving wordt dus volledig gekarakteriseerd door de voedselconcentratie. Als er veel voedsel is, komen er veel kindertjes, die veel gaan eten en zodoende de concentratie omlaag brengen. Onder milde voorwaarden stelt zich een evenwicht, een steady state, in. De constante algenconcentratie zal dan zodanig zijn dat een pasgeboren watervlo gemiddeld precies één nakomeling krijgt.

Stel nu dat zich vervolgens een mutatie voordoet, waardoor er een watervlo ten tonele verschijnt die iets beter is in filteren. Met een beetje geluk krijgt deze mutant dan meer dan één nakomeling. Als de mutatie overerft op deze nakomelingen, dan groeit het aantal mutanten snel. De algenconcentratie wordt dan mede door de mutanten bepaald en zal gaan zakken. De populatie van watervloolen van het oorspronkelijke type krijgt nu niet meer voldoende voedsel binnen om zichzelf via reproductie in stand te houden en legt het loodje. De mutant neemt de wereld over. Vervolgens herhaalt dit liedje zich. En nog eens. Enzovoort. En bij elke overname door een nieuwe mutant zakt de algenconcentratie! Terwijl de watervlo er beter op wordt als je naar het fenotype kijkt, wordt de wereld er onaantrekkelijker op, want de algenconcentratie is na elke machtsovername een tikje lager. Als jouw type het hoofd boven water kan houden onder omstandigheden waarin een ander type kopje onder gaat, dan verlos je jezelf van de concurrentie van dat andere type door die omstandigheden te creëren. Ik vind 'pessimization principle' een goede naam voor dit verschijnsel, ook al is het twijfelachtig of het woord 'pessimization' wel bestaat.

Essentieel in dit voorbeeld is dat de terugkoppeling verloopt via een eendimensionale grootheid, de algenconcentratie. Eendimensionale grootheden kun je ordenen, van groot naar klein, van veel naar weinig of wat dan ook in een bepaalde context een goede terminologie is. Dat is reuze handig als je wilt vergelijken. Ook voor beoordelaars en beslissers is het dus zeer aantrekkelijk om een vergelijkend warenonderzoek te baseren op eendimensionale indicatoren zoals, om maar iets te noemen, de h-index, wanneer het over wetenschappelijke publicaties gaat. Uiteraard leidt de keuze voor een bepaalde indicator tot bedenkingen, tot discussie, tot strijd. Maar wat ik vooral naar voren wil brengen, is dat er aan de hele klasse van eendimensionale indicatoren een inherent nadeel kleef, namelijk dat tegenover het gemak dat de mogelijkheid tot ordenen verschaft aan de beoordelaars, staat dat degenen die beoordeeld worden het al maar moeilijker krijgen. En dat is vervolgens op z'n minst een verleiding, en maar al te vaak de aanleiding, om tijd en energie zo te gaan besteden dat er een zo gunstig mogelijk effect is op de indicator-score. Het middel van de beoordelaars wordt zo het doel van de beoordeelden. Ik ben er van overtuigd dat, vooral in de Verenigde Staten, voor veel jonge onderzoekers de drijfveer voor het schrijven van artikelen het veilig stellen van een tenure-positie is, en ik kan het ze absoluut niet kwalijk nemen. Maar het gevolg is dat iedereen schrijft en niemand leest en dat er in de stortvloed van artikelen nauwelijks artikelen zijn die een stortvloed van ideeën bevatten. Competitie op basis van een eendimensionale grootheid werkt productieverhogend als je naar die grootheid kijkt, maar leidt tegelijkertijd tot eenvormigheid en verschraling wat betreft aspecten die niet of nauwelijks in die grootheid doorklinken.

Diversiteit, het naast elkaar bestaan van verschillende typen, vereist terugkoppeling via een hogerdimensionale omgevingsvariabele. Die laten zich niet zo makkelijk ordenen. Maar dat is nu juist ook het punt! Als we diversiteit en kwaliteit van bestaan nastreven, moeten we af van de neiging alles te reduceren tot eendimensionale grootheden, zoals geld, om het allerbelangrijkste voorbeeld ook maar even te noemen. Dat maakt het nemen van beslissingen een stuk moeilijker, maar vermijdt dat de gevolgen van de beslissingen eenvormigheid en zware omstandigheden in de hand werken.

Om u definitief te genezen van het idee dat evolutie altijd een weg omhoog volgt, wil ik nog vermelden dat er zo iets als evolutionai-

re zelfmoord [7] bestaat. Dat is nauw verwant aan de 'Tragedy of the Commons' [8], de Tragedie van de Meent, de gemeenschappelijke weide, en doet zich voor in situaties waarin wat op korte termijn goed is voor het individu, met enige vertraging desastreus uitpakt voor de populatie als geheel. Van het pessimization principle word je niet vrolijk, maar in zekere zin pakt de evolutie daar neutraal uit. Echter, als bij de populatiedynamica van je voedselbron de eerder genoemde positieve dichtheidsafhankelijkheid een rol speelt, wordt het mogelijk je zelf de das om te doen, terwijl je de illusie hebt dat je erop vooruit zult gaan.

We zien dat evolutie kortzichtig is, niet kan anticiperen op de invloed die aanpassingen aan de omgeving hebben op diezelfde omgeving in de nabije of verre toekomst. Helaas belanden ook mensen maar al te vaak in die valkuil. We denken te weten hoe, gegeven de ons omringende wereld, allerlei zaken verbeterd kunnen worden en proberen elkaar met argumenten van de juistheid van onze zienswijze te overtuigen. We vergeten daarbij om vooruit te zien. Gemakshalve gaan we voorbij aan het feit dat het doorvoeren van de veranderingen, die tot de beoogde verbeteringen moeten leiden, ook die omringende wereld zal beïnvloeden, anders zal maken. De doelgerichtheid maakt ons blind voor de indirecte afhankelijkheden, die maar al te vaak de betonnen fundering van onze gedachtengang in drijfzand veranderen.

Een levensverzekering bestaat niet. Daarmee bedoel ik dat geen enkele organisatievorm volledig vrij is van het risico van onbedoelde en onvoorziene zelfmoord. Maar ik denk dat kleinschaligheid sterk bijdraagt aan het beperkt houden van dat risico. Om te beginnen is de invloed op de omgeving uiteraard klein als de eigen omvang klein is. Maar bovendien is de wisselwerking voor alle betrokkenen overzichtelijk. De intuïtie van de mens is evolutionair gevormd in een kleinschalige leefwereld en ten onrechte vertrouwen we er op dat die intuïtie even goed werkt als we zaken ordes van grootte opschalen. Het is verleidelijk om je blind te staren op de omvang van de winst die door schaalvergroting valt te behalen en daarbij geen oog te hebben voor de omvang van de mogelijke rampen.

De theorie van adaptieve dynamica laat zien hoe interactie via omgevingsvariabelen uiteindelijk uitwerkt als mutatie en selectie vrij spel hebben. Dat hielp mij om een beetje minder blind te worden en ik kon het niet nalaten u deelgenoot te maken van deze ma-

nier van kijken. Ik wil er zelfs nog een schepje bovenop doen.

Ook al weten we nooit precies welk spel er nu eigenlijk gespeeld wordt, wij zijn onmiskenbaar de spelers. We kiezen hoe we ons opstellen en denken in termen van medestanders en tegenspelers. Vaak kiezen we om braaf te zijn, om mee te gaan met de brede sociale stroom die we ook wel de tijdgeest noemen. Want anders snijden we onszelf in de vingers, is de achterliggende gedachte. We laten ons dan leiden door het onmiddellijke eigenbelang, terwijl het, zoals ik net heb betoogd, allerminst uitgesloten is dat diezelfde braafheid misschien wel bijdraagt aan een veel ergere vorm van onszelf collectief in de vingers snijden. Toegegeven, de voorbeelden van evolutionaire zelfmoord uit de adaptieve dynamica zijn karikaturen en je kunt deze niet klakkeloos toepassen op zo iets ingewikkelds als, bijvoorbeeld, ons systeem om wetenschap te waarderen en te financieren. Maar toch, een vertekend beeld kan ons helpen om scherper te zien. Of, zoals Picasso het gezegd schijnt te hebben: “Kunst is de leugen die ons helpt de waarheid te ontdekken”.

Terwijl ik deze rede aan het voorbereiden was, kreeg ik dan ook spijt dat ik niet wat tegendraadser ben geweest. Als kind van de jaren zestig en liefhebber van de vroege Rolling Stones had ik daartoe de goede vooropleiding. Ik las met instemming het boek *l'Homme révolté*, ‘De mens in opstand’, van Camus en voelde me aangesproken door anarchistische denkbeelden die in sommige van Dostojevski's boeken doorklinken. Maar tot veel meer dan een paar cynische kantteke-

ningen heeft dat allemaal niet geleid. Ik heb in bestuurlijke kringen nooit mijn stem verheven. Als ik al een tegengeluid liet horen, was dat met zachte stem. Het lijkt misschien vergezocht, maar ik zie in het feit dat zich zo iets als evolutionaire zelfmoord kan voordoen, aanleiding om de jeugd onder u aan te moedigen niet terug te schrikken voor tegendraadsheid, om minder meegaand te zijn dan ik ben geweest.

Voor een zeer groot deel is die meegaandheid trouwens te verklaren uit het feit dat ik oneindig veel meer plezier beleefde aan het overgrote niet-bestuurlijke deel van mijn werk. En als werken zoveel plezier verschaft, is het uiteraard een twijfelachtig genoegen om ‘uitgediend’ te zijn. De troost dat men ‘uitgediend’ vertaalt in ‘emeritus’ is schraal. Maar in plaats van daarover te zeuren, moet en wil ik van geluk spreken over dat plezier! Omziend naar de voorbij dienstjaren, constateer ik dat ik zowel op het CWI als op het Mathematisch Instituut in Utrecht met volle teugen heb genoten van zowel de wiskunde zelf alsook van de goede sfeer die uit de gedeelde passie voor wiskunde voortkomt. En het Instituut voor Theoretische Biologie in Leiden heeft op allerlei manieren mijn blikveld verruimt, mij in een moeite door de inspirerende diversiteit van het leven op aarde, van de vormen van wetenschap en van het karakter van wetenschapsbeoefenaars duidelijk gemaakt.

Aan verbindende schakels tussen wiskunde en biologie kun je al dan niet werken, dat is een kwestie van keuze. Maar verbindende schakel tussen verleden en toekomst zijn we

vanzelf, daar valt niet aan te ontkomen. Ondertijd is een van de vormen die deze schakel aanneemt. Van zowel het college geven als van het begeleiden van studenten bij scripties en proefschriften, heb ik zelf ongelofelijk veel geleerd en daarnaast heb ik er veel voldoening uit geput als ik niet de enige was die iets leerde. Dat zeven van mijn promovendi inmiddels hoogleraar zijn, stemt me zeer tevreden.

Wiskundigen gebruiken bijvoeglijke naamwoorden als ‘mooi’ en ‘goed’ wanneer ze het over problemen hebben en scheppen er plezier in zich het hoofd te breken. Niet iedere wiskundige houdt van schrijven, maar ik doe dat wel. Om je samen met anderen eerst het hoofd te breken en dan, als het begrip is doorbroken, het resultaat zo helder mogelijk op te schrijven, is een ongelofelijk genoegen. Ik hoop dat genoegen nog vele jaren te smaken.

Ooit had ik de illusie dat werk zich laat wegwerken. Daarmee bedoel ik de illusie dat je de hoeveelheid werk die morgen op je bordje ligt, kunt verminderen door vandaag hard te werken aan de klussen die er nu op liggen. Het omgekeerde is het geval: hoe harder je werkt, hoe meer werk je krijgt. Dit is ongetwijfeld een van de mechanismen die aan het ‘druk, druk, druk’ fenomeen ten grondslag liggen. Toen ik vele jaren geleden besepte dat het hier een illusie betreft, vond ik dat ontmoedigend. Nu vind ik het eerder bemoedigend, ik heb het tempo waarin ik in letterlijke zin zonder werk kom te zitten kennelijk zelf in de hand. En met die voor mij geruststellende gedachte beëindig ik mijn uiteenzetting. Ik dank u voor uw aandacht.

Referenties

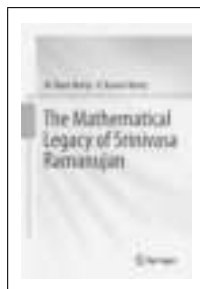
- 1 M. van Baalen en M.W. Sabelis, The milker-killer dilemma in spatially structured predator-prey interactions, *Oikos* 74 (1995), 391–400.
- 2 Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H.J.A.M. Heijmans en H.R. Thieme, Perturbation theory for dual semigroups. I: The sun-reflexive case, *Math. Ann.* 277 (1987), 709–725.
- 3 O. Diekmann, Ph. Getto en M. Gyllenberg, Stability and bifurcation analysis of Volterra functional equations in the light of suns and stars, *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 39 (2007), 1023–1069.
- 4 O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn-Lunel en H.-O. Walther, *Delay Differential Equations: Functional-, Complex- and Nonlinear Analysis*, Springer Applied Math Sciences 110, 1995.
- 5 O. Diekmann, M. Gyllenberg, J.A.J. Metz, S. Nakaoka en A.M. de Roos, Daphnia revisited : local stability and bifurcation theory for physiologically structured population models explained by way of an example, *Journal of Mathematical Biology* 61 (2010), 277–318.
- 6 Yu.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, New York, 1995, 1998, 2004.
- 7 K. Parvinen, Evolutionary suicide, *Acta Biotheoretica* 53 (2005), 241–264.
- 8 D.J. Rankin, K. Bargum en H. Kokko, The tragedy of the commons in evolutionary biology, *Trends in Ecology and Evolution* 22 (2007), 643–651.
- 9 A.M. de Roos, O. Diekmann, Ph. Getto en M.A. Kirkilionis, Numerical equilibrium analysis for structured consumer resource models *Bulletin of Mathematical Biology* 72 (2010), 259–297.
- 10 A.M. de Roos en L. Persson, *Population and Community Ecology of Ontogenetic Development*, Monographs in Population Biology 51, Princeton University Press, 2013.
- 11 M.W. Sabelis, A. Janssen, O. Diekmann, V.A.A. Jansen, E. van Gool en M. van Baalen, Global persistence despite local extinction in acarine predator-prey systems: lessons from experimental and mathematical exercises, *Advances in Ecological Research* 37 (2005), 183–220.
- 12 <http://www.bio.vu.nl/thb/personnel/members/kooijman.html>.
- 13 <http://www.juliuscentrum.nl/ucid>.
- 14 <http://mathstat.helsinki.fi/~kisd/ad.htm>.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.101
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



M. Ram Murty, V. Kumar Murty
The Mathematical Legacy of Srinivasa Ramanujan

Springer, 2013
xi + 184 p., prijs €60,41
ISBN 9788132207696

Het werk van Srinivasa Ramanujan (1887–1920) heeft een enorme impact in verschillende wetenschapsgebieden: getaltheorie, analyse, combinatoriek, speciale functies, q -hypergeometrische reeksen, modulaire vormen, Lie-algebra's, statistische mechanica en zelfs op de theorie van zwarte gaten! Ramanujan groeide op in zeer armoedige omstandigheden in India. Een brief met een aantal van zijn ontdekkingen die Ramanujan aan een Engelse topwiskundige, G.H. Hardy, stuurde, bracht hem uiteindelijk naar Engeland. Na een aantal zeer productieve jaren daar (1913–1919) werd hij zwaar ziek en keerde terug naar India, alwaar hij in 1920 stierf. Zelfs liggende op zijn ziekbed produceerde hij fantastische resultaten. Kenmerkend voor zijn stijl is dat hij nauwelijks bewijzen opschreef. Die bewijzen te vinden heeft vele wiskundigen heel lang beziggehouden en tot een vloed van publicaties en boeken aanleiding gegeven. Het levensverhaal van Ramanujan heeft velen de pen doen opnemen. Een klassieker is hier: R. Kanigel, *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*. Naar ik begrepen heb is er op het moment zelfs een Hollywood-film over Ramanujan in de maak (met een eigen Facebook-pagina met de titel 'Ramanujan – The Movie').

In 1940 publiceerde G.H. Hardy zijn boek *Ramanujan: Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*. Dit is een boek voor een algemener wiskundig publiek. Hardy kon destijds natuurlijk niet bepaalde ontwikkelingen vooruitzien en gedeeltelijk werkt zijn boek daarom wat gedateerd. Het boek van de Murty-broers bevat ook twaalf hoofdstukken. Het verschil met dat van Hardy is dat de auteurs op veel recentere ontwikkelingen ingaan en dus niet zo zeer in wiskundig detail kunnen gaan. Het gaat meer om de grote lijnen, maar af en toe worden eenvoudigere resultaten bewezen. Voor die deelonderwerpen waar ik niet zo vertrouwd mee ben, vind ik het een gebalanceerde mengeling van wiskundig detail en de grote lijn. De nadruk ligt op onderwerpen die te maken hebben met het gedrag van Fourier-coëfficiënten van modulaire vormen en de analytisch getaltheorie (het expertisegebied van de auteurs), Ramanujans enorme bijdragen op het gebied van de q -hypergeometrische reeksen en speciale functies komen niet aan de orde (hier geeft het boek *Number theory in the spirit of Ramanujan*, Student Mathematical Library 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, geschreven door Bruce Berndt een mooie inleiding). De analytische getaltheorie waar op ingegaan wordt, betreft de Hardy–Littlewood-cirkelmethode, een zeer belangrijke en krachtige methode en daarom zeer veel gebruikt. Deze methode gaat terug tot Ramanujans interesse om het aantal partities van n precies af te schatten (een resultaat in die richting stond al in zijn eerste brief aan Hardy) en daarom zou de Hardy–Littlewood-cirkelmethode misschien beter de Ramanujan–Hardy–Littlewood-cirkelmethode genoemd moeten worden. Verder waren Hardy en Ramanujan de grondleggers van de probabilistische getaltheorie. Hierbij gaat het om het gedrag van 'typische getallen' en niet meer om dat van alle getallen. Zo heeft een typisch getal n gemiddeld $\log \log n$ priemfactoren, in sterk contrast met de priemgetallen, die dus niet typisch zijn.

Referenties in het boek gaan door middel van getallen. Helaas is hier een fout opgetreden waardoor de verkeerde getallen (in veel gevallen) aangegeven zijn. Ik heb dit in mijn versie opgelost door in de kantlijn de correcte getallen te schrijven die te vinden zijn op de homepage van Ram Murty. Het boek maakt zeer duidelijk hoe springlevend de wiskunde van Ramanujan, 125 jaar na zijn geboorte, is en demonstreert duidelijk hoe visionair Ramanujan was. Ik kan het boek van harte aanbevelen en ben ervan overtuigd dat er een tweede editie komt met correcte referentiegetallen.

Pieter Moree



F. Lemmermeyer, P. Roquette (Hg.)
**Die mathematischen Tagebücher von
Helmut Hasse, 1923–1935**

Universitätsverlag Göttingen, 2012

563 p., prijs €44,00

ISBN 9783863950729

Het voorliggende boek is het derde in een rij dat, wat betreft inhoud, put uit het Hasse-archief van de Handschriftenabteilung der Universität Göttingen. Daar bevinden zich honderden brieven, manuscripten en aantekeningen; een geweldige bron over het ontstaan en de ontwikkeling van algebra en getaltheorie in Duitsland en daarbuiten. Het eerste deel, behelzende de briefcorrespondentie tussen Emmy Noether en Hasse, is in NAW 5/8(3), 2007, p. 231 besproken; het tweede deel, over de briefcorrespondentie tussen Emil Artin en Hasse, staat in NAW 5/14(4), 2013, p. 290 gerecenseerd.

Helmut Hasse (1898–1979) schreef wiskundige notities in zeven 'Tagebücher' op; ze dateren van juli 1923 tot en met februari 1935. Het zijn er 98 (de auteurs van het boek hebben bij elk ervan commentaar toegevoegd in het Engels). Als zodanig bieden Hasses notities een caleidoscoop van diens wiskundige activiteiten. Men maakt kennis met zijn wiskundige achtergrond en interesses; daarbij leert men hoe hij wiskundeproblemen benadert en aanpakt. Hij haalt zijn motivatie uit contacten met tijdgenoten en soms uit bestaande literatuur.

Wat er zo al in het boek staat? Zonder hier naar volledigheid te streven, vinden we onderwerpen als: definities van groepen door middel van voortbrengers en relaties, priemideaalontbindingen in deellichamen van het zogeheten ontbindingslichaam, problemen van Knopp en Ostrowski, Kirkmans vijftien-schoolmeisjesprobleem, passer- en linaalconstructies, de laatste stelling van Fermat voor exponent 5. Waren vorige zaken nog enigszins 'speels' te noemen, serieuzer en (veel) uitgebreider zijn Hasses aantekeningen over de Riemann-hypothese voor het geval van Davenport–Hasse-krommen, klassengetallen van abelse lichamen, berekening van eenheden door middel van kettingbreuken in kwadratische lichamen, het Jacobi–Perron-algoritme in kubische lichamen, de vergelijking van Pell, maximale ordes in enkelvoudige algebra's, Chevalley's proefschrift, en Van der Waerdens bewijs van het vermoeden van Baudet. Volgens Lemmermeyer en Roquette is Hasses notitie over het Artin-vermoeden aangaande primitieve wortels, gedateerd 27 september 1927, het geboortemoment van het onderzoek daarover. Voorts zij nog de volgende trefwoorden vermeld die doorlopend een rol spelen in de Tagebücher: Eisenstein, Galoistheorie, normrestsymbolen, reciprociteitswetten, functionaalvergelijking van zeta-functies.

Als waardige opvolgers van de Hasse Tagebücher zijn de handgeschreven Oberwolfach Eintragungsbücher van de Hasse-Roquette Tagungen te beschouwen uit de jaren zestig en zeventig van de vorige eeuw. Mooie culminatiepunten van Hasses invloed op onderzoek in de getaltheorie zijn bijvoorbeeld ook te vinden in het verslag in *Symposia Mathematica*, vol. 15, 1975, van de conferentie 'Strutture in Corpi Algebrici', Rome 1973, ter gelegenheid van Hasses 75ste verjaardag, alwaar de recensent aanwezig was.

De inhoud van de Hasse Tagebücher is uitermate geschikt voor studenten, onderzoekers en docenten die te maken hebben met algebraïsche en analytische getaltheorie. Aanbevolen dus.

Robert van der Waall



Maris van Haandel, Gert Heckman
**Op de Schouders van Reuzen
De mechanica van Isaac Newton**

Epsilon Uitgaven, deel 62, 2009

104 p., prijs €18,00

ISBN 9789050411073

Dit boek geeft een inleiding tot het werk van Newton en de wetten van Kepler, en is bedoeld voor een breed publiek, waaronder vwo-leerlingen en eerstejaarsstudenten. Centraal in het boek staat het van de auteurs afkomstige nieuwe bewijs van deze wetten.

De wiskundige voorkennis wordt in de eerste drie hoofdstukken behandeld: het in- en uitproduct van vectoren en geparametriseerde krommen. Daarna komt de historische context aan de orde met de volgende onderwerpen: de tweewielerkromme van Copernicus (epicykels), de drie wetten van Kepler, de valwet van Galilei en ten slotte de wetten van Newton. Deze onderwerpen worden opgeluisterd met veel historisch materiaal.

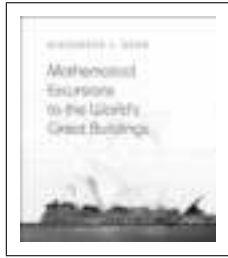
Hierna presenteren de auteurs hun eigen fraaie bewijs van de ellipsbaanwet. Het bewijs is meetkundig van aard en maakt daarbij gebruik van een behouden grootte: de Lenz–Runge-vector. In de mechanica-boeken komt deze meestal uit de lucht vallen, maar hier wordt hij verkregen op basis van een meetkundig argument. Daarbij wordt meteen duidelijk dat de baankromme voldoet aan de 'tuinmansdefinitie' van de ellips en dat de Lenz–Runge-vector te maken heeft met de excentriciteit van de ellips.

Het oorspronkelijke bewijs van Newton wordt ook behandeld, evenals dat van Feynman. Feynmans bewijs is ook heel mooi: hij toont aan dat de snelheidsvector een cirkel doorloopt (de hodograaf), waaruit volgt dat de Lenz–Runge-vector behouden is.

In het laatste hoofdstuk worden de grenzen van de klassieke mechanica besproken. Er wordt aandacht besteed aan het drielielichamenprobleem en aan de kwantummechanica. De relativiteitstheorie komt slechts summier aan de orde. Het is jammer dat de periheliumbeweging van Mercurius geheel ontbreekt.

Dit boek is helder geschreven en zal de wiskundig geïnteresseerde lezer zeker aanspreken. Als mededocent heb ik dit materiaal gebruikt in een wiskunde D-module voor 6 vwo. Deze werd enthousiast ontvangen door de leerlingen, hoewel het eigenlijke bewijs niet helemaal behandeld kon worden. Alle lof voor de auteurs die met dit werk bijdragen aan een beter imago van de wiskunde op school.

Dit boek is ook besproken door Klaas Landsman in het artikel: Newton voor Jan en alleman, NAW 5/11(3), 2010, pp. 178–184. Henk Pijls



Alexander J. Hahn
**Mathematical Excursions to the
 World's Great Buildings**

Princeton University Press, 2012
 ix + 318 p., prijs \$ 49.50
 ISBN 9780691145204

In dit fraai uitgegeven en prettig leesbare werk belicht de auteur, wiskundige aan de University of Notre Dame, op indrukwekkende wijze vanuit historisch perspectief de twee in de titel gesuggereerde aspecten rondom architectuur: architectonische ontwerpen van tot de verbeelding sprekende gebouwen en de rol van wiskunde daarbij ten aanzien van constructie- en vormaspecten. Natuurlijk wordt daarbij ook het terrein van de natuurkunde betreden.

Wiskunde speelt uiteraard een belangrijke rol in de bouwkunde, en die rol is alleen maar aan het toenemen. De laatste tien jaar zijn er meer boeken verschenen die hierop ingaan, met name *Architectural Geometry* (H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian, 2007) en *The new Mathematics of Architecture* (J. Burry, M. Burry, 2010). Het boek van Hahn onderscheidt zich hier voornamelijk van door de historische insteek. Pottmann e.a. richten zich directer op de wiskunde en bijpassende visualisaties, terwijl Burry en Burry minder wiskundig te werk gaan en vermoedelijk meer de taal van architecten spreken.

Wiskunde is onontbeerlijk om constructieve aspecten door te rekenen, variërend van sterkte- en stabiliteitsberekeningen tot het modelleren van het klimaat in een gebouw. Maar steeds vaker fungeert wiskunde ook als inspiratiebron bij het ontwerpproces. De technische ontwikkelingen maken het namelijk steeds beter mogelijk allerlei — vaak gekromde — vormen gestalte te geven in concrete gebouwen. Het Sydney Opera House, het Guggenheim Museum in Bilbao en de augurkvormige 'Gherkin' in London zijn daar prachtige illustraties van (de eerste twee worden in het boek besproken).

Hahn plaatst de ontwikkelingen in de architectuur uitvoerig in hun maatschappelijke context en belicht waar zinvol de relevante wiskundige ontwikkelingen. Denk bij die maatschappelijke context niet alleen aan sociale en politieke omstandigheden, maar ook bijvoorbeeld aan

het beschikbaar komen van nieuwe materialen zoals staal. De ene keer is de wiskunde wat prominenter aanwezig, de andere keer de bouwkunde. Soms is de wiskunde belangrijker om de verhaallijn te volgen, op andere plaatsen kan de wiskunde zonder bezwaar overgeslagen worden. Die wiskunde blijft wel beperkt tot de meer elementaire klassieke wiskunde van onder meer perspectief (analytisch uitgewerkt in het boek), symmetrie, gulden snede, vectoren (in verband met krachten), en betreedt pas in het laatste hoofdstuk de wereld van de calculus met enkele toepassingen. De discussie rondom het Sydney Opera House in het voorlaatste hoofdstuk geeft bijvoorbeeld een redelijk gedetailleerd beeld van het moeilijke pad dat tot de uiteindelijke realisatie van dit gebouw met zijn karakteristieke gekromde buitenkant (stukken van boloppervlakken vanwege eisen van geld en tijd!) heeft geleid, maar beperkt zich voornamelijk tot de beschrijving van de vorm van die gekromde buitenkant. Geavanceerde methoden uit de numerieke wiskunde blijven buiten beschouwing. De rol daarvan wordt enkel genoemd, bijvoorbeeld bij de bespreking van het Guggenheim Museum.

Het boek is geen compleet overzicht van de architectuur. Hahn richt zich in de diverse perioden uit het verleden op enkele (doorgaans algemeen bekende) hoogtepunten uit de betreffende architectuur, en beschrijft die vrij gedetailleerd met uitstekende illustraties.

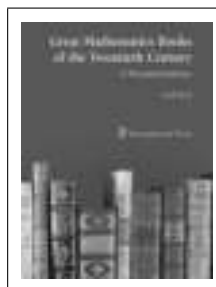
Hahns boek zit ergens tussen een historische monografie en een leerboek in. Het bevat opgaven die voornamelijk de wiskunde (en de natuurkunde van krachten) verder uitdiepen, het bevat discussievragen, maar het is op plaatsen ook bladzijdenlang een geschiedenisboek. De stijl van schrijven is verhalend en de wiskunde komt ook op die manier aan bod. Voor de lezers die niet zo met bouwkundeterminen vertrouwd zijn, is er een lijst met begrippen uit de architectuur opgenomen. Het ligt niet zo voor de hand het boek als cursusboek te gebruiken, wel is het boek zeker nuttig als literatuur en achtergrond bij colleges voor bouwkundestudenten. Voor bouwkundestudenten met geringe wiskundige bagage is de wiskunde op sommige plaatsen ongetwijfeld lastig te volgen zonder voorafgaande cursussen, voor meer wiskundig onderlegde lezers duren sommige wiskundige uiteenzettingen wat lang. Maar dat is kritiek in de marge. Vanuit mijn perspectief als wiskundige heeft Hahn een fraai en degelijk boek geschreven, en ik ben benieuwd wat bouwkundigen ervan vinden. Ik zal er in ieder geval uit putten bij mijn colleges voor bouwkundestudenten. *Hans Sterk*

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wil bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



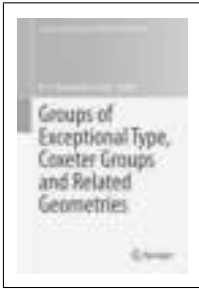
Matthias Baaz, Christos H. Papadimitriou
 et al. (eds.)
**Kurt Gödel and the Foundations of
 Mathematics**

Cambridge University Press, 2014
 ISBN 9781107677999
www.cambridge.org/9781107677999



Lizhen Ji
**Great Mathematics Books of the
 Twentieth Century**

International Press of Boston, 2014
 ISBN 9781571462831
intlpress.com/site/pub/pages/books/items/00000417/



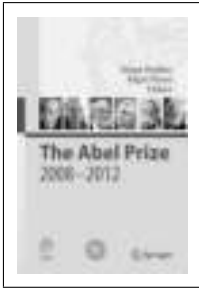
N.S. Narasimha Sastry (ed.)
Groups of Exceptional Type, Coxeter Groups and Related Geometries

Springer, 2014
 ISBN 9788132218135
www.springer.com/978-81-322-1813-5



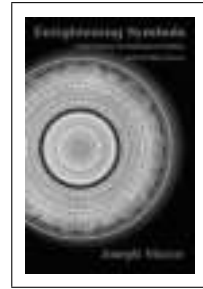
Angela B. Shiflet, George W. Shiflet
**Introduction to Computational Science
 Modeling and Simulation for the Sciences (2nd ed.)**

Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691160719
press.princeton.edu/titles/10291.html



Helge Holden, Ragni Piene (eds.)
The Abel Prize 2008–2012

Springer, 2014
 ISBN 9783642394485
www.springer.com/978-3-642-39448-5



Joseph Mazur
**Enlightening Symbols
 A Short History of Mathematical Notation and Its Hidden Powers**

Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691154633
press.princeton.edu/titles/10204.html



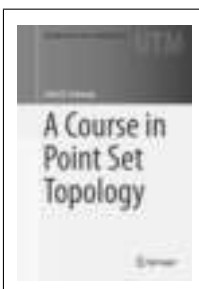
Michèle Audin, Mihai Damian
Morse Theory and Floer Homology

Springer, 2014
 ISBN 9781447154952
www.springer.com/978-1-4471-5495-2



David Reimer
**Count Like an Egyptian
 A Hands-on Introduction to Ancient Mathematics**

Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691160122
press.princeton.edu/titles/10197.html



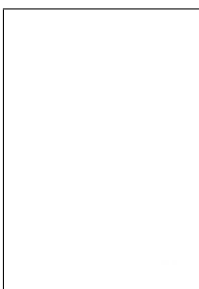
John B. Conway
A Course in Point Set Topology

Springer, 2014
 ISBN 9783319023670
<http://www.springer.com/978-3-319-02367-0>



Araceli Bonifant, Misha Lyubich, Scott Sutherland (eds.)
**Frontiers in Complex Dynamics
 In Celebration of John Milnor's 80th Birthday**

Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691159294
press.princeton.edu/titles/10167.html



Michael Joswig
Essentials of Tropical Combinatorics

Springer, 2014
 ISBN 9781441983657
www.springer.com/978-1-4419-8365-7



Claire Voisin
Chow Rings, Decomposition of the Diagonal, and the Topology of Families

Princeton University Press, 2014
 ISBN 9780691160511
press.princeton.edu/titles/10289.html

Problemen

Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 September 2014.

Problem A (proposed by Wouter Zomervrucht)

Let n be a positive integer. Let M be an $n \times n$ -matrix with entries in $\{1, 2, \dots, n\}$. Let r be the complex eigenvalue with the largest absolute value. Show that $n \leq |r| \leq n^2$.

Problem B (proposed by Hans Zwart)

Let X be a unital $\mathbb{R}$ -algebra with multiplicative unit 1, and let $\|\cdot\|$ be a *submultiplicative norm* on X , i.e. a map $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the following properties:

- $\|1\| = 1$;
- if $x \in X$ satisfies $\|x\| = 0$, then $x = 0$;
- for all $a \in \mathbb{R}, x \in X$, we have $\|ax\| = |a| \|x\|$;
- for all $x, y \in X$, we have $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ and $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

Let $C: \mathbb{R} \rightarrow X$ be a map such that $C(0) = 1$ and such that for all $s, t \in \mathbb{R}$, we have

$$2C(s)C(t) = C(s+t) + C(s-t).$$

Suppose that

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \|C(s) - 1\| < \frac{3}{2}.$$

Show that $C = 1$.

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let G be a finite group. Let n be the number of automorphisms σ of G such that for all $x \in G$, the element $\sigma(x)$ is conjugate to x . Show that every prime divisor of n divides the order of G .

Edition 2013-4 We received solutions from Alexandros Efthymiadis (St. Andrews), Alex Heinis (Amsterdam), Richard Kraaij (Delft), Thijmen Krebs (Nootdorp), Matthé van der Lee (Amsterdam), Tejaswi Navilarekallu, Rohith Varma (Chennai, India), Traian Viteam (Cape Town, South Africa) and Hans Zwart (Enschede).

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Problem 2013-4/A (folklore, communicated by Jaap Top)

Does there exist an integer $n > 1$ such that the set of leading digits of $2^n, 3^n, \dots, 9^n$ is equal to $\{2, 3, \dots, 9\}$?

Solution The answer to the question is ‘no’. Let $\text{ld}(k)$ denote the leading digit of k . The more general question which patterns occur in the table

$$\left(\text{ld}(2^n), \text{ld}(3^n), \dots, \text{ld}(9^n)\right)_n$$

is known as Gelfand’s question. See, e.g., mathworld.wolfram.com/GelfandsQuestion.html.

We received correct solutions from Alexandros Efthymiadis, Alex Heinis and Thijmen Krebs. The book token goes to Thijmen Krebs, and the following solution is based on his.

Suppose $n > 1$ as in the problem exists and let $\sigma_d = \text{ld}(d^n)$, so we have a permutation $d \mapsto \sigma_d$ of $\{2, 3, \dots, 9\}$. Then for every d , there exists some $m_d \in \mathbb{Z}$ with

$$\sigma_d 10^{m_d} \leq d^n < (\sigma_d + 1) 10^{m_d}. \quad (1)$$

In particular, we have

$$\sigma_2 \sigma_5 10^{m_2+m_5} \leq 10^n < (\sigma_2 + 1)(\sigma_5 + 1) 10^{m_2+m_5}, \quad (2)$$

so $n = m_2 + m_5 + 1$ and $\sigma_2 \sigma_5 \in \{6, 8, 10\}$.

In case $\sigma_2 \sigma_5 = 10$, we have equality in the left hand side of (2), hence $5^n = \sigma_5 10^{m_5}$, but the left hand side has no factors 2, so $m_5 = 0$ and $n = 1$, contradiction. This leaves the three cases $\sigma_2 = 2, 3, 4$.

If $\sigma_2 = 4$, then $\sigma_5 = 2$, but also $\sigma_4 = 2$ because of

$$\sigma_2^2 10^{2m_2} \leq 4^n < (\sigma_2 + 1)^2 10^{2m_2}. \quad (3)$$

A contradiction since $\sigma_2 \neq \sigma_4$.

If $\sigma_2 = 3$, then $\sigma_5 = 2$ and $\sigma_4 = 9$ because of (3). But then $\sigma_8 \in \{2, 3\}$ because of

$$\sigma_2 \sigma_4 10^{m_2+m_4} \leq 8^n < (\sigma_2 + 1)(\sigma_4 + 1) 10^{m_2+m_4}. \quad (4)$$

This is a contradiction as $\sigma_2, \sigma_5, \sigma_8 \in \{2, 3\}$ are distinct.

Finally, if $\sigma_2 = 2$, then $\sigma_5 \in \{3, 4\}$ and $\sigma_4 \leq 4$ by 4 (otherwise $\sigma_8 = 2 = \sigma_2$). Similarly, the inequality

$$\sigma_2 \sigma_3 10^{m_2+m_3} \leq 6^n < (\sigma_2 + 1)(\sigma_3 + 1) 10^{m_2+m_3} \quad (5)$$

implies $\sigma_3 \leq 4$. Now $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \in \{2, 3, 4\}$ is another contradiction.

This proves that n does not exist and solves the problem.

Wolfram MathWorld (mathworld.wolfram.com/GelfandsQuestion.html) calls the question whether there is an n with $\text{ld}(d^n) = d$ for all $d \in \{2, 3, \dots, 9\}$ an open question. The solution above implies that the answer to this question is 'no' as well.

Problem 2013-4/B (proposed by Bart de Smit and Hendrik Lenstra)

Rings are unital, and morphisms of rings send 1 to 1. Let A and B be commutative rings. Suppose that there exists a ring C such that there are injective morphisms $A \rightarrow C$ and $B \rightarrow C$ of rings. Show that there exists a *commutative* such ring.

Solution We received solutions from Matthé van der Lee and Rohith Varma. The book token is awarded to Matthé van der Lee.

Let $f: A \rightarrow C$ and $g: B \rightarrow C$ be the given injections. The map

$$A \times B \rightarrow C, \quad (a, b) \mapsto f(a)g(b)$$

is $\mathbb{Z}$ -bilinear, so induces a ring homomorphism $h: A \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow C$. Let $i: A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ and $j: B \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ be the canonical maps. The compositions $f = h \circ i$ and $g = h \circ j$ are injective by assumption, hence i and j are injective. The ring $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ is commutative, so we are done.

Problem 2013-4/C (proposed by Jinbi Jin)

Let $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ denote the set of continuous maps from $\mathbb{R}$ to itself. A (not necessarily continuous) map $f: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ is called *good* if it satisfies, for all $s, t \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, the identity

$$f(s \circ t) = f(s)f(t),$$

where the product on the right hand side is the point-wise multiplication of maps.

- Find a non-constant good map $f: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Show that $f(\exp) = 0$ for all non-constant good maps $f: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Here, $\exp$ is given by $x \mapsto e^x$.)

Solution We received solutions from Alex Heinis, Richard Kraaij, Thijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu, Traian Viteam and Hans Zwart. The following solution (of the second part) is based on that of Tejaswi Navilarekallu, to whom we also award the book token for this problem.

Giving a non-constant good map

Let $f: C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be given by

$$f(s) = \begin{cases} 1 & s \text{ is bijective,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Showing that f is indeed a good map amounts to proving the following lemma.

Lemma 1. *Let $s, t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous maps such that $s \circ t$ is bijective. Then both s and t are bijective.*

Proof. First note that t and $s \circ t$ are injective, so by the intermediate value theorem, they are either strictly increasing, or strictly decreasing. Assume without loss of generality that t and $s \circ t$ is strictly increasing.

Suppose for a contradiction that the image of t is bounded from above, and let M be its supremum in $\mathbb{R}$. Let $x \in \mathbb{R}$ be arbitrary, and consider the interval $I = [x, \infty)$. As t is increasing, it follows that the image of I under t lies in $[t(x), M]$. As $s \circ t$ is increasing and bijective, it follows that $s \circ t(I) = [s \circ t(x), \infty)$. But on the other hand, as $[t(x), M]$ is closed and bounded, $s \circ t(I)$ must be a closed and bounded interval, and this is a contradiction. Hence the image of t is not bounded from above, and similarly, we can show that it is not bounded from below either. As t is a strictly increasing continuous map, it follows that t is a bijection, and hence that s is a bijection as well, as desired. $\square$

Showing that $f(\exp) = 0$ for f non-constant and good

Let f be a non-constant good map. In what follows below we denote by 0, 1 and -1 the constant maps taking the corresponding values.

Let

$$i(x) = x, \quad j(x) = -x, \quad u(x) = \begin{cases} x & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For any $s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that $s \circ s = s$ we have $f(s) = f(s \circ s) = f(s)f(s)$. Since $f(s)$ is a continuous function, it follows that $f(s) = 1$ or $f(s) = 0$.

Note that $i \circ i = i$, so $f(i) = 1$ or $f(i) = 0$. If $f(i) = 0$, then $f(s) = f(s)f(i) = 0$ for all $s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and thus f is constant, contrary to our assumption. Therefore $f(i) = 1$. Also note that $0 \circ 0 = 0$, so $f(0) = 1$ or $f(0) = 0$. If $f(0) = 1$, then $f(s) = f(0 \circ s) = 1$ for all $s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so f is again constant, contrary to our assumption. Hence $f(0) = 0$. Finally, note that $f(i) = f(j \circ j) = f(j)^2$ and hence $f(j) = 1$ or $f(j) = -1$.

Now

$$\begin{aligned} f(u)f(j) &= f(u \circ j) \\ &= f(u \circ u \circ j) = f(u)f(u \circ j) = f(u \circ j)f(u) = f(u \circ j \circ u) \\ &= f(0) = 0. \end{aligned}$$

Since $f(j) = \pm 1$, it follows that $f(u) = 0$. Therefore, as $u \circ \exp = \exp$, we have $f(\exp) = f(u \circ \exp) = f(u)f(\exp) = 0$.