

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Interview | Interview**
- 90 **Ronald Prins: Zeerecht voor internet**
Sjoerd Rienstra, Berry Schoenmakers
- Nieuws | News**
- 95 **Afscheid hoofdredacteur: Ferdinand Verhulst**
Teun Koetsier, Wil Schilders
- Geschiedenis | History**
- 98 **Bernoulli's lichtstraal-oplossing van het brachistochrone probleem door de ogen van Hamilton**
Henk Broer
- Evenement | Events**
- 108 **NMC 2013: Weergaloze mengeling van wiskunde en theater**
Robbert Fokkink
- Maatschappij | Society**
- 115 **Vreemde vogels**
Ferdinand Verhulst
- Geschiedenis | History**
- 117 **Meetkundeonderwijs tussen 1990 en 2007**
Wim Groen, Ed de Moor
- Boekbespreking | Book review**
- 125 **Gemeenschappelijke inspanning zet wiskunde-didactiek op de kaart**
Johan Deprez
- Afscheidsrede | Valedictory lecture**
- 130 **Brouwers dimensionsgrad: controversie en verwarring**
Jan van Mill
- Evenement | Events**
- 139 **NWD: Nimmer overschat een wiskundig probleem**
Saskia van Boven
- Vakantiecursus | Summer school**
- 141 **Divergente divertimenti**
Jeroen Spandaw

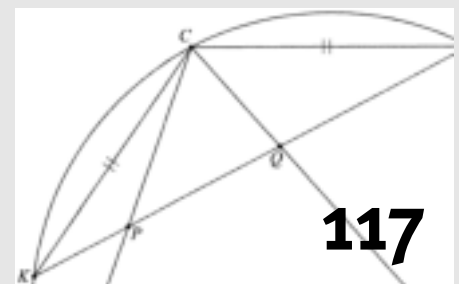
Rubrieken | Departments

- 82 **Colofon**
- 83 **Redactioneel**
Barry Koren
- 84 **Servicepagina**
- 85 **Agenda**
Patrick Hafkenscheid
- 87 **Nieuws**
Patrick Hafkenscheid
- 113 **Het keerpunt van Hans Heesterbeek**
Ionica Smeets
- 123 **In de verdediging**
Geertje Hek
- 144 **Boekbesprekingen**
- 149 **Problemen**

Uitgelicht



Henk Broer geeft een overzicht van het brachistochrone probleem op pagina 98.



Wim Groen en Ed de Moor sluiten hun vierluik over de rol van meetkunde in het wiskundeonderwijs af op pagina 117.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5924288
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Barry Koren (b.koren@tue.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Patrick Hafkenscheid (p.hafkenscheid@vu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@utwente.nl)
Steven Wepster (s.a.wepster@uu.nl)

Bureau redactie

Gianni van den Braak
Lætitia Diemer

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuyper (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Christophe Debry (KU Leuven), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Ronald van Luijk (UL), Derk Pik (JSG Maimonides), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Marco Streng (VU), Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor gewone leden bedraagt €80 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen €40. Voor studenten aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding €30. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts €40 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor €20.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Abonnementenservice NAW
Postbus 2238, 5600 CE Eindhoven
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

André Ran (VU, voorzitter), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL, penningmeester), Geurt Jongbloed (TUD, ondervoorzitter), Jenneke Krüger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster, Gert Vegter (RUG), Mark Veraar (TUD)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	02-09-2013	verstreken
4	02-12-2013	01-08-2013
1	03-03-2014	01-11-2013
2	02-06-2014	01-02-2014

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Fishe

Freudenthal Instituut

Op het omslag

Cybercriminaliteit en cyberoorlog vormen een steeds groter probleem. Zo waren er de laatste tijd regelmatig DDoS-aanvallen op banken en overheidsorganisaties. De aanpak hiervan stuit nog altijd op grote juridische problemen. Lees het interview met Ronald Prins van Fox-IT op pagina 90.

Over de grote rivieren

Op mijn doordeweekse treinreizen van Amsterdam naar Eindhoven en vice versa steek ik de grote rivieren Lek, Waal en Maas over. De verandering van deze rivieren in de loop der seizoenen vormt een prachtig schouwspel. Vooral de afwisseling in de Waal onder de spoorbrug bij Zaltbommel is indrukwekkend. Soms is zij daar wel van 150 meter tot 1,5 kilometer verbreed en in het vaargedeeelte dan toch nog krachtig stromend.

Ofschoon statisch, ook intrigerend zijn de vele waterwerken om de rivieren in toom te houden. Waterwerken zoals de strekdammen, bedoeld om de rivieroever te beschermen tegen lokaal hoge stroomsnelheden en om het water goed in de vaargeul te houden. Streckdammen kunnen worden ontworpen op basis van alleen periodiek in de seizoenen veranderende waterafvoer in de rivieren en met alleen stromingsleer en wiskunde.

Moeilijker ligt dit bij de belangrijkere en duurdere waterwerken langs onze rivieren: de dijken. Het vandaag de dag aanleggen en onderhouden van dijken vereist naast stromingsleer en wiskunde ook economie en klimatologie. Het aanleggen en grootschalig ophogen van dijken doet men veelal voor een periode van tientallen jaren, een tijdspanne waarin zowel de economische waarde van het tegen overstroming te beschermen achterland als de neerslag en daarmee de waterafvoer door de rivieren beduidend kunnen veranderen. Een dynamisch regelprobleem dus.

De statisticus David van Dantzig heeft na de watersnoodramp van 1953 een methode ontwikkeld waarmee de optimale hoogte van een dijk kan worden bepaald. De methode van Van Dantzig betreft een nog statisch regelprobleem waarin een optimum wordt gevonden tussen enerzijds kosten voor dijk aanleg of -verhoging en anderzijds kosten ten gevolge van overstroming. Van Dantzig redeneerde als volgt: bij elke dijk is er een bepaalde kans dat het water een bepaalde hoogte bereikt. Overstroming van het achterland definieerde hij vervolgens als het overstromen (niet het bezwijken) van die dijk, waarbij hij veronderstelde dat ten gevolge van die overstroming het bijbehorende achterland wel altijd volledig verloren zou gaan. Vermenigvuldiging van de economische waarde van het te beschermen achterland met de kans op overstroming als functie van de dijkhoogte levert de te verwachten overstromingskosten als functie van de dijkhoogte. De totale kosten definieerde hij vervolgens als de som van deze te verwachten overstromingskosten plus de

kosten voor aanleg/verhoging van de dijk als functie van zijn hoogte. Minimalisatie van deze totale kosten levert tenslotte de optimale dijkhoogte. Rijkswaterstaat heeft Van Dantzigs methode vele jaren gebruikt om de optimale hoogten van de ruim vijftig belangrijkste Nederlandse zee- en rivierdijken te berekenen. In de loop der jaren is de methode uitgebreid bij het Centraal Planbureau. Een belangrijke uitbreiding was dat rekening werd gehouden met de te verwachten verandering van de economische waarde van het tegen overstroming te beschermen gebied. Bij economische waarde moet niet alleen worden gedacht aan de geldwaarde van alle roerend en onroerend goed en hun eventuele inventaris, maar ook aan die van alle levende have in het gebied: planten, dieren en ook mensen. Onder verantwoordelijkheid van Rijkswaterstaat is de methode geïmplementeerd in computerprogrammatuur, waarin een mens op 2,2 miljoen euro(!) wordt gewaardeerd. De uitkomst van een berekening met de programmatuur kan leiden tot het besluit om een dijk niet meer te onderhouden en daarmee het achterliggende gebied in beginsel prijs te geven aan het water. Bij de eilanden Rottumeroog en Tiengemetten is hiertoe destijds besloten.

De afgelopen jaren zijn door wiskundigen aan de Universiteit Tilburg en het Centrum Wiskunde & Informatica methoden ontwikkeld ter verdere uitbreiding van genoemde programmatuur, uitbreidingen die het mogelijk maken om steeds beter rekening te houden met vooral klimaatveranderingen en dus met eventuele waterafvoertoename en zeespiegelstijging, inclusief de onzekerheden daarin.

Dit jaar is een gezamenlijk onderzoeksthema van meer dan honderd wetenschappelijke genootschappen, universiteiten en onderzoeksinstituten: *Mathematics of Planet Earth*. Nederland en vele andere landen — 80 procent van de wereldbevolking woont in kustgebieden — kunnen veel baat hebben bij dit thema. In het volgende nummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* hopen we uitgebreid aandacht te besteden aan *Mathematics of Planet Earth*. Daartoe moet er nog wel wat water door de rivieren. In het voor u liggende nummer eerst een keur aan allerlei andere onderwerpen. Veel leesplezier gewenst!

Barry Koren, hoofdredacteur

Faculteit Wiskunde & Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ **Secretariaat**

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

□ **Prof.dr. Robert Tijdeman erelid KWG**

Op 5 april 2013 is Rob Tijdeman tot erelid van het genootschap benoemd tijdens de Algemene Ledenvergadering van het KWG op het Nederlands Mathematisch Congres in Nijmegen. Hij kreeg deze bijzondere onderscheiding op grond van zijn voortreffelijke bijdrage aan de verwezenlijking van de doelstellingen van het genootschap: de wiskunde te bevorderen, haar beoefening en haar toepassingen aan te moedigen. Rob Tijdeman heeft zich in het bijzonder verdienstelijk gemaakt voor de Nederlandse wiskunde als voorzitter en bestuurder van vele gremia die tot doel hadden de belangen van de Nederlandse wiskunde te behartigen.

□ **Philips Wiskundeprijs voor Promovendi**

Tijdens het NMC 2013 hebben zes kandidaten een voordracht gegeven in de strijd om de achtste Philips Wiskundeprijs. De prijs, een geldbedrag en een wisselbeker, is toegekend aan René Pannekoek, promovendus aan de Universiteit Leiden, met de voordracht 'Surfaces and Numbers'. Eerdere winnaars waren: Joost Batenburg (2006, Leiden), Johan Bosman (2007, Leiden), Erik Jan Leeuwen (2008, CWI), Stefan van Zwam (2009, Eindhoven), Matthias Mnich (2010, Eindhoven), Julia Mikhal (2011, Twente), en Ruben van der Zwaan (2012, Maastricht).

Platform Wiskunde Nederland

□ **Bureau PWN**

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam,
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

□ **PWN Nieuwsbrief**

PWN publiceert maandelijks een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven.

European Mathematical Society

□ **Abelprijs 2013**

De Noorse Academie van Wetenschappen heeft de Abelprijs voor 2013 toegekend aan Pierre Deligne, Institute for Advanced Study, Princeton, "for seminal contributions to algebraic geometry and for their transformative impact on number theory, representation theory, and related fields".

□ **EMS Newsletter**

De elektronische versie van de meest recente uitgave (maart 2013) van de EMS Newsletter is beschikbaar via de link www.ems-ph.org/journals/journal.php?jrn=news.

□ **EWM**

De 16th General Meeting van European Women in Mathematics (EWM) wordt van 2–6 september 2013 gehouden in Bonn. EWM heeft als doel vrouwelijke wiskundigen met elkaar in contact te brengen. De Nederlandse coördinatoren zijn KaYin Leung en Valentijn Karemaker. www.projects.science.uu.nl/ewmnl

Recente publicaties van het KWG

□ **Indagationes Mathematicae** (www.elsevier.com/locate/indag)

Special issue honoring Israel Gohberg; M.A. Kaashoek and H.W. Broer (eds.), Volume 23, issue 4 (gratis toegankelijk op www.sciencedirect.com).

□ **Epsilon Uitgaven** (www.epsilon-uitgaven.nl)

72. *Handboek wiskundendidactiek*, P. Drijvers, A. van Streun en B. Zwaneveld, €34,00, 2012.

71. *Kansrekening* – een introductie, A.J. van den Brandhof, €17,00, 2012.

70. *Wiskunde in Werking van A naar B*, M. de Gee, €34,00, 2011.

69. *De Riemann-hypothese* – een miljoenenprobleem, R. van der Veen en J. van de Craats, €19,00, 2011.

□ **Zebra-reeks** (Epsilon Uitgaven)

35. *Verborgene boodschappen* – een inleiding in de cryptografie, A. Aaten en C. Kraaikamp, €10,00, 2013.

34. *De Ster van de dag gaat op en onder* – rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang, A. Goddijn, €10,00, 2012.

33. *Ontwikkelen met Kettingbreuken*, M. Kindt en P.W.H. Lemmens, €10,00, 2011.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen naar redactie@epsilon-uitgaven.nl.

Agenda

| Upcoming Events

juni 2013

10 juni 2013

□ Bessensap 2013

Bijeenkomst waar wetenschap journalistiek ontmoet.

plaats *Museon, Den Haag*

info www.nwo.nl/actueel/evenementen/bessensap

10 – 12 juni 2013

□ Heights and Moduli Spaces

Workshop over recente ontwikkelingen op het gebied van moduli spaces.

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info lorentzcenter.nl

10 – 12 juni 2013

□ Workshop Probabilistic Cellular Automata

Workshop over cellular automaton in de kansrekening (denk aan Conways game of life met een kansfactor).

plaats *Eurandom, Eindhoven*

info www.eurandom.tue.nl/events

10 – 14 juni 2013

□ 9th Conference on Bayesian Nonparametrics

Conferentie bedoeld voor experts en jonge onderzoekers over theorie en toepassing van Bayesian Nonparametrics.

plaats *VU, Amsterdam*

info www.bnp9.win.tue.nl

19 juni 2013

□ Uitvindwedstrijd 2013

Wedstrijd waarin kinderen van 8–12 hun uitvindingen laten beoordelen door een jury. Winnaars worden opgenomen in de nieuwe tentoonstelling.

plaats *NEMO, Amsterdam*

info e-nemo.nl

17 – 21 juni 2013

□ Bayesian Nonparametrics

Workshop over Bayesiaanse statistiek in het algemeen, van de computationele methoden tot de theoretische analyse.

plaats *Lorentz Center@Oort, Leiden*

info lorentzcenter.nl

17 – 21 juni 2013

□ NDNS+ Summer School

Summer school van NDNS+ met als thema 'Emergent dynamics of discrete and stochastic multi-scale systems: analysis and simulation'.

plaats *IMCS Advanced Study Center, Eindhoven*

info ndns.nl

23 juni 2013

□ Hoe maak je een 3D-film?

Kinderlezing over de technieken die gebruikt worden in het maken van een 3D-film.

plaats *NEMO, Amsterdam*

info kinderlezingen.nl

27 – 28 juni 2013

□ A singular life

Conferentie ter gelegenheid van het met pensioen gaan van professor Eduard Looijenga.

plaats *Utrecht*

info www.uu.nl/singularlife

juli 2013

10 – 12 juli 2013

□ Special functions and special numbers

Conferentie ter gelegenheid van de 60ste verjaardag van Frits Beukers.

plaats *Utrecht*

info tinyurl.com/beukers60

15 – 19 juli 2013

□ Elliptic Integrable Systems and Hypergeometric Functions

Workshop over onder andere integreerbare systemen, representatietheorie en toepassingen in de Quantum Field Theory.

plaats *Lorentz Center, Leiden*

info lorentzcenter.nl

18 – 28 juli 2013

□ IMO2013

54ste editie van de internationale wiskunde olympiade. Dit jaar in Colombia

plaats *Santa Marta, Colombia*

info www.uan.edu.co/imo2013/en

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

agenda@nieuwarchief.nl

 22 – 26 juli 2013

Positivity VII

Zevende editie van de 'Positivity conference', dit jaar in het teken van het 100ste geboortjaar van Adriaan Cornelis Zaanen.

plaats Leiden

info websites.math.leidenuniv.nl/positivity2013

22 – 26 juli 2013

Sage Days: Algorithms in Arithmetic Geometry
Workshop met drie projectdoelen die betrekking hebben op enerzijds uitbreiden van de functionaliteit van SAGE (wiskundesoftware) en anderzijds implementeren van nieuwe algoritmes.

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

27 – 31 juli 2013

Bridges 2013

Conferentie en tentoonstelling over het verband tussen kunst en wiskunde.

plaats Enschede

info bridgesmathart.org/bridges-2013

augustus 2013

 19 – 30 augustus 2013

Summerschool Mathematics and Science Education

Vakantiecursus verzorgd door het Freudenthal Instituut in samenwerking met het onderzoeksprogramma Educational and Learning Sciences.

plaats Utrecht

info utrechtsummerschool.nl

23 – 24, 30 – 31 augustus 2013

67ste Vakantiecursus Wiskunde

Informatieve en inspirerende bijeenkomsten over wiskunde, met dit jaar als thema 'Wiskunde in Wording'.

plaats TU Eindhoven, CWI Amsterdam

info platformwiskunde.nl/onderwijs.vakantiecursus.wiskunde.htm

26 – 30 augustus 2013

Modeling with Measures: from Structured Populations to Crowd Dynamics

Nog geen informatie bekend.

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info lorentzcenter.nl

september 2013

 15 september 2013

Wat doen satellieten in de ruimte?

Kinderlezing over de verschillende soorten satellieten en hoe ze werken.

plaats NEMO, Amsterdam

info kinderlezingen.nl

23 september 2013

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

43 onderbouwleerlingen, 45 vierdeklassers en 32 vijfdeklassers zijn door naar de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2013.

plaats TU Eindhoven

info wiskundeolympiade.nl

27 september 2013

Discovery Festival

Uitgaansnacht-met-inhoud vol wetenschap, muziek, kunst en experimenten

plaats Amsterdam, Eindhoven en Rotterdam

info discoveryfestival.nl

oktober – november 2013

 2 – 4 oktober 2013

Woudschoten conferentie

38ste editie van de Vlaams/Nederlandse conferentie over Scientific Computing.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

4 oktober 2013

Junior Wiskunde Olympiade

Junior versie van de Wiskunde Olympiade, klas 1 tot 3 van het voortgezet onderwijs.

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info wiskundeolympiade.nl

 5 oktober 2013

Dag van de leraar

Internationale dag van de leraar, zet uw onderwijzer in het zonnetje! Op deze dag wordt ook de 'Leraar van het jaar' uitgekozen.

plaats Overal

info dagvandeleraar.nl

11 oktober 2013

Wiskundetoernooi 2013

22ste editie van het Wiskundetoernooi, dit jaar in het teken van Wiskunde en Sport.

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info ru.nl/wiskundetoernooi

22 november 2013

CWI in Bedrijf 2013

Ontmoeting tussen het CWI en het bedrijfsleven waar het bedrijfsleven vragen kan stellen aan top-onderzoekers.

plaats CWI, Amsterdam

info cwi.nl/events/cwi-in-bedrijf-2013

Nieuws

| News

Abelprijs 2013 voor Pierre Deligne

Op 20 maart is bekend gemaakt dat de Abelprijs dit jaar wordt toegekend aan de Belgische wiskundige Pierre Deligne. Hij ontvangt de prijs vanwege zijn enorme bijdragen aan algebraïsche meetkunde en de manier waarop deze onder andere de getaltheorie en representatietheorie heeft beïnvloed.

Deligne is het meest bekend om zijn werk aan de vermoedens van Weil. Deze vermoedens hebben te maken met de vorm van de zogenaamde zeta-functies, belangrijke functies in de getaltheorie. Deligne had al eerder een Fields-medaille (1978) en een Crafoordprijs (1988) gekregen voor dit werk.

Een citaat van het Abel comité: "Deligne's krachtige concepten, ideeën, resultaten en methoden zullen de vooruitgang van zowel de algebraïsche meetkunde als de wiskunde in het algemeen blijven beïnvloeden."

Pierre Deligne is in 1944 geboren in Brussel. Deligne kreeg een vaste aanstelling in 1970 aan het Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) waar hij het jongste permanente staflid ooit was. Hij is momenteel emeritus professor aan Princeton, waar hij in 1984 naartoe ging.

De prijs zal op 21 mei door de Noorse koning Harald worden uitgereikt en omvat een cheque van 6 miljoen Noorse kronen (rond de 800.000 euro). abelprize.no

Wiskunde van water

Het klotsen van water is wiskundig een erg complex probleem. Dit is erg vervelend voor bestuurders van een schip. Delftse wiskundigen hebben de afgelopen jaren hard gewerkt om hierin vooruitgang te boeken. Het probleem dat bij het klotsen van water een hoofdrol speelt, is dat er weinig tijd is om de berekeningen te doen, het liefst zouden de schepen direct weten wat er gaat gebeuren.

Dit is de reden dat simulaties in dit gebied vaak meer weg hebben van computerspelletjes dan van formele simulaties. Hoofdrol in het maken van de snelle berekeningen is weggelegd voor het *variational Boussinesq-model*. Dit model heeft dezelfde functionaliteit als de oudere modellen, maar met een veel snellere rekentijd. De Delftse wiskundigen hebben daarna het rekenproces nog gestroomlijnder gemaakt.

Het uiteindelijke resultaat is een scheepssimulator die als eerste met interactieve golven werkt. Desondanks verwachten de makers dat dit binnenkort gaat veranderen, de scheepssimulatormarkt is erg competitief. delta.tudelft.nl



Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Patrick Hafkenscheid

nieuws@nieuwarchief.nl

Rekenmodellen kunnen zorgen voor minder files

Drie onderzoekers aan de TU Delft promoveerden in maart op het voorspellen van files. Met behulp van rekenmodellen kunnen de onderzoekers vrij accuraat voorspellen waar files zullen ontstaan. Hun verkeersmodel Fastlane houdt rekening met het verschil tussen vrachtwagens en personenauto's. Dit verschil is niet gebruikelijk in verkeersmodellen, terwijl het toch wel degelijk invloed heeft.

Zo geven de onderzoekers als voorbeeld de A15 van en naar de haven van Rotterdam. Het verkeer bestaat daar soms wel tot een kwart uit vrachtwagens.

Het model kan tot ongeveer een half uur van tevoren voorspellen waar een file zal ontstaan. Het is mogelijk om deze informatie te gebruiken in bijvoorbeeld navigatiesystemen om alternatieve routes te berekenen. nos.nl/artikel/485753-minder-files-door-beter-voorspellen.html

De Nieuwe Wiskrant stopt na deze jaargang

Het kwartaalblad *De Nieuwe Wiskrant*, vooral gericht aan wiskundecenten in Nederland, zal na de huidige jaargang stoppen. Het Freudenthal Instituut heeft besloten dat de oplage te klein is om de kosten van het blad te dekken, wat zou resulteren in een te hoge abonneeprijs.

Behalve *De Nieuwe Wiskrant* is er voor de wiskundecenten ook nog *Euclides*. Er is in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) een plan gemaakt om het Freudenthal Instituut op reguliere basis een inhoudelijke bijdrage te laten leveren voor *Euclides*.

De Nieuwe Wiskrant is vanaf 1975, met een korte onderbreking, al 32 jaar uitgegeven. De volgende uitgave die in juni 2013 zal verschijnen zal de laatste *Nieuwe Wiskrant* zijn. www.fisme.science.uu.nl/wiskrant/

Wereldbevolking stopt met groeien in 2050

Onderzoekers aan de Autonome Universiteit in Madrid hebben aan de hand van bevolkingsdata uit het verleden (1900–2010) een model gemaakt voor de bevolkingsgroei in de toekomst. Het model bevat ideeën en vergelijkingen uit de natuurkundige gecondenseerde-massatheorie en beschouwt de wereld als een gesloten systeem. Een interessant resultaat dat volgt uit dit model is dat volgens de wetenschappers de wereldbevolking een evenwicht bereikt, met andere woorden een punt waarop er geen groei meer is in bevolking.

Dit komt overeen met de voorspellingen van de VN die de populatie rond 2100 schat tussen de 15,8 miljard (voor hoge vruchtbaarheid) en 6,2 miljard (lage vruchtbaarheid). Hoewel het logisch zou zijn te denken dat de verhoogde zorgkwaliteit er voor zou zorgen dat de wereldbevolking altijd blijft groeien, is er de laatste paar jaar een daling van het vruchtbaarheidscijfer ontstaan. Als deze trend zich voortzet, zou het helemaal niet zo'n raar gevolg zijn dat de wereldbevolking een evenwicht bereikt. eurekalert.org

CWI ontwikkelt 3D-skype

Onderzoekers van het CWI en de Queen Mary universiteit in Londen, hebben een prototype gemaakt voor een systeem dat op een effectieve manier 3D-beelden kan live-streamen. Dit zogeheten *Tele-Immersion*-systeem maakt het mogelijk om op een directe manier te communiceren tussen twee gebruikers, gebruikmakend van driedimensionale beelden.

Het artikel waarin het systeem besproken wordt, werd geselecteerd als beste artikel over 3D-technologie en multimedia op de ACM Mul-

timedia Systems Conference (MMsys) in Oslo. Het systeem maakt gebruik van een handige compressie van triangulaties die het versturen van de data daadwerkelijk reëel maakt. Misschien dat dit de eerste stap is richting de hologram-communicatie? cwi.nl

Zilveren medaille voor Nederlands wiskundemeisje

Michelle Sweering (16) uit Krimpen aan den IJssel heeft een zilveren medaille gewonnen bij de European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO). Ze werd 16de van de 87 deelnemers. Dit jaar vond de EGMO in Luxemburg plaats. Het hele Nederlandse team behaalde 59 punten en staat daarmee op de 12de plek in het landenklassement.

De EGMO is in het leven geroepen op 8 maart 2011 (100ste internationale vrouwendag), en is dit jaar voor de derde keer gehouden. Dit jaar deden 21 landen mee. Ieder van deze landen stuurden vier afgevaardigden om de eer van het land te verdedigen. De wedstrijd bestaat uit twee dagen waarin de deelnemers drie lastige wiskundevraagstukken moeten oplossen. De winnaars van het landenklassement waren Wit-Rusland, Servië en de Verenigde Staten, ieder met 99 punten.

Behalve wiskunde werden er ook veel andere leuke activiteiten gedaan zoals excursies en zelfs een dansavond. wiskundeolympiade.nl



Booleaanse algebra in een computerprogramma

Toen David Dirkse wat oude spullen aan het opruimen was, vond hij een oud computerprogramma dat hij in 1991 had geschreven voor het vak logica. Dit programma had als doel het herkennen van een tautologie of een inconsistentie van een Booleaanse formule. Destijds leverde hem het een 10 op voor het vak.

Het programma is herschreven in Delphi-7 en verbeterd en heet Logic10. Voor degenen die geïnteresseerd zijn in Booleaanse algebra of er iets over willen leren, het programma is gratis te downloaden met een gebruiksaanwijzing (en inleiding in de Booleaanse algebra). davdata.nl/logic10.html

Handgebaren bevorderen wiskundelessen

Als wiskundedocent simpele handgebaren toevoegen zou wel eens positieve effecten kunnen hebben op de leerlingen. Met name bij vakken waar veel vergelijkingen bij komen kijken. Dit toont onderzoek aan dat recent gepubliceerd is in *Child Development*. De experimenten die gedaan zijn onder basisscholen omvatten twee even grote groepen scholieren. De ene groep kreeg uitleg over vergelijkingen van de vorm $4+5+7 = _+7$, alleen maar aan de hand van gesproken uitleg. De andere groep werd hetzelfde uitgelegd, maar de docent gebruikte simpele handgebaren om de twee kanten van de vergelijking te benadrukken. De leerlingen die de handgebaren-uitleg kregen deden het beter op de toets die ze direct en 24 uur na de uitleg kregen.

Al eerder is zulk soort onderzoek verricht, maar dit is de eerste keer dat het op het niveau van schoolklassen werd gedaan. Tot voorheen was het voornamelijk één-op-één uitleg waar deze resultaten bekend waren. De onderzoekers verwachten dat deze methode zich ook verleent voor de uitleg in de hogere algebra.

msutoday.msu.edu/search/?q=gestures

Philips Wiskundeprijs voor René Pannekoek

René Pannekoek heeft dit jaar de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi toegekend gekregen. Deze prijs werd dit jaar voor de achtste keer uitgereikt op het Nederlands Mathematisch Congres in Nijmegen. Promovendi kunnen een beschrijving van hun onderzoek insturen, en uit de inzendingen worden zes promovendi gekozen die op het NMC een half uur over hun werk mogen vertellen. De jury kiest dan een winnaar die een wisseltrofee en 1000 euro wint.

Pannekoeks onderzoek is in de getaltheorie en algebra, en hij houdt zich momenteel bezig met K3-oppervlakken.



Foto: Cor Kraaklamp

Vrouwen net zo succesvol in de wiskunde als mannen

Hoewel er nog steeds een scheve verhouding is van het aantal mannen en vrouwen dat werkzaam is in de wiskunde, toont onderzoek in *Psychology of Women Quarterly* aan dat vrouwen net zoveel vaardigheid hebben in de wiskunde als mannen. Het onderzoek werd gedaan op middelbare scholen in Amerika en nam behalve vaardigheid ook mee hoe de scholieren dachten over hun vaardigheden. De uitslag van het onderzoek was dat de jongens en de meisjes even hoog scoorden op de test van vaardigheid, maar dat meisjes over het algemeen zichzelf veel lager inschatten. Meisjes daarentegen gaven wel meer waarde aan het nut van de natuurwetenschappen.

Behalve vaardigheden en perceptie van vaardigheden werden ook andere vaardigheden meegenomen in het onderzoek, veel nieuwe informatie heeft dit echter niet opgeleverd want er kwam met name uit dat zelfbeeld, waarde van de taak en verwachting van succes in-

vloed hebben op hoe succesvol je daadwerkelijk bent in de wiskunde.

eurekaalert.org

Nieuwe reken-app

De grafische rekenmachine wordt ondanks de mogelijkheden door velen gezien als een dolksteek in de vaardigheden van de leerling, en ondanks de vele mogelijkheden voor plotten werkt de rekenmachine voor simpele berekeningen hetzelfde als de rekenmachines van veertig jaar eerder.

Daar is nu verandering in gekomen volgens de organisatie Muiswerk. Muiswerk houdt zich normaal gesproken bezig met het digitaliseren van onderwijs, maar heeft een reken-app gemaakt. Deze *RekenApp* voegt een nieuwe dimensie toe aan gewone berekeningen.

Behalve alle gewone berekeningen heeft de RekenApp een superpowermode die, als deze is geactiveerd, het mogelijk maakt te rekenen met bijvoorbeeld absolute en relatieve percentages. Zo wordt het berekenen van een korting of toeslag wel erg makkelijk.

Een ander voorbeeld van de superpowermode is het rekenen met actuele valuta, om bijvoorbeeld verschillende valuta bij elkaar op te tellen en om te rekenen naar een andere munteenheid.

De RekenApp is momenteel alleen beschikbaar in de AppStore, maar er wordt hard gewerkt aan een Android-versie.

muiswerk.nl

Nederland wint wiskundederby

De Benelux Wiskunde Olympiade, die in het weekend van 27 april plaatsvond in Dordrecht, is gewonnen door de zestienjarige Peter Gerlagh uit Tilburg. Hij wist drie van de vier opgaven foutloos op te lossen en bleef daarmee de andere 29 leerlingen uit de Benelux overtuigend voor. Het Nederlandse team nam bij de prijsuitreiking op zondag 28 april verder nog een tweede gouden medaille, twee zilveren en vijf bronzen medailles in ontvangst.

De Benelux Wiskunde Olympiade is een jaarlijkse wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren uit België, Luxemburg en Nederland. De wedstrijd bestaat uit vier uitdagende wiskundeopgaven waar de deelnemers vierenhalf uur de tijd voor hebben. De beste helft van de deelnemers krijgt een medaille (brons, zilver of goud).

Het evenement werd dit jaar voor de vijfde maal georganiseerd. Elk team bestond uit de beste tien leerlingen van dat land. In Nederland hebben deze tien hiervoor ruim vijftienduizend andere leerlingen achter zich gelaten in vier voorrondes.

wiskundeolympiade.nl

Projecten W&I tegen cybercrime

Cybercrime is een populair onderwerp tegenwoordig. In een steeds digitalere wereld wordt meer en meer nadruk gelegd op de cyberveiligheid. Onderzoekers van de Technische Universiteit Eindhoven gaan aan de slag met twee nieuwe projecten binnen dit gebied. Het programma, gefinancierd door NWO heeft als doel de veiligheid van de digitale samenleving te vergroten.

Een van de negen projecten die in dit kader worden gesponsord door NWO is aangevraagd door professor Wil van der Aalst. Het betreft het gebruiken van *process mining* om digitale processen beter te beveiligen. Process mining is een methode waarbij relevante informatie wordt geëxtraheerd uit *event logs*. Op deze manier wordt bijvoorbeeld duidelijk of ergens een informatielek zit.

Een ander project gaat over het automatisch visualiseren van cyberaanvallen zodat op deze manier snel en efficiënt kan worden ingegrepen.

w3.tue.nl

Sjoerd Rienstra

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
s.w.rienstra@tue.nl

Berry Schoenmakers

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
l.a.m.schoenmakers@tue.nl

Interview Ronald Prins

Zeerecht voor internet

Cybercriminaliteit en cyberoorlog beginnen serieus te worden. Het is echter voor de gemiddelde burger of bestuurder zo onvoorstelbaar en abstract, dat het nog steeds mogelijk is voor een geniale hacker in de Oekraïne om via servers in Australië en Nederland een botnet in de Verenigde Staten op te zetten dat de gegevens van honderdduizenden creditcards en bankrekeningen weet te vangen, met alle gevolgen van dien. Landen gaan zich hier meer en meer tegen verdedigen maar krijgen te maken met ongekennde juridische problemen. Van wie is internet? Data in de cloud, waar staan die juridisch, en waar wordt dan de digitale diefstal gepleegd? Tijd voor een gesprek met onze nationale cybercrimefighter Ronald Prins van Fox-IT (Delft). Sjoerd Rienstra en Berry Schoenmakers van de TU/e zochten hem op. Prins is een voorstander van een zeerecht ('cloudrecht') voor cyberspace, waarbij landen het recht hebben om terug te hacken als nationale belangen via internet worden aangevallen. Niet alle juristen en politici zijn al zover.

Hoe ben je als wiskundige hierin terechtgekomen?

"Ik ben in 1995 afgestudeerd als wiskundige en ik vond cryptografie en hacken het allerleukst. Mijn vrouw werkte bij de digitale afdeling van het Nationaal Forensisch Instituut (NFI), en die hoorde dat een van de thema's die daar speelden, de angst was voor de criminele cryptografie. Dus dat criminelen van cryptografische technieken gebruik zouden maken om zichzelf te beschermen. Ze hadden mensen nodig die daar weerstand tegen konden bieden, en dat was ik dan. Dat heb ik vijf jaar gedaan, en dat had in de praktijk niets met wiskunde te maken. Dat ging gewoon met brute kracht: heel snel heel veel wachtwoorden testen, of in het hoofd van de crimineel kruipen en denken wat voor wachtwoord zou hij hierbij gebruikt hebben. Die van zijn telefoon kon je zo uitlezen, en dat was misschien hetzelfde als van zijn spreadsheet. Het was meer een beetje 'streetwise clever' zijn — van hoe kom ik bij informatie — dan daadwerkelijk wiskunde inzetten.

Toen ben ik met mijn huidige compagnon, die ook bij het NFI werkte, met Fox-IT begonnen. De wiskundige rode draad die er nog doorheen loopt, is dat we in 2003 een gedeelte van de activiteiten van Philips Crypto

hebben overgenomen. Philips Crypto bouwde de producten voor de bescherming van de Nederlandse staatsgeheimen, maar bestaat niet meer. Daardoor bedrijven we nu nog steeds wel wat cryptografie, maar eigenlijk maar weinig. Algoritmes, die we aangeleverd krijgen, stoppen we in de systemen met iets van sleutelmanagement eromheen. We vinden dat soort dingen hier niet uit. Je moet wel goed zijn en er verstand van hebben om dat veilig te kunnen implementeren. Je moet de wiskunde zelf lekker bij de universiteiten laten en niet te veel in de bedrijven, denk ik, maar je moet wel wiskundigen hebben die snappen hoe er mee om te gaan en op veilige manier toe te passen. Je wil niet weten hoeveel succes ik bij het NFI gehad heb, simpelweg doordat de prachtigste protocollen verschrikkelijk slecht geïmplementeerd waren, waardoor ik dingen kon openbreken die nooit open hadden moeten kunnen."

"Er hoeft maar één vent te zijn die snel kan factoriseren en de hele wereld valt uit elkaar."

Waar lag je wiskundige voorkeur?

"Ik had tijdens mijn studie snel affiniteit met discrete wiskunde, omdat het duidelijk

was dat daar ook de crypto vandaan kwam. Wat ik zo spectaculair mooi vind aan cryptografie is dat het wiskunde is in de meest zuivere vorm die onmiddellijk en direct een toepassing heeft. Bij andere wiskundige technieken zit daar vaak zo'n fysieke laag omheen. Het is daarmee het mooiste vakgebied in de wetenschap dat er is! Er zijn weinig vakgebieden waar je zo diep kunt gaan in pure theorie, die onmiddellijk ook weer terugkomt in je telefoon.

Ondanks vaak slechte implementatie, is de wiskunde in de cryptografie wel degelijk het probleem, en daar zijn we ook doodsbang voor. Je kan op de universiteit het verschil maken tussen veiligheid vandaag en onveiligheid morgen. Er proberen nu veel Chinezen factorisatiemethoden uit te vinden. Er hoeft maar één vent te zijn die snel kan factoriseren en de hele wereld valt uit elkaar. Ga maar een ander vakgebied aanwijzen waar dat ook zo is. En niemand kan nu nog zeggen dat dat nooit zal gebeuren.

Ik vraag wel eens bij de lunch, om de jongens hier wakker te houden, het volgende. Stel, je kan snel gehele getallen factoriseren. Wat ga je dan doen? Als je hard gaat roepen dat je het kan en iemand daagt je uit en je bewijst dat je het kan, dan heb je goede kans dat je morgen dood bent. Dus dat is niet de beste manier. Misschien moet je online anoniem bekend maken dat je het kan en het dan verkopen, maar dan ga je daarna alsnog dood, denk ik! Het is een soort wiskundig analoog van de atoombom in de Tweede Wereldoorlog. Anderzijds, dat soort grote uitvindingen wordt op verschillende plaatsen in de wereld tegelijk gedaan omdat 'de tijd er rijp voor is'. Wetenschappers praten met elkaar, en soms is het stellen of identificeren van het probleem al genoeg. Ik denk daarom dat publiek maken toch de beste optie is om de



Foto: Sjoerd Rienstra

wereldvrede te handhaven. Ook al betekent het misschien dat iemand met alle satellieten in de wereld kan gaan spelen en atoombommen kan laten afgaan. Je weet het in ieder geval en je zult hard gaan werken om er wat aan te doen.”

Fox-IT

Hoeveel wiskundigen werken hier?

“Ik denk een groepje van een man of zeven à acht afgestudeerd wiskundigen. Natuurkundigen ook zo iets. Informatici zijn de grootste groep. In totaal werken hier 170 mensen. Hier van vormt de helft, rond de 85 mensen, de nerds. Een derde zijn de academici, de rest hbo-ers, en een paar gepromoveerden. Als het om de techniek gaat zijn het academici, en verder jongens die echt goed kunnen hacken. Dat gaat niet parallel. Er zijn weinig hackers die van de TU afkomen. Hacken is vaak gewoonweg boerenslimheid. Het is iets waar je veel uren in moet maken. Als je het een half jaar niet meer doet, kan je het niet meer. Hackers, dat is bijzonder volk. Dat zijn jongens die met een normale studie moeite hebben.”

Hoe vind je ze?

“Vaak kom je ze online tegen. Tijdens onderzoeken zitten ze ook ergens rond te neu-

zen. Zo hebben we er een paar gevonden. Die zijn zelfstandig en zitten onderzoek te doen omdat ze het leuk vinden, en die halen we hier naartoe. Maar we ontwikkelen zelf ook software, en sollicitant-programmeurs laten we dan allerlei testjes doen. De Nederlandse kampioenschappen programmeren zijn geweest en wij hadden het beste bedrijventeam. We hadden ook een hoop individuele deelnemers. De puzzeltjes daarvan leggen we weer neer bij degenen die hier komen solliciteren. Bijvoorbeeld het probleem van het analyseren van grote datastromen. Stel, de politie zet een tap op iemand, en er komt allemaal data uit, dan kun je software gaan schrijven om te analyseren wat er allemaal staat, maar dat moet je wel heel erg slim implementeren, anders werkt het uiteindelijk alleen op je thuislijntje maar niet meer daarbuiten. Daar moet je echte programmeerhelden voor hebben die dat efficiënt kunnen. Dus dan zit het meer in de verwerking van bulk dan in de datamining-trucs.”

Doen jullie nog wetenschappelijk onderzoek?

“Waar we een beetje wetenschappelijk onderzoek aan doen, is het detecteren van anomalieën op netwerken. Dus van hackers-

gedrag dat een afwijking zou moeten zijn van normaal gedrag op een netwerk. We kijken hoe je dat moet modelleren en willen er dan iets voor bouwen dat ook werkt.

“Hacken is vaak gewoonweg boerenslimheid.”

Wij kijken daar anders naar dan de gewone wetenschap. Daar ging dat zo. De overheid wil dat er iets gebeurt op cybergebied. De wetenschappers denken dan: ‘O dat is mooi, we moeten hackers gaan detecteren’, en pakken alle literatuur die er is en gaan gecompliceerde algoritmes nog verder uitwerken en heuristiek ontwikkelen. Daarop wordt zwaar geïnvesteerd. Dan komen ze terug met iets dat best goed werkt op een dun lijntje maar niet op een heel dikke lijn [met een grote datastroom]. En dan denk ik: wat zonde is het dat ze niet gekeken hebben naar hoe ver de industrie eigenlijk is. Er wordt vanuit de wetenschap aangenomen dat er dingen al lang gedaan en getest zijn, terwijl dat niet zo is. En je merkt dan dat waar wij het beste mee scoren bij het detecteren van hackers, de heel pragmatische oplossingen zijn, waar je veel meer mee kunt doen dan wat nu in de prak-



NOS-Teletekstpagina van 10 april 2013

tijk gebeurt. Dat vind ik een bijzonder gat tussen werkelijkheid en wetenschap. De werkelijkheid denkt dat ze de wetenschap nodig heeft om oplossingen te implementeren en de wetenschap denkt: dat zal wel al lang gedaan zijn want dat is zo triviaal. Die gaat met haar studie beginnen op een punt waar wij nog lang niet zijn. Daar zit een gat tussen en dat is eigenlijk waar nu vooral de winst zit.”

Cybercriminaliteit

Hoe treedt de Nederlandse overheid op?

“Laat ik zeggen dat ik blij ben met iemand als Jeanine Hennis-Plasschaert als minister van Defensie. Zij leefde als Europarlementariër al in die internetwereld. Ze heeft cybergewoel, ik denk dat dat goed is. Ook goed is minister Ivo Opstelten, die weliswaar zelf niet zo digitaal is, maar wel goed luistert.”

Wat doet men verder?

“Als ik nu kijk hoe de Nederlandse overheid bezig is met de cyberproblematiek, dan is er een Cyber Security Raad (CSR) geïnstalleerd. Die staat dus boven het Nationaal Cyber Security Centrum (NCSC). De Raad bestaat uit veertien leden: de Nationaal Coördinator Terrorismebestrijding, vertegenwoordigers van KLPD, AIVD, Defensie, EZ en het College van PG's, vijf vertegenwoordigers van industrie en drie wetenschappers. Die moeten de regering adviseren, en oplossingen bedenken voor de dreiging waar we voor staan. Maar de gedachte dat de oplossing bij de wetenschap vandaan moet komen gaat er

bij mij niet in. Crypto kan nog wel wat leuke dingen doen in het verbeteren van de privacy, maar voor de rest komt de wetenschap niet verder dan beschrijven van wat er gebeurt.”

Maar hoe zorg je dan dat de burger veilig met internet omgaat?

“Het echte probleem is wellicht psychologisch, maar ik weet niet of het de wetenschap is die daar in gaat helpen. Wat ik waardevoller zou vinden is het gat waar ik het net over had. Er zijn wat welbekende en eenvoudige dingen die je kunt doen om het internet veiliger te maken, maar dan blijkt gewoon dat die niet gedaan worden. En dan gaat het er dus meer om hoe we dat gat opvullen. Dus zorgen dat wat we al lang weten ook gebeurt, zoals een firewall neerzetten, aanzetten en de goede configuratie instellen. Dat is helemaal geen wetenschappelijk probleem, dat is gewoon een keer logisch nadenken.

“De gedachte dat de oplossing bij de wetenschap vandaan moet komen gaat er bij mij niet in.”

Ik vind de analogie wel aardig dat je op de autosnelweg niet harder mag rijden dan 120 km/u. Je kunt niet zomaar iets uitvinden waardoor dat vanzelf gebeurt. Je zou kunnen zorgen dat de auto's niet harder kunnen, maar ook dat is te hacken. Op zijn best kun je het gedrag van de mensen beïnvloeden, bijvoorbeeld met strepen op de weg waardoor je denkt dat je harder rijdt dan je rijdt.

Het probleem lost zich deels op doordat internet gewoon wordt. De mensen die nu aan de knoppen zitten zijn wat ouder en zijn nog zonder internet opgegroeid. Straks als onze kinderen aan de macht zijn zal het al beter gaan. Je ziet het aan die overheidsprogramma's: er moeten 40.000 politiemensen opgeleid worden, zodat ze een beetje snappen dat als je een huiszoeking doet je ook de usb-sticks meeneemt. Hebben ze net die cursus af dan zijn het opeens micro-SD-kaartjes. Zo moet je continu die mensen opleiden. Maar onze kinderen die leven er gewoon mee en die hoeft je niet uit te leggen wat je met een huiszoeking moet meenemen. Dat kost dus twee of drie generaties, en dat is het irritante van de revolutie die nu plaatsvindt. De vraag is of we de tijd hebben totdat de mensen die wel begrijpen hoe je met internet om moet gaan, aan de knoppen zitten.”

Is het NCSC een soort Fox-IT?

“Nee, was dat maar zo. Het Centrum, onder de Raad, heeft heel wat rollen. Het is een publiek-private samenwerking met ambtenaren naast bedrijven, maar het gaat nog niet heel hard. De gedachte is dat naast de overheid ook bedrijven die slachtoffer zijn erbij moeten zitten. Dat zijn wij dus niet. Wij zijn gewoon leverancier. Het idee is dat overheid en bedrijven hetzelfde doel hebben en dan samen kunnen optrekken. Jammer genoeg heeft het NCSC meer de rol van expertisecentrum dan wat ik hoopte, namelijk de rol van digitale brandweer. Ze kunnen ook niet uitrukken of optreden. Ze geven adviezen, die ook nog eens niet dwingend zijn, bijvoorbeeld aan gemeentes. Ze zetten dan op hun website dat, op het moment dat je gehackt wordt, het handig is om poort 555 dicht te zetten. Ze mailen dat ook rond en hopen dan dat mensen die aangesloten zijn dat opvolgen.

Wat ik mis is de ambitie om de optredende rol te willen spelen. Als je kijkt hoe Nederland veilig blijft, dan hebben we een leger, een politie, een inlichtingendienst en een brandweer, allemaal instanties die een bepaalde rol hebben. Daarvan heb je in het cyberdomein ook de equivalenten nodig. We hebben een cyberinlichtingendienst bij de AIVD en de MIVD, we hebben een cyberleger bij defensie, we hebben een cyberpolitie, maar we hebben geen cyberbrandweer. Wij hebben eigenlijk die brandweerrol, de keren dat wij optreden. Dan gaan we met dertig man naar een organisatie die gehackt is en waarvoor het van het grootste belang is dat ze zo snel mogelijk weer verder kunnen. Vaak is het de verstoring van de werking die de meeste gevolgen heeft op je continuïteit. Of er dan nog een boef achter

zit die je wel of niet kunt pakken, is eigenlijk voor de getroffen organisatie niet haar primaire zorg. Ik denk dat er daarom ook een rol is voor de overheid om hier iets in te doen. Tot nu toe is de houding, ook vanuit het Centrum, dat het de verantwoordelijkheid is van het bedrijf zelf. Maar ik vind dat niet terecht, want ik heb ook geen eigen brandweer in dit pand zitten voor als er eens brand uitbreekt. Het Centrum (niet de Raad, die vergadert maar een paar keer per jaar) zou dat moeten kunnen doen. Daar zitten wel vier of vijf mensen die je achter een toetsenbord kunt zetten, en die ik ook hier zo zou kunnen plaatsen.”

Cyberoorlog

Is de volgende oorlog een digitale?

“Er is wel eens gezegd dat de volgende oorlog een digitale oorlog zal zijn, maar dat is wat overdreven. In een oorlog wil je een land veroveren, en dat zal met alleen een internetoorlog niet lukken. Maar je kan wel een land verschrikkelijk verpesten. Het eerste wat je dan zou doen is zorgen dat niemand meer kan pinnen. Als je drie dagen niet kan pinnen krijg je een bankrun. Maar dat werkt ook maar een dag, want iedereen gaat cash halen en dan is dat ook op. Dan kun je niet meer naar Albert Heijn en kunnen we geen benzine meer tanken. Een land is een puinhoop als je drie dagen lang dat weet uit te zetten. Dat is gewoon te doen, en daarom denk ik, dat als we ooit conflicten krijgen, dat zal gebeuren.

Je ziet ook dat cyber het allemaal op zijn kant lijkt te zetten; je kunt helemaal niet meer denken in termen van leger en politie. Nu kan ons geldsysteem uitgezet worden door een jochie van 16 of 18 op een zolderkamertje, dat net zo ontwrichtend bezig is als een vreemde staat die ons binnenvalt en waarvoor het gepast zou zijn als een leger daarop reageert. Maar het leger zal zeggen dat het geen oorlog is en komt dus niet in actie. Ze zijn er overigens ook de komende vijf jaar nog niet

klaar voor. De politie, aan de andere kant, gaat opsporen. Die gaat heel zorgvuldig te werk en zal, in plaats van zo snel mogelijk te handhaven, zorgen dat het juridische proces zorgvuldig verloopt. Dat is verkeerd vakjesdenken. De meest pragmatische oplossing is om het allemaal één te maken, zoals in de Angelsaksische landen. In Amerika wordt de grootste cyberinlichtingendienst ter wereld, de NSA, ingezet om banken te beschermen. Dat is een heel gevoelig onderwerp. Gaan we nu inlichtingendiensten inzetten om banken te beschermen? Is het hun doel om heel internet af te snuffelen om te zien dat een Chinees bezig is om de beurskoersen aan te passen? Toevallig zit daar wel de expertise. Maar met welke bevoegdheden doen ze dat dan? Die asymmetrie die erin zit, dat een paar idioten ontwrichtend voor een heel land kunnen zijn, maakt dat we niet meer in de oude vakjes kunnen denken voor wat we moeten inzetten als een land bedreigd wordt.”

Zijn er voorbeelden van hoe het fout ging?

“Je moet oppassen dat je geen *self-fulfilling prophecy* creëert. Zoals dat jongetje van 16, die op Pastebin, het kanaal waar hackers alles op publiceren, had gezegd dat hij KPN, Ziggo en UPC ging platleggen, omdat hij niet blij was dat zij The Pirate Bay blokkeerden. We hadden dat bericht opgepikt, een week voordat het in de krant stond. Na interne analyse concludeerden we dat het een mannetje was waarvoor we geen paniek gaan zaaien. Wat doet het Cybercentrum? Die doen een persbericht uit dat ze op die zaterdag met dubbele sterkte klaarzitten. Tot dan had nog niemand van deze oproep gehoord. Maar gooi je er een persbericht uit dan kan er van alles gebeuren. Hier spelen natuurlijk politieke belangen mee. Stel dat je het, als Centrum, verkeerd inschat en er gebeurt wel wat, dan moet er misschien een minister aftreden.

Het is vergelijkbaar met hoe in de Verenigde Staten op WikiLeaks is gereageerd. Die

Assange zou nooit zo ‘beroemd’ zijn geworden. Webservern zijn net kakkerlakken. Als je er één uit de lucht haalt, krijg je er tien terug. De Amerikaanse overheid heeft het daar duidelijk ook niet goed begrepen. Het is vaak risicomijdend gedrag. Je moet misschien accepteren dat je soms een inbraak hebt. Op de snelweg wordt het ook geaccepteerd dat er soms een ongeluk gebeurt. Ik mis in de digitale wereld de natuurlijke aanmoediging om te streven naar veiligheid, die je wel hebt in de luchtvaart.”

Cloudrecht

Hoe zit dat nu met dat zeerecht voor internet?

“De juristen die de wetten moeten maken lopen hopeloos achter. Die zeggen dat zo’n zeerecht voor internet helemaal niet kan. Uiteraard moeten we dat eerst op VN-niveau regelen, zoals de mariniers bij Somalië. De discussie zou over de inhoud moeten gaan. Als ik zeg dat er nu een computer geld staat weg te halen van Nederlanders en dat we daar iets tegen moeten doen, dan weten de juristen het ook niet. Wat er volgens mij aan de hand is, is dat er een groep mensen is die alleen maar denken in complottheorieën. Dat de overheid voortdurend bezig is om zoveel mogelijk gegevens van mensen te verzamelen, alleen maar om de grote boze overheid te zijn en om controle te krijgen over de burgers.

“Wat ik mis is de ambitie om de optredende rol te willen spelen.”

De gedachte alleen al dat de overheid in iedere computer zou willen meekijken, alsof die politiemensen niets beters te doen hebben!”

Zijn de bestaande juridische begrippen wel toepasbaar?

“Ik praat graag in analogieën, en soms gaan die mis. Juristen hebben daar moeite mee. Een computer staat fysiek in dit land, dus daar kan ik bij, maar de analogie gaat mis dat de fysieke plaats iets zou uitmaken of je rechtsgrond hebt. Je wilt dat de overheid op het internet de rol heeft van de wijkagent die rondrijdt op zijn fiets en een beetje rondkijkt. Op internet vinden we dat eng want we zien die politieagent niet. Cyberspace is wat dat betreft niet symmetrisch. Je kan niet terugkijken. Hoe zie ik nou dat die politieagent op mijn computer kijkt, of op die website zit mee te kijken? Als hij door een winkelcentrum patrouilleert dan zie je dat wel. Daar zit volgens mij bij een hoop mensen de angst. Dat de overheid dingen doet die we niet zien. En dat wordt steeds groter, omdat die overheid ook niet zo handig uitlegt



Foto: Rijksverheid

wat ze nu precies doet. Ze is ontzettend weinig transparant op het moment dat het gaat om privacy-inbreuken bij burgers. De discussie tussen voormalig Tweede Kamerlid Arjan El Fassed van GroenLinks en staatssecretaris Fred Teeven over het opvragen van het aantal keren dat de politie Google en Hotmail gebeld heeft om van iemand de inhoud van zijn mailbox te krijgen is kenmerkend. El Fassed wil daar gewoon een gevoel bij krijgen: is elke Nederlander een keer aan de beurt geweest, of is het maar, zeg, twintig keer gebeurd? En Teeven zegt dan: 'Daar maak ik een staatsgeheim van want het zou schadelijk zijn als je weet hoe vaak we dat doen.' Daar is geen enkel goed argument voor want het gebeurt maar tien tot vijftientig keer per jaar. En dan gaat het om van huis weggelopen meisjes van 14, die twee weken lang zoek zijn. Dan willen we allemaal dat de politie aan Facebook vraagt wat zo'n meisje de laatste twee weken op Facebook heeft gedaan. Leeft ze nog eigenlijk? Het zijn dat soort vragen. Dat kan Teeven prima uitleggen."

Je kunt instanties als overheid en banken toch niet onbeperkte vrijheid geven?

"Banken en overheid hebben toegang tot veel privé-informatie, maar er is een verschil. Het zijn allebei enge organen, maar ik vind de overheid dan enger omdat we die veel ruimte geven om bepaalde dingen te doen die de rest van de burgers niet mogen. En daar moet dan heel goed toezicht op zijn. Als je bijvoorbeeld in de inlichtingenwereld

kijkt, dan hebben we daar een commissie van toezicht op de AIVD. Dat is een aparte groep mensen die verder geen belangen hebben, maar wel alle recht om bij de AIVD binnen te lopen en te kijken wat die allemaal doet.

"Webservers zijn net kakkerlakken. Als je er één uit de lucht haalt, krijg je er tien terug."

Als die dan iemand af luistert, is dan netjes het democratische proces doorlopen zoals we dat in onze democratie met elkaar hebben afgesproken? Dus daar vindt heel veel toezicht plaats. Bij de politie wordt het toezicht door de rechterlijke macht uitgeoefend. Vooraf, voor een aantal bijzondere bevoegdheden kunnen worden ingezet, moet de rechter dat goedkeuren. En bij de zitting gebeurt dat nog eens. Daar kijkt de rechter nog een keer of de rechten van de verdachte niet zijn geschonken. Dus daar vinden veel *checks and balances* plaats. Het hangt dan uiteindelijk wel af van rechters. Ik verwacht dat er een bevoegdheid komt dat de politie in Nederland moet kunnen hacken en daar zullen dan ook diezelfde waarborgen ingebouwd zitten, namelijk dat een rechter van tevoren goedkeuring moet geven.

Ik vraag me af of een rechter wel kan overzien wat het betekent dat hij daar goedkeuring voor geeft. We moeten daar goed naar kijken. Het is een heel gevoelig onderwerp, om in te kunnen breken in computers van andere

mensen die misschien niet eens in Nederland zitten, maar die een delict in Nederland gepleegd hebben. Ik zou graag zien dat daar een gelaagdheid in zit, waarbij de rechter stap voor stap zegt wat mag. Stel, er is een digitale bankroof gaande. Dan zegt de rechter dat je mag gaan terughacken totdat je weet in welk land de computers staan van de hacker. En kom daarna maar terug. En mocht het dan in Duitsland zijn, dan gaan we gewoon op de ouderwetse manier verder. We bellen de Duitse politie op en zeggen: 'Daar staat een computer waar we last van hebben en we moeten wat doen.' En als de Duitse politie dan zegt: 'Doe het maar lekker zelf, dan kost het ons ook geen tijd', dan is het ook goed. Maar die getraptheid is best complex voor een rechter om te begrijpen. Ik vraag me af of je het daar moet leggen. Ik zou me ook kunnen voorstellen dat de politie een commissie van wijze mannen instelt die er wel verstand van hebben, en die je consulteert voordat je een aanvraag doet."

Bestaat internet juridisch wel?

"Je hebt inderdaad het probleem dat je niet weet waar internet juridisch onder valt. Je zal daarom wel naar een vorm van zeerecht moeten gaan, misschien te noemen cloudrecht. Stel je voor dat je data opslaat met een RAID 5-opslagarchitectuur, dus verdeeld over, zeg, vijf computers, waarvan je er maar vier hoeft te kunnen lezen om je data te reconstrueren. Als die vijf computers in vijf verschillende landen staan, en in geen van die computers kun je de data apart lezen, waar staan je gegevens dan? Daar is niets meer van te zeggen. Je zult het moeten definiëren op de manier waarop de gebruiker er naar kijkt. Dus als de gebruiker in Nederland is, dan staat de data in Nederland. Als je wilt, kun je er nog een kwantummechanische metafoor in zien: totdat je een meting doet, kun je ook niet zeggen waar een deeltje is. Dat is dan ook 'overal'. Hier zitten overigens nog meer haken en ogen aan: kun je iemand veroordelen voor het bezit van kinderporno, als dit op telkens iedere harddisk opgeslagen is als ongecorreleerde bitjes?"

Internationaal

Jullie zitten ook in andere landen. Waarom is dat?

"Wij zitten hier, maar kunnen via internet overal bij. We zitten nog met vestigingen in Engeland en in Aruba, maar dat gaan we allemaal stoppen. We zitten op Aruba omdat daar toevallig een bank verschrikkelijk gehackt was, maar je hebt geen eigen lokale entiteit meer nodig om je werk te kunnen doen."

Zeerecht

Het internationale zeerecht omvat een groot aantal verdragen die in de afgelopen eeuwen tot stand zijn gekomen. Wijzigingen en aanvullingen komen sinds de Tweede Wereldoorlog doorgaans tot stand onder de koepel van de Verenigde Naties. Meer dan een halve eeuw is er internationaal geredetwist over de vraag wie de zeggenschap heeft over welk stuk zee. Met het VN-verdrag van 1982 is aan de strijd om de zee een voorlopig einde gekomen. Dit verdrag verdeelt de zee in diverse zones zoals de twaalfmijlszone, de uitgebreide zone, de exclusieve economische zone, de visserijzone en de milieuzone. De twaalfmijlszone is het gebied dat een kuststaat tot zijn territoriale zee mag rekenen. In het VN-gedrag staat het volgende over de rechten van kuststaten op hun territoriale zeeën:

Artikel 25. Rechten van bescherming van de kuststaat

1. De kuststaat kan binnen zijn territoriale zee de maatregelen nemen die nodig zijn om een doorvaart die niet onschuldig is, te voorkomen.
3. De kuststaat kan, zonder rechtens of in feite onderscheid te maken tussen schepen van vreemde nationaliteit, in bepaalde gebieden van zijn territoriale zee de uitoefening van het recht van onschuldige doorvaart van vreemde schepen tijdelijk opschorten, indien die opschorting noodzakelijk is voor de bescherming van zijn veiligheid, met inbegrip van wapenoefeningen. Een zodanige opschorting wordt slechts van kracht nadat zij op behoorlijke wijze is bekendgemaakt.

Bronnen: ecomare.nl en wetten.overheid.nl

Teun Koetsiervoorzitter bestuur Stichting Epsilon
t.koetsier@vu.nl**Wil Schilders**oud-hoofdredacteur NAW
w.h.a.schilders@tue.nl**Nieuws Afscheid hoofdredacteur**

Ferdinand Verhulst

Op 13 april 2007 heeft Ferdinand Verhulst tijdens het Nederlands Mathematisch Congres in Leiden het erelidmaatschap van het KWG ontvangen, in het bijzonder vanwege zijn activiteiten voor Epsilon Uitgaven, de in 1984 door hem opgerichte uitgeverij van voornamelijk Nederlandstalige wiskundeboeken. We citeren uit een aanbevelingsbrief voor Ferdinands erelidmaatschap van 8 februari 2007: “De inspanningen van Ferdinand voor Epsilon Uitgaven zullen het uiterste van hem gevergd hebben. Vrije weekenden moeten in al die jaren zeldzaam voor hem geweest zijn. De resultaten

van deze inspanningen zijn niet alleen opmerkelijk, maar ook in Nederland uniek. Naar schatting zijn er met de opgebouwde fondsenlijst van bijna 60 [inmiddels, zes jaar later, 72] delen, de oplage en herdrukken in aanmerking nemend, tegen de honderdduizend boeken over wiskunde en wiskundige onderwerpen in de Nederlandse taal zowel in Nederland als in Vlaanderen verspreid.”

Het erelidmaatschap betekende niet dat Ferdinand toen op zijn lauweren is gaan rusten, integendeel. Vanaf 2008 heeft hij, samen met Wil Schilders, het hoofdredacteurschap van het *Nieuw Archief voor*



Ferdinand Verhulst



Ferdinand Verhulst (rechts) ontvangt op 13 april 2007 tijdens het NMC in Leiden het erelidmaatschap van het KWG, evenals Jan van de Craats (links) en Dirk van Dalen (midden).

Wiskunde bekleed en daarmee is hij kort geleden gestopt. Het bestuur van het KWG heeft om die reden Teun Koetsier, de voorzitter van het bestuur van de Stichting Epsilon, en Wil Schilders, de collega-hoofdredacteur van Ferdinand in de afgelopen vijf jaar, gevraagd vanuit hun ervaringen een bijdrage over Ferdinand te schrijven. Het resultaat vindt u hieronder.

Het bestuur dankt Ferdinand hartelijk voor zijn grote inspanningen voor en betrokkenheid bij het *Nieuw Archief voor Wiskunde* in de afgelopen vijf jaar. Samen met Wil Schilders is hij er in geslaagd om dit 'vlaggenschip' van het KWG op een constant hoog niveau en zeer leesbaar te houden. De grote verscheidenheid aan artikelen voor een breed wiskundig publiek over onderzoek, onderwijs en de geschiedenis van de wiskunde, en andere bijdragen zoals interviews, de agenda, de nieuwsrubriek, de boekbesprekingen en de probleemsectie, hebben hieraan een belangrijke bijdrage geleverd.

FERDINAND VERHULST EN EPSILON UITGAVEN

door Teun Koetsier, voorzitter bestuur Stichting Epsilon

In 1984 deed Ferdinand Verhulst iets wat in ieder geval toen uitzonderlijk was in wiskundig Nederland: hij startte een eigen bedrijf. Ferdinand begaf zich naar de Kamer van Koophandel in Utrecht en richtte Epsilon Uitgaven op, een uitgeverij met als doel de publicatie van wiskundeboeken.

Het idee

In een autobiografische notitie analyseerde hij ooit zijn motieven om die stap te nemen. In de veertiger en vijftiger jaren overkwam de jonge Ferdinand in het suffe, trage Amsterdam van na de oorlog wat vele anderen ook is gebeurd. Hij ontdekte dat elk goed boek toegang tot een nieuwe andere wereld biedt. George R.R. Martin zei het in 2011 aardig in *A Dance with Dragons*: "A reader lives a thousand lives before he dies [...]. The man who never reads lives only one."

Liefde voor boeken is echter niet genoeg om een uitgeverij te beginnen. Twee andere factoren brachten Ferdinand ertoe om die stap te nemen. Hij was in de eerste helft van de tachtiger jaren verbonden aan de Rijksuniversiteit Utrecht, waar een aantal bezuinigingsgolven bij hem twijfel hadden doen opkomen over zijn carrièrevooruitzichten. Een bezoek aan Parijs in 1984 gaf echter de doorslag. Het bestaan van de duizenden afleveringen van de populaire serie *Que sais-je?* van de

Presses Universitaires en het feit dat hij zonder moeite een herdruk van de *Mécanique Analytique* van Lagrange kon kopen, deden Ferdinand de knoop doorhakken. Hij realiseerde zich dat Frankrijk iets bezat dat in Nederland ontbrak: een sterke traditie van het uitgeven of heruitgeven van aan wetenschap gewijde werken in de eigen taal. Hij besloot tot het oprichten van een wetenschappelijke uitgeverij, waarin historische en hedendaagse Nederlandse wiskundige teksten een plaats zouden krijgen.

De start

Aankankelijk was niet iedereen enthousiast, maar onder meer Gerke Nieuwland en Aart van Harten, toen respectievelijk voorzitter en penningmeester van het Wiskundig Genootschap, zagen het belang van de onderneming in. Subsidies bij de uitgave van speciale boeken werden beschikbaar gesteld en er werd een officiële adviseur van Epsilon namens het Wiskundig Genootschap benoemd, Wim van der Meiden.

Tot de eerste herdrukken behoorden in 1985 het klassieke boek *Theoretische Mechanica* van de Delftse hoogleraar Oene Bottema. Ook *Projectieve Meetkunde* van Arend Heyting werd in 1986 herdrukt. De eerste oorspronkelijke boeken in de Epsilonreeks waren *Inleiding matrixrekening en lineaire programmering*, geschreven door Wim van Horsssen en Adriaan van der Burgh en *Analyse voor beginners* van Arnoud van Rooij. Beide boeken waren zeer toegankelijk en voor een breed publiek geschreven.

Het runnen van een uitgeverij is leerzaam. Een groot deel van het kapitaal zit in de voorraad boeken. Omdat je met boeken geen rekeningen kunt betalen moet je ervoor zorgen dat je niet in de situatie komt waarbij alle kapitaal is omgezet in voorraad. Dan dreigt een faillissement, tenzij je geld kunt lenen. Ferdinand zag zich op een zeker moment genoodzaakt om een extra hypotheek van 20.000 gulden te nemen om Epsilon in leven te houden.

Epsilon wordt een begrip

Geleidelijk werd Epsilon Uitgaven een begrip. Ferdinand was heel actief. Eigenlijk kon je hem niet tegenkomen of hij sneed het onderwerp Epsilon aan. In de loop der jaren hebben dan ook vele Nederlandse wiskundigen aan de ontwikkeling van Epsilon bijgedragen, als auteur of als redactielid of adviseur.

Naast de wetenschappelijke serie die sinds 1985 wordt uitgegeven, verschijnen vanaf 1999 ook delen van de Zebra-reeks, een serie bedoeld voor leerlingen op het vwo en algemeen belangstellenden. Die Zebra-reeks kwam tot stand in nauwe samenwerking tussen Ferdinand en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars. Vanaf 2009 is er ook de Spijkerreeks, bedoeld voor het bijspijkeren van basiskennis wiskunde. Ook werkt Epsilon Uitgaven nu aan materiaal voor het



Enkele boeken uit de wetenschappelijke reeks van Epsilon Uitgaven

nieuwe schoolvak Wiskunde D. Leraren kunnen teksten gratis downloaden voor gebruik in de les. In de wetenschappelijke reeks zijn op dit moment 72 boeken verkrijgbaar. Er zijn 35 Zebra-boekjes voorhanden en 7 boekjes in de Spijkerreeks. Nieuw in de wetenschappelijke reeks zijn op dit moment het *Handboek wiskundedidactiek* door Paul Drijvers e.a. en *Kansrekening, een introductie* van de hand van Alex van den Brandhof. Nieuw in de Zebra-reeks zijn *De Ster van de dag gaat op en onder, rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang*, geschreven door Aad Goddijn, en *Verborgen boodschappen, een inleiding in de cryptografie* van Aldine Aaten en Cor Kraaikamp.

Epsilon nu

Per 1 januari 2006 is Epsilon Uitgaven eigendom geworden van de Stichting Epsilon, een stichting die opgericht is met steun van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Ferdinand droeg zijn eenmansbedrijf over aan de Stichting Epsilon, maar zijn betrokkenheid was daarmee niet ten einde. Tot voor kort was hij nog actief als hoofdredacteur van de wetenschappelijke serie. Daarnaast adviseerde hij de managing director, Carolien Boss-Reus, die vanaf 2006 de dagelijkse bedrijfsvoering deed. Ferdinand adviseerde Carolien bijna wekelijks bij de koffie; Epsilon Uitgaven was namelijk tot december 2012 in het souterrain van de woning van Ferdinand in Utrecht gevestigd.

Op dit moment bevindt Epsilon zich in een overgangsfase. In december 2012 verhuisde Epsilon van Utrecht naar het Centrum Wiskunde & Informatica in Amsterdam. De managing director Carolien is minder gaan werken en zal in de zomer van 2013 Epsilon verlaten. Om die reden heeft Arjen Sevenster tijdelijk een aantal taken binnen de bedrijfsvoering overgenomen. Daarnaast is Fred Drissen als nieuwe zakelijk directeur gevonden. Het beleid van Epsilon is gericht op een verdere professionalisering. Zo wordt de mogelijkheid van de overgang op printing on demand onderzocht.

Het gaat goed met Epsilon. Zowel de redactie van de wetenschappelijke reeks, met Wieb Bosma als hoofdredacteur, als de redactie van de Zebra-reeks, onder leiding van Peter Kop, zijn zeer actief. Financieel is Epsilon gezond en het bestuur is zeer betrokken. Met zijn terugtreden als hoofdredacteur en de verhuizing naar Amsterdam is de afstand tussen Ferdinand en Epsilon weer wat groter geworden. We gaan er echter van uit dat we nog vele jaren op zijn adviezen een beroep zullen kunnen blijven doen.

FERDINAND VERHULST EN NAW

door Wil Schilders, oud-hoofdredacteur NAW

In de zomer van 2007 benaderde Jaap Molenaar mij om hoofdredacteur te worden van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Zowel hij als 'de andere Jaap' (Top) zouden beiden een punt zetten achter hun hoofdredacteurschap. De overgang ging vervolgens snel, in nummer 4 van 2007 bevat het colofon de namen van drie hoofdredacteurs, in nummer 1 van 2008 de twee nieuwe namen, waaronder nu ook die van Ferdinand Verhulst. Het was niet eenvoudig om deze geoliede machine op gang te houden, en het werk van Jaap & Jaap voort te zetten. Ik had één redactievergadering meegemaakt onder leiding van Jaap Molenaar, en Ferdinand geen enkele. Wat mij opviel bij die ene redactievergadering was dat er flink werd gebrainstormd, en dat dit onverminderd doorging bij het voortreffelijke diner. Er werden veel ideeën gespuid, en dus ook een lange lijst aangelegd en bijgehouden van mogelijk uit te voeren plannen.

Als nieuwbakken hoofdredacteurs hadden we natuurlijk ook onze eigen ideeën. Het voortreffelijke diner hielden we er in, en de mooie Torenkamer met de krakende houten trap achter de Dom in Utrecht ook. Wat als eerste sneuvelde was het redactioneel van de eindredacteur (overigens ook nieuw) en van de voorzitter van het KWG. In plaats daarvan schreven we beurtelings een hoofdredactioneel. Het eerste hoofdredactioneel van Ferdinand verscheen in december 2008 onder de titel 'Leve de meetkunde'. Wat meteen opviel was de losse stijl, zo schreef hij over de toenmalige minister van Onderwijs "deze minister reageerde alleen op het veld als je haar aansprak met 'Lieve' ", en hij begon met een voorbeeld over vrienden die in Afrika op vakantie waren en de kofferbak moesten inpakken.

Al heel snel, volgens mij al in de allereerste vergadering die hij bijwoonde, kwam Ferdinand met het idee om een rubriek op te nemen waarin lezers konden reageren. Ferdinand vond dat de wiskundigen maar eens uit hun schulp moesten kruipen, en zeggen wat ze vinden. Hij vond het maar niks dat alles voor zoete koek werd aangenomen. En dus was het idee van 'De derde wet' geboren. Ook de naamgeving hiervan kwam van Ferdinand. Al snel bleek dat men hier niets van snapte, waarom heet deze rubriek 'De derde wet' vroegen velen zich af. Dus moest er een plaatje bij, dat verbeeldde dat het hier om actie-reactie ging. Toen werd het wat duidelijker. Maar ondanks deze nieuwe duidelijkheid was het toch niet naar tevredenheid van Ferdinand, dus ging hij over op een andere strategie: hij benaderde zelf mensen om te reageren op bepaalde stukken in NAW. "Kun jij niet eens een pittige reactie schrijven over dat artikel", zal hij vaak gevraagd hebben aan collega's her en der in den lande.

Maar ja, het leven van een hoofdredacteur is niet altijd eenvoudig. Zo komen er ook bijdragen binnen die enerzijds voldoen aan het criterium dat het wiskundigen zijn die uit hun schulp kruipen, maar waarbij de hoofdredactie zich toch wel op het hoofd moet krabben omtrent wel of niet plaatsen. Dat is een aantal malen voorgekomen, en gelukkig konden Ferdinand en ik hier samen goed uitkomen. Wat dat betreft was Ferdinand een uiterst prettige collega, onvermoeibaar, met veel vakmanschap, en uitermate redelijk en fair in de beoordeling van mogelijke bijdragen. En vervolgens ook zeer vasthoudend, als zijn mening eenmaal was gevormd. In de meer dan vier jaar die ik met hem heb samengewerkt, is geen onvertogen woord gevallen. Het fijne van een tweehoofdige hoofdredactie is dat er altijd tijden zijn dat de één het erg druk heeft, en zijn werk overgenomen kan worden door de ander. Het ging bij ons automatisch, ook al vanwege de grote mate van flexibiliteit die Ferdinand aan de dag legde. Hij was altijd zeer gedreven, wilde kwaliteit in het lijfblad van de Nederlandse wiskundigen. Zo kwam ook de mooie rubriek 'In de verdediging' tot stand, men zou meer moeten weten over het werk van in Nederland gepromoveerden, om zo een indruk te krijgen van de ontwikkeling van de Nederlandse wiskunde.

Samen maakten we in maart 2010 het jubileumnummer, 10 jaar NAW nieuwe stijl. Overigens geen *special issue* in de letterlijke zin van het woord, dat kwam pas uit de koker van Ferdinand toen ik de hoofdredactie al had verlaten. Het is opnieuw een mooi idee, elk jaar in september een themanummer. Het helpt enorm om ver van te voren te kunnen plannen, daar hebben we tijdens ons gezamenlijk hoofdredacteurschap op gehamerd. Ik denk dat we allemaal heel erg blij moeten zijn dat we iemand als Ferdinand in ons midden hebben, iemand op wie de slogan (over de onvermoeide arbeid die alles te boven komt) van het KWG absoluut van toepassing is. Voor mij was het een bijzonder plezierige ervaring om met Ferdinand samen te werken, ik kijk er dan ook met zeer veel genoegen op terug.



Henk Broer

Johann Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
h.w.broer@rug.nl

Geschiedenis

Bernoulli's lichtstraal-oplossing van het brachistochrone probleem door de ogen van Hamilton

In 1696/97 initieerde Johann Bernoulli het brachistochrone probleem. Zoals vrij algemeen bekend is, wordt dit probleem opgelost door de cycloïde. In dit artikel geeft Henk Broer een overzicht van dit brachistochrone probleem. Hij volgt Bernoulli's optische oplossing die gebaseerd is op Fermats principe van de kortste tijd. Daarna herformuleert hij dit in de termen van Hamilton, zoals in diens eerste publicatie over dit onderwerp van 1828. Hierbij wordt steeds moedwillig een anachronistische stijl gehanteerd. Via Hamilton herontdekken we de cycloïde op een manier die doet denken aan hoe de wetten van Kepler uit Newtons mathematische principes volgen.

Het brachistochrone probleem werd het eerst geformuleerd door Johann Bernoulli, die zijn oplossing publiceerde in de *Acta Eruditorum* van 1697, zie [5]. Het probleem betreft de beweging van een puntmassa in een verticaal vlak onder invloed van de (constante) zwaartekracht, en de vraag is langs welk pad deze beweging de minste tijd kost (Grieks: *brachistos* = kort, *chronos* = tijd). Het helpt daarbij te denken aan een draadprofiel waarlangs een kraal wrijvingsloos kan glijden en de vraag is dan langs welk profiel de snelste afdaling plaatsvindt, zie Figuur 1. Bernoulli loste dit probleem op door middel van een lichtstraal

die immers, volgens het principe van Fermat, een pad van de kortste tijd moet volgen. Zoals we hieronder zullen zien, kan op deze manier een fraai bewijs worden gegeven van het feit dat de brachistochrone kromme een cycloïde is.

Het brachistochrone probleem vormt een belangrijke aanzet tot de variatierekening, die gedurende de achttiende eeuw verder werd ontwikkeld door, onder meer, Euler en Lagrange [12, 23]. In de negentiende eeuw was het Hamilton die deze benadering vervolmaakte in wat later te boek stond als de canonieke theorie en ook als de Hamilton–Jacobi-theorie. Interessant genoeg was Hamiltons eerste publicatie in deze richting [17] gewijd aan geometrische optica, enkele jaren later gevolgd door een discussie “on a general method in dynamics” [18–19]; zie ook Jacobi [41].

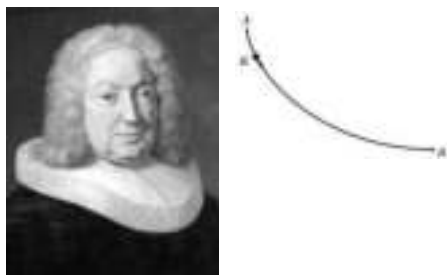
Wij zullen deze ontwikkeling illustreren door het brachistochrone probleem zowel volgens Fermat als volgens Hamilton te belichten. Door Hamiltons ideeën toe te passen herontdekken we de cycloïde op een manier die herinnert aan hoe Newtons ‘principia’, toegepast op de dynamica van een puntmassa in een centraal krachtveld, leiden tot de

wetten van Kepler [3]. Hoofdzakelijk om redenen van toegankelijkheid is dit artikel een exercitie in anachronisme, waarbij alles wordt uitgewerkt in ‘moderne’ termen. Hierin spelen behoudswetten een belangrijke rol. De inhoud vormt een deel van een boek [9] dat hoofdzakelijk handelt over geometrische optica van de atmosfeer. Er is een overvloed aan materiaal ter verdere lezing, waarbij zeker het werk van Carathéodory [10] genoemd moet worden. Voor een meer recente referentie zie Leonhardt en Philbin [28], vergelijk ook [35]. Voor achtergrond aangaande geometrische optica en de inbedding daarvan in golfoptica, zie onder meer Feynman, Leighton en Sands [13] of [4, 16].

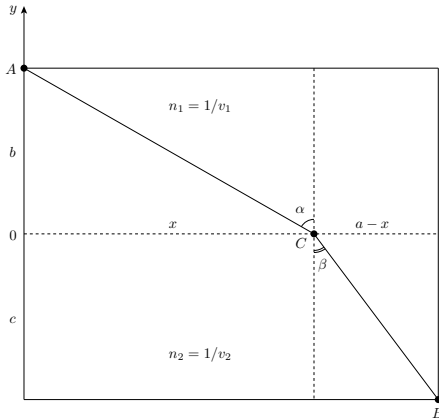
Bernoulli's lichtstraal-oplossing

De vondst van Johann Bernoulli was optische ideeën te gebruiken in de mechanische context van een glijdende kraal. In het bijzonder betreft dit het principe van Fermat dat zegt dat lichtstralen paden van de kortste tijd volgen. We zullen een vlak optisch medium beschouwen, om precies te zijn een verticaal vlak. Om de gedachten verder te bepalen kiezen we hierin cartesische coördinaten x (horizontaal) en y (verticaal). Vergelijk Figuur 2.

Twee eigenschappen moeten hier worden onderscheiden. De eerste hiervan is *isotropie*, hetgeen betekent dat de lichtsnelheid in ieder punt van het medium onafhankelijk is van de richting. Dit maakt het mogelijk een puntsgewijze, scalaire voortplantingsnelheid $v = v(x, y)$ te definiëren. De tweede, sterkere eigenschap is *homogeniteit* die behelst dat deze snelheid constant is, dat



Figuur 1 Johann Bernoulli (1667–1748) en ‘zijn’ brachistochrone probleem. Het probleem is een draadprofiel te vinden waarlangs de kraal K van A naar B glijdt in de kortst mogelijke tijd. De wrijvingsloze beweging speelt zich af in een constant verticaal zwaartekrachtveld.



Figuur 2 Fermats principe impliceert de brekingswet van Snellius.

wil zeggen, onafhankelijk van het punt (x, y) . Fermats principe van de kortste tijd betekent dat in een homogeen medium de lichtstralen rechte lijnen zijn, die met constante snelheid v worden doorlopen. Het is handig ook de *brekingsindex* $n = c/v$ te beschouwen, waarbij c de lichtsnelheid *in vacuo* is. Door een geschikte eenhedenkeus mogen we aannemen dat $c = 1$.

Laat ons vervolgens het geval beschouwen waarin het vlakke medium bestaat uit twee lagen, gescheiden door een horizontale lijn, zeg, gegeven door de vergelijking $y = 0$ als in Figuur 2. We nemen aan dat de beide lagen afzonderlijk homogeen zijn, met constante voortplantingssnelheden v_1 in het bovenhalfvlak $y > 0$ en v_2 in het benedenhalfvlak $y < 0$. Daarom zijn in beide halfvlakken de lichtstralen rechte lijnen die met de aangegeven snelheden worden doorlopen, en de vraag is wat er gebeurt op de gemeenschappelijke rand $y = 0$.

Om preciezer te zijn beschouwen we twee punten A en B , waarbij A in het bovenhalfvlak $y > 0$ ligt. Daarbij vragen we ons af hoe een lichtstraal van A naar B gaat, waarbij deze passeert door een punt C op de rand $y = 0$. Het punt C moet gekozen worden zodanig dat het principe van Fermat geldt. Als we de gevallen onderscheiden waar B ook in het bovenhalfvlak $y > 0$ of in het benedenhalfvlak $y < 0$ ligt, vinden we zo de bekende reflectie- of kaatsingswet (Hero van Alexandria) respectievelijk refractie- of brekingswet (Willebrord Snell) terug.

Bewijzen van deze wetten uit het principe van Fermat zouden heden ten dage gemakkelijk onderdeel kunnen zijn voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Hieronder zullen we het geval van refractie gedetailleerd bespreken; dit betreft dus de wet van Snellius. Hierin volgen we grotendeels het bewijs van Leibniz [27]; zie voor meer details ook [9].

Als $n_1 = 1/v_1$ en $n_2 = 1/v_2$ de brekingsindices zijn in het boven-, respectievelijk het benedenhalfvlak, dan luidt de wet van Snellius als volgt. Het punt C op de wederzijdse rand $y = 0$ moet zo gekozen dat $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$, waarbij α en β de scherpe hoeken zijn die de lichtstraal maakt met de y -richting, zie opnieuw Figuur 2.

Bernoulli gebruikt deze ideeën door een isotroop medium met een continu brekingsindex-profiel $n = n(y)$ te discretiseren in een eindig aantal homogene lagen, zie Figuur 3. Daarna laat hij het aantal lagen naar ∞ gaan en daarbij de dikte van de lagen naar 0. Dergelijke vormen van infinitesimaal denken werden ook beoefend door Newton en Leibniz.

Binnen elke laag is de lichtstraal een rechte lijn en op de begrenzing geldt steeds de wet van Snellius. Voor het brachistochrone probleem is dan de vraag die nog rest hoe het brekingsindex-profiel $n = n(y)$ precies gekozen moet worden. Hier komt de mechanica weer om de hoek kijken, waarbij de lichtstraal juist gelijk is aan de baan van de vallende kraal in een constant verticaal zwaartekrachtsveld. Als $v = v(y)$ de bijbehorende valsnelheid is, kiezen we dus $n(y) = 1/v(y)$.

Fermats principe en de wet van Snellius

In deze sectie wordt een eenvoudig bewijs gegeven van de wet van Snellius uit het principe van Fermat, daarbij refererend aan Figuur 2. Gegeven zijn de punten A , met $y > 0$, en B , met $y < 0$, en we moeten het punt C op de grenslijn $y = 0$ vinden zodat som van de tijden t_{AC} en t_{CB} voor een lichtstraal om van

A naar B via C te reizen, optimaal of extremaal is.

Stelling 1 (Fermat en Snellius). *Als de halfvlakken $y > 0$ en $y < 0$ beide homogeen zijn, dan is de totale reistijd langs het pad ACB optimaal dan en slechts dan als de wet van Snellius,*

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (1)$$

geldt.

Bewijs. Laat $x = x_C$ de positie van C aangeven op de lijn $y = 0$ die de beide lagen scheidt. Laat t_{AC} de tijd zijn die nodig is om van A naar C te reizen en evenzo t_{CB} de tijd om van C naar B te reizen. We moeten dan $t_{AC} + t_{CB}$ optimaliseren. Gebruikmakend van het feit dat $|A - C| = t_{AC} \times v_1$ en dat $v_1 = 1/n_1$, geeft dat

$$t_{AC} = n_1 |A - C|$$

en, analoog,

$$t_{CB} = n_2 |C - B|,$$

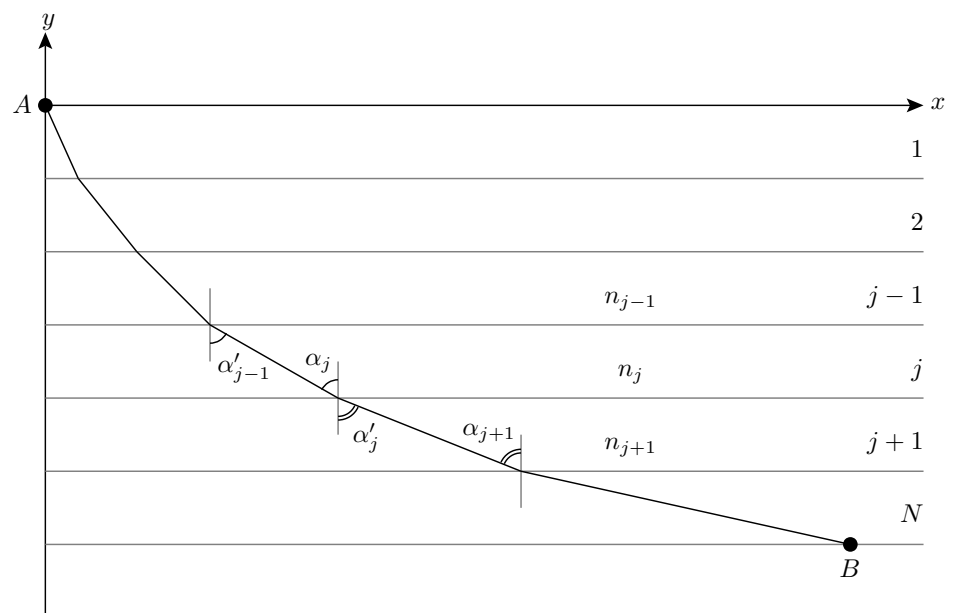
waarin $|\cdot|$ de euclidische metriek aangeeft. Via de stelling van Pythagoras weten we dat

$$|A - C| = \sqrt{x^2 + b^2}$$

en

$$|C - B| = \sqrt{(a - x)^2 + c^2}.$$

Differentiëren van t_{AC} en t_{CB} met betrekking



Figuur 3 Bernoulli's idee: de lichtstraal-oplossing vormt een gebroken rechte lijn, waarbij op de begrenzingen de wet van Snellius geldt. De brekingsindices n_j , $j=1,2,\dots,N$, worden bepaald door de valsnelheid van de kraal in een constant zwaartekrachtsveld.

tot x geeft nu

$$\frac{d}{dx} t_{AC}(x) = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = n_1 \sin \alpha$$

$$\frac{d}{dx} t_{AC}(x) = -\frac{n_2(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + c^2}} = -n_2 \sin \beta.$$

We concluderen dat

$$\frac{d}{dx} (t_{AC} + t_{CB})(x) = 0 \Leftrightarrow n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta,$$

hetgeen te bewijzen was. $\square$

Opmerkingen.

- De wet van Snellius als een min of meer experimenteel feit was al in de klassieke oudheid bekend...
- Uit de tweede afgeleiden van $t_{AC}(x)$ en $t_{CB}(x)$ volgt dat het optimum zelfs een minimum is. Optimale oplossingen heten in veel teksten ook wel *stationair*.
- Als de grens tussen de beide media een gladde kromme is, zijn dezelfde beschouwingen van toepassing, waarbij de hoeken α en β gemeten worden met betrekking tot de normaal op de raaklijn in C . Hier geldt de minimaliteit van de reistijd echter alleen lokaal. Globaal kunnen er caustieken optreden [4, 16, 33].

We kijken nu naar Bernoulli's medium met meer lagen, refererend aan Figuur 3. Dit is een variatie op Stelling 2, waarbij nu N parallelle homogene horizontale lagen worden beschouwd, gescheiden door rechte lijnen; daarbij heeft laag j brekingsindex n_j , $j = 1, 2, \dots, N$.

Corollarium 1 (Snellius en Bernoulli). *In de opzet met meer homogene lagen is de totale reistijd langs de gebroken rechte lijn tussen A en B optimaal dan en slechts dan als de grootheid*

$$n_j \sin \alpha_j, \quad (2)$$

$j = 1, 2, \dots, N$, constant is (dat wil zeggen, onafhankelijk van j).

Bewijs. We passen de zelfde argumentatie toe als in het bewijs van Stelling 1, waarbij een gebroken rechte lijn zodanig wordt doorlopen dat in laag j de voortplantingssnelheid constant gelijk is aan $v_j = 1/n_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Op de begrenzings hebben we verder volgens de wet van Snellius,

$$n_j \sin \alpha_j = n_{j+1} \sin \alpha'_{j+1},$$

voor $j = 1, 2, \dots, N$. Inspectie van opeenvol-

gende begrenzings leert ons met enige euclidische meetkunde dat

$$\alpha'_j = \alpha_{j+1},$$

$j = 1, 2, \dots, N - 1$. Hieruit volgt dat

$$n_j \sin \alpha_j = n_{j+1} \sin \alpha_{j+1},$$

voor $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Hiermee is het corollarium bewezen. $\square$

Opmerkingen.

- Merk op dat de conclusie van Corollarium 1 het formaat van een behoudswet heeft.
- Neem nu aan dat het medium isotroop is met een continu brekingsindex-profiel $n = n(y)$. We discretiseren als in Corollarium 1 en nemen de limiet voor $N \rightarrow \infty$, waarbij de dikte van de laagjes naar 0 nadert. Parametriseren we het hele pad gemakshalve even met y , dan gaat de discrete behoudswet uit Corollarium 1 over in de bewering dat de grootheid

$$n(y) \sin \alpha(y) \quad (3)$$

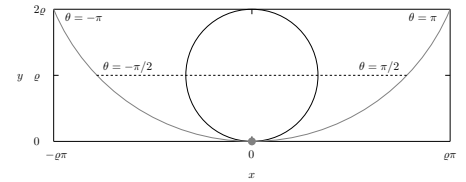
behouden wordt langs het gehele pad. Hierbij is α de hoek die de raaklijn aan het pad maakt met de y -richting. We zullen deze hoek aanduiden met de naam *inclinatie*.

Bernoulli's oplossing voltooid. Opgemerkt zij dat voor bovenstaande conclusie dat $n(y) \sin \alpha(y)$ in (3) een behouden grootheid is, het brekingsindex-profiel $n = n(y)$ nog geheel vrij te kiezen is. Zoals eerder gezegd, wordt bij de oplossing van het brachistochrone probleem de lichtstraal geïdentificeerd met de baan van de vallende kraal. Dan is de voortplantingssnelheid van het licht gelijk aan de valsnelheid van de kraal en we kiezen dus $n(y) = 1/v(y)$ waarbij $v = v(y)$ deze valsnelheid is.

Om $v(y)$ dan vast te leggen merken we op dat de energie

$$\frac{1}{2} m(v(y))^2 + mgy \quad (4)$$

van de valbeweging eveneens een behouden grootheid is, vergelijk [3, 14]. Hierin is m de massa van de kraal en g de constante versnelling van de zwaartekracht. Om precies te zijn: een gegeven waarde $M = \frac{1}{2} m(v(y))^2 + mgy$ van (4) legt deze snelheid $v = v(y)$ volledig vast.



Figuur 4 Cycloïde met rolhoek θ en straal g .

We zullen de cycloïdale vorm hieronder afleiden uit de behoudswetten gerelateerd aan de grootheden (3) en (4). Het blijkt handig te zijn de inclinatie α als parameter te gebruiken en te zoeken naar een draadprofiel $(x, y) = (x(\alpha), y(\alpha))$.

Stelling 2 (De cycloïde als de brachistochrone kromme). *Laten $S = n(y) \sin \alpha(y)$ en $M = \frac{1}{2} mv^2 + mgy$ de waarden zijn van de behouden grootheden (3) en (4). Dan heeft de brachistochrone kromme de vorm*

$$x(\alpha) = x_0 - \frac{1}{4S^2 g} (2\alpha - \sin(2\alpha)), \quad (5)$$

$$y(\alpha) = y_0 + \frac{1}{4S^2 g} \cos(2\alpha),$$

waarbij α een reële parameter is.

Dit is een cycloïde met straal $1/(4S^2 g)$ en rolhoek 2α ; voor deze terminologie zij verwezen naar enige toelichting hierna, in het bijzonder ook de Figuren 4 en 5.

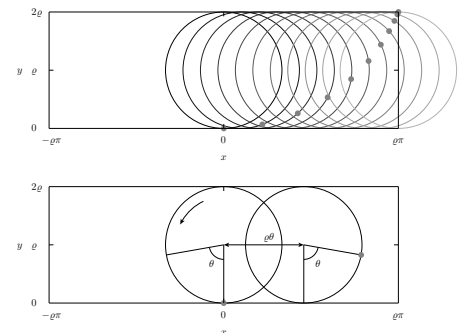
Berekening van de cycloïdale oplossing. Ons bewijs van Stelling 2 komt ten slotte neer op nog enkele rechtstreekse berekeningen.

Lemma 1. *Beschouw de functie $v = v(y)$ als gegeven door (4) en schrijf $v' = dv/dy$. Dan geldt zowel*

$$v'(y) = -\frac{g}{v(y)} \quad (6)$$

als

$$\cos \alpha = S v'(y) \frac{dy}{d\alpha}. \quad (7)$$



Figuur 5 Parametrisatie van de cycloïde.

Bewijs. Differentieer de uitdrukking (4) naar y en de uitdrukking (3) naar α , gebruikend dat $v(y) = 1/n(y)$. $\square$

Bewijs van de stelling. Toepassing van Lemma 1 geeft dat

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\alpha} &= \frac{1}{Sv'(y)} \cos \alpha \\ &= -\frac{v(y)}{Sg} \cos \alpha \\ &= -\frac{1}{2S^2g} \sin(2\alpha),\end{aligned}\quad (8)$$

waarbij het laatste gelijkteken berust op (3). Met soortgelijke argumenten vinden we verder

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\alpha} &= \tan \alpha \frac{dy}{d\alpha} \\ &= -\frac{v(y)}{Sg} \sin \alpha \\ &= -\frac{1}{2S^2g} (1 - \cos(2\alpha))\end{aligned}\quad (9)$$

en integratie van (8) en (9) levert het gewenste resultaat. $\square$

Opmerkingen.

- De waarde van de energie M is niet direct zichtbaar in de oplossing (5), maar in de integratieconstante y_0 komt deze informatie terug: $M = \frac{1}{2}m(v(y_0))^2 + mgy_0$. Als we aannemen dat $v(y_0) = 0$ dan begint de kraal in rust op hoogte y_0 . Dit betekent juist dat gedurende de hele beweging geldt $M = mgy_0$ en de bijbehorende valsnelheid bedraagt dan $v(y) = \sqrt{2g(y_0 - y)}$, waarbij $y \leq y_0$.
- Door een translatie op de y -as kunnen we zelfs bewerkstelligen dat $M = 0$. In dat geval wordt de valsnelheid gegeven door $v(y) = \sqrt{-2gy}$, voor $y \leq 0$. Dit soort overwegingen is tamelijk gebruikelijk in de klassieke mechanica.

Achtergrond bij de cycloïde

Voor de volledigheid volgt nu enige achtergrond bij de cycloïde, waarbij tevens ter sprake komt waarom deze kromme zowel *isochroon* als *tautochroon* is. Isochronie betekent dat de frequentie van oscillatie onafhankelijk is van de amplitudo. Hulpmiddel voor deze beweringen is het feit dat de bewegende kraal langs een cycloïde harmonische oscillaties uitvoert, hetgeen isochronie impliceert. Hiertoe gebruiken we Newtons tweede wet voor de bewegende kraal onder constante zwaartekracht, om zo de differentiaalvergelij-

king van een harmonische oscillator te krijgen. Dit idee gaat terug op Lagrange [22], zie ook [7–8].

Straal en rolhoek. De cycloïde ontstaat door een wiel te rollen langs een rechte lijn, daarbij de baan van een punt op de rand volgende. Laten we het wiel onderlangs een horizontale lijn rollen als in Figuur 5. Als het wiel straal ϱ heeft krijgen, we de parametrisatie

$$\begin{aligned}x(\theta) &= \varrho(\theta + \sin \theta), \\ y(\theta) &= \varrho(1 - \cos \theta),\end{aligned}\quad (10)$$

$-\pi \leq \theta \leq \pi$. De parameter θ wordt in deze tekst *rolhoek* genoemd. Hierbij zijn de cartesische coördinaten (x, y) geschikt gekozen.

Christiaan Huygens. Voor details over de cycloïde zie onder meer [20] en de bijbehorende referenties. Vanzelfsprekend moet ook Huygens' *Horologium Oscillatorium* [21] genoemd worden waar de cycloïde werd ingevoerd als isochrone kromme en waar ook verder interessante meetkundige eigenschappen werden ontdekt, zoals te zien in Figuur 6. Voor details zie verder [1–2] en, onder meer, [9, 11].

Booglengte van de cycloïde. De booglengte van de cycloïde $s = s(\theta)$ kan worden uitgedrukt in elementaire functies. Om precies te zijn geldt volgens de stelling van Pythagoras voor een infinitesimaal stukje boog dat

$$\begin{aligned}ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} d\theta \\ &= \varrho\sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta = 2\varrho \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) d\theta.\end{aligned}$$

Integratie geeft dan dat de booglengte (met teken) wordt gegeven door

$$s(\theta) = 4\varrho \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right). \quad (11)$$

Hieronder zullen we deze booglengte s gebruiken om de kromme te parametriseren.

Harmonische oscillaties: isochronie en tautochronie. Keren we terug naar de kraal die wrijvingsloos langs het cycloïdale draadprofiel glijdt onder invloed van de constante verticale zwaartekracht. We beschouwen dus de kromme (10) voor $-\pi \leq \theta \leq \pi$, zie Figuur 4.

Uit wat nu volgt zal blijken dat de kraal harmonische oscillaties uitvoert rond het mi-

nimum $s = 0$, waarbij de frequentie gelijk is aan $\omega = \sqrt{g/(4\varrho)}$. De potentiële energie van het zwaartekrachtsveld is immers evenredig met de verticale hoogte

$$y(\theta) = 2\varrho \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{8\varrho}(s(\theta))^2$$

van de kraal. In feite wordt deze gegeven door

$$V(s) = \frac{mg}{8\varrho}s^2. \quad (12)$$

Uit Newtons tweede wet volgt dan dat de glijdende kraal bewegingsvergelijking

$$m s'' = -\frac{dV}{ds}(s)$$

heeft, waarbij $s'' = d^2s/dt^2$. De bewegingsvergelijking krijgt nu de lineaire vorm

$$s'' = -\frac{g}{4\varrho}s. \quad (13)$$

Dit is een harmonische oscillator met frequentie $\omega = \sqrt{g/(4\varrho)}$, hetgeen blijkt uit het feit dat de algemene oplossing $s = s(t)$ gegeven wordt door

$$s(t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

met

$$s(0) = A \cos \phi \text{ en } s'(0) = -A \sin \phi,$$

vergelijk bijvoorbeeld [3, 14] en vele teksten over gewone differentiaalvergelijkingen. In de laatste uitdrukking hangt de oscillatiefrequentie ω niet af van de amplitudo A , hetgeen precies uitdrukt dat de cycloïde *isochroon* is.

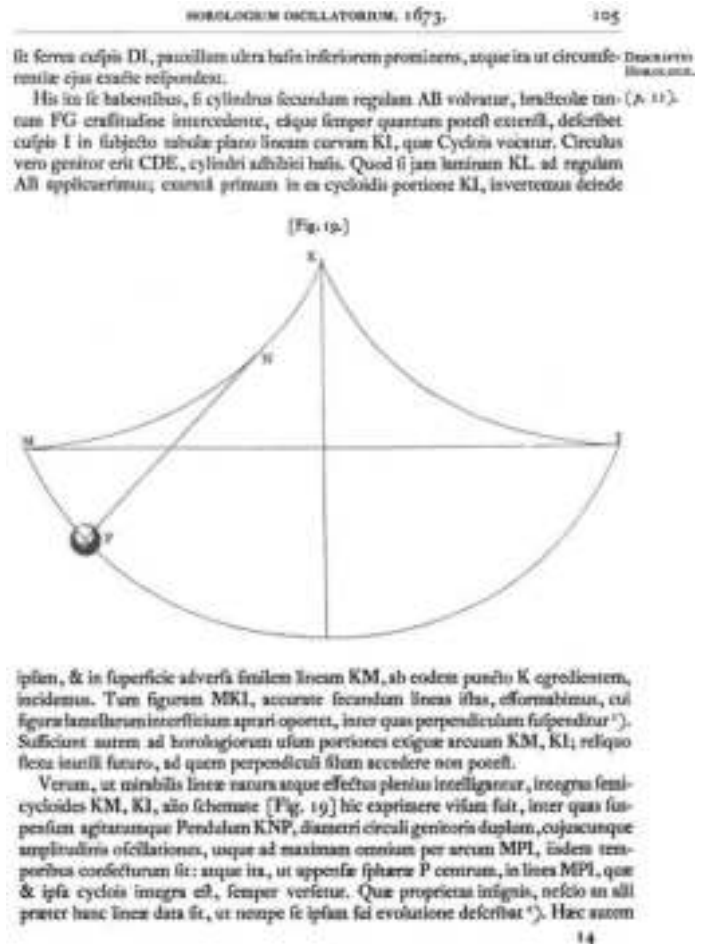
Nu is ook gemakkelijk te zien dat de kromme *tautochroon* is, hetgeen betekent dat de valtijd tot het minimum $s = 0$ dezelfde is vanuit elk punt van de kromme: inderdaad, zo'n valbeweging is immers niets anders dan een halve oscillatie.

Opmerkingen.

- Huygens' meetkundige mirakel is dat hij, zonder enig gebruik van differentiaal- en integraalrekening, aantoonde dat de cycloïde zijn eigen evoluit is, zie Figuur 6, rechts. Deze bewering betekent het volgende. Beschouw de bovenste kromme, ook een cycloïde en congruent met de onderste — dat is de zojuist gevonden isochrone kromme. We nemen een puntmas-



Figuur 6 Christiaan Huygens (1629–1695) geschilderd door Caspar Netscher, en een bladzijde uit *Horologium Oscillatorium* [21]



sa aan het eind van een koord dat bevestigd is aan de cusp van de bovenste cycloïde en van lengte 4ρ . Als het koord afwikkelt langs de bovenste cycloïde, daarbij loslatend volgens de raaklijn, dan beschrijft de puntmassa precies de onderste. Het slingerkoord maakt hiermee ook een rechte hoek, waardoor op deze laatste beweging alleen de zwaartekracht van invloed is. Daarom is deze beweging inderdaad isochroon. Zie voor meer details Huygens [21] en, bijvoorbeeld, [1–2, 8, 42].

- Bij de isochrone slingerklok werd dit idee geëffectueerd door bij het ophangpunt van de slinger cycloïde-vormige, metalen ‘wangen’ aan te brengen waarlangs het koord zich afwikkelt. Voorbeelden hiervan zijn te zien in verschillende Nederlandse musea. Dergelijke uurwerken werden wel gebruikt om aan boord van schepen de Greenwich-tijd voldoende nauwkeurig bij te kunnen houden, dit om de geografische lengte op zee te kunnen bepalen. Inderdaad, als ΔT het tijdsverschil in uren is tussen de lokale zonnetijd en de Greenwich-tijd,

dan bedraagt het lengteverschil met de Greenwich-meridiaan $15 \times \Delta T^0$. Hier wordt gebruikt dat $360 = 15 \times 24$. Opgemerkt mag dat deze methode niet goed werkte: het bleek dat het slingeren, stampen en dompen van het schip het slingeruurwerk, isochroon of niet, te zeer verstoorden om de Greenwich-tijd voldoende nauwkeurig bij te kunnen houden. Later gebruikte men hiervoor liever veeruurwerken. Vergelijk ook [36].

- Johann Bernoulli werkte in Groningen tussen 1695 en 1705. Hij publiceerde zijn optische oplossing van het brachistochrone probleem in de *Acta Eruditorum* van 1697. Vele tijdgenoten publiceerden daarna ook oplossingen. Een anonieme versie in de *Phil. Trans.* werd door Bernoulli onmiddellijk herkend als afkomstig van Newton; hij zegt “*ex ungue leonem cognavi*” (ik herkende de leeuw aan zijn klauw). Zie voor meer details [5, 15, 30].

Benadering in de geest van Hamilton

Hamilton was een wonderkind dat fantasti-

sche bijdragen heeft geleverd aan wiskunde, natuurkunde en astronomie. Onder andere introduceerde hij een transparant formalisme in de variatierekening, dat een diepe invloed heeft gehad op de ontwikkeling van de mathematische en theoretische fysica. Hij publiceerde hierover het eerst in de optica [17]. Wij volgen hem hier, als steeds op een anachronistische manier, zijn theorie illustrerend aan het brachistochrone probleem.

Opmerkingen.

- Tussen Bernoulli en Hamilton mogen zeker Euler [12] en Lagrange [23] niet onvermeld blijven, zijnde beiden ook sleutelfiguren in deze ontwikkelingen.
- Hamilton breidde later zijn optische werk [17] uit naar de beweging van deeltjes [18–19]. Het is goed hier op te merken dat lichtstralen vaak gezien worden als vrije deeltjes, dat wil zeggen, deeltjes waarop geen externe krachten werken.

Fermat en Hamilton: een herformulering

Voor een gegeven gladde geparametriseerde

kromme $\tau \mapsto q(\tau)$ in het vlak of in de ruimte geven we de snelheidsvector $\dot{q}$ aan door $\dot{q} = dq/d\tau$. Als deze kromme een lichtstraal parametrizeert in een isotroop medium, dan is de brekingsindex $n(q)$ welgedefinieerd en met de kettingregel volgt

$$dt = n(q) \|\dot{q}\| d\tau, \quad (14)$$

waarin t de tijd voorstelt. Fermats principe (van de kortste tijd) zegt dat voor $\tau_1 < \tau_2$, waarbij $A = q(\tau_1)$ en $B = q(\tau_2)$ vast zijn, de integraal

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} n(q(\tau)) \|\dot{q}(\tau)\| d\tau$$

minimaal is (of tenminste optimaal) onder kleine variaties van de kromme. Omdat het verder niet handig is met vierkantswortels te moeten rekenen, optimaliseert men liever de integraal

$$\mathcal{I}(q) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{2} n^2(q(\tau)) \|\dot{q}(\tau)\|^2 d\tau, \quad (15)$$

wat lokaal op hetzelfde neerkomt. Vanaf nu zullen we steeds aannemen dat $n = n(q)$ op een gladde (differentieerbare) manier van q afhangt. De integrand van (15),

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} n^2(q) \|\dot{q}\|^2, \quad (16)$$

wordt de *Lagrangiaan* van dit optimaliseringsprobleem genoemd; het is tevens de (kinetische) energie van de onderhavige beweging. De herformulering van Fermats principe zegt dat lichtstralen de integraal (15) moet optimaliseren. Dit laatste staat ook bekend als het principe van Hamilton [17]. Hierbij zij meteen opgemerkt dat Hamiltons principe niet alleen de optica betreft, maar zich over vrijwel de gehele klassieke mechanica uitstrekt [18–19], vergelijk ook, bijvoorbeeld, [3, 6, 14].

Variatierekening, een samenvatting

We vatten kort een aantal centrale elementen samen uit de variatierekening. We doen dit in de vorm van een tweetal stellingen zonder bewijs. Deze zullen leiden tot Hamiltons formalisme via de Euler–Lagrange-vergelijkingen. Voor verdere details zij verwezen naar Arnold [3], waaruit gedurende deze expositie vrijelijk geciteerd wordt. We voegen hieraan toe dat dit geheel een diepe en bovendien zeer elegante wiskundige theorie behelst. In het verticale vlak dat dient als optisch me-

dium, schrijven we $q = (x, y)$. De dynamica van de lichtstralen vindt dan plaats in de 4-dimensionale toestandsruimte $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ met coördinaten $(q, \dot{q}) = ((x, y), (\dot{x}, \dot{y}))$. Hierin is voor elke positie $q \in \mathbb{R}^2$ de snelheid $\dot{q}$ een raakvector die ligt in $\{q\} \times \mathbb{R}^2$: de raakvector $\dot{q}$ grijpt aan in het punt q . Op deze manier worden, naast de posities q in het optische medium, in het algemeen de configuratieruimte geheten, ook de snelheden $\dot{q}$ in beschouwing genomen. Het eerste niet-triviale resultaat van de theorie is het volgende.

Stelling 3 (Euler–Lagrange-vergelijkingen). *De kromme $\tau \mapsto (q(\tau), \dot{q}(\tau))$ voldoet aan de Euler–Lagrange-vergelijkingen*

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial L}{\partial x}, \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned} \quad (17)$$

dan en slechts dan als de integraal $\mathcal{I}$ in (15) optimaal is onder kleine variaties van de kromme q , waarbij de eindpunten $q(\tau_1)$ en $q(\tau_2)$ vastgehouden worden.

Analoog aan wat we zagen in het geval van de wet van Snellius, zie Stelling 1, geldt in deze optische opzet dat lokaal gesproken het optimum tevens een minimum is.

Opmerkingen.

– Om te illustreren hoe een en ander werkt geven we een korte indruk van de Euler–Lagrange-vergelijkingen (17) in onze optische setting waarbij $n = n(y)$.

Bij het berekenen van de afgeleiden van de Lagrangiaan L moeten we eerst $x, y, \dot{x}$ en $\dot{y}$ als vier onafhankelijke variabelen opvatten. Dit leidt tot

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = n(y)n'(y) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

en

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = n^2(y)\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = n^2(y)\dot{y}.$$

Hierin is $n' = dn/dy$.



Figuur 7 William Rowan Hamilton (1805–1865)

Substitutie van deze uitdrukkingen in (17) geeft een systeem van twee tweede-orde-differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (n^2(y)\dot{x}) &= 0, \\ \frac{d}{d\tau} (n(y)n'(y) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)) &= n^2(y)\dot{y}, \end{aligned} \quad (18)$$

waarbij nu $\dot{x} = dx/d\tau$ en $\dot{y} = dy/d\tau$.

– Differentiatie naar τ in de vergelijkingen (18) leidt al snel tot halsbrekende berekeningen. De analyse zal hierna echter aanzienlijk vereenvoudigd worden door Hamiltons aanpak, waarbij de tweede-orde-differentiaalvergelijkingen beide op ingenuwe wijze vervangen worden door twee eerste-orde-vergelijkingen. Eén conclusie kan nu al getrokken worden uit de eerste vergelijking van (18), namelijk dat de uitdrukking $n^2(y)\dot{x}$ een behouden grootheid is. We komen hier dadelijk uitvoerig op terug.

Canonieke theorie

Eerst volgt nu een vertaling van de Euler–Lagrange-vergelijkingen (17) naar Hamiltons canonieke vergelijkingen. Hiertoe voeren we een transformatie

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (q, p), \end{aligned} \quad (19)$$

uit, waarin de volgende definitie geldt:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = n^2(q) \dot{q}.$$

Deze transformatie is genoemd naar Legendre. Ook voeren we de Hamiltoniaanse functie (kortweg Hamiltoniaan) $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die in de huidige optische opzet de vorm

$$\begin{aligned} H(q, p) &= (L \circ \mathcal{L}^{-1})(q, p) \\ &= L\left(q, \frac{p}{n^2(q)}\right) \\ &= \frac{1}{n^2(q)} \|p\|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

krijgt. H is dus de (kinetische) energie uitgedrukt in de (q, p) -variabelen. Het tweede niet-triviale resultaat van de theorie luidt:

Stelling 4 (Hamiltons principe expliciet). *De lichtstralen, gedefinieerd door optimalisatie van de integraal (15) zijn de projecties van de*

oplossingen van het systeem

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j},\end{aligned}\quad (21)$$

$j = 1, 2$, van vier eerste-orde-differentiaalvergelijkingen op het configuratie-vlak $\mathbb{R}^2 = \{q\}$.

In deze compacte notatie is dus $q = (q_1, q_2)$ met $q_1 = x$ en $q_2 = y$. We zullen hieronder de volgende notatie gebruiken: $p_1 = n^2(q)\dot{x}$ en $p_2 = n^2(q)\dot{y}$. Verder volgt een concrete toepassing van Stelling 4 op het brachistochrone probleem.

Opmerkingen.

- Als eerder vermeld geldt Hamiltons principe in grote algemeenheid. Dit geldt eveneens voor het formaat (21), vergelijk nogmaals [3, 14], zie ook [13]. Zoals eerder gezegd heten de canonieke vergelijking (21) vaak Hamilton–Jacobi-vergelijkingen. Sporen van deze theorie zijn te vinden in de hele theoretische natuurkunde, de ingenieurswetenschappen, de econometrie, et cetera. Voor een recent overzicht zie De Lang [24–26] en voor het verband met optimal control zie verder, bijvoorbeeld, Kirk [29]. Deze uitbreidingen betreffen inmiddels ook partiële differentiaalvergelijkingen.
- Bovenstaande beschrijving heeft inmiddels een sterk meetkundig karakter gekregen, waarin, bijvoorbeeld, de Legendre transformatie (19) loopt van de raakbundel naar de co-raakbundel van de configuratieruimte, die dan een algemene variëteit mag zijn [3].
- De deterministische dynamica van (21) speelt zich hierbij geheel af in de toestandruimte $\{q, p\}$, in de co-raakbundel dus. De waargenomen paden van deeltjes of lichtstralen zijn dan projecties van deze dynamica op de configuratieruimte $\{q\}$.

Behoudswetten, symmetrie

Het algemene formaat (21) brengt al meteen *energiebehoud* met zich mee. Inderdaad geldt voor de evolutie van de functie H langs de integraalkromme dat

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0,$$

waarbij de kettingregel gebruikt wordt. Dit betekent juist dat de energie H constant is gedurende de hele beweging, c.q., langs de evo-

lutie van (21). Met andere woorden, er geldt dat de energie H behouden wordt.

Translatie-symmetrie en nog een behoudswet. In de specifieke opzet van het brachistochrone probleem is de functie $n = n(q)$ niet afhankelijk van de horizontale coördinaat x ; we schrijven $n = n(y)$ als voorheen. Dan krijgt (20) de vorm

$$H(x, y, p_1, p_2) = \frac{1}{2n^2(y)}(p_1^2 + p_2^2), \quad (22)$$

en we concluderen dat ook de functie H onafhankelijk is van x . Dat betekent dat in het systeem (21) van differentiaalvergelijkingen de derde vergelijking de vorm

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x}(q, p) = 0$$

heeft, waaruit we concluderen dat $p_1 = n^2(y)\dot{x}$ een behouden grootheid is, de zogenaamde *impuls* van de beweging. Deze behoudswet ontmoetten we al in de Euler–Lagrange-setting, zie (18).

Opmerkingen.

- Deze openbaring van een behoudswet is een voorbeeld van een algemeen principe, genoemd naar Noether [32]. Dit principe zegt hoe een symmetrie kan leiden naar een behoudswet, vergelijk ook Arnold [3]. In dit geval is het de translatie-symmetrie in de x -richting die leidt tot behoud van impuls in deze richting. Klassiek gesproken heet een variabele zoals x ook wel *cyclisch*. We merken nog op dat behoud van energie in dit verband gerelateerd is aan tijds-onafhankelijkheid van de Hamiltoniaan: het feit dat het systeem autonoom is.
- Door combinatie van de beide behoudswetten vinden we ook de behouden grootheid S uit (3) terug. Om precies te zijn, leggen we energie en impuls vast als $H(q, p) = E$ en $p_1 = I$, dan volgt

$$\begin{aligned}\frac{I}{\sqrt{2E}}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= n(y) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ &= n(y) \sin \alpha(\dot{x}, \dot{y}) \\ &= S(y, \dot{x}, \dot{y}),\end{aligned}\quad (23)$$

vergelijk de Figuren 2 en 3.

Reductie van de symmetrie. De translatie-symmetrie in de horizontale richting kan gebruikt worden om het 4-dimensionale systeem als volgt naar twee dimensies te reduceren.

Stelling 5 (Reductie van de translatie-symmetrie). *Gegeven $p_1 = I$, dan zijn de projecties van de oplossingen van (21) op het (y, p_2) -vlak van de canoniek vergelijkingen met betrekking tot de Hamiltoniaan*

$$\begin{aligned}H_I(y, p_2) &= \frac{1}{2n^2(y)} p_2^2 + V_I(y) \\ \text{met } V_I(y) &= \frac{I^2}{2n^2(y)},\end{aligned}\quad (24)$$

waarbij

$$V_I(y) = \frac{I^2}{2n^2(y)}.$$

Dit betekent dat de (y, p_2) -coördinaten in (21) evolueren volgens

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial H_I}{\partial p_2}(y, p_2) = \frac{1}{n^2(y)} p_2, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H_I}{\partial y}(y, p_2) = -\frac{n'(y)}{n^3(y)} (I^2 + p_2^2).\end{aligned}\quad (25)$$

Dit zijn immers juist de tweede en vierde vergelijking van het canoniek stelsel (21), die door de translatie-symmetrie ontkoppelen van de beide andere vergelijkingen.

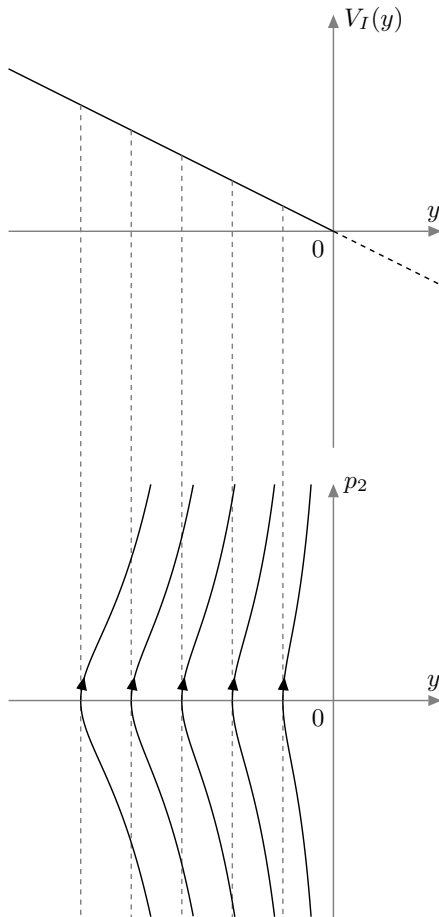
Opmerkingen.

- De functie V_I in (24) wordt vaak de *effectieve potentiaal* of de beweging genoemd. Voor het canonieke systeem (25) is de energie H_I een behouden grootheid en dus zijn de integraalkrommen van (25) juist de niveaalkrommen van de functie H_I .
- Zulke reductie-processen zijn welbekend in de conservatieve dynamica, denk hierbij bijvoorbeeld aan een puntmassa die beweegt in een centraal krachtveld waarbij de rotatie-symmetrie kan worden gereduceerd op een volledig analoge manier, gebruikmakend van Keplers perkenwet [3, 14].

Terug naar het brachistochrone probleem

Tot zover is de theorie nog tamelijk algemeen. In de brachistochrone context ontbreekt nog een preciese keus van het brekingsindexprofiel voor de beweging onder constante verticale zwaartekracht, vergelijk (4).

Het gereduceerde faseportret. Beschouw opnieuw de energie $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$ in (4) van de vallende kraal onder constante zwaartekracht. Gemakshalve volgen we hier de opzet van een opmerking na Stelling 2, waarbij de kraal vanaf hoogte $y = 0$ met snelheid $v = 0$



Figuur 8 Gereduceerd faseportret van de brachistochrone lichtstraaldynamica dat de integraalkrommen van het gereduceerde systeem (28) toont. Deze krommen zijn juist de niveaukrommen van de gereduceerde Hamiltoniaan H_I .

zijn valbeweging begint. In dat geval geldt tijdens de beweging dat

$$\frac{1}{2}v^2(y) + gy = 0,$$

en de valsnelheid bedraagt $v(y) = \sqrt{-2gy}$. Hieruit volgt dat

$$n(y) = \sqrt{-\frac{1}{2gy}}, \quad (26)$$

waarbij $y < 0$. Dit geeft de gereduceerde Hamiltoniaan H_I uit (24) de expliciete vorm

$$H_I(y, p_2) = -\frac{1}{g} (p_2^2 + I^2),$$

hetgeen impliceert dat de niveaukromme met vergelijking $H_I(y, p_2) = E$ precies de grafiek is van

$$y = -\frac{1}{g} \left(\frac{E}{p_2^2 + I^2} \right) \quad (27)$$

als functie van p_2 . Deze bewerkingen leiden

rechtstreeks tot het gereduceerde faseportret van Figuur 8, vergelijk, bijvoorbeeld, [3]. In het bijzonder blijkt dat bij ieder niveau van de effectieve potentiaal V_I , voor de bijbehorende waarde van y , de niveaukromme van H_I door het punt $(y, 0)$ gaat.

Reconstructie van de volledige dynamica. Bovendien krijgt het gereduceerde systeem van differentiaalvergelijkingen (25) de vorm

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -2gy p_2, \\ \dot{p}_2 &= g(p_2^2 + I^2). \end{aligned} \quad (28)$$

In het gereduceerde faseportret van Figuur 8 worden de projecties van de mogelijke brachistochrone oplossingen op het (y, p_2) -vlak weergegeven. Hieruit zal de volledige dynamica in de 4-dimensionale toestandsruimte gereconstrueerd worden en daaruit hun projecties op het (x, y) -configuratievlak. Op die manier zullen we de cycloïden herontdekken als de corresponderende lichtstralen.

Allereerst verkrijgen we de τ -parametrisatie van het gereduceerde systeem als volgt. Leggen we de constanten $I \neq 0$ en E vast, dan leiden we uit (28) af dat

$$d\tau = \frac{dp_2}{g(p_2^2 + I^2)},$$

hetgeen leidt tot

$$\tau = \frac{1}{gI} \arctan\left(\frac{p_2}{I}\right).$$

Alle integralen kunnen dus als volgt worden uitgedrukt in elementaire functies

$$\begin{aligned} p_2(\tau) &= I \tan(gI\tau) \quad \text{en} \\ y(\tau) &= -\frac{1}{g} \left(\frac{E}{I^2 \cos^2(gI\tau)} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

hetgeen inderdaad de τ -parametrisering van het gereduceerde systeem is. Merk op dat hier $p_2(0) = 0$ is genomen: voor $\tau = 0$ zitten we precies in het minimum van de functie (27).

De cycloïden herontdekt. Vanaf hier kan de gehele dynamica in de 4-dimensionale toestandsruimte worden gereconstrueerd. Zo volgt uit het feit dat $I = p_1 = n^2(y) \dot{x}$ dat

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{n^2(y)} I = -2Igy \\ &= \frac{2E}{I} \cos^2(gI\tau) = \frac{E}{I} (1 + \cos(2gI\tau)). \end{aligned}$$



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

En zo herontdekken we de cycloïden van (5),

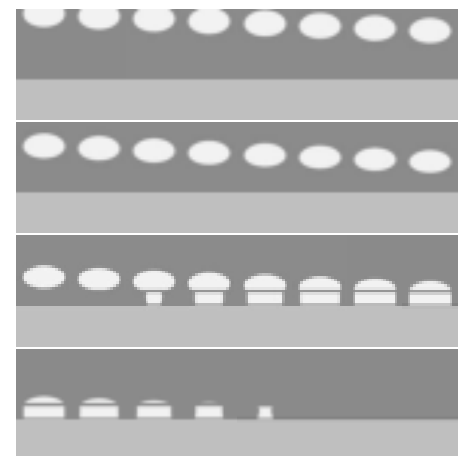
$$\begin{aligned} x(\tau) &= x_0 + \frac{E}{2gI^2} (2gI\tau + \sin(2gI\tau)), \\ y(\tau) &= -\frac{E}{2gI^2} (1 + \cos(2gI\tau)), \end{aligned} \quad (30)$$

daarbij nogmaals gebruikmakend van (29).

Vergelijking van de formules (5) en (30) geeft voor de straal ϱ van de cycloïden dat

$$\frac{1}{4S^2g} = \frac{E}{2gI^2},$$

hetgeen gelukkig klopt met (23). Interessant



Figuur 9 Blinde strook in de ondergaande zon



Foto: George Huitema

Het kunstwerk Brachistochroon van Henk Oving in de vijver van het Zernikecomplex van de Rijksuniversiteit Groningen is een eerbetoon aan Johann Bernoulli.

is verder de evenredigheid

$$gI\tau = \alpha, \quad (31)$$

tussen τ en de inclinatie α met de y -richting.

Scholium

Bovenstaande afleiding van de cycloïden (30) doet denken aan hoe Newtons mathematische principes de Keplerse kegelsneden van de beweging in het centraal krachteveld opleveren, vergelijk [3, 14]. Het is opmerkelijk te noemen dat veel van de berekeningen van Huygens, Newton en Bernoulli zo volledig vallen binnen het raamwerk van elementaire functies. Hierbij mag worden aanmerkt dat reeds bij de beweging van de mathematische slinger de tijdparametrisering een elliptische integraal met zich meebrengt.

Een directe oplossing

Heden ten dage is het brachistochrone probleem een opgave in cursussen variatierekening, waar men meestal zoekt naar een kromme van de vorm $y = y(x)$. De booglengte is dan $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (y')^2} dx$, waarin $y' = dy/dx$. Voor de valsnelheid ter hoogte y nemen we wederom $ds/dt = \sqrt{-2gy}$, zie opnieuw de opmerking na Stel-

ling 3. Dit geeft

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{-2gy}} dx,$$

en leidt dus naar een variatieprobleem met Lagrangiaan

$$L(y, y') = \sqrt{-\frac{1 + (y')^2}{2gy}}.$$

Uit de Euler–Lagrange-vergelijkingen kan men nu de differentiaalvergelijking

$$(1 + (y')^2) y = \text{constant}$$

afleiden, die na substitutie van een geparametriseerde oplossing $(x, y) = (x(\theta), y(\theta))$ als voorheen, het cycloïdale antwoord geeft. Vergelijk ook, onder meer, Bottema [6].

Lichtstralen als geodeten

Keren we terug naar formule (14), $dt = n(q) \|\dot{q}\| d\tau$, die de correspondentie aangeeft tussen *tijd* en *afstand*. Deze gedachte kan verder uitgewerkt worden door een Riemannse metriek G in te voeren; dat is een q -afhankelijk inwendig product op de raakruim-

te $\{q\} \times \mathbb{R}^2 = \{\dot{q}\}$. Inderdaad definiëren we

$$G_q(\dot{q}_1, \dot{q}_2) = n^2(q) \langle \dot{q}_1, \dot{q}_2 \rangle, \quad (32)$$

waar de laatste haakjes het standaard (euclidisch) inwendig product aangeven. Indachtig het feit dat

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} G_q(\dot{q}, \dot{q}),$$

zie (16), mogen we concluderen we dat de lichtstralen verkregen door het variatieprincipe met Lagrangiaan L de *geodeten* blijken te zijn van de Riemannse metriek G ; zie voor algemene referentie over differentiaalmeetkunde [11, 34, 37]. Dit levert een moderne ingang tot de geometrische optica [4, 16].

En zo zijn Bernoulli's cycloïden ten slotte geodeten in de translatie-invariante Riemannse metriek (32), bepaald door het brekingsindexprofiel (26). Het is ook alleen in deze omstandigheden dat de betrekking (31) tussen de geodetische parameter τ en de inclinatie α kan gelden.

Atmosferische optica

In de geometrische optica van de atmosfeer kan het optisch medium een verticaal vlak

zijn, bepaald door het oog van de waarnemer, het centrum van de aarde en een optisch object zoals het centrum van de zon. Aannemend dat het medium isotroop is, is ook hier een brekingsindex gedefinieerd. Een vereenvoudigende onderstelling is verder dat de brekingsindex n alleen afhangt van de afstand r tot het centrum van de aarde, in welk geval we schrijven $n = n(r)$. Dit introduceert een rotatie-symmetrie die via het principe van Noether opnieuw een comfortabele behouds-

wet geeft, namelijk $C = rn(r) \sin \alpha$. Hierbij is α de inclinatie met de radiële richting en is de bijbehorende poolhoek de cyclische variabele. Een theorie, zeer analoog aan die hierboven ontwikkeld, geldt ook in deze omstandigheden, vergelijk [3, 9].

Voor veel keuzen van het brekingsindexprofiel $n = n(r)$ ontstaat er rond de horizontale kijkrichting een zogenaamde *Wegener sector*, zie [39–40]. Zo'n sector kan aanleiding geven tot een blinde strook in de zon, zoals te

zien in Figuur 9, vergelijk ook Minnaert [31]. Ook kunnen bepaalde luchtspiegelingen op deze manier begrepen worden. Voor meer details en referenties zij verwezen naar [9].

Dankwoord

Ik spreek mijn dank uit aan Marja Bos, Aernout van Enter, Konstantinos Efstathiou, Wout de Goede, George Huitema, Hildeberto Jardón-Kojakhmetov, Jan van Maanen, Henk de Snoo, Floris Takens, Gert Vegter, Ferdinand Verhulst, Holger Waalkens en Florian Wagener voor inspirerende discussies tijdens de voorbereiding.

Referenties

- J.M. Aarts, *Horologium Oscillatorium &c*, in voorbereiding.
- J.M. Aarts en H.W. Broer, Schoolmeetkunde in het Horologium Oscillatorium van Christiaan Huygens, Preprint Rijksuniversiteit Groningen, 2010.
- V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, GTM 60, Springer, 1989.
- V.I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wavefronts*, Mathematics and its Applications (Soviet Series) 62, Kluwer Academic Publishers 1990.
- J. Bernoulli, *Opera Johannis Bernoulli*, G. Cramer (ed.), 4 delen, Genève, 1742.
- O. Bottema, Variatierekening, in: L. Kuipers en R. Timman (eds.), *Handboek der Wiskunde 2*, Klassieke wiskunde – Onderwerpen uit de analyse. Scheltema & Holkema, 1970.
- O. Bottema, *Theoretische Mechanica*, Epsilon Uitgaven 3, 1985.
- H.W. Broer, Huygens' isochrone slinger, *Euclides* 70(4) (1995), 110–117.
- H.W. Broer, *Hemelsverschijnselen nabij de horizon, met Minnaert en Wegener, Bernoulli en Hamilton*, Epsilon Uitgaven, te verschijnen in 2013.
- C. Carathéodory, *Gesammelte Mathematische Schriften*, Vols. I–IV, München, 1954–1957 (Beck) I–V.
- M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Englewood Cliffs, 1976.
- L. Euler, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, 72 vols., Bern, 1911–1975.
- R.P. Feynman, R.B. Leighton en M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1, Addison-Wesley, 1963, 1964 en 1965.
- H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, 1950, 1980.
- H.H. Goldstine, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 5, Springer, 1980.
- V. Guillemin en S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Mathematical Surveys 14, American Mathematical Society, 1977.
- W.R. Hamilton, Theory of systems of rays. *Trans. Roy. Irish Acad.* 15 (1828), 69–174.
- W.R. Hamilton, On a general method in dynamics, *Phil. Trans. Roy. Soc.* 124 (1834), 247–308.
- W.R. Hamilton, Second essay on a general method in dynamics. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 125 (1835), 95–144.
- K.P. Hart, De Cycloïde. *Pythagoras* 39(4), 2000.
- Chr. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, in: *Œuvres Complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences* 16, Martinus Nijhoff, The Hague, 1929, Vol. 5, 241–262; Vol. 17, 156–189.
- J.L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, 4th ed., 2 vols., Gauthier-Villars et fils, Paris, 1888–1989.
- J.L. Lagrange, *Œuvres*, A. Serret en G. Darboux, eds., Paris, 1867–1892.
- H. de Lang, Het principe van de minste actie: I. Klassiek, *Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde* 78(9) (2012), 362–366.
- H. de Lang, Het principe van de minste actie: II. Quantummechanisch, *Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde* 78(10) (2012), 390–393.
- H. de Lang, Het principe van de minste actie: III. Van padintegraal tot Feynmandiagrammen, *Nederl. Tijdschr. voor Natuurkunde* 78(11) (2012), 420–425.
- G.W. Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis, *Acta Eruditorum* 1684, in: D.J. Struik, *A source book in mathematics 1200–1800*. Harvard University Press, 1969, 271–281.
- U. Leonhardt en Th. Philbin, *Geometry and Light: the science of invisibility*, Dover, 2010.
- D.E. Kirk, *Optimal Control Theory: an Introduction*, Dover, 2004.
- J.A. van Maanen, *Een Complexe Grootheid, leven en werk van Johann Bernoulli 1667–1748*, Epsilon Uitgaven 34, 1995.
- M.G.J. Minnaert, *De Natuurkunde van 't vrije veld*, Vol. 1, Vijfde Editie, ThiemeMeulenhoff, 1996; English translation: *The Nature of Light & Colour in the Open Air*, Dover, 1954.
- E. Noether, Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse* (1918), 235–257.
- T. Poston en I. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, 1978.
- G.F.B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Habilitationsschrift, 1854), *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13, (1868).
- D.G. Shafer, The brachistochrone: historical gateway to the calculus of variations, *MATerials MATematics* 5(14), 2007.
- D. Sobel, *Longitude*, Walker, 1995, 2005.
- M. Spivak, *Differential Geometry*, Vols. I, II en III, Publish or Perish, 1970.
- D.J. Struik (ed.), *A Source Book in Mathematics 1200–1800*, Harvard University Press, 1969; Princeton University Press, 1986.
- A.L. Wegener, Über die Ursache der Zerrbilder bei Sonnenuntergängen, *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre* Strasbourg, 4 (1912), 26–34.
- A.L. Wegener, Optik der Atmosphäre, in: Müller-Pouillet, *Lehrbuch der Physik*, 2nd ed., Viewig & Sohn, Braunschweig, (1928), 266–289.
- K. Weierstra (ed.), *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke*, Berlin, 1881–1891.
- J.G. Yoder, *Unrolling Time*, Cambridge University Press, 1988.

Robbert Fokkink

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
 TU Delft
 r.j.fokkink@tudelft.nl

Evenement 49ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2013)

Weergaloze mengeling van wiskunde en theater

Onder auspiciën van het Koninklijk Wiskundig Genootschap werd op vrijdag 5 april aan de Radboud Universiteit Nijmegen het 49ste Nederlands Mathematisch Congres gehouden. Pleinaire sprekers waren John Conway en Vitaly Bergelson. Verder stonden er voordrachten op het programma van Georges Gonthier en Lotte Jaspers, en waren er diverse parallelle sessies. Robbert Fokkink van de TU Delft doet verslag, waarbij hij uitgebreid stilstaat bij de voordracht van Conway.

Ruim honderd deelnemers hadden zich op vrijdagochtend 5 april verzameld voor het Nederlands Mathematisch Congres in Nijmegen. De voorzitter van het College van Bestuur, in Nijmegen is dat gelukkig nog een hoogle-
 raar, opende het congres en gaf vervolgens het woord aan organisator Wieb Bosma voor de inleiding van pleinaire spreker Vitaly Bergelson. Wieb en Vitaly hadden elkaar goed leren kennen doordat ze de voorgaande dag enkele uren in de auto hadden moeten wachten voor de Waalbrug. Files scheppen altijd een band. Dit was alweer de derde voordracht van Vitaly Bergelson binnen acht dagen. Hij had eerder gesproken in Leiden over de stelling van Van der Waerden en in Delft over Van der Corput-verzamelingen. Een spreker die op gepaste wijze onze nationale trots streelt, komt natuurlijk uitstekend van pas op het NMC.

Vitaly Bergelson

Bergelson opende de voordracht met de stelling van Schur: voor elke eindige partitie $\bigcup \mathcal{N}_i$ van de natuurlijke getallen is er een $\mathcal{N}_i$ die elementen a, b en $a + b$ bevat. Met andere woorden, de vergelijking $a + b = c$ heeft oneindig veel oplossingen binnen een van de elementen van de partitie. Zo'n formule heet *partitie-regulier* en een van de thema's van Bergelsons

onderzoek is de classificatie van dergelijke formules. In plaats van een partitie kan men ook een deelverzameling $\mathcal{N}$ nemen. Als dit een grote verzameling is, dan moet de formule oplosbaar zijn binnen $\mathcal{N}$. Maar wat is precies een grote verzameling? Verschillende mogelijke definities werden besproken met

de zaal. De verzameling S van kwadraatvrije getallen is bijvoorbeeld een grote verzameling, want $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S \cap N|}{N}$ is welgedefinieerd en gelijk aan $6/\pi^2$. Iedereen herkent dat quotiënt natuurlijk en deze uitkomst is zeker geen toeval. Als je nu een vervelend studentje hebt, verklaarde Vitaly, geef hem dan het volgende probleem: *elk natuurlijk getal is het verschil van twee kwadraatvrije getallen*. De oplossing van dit probleem kan in één regel, wat bijzonder educatief werkt bij vervelende studentjes. Vervolgens schreef Vitaly de oplossing op het bord en kreeg van de eerste rij de klacht dat de oplossing niet bestond uit één maar twee



Vitaly Bergelson (links) met zijn Nijmeegse collega en evenbeeld Eric Cator (rechts)



Lunch in de Noordstraat

regels. De klacht kwam van John Conway, die in dezelfde auto uren had moeten wachten op de Waalbrug. Files scheppen een band.

De ondertitel van de voordracht was ‘A tribute to Paul Erdős’, maar er kwamen ook verschillende andere wiskundigen voor het voetlicht. Turán, Szemerédi en Vitaly’s goede vriend Neil Hindman, die precies die dag jarig was. De voordracht eindigde met een beschouwing over niet-lineaire vergelijkingen. Zo is $a - b = c^2$ partitie-regulier, maar $a + b = c^2$ is dat niet. Dit laatste is overigens een opgave voor vervelende lezertjes. Het bewijs van de regulariteit van de eerste formule is niet eenvoudig en berust op nogal gekunstelde ultrafilters. Vitaly zei niet zo blij te zijn met dit bewijs en te hopen op een verbeterde versie. Toen werd gevraagd, opnieuw op de eerste rij: van wie is dat bewijs dan? Dat bleek van Vitaly zelf te zijn, die liever een *tribute* geeft aan anderen, maar werd gedwongen te eindigen met een *tribute* aan zichzelf.

Parallele sessies

Daarna was het tijd voor koffie in de gang van het Huygensgebouw, die is gesplitst in een Noordstraat en een Zuidstraat. Dat geeft al aan hoe lang die gang is. Niet iedereen wist gelijk de koffie te vinden in de krappe tijd tussen plenaire lezing en parallelle sessies. Vijf in totaal: één over geschiedenis van de wiskunde, één over wiskunde en industrie, twee clustersessies, en tenslotte een sessie met voordrachten voor de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi. De jury, bestaande uit Emile Aarts, Rien Kaashoek, Jaap Top en Willem

van Zwet, had zich verspreid over de zaal. Het jongste lid zat voorin de zaal en stelde na afloop kritische vragen, terwijl de senioren verderop in de zaal op fluisterende toon commentaar uitwisselden. Was dit misschien hun manier om de druk bij de kandidaten weg te nemen? Hoe dan ook, het werkte goed, want allen maakten een ontspannen indruk en slaagden erin met eenvoudige voorbeelden de resultaten van hun onderzoek te illustreren. Ondertussen werd in de Noordstraat zo geruisloos mogelijk gebouwd aan een lange rij tafels voor de lunch, die werd afgehandeld tussen 13.00 en 14.00 uur. Het NMC is gecomprimeerd tot een enkele dag, terwijl de inhoud van het programma niet is meegekrompen. Zoiets is alleen mogelijk bij een vlekkeloze organisatie. Na de lunch liep het programma weer verder met opnieuw vijf parallelle sessies. Een nieuw fenomeen was de sessie over funding, met aandacht voor topsectoren en Europese subsidies. Wij hard werkende wiskundigen zijn netto betalers en het zou mooi zijn als iemand ons geld uit Brussel terug gaat halen. Ook nieuw was de sessie waarin masterstudenten binnen tien minuten een overzicht gaven van hun afstudeerwerk voor potentiële werkgevers. Bijna alle voordrachten hadden een toegepast karakter, verschillende malen werd de wens uitgesproken om de wereld te verbeteren: de jongste generatie loopt voorop met de valorisatie. Vier van de tien studenten kwamen niet opdagen en hebben klaarblijkelijk al een werkgever gevonden. Ondanks de stijgende jeugdwerkloosheid schijnt het wel goed te zitten met het

toekomstperspectief van jonge wiskundigen.

Philips Wiskundeprijs voor Promovendi

Het was vier uur en de deelnemers konden nog snel een kop koffie drinken op weg naar de afsluiting van het programma. De Philips Wiskundeprijs voor Promovendi werd uitgereikt aan René Pannekoek (UL) voor zijn werk aan rationale punten op Kummeroppervlakken, waarmee hij volgens de jury de weg heeft geopend naar nieuw en veelbelovend onderzoek. René ontving de prijs uit handen van de winnaar van vorig jaar, Ruben van der Zwaan. Het aantal toehoorders in de zaal was ondertussen bijna verdubbeld tot tweehonderd, zoveel pasten er eigenlijk niet in, in afwachting van het hoogtepunt van de dag: de slotlezing van John Conway. Hieronder staat daarvan een verslag, naar beste vermogen.

John Conway

Een introductie is niet nodig. Op tafel staan twee overheadprojectors, niet helemaal in focus. Conway stommelt het podium op en schrijft noodgedwongen met zijn linkerhand, langzaam en met grote letters, de titel van zijn voordracht: ‘Lexicodes’. Een verkorting van lexicografische code. Hij vraagt: “Is er misschien iemand in de zaal die hier al wat over gehoord heeft?”, en buldert dan, “KEEP YOUR BIG MOUTH SHUT” — ervaalt een doodse stilte — “and even if you have a dainty little mouth, KEEP YOUR DAINY LITTLE MOUTH SHUT”. Nu hij de volle aandacht van de zaal heeft, begint Conway met een definitie op de ene projector die eindigt op de andere. “Een lexicode is een half-oneindige rij van niet-negatieve gehele getallen $\dots cba$, lexicografisch geordend. Elke volgende lexicode is de eerste die voldoende grote Hamming-afstand heeft tot zijn voorgangers. Bijvoorbeeld, de lexicode C_3 begint met

```

... 000000000
... 000000111
... 000000222
      :
```

en zo begin je met $\dots 000000aaa$ voor gehele $a \geq 0$. Hoe moet dat nu verder wanneer je lexicografisch bent aangeland bij $\dots 000001cba$? Wacht even,” zegt Conway, “daar moet ik over nadenken... ik meen me te herinneren dat de abc dan verschillend moeten zijn... ja, dat klopt wel, dat kan iedereen in de zaal zelf controleren, want de Hamming-afstand moet drie zijn. De eerstvolgende code is $\dots 000001012$, als ik het wel heb. De eerste codes zijn

...000001012
 ...000001103
 ...000001230
 ...000001321

en nu gebeurt er iets opmerkelijks, want de volgende code is ...000001456 waarmee de normale volgorde lijkt te zijn hersteld. Het is tijd om een resultaat op te schrijven dat ikzelf bijzonder mooi vind:

Lexicode Stelling. *Onder coördinaatgewijze definitie van vermenigvuldiging en vectoroptelling vormen de lexicodes een vectorruimte.*

Je kunt eenvoudig controleren dat de lexicodes ...00000aaa gesloten zijn onder optelling — er klinkt wat geroezemoes in de zaal — “en ook als je ...000001012 optelt bij zo iets als ...000000222 dan krijg je ...000001234.”

“Wat bedoelt u eigenlijk met een vectorruimte?”, klinkt er nu vanuit de zaal. Conway kijkt een beetje verstoord op. “Ja, ja, inderdaad, dit zijn gehele getallen en geen reële getallen. Laat ik dat voor dit moment even toegeven. Dat is wel jammer, want ik vind dit persoonlijk een erg mooie stelling.” “Bedoelt u misschien een moduul?”, probeert iemand te helpen.

Conway veegt het woord vectorruimte uit en gaat weer verder met zijn berekening. Hij kijkt naar het resultaat van de optelling ...000001234 en constateert tot zijn schrik dat dit geen lexicode is, want 000001230 was al een lexicode en die heeft Hamming-afstand 1. Er klopt iets niet. Conway is onder-tussen van het podium naar beneden gestom-meld, kijkt onthutst de zaal in, en verzucht: “Ik heb eigenlijk nog nooit een voordracht voorbereid en vroeger had ik daar helemaal geen last van.” Het is een treurig moment van totale ontredde-ning, voor een zaal vol begrijpende toehoorders die bereid zijn de grote man zijn falen te vergeven vanwege prestaties uit het verleden. Hij klautert weer het podium op en prevelt dat hij onderweg op het vlieg-



“Ik bereid mijn voordrachten nooit voor”

veld ook al zijn paspoort vergeten was. Even is het niet duidelijk of de voordracht wel door kan gaan, maar Conway gaat toch stug verder. “Er moet toch enige waarheid in de stelling schuilen, want ik heb al eens eerder over dit onderwerp gesproken. Laten we de stelling even herschrijven, zodat die weer waar wordt.” Conway schrijft eerst het woord *non* voor de stelling, maar maakt er uiteindelijk van:

Lexicode Probleem. *Zijn er coördinaatgewijze definities van vermenigvuldiging en vectoroptelling waaronder lexicodes een vectorruimte vormen?*

“We kunnen natuurlijk proberen om het probleem op te lossen door de definitie van optelling aan te passen. Het is duidelijk dat $0+0=0$ want anders is de som van twee lexicodes nooit meer een lexicode. Laten we dus 0 uitkiezen als ons nul-element en daarmee hebben we een begin van onze opteltabel

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	.	.
2	2	.	.

Als je nu kijkt naar de optelling

...000001012
 ...000000111
 ...0000011??

dan is er een unieke lexicode die past, namelijk ...000001103. Dus nu zien we dat $1+1=0$ en we vinden:

Stelling 1. *Het lichaam heeft karakteristiek 2.*

Dit geeft ons de diagonaal van de opteltabel. Bovendien hebben we gevonden dat $2+1=1+2=3$, precies zoals we gewend zijn. Via de associatieve eigenschap, waarvan we maar aannemen dat die geldt, krijgen we ook $3+1=1+3=2$ en de andere optellingen van getallen tot en met 3. Nu maken we even een zijstapje naar lexicode C₄, die krijg je door een laatste cijfer toe te voegen aan C₃, door bijvoorbeeld ...000000aaa|a en ...000001012|3. De optelling

...0000010123
 ...0000004444
 ...0000014???

is uniek gedefinieerd en de drie vraagtekens moeten wel gelijk zijn aan 567 vanwege



Probleem wordt Axioma

Hamming-afstand, dus kunnen we de tabel uitbreiden tot de getallen tot en met 7, door te bedenken dat het tweede blok gelijk is aan het eerste plus 4:

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Stelling 2. *Als $n < 8$ dan is $n+8$ precies wat we gewend zijn en hetzelfde geldt algemeen voor $n < 2^k$ en $n+2^k$.*

Ah! Dus we hebben laten zien dat deze optelling volledig bepaald is.” Op het bord verandert Conway het Lexicode Probleem in een Axioma door de woorden *zijn* en *er* om te draaien en het vraagteken uit te vegen. Het wordt verderop in de lezing weer hersteld tot Stelling.

“Informatici noemen dit de *exclusive or*, terwijl wiskundigen het herkennen als de *minimal excluded value* oftewel de Nim-optelling. Nu is het zaak om te laten zien dat de vermenigvuldiging bestaat, of in ieder geval minstens één vermenigvuldiging. Het probleem is dat $1 \times 1 = 1$ niet kan worden bewezen maar ook niet kan worden weerlegd. Elk element ongelijk nul kan de eenheid zijn, dus verklaren we 1 maar tot eenheid, zodat we kunnen beginnen met de vermenigvuldigingstafel.

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	.	.	.	.	.	.
3	0	3	.	.	.	.	.	.
4	0	4	.	.	.	.	.	.
5	0	5	.	.	.	.	.	.
6	0	6	.	.	.	.	.	.
7	0	7	.	.	.	.	.	.



John Conway in actie

Het eerste obstakel is 2×2 . Vermenigvuldig $\dots 0000001012$ met 2, dan krijgen we $\dots 000000202?$ en het vraagteken moet wel een 3 zijn. Daarmee krijgen we het schattige resultaat dat $2 \times 2 = 3$ en ik denk dat ik de eerste persoon ben die dat ooit heeft opgemerkt. Via de distributieve wet kunnen we de tafel nu wat verder uitbreiden...”

“Waarom is 2×3 gelijk aan 3×2 ?”, vraagt een niet-commutatieve GQT-er. “Ik beroep me op de juridische verdediging dat lichamen commutatief zijn,” antwoordt Conway. “Hoevel het misschien ook mogelijk is om dit rechtstreeks af te leiden... Eh, nee, dat doe ik toch maar niet... Ik blijf bij mijn juridische verdediging.

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	3	1	8	.	.	.
3	0	3	1	2	12	.	.	.
4	0	4	8	12	.	.	.	.
5	0	5	.	.	.	.	.	.
6	0	6	.	.	.	.	.	.
7	0	7	.	.	.	.	.	.

Dus nu is de vraag wat 4×4 is. Ik kwam daarachter toen ik nog een student was in Cambridge. Kan het 0 zijn? Natuurlijk niet, idioot. Kan het 1 zijn? Maar dan zou $x^2 = 1$ ofwel $x^2 + 1 = 0$ ofwel $(x+1)^2 = 0$ een extra nulpunt hebben. Dus 1 is het niet. Ook 2 en 3 vallen af om dezelfde reden. Het kwadratische polynoom $x^2 = x$ heeft al de twee nulpunten 0 en 1. En ook $x^2 = x + 1$ heeft al de twee nulpunten 2 en 3. Dus is 4^2 ongelijk aan 4 of 5 en zo kom je uiteindelijk bij $4^2 = 6$. Ik verkende die mogelijkheid en ik kon er niets mis mee vinden. Ik berekende de hele vermenigvuldigingstafel tot aan 16 en het leek te werken. Het kostte een hele middag, maar toen ik klaar was ging ik liggen op het tapijt en ik giechelde en ik schudde, want vier-kwadraat is zes.

Stelling 3. Als $N = 2^{2^k}$ en $n < N$ dan is $n \times N$ wat je gewend bent, maar

$$N \times N = \frac{3N}{2}$$

Dit bepaalt de vermenigvuldigingstafel volledig. Ik zal dit demonstreren zoals Besico-

vitch dat deed onder zijn colleges. JIJ DAAR, GEEF ME EEN GETAL ONDER DE 16 EN LAAT HET NIET TRIVIAAL ZIJN.” De wijsvinger priemt richting Vitaly Bergelson, die zegt 11. “...EN JIJ DAAR.” De wijsvinger priemt naar Peter van Emde Boas, die zegt 13.

“Nu berekenen we 11×13 door beide getallen binair uit te schrijven, dus $(1 + 2 + 8) \times (1 + 4 + 8)$ en dat is gelijk aan...” Conway schrijft nu het een en ander op het bord, maar stopt er uiteindelijk mee. “Nu ga ik deze stelling niet bewijzen (was het hiervoor een axioma?). Ik denk dat ik die maar laat staan als een opgave. Het is een tamelijk moeilijke opgave. Er zijn nog zoveel meer dingen te zeggen. Bijvoorbeeld 2 is een derdemachts-eenheidswortel en 4 is een vijftiendemachts-eenheidswortel. Het blijkt dat ω een derdemachtswortel is van 2, dus dat is ook een eenheidswortel. Het kostte me vroeger de nodige moeite, maar tegenwoordig kan ik probleemloos vermenigvuldigen zonder al teveel geheugen te gebruiken. Het is een kwestie van de logaritme: $\log 11 = 7$ en $\log 13 = 12$ die moet je optellen... dus 19... en dat is 4 modulo 15... dus 11×13 is gelijk aan zes... Ja ik geloof echt dat het 6 is en ik denk dat ik



“EN JIJ DAAR”



Peter van Emde Boas, geluksgetal dertien

er nu maar een eind aan maak.” Zo besluit Conway zijn voordracht, een weergaloze mengeling van wiskunde en theater, waarin een erkende bedrieger er toch in is geslaagd om nagenoeg de hele zaal bij de neus te nemen.

Erelidmaatschap voor Rob Tijdeman

Herman te Riele neemt nu het woord namens het Koninklijk Wiskundig Genootschap en heropent officieel de geschorste jaarvergadering van het KWG, die eerder op de dag is geopend. Hij richt zich tot de twee eregasten die recht tegenover hem zitten op de eerste rij: Rob en Berrie Tijdeman. Het KWG heeft op de jaarvergadering unaniem besloten het erelidmaatschap te verlenen aan Rob Tijdeman vanwege zijn buitengewone verdiensten, niet alleen voor de wetenschap, hoewel die natuurlijk ook erg indrukwekkend zijn, maar vooral voor de bestuurlijke activiteiten daar-

naast. Herman somt een lange rij van bestuursfuncties op, die gelukkig niet uitputtend is, anders zat de zaal er nu nog. Rob krijgt een oorkonde, die niet is ingelijst omdat het KWG op de kleintjes blijft letten. Hij bedankt iedereen in de zaal voor de goede samenwerking. Berrie krijgt een grote bos bloemen. Het is een bijzonder moment en daarom is niet helemaal duidelijk hoe het nu verder moet. Herman maakt aanstalten het podium te verlaten. “Herman, moet je niet nog een aankondiging doen?” vraagt organisator en mede-bestuurslid van het KWG Wieb Bosma, die trouwens ook Hermans buurman is op het CWI. “Eh, ja, dat klopt inderdaad. Het volgende Mathematisch Congres is het vijfzigste. Het zal worden gehouden in Delft, in samenwerking met Leiden. Het eenenvijftigste is daarna in Leiden, in samenwerking met Delft. Volgend jaar is er ook de Brouwerle-

zing, die dit keer zal worden gehouden over een onderwerp uit dynamische systemen.” Herman maakt opnieuw aanstalten om het podium te verlaten. “Herman, moet je nu de vergadering sluiten?” Dat klopt inderdaad. En zo wordt de bijeenkomst van het KWG weer gesloten. De organisator komt nu zelf het podium op en kondigt aan het NMC te gaan sluiten via een speech van zeven pagina’s. “Het antwoord op 11×13 is overigens 5”, klinkt er vanaf de eerste rij. “Ik had dat moeten weten want het antwoord is altijd 5.” Met deze toepasselijke woorden komt er een eind aan een gedenkwaardig NMC, waarna iedereen zich stort op de borrel in de Zuidstraat.

Naschrift

Conways logaritme leeft in het deellichaam $F_{16} = \{0, 1, \dots, 15\}$, waarin $F_{16}^* = \{1, 2, \dots, 15\}$ een cyclische multiplicatieve groep vormt met voortbrenger 4. De afbeelding $\exp(x) = 4^x$ geeft een permutatie van F_{16}^* die, schijnbaar toevallig, bestaat uit een cykel van lengte 15:

0 1 4 5 2 6 8 7 11 12 13 9 10 3 14 15

Elk getal in deze cykel staat tussen zijn logaritme en zijn exponent. Conway heeft dit uit zijn hoofd geleerd via een ‘getallenmelodie’ door de rij te verdelen in blokken van lengtes 5, 3, 5, 3. Vermenigvuldigen van getallen onder de 16 wordt nu het optellen van de logaritmen modulo 15. Conway verklapte dit voor het congres al aan Hendrik Lenstra. Toen hij de lezing begon met “KEEP YOUR BIG MOUTH SHUT”, noemde hij daarbij ook expliciet dat Hendrik Lenstra jr. (of sr., daar wilde hij vanaf wezen) zijn mond moest houden. ←

Dankwoord

Met dank aan Cor Kraaikamp en William Moore voor de foto’s en Wieb Bosma en Hendrik Lenstra voor de deskundige hulp.

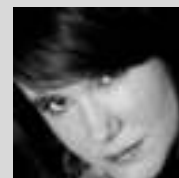


Rob Tijdeman ontvangt de oorkonde behorende bij het erelidmaatschap van het KWG uit handen van Herman te Riele

Ionica Smeets

wetenschapsjournalist, Leiden

i@ionica.nl



Het keerpunt van Hans Heesterbeek

Achteraf gezien vond ik dat heel moedig van mezelf

Hans Heesterbeek (1960) is hoogleraar theoretische epidemiologie in Utrecht. Hij is wiskundige én bioloog. Na een promotie en een paar postdocs belandde hij als consultant in Wageningen. In zijn vrije tijd bleef hij onderzoek doen, want ooit wilde hij terug naar de universiteit. Het keerpunt kwam toen Heesterbeek werd aangenomen als universitair hoofddocent bij diergeneeskunde in Utrecht, en vervolgens die baan weigerde omdat hij er niet gelukkig van zou worden. Een interview over de vreemde eend in de bijt zijn, interessante vragen en een onverwachte wending.

“Op de middelbare school waren er twee dingen die me echt interesseerden: wiskunde en biologie. Ik worstelde met welke van de twee ik moest kiezen als studie. Ik bedacht dat je bij wiskunde waarschijnlijk geen biologie krijgt, maar dat je andersom bij biologie nog wel wiskundevakken kunt volgen. Uiteindelijk koos ik als studie plantenziektekunde in Wageningen, dat was iets specialistischer dan biologie. Daar deed ik alle wiskundevakken die er waren. Bij professor Van Rootselaar deed ik zelfs nog extra vakken, zoals een boek functionaalanalyse doorwerken voor een cijfer. Dat was natuurlijk een beetje raar. Ach, Van Rootselaar was al lang blij dat een student überhaupt iets met wiskunde wilde doen en het niet alleen als een vervelend struikelvak zag.”

Toch ging je daarna ook nog echt wiskunde studeren.

“Na zes jaar was ik klaar in Wageningen en wilde ik meer wiskunde. Ik miste de basis, ik had nog nooit logica of algebra gedaan en wilde het vak vanaf het begin opbouwen.

Ik moest wel opschieten, want ik had nog maar twee jaar studiefinanciering over.



Hans Heesterbeek

Ik ging naar de Universiteit van Amsterdam en via Odo Diekmann werd ik tegelijk studentassistent bij het Mathematisch Centrum, het huidige CWI. Die aanstelling zou veranderen in een promotieplaats zodra ik klaar was met mijn studie. Met wat vrijstellingen en de zomervakanties doorwerken, lukte het om binnen twee jaar af te studeren als wiskundige. Daarna ging ik verder met mijn promotieonderzoek.”

Heb je je carrière uitgestippeld?

“Nee. Als aio ben je al lang blij als je een postdoc-positie vindt. Ik kon naar Cambridge en Oxford, daarna belandde ik bij het Centrum voor Biometrie in Wageningen. Daar deed ik een soort consultancy voor onderzoekers van DLO (Dienst Landbouwkundig Onderzoek). We werkten op projectbasis, je moest zelf elk jaar genoeg projecten binnenhalen om je eigen salaris terug te verdienen. Er was nooit een project dat me betaalde voor het onderzoek dat ik zelf interessant vond. Dat deed ik dus maar in mijn eigen tijd, want ik wilde op den duur terug naar de universiteit. Ergens in mijn achterhoofd wilde ik wel hoogleraar worden, maar dat leek me zo ver weg.”

Hoe is het dan toch gelukt?

“Toen ik zeven jaar in Wageningen zat, kwam er hier bij diergeneeskunde Utrecht een positie voor een universitair hoofddocent theo-

retische epidemiologie. Ik had niet speciaal iets met dieren, maar mijn eigen onderzoek ging over modellen en infecties bij mensen, en het leek me daarom wel wat. Dus ik solliciteerde. Maar toen ik werd gekozen, heb ik toch nee gezegd. Ik besepte namelijk dat ik onder een hoogleraar zou moeten werken die heel andere interesses had dan ik. Dat betekende dat ik weer zou moeten werken aan dingen die ik minder interessant vond en dat mijn eigen onderzoek nog steeds 's avonds moest. Dan bleef ik liever in Wageningen doormodderen. Ik was daar net hoofd geworden en hoefde op dat moment niet per se weg. Het was een moeilijke beslissing: ik wilde heel graag naar de universiteit, maar in deze positie zou ik niet gelukkig worden. Achteraf gezien vond ik het heel moedig van mezelf om nee te zeggen.

De decaan reageerde teleurgesteld en ik ging langs om mijn besluit uit te leggen. En toen vroeg hij of ik wel wilde komen als ik een hoogleraarspositie kreeg. Natuurlijk wilde ik dat, want dan zou ik zelf kunnen bepalen welk onderzoek ik wilde doen. Zo kwam ik dus toch terecht bij diergeneeskunde."

Hoe bevalt het daar?

"Ik ben een beetje een vreemde eend in de bijt, de rest van de staf is bijvoorbeeld vrijwel allemaal dierenarts. Heel bepalend voor mijn carrière was dat ik in 2004 als eerste bij diergeneeskunde een Vici-subsidie van NWO kreeg. Je kunt vijf jaar lang doen wat je wilt, ik kan iedereen zo'n Vici aanraden (lacht).

Wat ik bizar vond, was dat mijn mening ineens meetelde. Eerst was ik een van de vele hoogleraren hier, een beetje een gekke omdat ik geen dierenarts was en ik kabbelde onzichtbaar voort. Maar na de Vici vindt iedereen je heel bijzonder. Ineens telde diezelfde stomme mening die ik altijd al had mee, ook als het helemaal niet over mijn onderzoek ging. Je moet goed oppassen dat je niet over van alles iets gaat roepen. Maar als je in een groepje mensen zit die er allemaal geen verstand van hebben en het gaat over mijn afdeling, dan zit ik er toch liever bij om iets te zeggen."

Je publicaties zien er nogal wiskundig uit voor iemand bij diergeneeskunde.

"Maar mijn werk komt altijd vanuit een biologische vraag. Dat was al zo bij mijn proefschrift. Dat ging over R_0 — en dat is trouwens ook de titel —, het aantal nieuwe besmettingen veroorzaakt door één nieuw besmet individu in een populatie van volledig vat-

baren. Als R_0 groter is dan 1, dan ontstaat er een kettingreactie van nieuwe gevallen, een epidemie. Maar als R_0 kleiner is dan 1 kan de ziekteverwekker zich in die populatie niet handhaven. R_0 is een drempelgetal en dit soort grootheden zijn heel belangrijk in dynamische systemen.

Een artikel uit mijn proefschrift is echt een bestseller, het is meer dan duizend keer geciteerd. Odo Diekmann, Hans Metz en ik lieten daarin zien hoe je R_0 kunt uitrekenen als je verschillende typen in je populatie hebt. Stel dat je alleen mannen en vrouwen onderscheidt: dan heb je de mannen die mannen besmetten, de mannen die vrouwen besmetten, enzovoorts. Dan krijg je vier getallen en in de biologie wist men niet hoe je die getallen moest combineren tot één waarde met de drempel eigenschap. Je kunt ze niet zomaar middelen. Wij lieten zien hoe je die getallen in een matrix moet zetten en dat je dan de dominante eigenwaarde moet hebben. Alleen hadden we het artikel te ingewikkeld gemaakt, we deden het namelijk meteen met operatoren oneindig-dimensionaal. We zagen dat niet-wiskundigen dat lastig vonden, ze citeerden ons artikel en gingen vervolgens iets verkeerd doen. Op een gegeven moment ergerden we ons daar zo aan, dat we het onlangs nog maar eens in een nieuw artikel beter hebben uitgelegd."

Is dat iets dat je hebt geleerd, om het niet moeilijker te maken dan nodig is?

"Ik heb inmiddels een onbewuste rem om wiskundig niet te ver te gaan, daar hebben biologen niets aan. Bovendien zijn er nog zoveel biologische vragen die ik veel interessanter vind dan wiskundige veralgemeningen. Als een systeem van differentiaalvergelijkingen geen redelijke overeenkomst heeft met een biologisch systeem, dan interesseert het mij niet of het een unieke oplossing heeft. Ook al kun je dat op een prachtige manier bewijzen in een aantal pagina's."

Wat vind jij op dit moment dan echt een interessante vraag?

"Hoe beïnvloeden infectiezieken de stabiliteit van een ecosysteem? Traditioneel is onderzoek naar infectiezieken gericht op één ziekteverwekker en één gastheer. Maar ik wil kijken naar één ziekteverwekker in een heel netwerk van soorten. Neem een voedselweb waarin prooi- en roofdieren samenleven. Een infectie bij de roofdieren heeft ook gevolgen voor de prooi, die worden dan wellicht minder vaak gegeten. Kan een ver-

storing in zo'n ecosysteem verklaren dat een infectie ineens kan overspringen naar de mens en daar een epidemie veroorzaakt zoals hiv of SARS?"

Waarom merk je nog dat je een wiskundige bent?

"Wiskundigen hebben geleerd om heel precies te redeneren. Als ik iets niet begrijp, dan wil ik weten hoe het zit. Misschien is het iets heel dieps, maar misschien is het wel onzin. Dat bij elk onderwerp kritisch doorvragen, ook al gaat het over management in plaats van onderzoek, is onderscheidend voor wiskundigen.

Achteraf gezien bleek de combinatie van biologie en wiskunde ideaal. Het is doodzonde dat het tegenwoordig heel moeilijk is om meer dan één studie te doen. Voor een heleboel wetenschapsgebieden is het enorm waardevol om verstand te hebben van twee disciplines en te kunnen praten met specialisten uit verschillende gebieden. Op zich weet ik niets meer van plantenziektenkunde. Bruine vlekjes op een plant zou ik niet meer direct kunnen herkennen, laat staan dat ik zou weten wat je eraan moet doen. Maar de basale kennis van celbiologie, biochemie en biologische processen gebruik ik nog dagelijks als ik met collega's praat. Odo Diekmann zegt altijd dat je bij dit soort samenwerkingen een keten van mensen moet hebben die elkaars taal spreken. Iemand als ik kan praten met zuiver wiskundigen over de theorie die ontwikkeld moet worden, maar ook met degenen die in een stal de dierenexperimenten doen." ◀

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar i@ionica.nl.

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

f.verhulst@uu.nl

Maatschappij

Vreemde vogels

Scheidend hoofdredacteur Ferdinand Verhulst voert sinds 2008 ook de redactie over de door hem in het leven geroepen rubriek 'De derde wet'. Voor deze rubriek worden lezers uitgenodigd te reageren op in dit blad verschenen artikelen. Dat levert vaak zinvolle aanvullingen en interessante discussies op. Soms echter ontvangt de redacteur ook brieven die vooral verbazing oproepen. Dat zal voor veel wiskundigen herkenbaar zijn, want menigeneen wordt wel eens benaderd door een 'vreemde vogel' met een merkwaardig verhaal. Verhulst beschrijft een aantal van deze verhalen uit zijn eigen ervaring.

In de jaren dat ik in Amsterdam studeerde was er een restauranthouder, Nicolaas Kroeze, die met een alles omvattende filosofie, de wereldwiskunde, in het hele land mensen probeerde te overtuigen van zijn bijzondere ideeën. Wij studenten vonden dat zowel interessant als komisch, maar we waren ook geïntrigeerd doordat Kroeze bijna niet van zijn stuk was te brengen. Die zekerheid was ons geheel vreemd. De vreemde vogels die ik hier zal beschrijven dragen ook vaak die zekerheid van het gelijk met zich mee. De gedachte achter mijn verslag is dat velen van ons vergelijkbare ervaringen hebben en dat het wellicht goed is om die eens uit te wisselen.

Kunstmaan

Bij het eerste verhaal is 'interessant zijn' het sleutelbegrip. Na het doctoraalexamen in Amsterdam werkte ik een vijftal jaren in Delft, onder andere aan het ontwikkelen van wiskunde voor hemelmechanica. Dat laatste is relevant voor het volgende. Op een dag werd ik opgebeld door een leraar uit Den Haag, laten we hem A noemen, die mij vertelde dat hij een interessant probleem had en mij vroeg of hij daar over kon komen praten. Natuurlijk kon dat, zoiets weiger je niet. Bij zijn bezoek vertelde hij me dat een leerling eens had gevraagd wat er gebeurde als je een kunstmaan had waarop een constante kracht richting aarde werkte. Dat wist deze leraar niet, maar hij ging raad vragen bij de Faculteit Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek. Daar had men hem geleerd om dit probleem numeriek op te lossen, dat leverde mooie plaatjes. Met dit verhaal, en de plaatjes, was hij bij een tiental andere docenten langsgeslagen. Er zijn in Delft



veel faculteiten waar men bedreven is in de mechanica. Naar zijn zeggen had eenieder veel interesse getoond. Hij was nu bij Wiskunde aangeland, waar ik de tweede docent was die hem te woord stond. De eerste had hem opnieuw goede numerieke methoden aan de hand gedaan. Ik bekeek het probleem en sprak met A af om de volgende week verder te praten, ondertussen zou ik er over nadenken. Het probleem bleek eenvoudig analytisch op te lossen en met enige gepaste tevredenheid liet ik hem dat de volgende week zien. Die tevredenheid bleek helemaal niet zo gepast, A keek niet naar mijn berekeningen, luisterde niet naar mijn verslag en bleef maar herhalen: "Vindt u mijn probleem niet interessant?" Ten slotte gaf ik het maar op en dat was einde verhaal, dacht ik. Een tijdje later vervuilde ik

mijn werkplek van Delft naar de Universiteit Utrecht. Daar werd ik een jaar later opgebeld door een leraar uit Den Haag die mij een interessant probleem wilde voorleggen. Er begon plotseling een belletje bij mij te rinkelen en ik vroeg wat voor probleem dat was. Het ging over een kunstmaan waar een constante kracht op werkte en ja hoor, het was A die een tweede of misschien wel derde universiteit aanboorde met een interessant verhaal. Ik verontschuldigde me en maakte snel een einde aan het gesprek, hoe interessant het probleem ook was.

Vlakke hoek

Een ander soort contact is soms ontstaan met mensen die menen een klassiek probleem te hebben opgelost. Zo werd ik benaderd door B die in staat bleek om een vlakke hoek in drie gelijke delen te verdelen. Daar was nog nooit een wiskundige in geslaagd. Natuurlijk wist B niet dat het om een constructie met passer en liniaal ging. Er zijn verschillende benaderingsmethoden voor de driedeling van de hoek, zijn methode was correct en al eeuwenlang bekend. Daarbij gebruikte B een kromme die je helpt om te interpoleren, die kromme had hij vast de B-kromme genoemd. Het deponeren van die naam bij een instelling met gevestigde wetenschappelijke reputatie stond op het punt om te gebeuren. Ons contact liep echter op een teleurstelling voor hem uit.

Algebraïsche vergelijkingen

Het volgende overkwam in een of andere vorm verschillende van mijn collega's. Zoals bekend zijn algebraïsche vergelijkingen van graad vijf en hoger lastig op te lossen, sommigen beweren dat het in het algemeen zelfs niet kan. Wat kunnen wiskundigen toch soms dom zijn; C schreef een computerprogramma dat het probleem voor eens en voor altijd oploste. Onsterfelijke roem leek tot de mogelijkheden te behoren, de kranten waren al gewaarschuwd, maar helaas ...

Wortel tien

D is een kennis van vrienden en hij wilde me graag eens spreken. Hij had namelijk verbijsterende dingen ontdekt die de wiskundigen kennelijk waren ontgaan. Ik kreeg een tekst te lezen waarin, volgens hem, glashelder werd aangetoond dat de verhouding tussen omtrek van een cirkel en zijn diameter wortel tien is. Daar keek ik wel van op. In de tweede regel van zijn geschrift was helaas een fout aanwijsbaar, waarop D verklaarde dat ik helemaal gelijk had, maar dat dit eenvoudig te repareren was. Hij voegde daaraan toe dat het vooral Ludolf van Ceulen was geweest die over deze zaak voor veel verwarring had gezorgd. Later gaf D mij opnieuw de tekst, vanaf het begin fout, die nu bij een notaris was gedeponeerd en tevens naar de president van de KNAW was gestuurd. De president had het document met een tweeregelig briefje teruggestuurd, hetgeen volgens D de zwakheid van deze organisatie aantoonde. Ik maakte toch wat bezwaren en later vertelden mijn vrienden mij dat D meende dat ik er kennelijk moeite mee had als niet-wiskundigen op mijn vakgebied schokkende vondsten deden.

Seks en wiskunde

Kennelijk had E mijn huisadres gevonden want hij belde bij mij aan, toevallig was ik thuis. Hij bood mij ter publicatie een geschrift aan met de veelbelovende titel 'Het seksuele van de wiskunde'. Dat wilde ik wel lezen. Het was een raadselachtige beschrijving van geslachtsdelen en meetkundige objecten. Van publicatie is het niet gekomen.

Limiet

Een geheel ander verhaal betreft de gepensioneerde sociaal wetenschapper F. Hij wil de wiskunde een betere grondslag geven. Zo ont-

dekte hij dat wiskundigen van mening zijn dat $0.999 \dots$ een andere schrijfwijze is voor het natuurlijk getal 1. "Wat een misvatting," schreef hij me, "natuurlijk mist er een kleinigheid tussen die twee getallen!" Ik heb F een aantal malen schriftelijk geprobeerd uit te leggen hoe je dit kunt begrijpen, maar op mijn redeneringen ging hij niet in. In een van mijn mails was ik zo onverstandig om het limietbegrip te gebruiken. Toen verweet F mij dat ik hem intimideerde. Typerend voor de discussie was het afsteken van steeds een klein beetje gewijzigde verhalen met het uitdagen van de verzoek om daar maar eens de fout in aan te wijzen.

Tuchtraad

De zeer getourmenteerde G doet het laatste ook regelmatig, maar het is toch weer een heel andere geschiedenis. G vindt dat de Nederlandse wiskundigen het didactisch en inhoudelijk helemaal verkeerd doen. Zo zouden we ons krachtig moeten bemoeien met de dwaze verkiezingssystemen die in de hele wereld gehanteerd worden, ook dient het roer in het onderwijs geheel omgegooid. Daar heeft G natuurlijk gelijk in, hij maakt soms goede opmerkingen die echter ingebed zijn in lange, aanvechtbare teksten. "Tussen droom en daad staan wetten in de weg en praktische bezwaren", maar G ziet dat anders. Hij schrijft naar KNAW, Tweede Kamer en nog wat invloedrijke instanties, maar er wordt weinig naar hem geluisterd. Een van zijn voorstellen is om een Tuchtraad voor Wiskundigen in te stellen, waarbij een van de eerste opdrachten is om het NAW eens onder handen te nemen. Ook moeten sommige wiskundeboeken uit de handel worden genomen. G schrijft soms zinnige dingen, maar draaft enorm door, doet persoonlijke aanvallen en



verkondigt zijn waarheid met de felheid van een oudtestamentische profeet. Jammer eigenlijk, dat de bevlogenheid van G niet voor ons vak kan worden aangewend.

Vogelcongres

Sommigen van de lezers zullen deze verhalen herkennen. Getaltheoretici krijgen regelmatig post in de trant van: "Die Wiles heeft dan wel de laatste stelling van Fermat bewezen, maar het kan in een half A-viertje, kijkt u maar." Typerend is dat deze briefschrijvers menen iets begrepen te hebben waar alle wiskundigen altijd over heen hebben gekeken. In de eventuele correspondentie ontstaat vaak een toon van verontwaardiging: "Legt u me maar eens uit waar ik een fout maak"; met de achterliggende gedachte: "Dat lukt u natuurlijk niet."

We moeten wel respectvol op de brieven ingaan, het zijn tenslotte geïnteresseerden in de wiskunde. Ook zit er soms iets waardevols in de beschouwingen, denk aan de briefschrijvers B, C en G. Vaak loopt de correspondentie echter op een onbevredigende manier af. Toen Frederik van der Blij nog als hoogleraar in Utrecht werkzaam was, timmerde hij veel aan de weg. Hij sprak voor leraren en hield vaak radiopraatjes. Dat leverde ook moeizame brieven op en hij verzuchtte eens: "We moesten eens een congres organiseren voor al deze mensen; we spreken zelf dan niet, luisteren veel en laten ze alle theorieën aan elkaar uitleggen." Het is er helaas niet van gekomen.

Met één vraag blijf ik nog zitten: bestaat er ook een glazen plafond voor deze vreemde vogels? Het waren alleen mannen die ik hierbij tegenkwam.



Wim Groen

Kortenhoeft

we-groen@casema.nl

Ed de Moor

Amsterdam

e.w.a.demoor@planet.nl

Geschiedenis

Meetkundeonderwijs tussen 1990 en 2007

Dit artikel is het laatste deel van een vierluik over de geschiedenis van het meetkundeonderwijs. Het eerste deel beschrijft het meetkundeonderwijs van vóór de invoering van de Mammoetwet (juninummer 2012). Het tweede deel gaat over kijkmeetkunde (decembernummer 2012). Het derde deel laat zien welke gevolgen de moderniseringsplannen uit de jaren zestig hadden voor het onderwijs in de jaren 1970 tot 1990 (maartnummer 2013). Het laatste decennium van de twintigste eeuw bracht ons in het onderwijs de basisvorming en de tweefasenstructuur. In het nu voorliggende vierde deel van de serie beschrijven Wim Groen en Ed de Moor hoe het met het meetkundeonderwijs ging in die turbulente tijden en daarna.

Nadat in het vwo de examenprogramma's voor wiskunde in 1985 waren aangepast, ging men aan de slag met de wiskundeprogramma's van het havo. De invoering van de nieuwe havoprogramma's vond plaats in 1990. Ook daar kwamen de vakken wiskunde A en wiskunde B; ook daar werd vectormeetkunde uit wiskunde B verwijderd ten gunste van een meer synthetische opzet van de (ruimte)meetkunde en ook daar werkte het streven door naar meer toepassingsgerichte wiskunde. Vooral voor de meetkunde wa-

ren dit grote veranderingen, omdat de algoritmisch getinte vectormeetkunde verdween en de meetkunde zich weer meer ging richten op de ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. Een handicap bleef wel het ontbreken van een geordend netwerk van stellingen in de onderbouw.

HAWEX (aanpassingen in het havo, 1990)

Het streven naar meer toepassingsgerichte wiskunde kwam ook tot uiting in de formulering van de programma's. Een novum was

dat zowel bij wiskunde A als bij wiskunde B de doelen van het wiskundeonderwijs expliciet gekoppeld werden aan zaken buiten de wiskunde. Zo lezen we: "Het programma wiskunde A heeft een algemeen vormend karakter en is gericht op het gebruik van wiskunde in de maatschappij. Het doel van wiskunde A is dat kandidaten *aan de werkelijkheid ontleende* problemen kunnen doorgronden en kunnen oplossen met behulp van wiskundige hulpmiddelen. Het programma wiskunde B is voornamelijk gericht op het gebruik van wiskunde in de exacte vakken"¹

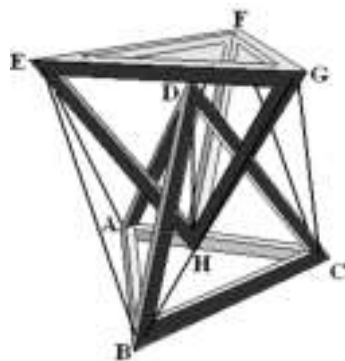
Voor 1990 bestonden examenprogramma's uit opsommingen van leerstofonderdelen. Hoe ver en hoe diepgaand die onderdelen moesten worden gedaan, kon je lezen in aparte toelichtende brochures of in de tijdschriften van de verenigingen van de vakdocenten. Ook de doelen van het wiskundeonderwijs werden toen apart in toelichtende bro-

In 1991 kreeg in het kader van de Nederlandse meubelprijzen het bijzettafeltje Cable-Table van Willem Scholten een eervolle vermelding.

Het bijzettafeltje bestaat uit twee even grote regelmatige piramiden waarvan alle ribben even lang zijn. De piramiden $ABCD$ en $EFGH$ worden door zeven stalen kabels van 1 mm dikte bij elkaar gehouden. De piramide $EFGH$ hangt met de top H naar beneden aan een kabel die verbonden is met de top D van de piramide $ABCD$.

Deze verticale kabel DH is op de foto van figuur 3 net te zien.

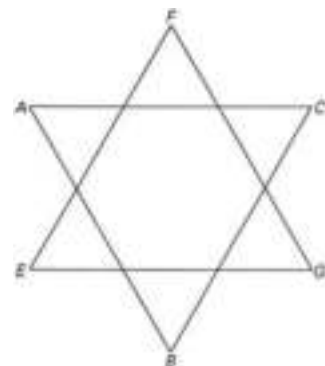
De bovenkant van het tafeltje is van glas.



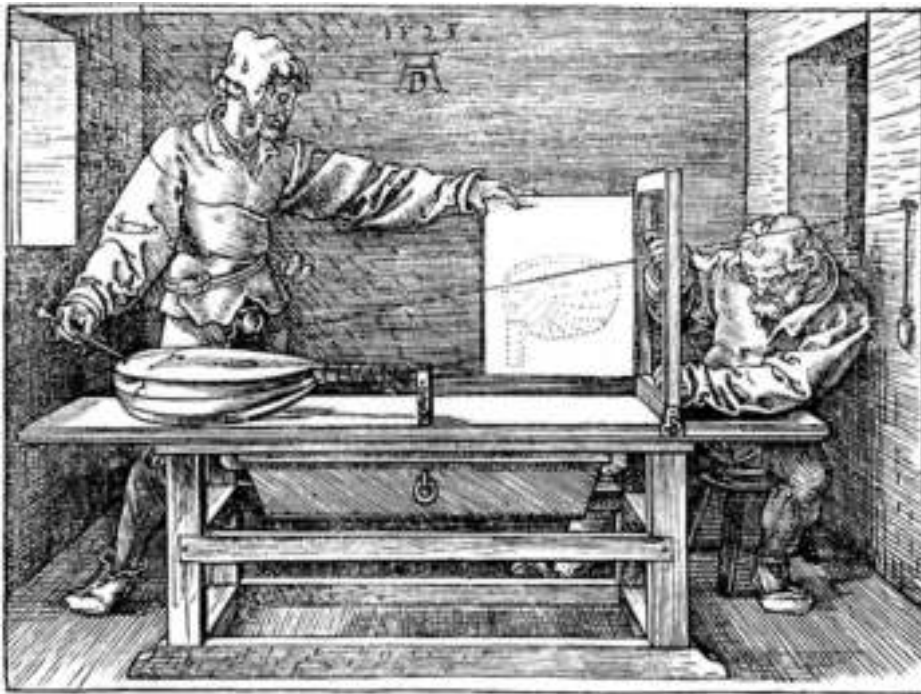
- Geef aan hoe de ligging is — evenwijdig, snijdend, kruisend — van de kabel AE ten opzichte van elk van de andere zes kabels.

- Een Cable-Table met ribben van 54 cm moet voor vervoer verpakt worden in een doos in de vorm van een regelmatig prisma waar de Cable-Table rechtop gezet precies in past met de glasplaat naar boven. De bodem van de doos is zeshoekig.

- Bereken de oppervlakte van de bodem van die doos in gehele cm^2 nauwkeurig. De hoogte van een Cable-Table met ribben van 54 cm is 50 cm.
- Bereken de lengte van de kabel DH in gehele mm nauwkeurig.



Figuur 1 Examenopgave (gedeeltelijk) havo wiskunde B 1993



Illustratie: Albrecht Dürer

Figuur 2 Teken in Perspectief

chures gepubliceerd. Vanaf 1990 vormen de opsommingen van de leerstofonderdelen en de daarmee nagestreefde doelen een (omvangrijk) geheel. Tot vreugde van de leerplanontwikkelaars kwam in het havo het streven naar een koppeling tussen praktische situaties en meetkunde ook in de eindexamens van meet af aan beter tot zijn recht. Kennelijk waren de ontwerpers van de examens inmiddels meer gewend geraakt aan contextrijke opgaven (zie Figuur 1).

Basisvorming en de gevolgen daarvan (1993)

Werkend aan de herziening van bovenbouwprogramma's van het havo beseften men natuurlijk dat het nogal vreemd was dat er sinds 1968 aan de onderbouwprogramma's niets meer was veranderd. De COW (Commissie Onderbouw Wiskunde) werd geïnstalleerd in november 1987, maar was haar werkzaamheden al in 1986 begonnen.² Zij moest zorgen voor een onderbouwprogramma dat een goede voorbereiding diende te geven op de zojuist aangepaste curricula van de boven-

bouw. Een belangrijk aandachtspunt van de commissie was tevens de *basisvorming* — een nieuwe structuur voor het onderwijs in de eerste drie leerjaren, die in 1993 zou worden ingevoerd. Het nieuwe onderbouwprogramma moest daarom een echte revolutie worden. Naast de voortdurende zorg voor de ontwikkeling van algebraïsche vaardigheden was de voorbereiding op de meetkunde van de bovenbouw natuurlijk een belangrijk punt. Daarbij moesten onderdelen van de al jaren daarvoor op het IOWO ontwikkelde kijkmeetkunde³ nu een reguliere plaats in het curriculum van de onderbouw krijgen. En waarachtig al in 1993, tegelijk met de invoering van de basisvorming, ging het nieuwe onderbouwprogramma de brugklas in.

In het *Achtergrondenboek*⁴, een uitgave van het Freudenthal Instituut en de SLO die de nieuwe programma's in een breder kader zet, worden voor meetkunde vier grote inhoudelijke gebieden genoemd, te weten:

1. *kijkmeetkunde* (kijklijnen, de rol van het standpunt, kijkhoeken, aanzichten en ver-

klaringen, afbeeldingen in soorten, constructies)

2. *meetkunde van vormen en figuren* (patronen, symmetrie, regelmaat, lichamen, doorsneden)
3. *meetkunde over plaatsbepalen* (situaties waarin plaatsen gecodeerd zijn aangegeven, coördinaten op aarde, plaatsbepaling op grond van twee gegevens door middel van een constructie)
4. *rekenen in de meetkunde* (oppervlakte, inhoud, afstanden, hoeken, vergrotingsfactoren, verhoudingen).

Hoewel in het *Achtergrondenboek* zeventig bladzijden gewijd worden aan de kijkmeetkunde, speelt de kijkmeetkunde in het definitieve programma maar een bescheiden rol. De herinnering aan de introductie van de verzamelingenleer in de schoolwiskunde in 1968 dringt zich op. Iedereen meende toen te weten dat in de schoolwiskunde “alles werd gedaan met verzamelingen”, maar in werkelijkheid speelden die verzamelingen, zeker na enige tijd, een geringe rol. De kijkmeetkunde wil benadrukken dat de meetkunde ook een intuïtieve oriëntatie op de wereld om ons heen tot doel heeft. Nieuw was die gedachte niet. De platonische opvatting dat meetkunde over abstracte objecten dient te gaan was immers — ook in het vwo — al lang verlaten. Datzelfde gold voor de gedachte dat het voornaamste doel van meetkunde het kennismaken met een deductief systeem is.

Een mooi voorbeeld van een toepassing van de kijkmeetkunde vinden we bij de uitleg van de manier waarop je van een voorwerp een perspectieftekening kunt maken op een doorzichtige plaat:

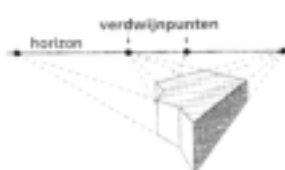
- Plaats het voorwerp achter een doorzichtige plaat.
- Geef het oog een vaste plaats voor de plaat.
- Teken op de plaat de contouren van het voorwerp zoals je dat vanuit het oogpunt ziet.

Deze methode is fraai in beeld gebracht in een prent van Albrecht Dürer (Figuur 2). In een wiskundeboek⁵ uit 1995 voor klas 3 vwo vin-

Lijnen in perspectieftekeningen en foto's lopen alleen evenwijdig als ze evenwijdig zijn aan het tekenvlak.

Lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, maar niet evenwijdig zijn aan het tekenvlak, gaan bij verlenging door één punt. Zo'n punt heet een *verdwijnpunt*.

In de tekening hiernaast liggen alle verdwijnpunten op de *horizon*.



Een toren heeft een plat dak in de vorm van een rechthoek. De zijden van die rechthoek zijn 4 m en 3 m.

In één van de hoekpunten is een antennemast geplaatst. Vanaf een punt, dat 6 m boven het dak ligt, is deze mast door kabels met de drie andere hoekpunten van het dak verbonden. Bij de aanleg had men 21 meter kabel omhoog gebracht. Was dat voldoende?



Figuur 3 Uit een meetkundeboek uit 1995

Figuur 4 Pythagoras in de praktijk

den we na een soortgelijke uitleg over perspectieftekenen de tekst die in Figuur 3 staat. Verdere theorie ontbreekt, zodat mogelijke inbedding in een meetkundige structuur niet wordt bereikt. Wel geeft een dergelijke aanpak aan hoe meetkunde een hulpmiddel kan zijn bij het verklaren van de eigenschappen van een bekende manier van afbeelden. De betekenis van de wiskunde voor het leven van alledag wordt getoond door de stelling van Pythagoras toe te passen op praktijkproblemen. In een boek⁶ uit 1994 van klas 2 havo vinden we bijvoorbeeld de opgave, die in Figuur 4 is afgebeeld.

En dit is maar een willekeurige greep uit de talloze lengte-, oppervlakte en inhoudsproblemen. Wie zich de wiskunde in de basisvorming heeft eigen gemaakt, kan de juiste hoeveelheid behang bestellen, weet hoeveel pakken graszaad er nodig zijn voor het gazon en kan ook berekenen hoeveel kubieke meter water er zit in een zwembad met een schuine bodem. Maar de opbouw van het onderbouwprogramma voor de meetkunde in de basisvorming is lastig te doorgronden. Weetjes, regels en afspraken vormen een bonte verzameling kennisbrokjes met niet al te veel samenhang.

Aanloop naar de vier profielen

Wie zou menen dat na de invoering van de basisvorming in 1993 de rust in het onderwijsveld was teruggekeerd, vergist zich. In het vwo leidde de bijna onbeperkte pakketkeuze tot zogenoemde pretpakketten. Bovendien was het voor de scholen lastig de talloze keuzemogelijkheden goed te organiseren. Vanaf 1993 werkte daarom de Stuurgroep⁷ Profiel Tweede Fase Voortgezet Onderwijs aan een herstructurering van het gehele onderwijs in het traject tussen de basisvorming en het hoger onderwijs. De voorstellen van deze stuurgroep leidden in 1998 tot een beperking van de vrije pakketkeuze en tot de invoering van vier profielen.

Voor het wiskundeonderwijs was vanaf 1993 de Studiecommissie Wiskunde B actief. Deze commissie boog zich over problemen die in het wiskundeonderwijs in die jaren speelden, zoals:

1. Is er in het vigerende programma voldoende aandacht voor redeneren en bewijzen?
2. Moet er meer of minder aandacht voor toepassingen zijn?
3. Welke rol gaat/moet de informatietechnologie spelen?
4. Is de relatie tussen vaardigheden/technieken en begripsvorming goed?
5. ...

De Studiecommissie wiskunde B⁸ beschreef in oktober 1994 na uitvoerig veldonderzoek, welke standpunten de verschillende betrokkenen (leraren, universitaire docenten, didactici) over dit soort problemen hadden. Van de docenten gaf 55% aan dat meer aandacht voor redeneren en bewijzen in wiskunde B gewenst was; van de universitaire docenten was dat zelfs 78%.

In het profiel Natuur en Techniek was wiskunde B een kernvak. Om in dat vak meer aandacht te kunnen geven aan bewijzen en redeneren werd ruimtemeetkunde aanbevolen als een geschikte werkomgeving. De commissie schrijft: "Constructies in ruimtefiguren die niet rechtstreeks gekoppeld zijn aan concrete objecten, versterken de behoefte aan zekerheid door middel van redenering en bewijs. Een bescheiden stelsel van grondregels moet de leerling in staat stellen enige ervaring op te doen met het spel der deductie. Bewijzen uit het ongerijmde (bijvoorbeeld ter adstructie van het kruisen van twee lijnen) verdienen expliciete aandacht."⁹

Een ironisch trekje van de geschiedenis is dat daardoor circa veertig jaar na de conferentie in Royaumont (waar Euclides in de ban werd gedaan) een herwaardering van de euclidische meetkunde optrad. Zo kreeg Duparc¹⁰ in zekere zin toch nog gelijk.

Meetkunde in de profielstructuur

De ideeën van de studiecommissie werden nader uitgewerkt en ingevuld door de Stuurgroep Tweede Fase. Vanaf 1998 kwamen er daardoor in het wiskundeonderwijs ook weer de nodige aanpassingen. Omdat in de onderbouw — ook in het basisvormingsprogramma — weinig systematisch meetkundig gereedschap werd aangeboden om de kunst van het bewijzen op een aanvaardbare manier te beoefenen, moest er in de bovenbouw iets gebeuren om die leemte aan te vullen. Zo kwamen er in het profiel Natuur en Techniek twee wiskunde B-vakken, namelijk wiskunde B1 en wiskunde B1,2. Hierin is B1 een deelverzameling van B1,2. In B1 zien we het domein meetkunde (en dat is dan een deel van de ruimtemeetkunde uit het wiskunde B-programma van 1985). In wiskunde B1,2 zien we ook nog *voortgezette meetkunde*. Daarin zien we onder andere de subdomeinen 'Bewijzen in de vlakke meetkunde' en 'Afstanden en grenzen'.

Door de introductie van wiskunde B1,2 wordt in 1998 de mogelijkheid geschapen weer meer werk te maken van redeneren en bewijzen in de context van de vlakke meetkunde. Doelstellingen die daarvoor in het exa-

menprogramma staan, zijn bijvoorbeeld: De kandidaat kan:

1. Het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling.
2. Het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling.
3. ...
4. Meetkundige situaties exploreren, met name aan de hand van constructies met een geschikt computerprogramma, een vermoeden in de vorm van een (te bewijzen) stelling formuleren.
5. ...
6. Een gebiedsindeling bij een gegeven verzameling punten tekenen op grond van het naastebuurprincipe en zo'n indeling gebruiken in diverse contexten.
7. ...

Als bijlage bij de examenprogramma's verschijnt een lijst van stellingen en definities waarnaar een kandidaat op het examen mag verwijzen bij een door hem/haar gegeven redenering. In die lijst treffen we definities aan van begrippen als de middelloodlijn, middenparallel en de parabool met brandpunt F en richtlijn l . Onder de talrijke stellingen vinden we natuurlijk de congruentiegevallen en stellingen over bijzondere lijnen in een driehoek. Maar ook stellingen over hoeken en bogen, zoals:

Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die dezelfde koorde insluit als de omtrekshoek. (sic!)

Ook de koordenvierhoek wordt apart genoemd met als stelling:

Als de som van een paar overstaande hoeken van een vierhoek 180° is, dan is de vierhoek een koordenvierhoek.

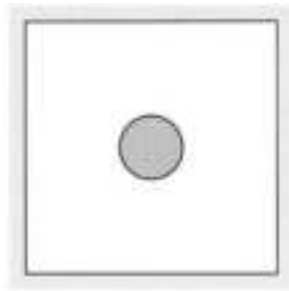
In de aanloop naar 1998 werd er door ontwikkelaars onderzocht welke delen van de vlakke meetkunde geschikt zouden zijn om in het curriculum op te nemen. Dat daarbij een aantal klassiekers terugkeerde, blijkt wel uit de doelstellingen waarvan we er hierboven enkele noemden. Maar er kwam (zie doelstelling 6) ook een nieuw gebied bij: de meetkunde van het *naastebuurprincipe*. Dit principe, dat ten grondslag ligt aan de zogenoemde *Voronoi-betegeling*, leek vooral interessant vanwege de toepassingen die in de huidige tijd zouden kunnen aanspreken, zoals territoriumconflicten en de verdeling van het continentale plat. De *conflictlijn* — de meetkundige plaats van punten die even ver liggen van twee figuren — speelt hierbij een belangrijke

In een vierkante museumzaal staat een grote zuil. De inrichtingscommissie wil in de vloerbedekking kleurvlakken aanbrengen die begrensd worden door conflictlijnen van de wanden onderling en van de wanden en de zuil.

a Teken in de plattegrond de grenslijnen in het gedeelte van de zaal waar de zuil nog geen rol speelt.

b Teken conflictlijnen van de zuil met de muren.

c Geef de verschillende kleurvlakken aan.



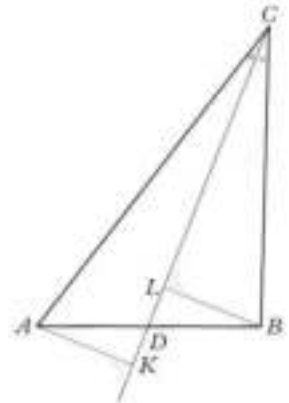
Figuur 5 Opgave over conflictlijnen (1999)

In de figuur zie je weer driehoek ABC met de deellijn uit hoek C . Je kunt de gelijkheid $AD:BD = AC:BC$ ook aantonen door gelijkvormige driehoeken te gebruiken.

a Noem twee paar gelijkvormige driehoeken in de figuur.

b Gebruik het ene paar gelijkvormige driehoeken en toon aan dat $AD:BD = AK:BL$.

c Gebruik nu het andere paar gelijkvormige driehoeken en voltooi het bewijs.



Figuur 6 Bewijzen en redeneren in 5 vwo (1999)

rol. Opvallend was dat ook de kegelsneden als conflictlijnen weer in het programma terugkeerden. Daardoor komen de meetkundige eigenschappen van deze krommen in het huidige programma nadrukkelijker naar voren dan vroeger het geval was.

In Figuur 5 staat een voorbeeld van een opgave over conflictlijnen uit een meetkundeboek (*Netwerk*¹¹) uit 1999 voor voortgezette meetkunde. Zeker moet ook genoemd worden dat vanaf 1998 het gebruik van interactieve computerprogramma's zoals Cabri of Geogebra bij het doen van verkennend meetkundig onderzoek meer en meer tot de standaardprocedures ging behoren. Bij een schoolboek als *Netwerk* werd Cabri meegeleverd en bevatte elk hoofdstuk twee afsluitende pagina's om met behulp van dit programma meetkundig onderzoek te doen. Uit hetzelfde boek een voorbeeld van een opgave over bewijzen en redeneren (Figuur 6).

Wie zijn middelbare schoolopleiding voor 1970 heeft afgerond, zal zich ongetwijfeld de stelling die in Figuur 6 wordt afgeleid nog wel herinneren. Hier wordt de afleiding van de stelling gebruikt als oefening in het bewijzen en redeneren. Ooit behoorde deze stelling tot de leerstof van de tweede klas van het vwo; nu is dit bewijs een onderdeel van het domein 'bewijzen en redeneren in de vlakke meetkunde' in de bovenbouw.

Ook in de eindexamens komen in het eerste decennium van de 21ste eeuw opgaven voor die vragen naar een bewijs van een meetkundige eigenschap. In Figuur 7 bijvoorbeeld een opgave uit 2009.

Aan deze voorbeelden is te zien dat in de periode 1998 tot 2007 de klassieke meetkunde in beperkte mate is teruggekomen. De examenopgaven uit het eerste decennium van de 21ste eeuw bevatten vaak problemen over

koordenvierhoeken, cirkels en conflictlijnen. In die context worden van de leerlingen *lokale deductieve redeneringen* gevraagd. Voor de (inmiddels zeer) ouderen komen allerlei uit het verleden bekende zaken weer voorbij. Een groot verschil met de vroegere situatie is dat voor 1968 het systeem van definities en stellingen in de onderbouw werd ontwikkeld en verankerd. Nu is de meetkunde in de onderbouw een grabbelton van methoden en aanpakken waar moeilijk een systeem in te ontdekken valt. Definities en stellingen die je mag gebruiken worden grotendeels pas in de bovenbouw behandeld. Dat de examenmakers dit ook beseffen, blijkt uit de hierboven al genoemde lijst van definities en stellingen die bij de examendoelstellingen hoort.

2007 en verder

In 2007 heeft weer een herschikking van de diverse wiskunde-examenonderdelen plaatsgevonden en sindsdien spreken we van de hernieuwde tweede fase. Het onderscheid tussen wiskunde B1 en B1,2 is verdwenen. We kennen nu wiskunde A, B, C en D. In wiskunde B zien we als domein Gb de voortgezette meetkunde terug. Dit domein heeft twee subdomeinen, namelijk Gb1 'Oriëntatie op bewijzen' en Gb2 'Constructies en bewijzen in de vlakke meetkunde'. In de beknopte omschrijving van deze subdomeinen vinden we voor Gb1 de woorden: "De kandidaat kan definities, vermoedens, stellingen en bewijzen onderscheiden, meetkundige situaties exploreren, een vermoeden of te bewijzen stelling formuleren en bewijzen of weerleggen." En voor Gb2: "De kandidaat kan constructies uitvoeren en bewijzen geven."

Deze wijziging is slechts een herschikking van wat sinds 1998 al aan de orde kwam. Uit het programma wiskunde B is de ruimtemeet-

kunde verdwenen. Die vinden we terug in wiskunde D. Daar treffen we ook een stuk analytische meetkunde aan en enige theorie van de kegelsneden. Voor wiskunde D wordt geen centraal schriftelijk examen afgenomen.

Overzicht

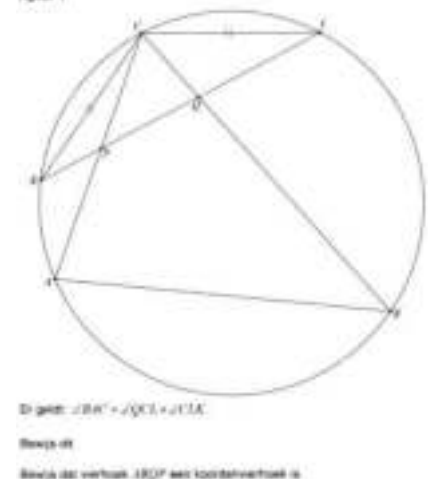
Ten slotte geven we een schematische samenvatting van de wijzigingen in het wiskundeonderwijs die hiervoor zijn beschreven. Zie kader.

Epiloog

Hiermee sluiten een reeks van vier artikelen over het meetkundeonderwijs van de twintigste eeuw in Nederland af. Eerder verschenen de stukken 'Meetkunde op gymnasium en hbs 1900–1968' (juninummer 2012), 'Kijk-meetkunde, een ander uitgangspunt (1970–

Gegeven is driehoek ABC met als omschreven cirkel. Aan een wisselende van C liggen de punten E en F op de omschreven cirkel zo dat $\angle ECF = \angle C$. De lijnen AE en BF snijden de zijden AC en BC in P en Q . Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

Figuur 1



Figuur 7 Meetkundeopgave uit het examen wiskunde B1,2 vwo 2009

Wijzigingen in het wiskundeonderwijs

1958

Hbs en gymnasium krijgen hetzelfde wiskundeprogramma. Afschaffing beschrijven de meetkunde op de hbs. Analytische meetkunde nu zowel op hbs als gymnasium. Differentiaal- en integraalrekening in het examenprogramma. Intuïtieve inleiding in de meetkunde algemeen aanvaard. De eerste experimenten met transformatiemeetkunde in de onderbouw.

1961

Installatie van de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde). Wiskundeprogramma's moeten beter aansluiten bij de wetenschappelijke wiskunde en meer toepasbare onderwerpen bevatten.

1961–1968

Leerstofexperimenten op aanwijzingen van CMLW: transformatiemeetkunde, gemoderniseerde algebra, analyse en vectormeetkunde voor de bovenbouw. Formulering van het programma dat in 1968 van start gaat. Vakinhoudelijke nascholing van docenten.

Vanaf 1968

Mammoetwet: atheneum (vwo), havo en mavo. Verzamelingstaal. In de onderbouw meetkunde met transformaties en vectoren, meer aanschouwelijk, maar minder systematisch. Klassieke meetkundige bewijzen zijn grotendeels verdwenen. In de bovenbouw: wiskunde I (analyse, kansrekening en statistiek) en wiskunde II (lineaire algebra). In de bovenbouw geen vervolg van de (klassieke) meetkunde; daardoor ook in onderbouw meetkunde onderbelicht. In de havo-examens algoritmisch getinte vectormeetkunde.

1971–1981

Op het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO) worden ideeën en praktisch materiaal ontwikkeld voor *meetkunde op de basisschool* en voor kijkmeetkunde voor de brugjaren van het voortgezet onderwijs.

1985

Hervorkaveling van de bovenbouwprogramma's vwo (HEWET). Introductie wiskunde B (analyse en ruimtemeetkunde), en wiskunde A (analyse, matrixrekening en statistiek en kansrekening). Onderbouw ongewijzigd; daardoor gebrekkige voorbereiding op de ruimtemeetkunde. Wiskunde A sterk toepassingsgericht. Havoprogramma ongewijzigd.

1990

Aanpassing bovenbouwprogramma's havo (HAWEX). Vectorrekening vervangen door ruimtemeetkunde. Onderbouwprogramma's ongewijzigd.

1993

Start basisvorming. Nieuw programma voor de onderbouw: wiskunde 12–16. Vier aandachtsgedebieden voor meetkunde: kijkmeetkunde, vormen en figuren, plaatsbepalen en berekeningen. Geen overzichtelijk arsenaal van stellingen. Toepassingen in de sfeer van berekeningen. Voorzichtige terugkeer van de klassieke meetkunde.

1998

Introductie vier profielen in de bovenbouw. In profiel Natuur en Techniek wiskunde B1 en B1,2. In B1 ruimtemeetkunde; in B1,2 voortgezette meetkunde. Meer nadruk op redeneren en bewijzen; voortgezette meetkunde is daarvoor een aanbevolen context. Gebruik van computerprogramma's bij meetkundig onderzoek. Introductie van naastebruinprincipe en Voronoi-cellen. Bij het examenprogramma wordt een lijst gemaakt van te gebruiken stellingen en definities.

2007

Herschikking van de examenonderdelen. Introductie wiskunde A, B, C en D. In wiskunde B 'oriëntatie op bewijzen' en 'constructies en bewijzen in de vlakke meetkunde.' Ruimtemeetkunde naar wiskunde D.

naamde New Math beïnvloed werd. Abrupt werd toen gebroken met de eeuwenlange traditie van de euclidische meetkunde. Over de didactiek van de meetkunde waren in de halve eeuw daaraan voorafgaand scherpe discussies gevoerd (zie deel 1 van deze reeks). Aan de ene kant stonden degenen, die een 'intuïtieve' en 'aanschouwelijke' introductie — al op jonge leeftijd — voorstonden. Aan de andere kant was er een meer behoudend 'kamp' dat meende dat er ook voor het aanvankelijke meetkundeonderwijs geen concessies gedaan mochten worden aan een zo streng mogelijk logisch-deductief systeem volgens de axiomatische meetkunde aanpak van Euclides. Het wonderlijkste van de omslag in 1968 is wel dat deze discussie opeens stilviel en dat zowel wiskundig als didactisch Nederland 'blind' leken mee te gaan in de opvatting over wiskunde leren vanuit formele wiskundige structuren. Voor de meetkunde — in het bijzonder de aanschouwelijke kant daarvan — was dat de nekslag, omdat de kern van alle denken en handelen gericht werd op structuren en algoritmen.

Maar een consolidatie in die richting is in de laatste halve eeuw allerm minst opgetreden. Integendeel, het overzicht in het kader hebben we in grote stappen laten zien welke nieuwe veranderingen zich in vrij korte tijd voltrokken hebben en welke oorzaken of toevalligheden daaraan ten grondslag lagen. Wettelijk zijn er steeds weer nieuwe programma's en eindexameneisen vastgesteld. Terugblikkend kunnen we niet anders spreken dan van een onsamenhangend ontwikkelingsbeleid. Het ontbrak aan afstemming tussen basisonderwijs en het voortgezet onderwijs, zowel vakinhoudelijk, vakdidactisch als programmatisch. Nog sterker was dit tussen de verschillende soorten van het voortgezet onderwijs, waarbij vooral mavo en lbo tussen wal en schip raakten.

De kern van deze historische analyse is het feit dat meetkunde als schoolvak steeds verder op de achtergrond raakte. De poging om het vak via vectormeetkunde een plaats te geven blokkeerde het doel om het ruimtelijk voorstellingsvermogen te activeren. Praktische meetkundige toepassingen verzandden in stereotype (reken)vraagstukken. De thema's als koordenvierhoeken en conflictlijnen zoals die de laatste jaren in de eindexamenprogramma's voorkomen zijn op zich zinvol en bieden de mogelijkheid tot lokaal deductief redeneren, maar wij vragen ons af of sommige onderdelen hiervan niet eerder aan de orde gesteld kunnen worden en of er wel voldoende voorbereiding in de voorgaan-

1980)' (decembernummer 2012) en 'Meetkunde, stiefkind van het wiskundeonderwijs (1970–1990)' (maartnummer 2013). Wij (de auteurs De Moor, Groen en Kemme) hebben getracht de historische ontwikkeling van dit vak van onderwijs gedurende genoemd tijdperk te ontrafelen.

Was meetkunde — vooral als voorbeeld van een deductief systeem — eeuwenlang een constante in het onderwijs, in de jaren zestig van de twintigste eeuw werd plotse-ling gebroken met deze traditie. Een van de meest ingrijpende veranderingen voltrok zich in 1968 toen ook Nederland door de zoge-

de leerjaren heeft plaatsgevonden. De traditionele meetkunde biedt — juist door het aanschouwelijke en intuïtieve karakter — als geen ander onderdeel van de elementaire wiskunde de mogelijkheid tot logisch redeneren en dit is verdwenen uit het onderwijs. Enerzijds komt dat door de genoemde revolutie in de jaren zestig, anderzijds doordat dit technologische tijdperk steeds meer aandacht eist voor de getalsmatige en algoritmische aspecten van de wiskunde.

Het is misschien wel een ongelukkige beslissing geweest om algebra en meetkunde als aparte vakken op te heffen. Meetkunde heeft niet meer die prominente plaats in het wiskundeonderwijs als vijftig jaar geleden. Dit is in zekere zin begrijpelijk, maar wiskunde is van oudsher de studie van getal én ruimte. Beide elementen zijn van belang om het wiskundig denken te ontwikkelen. Grote wiskundigen als Henri Poincaré (1854–1912), Harold Coxeter (1907–2003) en de eminente wiskundededidacticus György Pólya (1887–1985) heb-

ben gewezen op het belang van het visuele denken en de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Veel praktische problemen zijn zonder ruimtelijk inzicht niet op te lossen en ook in de algebra maken we vaak gebruik van meetkundige modellen. Ook het afbeelden van figuren gaat niet zonder meetkundig inzicht en zo zijn er meerdere redenen om meetkunde niet als stiefkind te behandelen.

We lieten bij deze opsomming de aspecten van het leren bewijzen, het inzicht in wat een axiomatisch systeem is nog achterwege. Dat was nu juist de kern van de discussie tussen Tatjana Ehrenfest-Afanasjeva en Eduard Dijksterhuis gedurende de jaren twintig en dertig van de vorige eeuw. Mevrouw Ehrenfest zag als ideaal een meetkunde-curriculum dat al voor kinderen vanaf de leeftijd van tien jaar zou aanvangen met een intuïtieve inleiding, daarna over zou gaan in een meer systematische cursus voor de 12- tot 16-jarigen om te eindigen met een strikt axiomatische leer-

gang aan het eind van de middelbare school (zie deel 1 van deze reeks). Vanaf de jaren zeventig zijn daartoe wel pogingen ondernomen, maar we moeten constateren dat het niet gelukt is tot een werkelijk doorgaande leerlijn te komen. Inhoudelijk en vakdidactisch passen de soms fraaie deelprojecten niet in een doorlopende leerlijn. Het geheel overziende zien we een fragmentarisch opgezet meetkundeonderwijs waaraan fundamentele uitgangspunten en duidelijke doelen ontbreken. Wellicht dat na honderd jaar nieuwe denkers als mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis moeten opstaan om meetkunde als belangrijk, uitdagend en prachtig vak van onderwijs opnieuw aan de orde te stellen. ←

Dankwoord

De auteurs danken Sieb Kemme, Martin Kindt, Ilan Kisch en Douwe Kok voor hun kritiek op de eerste versie van dit artikel.

Noten

- 1 Uitleg, 14 maart 1990, p. 35 en 37.
- 2 Zie ook *Euclides* 87(7), pp. 317–320.
- 3 Ed de Moor en Wim Groen, Kijkmeetkunde een ander uitgangspunt (1970–1980), *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13(4), 2012, 248–253.
- 4 Team W12–16, *Achtergronden van het nieuwe leerplan. Wiskunde 12–16, band 1 en 2*, Freudenthal Instituut / SLO, Utrecht en Enschede, 1992.
- 5 *Moderne wiskunde*, 6e editie, 3 vwo, p. 31.
- 6 *Moderne wiskunde*, 6e editie, 2 havo–vwo, p. 95.
- 7 Negen (aanvankelijk tien) personen uit diverse onderwijsgebieden. Leden van de commissie zijn onder anderen mevrouw Ginjaar-Maas (oud-staatssecretaris van onderwijs) en mevrouw Visser 't Hooft (rector van een scholengemeenschap).
- 8 J. de Lange e.a., *Rapport Studiecommissie Wiskunde B vwo*, Freudenthal Instituut, Utrecht, 1994.
- 9 *Rapport Studiecommissie*, p. 70.
- 10 Ed de Moor en Sieb Kemme, Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13(2), 2012, 102–109.
- 11 *Netwerk*, vwo bovenbouw, wiskunde B2, Wolters-Noordhoff, 1999.

In de verdediging

| In defence



Variational Modeling of Parabolic Free Boundary Problems

Martijn Zaal

Het afgelopen jaar was Martijn Zaal het agenda- en nieuwsredactielid van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Dit was een naar eigen zeggen plezierige en leerzame taak die hij naast zijn promotieonderzoek op zich had genomen. Inmiddels is hij op 24 april 2013 gepromoveerd bij Joost Hulshof aan de Vrije Universiteit Amsterdam en is hij sinds begin mei als postdoc werkzaam bij het Institut für Angewandte Mathematik van de Universiteit van Bonn.

Het opzwellen van een cel door osmose

In zijn proefschrift *Variational Modeling of Parabolic Free Boundary Problems* onderzocht Zaal aan de hand van een eenvoudig model het opzwellen van een cel door osmose. Binnen in de cel zit zout in water opgelost; het zout in deze oplossing wordt voorgesteld als een massa $u(x, t)$ die zich binnen de cel gedraagt volgens de diffusievergelijking:

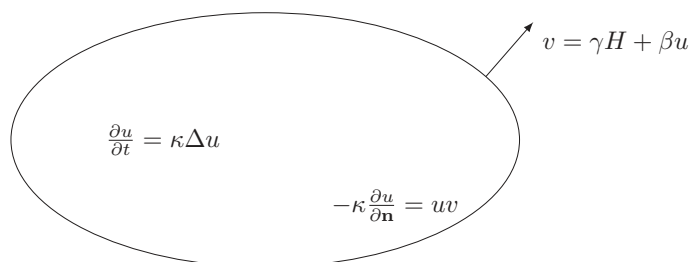
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u, \text{ voor } x \in \Omega(t), t > 0.$$

Hierbij is $\kappa > 0$ een parameter. De rand $\partial\Omega$ van het domein ofwel de cel Ω stelt het celmembraan voor, dat wel water doorlaat, maar geen zout. Door de oppervlaktetension van het celmembraan en het verschil in zoutconcentratie tussen de binnen- en de buitenkant zal de cel water gaan absorberen, waardoor de vorm van de cel verandert. Wiskundig gezien verandert het domein Ω voor de (parabolische) partiële differentiaalvergelijking dus als functie van de tijd t , wat het probleem tot een zogenaamd vrije-randprobleem maakt.

Op de rand geldt een randvoorwaarde die oplegt dat de normale componenten (loodrecht op $\partial\Omega$) van de snelheid waarmee de rand $\partial\Omega$ zélf en de massa u aan die rand bewegen gelijk zijn:

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = uv$$

met v de snelheid van het celmembraan in de normale richting. Dit is equivalent met de standaard *no flux* Neumann-randvoorwaarde: het



Een schematische voorstelling van de cel

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.
Heeft u tips voor deze rubriek of bent u zelf pas gepromoveerd?
Laat het weten aan onze redacteur.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
verdediging@nieuwarchief.nl

zout kan het membraan niet passeren en beweegt daardoor dus mee met de rand.

In het model beweegt het membraan door een combinatie van oppervlaktespanning (die lineair afhangt van de gemiddelde kromming H van het membraan: $H = -\frac{n-1}{r}$ voor een sfeer met straal r in $\mathbb{R}^n$) en een concentratieverschil (onder de aanname dat er geen zout buiten de cel is, is dit verschil de waarde van u op de rand). Die combinatie resulteert in de modelvergelijking $v = \gamma H + \beta u$ op $\partial\Omega$, met parameters $\beta, \gamma > 0$.

Gradient flow

Het blijkt dat dit probleem een gradient flow-achtige structuur heeft. Een *gradient flow* is een vergelijking die probeert een bepaalde vrije energie zo snel mogelijk klein te maken, denk aan een wandelaar in een berglandschap die steeds het steilste pad naar beneden volgt om zijn hoogte zo snel mogelijk te laten afnemen. Voor Zaal's osmose-probleem bestaat ook zo'n vrije energie: de (negatieve) Boltzmann-entropie plus de oppervlakte van het membraan. Het voordeel van een gradient flow-structuur is dat er vaak bepaalde constructies, de variationele methoden uit de titel van het proefschrift, gebruikt kunnen worden om oplossingen te vinden. Om dit te doen is er behalve een vrije energie ook een afstandsstructuur ofwel een metriek nodig, in het geval van de bergbeklimmer horizontale afstanden tussen punten in het berglandschap. In het geval van osmose blijkt dit net fout te gaan. Verrassend is dat de constructie ondanks dat toch blijkt te werken.

Fysische intuïtie met een positief en een 'negatief' resultaat

Het belangrijkste resultaat uit zijn proefschrift is volgens Zaal de laatste stelling uit hoofdstuk 5, die zegt dat de constructie een oplossing oplevert. Deze stelling is het resultaat waar hij bijna vanaf het begin van zijn onderzoek naar op zoek is geweest. Zaal kreeg opeens een ingeving over een technische truc die hij kon toepassen, waardoor het probleem vrijwel volledig ontkoppelde tot twee problemen die los van elkaar veel eenvoudiger zijn. Een geweldig moment, aldus Zaal. Het mooie aan deze ingeving vindt hij dat het op het eerste gezicht om een nogal vergezochte truc gaat, maar dat er, als je er iets beter naar kijkt, intuïtie achter zit die één-op-één is terug te voeren op de natuurkunde waarop het probleem is gebaseerd.

De voor de hand liggende metriek voor zijn osmose-probleem bleek niet te voldoen aan de vereiste axioma's. Om beter te begrijpen waarom dit het geval was en waarom de constructie dan toch werkte, heeft Zaal ook gekeken naar de *mean curvature flow*, de vergelijking voor oppervlakken die bewegen onder oppervlaktespanning. Met behulp van zogenaamde lengte-structuren heeft hij bewezen dat een afstandsbegrip met de juiste eigenschappen voor de mean curvature flow niet kan bestaan.

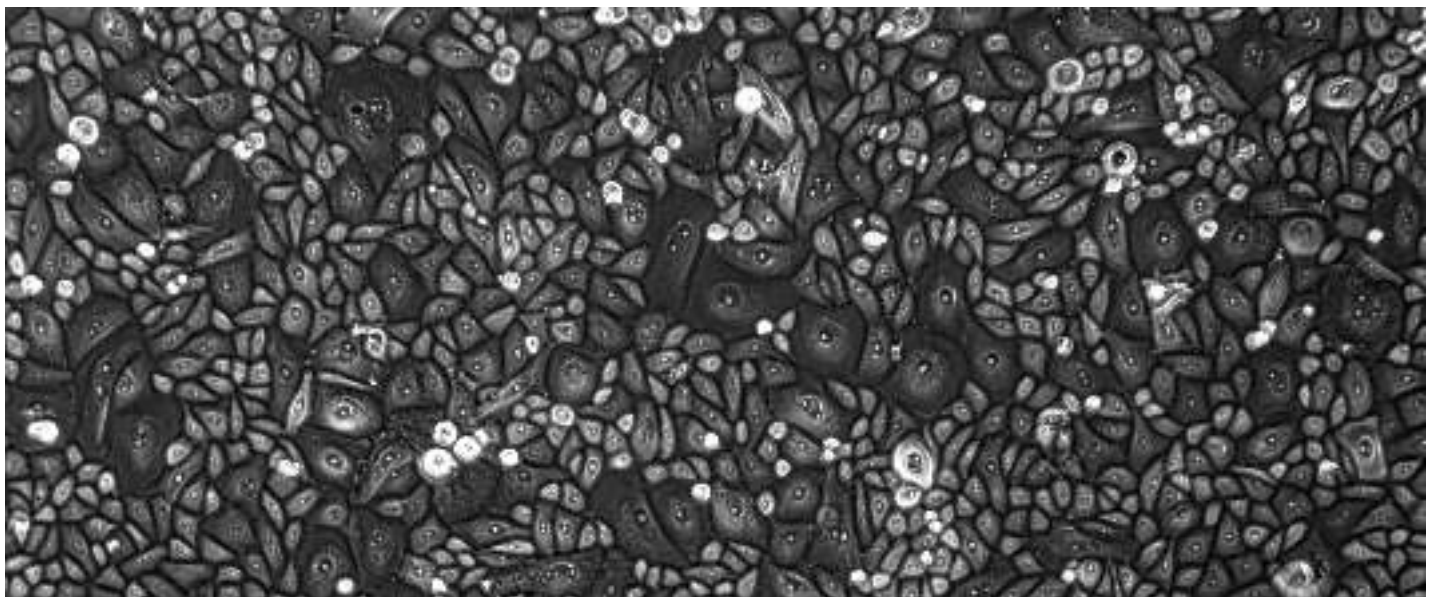
Ook hierbij was fysische intuïtie de sleutel. Nadat hij enkele maanden tevergeefs had geprobeerd een bepaalde schatting rond te krijgen, begreep Zaal plotseling waarom dit niet lukte, en dat de natuurkunde achter het probleem eigenlijk heel eenvoudig laat zien dat de schatting niet waar kan zijn. Hij moest dus iets veranderen aan de methode om een oplossing voor het probleem te construeren. Hoewel dit uiteindelijk dus gelukt is, beschrijft Zaal de periode waarin hij met dit probleem bezig was wel als een moeilijke tijd.

Samenwerken

Al vrij snel ging zijn onderzoek een andere kant op dan verwacht, waardoor Zaal veel theorie zelf heeft moeten ontdekken en ook veel met onderzoekers van buiten de VU heeft gewerkt. Zijn promotor Joost Hulshof speelde hierbij een belangrijke rol: Hulshof bracht Zaal steeds met mensen in contact en samen bespraken ze geregeld de nieuwe theorie waarmee Zaal bezig was. Deze discussies en de vragen die Hulshof stelde waren uiteindelijk cruciaal voor het bewijzen van de stellingen in het proefschrift.

Zaal vond het erg interessant en leuk om samen te werken met zo veel verschillende mensen. Daarnaast beleefde hij ook veel plezier aan het reizen voor workshops, summerschools en congressen en aan de Nederlandse en Junior Wiskunde Olympiades waaraan hij meewerkte, met de IMO 2011 als hoogtepunt.

De onderwijstaken die hij naast zijn onderzoek had kostten soms veel tijd maar gaven altijd veel voldoening. Het kan lastig zijn om wiskunde uit te leggen, zeker als de studenten de wiskundevakken in eerste instantie erg moeilijk vinden. Zaal kan er echt van genieten als het dan toch lukt om de stof goed over te brengen. Het zal de lezer dan ook niet verbazen dat hij hoopt op een verdere loopbaan in de (Nederlandse) wiskundewereld.



Johan Deprez

Faculteit Economie en Bedrijfswetenschappen, Hogeschool-Universiteit Brussel

Instituut voor Onderwijs- en Informatiewetenschappen, Universiteit Antwerpen

Specifieke Lerarenopleiding wiskunde, KU Leuven

johan.deprez@ua.ac.be

Boekbespreking Handboek wiskundendidactiek

Gemeenschappelijke inspanning zet wiskundendidactiek op de kaart

Het in 1974 verschenen boek *Didactiek van de wiskunde* van Joop van Dormolen kreeg vorig jaar een opvolger in het *Handboek wiskundendidactiek*, geschreven door Nederlandse wiskundendidactici. Desgevraagd werpt een Vlaamse collega een frisse blik op de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs bij de noorderburen. Johan Deprez is hoofddocent wiskunde in het economisch hoger onderwijs aan de Hogeschool-Universiteit Brussel. Daarnaast is hij verbonden aan de universitaire lerarenopleidingen wiskunde van de Universiteit Antwerpen en de KU Leuven als respectievelijk vakdidacticus en praktijkassistent. Hij verricht onderzoek op het vlak van het gebruik van toepassingen in wiskundelessen. Hij volgt sinds midden jaren tachtig het Nederlandse wiskundeonderwijs vanaf de zijlijn.

In juni 2012, bijna veertig jaar na het klassieke boek van Joop van Dormolen, verscheen een boek dat zich als opvolger presenteert: een nieuw *Handboek wiskundendidactiek*. Dit werk is het resultaat van een gemeenschappelijke inspanning van twaalf universitaire wiskundendidactici die lesgeven aan eerstegraadslerarenopleidingen. Dit grote aantal auteurs verklaart wellicht waarom de redactie buiten Nederland ging aankloppen voor een recensie.

Het handboek is een klapper geworden van een kleine 400 bladzijden, met elf hoofdstukken, die geschreven zijn door wisselende auteursteams. Eerst wordt een theoretisch kader geschapen, daarna komen verschillende deelgebieden uit de schoolwiskunde aan bod (algebra, analyse, meetkunde, kansrekening en statistiek), en tot slot passen een aantal algemene onderwerpen de revue (modelleren, het gebruik van ICT, toetsen en wiskundige denkactiviteiten). Om de lengte van zo'n hoofdstuk binnen de perken te houden, wordt meestal exemplarisch ge-

werkt. Het hoofdstuk over algebra beperkt zich dan bijvoorbeeld tot variabelen en vergelijkingen, en de twee hoofdstukken over analyse behandelen de begrippen functie en afgeleide. Verschillende elementen zorgen voor eenheid over de verschillende auteursteams heen: elk hoofdstuk is opgebouwd uit dezelfde onderdelen (oriëntatie, probleemstelling, probleemverkenning, wat we al weten, ontwerpen en conclusie), de basisideeën uit het inleidende hoofdstuk worden verder geconcretiseerd in de volgende hoofdstukken en er zijn geregelde kruisverwijzingen tussen de hoofdstukken.

Het handboek is een generalistische inleiding in de wiskundendidactiek die in de eerste plaats is bedoeld voor studenten uit de eerstegraadslerarenopleidingen. Een lerarenopleiding is gericht op het uitoefenen van een beroep en moet daarom een sterke praktijkoriëntatie hebben. Als het om een opleiding op masterniveau gaat, dan moet ze bovendien ook duidelijk academisch gericht

zijn. We mogen dan ook verwachten beide oriëntaties aan te treffen in het handboek.

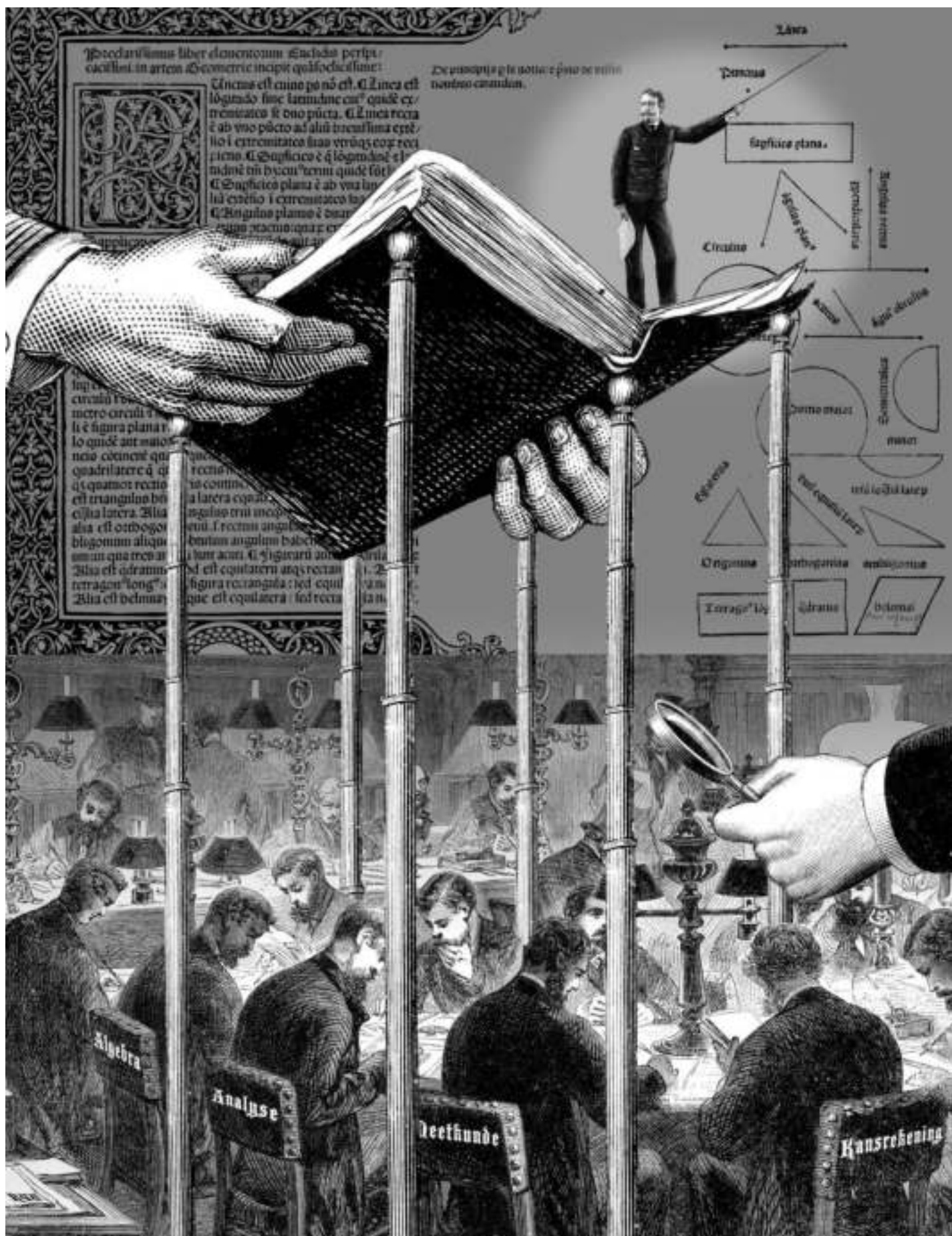
Academisch ...

Elk hoofdstuk bevat een flinke brok wetenschappelijk, vakdidactisch onderzoek over het thema van dat hoofdstuk. In het hoofdstuk over variabelen en vergelijkingen bijvoorbeeld, lezen we in de 'oriëntatie' over problemen die in Nederland vastgesteld werden met algebra. In de 'probleemverkenning' maken we kennis met mogelijke oorzaken voor de moeilijkheden. Daarbij wordt gebruik gemaakt van twee klassieke voorbeelden uit de internationale vakdidactische literatuur uit de jaren tachtig (van Wagner, Rachlin en Jensen, en Wenger). Bij de opgave

$$\text{Hoe groot is } \frac{2z+1}{2} \text{ als } 5(2z+1) = 10?$$

hebben leerlingen het moeilijk om de algebraïsche expressie $2z+1$ als een zelfstandig object te zien, omdat ze vanuit het rekenen met getallen gewoon zijn om expressies als een recept voor een uit te voeren proces (een berekening) te interpreteren. In de opgave

$$\text{Los } v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u} \text{ op naar } v.$$



eist de wortel onterecht de aandacht van de leerlingen op. De paragraaf 'Wat we al weten' geeft vervolgens een meer systematische behandeling van resultaten van vakdidactisch onderzoek. Er wordt dan bijvoorbeeld dieper ingegaan op de hierboven reeds aangehaalde dualiteit proces-object en op de invloed van visuele kenmerken van expressies. Verder gaat het bijvoorbeeld over de diverse rollen van variabelen (plaatshouder, veranderlijke, generalisator, onbekende en parameter). We noemen hier ook nog de literatuur die aan toont dat er meer nodig is dan het foutloos kunnen uitvoeren van basisprocedures om algebraïsch vaardig te zijn. Je moet ook strategisch kunnen denken, globaal kunnen kijken naar expressies, ..., wat in de vakliteratuur benoemd wordt als *symbol sense*.

Het vakdidactisch onderzoek legt de nadruk op het gelijktijdig werken aan inzicht en basisvaardigheid. Het concretiseert het belangrijkste overkoepelende concept uit het inleidende hoofdstuk (dat teruggaat op de wiskundendidacticus Skemp en dat ook een belangrijke rol speelt in van Dormolens boek):

"Zoals eerder beschreven is de kennis in het langetermijngeheugen alleen toegankelijk als die geordend is in samenhangende *cognitieve schema's*. Dit zijn mentale structuren, die we ons kunnen voorstellen als netwerken van knooppunten (feiten, concepten, procedures, beelden) die onderling verbonden zijn door relaties ertussen (... hangt samen met ..., ... geeft een beeld van ..., ... is een alternatieve aanpak voor ..., enzovoort). Deze relaties maken een goede bereikbaarheid van de kennis mogelijk. We streven naar de ontwikkeling van rijke, betekenisvolle en zo compleet mogelijke cognitieve schema's, die het de leerling mogelijk maken om op een flexibele, wendbare manier problemen aan te pakken." (p. 26)

De vakdidactische literatuur die in de verschillende hoofdstukken besproken wordt, geeft aan het einde van het boek aanleiding tot een erg rijke bibliografie, die een startpunt kan vormen voor verdere verdieping door de studenten.

Opmerkelijk is dat het besproken onderzoek niet alleen uit het buitenland afkomstig is. Er is in de afgelopen decennia immers ook heel wat waardevol wiskundendidactisch onderzoek op Nederlandse bodem verricht, door de auteurs van het handboek en door anderen. Ik kan het niet laten om daar vanuit Vlaanderen toch wat afgunstig naar te kijken. Vaak is dat Nederlandse onderzoek sterk gerelateerd aan de praktijk van het wiskundeonderwijs en is het geïnspireerd door actuele

discussies over het wiskundeonderwijs in Nederland. Geregeld wordt op basis van onderzoek ook een standpunt ingenomen in deze discussies. Zo was er bijvoorbeeld op een zeker ogenblik een roep om bij het gebruik van ICT in het wiskundeonderwijs meer in te zetten op 'use to learn' dan op 'learn to use'. Op basis van wetenschappelijk onderzoek wordt in het boek beargumenteerd dat beide lang niet altijd van elkaar te scheiden zijn.

... én praktijkgericht

In het onderdeel 'ontwerpen', dat in elk hoofdstuk aan bod komt, komt de praktijkoriëntatie van het handboek het sterkst tot uiting. Daarin wordt de wijsheid uit de voorgaande onderdelen exemplarisch gebruikt voor het ontwerpen van wiskundelessen. Ook andere elementen spelen in op de onderwijspraktijk: de oriëntatie start vaak vanuit een actuele discussie in het Nederlandse wiskundeonderwijs, lezers krijgen praktijkgerichte opdrachten, ... We illustreren dit weer aan de hand van het hoofdstuk over variabelen en vergelijkingen. In het ontwerponderdeel wordt bijvoorbeeld besproken hoe je samen met de leerlingen een overzicht kunt opbouwen van verschillende types vergelijkingen en bijbehorende oplossingsmethoden. Voor kwadratische vergelijkingen kom je dan, naast de standaardvergelijkingen die je met de *abc*-formule oplost, uit op types als $A \cdot B = 0$, $A^2 = a$, $A^2 = B^2$, ... Dit stimuleert *symbol sense* en een objectgerichte kijk op vergelijkingen bij de leerlingen. Daarnaast

komen veel andere zaken aan bod, zoals manieren om aandacht te geven aan de verschillende rollen van variabelen.

Drie voorbeelden van opdrachten die in het algebrahoofdstuk gegeven worden, zijn:

- "Verzamel enkele algebraïsche fouten uit de eigen onderwijspraktijk en probeer deze in verband te brengen met de hierboven beschreven misvattingen." (p. 57)
- "Zoek in schoolboeken bij elk van deze vijf facetten van het variabelenbegrip voorbeelden van opgaven." (p. 63)
- "Ontwerp werkbladen bij applets waarmee bepaalde facetten die in het [hoofdstuk] genoemd zijn worden geoefend. Neem bijvoorbeeld AlgebraPijlen en/of AlgebraExpressies op wisweb.nl." (bijlage, p. 3)

Globaal genomen vind ik de praktijkgerichte invalshoek in het handboek iets minder sterk dan de academische. In een paar hoofdstukken blijft dit onderdeel wat beperkt. Enkele ontwerpsuggesties lijken speciaal bedacht voor het boek, zonder gebaseerd te zijn op ervaring uit de praktijk. Het blijft soms ook wat teveel op het beschrijvende vlak zonder helemaal concreet te worden. Op andere plaatsen voel je dan weer de spanning tussen de beperking van de beschikbare ruimte en de drang om heel veel voorbeeldmateriaal aan te bieden: soms wordt een voorbeeld wel opgenomen maar zo kort behandeld dat je er als lezer niet veel aan hebt (bijvoorbeeld het Primasproject op pagina 364). Dat is niet helemaal verwonderlijk. Goede praktijkvoorbeelden in detail laten zien, vergt al gauw heel





Het boek bevat inspirerende voorbeelden maar geen gesneden brood.

wat bladzijden en zoveel ruimte is er niet. Zoals van Dormolen in het voorwoord suggereert, zou het een goed idee zijn om een apart ideeënboek te maken. Wellicht kan dat het best in digitale vorm en kan de website, die nu nog erg bescheiden ingevuld is, op termijn zorgen voor een verdere versterking van de praktijkgerichte invalshoek. Op de website zou bijvoorbeeld ook een geannoteerd overzicht kunnen komen van internetbronnen uit binnen- en buitenland waar materiaal te vinden is dat aansluit bij de principes uit het boek.

Maar ik wil dit punt van kritiek zeker niet overdrijven. Er is echt wel een ernstige inspanning gedaan om de theorie te vertalen naar de praktijk en er vallen in dat verband best heel wat interessante zaken te lezen.

De centrale rol van de leraar in het onderwijs
Een belangrijk uitgangspunt van het handboek is dat:

“een professionele wiskundeleraar ‘baas boven boek’ is en in haar of zijn eigen lespraktijk het eigen onderwijs systematisch en op niveau moet kunnen ontwerpen, uitvoeren en evalueren.” (p. 5)

Dat uitgangspunt onderschrijf ik ten volste. Van leraren die op masterniveau opgeleid zijn, mag je dit verwachten. Of nog anders gesteld: het onderwijs is veel te belangrijk om het over te laten aan leraren die louter uitvoerders zijn van onderwijs dat door anderen ontworpen is.

De auteurs geven aan dat dit in de Nederlandse onderwijscontext geen evidentie is, bijvoorbeeld omwille van het centrale eind-

examen en de traditioneel grote afhankelijkheid van het schoolboek. In Vlaanderen lijkt de eigen verantwoordelijkheid van de leraar inderdaad groter: wij hebben enkel schoolexamens en geen centraal eindexamen (maar wel leerplannen die leerinhoud en doelstellingen vastleggen), schoolboeken bieden minder ondersteunend materiaal en er is inderdaad een zekere traditie om zelf lesmateriaal te ontwikkelen voor een deel van de lessen.

Deze nadruk op de professionaliteit van de leraar verklaart een aantal keuzes die in het handboek gemaakt zijn: de bespreking van relevant wetenschappelijk onderzoek dat richting geeft maar niet alle vragen oplost, de volgehouden aandacht voor het ontwerpen van onderwijs gebaseerd op fundamentele ideeën die door dat onderzoek ondersteund worden, inspirerende voorbeelden maar geen gesneden brood, de kritische houding ten aanzien van de traditionele schoolboeken en een aantal praktijken in het huidige Nederlandse wiskundeonderwijs, ...

De centrale rol van de leraar ligt niet enkel in het vermogen om kwalitatief lesmateriaal te maken. Ook daar wordt in het handboek nadrukkelijk op gewezen. Het optreden tijdens de les zelf is van cruciaal belang: het is essentieel voor leerlingen dat ze tijdens de les in interactie kunnen gaan met een leraar die hen op een gepaste manier kan uitdagen en ondersteunen bij het actief aan wiskunde doen.

Zelf vind ik dat het handboek op dit punt in zijn opzet slaagt. Het geeft richting en inspireert, maar wijst de lezer ook op zijn of haar verantwoordelijkheid.

Dit is wiskundendidactiek!

Ik weet niet hoe het in Nederland zit, maar in Vlaanderen wordt de vakdidactiek toch nog altijd wat miskend. Bij professoren van de opleiding wiskunde hoor je nog te vaak de stelling verkondigen dat wiskundeleraars eerst en vooral goed opgeleide wiskundigen moeten zijn en dat de rest dan wel vanzelf volgt. Ze kunnen zich maar moeilijk voorstellen welke niet-wiskundige kennis en vaardigheden en attitudes een wiskundeleraar nodig zou hebben. Anderzijds vinden veel pedagogen dat een leraar naast een zekere vakinhoudelijke basis vooral nood heeft aan een algemeen onderwijskundige opleiding. Van vakdidactisch onderzoek hebben ze geen hoge pet op. Daarom kun je bij ons jammer genoeg wiskundeleraar worden in de hoogste jaren van het secundair onderwijs zonder dat je ook maar één letter wiskundendidactiek in je lerarenopleiding gehad hebt (gelukkig zijn er daarnaast ook lerarenopleidingen waarin de vakdidactiek wel degelijk een grote rol speelt).

Het *Handboek wiskundendidactiek* zet het specifieke terrein van de wiskundendidactiek duidelijk op de kaart en maakt dit domein zichtbaar voor andere actoren in het onderwijs. Het is geschreven door specialisten op het terrein, geen wiskundigen en geen pedagogen, maar mensen die zich op het kruispunt van die twee disciplines bevinden. Het toont wiskundendidactiek als een volwaardige academische discipline, bovendien in de goede zin van het woord: met de nodige afstand maar tegelijk nauw betrokken op het wiskundeonderwijs zelf.

De auteurs tonen een grondige kennis van de wiskunde zelf, maar dat is nooit meer dan een vertrekpunt voor een wiskundendidactisch discours. De auteurs verwachten die grondige kennis van de leerinhouden uit het voortgezet onderwijs ook van hun lezers, wat natuurlijk aansluit bij de realiteit van de eerstegraadslerarenopleidingen. Een enkele keer wordt ingegaan op wiskundige aspecten die de lezer misschien wel niet vooraf geleerd heeft, zoals de ontwikkeling van de meetkunde door de geschiedenis heen.

Het handboek is heel wat anders, en veel ambitieuzer, dan een vakvertaling bij een cursus algemene didactiek, waarin je illustraties vindt voor het vak wiskunde van algemeen didactische inhouden. In dit handboek wordt uitgegaan van kwesties die vaak heel specifiek zijn voor het wiskundeonderwijs. Misschien gaat het zelfs een tikkeltje teveel die kant op. Ik kan me voorstellen dat hier en daar nog wat winst te halen is door het handboek nog eens naast een cursus algemene didac-

tiek te leggen. Zo zou er misschien nog wat aangevuld kunnen worden met betrekking tot het gebruik van andere werkvormen.

Nederland en de wereld

Het handboek verwijst vaak naar de organisatie van het Nederlandse wiskundeonderwijs, zowel de actuele als die uit het verleden. Dat draagt bij aan de praktijkgerichtheid van het boek. Het heeft evenwel ook een schaduwzijde. De auteurs kennen het Nederlandse wiskundeonderwijs en zijn evolutie natuurlijk als hun broekzak omdat ze het allemaal meegeemaakt hebben, maar dat geldt wellicht niet voor hun studenten. Ik kan me voorstellen dat een schematisch overzichtje (op de website?) van de belangrijkste evoluties in de structuur van het Nederlandse wiskundeonderwijs erg behulpzaam zou zijn.

Er is in het boek zeker voldoende aandacht voor onderzoek van buiten Nederland. Ook bij de praktijkvoorbeelden vind je geregeld buitenlands werk. Wel vond ik het wat verwonderlijk dat er weinig plaats ingeruimd werd voor een bezinning op het Nederlandse wiskundeonderwijs vanuit internationaal perspectief: wat is anders in Nederland? Wat zijn sterke en minder sterke punten? Welke prestaties leggen Nederlandse leerlingen voor in internationaal vergelijkend onderzoek als PISA en TIMSS-Advanced? ...

Het boek heeft wél aandacht voor het historische perspectief op het Nederlandse wiskundeonderwijs. Terecht, want dat is best interessant, bijvoorbeeld omdat een aantal interessante debatten publiek gevoerd zijn, te beginnen met dat tussen Afanassjewa en Dijksterhuis in de jaren twintig. Er zijn ook een aantal markante figuren die een duidelijke stempel op het Nederlandse (en internationale) wiskundeonderwijs gedrukt hebben, zoals Freudenthal. Veel informatie daarover vind je verspreid over verschillende hoofdstukken. Het maken van een overzicht hierover zou een mooie oefening voor studenten kunnen zijn.

Modelleren en wiskundige denkactiviteiten

Het is goed dat er een apart hoofdstuk gewijd is aan modelleren, het gebruiken van wiskunde om problemen van buiten de wiskunde op te lossen. Dit is een belangrijk facet van het huidige wiskundeonderwijs. In overeenstemming met het belang dat hieraan gehecht wordt door cTWO, de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, is er ook een apart hoofdstuk over wiskundige denkactiviteiten, dat zich dan meer richt op de denkprocessen binnen de wiskunde zelf, waaronder probleemoplossend denken en bewijzen.

Probleemoplossend denken komt in nog heel wat andere hoofdstukken aan bod: in het inleidende hoofdstuk, bij meetkunde en ook nog eventjes bij modelleren. Daardoor komt dit belangrijke onderwerp wat fragmentarisch aan bod. Ik vraag me af of een apart hoofdstuk over probleemoplossend denken en wiskundige onderzoeksvaardigheden niet een betere optie zou zijn. Het zou het lange inleidende hoofdstuk overigens ook wat kunnen ontlasten.

Ik mis een diepgaandere bezinning over de rol van bewijzen in het wiskundeonderwijs. Er is op dat punt immers een sterke spanning tussen de wiskunde als wetenschap, waar het juist essentieel is om alles te bewijzen, en wiskunde in het voortgezet onderwijs, waar we uit ervaring geleerd hebben (zeker in België, waar we de moderne wiskunde in een erg radicale vorm geïmplementeerd hebben) dat het beter is om niet zo ver te gaan. Studenten uit de lerarenopleiding moeten leren omgaan met dit spanningsveld.

Welke leerling?

Meestal gaat het in het handboek over 'de' leerling, zonder dat daar veel reliëf in aangebracht wordt. Zelf denk ik dat wiskundeonderwijs een soms erg verschillende vorm kan en moet aannemen, naargelang de leerling. Dat blijft in het handboek toch wat onderbelicht en dat is een beetje vreemd omdat er in het Nederlandse wiskundeonderwijs door de veelheid aan eindexamenprogramma's structureel juist veel aandacht is voor die verschillen.

In dezelfde zin zocht ik tevergeefs naar een stukje over leerstoornissen die bij wiskunde een rol spelen en naar een stukje over hoogbegaafdheid en wiskunde.

Het ene hoofdstuk is het andere niet

Globaal genomen slagen de verschillende auteursteams erin om te zorgen voor een voldoende grote eenheid in het boek. Het is echter onvermijdelijk dat een lezer zich meer gecharmeerd voelt door het ene hoofdstuk dan door het andere. Zelf vond ik het hoofdstuk over ICT in het wiskundeonderwijs erg sterk. Het is goed en helder geschreven, het is inhoudelijk erg coherent en geeft goede tips voor de praktijk. Het hoofdstuk over modelleren sprak me ook erg aan, al is het voorbeeldmateriaal hier toch beperkter. Ik voelde me wat minder aangetrokken tot het hoofdstuk over statistiek, waarin ik een aantal zaken toch wat mis. Zo zie ik zelf een veel belangrijker rol weggelegd voor de idee van steekproefvariabiliteit, die in het boek nu wel aan

bod komt maar niet de nodige klemtoon krijgt. Ook op het vlak van de beschrijvende statistiek mis ik een aantal essentiële zaken: kritisch kijken naar grafieken, systematisch beschrijven van een frequentieverdeling aan de hand van een aantal kenmerken, ...

Tot slot

U heeft al wel begrepen dat ik globaal genomen grote waardering heb voor dit nieuwe handboek van de wiskundendidactiek. Die waardering geldt zowel voor het resultaat als voor de volgehouden samenwerking van een grote ploeg die tot dit resultaat geleid heeft. Ik ben zelf actief als wiskundendidacticus in een lerarenopleiding in Vlaanderen die erg vergelijkbaar is met de Nederlandse éénjarige universitaire eerstegraadslerarenopleiding. Deze recensie was voor mij de aanleiding om het boek, dat ik al wel kende, grondig door te nemen. Ik heb alvast de beslissing genomen om het vanaf volgend jaar intensief te gebruiken in mijn cursus wiskundendidactiek. Dat zal de kwaliteit van mijn onderwijs zeker ten goede komen. Maar natuurlijk blijf ik baas boven boek: ik sta nu voor de uitdaging om boeiende lessen te ontwerpen die aansluiten bij dit materiaal. En hier en daar zal ik afwijken van het materiaal dat in het boek aangeboden wordt, dat spreekt!



Paul Drijvers, Anne van Streun en Bert Zwanveld (red.), *Handboek wiskundendidactiek*, Epsilon Uitgaven, A'dam, 2013 (2^e druk), 400 p., ISBN 9789050411301, prijs € 34,00.

Jan van Mill

Afdeling Wiskunde

Vrije Universiteit Amsterdam

j.van.mill@vu.nl

Afscheidsrede

Brouwers dimensionsgrad:

Op 12 oktober 2012 nam Jan van Mill, een van de meest vooraanstaande onderzoekers op het gebied van de topologie, afscheid als hoogleraar zuivere wiskunde aan de Faculteit der Exacte Wetenschappen van de Vrije Universiteit Amsterdam. In zijn afscheidsrede blikt hij terug op 44 jaar 'studeren' aan de VU. Hij stelt ons voor aan drie hoofdrolspelers die voor hem van grote invloed waren. Na zijn afscheidsrede ontving Van Mill een koninklijke onderscheiding, hij werd benoemd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau.

Bij het nadenken over mijn afscheidsrede, gingen mijn gedachten uiteraard terug naar hoe het begon, wat mijn dromen waren toen ik indertijd mijn oratie uitsprak. Al lezend in het belegen geschrift getiteld 'Over het verschuiven van problemen naar het oneindige door middel van kleine bewegingen', zag ik dat ik

in elk geval twee belangwekkende mededelingen deed. Allereerst biechtte ik op dat ik eigenlijk helemaal geen zin had in de intree-rede. Het was dan ook te danken aan 'een zeer overredende figuur binnen de Subfaculteit Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit' dat het, enkele jaren na mijn benoeming, er toch van was gekomen.

Die zeer overredende figuur was de te vroeg overleden Maarten Maurice, over wie ik het later nog uitvoeriger zal hebben. In de tijd dat ik decaan was, moest ik vaak denken aan mijn eigen onwil indertijd, als ik nieuwbenoemde hoogleraren geestdriftig aanspoorde om toch vooral een intree-rede uit te spreken. Wie denkt dat wijsheid met de jaren komt, vergist zich. Aanvankelijk had ik ook helemaal geen zin om een afscheidsrede te houden. Het is dan ook te danken aan niet één maar zelfs twee 'zeer overredende' figuren dat ik dit probleem niet naar het oneindige heb verschoven. Het betreft de rector magnificus van de Vrije Universiteit Lex Bouter en collega Rien Kaashoek. Wie in handen van dit zeer overredende duo valt, heeft niets in te brengen, dat kan ik u verzekeren.

De tweede belangwekkende mededeling die ik deed, was hoe ik bij de VU terecht kwam. Ik wilde mij oorspronkelijk in 1968 bij de Universiteit van Amsterdam laten inschrij-

ven, maar dat werd op hardhandige wijze verhinderd door mijn toenmalige wiskundelerares juffrouw Dengerink, die mij gedecideerd naar de VU verwees. Ik liet dit maar over mij heen komen omdat er al de nodige onenigheid thuis was geweest. Vooral mijn moeder zag mijn keus voor de wiskunde in het geheel niet zitten, zij had een studie medicijnen voor mij in gedachte. Maar ik hield koppig vol, het moest en zou wiskunde worden. (In het boek *De onvergetelijke leraar* [3] wijdt Andries Knevel een heel hoofdstuk aan juffrouw Dengerink. Hij schrijft dat zij een geboren docente was die gedreven en met flair hem en zijn klasgenoten door de impopulaire en moeilijke stof heen loodste. Het eerste kan ik volmondig beamen, maar dat zij 'impopulaire en moeilijke stof doceerde' is een uitspraak die ik niet graag voor mijn rekening zou willen nemen.)

En zo kwam ik in 1968 op zestienjarige leeftijd naar de VU. Het was in de tijd van de nieuwbouw, ik heb het hoofdgebouw uit de grond zien verrijzen. De VU was in 1968 een



Maarten Maurice (1934–1996)



Lex Bouter en Rien Kaashoek



Jan van Mill

controversie en verwarring

grote bouwput, gestamp en gedreun was aan de orde van de dag, ongestoord onderwijs volgen was bijna onmogelijk. Maar voor mij was de VU het paradijs op aarde. Ik hoop u in deze afscheidsrede een idee te geven van wat dit paradijs mij heeft gebracht in de afgelopen 44 jaar, zowel qua wetenschap als anderszins.

De studie wiskunde

In die tijd was de studie wiskunde geheel anders opgebouwd dan nu. Eigenlijk studeerde je in het eerste jaar zowel wis- als natuurkunde. Erg veel specialisatie was er niet in de latere jaren. Ik had maattheorie, meetkunde, kansrekening, statistiek en informatica in mijn pakket. De meeste studenten hadden dat. Aan het befaamde natuurkundepracticum in het eerste jaar bewaar ik mooie herinneringen. Dat werd in mijn tijd gerund door assistenten en de baas was een zogenaamde hoofdassistent. “Hoe lang bent u al aan de VU?”, vroeg ik op een keer. “Ik ben der tiendejaars”, was het antwoord. Dat maakte op mij een verpletterende indruk. Wat moest

die man knap zijn, hij studeerde al dertien jaar aan de VU! Dit vertel ik natuurlijk alleen maar om indruk op u te maken, ik studeer al ruim 44 jaar aan de VU, hoe knap moet ik dan wel niet zijn? Het leukste deel van de studie kwam op het laatst, dat betrof de zogenaamde werkgroepen. Onder leiding van docenten werd een stukje literatuur bestudeerd. De twee werkgroepen die ik volgde waren ‘automatentheorie’ en ‘geschakelde systemen’, beide onder leiding van Cor Baayen en Evert Wattel. De werkgroep ‘geschakelde systemen’ ging over het proefschrift van Albert Verbeek (1946–1990), de laatste promovendus van de jong overleden UvA-hoogleraar Johannes de Groot. (Albert Verbeek was naast topoloog ook statisticus. De combinatie stochastiek en topologie komt vaker voor. Het bekendste Nederlandse voorbeeld is David van Dantzig (1900–1959).)

Een *geschakeld systeem* is een collectie verzamelingen waarvan de elementen een paarsgewijze niet-lege doorsnijding hebben. In die tijd dacht men dat de geschakelde sys-

temen een uitvinding waren van De Groot, maar dat bleek een misvatting. Dergelijke systemen werden al veel eerder gebruikt door beroemde wiskundigen zoals Frigyes Riesz (1880–1956) in de meetkunde [32] en John von Neumann (1903–1957) in de speltheorie [29]. De geschakelde systemen kunnen gebruikt worden om vanuit bestaande ruimten nieuwe te maken en daar ging het proefschrift van Verbeek over. Tot mijn niet geringe verbazing begreep ik wat Verbeek schreef, zelfs in die mate dat ik al snel probeerde om zijn stellingen te verbeteren, wat me af en toe ook lukte. Mijn interesse in het proefschrift viel op en toen de ons allen bekende Mient-Jan Faber de VU verliet, werd ik gevraagd zijn plaats als promotiemedewerker in te nemen. Een hele eer om Mient-Jan op te volgen. Ik ben een ‘second generation’ bekende Nederlander, iemand die het zelf niet tot bekende Nederlander heeft gebracht, maar er een is opgevolgd. Een mens moet een keer tevreden zijn. (Het is maar weinigen bekend dat Mient-Jan Faber een wiskundige is en zelfs in 1974 aan de VU



Het hoofdgebouw van de VU omstreeks 1968 (met dank aan Historische foto's, StudioVU van de Dienst Marketing & Communicatie)



Het natuurkundepracticum in vroeger tijden



Johannes de Groot (1914–1972)

is gepromoveerd bij Maarten Maurice in de topologie op het proefschrift *Metrizability in generalized ordered spaces.*)

Mijn gevoel over de opleiding is dat zij gedegen was en mij prima toerustte voor mijn toekomstige carrière als onderzoeker in de wiskunde.

De eerste stappen als onderzoeker

Het hoofdresultaat van mijn proefschrift was de oplossing van een vermoeden van De Groot: de ruimte die je krijgt uit het eenheids-interval $\mathbb{I} = [0, 1]$ door de geschakelde systemen toe te voegen, is topologisch equivalent met de fundamentealkubus $\mathbb{I}^\infty$ van Hilbert. Om dat te bewijzen verdiepte ik mij in een toen vrij nieuwe theorie, de *oneindig-dimensionale topologie*, waarvan de Amerikaan Dick Anderson de grondlegger was. Die theorie was betrekkelijk nieuw in Nederland en loste een aantal zeer fundamentele problemen in de wiskunde op, zoals bijvoorbeeld de invariantie van Whitehead-torsie [6] en het eindig zijn van het homotopie-type van compacte absolute omgevingsretracten [36].

De oneindig-dimensionale topologie heeft mij nooit meer verlaten, tot op de dag van vandaag. Het is een buitengewoon interessante theorie waar ik van mag zeggen dat ik die in Amsterdam samen met mijn promovendi mede heb uitgediept en uitgebreid. De theorie kwam in 1978 plotsklaps tot een voorlopig einde doordat de Poolse wiskundige Henryk Toruńczyk de wereld verbaasde door zijn topologische karakterisering van oneindigdimensionale variëteiten [34–35]. Ik heb over

zijn werk en dat van anderen mijn eerste boek geschreven. Daarna kwam de oneindig-dimensionale topologie weer tot leven in de topologische classificatie van functieruimten. Dit door het werk van de Fransman Cauty en de Polen Dobrowolski, Marciszewski en Mogiński en een concurrerend Amsterdams team waarvan ik de stimulator was. Daar ging mijn tweede boek over. Ook in mijn latere werk met Jan Dijkstra en verschillende promovendi, over de Erdős-ruimten [11], was de oneindig-dimensionale topologie op de achtergrond sterk aanwezig. Datzelfde geldt ook voor de recente topologische karakteriseringsstelling van de bekende Nöbeling-ruimten en eveneens voor de al wat oudere resultaten over de universele n -dimensionale Menger-ruimten.

Maar ik wil het nu niet over de oneindig-dimensionale topologie hebben.

Na mijn promotie in 1977 kreeg ik een beurs van ZWO om een jaar in Madison (Wisconsin) in de groep van Mary Ellen Rudin mee te draaien. Na dat jaar was ik een jaar verbonden aan de VU, waarna we in 1979 weer naar de Verenigde Staten vertrokken. De al eerder genoemde Dick Anderson had mij uitgenodigd om een jaar bij hem te komen werken aan de Louisiana State University te Baton Rouge. Het leven in het zuiden van Amerika vonden wij erg prettig, zij het dat eind zeventiger jaren het politieke klimaat daar anders was dan we gewend waren. Toen ik mijn archief opruimde, kwam ik het antwoord tegen op een brief die ik geschreven heb aan de gouverneur van de staat Louisiana: ik bleek politiek actief te zijn geweest! Maar ik kwam niet voor de politiek, ik kwam voor de wiskunde.

De theorie van absolute retracten is erg belangrijk in de meetkundige topologie en heeft belangrijke raakvlakken met de oneindig-dimensionale topologie. Ik paste mijn kennis van de oneindig-dimensionale topologie toe om een bekend probleem van de Poolse wiskundige Karol Borsuk (1905–1982) op te lossen. Het gaat hier om het volgende. Borsuk had bewezen dat het continue beeld van een compact absolute retract waarvan elke vezel een absolute retract is, weer een absolute retract is, onder de extra aanname dat het beeld eindig-dimensionaal is. Dit is een versie van de bekende Vietoris–Begle-stelling uit de algebraïsche topologie. De vraag was of de extra aanname over de eindig-dimensionaliteit van het bereik zou kunnen worden weggelaten. De experts waren van mening dat dat zou moeten kunnen, maar ik construeerde een tegenvoorbeeld. Daartoe paste ik een voorbeeld aan van de analyticus Taylor [33], dat op zijn beurt gestoeld was op belangrijk werk



Mary Ellen Rudin, Marije van Mill (l) en Josine van Mill (r) in 1992



Louisiana State University, Baton Rouge (LA)

van Adams en Toda uit de algebraïsche topologie. Anderson was erg in zijn nopjes, stapte naar het hoofd van de afdeling die mij daarop prompt een aanbieding deed voor een vaste baan. Op dat moment ging het bijna mis tussen mij en de VU, want ik aanvaardde het aanbod. Geertje en ik waren al op zoek naar een mooi huis uit vroeger tijd, toen er een belangrijke verandering in ons leven plaats vond. Wij waren, om het in modern jargon te zeggen, zwanger geraakt. Geertje deelde mee dat zij de baby in Nederland wilde krijgen en met dat verhaal ging ik naar het hoofd van de afdeling wiskunde. Hij ontstak in grote woede. “Wat dacht je,” riep hij, “dat de immigranten die in de zestiende en zeventiende eeuw naar dit prachtige land kwamen, terugkeerden als hun vrouwen zwanger raakten? Jij hebt niet het bloed van een echte immigrant!” Zijn woorden bleken profetisch, want ik heb daarna alle aanbiedingen van andere universiteiten, zowel in binnen- als buitenland, afgeslagen. Zo verdween ik in de zomer van 1980 van de Louisiana State University, maar niet voordat ik nog een probleem in de theorie van absolute retracten had opgelost, dit keer samen met Anderson en zijn collega Doug Curtis [2].

Maar ik wil het nu niet over de theorie van absolute retracten hebben.

Brouwers dimensionsgrad

Omdat u zich inmiddels wel zult afvragen waar ik het dan wel over wil hebben, stel ik u de hoofdrolspelers van mijn betoog voor.



Richard Davis Anderson (1922–2008)

Daarna zal ik de draad van mijn verhaal weer oppakken.

Brouwer

Allereerst stel ik Luitzen Egbertus Jan Brouwer aan u voor, ook wel bekend als Bertus en als ‘Het Genie van Overschie’. Voor 1700 waren er twee Nederlandse wiskundige genieën die de wereld nu nog kent: Simon Stevin en Christiaan Huygens. In de drie eeuwen daarna is er maar één, namelijk Bertus Brouwer. Hij is zo beroemd dat hij zelfs op een postzegel staat (zie Figuur 1). Hij was een wonderkind en zijn bijdrage aan de wiskunde is groot en wel om twee redenen. Ten eerste bracht Brouwer de topologie op gang. De sleutelvraag in de topologie is: wat gebeurt er met meetkundige figuren onder toegestane vervormingen? De topologie is de liberaalste tak van de meetkunde-familie, zij staat continue vervormingen toe. Dat zijn vervormingen waarin wel geduwd en getrokken mag worden, maar niet geknipt of geplakt, *vloeiende* bewegingen dus. De topologie staat daarom ook wel als ‘rubbermeetkunde’ bekend. Een mooie illustratie is de vloeiende beweging die een koffiekop overvoert in een donut (zie Figuur 2).

Ten tweede legde Brouwer de basis voor intuïtionistische wiskunde.

Brouwer had ook belangwekkende filosofische interesses. In 1905 hield hij een filosofisch-mystieke lezingencyclus in Delft en publiceerde daar een boekje over, getiteld *Leven, Kunst en Mystiek*. In dat document schrijft hij: “Het leven van de mensheid als geheel is een arrogant uitvreten van haar nesten over de gave aarde, een knoeien aan haar moederend gewas, knagend, schendend, een steriel maken van haar rijke scheppingskracht totdat ze alle leven heeft vervreten, en om de dorre aarde dort de menschenkanker weg.” Het is duidelijk dat hier een bijzonder mens aan het woord is.

Een belangrijk probleem waar de wiskunde de twintigste eeuw mee inging, was dat van



Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

de dimensie van een figuur, in de topologie ook wel ruimte genoemd. (Het gaat hier om *topologische* dimensie. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld in de dynamica vele verschillende dimensiebegrippen waaronder Hausdorff-dimensie. De standaard Cantor-verzameling heeft topologische dimensie 0 en Hausdorff-dimensie $\log_3(2)$.) Het is intuïtief duidelijk dat een punt nuldimensionaal is, een lijn eendimensionaal, een vlak tweedimensionaal en de ruimte waarin we leven driedimensionaal, et cetera. Maar hoe moet je de dimensie van een willekeurige figuur definiëren en is de dimensie van een figuur invariant bij de bewegingen die in de topologie zijn toegestaan? Een punt kan niet worden overgevoerd in een lijn en het is niet moeilijk in te zien dat een lijn niet vloeiend kan worden overgevoerd in een vlak, maar hoe zit het met een vlak en de driedimensionale euclidische ruimte? Dit probleem bood hardnekkig weerstand aan alle aanvallen en had duidelijk een doorbraak nodig. Die kwam van Brouwer.

Een goede definitie van dimensie was niet voorhanden. Al in 1843–1844 schreef Bolzano over dimensie voor figuren in de driedimensionale euclidische ruimte [4]. Maar dit artikel werd pas ongeveer honderd jaar na schrijven gepubliceerd, dus dat schoot niet op. Zijn definitie is nooit gebruikt, maar is in essentie sterk verwant aan een nu gangbare definitie van dimensie waar we het later over zullen hebben. Na een aantal vage pogingen van verschillende auteurs, was er de eerste serieuze poging in 1912 om tot een dimensiebegrip te komen van de bekende Franse wiskundige Henri Poincaré (1854–1912) [31]. Poincaré stierf spoedig na de publicatie van zijn artikel en hij heeft daardoor zijn ideeën nooit kunnen uitwerken.

Voortbouwend op de ideeën van Poincaré, publiceerde Brouwer in 1913 zijn beroemde artikel ‘Über den natürlichen Dimensionsbegriff’ waarin hij de eerste formele definitie van dimensie gaf, de zogenaamde *dimensionsgrad* van een meetkundige figuur [5]. Een *dimensiefunctie* is een functie die aan elke figuur een getal in $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ toekent, haar *dimensie*, op zo’n manier dat de figuur steeds complexer wordt naarmate de dimensie stijgt. De dimensie van de lege figuur, dat is de figuur zonder enig punt, is gelijk aan -1 . De figuren van dimensie 0 zijn bij Brouwer bijzonder, het zijn ruwweg de figuren waarin geen enkel — recht dan wel krom — lijnstukje te bespeuren valt. Een eindige verzameling heeft die eigenschap, maar ook zoiets als het discontinuüm van Cantor. Dat is de verzameling die je krijgt door uit het interval $[0, 1]$ het



Figuur 1 Brouwerzegel (2007)

middelste derde interval weg te laten, dan uit de overblijvende twee intervallen de middelste derden en ga zo maar door. Aan het eind van het proces is er nog heel veel over, maar daar zit geen enkel lijnstukje in want wat in totaal is weggelaten heeft lengte 1.

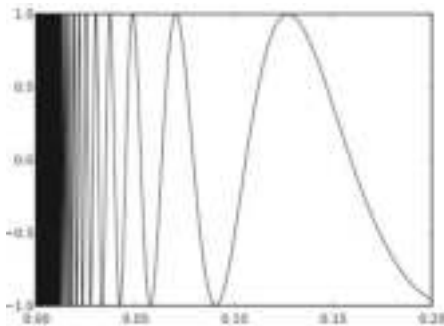
De figuren van dimensie 1 zijn de figuren die je overal kapot kunt knippen door een figuur van dimensie 0 te verwijderen, de figuren van dimensie 2 zijn de figuren die je overal kapot kunt knippen door een figuur van dimensie 1 te verwijderen, et cetera. De intuïtie vertelt ons dat een punt nuldimensionaal is en dat een lijn eendimensionaal is doordat deze in twee stukken uiteen valt door de verwijdering van een punt en dat een vlak tweedimensionaal is doordat dit in twee stukken uiteen valt door de verwijdering van een lijn. Hoe zou je dit formeel kunnen bewijzen en generaliseren naar hogere dimensies?

Brouwer deed dat, hij bewees dat de dimensionsgrad van de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ gelijk is aan n en dus kan een vlak niet vloeiend overgevoerd worden in de driedimensionale euclidische ruimte. Dit resultaat en de technieken die door Brouwer werden gebruikt, schokten de wiskundige wereld van zijn dagen.

Een jaar later bewees hij zijn beroemde *dekpuntsstelling*, een der meest gebruikte stellingen uit de wiskunde. Deze stelling zegt dat na niet al te wild roeren in een kopje koffie



Figuur 2 Koffiekop en donut zijn topologisch equivalent



Figuur 3 Topologist's sine curve

ten minste één molecuul zijn oorspronkelijke positie zal hebben ingenomen. De meeste wiskundigen kennen de dekpuntsstelling en gebruiken haar veelvuldig, maar hebben er geen idee van hoe zij bewezen moet worden. In 1922 ontwikkelde een jonge Russische wiskundige genaamd Paul Urysohn (1898–1924), niet op de hoogte van het werk van Brouwer, eveneens een theorie van dimensie. Die theorie lijkt als twee druppels water op die van Brouwer, maar er is een subtiel verschil. Er is een probleem met de figuren van dimensie 0 in de zin van Brouwer waar ik het eerder over had. De kern daarvan kan gemakkelijk worden geïllustreerd aan de hand van de ‘topologist's sine curve’ S in het platte vlak (zie Figuur 3). Bezie de punten $a = (0, -1)$, $b = (0, 1)$ en $c = (\frac{1}{\pi}, 0)$ van S . De verzameling $S \setminus \{a\}$ is samenhangend en dus is $\{b\}$ niet een scheider van $\{a\}$ en $\{c\}$ in de zin van Urysohn. Maar elk continuüm dat a met c verbindt, moet b bevatten en dus is $\{b\}$ wel een schei-



De hut van Brouwer in zijn tuin in Blaricum. Ontwerp Rudolf Mauve, 1904.



Paul Alexandroff, Bertus Brouwer en Paul Urysohn

der tussen $\{a\}$ en $\{c\}$ in de zin van Brouwer. Een triviale constatering, maar wel met grote gevolgen. Urysohn sprak allereerst van een ernstige fout van Brouwer maar liet zich overtuigen dat het ging om een ‘slip of the pen’, dat Brouwer en hij feitelijk hetzelfde bedoelden. Toen kreeg Brouwer het aan de stok met Karl Menger (1902–1985), die iets later dan Urysohn aan de dimensietheorie werkte en zich niet door Brouwer liet overtuigen. Hij beschuldigde hem van geschiedvervalsing. Al eerder had Brouwer een conflict gehad met de bekende Franse wiskundige Henry Lebesgue (1875–1941) over een gerelateerd probleem. Ondertussen ruziede Brouwer ook nog heftig met David Hilbert (1862–1943) over de grondslagen van de wiskunde. Hilberts opvatting was dat ieder wiskundig probleem ofwel kan worden opgelost, of het kan worden aangetoond dat de oplossing niet bestaat. Brouwer was het daar niet mee eens en was zijn tijd ver vooruit. Er zijn vele boeken en artikelen geschreven over deze knetterende conflicten en voor nu laten we het bij de constatering dat in den beginne de weg van alles wat met Brouwer te maken had niet over rozen ging; wij beperken ons hier tot de dimensietheorie. De wiskundige wereld nam de definitie van dimensie van het tweetal Menger–Urysohn over als het juiste begrip en noemde de dimensionsgrad van Brouwer alleen nog maar bij het vertellen van de geschiedenis van de dimensietheorie. Het Brouwer-archief bevat materiaal dat aantoont dat Brouwer al in 1913 de correcte definitie van scheider had. Achteraf bezien was het niet erg verstandig dat hij die niet tijdig heeft gepubliceerd (bron: D. van Dalen).

Brouwer deed zijn werk voornamelijk in een hut in zijn tuin in Blaricum, waar hij talloze buitenlandse gasten ontving om over wiskunde te praten. Zo kwamen in 1924 twee jonge Russische wiskundigen langs, Paul Alexandroff (1896–1982) en de al eerder genoemde Paul Urysohn (1898–1924), beiden verbonden aan de Universiteit van Moskou (of Lomonosov-universiteit). Na hun bezoek vertrokken zij naar Frankrijk waar Urysohn tragisch om het leven kwam, hij verdronk.

Hurewicz

De tweede hoofdrolspeler is Witold Hurewicz (1904–1956). Hij werd in Łódź geboren. Deze stad ligt tegenwoordig in Polen, maar toen in het Russische keizerrijk. Hij was aan de Universiteit van Amsterdam verbonden van 1927 tot 1936, eerst als assistent van Brouwer en later als privatdocent. Daarna emigreerde hij naar de Verenigde Staten om daar een van



Witold Hurewicz (1904–1956)

de grondleggers van de algebraïsche topologie te worden. Zijn dood was curieus. Bij een uitstapje tijdens het Internationale Symposium over Algebraïsche Topologie in de Mexicaanse stad Uxmal verstepte hij zich en viel van de trappen van een Maya-piramide. Het was bekend dat hij “... een voorbeeld van verstrooidheid was, een eigenschap die waarschijnlijk tot zijn dood heeft geleid”. In 1948 publiceerde Hurewicz samen met Henry Wallman (1915–1992) een boek [21] dat de state of the art weergaf van de dimensietheorie. Dat boek wordt nog steeds beschouwd als een onovertroffen meesterwerk. Op pagina 4 staat dat de dimensionsgrad van Brouwer en het nu gangbare dimensiebegrip overeenkomen in de klasse van alle lokaal samenhangende topologische ruimten. Deze bewering is zo flauw dat de auteurs het niet nodig vonden er een bewijs van op te nemen. De mededeling is zeer geruststellend want de meeste wiskundigen werken alleen met ruimten die lokaal samenhangend zijn en daar komen dus geen narigheden voor. Het eerder getoonde voorbeeld van de ‘topologist's sine curve’ is niet lokaal samenhangend en dit verklaart dus precies waar de problemen zitten.

Fedorchuk

De derde hoofdrolspeler is Vi taly Fedorchuk. We moeten wel specificeren welke Vi-



Lomonosov-universiteit

taly Fedorchuk we bedoelen. Vitaly Vasilyevich Fedorchuk was een Oekraïense Sovjet-bestuurder. Hij werd geboren in de Oekraïne in een boerenfamilie en hij was van 1982 tot 1986 Sovjet-minister van Binnenlandse Zaken. Om deze Vitaly Fedorchuk gaat het niet, het gaat om zijn zoon Vitaly Vitalievich Fedorchuk, wiskundige, bij leven verbonden aan de eerder genoemde Universiteit van Moskou en geboren in 1942. De Universiteit van Moskou of Lomonosov-universiteit is de grootste universiteit van Rusland en werd gesticht in 1755. Aan de universiteit zijn 4000 wetenschappers verbonden aan 29 faculteiten en 15 onderzoekscentra. Alle eerder genoemde Russische wiskundigen waren of zijn aan deze universiteit verbonden. Fedorchuk was een promovendus van Alexandroff en was onder meer gespecialiseerd in de dimensietheorie van niet-metriserbare compacta. Bovendien was hij enige tijd een hoge bestuurder van de Universiteit van Moskou.

In Figuur 4 is Alexandroff te zien op een schilderij dat te bewonderen valt in kamer 1222 van de Lomonosov-universiteit. Een trefende gelijkenis, vindt u niet?

Veel liefs uit Moskou

In het vroege voorjaar van 1999 kreeg ik een mail van Vitaly Fedorchuk, de zoon wel te verstaan. Hij vroeg me naar de eerder genoemde passage uit het boek van Hurewicz en Wallman te kijken en hem een bewijs van deze bewering op te sturen. Na dertig seconden nagedacht te hebben, concludeerde ik dat de voor de hand liggende inductieve aanpak reeds na de eerste stap doodloopt en dat ik dus in het duister tastte. Aldus berichtte ik hem en hij berichtte mij per kerende post dat het hem precies zo was vergaan. We begonnen de bestaande meer recente boeken over dimensietheorie er op na te slaan om te zien of daar informatie te vinden was. Allereerst is daar een beroemd boek van Alexandroff en Pasynkov [1]: op pagina 163 staat dezelfde bewering, eveneens zonder bewijs. En dan is er de bijbel van Engelking [16], daar is op pagi-



Figuur 4 Pavel (Paul) Sergeevich Alexandroff (1896–1982)



na 392 ook deze bewering zonder bewijs te vinden. Zo ook in de boeken van Pears [30] op pagina 148, Fedorchuk [18] op pagina 106, Van Mill [26] op pagina 189 en de tweede bijbel van Engelking [17] op pagina 6. Ook is deze bewering te vinden in talloze artikelen die over de geschiedenis van de dimensietheorie gaan. De auteurs hebben allen het zinnetje van Hurewicz en Wallman [21] klakkeloos overgepend zonder er één echte gedachte aan te wijden.

Fedorchuk schreef me dat hij graag naar Amsterdam wilde komen om met mij over de zin in het boek van Hurewicz en Wallman te spreken. Was die uitspraak wel correct? Afgesproken werd dat hij de VU van 1 tot 15 mei 1999 zou bezoeken. In maart 1999 kreeg ik verschillende brieven. Had ik al over het probleem nagedacht, was ik al dicht bij een oplossing? Ik reageerde stevast dat mij de tijd ontbrak, dat ik wel zou gaan nadenken als hij in Amsterdam was. De mailtjes bleven komen.

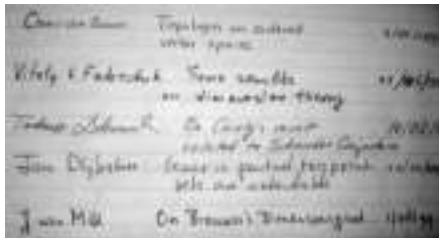
Enkele weken voor zijn bezoek begon ik serieus over het probleem na te denken. En toen ik hem op 1 mei 1999 van Schiphol ophaalde, was ik in een staat van grote opwindning. Toen we elkaar zagen zei ik zonder hem de hand te schudden: "Vitaly, I can do it!" Hij antwoordde: "Jan, I can do it too!" Hij had eigenlijk gelijk weer rechtsomkeert kunnen maken richting Moskou, waar hij voor was gekomen was door ons beiden in de voorafgaande weken onafhankelijk opgelost. Toen we de oplossingen vergeleken, was de mijne verre-

weg de beste: zijn oplossing werkte alleen in dimensie 4 en was gestoeld op grof geschut, mijn oplossing was meetkundig en elegant en werkte voor alle dimensies groter dan of gelijk aan 2. Wat hadden we opgelost? Wel, dat de uitspraak in het boek van Hurewicz en Wallman niet deugt, dat er voor elke $n \geq 2$ een n -dimensionale lokaal samenhangende Poolse ruimte bestaat waarvan de dimensionsgrad gelijk is aan 1. Dat wil zeggen, de Menger-Urysohn-dimensie onderscheidt al deze ruimten, terwijl de dimensionsgrad geen informatie verschaft.

We zagen eerder dat het discontinuüm van Cantor een soort van gatenkaas is waar geen enkel lijnstukje in zit. Deze verzameling is nul-dimensionaal. Veel ingewikkelder voorbeelden die eenzelfde soort gedrag vertonen en van willekeurig hoge dimensie, werden geconstrueerd door Stephan Mazurkiewicz [24] (1888–1945). Deze gatenkazen werden door mij van een uitwendig raamwerk voorzien, waardoor lokale samenhang ontstond. De vele gaten in de oorspronkelijke ruimten werden ten slotte gebruikt om te bewijzen dat hun dimensionsgrad gelijk is aan 1. De voorbeelden zijn overigens niet bijzonder ingewikkeld en behoren zeker niet tot de resultaten waar ik het meest trots op ben. Mijn resultaten in de oneindig-dimensionale topologie en andere gebieden zijn veel belangrijker en gaan dieper. Maar het verhaal dat bij mijn activiteiten met betrekking tot de dimensionsgrad hoort, is bijzonder en daarom wilde ik het u graag vertellen.



Vitaly Vasilyevich Fedorchuk (1918–2008) en Vitaly Vitalievich Fedorchuk (1942–2012)



Figuur 5 Seminar topologie 1999

Op 11 mei 1999 sprak Vitaly in het seminar topologie over dimensietheorie. Zie Figuur 5. Ik sprak twee weken later over onze gemeenschappelijke resultaten die we later publiceerden in *Fundamenta Mathematicae* [19].

Het stemt mij tot grote tevredenheid dat ik iets heb kunnen toevoegen aan het wetenschappelijke verhaal van Brouwer. Anderen hebben zich beziggehouden met waar de man over dacht, zijn vele conflicten, zijn genialiteit en wat hem bewoog, zie bijvoorbeeld [9]. Maar ik ben voor dergelijke beschouwingen niet deskundig en heb me bij zijn vakgebied gehouden.

Terug bij de VU

Ik vertelde u eerder dat we in 1980 uit Amerika terugkwamen naar Nederland. Het leven hernam zijn gewone gang, ik werd in 1984 hoogleraar, bouwde een groep op en leidde het leven van een gewone hoogleraar in de wiskunde. Samen met mijn promovendi en collega's verdiepte ik me in de oneindig-dimensionale topologie en gebieden daaraan verwant.

Met Roman Pol uit Warschau werk ik sinds de tachtiger jaren aan de dimensietheorie. Verschillende tegenvoorbeelden werden geconstrueerd door een bepaalde methode te gebruiken om bijzondere hoog-dimensionale deelverzamelingen te construeren in elk compact van voldoende hoge dimensie. Deze methode gaat terug op de al eerder genoemde Stephan Mazurkiewicz [24] en Bronisław

Knaster (1893–1980) [22]. In 2010 werd met de methode en eerder verkregen resultaten een deelverzameling X van $\mathbb{R}^4$ geconstrueerd die geschreven kan worden als $A \cup B$, zodat voor elke $m \geq 1$ het volgende waar is [28]:

$$\dim(A \cup B) > \dim[(A \times B)^m] + 1.$$

Dit loste voor $\mathbb{R}^4$ een vermoeden op van Evgenij V. Ščepin [15] uit 1991.

Met Klaas Pieter Hart, Alan Dow en de in 1987 te vroeg overleden Eric van Douwen werkte ik aan Čech–Stone-compactificaties en daaraan gerelateerde begrippen zoals F -ruimten. Mijn beste resultaat met Eric is wellicht een consistent voorbeeld van een compacte nuldimensionale F -ruimte van gewicht $\mathfrak{c}$ dat niet ingebed kan worden in een basisonsamenhangende ruimte [13]. Dit resultaat en werk van Alain Louveau [23] laat zien dat een vraag van de bekende Franse wiskundige Gutave Choquet (1915–2006) onbeslisbaar is binnen de Zermelo–Fraenkel-verzamelingenleer. Eric was een student van Jan Aarts uit Delft, raakte in onmin met hem en week uit naar de VU om te kunnen promoveren bij Maarten Maurice. Ondanks diverse lijmpogingen leek de breuk definitief (gelukkig is de onenigheid vlak voor de dood van Eric bijgelegd). Eric had geen aanstelling aan de VU, maar kwam op gezette tijden met Maarten spreken over zijn proefschrift. Van de vele promovendi die toen op de VU rondliepen, gaf Eric mij bijzondere aandacht. Hij gaf mij manuscripten om te lezen, stelde mij vragen en daagde me uit.

Eric was een verbale gigant die een medemens met enkele gerichte sneren van al zijn of haar eigenwaarde kon ontdoen, maar tegen mij was hij hoffelijk en vriendelijk. Later, toen Eric naar Amerika was vertrokken, begon hij mij te schrijven, stuurde artikelen van anderen op en bleef mij uitdagen. Zijn ster steeg snel en hij zette de standaard voor mij, minder dan Eric kon niet, zijn uitdagingen liet ik niet onbeantwoord. Onze relatie kwam daardoor soms onder druk te staan en de toon van de brieven was bij tijd en wijlen geprikkeld. Toen ik later op de conferenties in Amerika acte de presence gaf, kende iedereen mij, vanwege Eric. Bij de recepties en diners was hij vaak in mijn nabije omgeving te vinden, want hij was slechthorend en door zijn handicap kon hij vaak met niemand communiceren, behalve met mij. Hij overleed geheel onverwacht op 41-jarige leeftijd aan een hartinfarct. Bijna al zijn brieven heb ik bij diverse grote schoonmaken weggegooid. Toen ik na zijn overlijden zijn archief mocht inzien, kwam ik daar een

map tegen met daarop het woord 'Jan'. De gehele correspondentie was door Eric bewaard en voorzien van commentaar. Als hommage aan hem, heb ik met hulp van Arjen Sevenster van Elsevier zijn verzameld werk uitgegeven. Hij was mijn leermeester, mijn vriend en tegelijk waren wij in een moordend competitief gevecht gewikkeld. Slechts weinigen weten dat ik uitermate competitief ben, maar Eric had het gezien en gebruikte het om meer uit mij te persen dan ik ooit voor mogelijk had gehouden. Ik heb heel, heel erg veel aan hem te danken.

Met Alan Dow uit Canada werkte ik onder meer aan verafgelegen punten in Čech–Stone-compactificaties. De vraag of elke niet-compacte Lindelöf-ruimte een verafgelegen punt heeft, werd in 1979 opgeworpen door Eric van Douwen [12]. Ik bewees in 1982 dat dat het geval is onder aanname van het axioma van Martin [25]. Maar zonder extra aannamen is de vraag nog steeds onbeantwoord. In 2003 bewezen Alan Dow en ik dat elke niet-compacte Lindelöf-ruimte die nergens van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is zo'n punt bezit [14], een resultaat dat sindsdien niet verbeterd is.

Met Klaas Pieter Hart werkte ik aan geordende ruimten en topologische groepen en recentelijk zijn we een project gestart over de dimensietheorie van F -ruimten. We bewezen de verrassende stelling dat onder aanname van de Continuümhypothese, de drie klassieke dimensiefuncties op compacte F -ruimten van gewicht $\mathfrak{c}$ dezelfde waarden aannemen [20]. Voor compacte F -ruimten van gewicht $\mathfrak{c}^+$ is dat niet het geval, zoals recentelijk door mij werd aangetoond [27]. Aan de Technische Universiteit Delft is de promovendus Leon Luo op dit project werkzaam.

Met Jan Dijkstra vond ik topologische karakteriseringsstellingen van de zogenaamde Erdős-ruimten [11] en [10]. Dat zijn de deelruimten van de klassieke Hilbert-ruimte ℓ^2 van alle punten met louter rationale, respectievelijk, irrationale coördinaten. Dit vruchtbare project is nog niet ten einde. Het ligt in de bedoeling om het aftelbaar oneindige product van de volledige Erdős-ruimte topologisch te karakteriseren. Dit om greep te krijgen op de homeomorfismengroepen van de klassieke universele Menger-ruimten.

Met Wis Comfort uit de Verenigde Staten werkte ik aan topologische groepen. In 1988 formuleerde hij met zijn collega Robertson het vermoeden dat elke pseudocompacte topologische groep een echte pseudocompacte dichte ondergroep heeft [8]. De oplossing van deze vraag had nogal wat voeten in de aarde. Talloze wiskundigen publiceerden gedeel-



Eric Karel van Douwen (1946–1987)



Figuur 6 Sectorplan Natuurwetenschappen VU en UvA

telijke oplossingen en verfijnden bestaande technieken. Het oorspronkelijke artikel van Comfort en Robertson werd vele malen geciteerd. Uiteindelijk werd de oplossing van het probleem gevonden door Comfort en mijzelf door niet te focussen op transfiniete inductie, maar op een directe methode die het mogelijk maakt om alle G_δ -dichte ondergroepen van een pseudocompacte groep op een geschikte manier te splitsen [7].

In totaal werkte ik samen met 82 co-auteurs uit 22 landen, voor een wiskundige respectabele aantallen, waaruit blijkt dat de VU op de wetenschappelijke kaart stond in

mijn gedeelte van de wiskunde. Aan twee van mijn co-auteurs — Henk Barendregt en Lex Schrijver — werd in Nederland de Spinozapremie toegekend. Met de meeste co-auteurs knoopte ik ook persoonlijke banden aan; ik heb goede persoonlijke verhoudingen altijd gezien als een essentiële voorwaarde voor succes. Het leukste vond ik het werken met promovendi. Het is zeer bevredigend om jonge mensen zich te zien ontwikkelen tot zelfstandige onderzoekers en uit te zien waaiëren over de gehele wereld.

Begin negentiger jaren zette de afdeling de nieuwe opleiding Bedrijfswiskunde- en In-

formatica op de rails. De trekkers waren Nico Dekker en Gerke Nieuwland en later ook Kobus Oosterhoff. De gehele afdeling werkte van harte mee, zo gaf ik vele jaren het college analyse voor BWI-ers. Ik heb overigens altijd met veel plezier onderwijs gegeven. De nieuwe opleiding was een groot succes en hielp de afdeling door een moeilijke fase heen. Een geheel nieuw type studenten werd door de studie aangetrokken. Er zal wel eens een wiskunde- of informaticastudent over en weer zijn omgezwaaid maar die aantallen bleken marginaal. Van kannibalisering van bestaande studierichtingen bleek geen enkele sprake. Met verbazing merkte ik in latere jaren, dat de houding van de afdeling wiskunde in die tijd eigenlijk bijzonder was. Talloze nieuwe onderwijsinitiatieven heb ik meegemaakt, steevast was er verzet van bestaande opleidingen die kannibalisering van de eigen kroonjuwelen vreesden.

Ik zal het nog één keer uitleggen. Een nieuwe opleiding die goed is gepositioneerd en een duidelijk herkenbaar eigen gezicht heeft, trekt een nieuw type student aan. Dat kroonjuwelen daardoor ter ziele gaan, hoeft niet worden gevreesd. In tegendeel, door vakken van bestaande opleidingen te integreren met die van nieuwe opleidingen, kan efficiëntiewinst worden geboekt die de bestaande opleidingen ten goede komt. Zoals gezegd, binnen de afdeling wiskunde waren de negatieve sentimenten veruit in de minderheid, vrijwel iedereen hielp van harte mee, als docent en als begeleider van afstudeerders. De sfeer in de afdeling werd trouwens door een grote meerderheid als erg goed ervaren. Jong talent werd gekoesterd. In het begin van mijn carrière waakte de al eerder genoemde Maarten Maurice over mij. Hij zorgde dat ik enige tijd afgeschermd bleef van een en ander, waardoor ik mij vrij kon ontwikkelen. Onder tussen kreeg ik van hem de ene wagonlading kritiek na de andere: nog nooit heb ik in mijn leven van iemand zoveel kritiek te verduren gehad als van hem. Soms werd het mij wel eens een beetje te veel en bromde ik een beetje tegen hem, maar altijd herstelden de verhoudingen zich en was er die bevrijdende lach. Ik heb Aad van der Vaart zien komen als jonge medewerker en ik heb hem zich zien ontwikkelen tot de topwiskundige die hij geworden is. Dat gaf geen aanleiding tot jaloers gezeur van anderen, men verheugde zich in zijn successen. Ik heb Rien Kaashoek de internationale grootheid Israel Gohberg (1928–2009) zien binnenhalen, waardoor de afdeling in het vakgebied operatorentheorie tot de wereldtop ging behoren. De afdeling zet-

te ook een zeer succesvol programma op voor buitenlandse masterstudenten, voornamelijk uit Oost-Europa. Ik denk met veel plezier terug aan de samenwerking die ik in dat kader had met Geurt Jongbloed. In het algemeen kun je stellen dat de sfeer in de afdeling die van wederzijds respect was, gericht op overleving, met veel aandacht voor onderwijs en met een open oog voor vernieuwingen en nieuwe ontwikkelingen. Betekent dit dat er nooit eens onenigheid was tussen leden van de afdeling wiskunde? Zeker wel, maar die werd binnen eigen kring opgelost zonder al te veel ‘gedoe’.

Bestuur

Al snel, ik spreek over begin tachtiger jaren, werd ik meegenomen bij besprekingen tussen

de wiskundeafdelingen van VU en UvA over samenwerking. De samenwerking kwam niet erg van de grond, behalve dan de uitwisseling van enkele wetenschappers. Zo was Jaap Korevaar een veel geziene gast op de VU en was ik parttime verbonden aan de UvA. Het verheugt mij om te zien dat vandaag de dag de samenwerking tussen VU en UvA wél van de grond komt en dat de eerste stappen zijn gezet in de periode dat ik decaan was. In Figuur 6 ziet u de brief die Karel Gaemers en ik ondertekenden in het kader van het Sectorplan Natuurwetenschappen.

Ik doorliep alles wat er bestuurlijk te doorlopen valt binnen de afdeling wiskunde: lid en voorzitter van de wetenschapscommissie, voorzitter van de afdeling, trekker van

de internationalisering, et cetera. Later werd ik voorzitter van de divisie wiskunde en informatica van de Faculteit der Exacte Wetenschappen, trad toe tot het bestuur, werd vice-decaan en tenslotte decaan. Vanaf 1997 tot en met 2010 heb ik bestuurlijke verantwoordelijkheid gedragen, met uitzondering van het academisch jaar 2005. Ook was ik voorzitter van het bestuur van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en lid van het oprichtingsbestuur van het Platform Wiskunde Nederland. Ik heb bestuurlijke taken altijd met plezier vervuld. Voor goed bestuur zijn andere vaardigheden vereist dan die voor een onderzoeker en de combinatie van beiden was interessant en uitdagend voor mij.

Referenties

- 1 P.S. Alexandroff en B. Pasynkov, *Vvedenie v teoriyu razmernosti: Vvedenie v teoriyu topologicheskikh prostranstv i obshchuyu teoriyu razmernosti (Russian) [Introduction to dimension theory: An introduction to the theory of topological spaces and the general theory of dimension]*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1973.
- 2 R.D. Anderson, D.W. Curtis en J. van Mill, A fake topological Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 272 (1982), pp. 311–321.
- 3 A. de Boer, R. Rouw, H.P. Smilde en F. Willemsen, *De onvergetelijke leraar*, Uitgeverij SWP, Amsterdam, 2012.
- 4 B. Bolzano, *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schnörkelung bei Linien sowohl als Flächen sammt einigen verwandten Begriffen*, in: Spisy Bernarda Bolzana, Vol. 5: Geometrické práce, ed. J. Vojtěch, Praha, 1948.
- 5 L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.* 142 (1913), pp. 146–152.
- 6 T.A. Chapman, Topological invariance of Whitehead torsion, *American J. Math.* 96 (1974), pp. 488–497.
- 7 W.W. Comfort en J. van Mill, Extremal pseudocompact Abelian groups are compact metrizable, *Proc. Amer. Math. Soc.* 135 (2007), 4039–4044.
- 8 W.W. Comfort en L.C. Robertson, Extremal phenomena in certain classes of totally bounded groups, *Diss. Math. (Rozprawy Mat.)* 272 (1988), 1–42.
- 9 D. van Dalen, *Mystic, geometer and intuitionist. The life of L.E.J. Brouwer (1881–1966)*, Volumes I en II, Clarendon Press, Oxford, 1999 en 2005.
- 10 J.J. Dijkstra en J. van Mill, Characterizing complete Erdős space, *Canad. J. Math.* 61 (2009), 124–140.
- 11 J.J. Dijkstra en J. van Mill, *Erdős space and homeomorphism groups of manifolds*, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 208 (2010).
- 12 E.K. van Douwen, Why certain Čech–Stone remainders are not homogeneous, *Coll. Math.* 41 (1979), 45–52.
- 13 E.K. van Douwen en J. van Mill, Subspaces of basically disconnected spaces or quotients of countably complete Boolean Algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 259 (1980), 121–127.
- 14 A. Dow en J. van Mill, ω -far points in large spaces, *Top. Appl.* 129 (2003), 79–87.
- 15 A.N. Dranishnikov, On the dimension of the product of two compacta and the dimension of their intersection in general position in Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 5599–5618.
- 16 R. Engelking, *General topology*, Second edition, Sigma Series in Pure Mathematics, 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- 17 R. Engelking, *Theory of dimensions finite and infinite*, Sigma Series in Pure Mathematics 10, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- 18 V.V. Fedorchuk, *The Fundamentals of Dimension Theory*, Encyclopedia of Mathematical Sciences 17, Springer, 1990, pp. 91–202.
- 19 V.V. Fedorchuk en J. van Mill, Dimensionsgrad for locally connected Polish spaces, *Fund. Math.* 163 (2000), 77–82.
- 20 K.P. Hart en J. van Mill, Covering dimension and finite-to-one maps, *Top. Appl.* 158 (2011), 2512–2519.
- 21 W. Hurewicz en H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Mathematical Series, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1941.
- 22 B. Knaster, Sur les coupures biconnexes des espaces euclidiens de dimension $n > 1$ arbitraire, *Mat. Sbornik* 19 (1946), 9–18.
- 23 A. Louveau, Caractérisation des sous-espaces compacts de $\beta\mathbb{N}$, *Bull. Sci. Math.* 97 (1973), 259–263.
- 24 S. Mazurkiewicz, Sur les problème κ et λ de Urysohn, *Fund. Math.* 10 (1927), 311–319.
- 25 J. van Mill, Weak P-points in Čech–Stone compactifications, *Trans. Amer. Math. Soc.* 273 (1982), 657–678.
- 26 J. van Mill, *Infinite-dimensional topology. Prerequisites and introduction*, North-Holland Mathematical Library 43, North-Holland, Amsterdam, 1989.
- 27 J. van Mill, A compact F-space with noncoinciding dimensions, *Top. Appl.* 159 (2012), 1625–1633.
- 28 J. van Mill en R. Pol, An example concerning the Menger–Urysohn formula, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), 3749–3752.
- 29 J. von Neumann en O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, 1944.
- 30 A.R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), New York, Melbourne, 1975.
- 31 H. Poincaré, Pourquoi l'espace a trois dimensions, *Révue de Métaphysique et de Morale* 20 (1912), pp. 483–504.
- 32 F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del 4 Congresso Internazionale dei Matematici, Rome, 1910, vol. 2, pp. 18–24.
- 33 J.L. Taylor, A counterexample in shape theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 81 (1975), pp. 629–632.
- 34 H. Toruńczyk, On CE-images of the Hilbert cube and characterizations of Q -manifolds, *Fund. Math.* 106 (1980), pp. 31–40.
- 35 H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, *Fund. Math.* 111 (1981), pp. 247–262.
- 36 J.A. West, Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution to a conjecture of Borsuk, *Ann. of Math.* 106 (1977), pp. 1–18.

Saskia van Boven

Instituut Leraar en School

Radboud Universiteit Nijmegen

s.vanboven@ils.ru.nl

Evenement 19de Nationale Wiskunde Dagen

Nimmer overschat een wiskundig probleem

Op 1 en 2 februari was het weer zo ver: ongeveer 650 wiskundeleraars en honderd andere belangstellenden zoals lerarenopleiders, onderzoekers en wiskundefans, trokken naar Noordwijkerhout voor het opdoen van hun jaarlijkse portie inspiratie: de Nationale Wiskunde Dagen. Saskia van Boven, vakdidacticus wiskunde aan de Radboud Universiteit, geeft een impressie van deze negentiende editie.



De spetterende opening van de negentiende editie werd verzorgd door de virtuoze gitarist Wim den Herder, die liet horen hoe hij een aantal op zichzelf eenvoudige muzikale lijntjes wist samen te smeden tot één muziekstuk. Hij legde een link met de wiskunde door zichzelf als een gesjeesde wiskundestudent te presenteren die nadrukkelijk heeft gekozen voor de muziek. Bij het componeren maakt hij gebruik van 'open plekken' in een muzikale lijn, die hij maximaal probeert op te vullen. De truc zat in het woord maximaal, want waarschijnlijk is hij zelf de enige die zijn composities ten uitvoer kan brengen: de vingervlugheid die nodig is om zijn stukken te spelen is ongekend. Zijn laatste stuk heette dan ook niet voor niets 'Kiroshi', Japans voor 'jezelf doodwerken', wat een gewone sterveling ongeveer zou moeten doen om deze mate van beheersing op een gitaar te bereiken.

De openingslezing werd verzorgd door Snezana Lawrence, een Sloveense wiskun-

dige, die zich bezighoudt met 'developable surfaces'. Zij bracht de ontwikkeling van de wiskunde aan het einde van de achttiende eeuw rond deze oppervlakken in verband met de hoogte van vestingmuren en liet vervolgens zien hoe de *developable surfaces* in moderne architectuur nog steeds worden gebruikt.

Wortelkoningin

In het middagprogramma was er als vanouds voor iedereen wel een leuk thema om een werkgroep uit te kiezen: van wiskunde en kunst tot wiskunde en algoritmen. In het thema 'wiskunde en kunst' werd materiaal gedemonstreerd dat kan worden gebruikt binnen het nieuwe vwo wiskunde C-programma. Het betrof een lessenserie waarin de gulden snede centraal staat en waarbij verschillende wiskundige vaardigheden door leerlingen moeten worden gedemonstreerd. Door de artistieke context zal dit materiaal C&M-leerlingen zeker aanspreken en dat bleek ook uit de bevindingen van een docent die dit met haar klas had uitgeprobeerd. In de serie 'wiskunde en algoritmen' stond het handmatig worteltrekken op het programma en werden de aanwezigen aan het werk gezet om het geleerde meteen in de praktijk te brengen. Aan het einde van de werkgroep werd de wortelkoningin geëerd met een mooie medaille. Binnen het thema 'wiskunde en didactiek' was er aandacht voor ICT-gebruik in de wiskunde-

les. Christian Bokhove distantieerde zich van de vermoedende discussie zoals die nu soms wordt gevoerd tussen voor- en tegenstanders van ICT-gebruik in de klas. De discussie zou niet moeten gaan over of je voorstander of tegenstander bent van ICT, maar over wat je leerlingen wilt leren en hoe je dat zou kunnen bereiken. Hij stelde de vraag: Wat zou een leerling moeten doen als hij de vergelijking

$$(x + 3)(x - 7) = (2x + 3)(x + 3)$$

wil oplossen? En wat zou hij doen? De toehoorders waren het erover eens dat een groot aantal leerlingen, ook vwo-leerlingen met wiskunde B in hun vakkenpakket, haakjes zouden gaan wegwerken om vervolgens met de *abc*-formule de oplossingen te vinden. Maar we zouden graag willen dat leerlingen zien dat de vergelijking de vorm $A \cdot B = C \cdot A$ heeft en dus heel eenvoudig is op te lossen. Wanneer die structuur eenmaal doorgrond is, kun je de vraag stellen of het erg is als er vervolgens van ICT wordt gebruikgemaakt om de oplossingen te vinden. Veel met de hand oefenen van het oplossen van dergelijke vergelijkingen leidt niet per se tot een beter wiskundig inzicht.

Zorgrobot

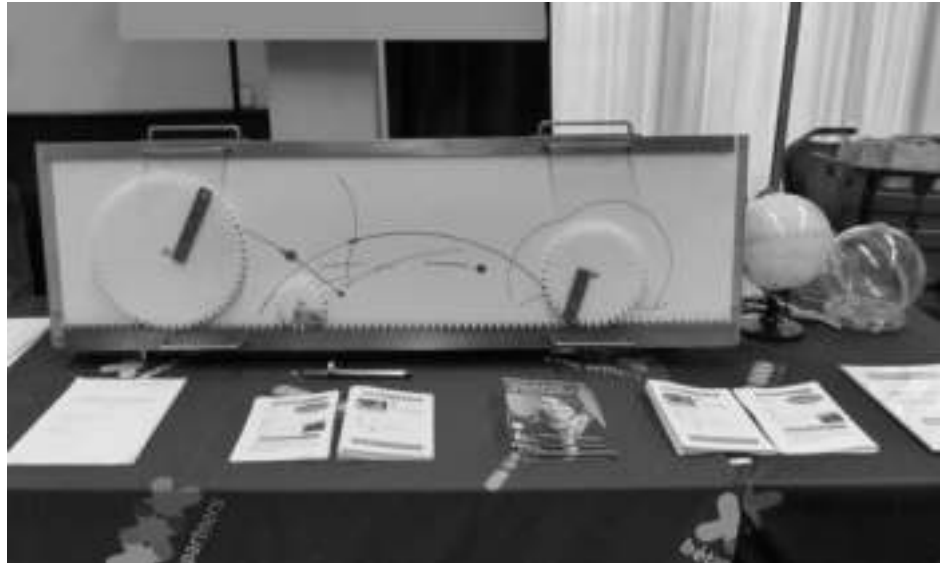
Tussendoor was er ruim de tijd om rond te snuffelen op de infomarkt waar de nieuwste boekjes uit de *Zebrareeks* lagen en wiskundige spelletjes te koop waren. Ook waren de nieuwste (grafische) rekenmachines te bekijken, was een zorgrobot in actie te zien, werden de nieuwste wiskundemethodes gepresenteerd en kon je natuurlijk posters vinden om je klaslokaal mee op te vrolijken.

Wiskundige kunst

Na een heerlijke avondmaaltijd werden we getrakteerd op een fantastisch dessert, namelijk de lezing van Rinus Roelofs, zeg maar de Nederlandse Da Vinci van de twintigste en eenentwintigste eeuw. Rinus Roelofs is een beeldend kunstenaar, maar zijn interesse gaat uit naar 'wiskundige kunst', waarbij hij zijn voorbeeld vindt in mensen als Escher en Da Vinci. Zijn denken concentreert zich op de platonische lichamen en vertoont grote gelijkenis met hoe een wiskundige denkt, maar hij gaat nog een stap verder: hij wil wat hij uitdoktert ook nog kunnen *maken*. Zo liet hij zien dat hij, door puzzelstukjes slim te ontwerpen, prachtige opengewerkte 3D-twintigvlakken en -twaalfvlakken kan maken die zo strak in elkaar passen dat je ze niet meer uit elkaar kunt halen en daarom als kunstwerk buiten neer kunt zetten. Een van de kunstwerken ging bij wijze van *crowdsurfing* over de hoofden van de aanwezigen door de zaal.

Apparaten en mechanieken

Het laatste onderdeel van het gezamenlijke vrijdagprogramma was de première van een vijftien minuten durende documentaire *Mythe van een Magistra*, over Tatjana van Vark. Bijzonder was dat zij zelf daarbij aanwezig was en kon zien hoe haar fascinatie voor apparaten en mechanieken (telefooncentrales, een mechaniek om grafieken van de optelling van meerdere sinussen mee te tekenen, een navigatiesysteem van een V1-bommenwerper) werd getoond aan een groter publiek. Deze documentaire komt hopelijk binnenkort op YouTube beschikbaar.



Het avondprogramma was gevuld met de wiskundequiz, spelletjes doen in het Atrium en genieten van de band Hit the Ceiling, maar er was uiteraard ook genoeg ruimte om bij te kletsen met andere NWD-gangers. Het was nog lang onrustig in het Atrium...

Het permanent-vermoeden

Op zaterdagochtend stonden om 6.30 uur zeventig personen te trappelen om het zes kilometer lange rondje hard te lopen of te wandelen. Gelukkig was het dit jaar geen -15°C , zoals vorig jaar, maar met een stevige wind was het toch guur. Desondanks werd menig snelheidsrecord gebroken. Na het ontbijt was er weer een werkgroepsessie waarin kon worden gekozen uit verschillende thema's als 'wiskunde vast- en begrijpen' en 'wiskunde en landmeting'. De docentenwerkgroep over een

leerlijn PO's van klas 1 tot klas 6 werd druk bezocht en leverde direct bruikbaar materiaal voor in de klas. In de daaropvolgende lezingen kwamen ook weer een paar paretjes voorbij. De laatste plenaire spreker was Lex Schrijver, die over kleuren, permanent en knippen sprak.

Het leek even alsof hij verkeerd was en eigenlijk op een kapperscongres thuishoorde, maar al snel werd duidelijk dat de permanent een functie van een matrix was, vergelijkbaar met, maar minder 'mooi' dan een determinant. De schaar werd gebruikt om in een graaf te 'knippen', waardoor een bewijs van het permanent-vermoeden van Van der Waerden kon worden vormgegeven, en de kleuren dienden om een (school)roosterprobleem op te lossen. Saillant detail: het bewijs van het bewuste permanent-vermoeden werd gevonden door een wiskundige die eigenlijk geen verstand had van het probleem. Het team van vijf wiskundigen die wel expert waren op dit terrein had het nakijken. Vandaar dat Lex Schrijver zijn tegeltjeswijsheid presenteerde: *nimmer overschat een wiskundig probleem*. Even later sprak hij weer over *nimmer onderschat een wiskundig probleem* en liet hij zien dat je bij sommige wiskundige problemen wel een heel ingewikkeld bewijs nodig hebt. Je weet eigenlijk nooit welke kant je op moet denken en dat maakt de wiskunde zo mooi.

Tot slot

In 2012 werd de achttiende editie van de NWD geopend door Diederik Samsom, wiens populariteit in dat jaar een exponentiële groei vertoonde. Wie weet gebeurt dit ook met Wim den Herder, die dit jaar het startschot gaf. De tijd zal het uitwijzen, maar *nimmer onderschat de NWD*. 



Jeroen Spandaw

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft

j.g.spandaw@tudelft.nl

Vakantiecursus

Divergente divertimenti

Hoeveel is oneindig minus oneindig? Sinds 1946 organiseert het CWI in de zomer een vakantiecursus. Deze inspirerende en informatieve bijeenkomst over wiskunde wordt vanaf 2012 georganiseerd door het Platform Wiskunde Nederland. Het thema is 'De exacte benadering'. Jeroen Spandaw houdt een lezing over divergente reeksen en integralen. Hij laat zien dat divergente reeksen verrassende eindige uitkomsten kunnen hebben.

In de vakantiecursus van 2012 mocht ik iets vertellen over divergente reeksen en integralen. Een dankbaar thema, want het begrip 'oneindig' intrigeert ook leerlingen. Bovendien zijn intuïtieve manipulaties van divergente reeksen en de daaruit resulterende paradoxen heel toegankelijk. Dat was niet alleen prettig voor mijn publiek, maar ook voor mij, want ik ben geen expert in de analyse. Vrijwel al mijn wiskundige en historische kennis over dit onderwerp heb ik uit het beroemde boek *Divergent Series* van Hardy.

Het ging me vooral om het plezier dat je aan divergente reeksen kunt beleven. Dat geldt ook in deze tekst. Voor meer diepgang verwijs ik naar [1]. In mijn wiskundestudie leerde ik divergente reeksen te herkennen en vervolgens te negeren. Later ontdekte ik echter dat natuurkundigen in staat zijn om zinnige informatie uit divergente reeksen te halen. "Just because something is infinite, doesn't mean it is zero", zeggen zulke natuurkundigen. Met twijfelachtige methoden boekten ze interessante resultaten, die soms zelfs experimenteel bevestigd werden. Hieronder zal ik hiervan twee voorbeelden geven.

Behalve vermaak probeerde ik ook enige lering te brengen. Twee punten zijn al genoemd. Allereerst zijn divergente reeksen niet nutteloos. Ten tweede kunnen natuurkundi-

gen met dubieuze methoden interessante resultaten boeken. De rechtvaardiging hiervoor ligt voor hen in het laboratorium, niet in vlekkeloze logica. Gelukkig zijn er ook keurige wiskundige sommatiemethoden voor divergente reeksen, waarvan enkele in dit artikel de revue passeren. Andere leerpunten zijn asymptotische ontwikkeling en het belang van definities.

Op de grens tussen con- en divergentie

Na een korte inleiding over de divergentie van $\sum_1^\infty n^{-1}$ en Eulers berekening van $\sum_1^\infty n^{-2}$ kwam de trompet van Toricelli ter sprake. Dit is het omwentelingslichaam van $y = x^{-1}$ om de x -as voor $x \geq 1$. De inhoud $\pi \int_1^\infty y^2 dx$ is eindig, maar de oppervlakte $2\pi \int_1^\infty y \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ is oneindig! De eindige hoeveelheid verf die in de trompet past, is dus niet voldoende om de oneindige buitenkant te verven. Een interessante paradox voor leerlingen die aansluit op de schoolstof. De herschikkingstelling van Riemann is eveneens toegankelijk voor leerlingen, zeker als je haar aan de hand van een concreet voorbeeld zoals $\sum_1^\infty (-1)^n n^{-1}$ behandelt.

De noodzaak van definities

Na de milde divergentie in de vorige paragraaf bekijken we nu wat wildere reeksen. Neem

bijvoorbeeld de volgende redenering:

$$S_1 := 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - S_1,$$

dus $S_1 = \frac{1}{2}$. Mag dat (om het eens in leerlingentaal te formuleren)? Het voor leraren verrassende antwoord luidt: dat hangt van de interpretatie af. Als je de som van een reeks op de gebruikelijke manier definieert als de limiet van de deelsommen $1, 0, 1, 0, \dots$, dan is de bovenstaande 'berekening' natuurlijk niet correct. Maar er zijn andere mogelijkheden, zoals de sommatiemethoden van Cesàro en Abel. Volgens de sommatiemethode van Cesàro nemen we de limiet van de *gemiddelden* $1, \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}, \frac{1+0+1+0}{4} = \frac{1}{2}, \dots$ van de deelsommen. Die limiet bestaat wel en is inderdaad gelijk aan $\frac{1}{2}$. De sommatiemethode van Cesàro voldoet aan de axioma's

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots &= L \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots &= L - a_0 \end{aligned} \quad (1)$$

en

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots &= L \\ \Rightarrow (ka_0) + (ka_1) + (ka_2) + \dots &= kL. \end{aligned} \quad (2)$$

(De tweede eigenschap hebben we gebruikt voor $k = -1$.) Als we de berekening van S_1 bekijken en we interpreteren de reeks volgens de sommatiemethode van Cesàro, dan is de redenering correct zodra we weten dat de reeks 'Cesàro-convergent' is. Iedere som-

matiemethode die aan axioma's (1) en (2) voldoet en die aan $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ een eindige waarde toekent, moet dus $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ opleveren.

Een tweede sommatiemethode is die van Abel. Gegeven een rij $\{a_n\}$ bekijk je de machtreks $f(x) = \sum a_n x^n$. Als de convergentiestraal van deze machtreks minstens 1 is en $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ bestaat, dan is deze limiet per definitie de Abel-som van de reeks $\sum a_n$. (Abel heeft bewezen dat een convergente reeks ook convergeert in deze zin en wel met dezelfde limiet. Vanwege deze stelling heeft Hardy deze methode naar Abel genoemd. Abel veroordeelde overigens het gebruik van divergente reeksen, die hij een uitvinding van de duivel noemde.) Je rekent gemakkelijk na dat de methode van Abel eveneens $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ levert. Dit volgt ook uit de theorie. Cesàro-convergente reeksen zijn namelijk convergent in de zin van Abel met dezelfde som. Bovendien voldoet de methode van Abel aan axioma's (1) en (2), dus is $S_1 = \frac{1}{2}$ het enige mogelijke antwoord.

Hardy maakt hierover in zijn boek een interessante opmerking. Voor ons is vanzelfsprekend dat je over $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ pas uitspraken kunt doen als je gedefinieerd hebt wat je met die uitdrukking bedoelt. Volgens Hardy is dit een ontwikkeling uit de negentiende eeuw. Voor Cauchy ging men er in de regel van uit dat de som bestond; het ging er alleen om hoe je die som kon uitrekenen. Vermoedelijk denken leerlingen (onbewust) ook zo. Ik denk dat het goed is om je dat als docent te realiseren.

Semper crescendo

De reeks $S_2 := 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ is nog wilder dan $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. De methode van Cesàro faalt, maar als we het idee van Cesàro om te middelen nog een keer toepassen, dan vinden we $S_2 = \frac{1}{4}$. De methode van Abel geeft eveneens $\frac{1}{4}$. Dit voorbeeld toont aan dat de methode van Abel sterker is dan die van Cesàro. Hier is nog een argument voor $S_2 = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \dots) \\ &\quad - (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) \\ &= 1 - S_1 - S_2 = 1 - \frac{1}{2} - S_2. \end{aligned}$$

Dit argument werkt voor iedere sommatiemethode waarvoor S_1 en S_2 convergeren en die niet alleen aan de axioma's (1) en (2) voldoen, maar ook aan

$$\begin{aligned} \sum a_n &= s \quad \text{en} \quad \sum b_n = t \\ \Rightarrow \sum (a_n + b_n) &= s + t. \end{aligned} \quad (3)$$



De methoden van Cesàro en Abel voldoen beide aan de drie axioma's. Toch geldt niet $S_2 = \frac{1}{4}$ volgens Cesàro, want S_2 is niet Cesàro-sommeerbaar.

Nog divergentier dan S_2 is $S_3 := 1 - 2 + 4 - 8 + \dots$. De methode van Abel werkt niet (en Cesàro dus ook niet), omdat de bijbehorende machtreks $\sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = (1 + 2x)^{-1}$ convergentiestraal $\frac{1}{2}$ heeft. Toch ligt het voor de hand om S_3 te definiëren als $(1 + 2)^{-1} = \frac{1}{3}$. Deze methode (gebaseerd op analytische voortzetting) noemen we de methode van Euler. Deze sommatiemethode voldoet net als de methoden van Cesàro en Abel aan de axioma's (1), (2) en (3). Iedere sommatiemethode die aan die axioma's voldoet en aan S_3 een eindige waarde toekent moet $S_3 = \frac{1}{3}$ geven, want die waarde voldoet aan $1 - 2S_3 = S_3$. Nauw verwant met S_3 is $S_4 := 1 + 2 + 4 + \dots$. Eulers methode geeft $S_4 = -1$. Interessant dat louter positieve termen een negatieve 'som' hebben!

De paradox van milde divergentie

Euler schreef: "Ich glaube, dass jedes series einen bestimmten Wert haben müsse." (Voor wiskundige begrippen gebruikte hij Latijnse termen.) Toch bestaan er reeksen die we er nog steeds niet onder hebben gekregen. Een eenvoudig voorbeeld is $S_5 := 1 + 1 + 1 + \dots$. Geen enkele sommatiemethode die voldoet aan axioma (1) kan aan S_5 een eindige waarde toekennen, want die waarde zou een oplossing zijn van $S_5 = 1 + S_5$.

Een interessanter voorbeeld is de mild divergente harmonische reeks $\sum n^{-1}$. Ook hier-

over maakt Hardy een interessante opmerking. Mild divergente reeksen zijn in zekere zin moeilijker te temmen dan wild divergente reeksen. De harmonische reeks $\sum n^{-1}$ is niet convergent in de zin van Abel, terwijl Abel de wildere reeks $\sum (-1)^n n$ wel aankan. Dit fenomeen is een gevolg van de Tauberstellingen. Deze stellingen gaan over reeksen $\sum a_n$ waarvan de termen voldoende snel naar 0 convergeren, bijvoorbeeld $a_n = O(n^{-1})$. Als zo'n reeks convergent in de zin van Abel is, dan is de reeks convergent in de traditionele zin (en met dezelfde limiet). Een mild divergente reeks krijgen we met Abels methode dus niet in het gareel.

De reeks $1 + 2 + 3 + \dots$

Een divergent divertimento dat niet mag ontbreken in zo'n feestelijke vakantie cursus is

$$S_6 := 1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}.$$

Deze opmerkelijke 'identiteit' wordt gebruikt in de natuurkunde, bijvoorbeeld in de berekening van het aantal dimensies van het universum in de bosonische snaartheorie en in de berekening van een zekere minuscule kracht tussen twee metalen platen. Deze kracht is voorspeld door en vernoemd naar de Nederlandse natuurkundige Hendrik Casimir (1909–2000). Later is deze kracht in laboratoria ook daadwerkelijk gemeten.

Behalve deze natuurkundig-experimentele onderbouwing is er ook een wiskundig argument, dat teruggaat op Euler. "Though $\sum n = -\frac{1}{12}$ be madness, yet there is a method in it!" We bekijken de reeks

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

De reeks divergeert voor $s \leq 1$. Toch kunnen we iets zinvol zeggen over $\zeta(-1)$ door het domein van ζ uit te breiden naar de complexe getallen. De reeks convergeert in het halfvlak $\text{Re}(s) > 1$ en definieert daar een complex analytische functie. Die functie heeft een unieke analytische voortzetting naar $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, de beroemde *Riemann-zètafunctie*. Deze functie neemt in $s = -1$ de waarde $-\frac{1}{12}$ aan. Dit is de reden voor de drieste bewering $\sum n = -\frac{1}{12}$.

In de vorige paragraaf bekeken we $S_5 := 1 + 1 + 1 + \dots$. Met de zètafunctie vinden we $S_5 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Kunt u dit rijmen met de vergelijking $S_5 = 1 + S_5$?

Asymptotische ontwikkeling

Kunnen we de beweringen als $1 + 1 + 1 + \dots = -\frac{1}{2}$ en $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ nog overtreffen?

Jawel! In de werken van Euler vinden we de spectaculaire bewering

$$0! - 1! + 2! - 3! + \dots = 0.596347 \dots$$

Dit is het bijbehorende argument:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t} dt &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty (-t)^n e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (-t)^n e^{-t} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n n!. \end{aligned}$$

Bij een tentamen analyse zou deze regel vrij veel puntenaftrek opleveren. Mogen we bijvoorbeeld som en integraal wel verwisselen? Erger nog: de reeks $\sum (-t)^n$ in de integrand is divergent op een groot gedeelte van het integratie-interval $[0, \infty)$. Aan de positieve kant: $\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$ is correct en de $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t} dt$ is inderdaad eindig en gelijk aan 0.596347...

Laten we in de geest van Euler en de zomercursus een vrijzinnig standpunt innemen en de 'waarde' van de wilddivergente reeks rechtsonder *definiëren* als de eindige integraal links. We kunnen dit eenvoudig generaliseren naar

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n n! x^n = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

De convergentiestraal van de reeks links is 0. Toch kunnen we de eindige deelsommenreeks $\sum_{n=0}^m (-1)^n n! x^n$ gebruiken om de integraal rechts te benaderen voor bijvoorbeeld $x = \frac{1}{10}$. Als je dit doet met Maple vind je het beste resultaat voor $m = 9$ met een relatieve fout van 2×10^{-4} . Voor grotere m loopt de fout al snel astronomisch op: bij $m = 20$ is de fout al bijna honderd keer zo groot en bij $m = 30$ meer dan een miljoen keer. De integraal is ongeveer 1, de deelsom voor $m = 100$

is ongeveer 10^{57} !

Dit verschijnsel heet *asymptotische ontwikkeling*. In plaats van een formele behandeling (zie bijvoorbeeld [1]) geef ik liever nog twee mooie voorbeelden van dit verschijnsel. Het eerste voorbeeld komt uit de natuurkunde. Het betreft een indrukwekkend succes uit de theoretische en experimentele natuurkunde: de voorspelling en meting van het zogenaamde magnetische dipoolmoment μ van een elektron. U kunt zich μ voorstellen als een maat voor de 'magneetsterkte' van een elektron. Voor het vervolg doet de natuurkundige interpretatie er niet toe: μ is een getal dat theoretisch berekend en experimenteel gemeten kan worden. Een buitengewoon ingewikkelde berekening levert de eerste coëfficiënten c_n van een machtreeks $\sum c_n x^n$ op. Vervolgens wordt in een deelsom van die reeks voor x de fijnstructuurconstante $\alpha = 0.00729735257 \dots$ ingevuld. Het resultaat is een theoretische voorspelling voor μ , die in deeltjesversnellers met adembenemende nauwkeurigheid (ongeveer tien decimalen) is bevestigd. Natuurkundigen zijn terecht zeer trots op dit resultaat. Ze vertellen er echter meestal niet bij dat de reeks $\sum c_n x^n$ waarschijnlijk convergentiestraal 0 heeft. (Dit volgt uit een natuurkundig argument van de theoretische natuurkundige Dyson.) Meer termen in $\sum c_n \alpha^n$ leiden dus niet tot steeds betere voorspellingen van μ .

Tot slot een wiskundig voorbeeld van asymptotische ontwikkeling. We starten voor de verandering eens met een convergente reeks. De Taylorreeksontwikkeling van $\arctan(x)$ geeft

$$4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right) = \pi.$$

Deze reeks convergeert tergend langzaam. Als we bijvoorbeeld doorrekenen tot $1/1\,000\,000$, dan vinden we

$$\begin{aligned} S &:= 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{999\,999} \right) \\ &= 3.141590 \dots, \end{aligned}$$

terwijl $\pi = 3.141592 \dots$. De zesde decimaal is dus al fout. Dat is niet verwonderlijk, want we verwachtten dat de fout ongeveer $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ is.

Maar nu komt het. We kijken naar de decimalen na de foutieve zesde decimaal:

$$\begin{aligned} S &= 3.14159 \underline{0}6535 \, 89793 \, 24 \underline{0}46 \\ &\quad 26433 \, 83269 \, 50288 \, 4197 \dots \end{aligned}$$

Vergelijk dit met

$$\begin{aligned} \pi &= 3.14159 \, 26535 \, 89793 \, 23846 \\ &\quad 26433 \, 83279 \, 50288 \, 4197 \dots \end{aligned}$$

We zien dat na de foutieve zesde decimaal weer tien correcte decimalen volgen! Daarna komen twee foutieve decimalen, dan weer tien correcte, een foute en weer (minstens) tien correcte decimalen. Wat is hier aan de hand?

Voor n deelbaar door 4, bijvoorbeeld voor $n = 1\,000\,000$, definiëren we $R_n := \pi - 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{n-1} \right)$. Borwein, Borwein en Dilcher hebben in [2] de asymptotische ontwikkeling

$$R_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{10}{n^5} - \frac{122}{n^7} + \dots$$

afgeleid. Vullen we $n = 10^6$ in, dan vinden we $R_{1\,000\,000} = 2 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-18} + 1 \cdot 10^{-29} - 1.22 \cdot 10^{-40} + \dots$. Dit verduidelijkt waarom de benadering $S_{1\,000\,000}$ in de eerste 39 decimalen klopte, behalve bij decimalen nummer 6, 17, 18 en 29.

De bovenstaande reeksontwikkeling voor R_n is asymptotisch. De beste benadering van R_n krijg je door ongeveer n termen te nemen. Om het vreemde verschijnsel van de vele correcte decimalen te begrijpen, is een handjevol termen gelukkig al voldoende. ζ

Referenties

- 1 G.H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, 1949.
- 2 J.M. Borwein, P.B. Borwein en K. Dilcher, Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions, *Amer-*

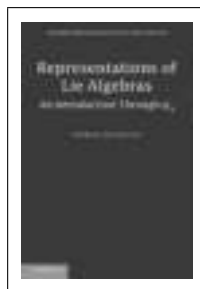
ican Mathematical Monthly 96 (1989), 681–687.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.101
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Anthony Henderson
Representations of Lie Algebras
An Introduction through $\mathfrak{gl}_n$
Australian Mathematical Society Lecture Series
No. 22
Cambridge University Press, 2012
168 p., prijs £30.00
ISBN 9781107653610

De theorie van de semisimpele Lie-algebra's (zeg over $\mathbb{C}$) en hun representaties is elegant, heeft enorm veel toepassingen, en is ook nog eens zonder al te veel achtergrond te begrijpen (lineaire algebra en wat groepentheorie zijn de belangrijkste ingrediënten). Een ideaal onderwerp voor een cursus op een wat gevorderd niveau zou men dus zeggen.

Bij een cursus van een beperkt aantal uren, bijvoorbeeld 24, zoals op de universiteit van de auteur van dit boek, kan de hoeveelheid materiaal die verwerkt moet worden echter te groot zijn. Daarom heeft Anthony Henderson dit boek geschreven, waarin hij de classificatie van de 'integrale' representaties van $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ uit de doeken doet. Door zich te beperken tot de Lie-algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ kan hij de hele classificatie van de simpele Lie algebra's overslaan. Dus geen Cartan-deelalgebra's of wortelsystemen. Maar wel een en ander over $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -modulen en integrale representaties van $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. De classificatie hiervan volgt min of meer de gebruikelijke weg via hoogste gewichten. De Casimir-operator wordt gebruikt om aan te tonen dat een hoogste-gewichtsmoduul irreducibel is. Om te laten zien dat bij elk hoogste gewicht een representatie hoort, wordt gebruik gemaakt van tensorproducten en symmetrische machten.

De auteur heeft een aangename schrijfstijl; de bewijzen zijn elegant en gedetailleerd. Elk hoofdstuk heeft een aantal opgaven die aan het eind van het boek uitgewerkt worden. Verder is er een laatste hoofdstuk voor wie na dit boek, of na de bijbehorende cursus van 24 uur, zin heeft in meer. Henderson geeft hier een zeer korte inleiding in verschillende onderwerpen waarin men zich zou kunnen verdiepen, zoals de classificatie van de simpele Lie-algebra's en hun representaties, Young-tableaus, Gelfand–Tsetlin-bases, en canonieke basistheorie.

Men kan zich natuurlijk afvragen of in een cursus over Lie-algebra's niet in ieder geval ook wortelsystemen aan de orde moeten komen. Maar als men slechts 24 uur ter beschikking heeft, en ook een inleiding in de representatietheorie van simpele Lie-algebra's wil geven (met volledige bewijzen), dan is dit boek zonder meer aan te raden.

Willem de Graaf



C.M. Campbell, M.R. Quick, E.F. Robertson,
C.M. Roney-Dougal, G.C. Smith,
G. Traustason (eds.)
Groups St Andrews 2009 in Bath, Volume 1 and 2
London Mathematical Society Lecture Note Series
Nos. 387 and 388
Cambridge University Press, 2011
310 p. en 302 p., prijs £48 en £54
ISBN 9780521279031 en 9780521279048

Dit boek, verschenen in twee delen, geeft de gehele, gedetailleerde, inhoud weer van de voordrachten die gehouden zijn op de conferentie Groups St Andrews 2009 te Bath (Engeland). Deze conferentie was

de achtste in de vierjaarlijkse reeks, ooit begonnen in St Andrews (Schotland) in 1981 en 1985, vervolgens voortgezet in achtereenvolgens Galway (Ierland), Bath (Engeland), Oxford (Engeland), St Andrews (Schotland) en in 2009 dus wederom te Bath. Van alles wat er op die conferenties aan groepentheorie is gebeurd, is uitvoerig verslag gedaan in de 'blauwe' boeken uit de *London Math. Soc. Lecture Note Series* en soms ook in tijdschriften, zoals bijvoorbeeld in de gehele aflevering uit februari 1987 van de *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.*, Vol. 30 (Series II), Part I.

In de eerste week van de conferentie uit 2009 werden vijf reeksen voordrachten gehouden, te weten: 1. Gerhard Hiss: 'Finite groups of Lie type and their representations' (zeer informatief); 2. Volodymyr Nekrashevych: 'Iterated monodromy groups' (verbanden met topologische dynamica, dat wil zeggen rationale functies werkende op de Riemannbol; goed verzorgd, veel illustraties); 3. Eamonn O'Brien: 'Algorithms for matrix groups' (te veel om hier op te noemen; onderwerpen zijn bijvoorbeeld black box groups, geometry following Aschbacher, constructing an involution centraliser, classical groups in their natural representations, alternating groups, constructing the automorphisms of a finite group); 4. Mark Sapir: 'Residual properties of 1-relator groups' (het gaat hier om het bewijs van het feit dat bijna alle 1-relator-groepen die voortgebracht worden door tenminste drie voortbrengers, residuaal eindig zijn; voorts worden verwante thema's aangesneden); 5. Dan Segal: 'Words and groups' (onderwerpen als: fibres over finite groups, ellipticity to profinite and to profinite groups and to finite groups, algebraic groups, finite simple groups; voortreffelijke bijdrage en heel informatief).

In de tweede week vonden vele, losse, voordrachten plaats; eenendertig ervan staan in de twee delen uitgewerkt. Het is ondoenlijk die hier allemaal te beschouwen. Al die bijdragen zijn zeker van invloed op onderzoek nu en in de toekomst. Als hoogtepunten, althans voor de referent, kunnen zeker de volgende vijf artikelen worden genoemd: 'Group theory and cryptography' (S.R. Blackburn, C. Cid, C. Mullan), 'Automorphisms of products of finite groups' (M.J. Curran), 'Miscellaneous results on supersolvable groups' (K. Corradi, P.Z. Herrmann, L. Hethelyi, E. Horvath), 'Generalities of the Sylow theorem' (D.O. Reivin, E.P. Vdovin), 'Applications of Lie rings with finite cyclic grading' (E.I. Khukhro).

Er is, zoals gezegd, heel veel te vinden in beide delen. Zeer aanbevolen. Tot slot: in 2013 is de negende conferentie Groups St Andrews voorzien, ditmaal op het 'oude nest' St Andrews zelf. Robert van der Waall



Alexander S. Kechris, Benedikt Löwe, John R. Steel (eds.)

Wadge Degrees and Projective Ordinals

The Cabal Seminar, Volume II

Lecture Notes in Logic 37

Cambridge University Press, 2012

xxii+526 p., prijs £47.00

ISBN 9780521762038

Dit is het tweede in een serie van vier boeken waarin de artikelen uit de *Cabal Seminar*-boekjes die eerder als *Lecture Notes in Mathematics* verschenen opnieuw worden uitgegeven, aangevuld met nieuw materiaal. Het eerste boek is besproken in NAW 5/11 (2), 2010, p. 147.

De onderwerpen in dit deel zijn, als genoemd in de titel, Wadge Degrees en Projective Ordinals. De Wadge Degrees komen voort uit een quasi-ordening van de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$: we zeggen dat

$A \leq_W B$ als er een continue functie f bestaat zó dat $A = f^{-1}[B]$. Onder aanname van AD, het Axioma van Gedetermineerdheid volgt dat voor elk tweetal deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}$ ten minste een van de ongelijkheden $A \leq_W B$ of $B \leq_W A$ geldt. Deze ordening is dus bijna lineair; alleen een verzameling en zijn complement kunnen onvergelijkbaar zijn. De Wadge-ordening is zelfs welgefundeerd en de equivalentieklassen zijn dus bijna welgeordend, op onvergelijkbare complementen na dus. De analyse en beschrijving van de Wadge-hiërarchie neemt het eerste deel van dit boek in beslag.

Het tweede deel behandelt projectieve ordinaalgetallen: deze zijn gedefinieerd als suprema van orde-types van definieerbare quasielordeningen van $\mathbb{R}$, voor wie dit iets zegt: δ_n^1 hoort bij quasielordeningen met een Δ_n^1 -definitie. Deze ordinaalgetallen zijn ook kardinaalgetallen en de artikelen hebben als gemeenschappelijk doel deze waarden van deze kardinaalgetallen en hun eigenschappen te bepalen. Dit alles weer onder de aanname van AD. De eerste waarden zijn $\delta_1^1 = \omega_1$ en $\delta_3^1 = \omega_{\omega+1}$; het bepalen van de hogere waarden is een niet-triviale aangelegenheid; de eigenschappen van de kardinaalgetallen spreken het Keuzeaxioma ferm tegen: zo zijn de δ_n^1 meetbaar en hebben ze allerlei combinatorische eigenschappen waar onder aanname van het Keuzeaxioma niets van overblijft.

Het opnieuw uitbrengen van de artikelen, mooi in $\text{\TeX}$ en met aanvullingen is een lovenswaardig initiatief, maar ik vraag me af hoeveel niet-specialisten op de boeken af zullen komen. Klaas Pieter Hart



Milnor Fiber Boundary of a Non-isolated Surface Singularity

Lecture Notes in Mathematics 2037

Springer, 2012

xii + 240 p., prijs €47,65

ISBN 9783642236464

What makes the boundary of a Milnor fiber so important in order to write a book on it? We have to go back fifty years, to the sixties and the early seventies of the last century. An important question concerned the existence of exotic spheres: manifolds homeomorphic to the standard sphere, but with a different differentiable structure. John Milnor constructed the first examples in 1956.

The book describes three manifolds which occur in relation with complex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ near singular points. The intersection of the hypersurface with a small ball is the cone over the intersection with the sphere, called the *link of the singularity*. The link is a variety of (real) codimension 2 in this sphere. If the hypersurface has an isolated singularity the link is a smooth manifold. Hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ give one-dimensional links in S^3 ; the case $\mathbb{C}^3$ is about 3-manifolds in S^5 . Examples of exotic spheres occur, e.g., as 2-fold 'suspensions' of these hypersurfaces.

A related concept is the Milnor fiber of a hypersurface singularity. Suppose $f = 0$ is the equation of the singular hypersurface. A nearby smoothing has equation $f = t$ and its intersection with a small ball is called the Milnor fiber. For isolated singularities the boundary of the Milnor fiber is diffeomorphic to the link of the singularity. But in the non-isolated case the link has singular points, while the boundary of the Milnor fiber is still smooth.

It is known that these boundaries are different from links of isolated hypersurfaces. But what kind of properties do they have? The

answer to this question is the content of the book. In the isolated case there exists a description of the 3-manifold with the help of a resolution of singularities, from which a plumbing representation is derived. The plumbing graph is negative definite. If the singular set is one-dimensional one can also derive such a graph, but we are no longer in the negative definite case!

A surprising statement occurs if one considers the real analytic equation

$$f = |g|^k.$$

For a function g such that the pair (f, g) defines an isolated complete intersection, the authors show that for k big enough the link of that space is homeomorphic to the boundary of the Milnor fibre of f .

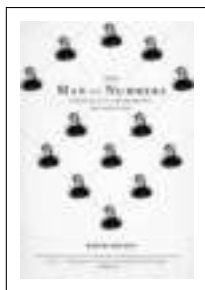
This brings us into a situation where the resolution graph of the products $f \cdot g$ can be used to construct a plumbing graph of the boundary of the Milnor fiber.

The book describes in detail an algorithm to produce several graphs. All types of information of the singularity can be derived from them: characteristic polynomials of several monodromies, Jordan structure, Mixed Hodges structure, et cetera. Especially the structure of the boundary of the Milnor fiber for non-isolated singularities. Many 3-manifolds can be obtained in this way and they are discussed in the book.

Although the subject of the book is rather specialized, I recommend it to all students and researchers who are interested in the local topology of algebraic varieties. It contains a good description of techniques, such as plumbing, cyclic coverings, monodromy, et cetera. The book is well written and ends with several topics for future research.

The first author spent several years in the Netherlands, where he participated in the 'Dutch Singularity School', and where at that time the study of singularities with a one-dimensional singular locus was an important topic. The book is a continuation of that research project.

Dirk Siersma



Keith Devlin
**The Man of Numbers
Fibonacci's Arithmetic Revolution**

Bloomsbury, 2011
182 p., prijs €15,99
ISBN 9781408824443

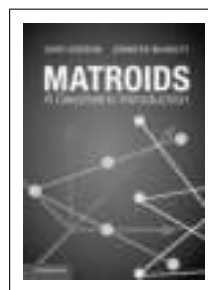
Een geweldig aardig boek over de man die doorgaans bekend staat onder de naam Fibonacci. De ondertitel van dit boek, *Fibonacci's Arithmetic Revolution*, geeft aan dat het om méér gaat dan het konijnenrijtje waarmee Fibonacci vaak geïdentificeerd wordt. Keith Devlin schrijft dit boek voor een breed publiek: het is toegankelijk en belangwekkend zonder geavanceerde wiskunde.

Het verhaal over Fibonacci begint in de eerste jaren van de dertiende eeuw: in 1202 verschijnt zijn *Liber Abaci*, letterlijk zijn 'Rekenboek'. Voor een goed begrip van Fibonacci, zijn boek en de invloed daarvan op latere tijden, geeft Devlin een schets van de tijd en de omstandigheden waarin Fibonacci leefde. Naast culturele aangelegenheden staat daarbij vooral de handel centraal. Begrijpelijk daar de wis- en rekenkunde in die tijd vooral toepassing vonden in de handel en het bankieren. De *Liber Abaci* introduceert de Hindoe-Arabische cijfers inclusief het cijfer 0 en het positiestelsel. De wijze waarop Devlin dit in de histo-

rische context plaatst, dwingt bewondering af. Dat geldt tevens voor de lijnen die hij trekt naar latere jaren en eeuwen. In de *Liber Abaci* gaat het om meer dan alleen de 'nieuwe cijfers'. De beschrijving van de 'uitbreiding' van het getallensysteem door de Hindoes met de 0, wordt zorgvuldig beschreven. Van de eerste stap, toevoeging van een rondje om een lege plaats aan te duiden, naar de tweede stap "changing the underlying conception so that the rules of arithmetic operated not on the numbers themselves (which excluded 0) but on symbols for numbers (which included 0)", was een briljante gedachte.

Devlin beschrijft nauwkeurig de opkomst van de algebra, de beschrijvingen in oude Arabische geschriften en de verbreiding in West-Europa. Maar de introductie van het 'nieuwe' in Europa was beperkt gebleven tot de wetenschappelijke wereld binnen de kloostermuren. Het is Fibonacci's grote verdienste dat hij de nieuwe wetenschap, het nieuwe rekenen, toegankelijk heeft gemaakt voor de gewone dagelijkse praktijk. Dit 'nieuwe rekenen' is in feite het gewone rekenen zoals wij dat allemaal op de lagere school, de basisschool, hebben geleerd, althans als wij nog opgeleid zijn met de traditionele cijfertechnieken. Dit rekenen krijgt in de *Liber Abaci* volop aandacht. Natuurlijk komt de 'regel van drie' prominent naar voren, maar daarnaast ook de 'Rule of False Position', de 'Rule of Double False Position' en de 'Regula Directa' (Directe Methode), regels voor rekenkundige en algebraïsche problemen met betrekking tot verhoudingen en lineaire vergelijkingen. De schrijver laat aan voorbeelden duidelijk zien wat de voordelen zijn van de 'nieuwe werkwijze' ten opzichte van het oude 'beschrijvende rekenen': bladzijden van redeneringen om een probleem op te lossen, versus enkele regels volgens de 'nieuwe methode'. Fibonacci komt naar voren als een geniaal wiskundige die in de geschiedenis onderbelicht is gebleven. Maar dat komt ook een beetje door de typisch wiskundige instelling: het gaat bij ons dikwijls veel meer om de zaak (wát er ontdekt of ontwikkeld is) dan om de persoon (wíé dat ontdekt of ontwikkeld heeft). Het wordt dan nogal lastig om te achterhalen wat de invloed van Fibonacci is geweest op de overvloed aan reken-(wiskunde)boeken, die nadien zijn verschenen. De lange historische zoektocht door Devlin beschreven, maakt duidelijk dat aan Fibonacci meer credits toekomen dan alleen zijn konijnenrijtje.

Wim Kleijne



Gary Gordon, Jennifer McNulty
Matroids: A Geometric Introduction

Cambridge University Press, 2012
410 p., prijs £27,99
ISBN 9780521145688

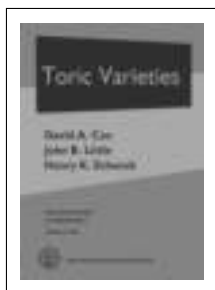
Het onderzoek naar matroïden is een levendig vakgebied, zoals de afgelopen jaren diverse keren in dit blad te lezen is geweest. Er zijn goede boeken geschreven over matroïden, zoals het standaardwerk *Matroid Theory* van James Oxley, waarvan recent een vernieuwde tweede editie verscheen. Deze boeken vereisen echter een zeker wiskundig niveau en zijn voor beginnende studenten eigenlijk te moeilijk. Het boek *Matroids: A Geometric Introduction* van Gary Gordon en Jennifer McNulty kiest als doelgroep juist de bachelorstudenten. Het is gebaseerd op de eigen onderwijservaringen van de auteurs. Matroïden zijn immers een prachtig voorbeeld van een algemene structuur die meerdere gebieden van de wiskunde met elkaar verbindt, waaronder lineaire algebra, eindige meetkunde en grafentheorie.

Het boek begint met een uitgebreide inleiding over onafhankelijkheid en een kennismaking met diverse verschijningsvormen van matroïden. Daarna komen de verschillende cryptomorfe beschrijvingen van matroïden aan bod en de verschillende operaties om nieuwe matroïden te maken uit bestaande matroïden. Na deze eerste drie hoofdstukken wordt dieper ingegaan op verschillende soorten matroïden en hun onderlinge verbanden: grafische, representeerbare, en transversaalmatroïden; en arrangementen van hypervlakken. Deze hoofdstukken zijn onafhankelijk van elkaar te lezen. Tenslotte is er aandacht voor minoren en het Tuttepolynoom. Het boek sluit af met enkele projecten die gebruikt kunnen worden als eindopdracht voor een vak of als basis voor een bachelorscriptie.

Dat het boek voor bachelorstudenten is geschreven, is duidelijk te merken. Allereerst omdat de enige benodigde voorkennis bestaat uit lineaire algebra en enig inzicht in wiskundig redeneren. De informatie-dichtheid is niet heel hoog en het boek bevat bovendien erg veel voorbeelden en opgaven, zodat er genoeg handvatten zijn om de theorie goed onder de knie te krijgen. Er zijn twee specifieke stijlfiguren die afwijken van veel andere wiskundige teksten en die het lezen echt tot een plezier maken. De tekst bevat veel voetnoten, die vaak grappjes bevatten of andere opmerkingen die wellicht in een college wel worden gezegd, maar zelden in een boek staan. Dit geeft het boek een 'losse' sfeer en toont het overduidelijke enthousiasme van de auteurs voor hun vakgebied (en iemand die de grappen te flauw vindt, kan ze makkelijk overslaan). Ten tweede leggen de auteurs bij veel resultaten uit of dit iets is waar je blij mee moet zijn of juist niet, of een resultaat verbazend is, welke vraag je jezelf zou willen stellen, enzovoort. Op deze manier krijgt de beginnend wiskundige lezer gelijk een goede intuïtie mee.

De studie naar matroïden is een fascinerend en levendig vakgebied, dat best wat meer aandacht zou mogen krijgen in het bachelor curriculum. Het is dan ook te hopen dat dit boek docenten voor de bachelor wiskunde of de lerarenopleiding zal inspireren om meer studenten kennis te laten maken met matroïden.

Relinde Jurrius



David A. Cox, John B. Little, Henry K. Schenck

Toric Varieties

Graduate Studies in Mathematics 124

Amer. Math. Soc., 2011

841 p., prijs \$ 95

ISBN 9780821848197

Een *torische variëteit* is een algebraïsche variëteit X met een actie van een torus T waarvoor T een dichte baan op X heeft. In dit boek wordt uitsluitend over $\mathbb{C}$ gewerkt, en dan is T een groep van de vorm $(\mathbb{C}^*)^n$ met componentsgewijze vermenigvuldiging. Door uit te delen naar de kern van de actie mag je aannemen dat n gelijk is aan de dimensie van X , en door het kiezen van een punt in de dichte baan wordt T meestal geïdentificeerd met die baan.

Voorbeelden van torische variëteiten in dimensie één zijn $\mathbb{C}^*$ zelf, $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ met 0 als vast punt van de actie, en de projectieve lijn $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ met ∞ als tweede vaste punt. In dimensie twee is het projectieve vlak een prominent voorbeeld, dat je uit $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ krijgt door veelvouden van dezelfde vector met elkaar te identificeren. De torus die hier werkt is het quotiënt van $(\mathbb{C}^*)^3$ naar de $\mathbb{C}^*$ die daar diagonaal in ligt, en dat quotiënt wordt geïdentificeerd met de verzameling punten

in het projectieve vlak met homogene coördinaten $(t_1 : t_2 : 1)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$.

Onder de milde aanname dat X *normaal* is volgt dat X een open overdekking heeft met eindig veel *affiene* normale torische variëteiten U_i . Bij elke U_i hoort een n -dimensionale polyhedrale kegel in $\mathbb{R}^n$ opgespannen door alle $e \in \mathbb{Z}^n$ waarvoor het Laurent-monoom $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1^{e_1} \cdots t_n^{e_n}$ op T uit te breiden is tot een functie zonder polen op U_i . Voor het projectieve vlak met $T = (\mathbb{C}^*)^2$ neem je voor U_i , $i = 1, 2, 3$ alle punten waar de i -de homogene coördinaat niet nul is. Op U_3 moet $e_1, e_2 \geq 0$ gelden. Op $U_2 = \{(s_1 : 1 : s_3)\}$ is t_1 de rationale functie s_1/s_3 en t_2 de functie $1/s_3$, dus $t_1^{e_1} t_2^{e_2} = s_1^{e_1}/s_3^{e_1+e_2}$ breidt uit tot heel U_2 als en alleen als $e_1 \geq 0$ en $e_1 + e_2 \leq 0$. Net zo krijg je voor U_1 de condities $e_2 \geq 0$ en $e_1 + e_2 \leq 0$. De *duale* kegels van deze drie kegels betegelen (de duale) $\mathbb{R}^2$ met de drie kegels $\{x, y \geq 0\}$, $\{y \leq 0, x \geq y\}$ en $\{x \leq 0, y \geq x\}$, respectievelijk. In het algemeen kom je zo van een normale torische variëteit tot een waaier van rationale polyhedrale kegels in de duale $\mathbb{R}^n$ (waarbij je nu ook de lager-dimensionale kegels meeneemt) — en je kunt ook terug: bij elke waaier hoort een normale torische variëteit.

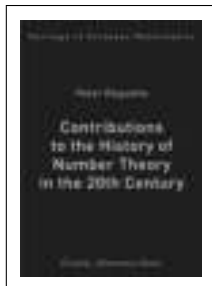
Dit is het begin van een prachtige wisselwerking tussen algebraïsche meetkunde en polyhedrale combinatoriek. Aan de waaier kun je aflezen of de variëteit glad, projectief, enzovoorts is. Er is een bijectie tussen T -banen op X en kegels in de waaier. Zo zijn er zeven banen in het projectieve vlak: de drie genoemde tweedimensionale kegels corresponderen met vaste punten, drie eendimensionale kegels $\{x = 0, y \geq 0\}$, $\{y = 0, x \geq 0\}$ en $\{x = y \leq 0\}$ corresponderende met eendimensionale banen, en één nuldimensionale kegel $\{0\}$ correspondeert met de torus zelf. Divisorklassegroepen en Picard-groepen kun je eenvoudig uitrekenen aan de hand van de waaier, schoofcohomologie wordt heel concreet, enzovoorts. Voor een student die algebraïsche meetkunde wil leren, vind ik torische meetkunde een uitstekende plek om te beginnen, omdat alles zo concreet gemaakt kan worden, maar ook omdat torische variëteiten op zoveel plekken opduiken. Er zijn echter ook meetkundigen die vinden dat al die combinatoriek het beeld maar vertroebelt.

Zelf leerde ik over torische variëteiten uit een elegant boekje van Fulton, van pakweg 150 bladzijden. Het boek van Cox, Little en Schenck telt bijna 700 bladzijden meer. Dat ligt deels aan de uitermate toegankelijke schrijfstijl, met veel details en tal van voorbeelden en plaatjes, die het boek voor wiskundigen met een minimale achtergrond in de algebraïsche meetkunde goed leesbaar maakt. Maar er staat ook gewoon veel meer in dan in Fulton. Het boek bestaat uit twee delen. In de eerste negen hoofdstukken (ongeveer 450 bladzijden) wordt de basis gelegd: affiene, projectieve en normale torische variëteiten, divisoren en lijnbundels, homogene coördinaten, projectieve morfismen en schoofcohomologie. Elk van deze negen hoofdstukken begint met een sectie nul, waarin de algebraïsch-meetkundige achtergrond voor het hoofdstuk behandeld wordt. Deze hoofdstukken zijn uitstekend geschikt voor een cursus van een of twee semesters. Hoofdstukken 10–14 behandelen een selectie aan verdere onderwerpen in de torische meetkunde: oppervlakken, singulariteiten en hun resoluties, topologie en Chowring, Hirzebruch-Riemann-Roch, meetkundige invariantentheorie, en de *secondary fan*.

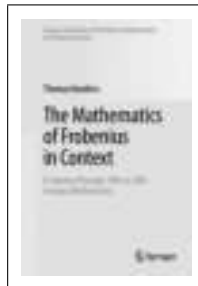
Hoewel ik een fan blijf van beknopte boekjes à la Fulton, is het boek van Cox, Little en Schenck wat mij betreft nu hét standaardwerk over torische variëteiten. Het is uitstekend geschreven (en op Cox' webpagina is een up-to-date lijstje met errata te vinden), bevat een schat aan materie over torische variëteiten, heeft mooi verzorgde afbeeldingen, en is hooguit een beetje aan de zware kant.

Jan Draisma

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wil bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



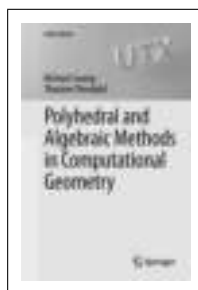
Peter Roquette
Contributions to the History of Number Theory in the 20th Century
 European Mathematical Society, 2013
 ISBN 9783037191132
www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=162



Thomas Hawkins
The Mathematics of Frobenius in Context
A Journey Through 18th to 20th Century Mathematics
 Springer, 2013
 ISBN 9781461463320
www.springer.com/978-1-4614-6332-0



Tom M. Apostol, Mamikon A. Mnatsakian
New Horizons in Geometry
 Mathematical Association of America, 2013
 ISBN 9780883853542
www.cambridge.org/nl/knowledge/isbn/item6874599



Michael Joswig, Thorsten Theobald
Polyhedral and Algebraic Methods in Computational Geometry
 Springer, 2013
 ISBN 9781447148173
www.springer.com/978-1-4471-4816-6



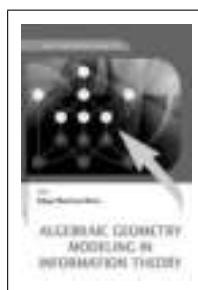
H. F. Baker (ed.)
The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester
Volume 2: 1854-1873
 Cambridge University Press, 2013
 ISBN 9781107683297
www.cambridge.org/nl/knowledge/isbn/item6676518



Lance Fortnow
The Golden Ticket
P, NP, and the Search for the Impossible
 Princeton University Press, 2013
 ISBN 9780691156491
press.princeton.edu/titles/9937.html



János Kollár
Singularities of the Minimal Model Program
 Cambridge University Press, 2013
 ISBN 9781107035348
www.cambridge.org/nl/knowledge/isbn/item7078385



Edgar Martinez-Moro (ed.)
Algebraic Geometry Modeling in Information Theory
 World Scientific Publishing, 2013
 ISBN 9781447146315, 9789814335751
www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8049



Marjorie Senechal (ed.)
Shaping Space
Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical Imagination
 Springer, 2013
 ISBN 9780387927138
www.springer.com/978-0-387-92713-8



Igor Reider
Nonabelian Jacobian of Projective Surfaces
 Springer, 2013
 ISBN 9783642356612
www.springer.com/978-3-642-35661-2

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth €20. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of €100.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 September 2013.

Problem A (proposed by Gerard Renardel de Lavalette)

We have two hourglasses, A for a seconds and B for b seconds, where a and b are relatively prime integers and $0 < a < b$. Let t_0 be an integer with $t_0 \geq b + (\frac{1}{2}a - 1)^2$. Show that A and B can be used to identify the time $t = t_0$ if the upper bulbs are empty at $t = 0$.

Problem B (folklore)

In a two-player game, players take turns drawing a number of coins from a pile that starts with n coins. The first player takes at least one coin from the pile, but not all. In the subsequent turns, each player takes at least one coin, and at most twice the number of coins taken in the previous turn. The player who takes the last coin wins.

For which numbers n can the first player win?

Problem C (proposed by Bas Edixhoven and Maarten Derickx)

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral inside a plane U in $\mathbb{R}^3$. Suppose that $ABCD$ is not a parallelogram. Show that there exist a plane V in $\mathbb{R}^3$ and a point $P \in \mathbb{R}^3 - (U \cup V)$ such that if a light source is placed in P , then the shadow of $ABCD$ on V is a square.

Edition 2012-4 We received solutions from Yagub Aliyev and Dursun Çalişkan (Baku), Charles Delorme (Paris), Pieter de Groen (Brussels), Alex Heinis (Hoofddorp), Thijmen Krebs (Nootdorp), John Simons (Groningen), Traian Viteam (Punta Arenas) and Robert van der Waall (Huizen).

Problem 2012-4/A Let $\varphi(n)$ denote the Euler totient function. Find the set of limit points of the sequence $(\varphi(n)/n)_{n=1}^{\infty}$.

Solution We received solutions from Yagub Aliyev and Dursun Çalişkan, Charles Delorme, Pieter de Groen, Alex Heinis, Thijmen Krebs, Traian Viteam and Robert van der Waall. The following solution is based on that of Thijmen Krebs. The book token goes to Thijmen Krebs.

We start by noting that $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$ for all positive integers n .

Note that the set L of limit points of the sequence must lie inside the closed interval $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, as the sequence itself lies inside $[0, 1]$. We show that $L = [0, 1]$.

Let $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ (with $p_1 < p_2 < \dots$) denote the set of primes. Then the subsequence $(\varphi(p_n)/p_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{p_n-1}{p_n})_{n=1}^{\infty}$ has limit 1, so $1 \in L$.

Now let $x \in [0, 1)$. To show that $x \in L$, it suffices to show that for all $\epsilon > 0$, there exists a positive integer n such that $|x - \varphi(n)/n| < \epsilon$. We assume without loss of generality that $x + \epsilon < 1$. Hence there exists a $p_s \in P$ with $x + \epsilon < 1 - \frac{1}{p_s}$ and $\epsilon > \frac{1}{p_s-1}$. As $\prod_{i=s}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_i}) = 0$, it follows that there is an integer $t \geq s$ such that

$$\prod_{i=s}^t (1 - \frac{1}{p_i}) \geq x + \frac{1}{p_s-1} > \prod_{i=s}^{t+1} (1 - \frac{1}{p_i}) =: \alpha,$$

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Christophe Debry

Jinbi Jin

Ronald van Luijk

Marco Streng

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

hence

$$\begin{aligned} x + \epsilon &> x + \frac{1}{p_s-1} > \alpha \geq (x + \frac{1}{p_s-1})(1 - \frac{1}{p_{t+1}}) \\ &> (x + \frac{1}{p_s-1})(1 - \frac{1}{p_s}) = x + \frac{1}{p_s}(1 - x) > x. \end{aligned}$$

This completes the proof as $\alpha = \varphi(n)/n$, where $n = \prod_{i=s}^{t+1} p_i$. $\square$

Remark Thanks to Robert van der Waall for pointing out a reference for this problem, namely: A. Schinzel, W. Sierpinski, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, Vol. 2 (1954), pp 463–466, and Vol. 3 (1955), pp. 415–419.

Problem 2012-4/B Find nonzero integers c_0, c_1, c_2, c_3 such that the sequence given by $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = 68$, $a_4 = 504$ and

$$a_{n+4} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + c_3 a_{n+3} \quad (n > 0)$$

consists of positive terms and has the property that a_m divides a_n whenever m divides n .

Solution We received solutions from Charles Delorme, Alex Heinis, Thijmen Krebs and John Simons. The solution below is based on the solution of Thijmen Krebs. The book token goes to Alex Heinis.

Thanks to Frits Beukers for providing inspiration for this problem.

Let $(F_n)_{n \geq 1}$ be the Fibonacci sequence, which is the sequence defined by $F_1 = F_2 = 1$ and $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n > 0$). Let $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ be the positive root of $X^2 - X - 1 = 0$ and let $\psi = 1 - \varphi$ be the other one. Then $F_n = (\varphi^n - \psi^n) / \sqrt{5}$. The Fibonacci sequence is a divisibility sequence: if m divides n , say $n = km$, then F_m divides F_n because the quotient

$$\frac{F_n}{F_m} = \frac{\varphi^{km} - \psi^{km}}{\varphi^m - \psi^m} = \varphi^{(k-1)m} + \varphi^{(k-2)m}\psi^m + \dots + \psi^{(k-1)m}$$

is an algebraic integer (because φ and ψ are, as they are the roots of the monic polynomial $X^2 - X - 1$) that is a rational number. Therefore, it is an integer, i.e., F_m divides F_n . We are ready to state our claim: the sequence

$$a_n = \frac{F_{3n}F_{2n}}{2F_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (\varphi^{3n} - \psi^{3n}) (\varphi^n + \psi^n)$$

has positive terms, has the correct initial values, and satisfies the divisibility condition.

- Each a_n is a positive integer. Indeed, $a_n > 0$ is clear, and we know (by the divisibility property of Fibonacci proven above) that $2 = F_3$ divides F_{3n} and F_n divides F_{2n} . The initial values are $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, $a_3 = 68$ and $a_4 = 504$.
- If k is odd, then a_n divides a_{kn} . Indeed, we already know that $F_{3n}/2$ divides $F_{3kn}/2$ and we can compute that F_{2n}/F_n divides F_{2kn}/F_{kn} :

$$\frac{F_{2kn}/F_{kn}}{F_{2n}/F_n} = \frac{\varphi^{kn} + \psi^{kn}}{\varphi^n + \psi^n} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \varphi^{(k-1-i)n} \psi^{in}$$

is a rational algebraic integer, hence an integer.

- If k is even, then a_n divides a_{kn} . Indeed, k being even implies $3kn$ being divisible by $6n$. So F_{6n} divides F_{3kn} and F_{kn} divides F_{2kn} , so by virtue of

$$\frac{a_{kn}}{a_n} = \frac{F_{3kn}F_{2kn}/F_{kn}}{F_{3n}F_{2n}/F_n} = \frac{F_{3kn}}{F_{6n}} \cdot \frac{F_{2kn}}{F_{kn}} \cdot \frac{F_{6n}F_n}{F_{3n}F_{2n}}$$

it suffices to show that $F_{3n}F_{2n}$ divides $F_{6n}F_n$. To prove this, one notes that their quotient equals $\varphi^{2n} + \varphi^n \psi^n + \psi^{2n}$, which is a rational integer.

This concludes the proof of the claim.

It remains to find a fourth order linear recurrence relation for this sequence. We do this by computing that

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} (\varphi^{3n} - \psi^{3n}) (\varphi^n + \psi^n) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left((\varphi^4)^n + (\varphi^3\psi)^n - (\varphi\psi^3)^n - (\psi^4)^n \right),$$

and that

$$(X - \varphi^4)(X - \varphi^3\psi)(X - \varphi\psi^3)(X - \psi^4) = X^4 - 4X^3 - 19X^2 - 4X + 1.$$

These two equations imply that

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 19a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n.$$

We conclude that $c_0 = -1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 19$, $c_3 = 4$ satisfy the conditions.

Remark Alternatively, one could try to find a sequence of the form

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}.$$

One deduces from the values of a_2 , a_3 and a_4 that $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ are the roots of the polynomial

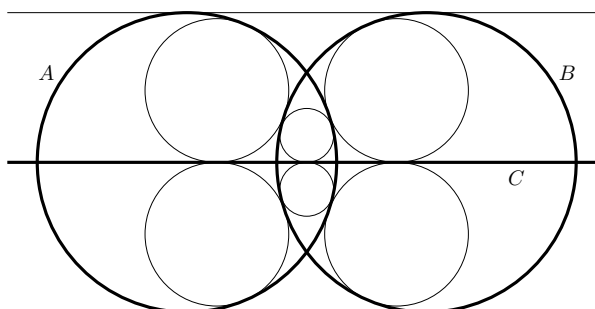
$$(X - \alpha\gamma)(X - \alpha\delta)(X - \beta\gamma)(X - \beta\delta) = X^4 - 12X^3 + 51X^2 - 300X + 625.$$

So we could guess that $c_0 = -625$, $c_1 = 300$, $c_2 = -51$ and $c_3 = 12$ satisfy the conditions. They do, but the proof of this statement is slightly more technical than the proof above. (Although the main ideas coincide.)

Problem 2012-4/C A circle in $\mathbb{R}^2$ is called *Apollonian* if its centre coordinates and radius are all integers. Do there exist eleven distinct Apollonian circles $A, B, C, T_1, \dots, T_8$ such that for $i = 1, \dots, 8$, the circle T_i is tangent to A, B , and C ?

Solution We received solutions from Charles Delorme, Alex Heinis and Thijmen Krebs. The solution below is based on all of their solutions. The book token goes to Charles Delorme. The answer to the problem as stated is trivially affirmative, as the circles C_r with centre $(r, 0)$ and radius r (for $r \in \mathbb{Z}$) are all tangent to each other at the origin. We therefore added the originally-intended extra requirement that the centres of the circles A, B and C not be collinear in the previous (March) issue. We will show that this still allows many examples. It suffices to show the existence of rational, rather than integral, solutions, as we may multiply by a common denominator in the end.

One way to find examples is to first look for degenerate cases, where some of the circles are lines; then inversion in any circle with rational radius and rational centre P not lying on any of the lines and circles, yields a non-degenerate example as desired, provided that P has rational distance to all the lines. For example, take the configuration depicted below, where the circles A and B have centres $(\pm b, 0)$ and radius r , the (degenerate) circle C is given by $\gamma = 0$, while two



of the remaining eight circles have centres $(0, \pm c)$, four have centres $(\pm a, \pm d)$, and the last two (degenerate) circles are given by $y = \pm r$ for appropriate a, b, c, d, r . Assuming $r > b > a > 0$, it is not hard to find that the tangency conditions are equivalent to the equalities $a^2 + b^2 = r^2$ and $rd = ab$ and $2rc = a^2$. The shown figure is for the Pythagorean triple $(a, b, r) = (3, 4, 5)$, which determines $c = 9/10$ and $d = 12/5$.

After inversion, this yields a configuration with eleven circles as required, with several points where three circles are tangent to each other. There are also configurations where no three circles are concurrent. One example is depicted below, with the centre $(x, y) = (a/d, b/d)$ and the radius $r = c/d$ for each circle as in the following table.

	a	b	c	d
A	0	0	1	1
B	560	0	1649	1551
C	0	420	949	851
T_1	40	30	7	43
T_2	-40	-30	7	57
T_3	1200	-49	210	991
T_4	-1200	49	210	1411
T_5	-49	1200	280	921
T_6	49	-1200	280	1481
T_7	21	28	120	85
T_8	21	28	120	155

To find this example, the equations expressing tangency were simplified by the additional requirements that the centres P, Q and R of the circles A, B and C form a right angle at P , that the circles A and B intersect on the line PR , and that the circles A and C intersect on the line PQ . We leave it to the reader to verify that this implies that the entire picture is invariant under the composition of inversion with respect to A and reflection in P . Hence, the circles $T_1, \dots, T_8$ split up into four pairs, where each circle in a pair can be obtained from the other by a homothety with respect to P . Since P is chosen to be the origin, this is clearly reflected in the table.

