

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- In Memoriam | Obituary**
- 235 **Tonny Albert Springer: Dat is goede wiskunde!**
Wilberd van der Kallen e.a.
- Boekbespreking | Book review**
- 243 **Goede vragen**
Derk Pik
- Geschiedenis | History**
- 248 **Kijkmeetkunde, een ander uitgangspunt (1970–1980)**
Ed de Moor, Wim Groen
- Maatschappij | Society**
- 254 **SWI 2011: Wiskunde die overstromingen opvangt**
Bennie Mols
- Onderwijs | Education**
- 258 **Didactiek met oneindig veel pingpongballen?**
Teun Koetsier
- Afscheidsrede | Valedictory lecture**
- 263 **Mijn spectrum**
Joseph Steenbrink
- Onderwijs | Education**
- 271 **Feedback genereren in leeromgevingen voor algebra**
Johan Jeuring, Bastiaan Heeren
- Boekbespreking | Book review**
- 276 **Het gapende genie**
Gunther Cornelissen
- Vakantiecursus | Summer course**
- 278 **Kansrijke symmetrie**
Jeroen Spandaw
- In Memoriam | Obituary**
- 281 **Erik G.F. Thomas: “A good definition is half the work”**
Tom Koornwinder et al.
- Maatschappij | Society**
- 287 **SWI 2011: Veiling in reservestroom**
Bennie Mols

Rubrieken | Departments

- 226 **Colofon**
- 227 **Redactioneel**
Ferdinand Verhulst
- 228 **Servicepagina**
- 229 **Agenda**
Martijn Zaal
- 231 **Nieuws**
Martijn Zaal
- 256 **In de verdediging**
Geertje Hek
- 262 **De derde wet**
Ferdinand Verhulst
- 269 **Het keerpunt van Jantine Ruinard**
Ionica Smeets
- 289 **Boekbesprekingen**
- 294 **Problemen**

Uitgelicht



De vorig jaar overleden Tonny Albert Springer wordt herdacht op pagina 235.



Ed de Moor en Wim Groen vervolgen de reeks artikelen over de rol van meetkunde in het wiskundeonderwijs op pagina 248.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Centrum Wiskunde & Informatica
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam
tel. 020-5929333
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)
Steven Wepster (s.a.wepster@uu.nl)
Martijn Zaal (m.m.zaal@vu.nl)

Bureau redactie

Lætitia Diemer
Harm de Vries

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuyper (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Ronald van Luijk (UL), Derk Pik (JSG Maimonides), Sjoerd Rienstra (TU/e), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Ten Brink abonnementenservice
Postbus 41, 7940 AA Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)

Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor gewone leden bedraagt €80 per jaar. Voor gepensioneerden en werklozen €40. Voor studenten aio's en oio's van een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding €30. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60. Leden die het Nieuw Archief voor Wiskunde niet willen ontvangen, betalen slechts €40 contributie. Losse nummers zijn te bestellen voor €20.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa).

Website: www.wiskgenoot.nl

Ledenadministratie

Ten Brink abonnementenservice
Postbus 41, 7940 AA Meppel
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

André Ran (VU, voorzitter), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Krüger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster, Gert Vegter (RUG)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op www.nieuwarchief.nl.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	04-03-2013	verstreken
2	03-06-2013	01-02-2013
3	02-09-2013	01-05-2013
4	02-12-2013	01-08-2013

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

FIsm

Freudenthal Instituut

Op het omslag

Singulariteiten hebben geen lineaire benadering. Er moeten andere middelen worden aangewend om ze te begrijpen. Voor een verband tussen het spectrum van singulariteiten en toonreeksen in de muziek, lees de afscheidsrede van Joseph Steenbrink op pagina 263.

Kwaliteitsimpuls in winterkleuren

De afgelopen tijd zijn enkele vooraanstaande Nederlandse wiskundigen overleden. In dit NAW-nummer worden leven en werk van T.A. Springer en van E. Thomas uitvoerig besproken. Beiden waren creatief en eigenzinnig (gaat vaak samen) en hadden een interessant leven, onder andere door hun vele internationale contacten. Dergelijke contacten waren in de jeugd van Springer en Thomas, zeg vijftig jaar geleden, minder vanzelfsprekend dan nu, het wijst op zich al op een bijzondere loopbaan. Ik herinner me dat men bij een internationale reisaanvraag in de jaren zeventig van de vorige eeuw altijd moest vermelden door wie je was uitgenodigd. Dat berustte kennelijk op de gedachte dat iedereen van naam elkaar kende en dat de leidinggevende kon zien of de aanvraag wel serieus was. Dat gaat nu wel anders. Internationale congressen zijn een vanzelfsprekendheid en persoonlijke werkcontacten moeten van een uitvoerige motivatie worden voorzien.

We hebben interessante artikelen met een andere invalshoek, Steenbrink die op zijn loopbaan als wiskundige terugkijkt, Koetsier die speelt met getallen en oneindig; Ionica Smeets laat zien dat wiskunde op de meest onverwachte momenten in een loopbaan kan opduiken. De reeks artikelen van De Moor en collega's over de rol van de meetkunde in het wiskundeonderwijs ziet in dit nummer een vervolg. We zijn echter nog lang niet klaar, deze belangrijke geschiedschrijving zal in de volgende nummers worden voortgezet. Verwacht mag worden dat deze ook invloed zal hebben op hedendaagse discussies over het vwo-onderwijs en misschien zelfs bij de universiteiten. Ongeacht het grote belang van analytische en algebraïsche vaardigheden is meetkunde bij uitstek het gebied dat de schoonheid en het nut van de wiskunde zichtbaar maakt.

Het valt op dat bij alle twijfels over het voortbestaan van het papieren boek er belangrijke, gedrukte boeken blijven verschijnen. Dit gaat samen met veelgelezen recensies in kranten en tijdschriften, ook in het NAW. De redacteurs Gunther Cornelissen en Derk Pik bespreken enkele boeken, waarbij onder andere opvalt dat het onderwerp communicatie in de wiskunde weer opduikt. Het belang hiervan kan niet genoeg benadrukt worden, we hebben dat al eerder in deze kolommen opgemerkt. Pas maakte ik weer mee hoe een begaafde, jonge wiskundige zich bij een voordracht als bordenfluisteraar ontpopte: hij sprak voortdurend zachtjes met de rug naar het publiek terwijl hij met een krijtje

interessante dingen op het bord krabbelde. Niet alleen jonge wiskundigen maken zulke fouten, op een recent NMC stond de spreker die een plenaire voordracht hield de hele tijd met zijn rug naar het publiek terwijl hij de tekst van zijn slides voorlas. Toegegeven, wel met luider stem. Maar lezen kunnen de toehoorders ook wel. Het komt weinig voor dat bij een algemeen mathematisch colloquium de spreker rustig de tijd neemt om de plaats van het onderwerp in de wiskunde in te leiden en de moeite neemt om de toehoorders de kernbegrippen van zijn vakgebied bij te brengen. De organisatoren van zulke bijeenkomsten zouden zich verplicht moeten voelen om de sprekers uitvoerig te instrueren over de achtergrond van de toehoorders en de eisen die gesteld worden aan de presentatie van de lezing.

Ik begon met het belang van internationale contacten en wat dat betreft had ik dit najaar een intrigerende ervaring door een verblijf in Australië. Het viel me op dat de wiskundigen daar bezig zijn met wat ze interessant vinden, ongehinderd door 'kwaliteitsimpulsen', 'focus en massa', 'clustersamenwerking' en andere managementverzinsels. Nu zijn de meesten van ons in Nederland wel bezig met wat ze interessant vinden, maar, zeker als je nog carrière wilt maken, vereist dit angstvallige inbedding in de gestaalde NWO-kaders en andere managementschema's. Dat betekent veel contacten onderhouden en dus ook stimulans ondervinden met als keerzijde vaak 'kortetermijnwerk' en hoogst noodzakelijke inpassing in lopende projecten. Het was een verademing om de vrijheid van onderzoek in Australië te zien, ongeveer zoals dat bij ons veertig jaar geleden was, maar ik moet toegeven dat het me ook een beetje irriteerde. Deze wiskundigen lopen achter hun wetenschappelijke neus aan en dat is heel zinvol bij excellente onderzoekers, maar niet altijd zo geweldig bij het middenkader. Ik vond dat er soms nogal wat hobbyïsme werd bedreven. Zo had dit werkverblijf als onbedoeld neveneffect dat ik al dat Nederlandse geregeld weer wat genuanceerder ging zien. Een zekere mate van focus is wel goed, als het maar niet te massaal is.

De zogenaamde kwaliteitsimpulsen vertonen grijs tinten, de winterkleuren zijn echt. 

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur

Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Servicepagina

| Service page

Koninklijk Wiskundig Genootschap

□ Secretariaat

Joke Blom, CWI
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
wiskgenoot@wiskgenoot.nl
www.wiskgenoot.nl

□ Bruikleenovereenkomst de Boekerij

Het KWG beschikt volgens zijn statuten over een 'Boekerij' van boeken en tijdschriften. De boeken zijn bij de centrale bibliotheek van de UvA ondergebracht, de meeste tijdschriften bij de bibliotheek van het CWI. Op 20 november 2012 is er een nieuwe bruikleenovereenkomst gesloten tussen de Universiteitsbibliotheek van de UvA en het KWG betreffende de Boekerij. Deze is al sinds mensenheugenis bij de UB in beheer, maar het werd tijd om nieuwe afspraken hierover te maken. Een catalogus van de Boekerij van G. Mannoury uit 1907 kan op de UB worden geraadpleegd of via de KWG-website (www.wiskgenoot.nl, 'Wat is het KWG', 'Geschiedenis').

□ Wintersymposium 2013

Het jaarlijkse Wintersymposium heeft als doel het stimuleren van contacten tussen wiskundedocenten en beroepsmatige beoefenaars van wiskunde. Het is in de eerste plaats bestemd voor docenten en aankomende docenten in het voortgezet onderwijs, maar ook andere belangstellenden zijn van harte welkom. Het thema van het Wintersymposium 2013 is al enkele eeuwen oud, maar actueler dan ooit: het samenspel tussen wiskunde en natuurkunde. De sprekers zijn Ute Ebert (CWI) met 'Onweer – veel nieuws van de plasma's boven onze hoofden', Henk Broer (RUG) met 'Atmosferische optica rond de horizon en Bernoulli's

brachistochroon' en Erik Verlinde (UvA) met 'Een nieuwe kijk op de zwaartekracht'.

www.wiskgenoot.nl/watbiedt/wintersymposium13

Platform Wiskunde Nederland

□ Bureau PWN

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam
bureau@platformwiskunde.nl
pr@platformwiskunde.nl (publiciteit)
Tel: 020-5924006/06-51892525
www.platformwiskunde.nl

□ PWN Nieuwsbrief

PWN publiceert maandelijks een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven.

European Mathematical Society

□ EMS e-News 4, headlines

Zie www.euro-math-soc.eu/ems.eneews.html.

- De Europese Commissie heeft bepaald dat artikelen geproduceerd met behulp van subsidie uit het Horizon 2020-programma online toegankelijk moeten zijn, hetzij via 'gold' hetzij via 'green' open access.
- Op 10 juli zijn de ERC Calls 2013 for Starting and Advanced Grants gepubliceerd.
- De Europese Commissie heeft de laatste calls onder het 7th Framework Programme FP7 gepubliceerd.

□ EMS Newsletter

De elektronische versie van de meest recente uitgave (September 2012) van de EMS Newsletter is beschikbaar via www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2012-09-85.pdf. Van harte aanbevolen!

Recente publicaties van het KWG

□ Indagationes Mathematicae (www.elsevier.com/locate/indag)

Special issue honoring Israel Gohberg; M.A. Kaashoek and H.W. Broer (eds.), Volume 23, issue 4 (gratis toegankelijk op www.sciencedirect.com).

□ Epsilon Uitgaven (www.epsilon-uitgaven.nl)

72. *Handboek wiskundedidactiek*, P. Drijvers, A. van Streun en B. Zwaneveld, €34,00, 2012.

71. *Kansrekening* – een introductie, A.J. van den Brandhof, €17,00, 2012.

70. *Wiskunde in Werking van A naar B*, M. de Gee, €34,00, 2011.

69. *De Riemann-hypothese* – een miljoenenprobleem, R. van der Veen en J. van de Craats, €19,00, 2011.

66. *Intuitionistische Analyse* – een constructief denkraam, D. van Dalen, €21,00, 2011.

□ Zebra-reeks (Epsilon Uitgaven)

34. *De Ster van de dag gaat op en onder* – rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang, A. Goddijn, €10,00, 2012.

33. *Ontwikkelen met Kettingbreuken*, M. Kindt en P.W.H. Lemmens, €10,00, 2011.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen c.boss@epsilon-uitgaven.nl.

Agenda

| Upcoming Events

december 2012

14 – 18 december 2012

□ Representing stream

Workshop over de bestudering van datastromen door wiskundigen en informatici

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

20 december 2012

□ Studiedag voor wiskundeleraren

Studiedag met lezingen en workshops voor wiskundeleraren met als thema 'Wiskunde? Opheffen! (de vaardigheid)'

plaats Bernoulliborg, Groningen

info www.rug.nl/wiskunde

januari 2013

4 – 9 januari 2013

□ Algebraic Groups and Representation Theory

Conferentie ter nagedachtenis aan de Nederlandse wiskundige T.A. Springer

plaats HKUST en HKU, Hong Kong

info www.math.hku.hk

5 januari 2013

□ Wintersymposium KWG 2013

Jaarlijks symposium met dit jaar als thema het samenspel tussen wiskunde en natuurkunde

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

14 – 18 januari 2013

□ Random Polymers

Workshop over random polymeren voor onderzoekers in kansrekening, combinatoriek, natuurkunde en scheikunde

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/events

14 – 18 januari 2013

□ Trends in Arithmetic Geometry

Workshop over nieuwe ontwikkelingen op het gebied van aritmetische meetkunde

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

21 – 23 januari 2013

□ 12th Winter school on Mathematical Finance

Jaarlijkse winterschool Mathematical Finance met lezingen en mini-cursussen

plaats Congressentrum De Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/~spreij/winterschool/winterschool.html

21 – 31 januari 2013

□ Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2013, dit jaar voor het eerst met een flexibele datum

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

24 – 25 januari 2013

□ Statistical Methods for (post)-Genomics Data

Jaarlijkse workshop voor statistici, bioinformatici en biologen over de analyse van genetische data

plaats VU, Amsterdam

info www.smpgd2013.nl

28 januari – 1 februari 2013

□ SWI 2013

Jaarlijks studiegroep waarbij wiskundigen werken aan problemen uit de industrie

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info websites.math.leidenuniv.nl/SWI-2013

30 januari – 1 februari 2013

□ Workshop on Statistics for Complex Networks

Workshop over de statistiek van data over grote, complexe systemen

plaats Eurandom, Eindhoven

info <http://www.eurandom.nl/events>

31 januari – 1 februari 2013

□ Panamaconferentie

Jaarlijkse conferentie over de ontwikkeling van reken- en wiskundeonderwijs

plaats De Uithof, Utrecht

info www.fisme.science.uu.nl/panama

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Martijn Zaal

agenda@nieuwarchief.nl

februari 2013

1 – 2 februari 2013

□ Nationale Wiskundedagen

Jaarlijkse conferentie met workshops en lezingen voor docenten wiskunde

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fisme.science.uu.nl/nwd

6 februari 2013

□ 2e OnderbouwWiskundeDag

Wiskundewedstrijd voor teams van leerlingen uit klas 3 havo/vwo

plaats Deelnemende scholen

info www.fisme.science.uu.nl

10 februari 2013

□ Paradisolezing 'Higgs: wat en hoe'

Populair-wetenschappelijke lezing door prof.dr. Stan Bentvelsen over het Higgs-deeltje

plaats Paradiso, Amsterdam

info www.knaw.nl

maart 2013

15 maart 2013

□ World Maths Day

Wereldwijde reken- en wiskundewedstrijd voor scholieren

plaats overal ter wereld

info www.worldmathsday.com

15 maart 2013

□ Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De tweede, regionale ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Nederlandse universiteiten

info www.lorentzcenter.nl

18 maart 2013

□ Johan Bernoulli lezing 2013

De Johan Bernoulli lezing 2013 zal worden gegeven door Jeremy Gray en heeft als titel 'On the cusp of the new physics: Henri Poincaré and mathematical physics one hundred years ago'

plaats Academiegebouw, RU Groningen

info bernoulli.math.rug.nl

18 – 22 maart 2013

□ Modeling with Measures: from Structured Populations to Crowd Dynamics

Workshop over het modelleren van grote groepen met behulp van maten

plaats Lorentz Center@Snellius, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

21 maart 2013

□ Kangoeroewedstrijd

Reken- en wiskundewedstrijd voor leerlingen vanaf groep 5

plaats Deelnemende scholen

info w4kangoeroe.nl

april 2013

2 – 4 april 2013

□ Workshop 'Numbers and Probability'

Workshop over kettingbreuken, recurrentie en ergodentheorie

plaats TU Delft

info www.eurandom.nl/STAR

5 april 2013

□ NMC 2013

Jaarlijks congres voor de wiskundige gemeenschap van Nederland

plaats RU Nijmegen

info www.ru.nl/math/research/nmc-2013

8 – 14 april 2013

□ European Girls' Mathematical Olympiad

Tweede editie van de Europese wiskundeolympiade voor meisjes

plaats Luxemburg

info www.egmo.org

12 april 2013

□ Leve de wiskunde! 2013

Jaarlijks congres waar wetenschap en voortgezet onderwijs elkaar ontmoeten

plaats Science Park, Amsterdam

info betaonderwijs.uva.nl

15 – 19 april 2013

□ Mathematics from Biology and Biology from Mathematics

Workshop de interactie van wiskunde en biologie

plaats Lorentz Center@Oort, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

17 april 2013

□ Grote Rekendag 2013

Jaarlijkse themadag met allerlei activiteiten voor basisscholen

plaats Deelnemende scholen

info www.rekenweb.nl/groterekendag

26 – 28 april 2013

□ Benelux Mathematical Olympiad

Jaarlijkse internationale wiskundewedstrijd voor leerlingen uit de Benelux

plaats Nog te bepalen (Nederland)

info www.wiskundeolympiade.nl

mei 2013

12 mei 2013

□ Paradisolezing 'Over het Majorana-deeltje'

Populair-wetenschappelijke lezing door prof.dr.ir. Leo Kouwenhoven over het Majorana-deeltje

plaats Paradiso, Amsterdam

info www.knaw.nl

Nieuws

| News

CWI bouwt online applicatie voor vergelijken eiwitten

Onderzoekers Inken Wohlers en Gunner Klau van het CWI in Amsterdam hebben in samenwerking met het Franse INRIA een online programma ontwikkeld waarmee eiwitten kunnen worden vergeleken. Een eiwit is een complex molecuul dat is opgebouwd uit duizenden aminozuren. Om de functie van een eiwit te bepalen is het belangrijk om er de structuur van te kennen. Een van de methoden om de structuur te achterhalen is om het eiwit met een ander, bekend eiwit te vergelijken.

Het vergelijken van eiwitten gebeurde al met behulp van computeralgoritmes. Er is echter nog geen overeenstemming over de criteria die bij zo'n vergelijking gebruikt moeten worden. Daardoor zijn er inmiddels een behoorlijk aantal methoden in omloop. Het programma van het CWI gebruikt alle eerder bedachte criteria om tot een goede vergelijking te komen.

www.cwi.nl

Jan van Mill Officier in de Orde van Oranje Nassau

Tijdens zijn afscheidsrede op vrijdag 12 november aan de Vrije Universiteit Amsterdam is emeritus hoogleraar Jan van Mill benoemd tot Officier in de Orde van Oranje Nassau. Hij ontving de koninklijke onderscheiding uit handen van burgemeester Schoenmaker van de gemeente Bussum. Van Mill krijgt de onderscheiding vanwege zijn verdiensten voor de wetenschap.

Van Mill is meer dan dertig jaar een van de meest vooraanstaande onderzoekers op het gebied van de topologie, de tak van wiskunde die zich bezighoudt met eigenschappen van de ruimte die bewaard blijven bij continue vervorming. Van zijn hand verschenen meer dan 200 wetenschappelijke artikelen en twee boeken die gezien worden als standaardwerken op dit vakgebied.

Op de Vrije Universiteit was Van Mill voorzitter van de Afdeling Wiskunde, lid van het bestuur van de Faculteit der Exacte Wetenschappen en vervolgens decaan van deze faculteit. Buiten de Vrije Universiteit was hij voorzitter van het bestuur van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Daarnaast is de Bussumer actief bij tal van maatschappelijke instellingen.

www.few.vu.nl



Jan van Mill

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Martijn Zaal

nieuws@nieuwarchief.nl

'Rekenen met de bal' helpt leerlingen met rekenachterstand

Met behulp van de methodiek *Zo leer je kinderen rekenen*, ontwikkeld door docenten Douwe Sikkes en Loe van der Leeuw, kunnen leerlingen met een achterstand flink geholpen worden om hun rekenvaardigheid bij te spijkeren.

De methodiek is erop gericht om leerlingen in korte tijd rekenvaardigheden aan te leren en te automatiseren. De methodiek legt de na-

druk op een systematische opbouw waarbij voor elk type som één oplossingsstrategie wordt aangeleerd die voor alle gevallen werkt. Deze oplosmethode wordt geautomatiseerd door dagelijks een aantal sommen te oefenen. Nieuw hierbij is het zogenaamde 'rekenen met de bal': de docent geeft een som op, en gooit een bal naar een van de leerlingen, die de som oplost en de bal teruggooit. Het gebruik van een bal zorgt ervoor dat de aandacht van de leerlingen niet verslapt en in korte tijd een groot aantal sommen geoefend kan worden.

Zo leer je kinderen rekenen is niet bedoeld als vervanging van reguliere rekenmethoden: de methodiek is bedoeld om leerlingen een basis te geven waarop met behulp van een andere rekenmethode kan worden voortgebouwd, zoals bijvoorbeeld door het oefenen met andere, efficiëntere oplosmethoden voor speciale gevallen of redactiesommen.

www.zoLeerjerekinderenrekenen.nl

143 finalisten bij Nederlandse Wiskunde Olympiade

Aan de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die op 14 september aan de TU Eindhoven werd gehouden, hebben 143 leerlingen meegedaan. De finale in september was de laatste van drie wedstrijdronden: in januari bogen 5612 leerlingen van 270 scholen zich over de opgaven. 811 leerlingen werden uitgenodigd voor de tweede ronde die op 23 maart aan diverse Nederlandse universiteiten werd gehouden. De finale heeft vijftien prijswinnaars opgeleverd, uit klas 2 t/m 4, klas 5 en klas 6 elk vijf.

Naast de vijftien prijswinnaars uit de finale, zijn nog zestien andere finalisten uitgenodigd voor de nationale selectie. Na een intensief trainingsprogramma worden zes leerlingen geselecteerd die Nederland zullen vertegenwoordigen bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Colombia. Daarnaast worden er vier meisjes geselecteerd voor de European Girls' Mathematical Olympiad in Luxemburg en tien leerlingen voor de Benelux Mathematical Olympiad in Nederland.

De prijsuitreiking vond plaats op 9 november aan de TU Eindhoven.

www.wiskundeolympiade.nl



Leerlingen tijdens de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

Foto: Jose van Dobben de Bruyn

Wiskundig inzicht dolfijnen leidt tot betere sonar

Bestaande sonartechniek kan waarschijnlijk worden verbeterd door te bestuderen hoe dolfijnen hun prooi opsporen in water met veel luchtbellens. Kleine luchtbelletjes in water kunnen een sonarsignaal verstrooien, waardoor het veel moeilijker is om kleine objecten waar te nemen. Vreemd genoeg verspreiden dolfijnen tijdens hun jacht juist luchtbelletjes in het water. Onderzoekers van het Scripps Institution of Oceanography in La Jolla, Californië bestudeerden de manier waarop dolfijnen sonar gebruiken om hun prooi op te sporen. Het bleek dat kleine luchtbelletjes in het water juist helpen bij het opsporen van kleine prooien als er een korte puls met een variërend volume wordt uitgezonden. De echo's van deze verschillende pulsen moeten dan wel

met elkaar worden vergeleken met behulp van een niet-lineair wiskundig model. De onderzoekers vermoeden dat dolfijnen een soortgelijke methode gebruiken om met behulp van luchtbellens hun sonarbeeld te verbeteren.

www.sciencenews.org

Wiskunde helpt bij de bestrijding van pandemieën

Onderzoekers van de Universiteit van Warwick hebben een methode ontwikkeld waarmee de verspreiding van een besmettelijk virus zoals het H1N1 griepvirus kan worden voorspeld.

Tijdens de uitbraak van H1N1 in 2009 was het erg lastig om de verspreiding van het virus te volgen, omdat het in sommige gevallen tot ernstige ziekte of sterfte leidde, terwijl andere besmette personen niet eens in de gaten hadden dat ze besmet waren. Juist om deze reden wordt het werkelijke aantal besmettingen vaak onderschat als er alleen wordt gelet op laboratoriumtesten bij patiënten die vermoeden dat ze het virus bij zich dragen. Sommige onderzoeken suggereerden zelfs dat slechts 10 procent van de besmettingen zo wordt opgemerkt.

De onderzoekers hebben een wiskundig model ontwikkeld waarbij er per huishouden een schatting wordt gemaakt van het aantal besmette personen. In deze schatting worden symptomen en de uitslagen van eventuele laboratoriumtests meegenomen. Dit model suggereert dat de besmetting binnen een huishouden veel sneller gaat dan eerder werd gedacht. Ook doet het model vermoeden dat een groot aantal personen met een negatieve laboratoriumtest toch ziek zijn geworden, bijvoorbeeld doordat ze voor het afnemen van de test al ziek waren geweest en zijn genezen.

Sleutel bij de ontwikkeling van het model was de observatie dat in de meeste besmette huishoudens ofwel zo goed als alle personen ziek werden, ofwel slechts één persoon.

Hoewel de uitkomsten van het model specifiek over de H1N1-uitbraak van 2009 gaan, kan het onderzoek ook van pas komen bij eventuele toekomstige virusuitbraken. Met het model kan de verspreiding van een ziekte veel sneller en goedkoper in kaart gebracht worden.

www.eurekalert.org

Extra regelgeving wetenschappelijke integriteit niet nodig

Volgens de KNAW heeft de Nederlandse wetenschap geen aanvullende regelgeving nodig om de wetenschappelijke integriteit te waarborgen, maar is het wel nodig dat de bestaande regels beter bekend worden.

In het najaar van 2011 startte de KNAW met een inventarisatie van hoe onderzoekers met hun gegevens omgaan. De bestaande regelgeving, die nog recentelijk is bijgewerkt, blijkt voldoende te zijn om de wetenschappelijke integriteit te waarborgen. Volgens de KNAW kan er op drie niveaus gewerkt worden aan de naleving van de regelgeving. Allereerst moet integriteit voor onderzoekers een vanzelfsprekendheid zijn. Ook bij de afwezigheid van toezicht moet een onderzoeker van nature integer handelen. Daarnaast is er een taak weggelegd voor de formele en informele netwerken waar wetenschappers deel van uitmaken: universiteiten en instituten moeten aandacht blijven schenken aan wetenschappelijke integriteit, maar ook tijdschriftredacties moeten een actieve rol spelen bij het handhaven van de regels. Het volledige rapport is te lezen via de website van de KNAW.

www.knaw.nl

Opnieuw sterke groei aanmeldingen hbo bedrijfswiskunde

Dit jaar is het aantal aanmeldingen voor de hbo-opleiding bedrijfswiskunde opnieuw sterk gegroeid. Hiermee wordt de trend van de afgelo-

pen jaren doorgezet: in 2009 waren er nog 163 aanmeldingen, in 2010 waren er 175 eerstejaars, en vorig jaar begonnen 191 studenten met de opleiding. De grootste stijging is de zien bij Fontys Hogeschool Tilburg: het aantal eerstejaars verdubbelde daar ruim. Met 90 eerstejaars is de instroom aan de Hogeschool van Amsterdam net als eerdere jaren het grootst.

www.wiskundepersdienst.nl

ERC Advanced Grant voor hoogleraar Aad van der Vaart

Hoogleraar Aad van der Vaart (Universiteit Leiden) is met zijn onderzoeksvorstel 'Bayesian Statistics in Infinite Dimensions: Targeting Priors by Mathematical Analysis' gehonoreerd met een ERC Advanced Grant. De ERC Advanced Grant is bedoeld voor ervaren onderzoekers en wordt toegekend voor vernieuwende onderzoeksvorstellen die vaak een hoog risico hebben. De subsidie bestaat uit 2,5 miljoen euro over een periode van vijf jaar.

erc.europa.eu

21ste wiskundetournoi in teken van verkeersvraagstukken

Het jaarlijkse wiskundetournoi van de Radboud Universiteit Nijmegen stond dit jaar in het teken van verkeersvraagstukken. 500 scholieren bogen zich op 21 september in teams van vijf over uitdagende opgaven en puzzels. De twee beste teams, het team van het Gymnasium Camphusianum uit Gorinchem en het team van het Stedelijk Gymnasium uit Nijmegen, wonnen een vijfdaagse reis naar Parijs, waar ze onder andere de Université Paris-Diderot en het Cité de la Science et de l'Industrie bezoeken.

Het middagprogramma 'Sum of Us' legde de focus op de maatschappelijke toepassing van wiskunde door middel van vraagstukken uit het verkeer, waaronder het fileprobleem.

www.ru.nl



Het winnende team van het Gymnasium Camphusianum uit Gorinchem

Sneller nieuws dankzij Twitter

Onderzoekers van de Vrije Universiteit Amsterdam hebben een systeem ontwikkeld waarmee via Twitter nieuws kan worden gedetecteerd. Het systeem filtert en analyseert berichten op Twitter en probeert op deze manier nieuwswaardige gebeurtenissen in een vroeg stadium te detecteren.

De analyse van de Twitter-berichten brengt grote uitdagingen met zich mee: Twitter-berichten over hetzelfde gebeurtenis kunnen op een groot aantal manieren worden geformuleerd. Daarnaast gaat maar een klein deel van de berichten op Twitter over nieuwswaardige gebeurtenissen. Tussen al deze ruis door moet het systeem in staat zijn om ook kleine aantallen berichten te detecteren: juist als er nog maar weinig mensen op de hoogte zijn van een gebeurtenis, is het nieuws.

Een prototype van het systeem wordt gebruikt door nieuwswebsite nu.nl.

www.few.vu.nl

Makkelijker wiskunde leren met stripboek

Met de introductie van *Nummers in New York*, een nieuw stripboek van tekenaar Stephan Timmers, wordt de eerste kennismaking van toekomstige generaties brugklassers met wiskunde wellicht eenvoudiger. Het stripboek moet de leerlingen duidelijk maken dat wiskunde ook spannend en leuk kan zijn. In *Nummers in New York* krijgen drie kinderen via sms'jes allerlei wiskundige opdrachten toegestuurd, en gaan zo op zoek naar wiskunde in New York.

www.ad.nl



Vier miljoen euro voor wiskundecusters

NWO Exacte Wetenschappen heeft vier miljoen euro aan overbruggingsfinanciering beschikbaar gesteld voor de Nederlandse wiskundecusters. In het verleden hebben de ministeries van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen en van Economische Zaken al middelen beschikbaar gesteld, maar er is nog steeds geen structurele financiering voor de wiskundecusters in Nederland.

In het 'Masterplan Toekomst Wiskunde 2.0', opgesteld onder voorzitterschap van prof.dr. Remco van der Hofstad, pleitte de wiskundige gemeenschap al eerder voor structurele financiering van de wiskundecusters. De Nederlandse wiskundecusters, uniek in de wereld, hebben een belangrijke rol gespeeld bij het opvangen van de sterke groei in de studentenaantallen: het aantal studenten wiskunde is in vijf jaar verdrievoudigd. Ook in het eerste masterplan uit 2008 werd al gepleit voor permanente financiering van de wiskundecusters.

www.nwo.nl

Vijfde editie Junior Wiskunde Olympiade was hersenkraker

Op vrijdag 12 oktober organiseerde de Vrije Universiteit Amsterdam voor de vijfde keer de Junior Wiskunde Olympiade (JWO) voor scholieren uit de onderbouw van havo en vwo. 81 leerlingen waagden zich in een race tegen de klok aan allerlei uitdagende wiskundevraagstukken. Twee uur lang vroegen de opgaven het uiterste van het wiskundig inzicht en rekenvermogen van de leerlingen. Hulp van een rekenma-

chine was daarbij niet toegestaan: de scholieren mochten alleen een potlood, pen, passer, geodriehoek en hun hersens gebruiken.

Naast de wedstrijd was er nog meer te doen. Voor het wedstrijd-gedeelte kregen de leerlingen een lezing van VU-wiskundige Sandjai Bhulai over zijn onderzoek naar het voorspellen van nieuws op basis van trends op Twitter. In de middag verzorgde stichting Vierkant voor Wiskunde een workshop over Escherachtige vlakvullingen. Met dit uitdagende programma konden leerlingen de hele dag bezig zijn met wiskunde.

De Vrije Universiteit wil met de organisatie van de JWO bijdragen aan het stimuleren en ontwikkelen van wiskundetalent. Scholieren kunnen zich kwalificeren voor de JWO door goed te scoren op de landelijke Kangoeroewedstrijd, een wiskundewedstrijd die in 46 landen wordt gehouden. De VU nodigt voor de olympiade per onderbouwklas de beste 30 deelnemers uit. In Nederland deden afgelopen jaar ruim 80.000 leerlingen mee met de Kangoeroewedstrijd. Deelnemers aan de JWO behoren daarmee tot de top van jong wiskundetalent in Nederland.

De winnaars van de JWO 2012 waren Sander Suverkropp (klas 1, Pallas Athene College, Ede), Wouter Wolff (klas 2, Praedinius Gymnasium, Groningen) en Jens Heuseveldt (klas 3, Ostrea Lyceum, Goes).

www.math.vu.nl



Foto: Jesse van Dobben de Bruyn

De prijswinnaars van de Junior Wiskunde Olympiade

Wiskunde schakelt geheugen uit

Onderzoekers van de Stanford School of Medicine hebben ontdekt dat tijdens het doen van reken- en wiskundegerelateerde opdrachten de posterior mediale cortex (PMC), een gebied dat betrokken is bij het persoonlijk geheugen en andere hogere cognitieve functies, vrijwel uitgeschakeld is.

Het was tot nog toe vrijwel onmogelijk om onderzoek te doen naar de activiteit van de PMC omdat dit gebied diep in de hersenen verborgen ligt en daardoor moeilijk te bereiken is met sensoren. In eerder onderzoek is de activiteit van de PMC bij verscheidene taken al bestudeerd. Het probleem hierbij is dat fMRI alleen de bloedtoevoer naar diverse hersengebieden meet, in plaats van de activiteit zelf. Doordat de bloedtoevoer in vergelijking met de hersenactiviteit traag varieert, kunnen met fMRI alleen relatief grote effecten die langdurig plaatsvinden worden gemeten.

Voor dit onderzoek verrichtten de onderzoekers metingen bij epilepsie-patiënten. Met behulp van elektroden op de hersenen kon direct de activiteit van diverse hersengebieden worden gemeten. Het blijkt dat de PMC het actiefst is als proefpersonen naar een concrete herinnering gevraagd worden. Naarmate de vragen abstracter werden,

vertoonde de PMC minder activiteit. Opvallend was dat de activiteit van de PMC bij het beantwoorden van rekenvragen actief werd onderdrukt door andere hersengebieden.

www.sciencedaily.com

Jop Briët wint Stieltjes Prijs 2011

De Stieltjes Prijs 2011 voor het beste wiskundige proefschrift is gewonnen door Jop Briët. Sinds 1996 wordt de Stieltjes Prijs jaarlijks uitgekeerd, tot 2009 door het Thomas Stieltjes Institute for Mathematics, daarna door WONDER. De prijs van 2500 euro wordt door stichting Composito Mathematica beschikbaar gesteld.

Het proefschrift *Grothendieck Inequalities, Nonlocal Games and Optimization* is door de selectiecommissie uit 60 proefschriften geselecteerd. Briët verdedigde zijn proefschrift op 27 oktober 2011 in Leiden. Zijn promotor was prof.dr. H.M. Buhrmann. web.science.uu.nl/WONDER

Sneller dan het licht met wiskunde

Wiskundigen van de universiteit van Adelaide zijn erin geslaagd om de relativiteitstheorie van Einstein uit te breiden naar een theorie waarin snelheden groter dan de lichtsnelheid mogelijk zijn.

Naar aanleiding van metingen van CERN in september 2011, waarbij het leek dat neutrino's sneller dan het licht reisden, is de theoretische bovengrens opnieuw ter discussie gesteld. De onderzoekers zijn daarom op zoek gegaan naar een uitgebreidere relativiteitstheorie waarin snelheden hoger dan de lichtsnelheden wel mogelijk zijn. De uitkomst is een volgens de onderzoekers natuurlijke uitbreiding van de wetten van Einstein die de verwachte vergelijkingen voor beweging oplevert.

Vooralsnog is het onderzoek puur theoretisch: er is (nog) geen experiment waarmee snelheden groter dan de lichtsnelheden kunnen worden aangetoond.

www.eurekalert.org

Wiskundestudentes kraken pincodes

Tweedejaars wiskundestudenten Aukje Boef en Anne Eggels van de TU Eindhoven hebben voor hun studieopdracht onder begeleiding van dr. Tanja Lange berekend welke pincodes veilig zijn en welke niet. Ze berekenden dat veel informatie over een pincode te achterhalen is uit de bewegingen van de hand tijdens het intoetsen. Een pincode wordt veiliger naarmate er meer tegengestelde handbewegingen nodig zijn om de code in te toetsen. Zo is de pincode 2580 gemakkelijk te achterhalen uit handbewegingen, terwijl 5735 relatief veilig blijkt te zijn.

w3.win.tue.nl

2013 gewijd aan wiskunde voor de planeet

Een aantal wetenschappelijke organisaties, waaronder universiteiten, onderzoeksinstellingen en stichtingen van over de gehele wereld hebben het jaar 2013 gewijd aan wiskunde en de rol die wiskunde speelt voor de planeet. Het leven op aarde wordt bepaald door een groot aantal dynamische processen. Om deze processen beter te begrijpen en mogelijk te beïnvloeden is wiskundige kennis nodig. De initiatiefnemers willen met 'Mathematics of Planet Earth 2013' onderzoek naar processen op aarde, waaronder het klimaat, aanmoedigen en stimuleren. Het jaar 'Mathematics of Planet Earth 2013' is inmiddels erkend door UNESCO en zal in verschillende landen feestelijk worden geopend. *Nieuw Archief voor Wiskunde* zal het septembernummer van 2013 wijden aan dit thema.

mpe2013.org

Wilberd van der Kallen

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
w.vanderkallen@uu.nl

Eduard Looijenga

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
e.j.n.looijenga@uu.nl

Arjeh Cohen

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
a.m.cohen@tue.nl

Jacob Murre

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
murre@math.leidenuniv.nl

Jan R. Strooker

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
j.r.strooker@uu.nl

In Memoriam Tonny Albert Springer (1926–2011)

Dat is goede wiskunde!

Op 7 december 2011 overleed Tonny Albert Springer, een van de grondleggers van de theorie van algebraïsche groepen. Generatiegenoot en goede vriend Jacob Murre en voormalige promovendi en collega's Jan Strooker, Wilberd van der Kallen en Arjeh Cohen herinneren zich deze internationaal vermaarde wiskundige op eigen wijze. Samen schilderen zij daarmee een portret. Het wordt voorafgegaan door een inleidend stuk van Wilberd van der Kallen en Eduard Looijenga.

Tonny Albert Springer werd in 1926 geboren te Scheveningen. Nadat hij in 1942 zijn eind-examen hbs had behaald werd hij adjunct-commies bij de PTT. Naast die baan werkte hij aan het behalen van de middelbare akten KI en KV, die hem de bevoegdheid zouden verschaffen om wiskundeles te geven op een hbs. De stof voor deze aktes bevatte veel formules en weinig concepten. Vreselijk ouderwets zou hij het later vinden. Na afloop van de oorlog ging hij wiskunde studeren in Leiden, waar hij assistent werd van H.D. Kloosterman, bij wie hij uiteindelijk ook zou promoveren in 1951 op het proefschrift getiteld *Over Symplectische Transformaties*. Na zijn promotie bracht hij een jaar door in Nancy, dat destijds een zeer levendig wiskunde-instituut huisvestte met Jean Dieudonné en Laurent Schwarz als de centrale figuren. Bij hen werkte Alexander Grothendieck toen aan zijn proefschrift. Springer ervoer er dan ook een enorm contrast met het gezapige Nederland. Hij bewees daar wat nu de stelling van Springer over kwadratische vormen heet. (Die luidt dat als een kwadratische vorm over een lichaam van karakteristiek ongelijk twee alleen maar de triviale oplossing nul heeft, dat

dat dan zo blijft na een lichaamsuitbreiding van oneven graad. Het bewijs is kort.)

Na zijn verblijf te Nancy werd hij in 1952 aangesteld als wetenschappelijk ambtenaar 1e klasse te Leiden, maar al in het najaar 1955 werd hij in Utrecht tot lector benoemd. De spil van het Utrechtse mathematisch instituut was toen de ruim twintig jaar oudere Hans Freudenthal. Van zijn eigen generatie trof hij er Fred van der Blij en Wil van Est. Vier jaar later volgde zijn promotie tot hoogleraar aan dezelfde instelling en dat bleef hij tot zijn emeritaat in 1991. In 1964 werd hij benoemd tot lid van de KNAW. In 1983 werd hem de Koninklijke Shell Prijs toegekend (een prijs waarvan ieder jaar de wetenschappelijke discipline wordt vastgelegd), bij welke gelegenheid Rudy Kousbroek een feestrede uitsprak.

Zijn hartstocht voor het wiskundig onderzoek verminderde niet na zijn emeritaat: nadien verschenen er tientallen artikelen, een boek (met F. Veldkamp) en kort voor zijn overlijden bezorgde hij een *Selecta* van Freudenthal. Een zeer opmerkelijk moment deed zich voor toen hij op tachtigjarige leeftijd werd uitgenodigd om te spreken voor het *International Mathematical Congress* in 2006 te Ma-

drid. Hij deed er verslag van recent werk, ook van hemzelf, betreffende zekere compactificaties van semisimpele groepen. Geen een-



Tonny Springer in 1980



M.S. Ragunathan, Jean, de vrouw van Michael Artin, en Tonny Springer, tijdens het TIFR colloquium on Algebraic Groups in Bombay, 1968

voudig verhaal, geheel volgens de verwachting. Bij zijn 85ste verjaardag werd een deel van het tijdschrift *Transformation Groups* aan hem opgedragen (deel 3 van jaargang 2011). Springer overleed kort daarna, in december 2011, tijdens een wandeling.

Betekenis voor wiskundig Nederland

Springer had niet alleen een buitengewoon brede belangstelling voor de zuivere wiskunde maar ook diepgaande kennis van een groot deel daarvan. Bovendien was hij, door zijn sterke internationale oriëntatie, in het algemeen zeer goed op de hoogte van de recente ontwikkelingen. Zijn omgeving, die zich in dit opzicht zeker niet beperkte tot Utrecht, profiteerde daarvan door de seminaria die hij over steeds wisselende onderwerpen leidde en door zijn voordrachtenreeksen. In de voor hem karakteristieke stijl verscheen er

dan op de mededelingenborden in den lande het bericht “Ondergetekende is voornemens een reeks voordrachten te houden over...”, en dan volgde doorgaans een onderwerp waarin kort tevoren belangrijk werk was verricht. Hij onderhield een groot internationaal netwerk van wiskundige contacten. Het was dan ook een komen en gaan van bezoekers en zelf was hij een geziene gast op vele instituten over de wereld (een lijst van bezoeken van ten minste een maand, die hij op zijn webpagina’s bijhield, getuigt hier nog van). Mede onder zijn invloed werd Utrecht een internationaal bekend centrum van de wiskunde. Hij had minstens zeventien promovendi.

Zijn werk

Springer is een van de grondleggers geweest van de theorie van algebraïsche groepen. Een werk dat tot deze fundamenteen behoort

en tegelijk zijn meest geciteerde artikel opleverde (de teller van MathSciNet staat bij het schrijven van deze necrologie op 241) is dat met R. Steinberg over conjugatieklassen in semisimpele algebraïsche groepen. Hierin worden equivariante afbeeldingen ingevoerd (tegenwoordig *Springer-afbeeldingen* genaamd), die aan unipotenten nilpotenten toevoegen. In wezen worden daar op een effectieve manier de conjugatieklassen beschreven voor algebraïsche groepen, hetzij over een algebraïsch afgesloten lichaam, hetzij over een eindig lichaam (wat een bijzonder interessante klasse van eindige groepen oplevert, de zogenaamde Chevalleygroepen).

Evenzeer vermaard is zijn ontdekking van (en werk aan) voorstellingen van Weyl-groepen, die optreden als monodromiegroepen van vezelingen geassocieerd met algebraïsche groepen en die eveneens naar hem

zijn vernoemd. Het is een centraal en uiterst belangrijk gereedschap gebleken voor de studie van algebraïsche groepen en hun voorstellingen. Hij bestudeerde deze Weyl-groepen met zeer uiteenlopende middelen, van combinatoriek tot (ℓ -adische) cohomologie of intersectorcohomologie. De genoemde voorstellingen van Weyl-groepen construeerde hij met diepe ℓ -adische methoden in het beroemde artikel 'Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups' (*Invent. Math.* 36, 1976, pp. 173–207). Later toonde hij aan dat het ook met gewone singuliere cohomologie kan, wat dan als nevenresultaat oplevert dat de irreducibele voorstellingen van Weyl-groepen over het lichaam der rationale getallen gedefinieerd zijn. Verwant aan spiegelingsgroepen zijn de Hecke-algebra's en de compactificaties van symmetrische ruimten waar zijn aandacht in de laatste jaren het meest op was gericht. Ook de complexe spiegelingsgroepen, een opmerkelijke categorie van eindige groepen waar de Weyl-groepen voorbeelden van zijn, hadden zijn grote interesse.

Met Armand Borel bestudeerde hij rationaliteitskwesies voor algebraïsche groepen. Zo weten we nu dat elke halfenkelvoudige algebraïsche groep gedefinieerd over een lichaam k een maximale torus bevat die ook over k is gedefinieerd. Voor Borel-ondergroepen geldt zoiets niet: in het anisotrope geval is er geen Borel-ondergroep over k gedefinieerd.

Toen George Lusztig eind jaren tachtig zijn theorie van karakterschoven begon te ontwikkelen heeft Springer samen met J.G.M. Mars de enigszins ondankbare taak op zich genomen om deze moeilijke en diepe theorie voor een groter publiek toegankelijk te maken. Dit heeft een cruciale rol gespeeld in het verspreiden van deze ideeën.

Springer schreef vier boeken. Naast het bovengenoemde boek met F.D. Veldkamp, *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, waarin de exceptionele Lie-groepen in verband worden gebracht met andere bijzondere algebraïsche objecten, is er het historisch getinte werk *Invariant Theory* (Springer, *Lecture Notes in Mathematics* Bd. 585, 1977). Een bestseller was zijn leerboek *Linear Algebraic Groups* (Birkhäuser, 1981) dat aanvankelijk het titelonderwerp behandelde over een algebraïsch afgesloten lichaam, maar in de tweede uitgebreidere editie van 1998 ook uitgebreid aandacht gaf aan de theorie over willekeurige lichamen (in de ontwikkeling waarvan hij overigens zelf een voornaam rol speelde). Zijn boek *Jordan Algebras and Algebraic Groups* benaderde de theorie

van de Jordan-algebra's via algebraïsche groepen (in plaats van associatieve algebra's), wat deze ietwat raadselachtige structuren ineens veel toegankelijker maakte. Het werd in 1998 herdrukt in de Springer serie *Classics in Mathematics*.

Hij vervulde enkele jaren een redacteurschap van *Inventiones Mathematicae*, een tijdschrift dat algemeen als een van de belangrijkste voor de zuivere wiskunde wordt beschouwd. Het feit dat hij hiervoor werd gevraagd bevestigde nog eens zijn internationale statuut.

Persoon en stijl

Springer was vriendelijk en behulpzaam. Competitie was niet zijn stijl en op zijn eigen bijdragen legde hij weinig nadruk. Daarvan getuigt het citaat van MacPhersons bespreking van zijn Bourbaki-voordracht dat Jacob Murre hieronder geeft, maar ook zijn aanhoudend protesteren tegen het gebruik van de term *Springerresolutie*, zeggende dat die toch echt van Grothendieck afkomstig was. (Daardoor zijn de termen Grothendieck–Springerresolutie en Grothendieck–Springer-vezel nu ook wat in zwang geraakt.) Het deed hem zichtbaar plezier als een ander iets gelukt was, want het ging hem om de voortgang van de wiskunde. Die was dan ook het best gediend met een open uitwisseling en het kon hem ergeren als anderen geen open kaart speelden. Hij was graag op de hoogte van de laatste ontwikkelingen en zag ook hoe ze in een groter geheel pasten. Springer had een duidelijk beeld van wat 'goede wiskunde' was en uitte dat regelmatig. Maar met wat hij

noemde 'autoriteiten' had hij weinig op. Niettemin heeft hij voor zijn emeritaat op effectieve wijze het decanaat van de toenmalige Sub-faculteit Wiskunde en Informatica vervuld.

In niet-wiskundige conversatie kon hij zeer onderhoudend zijn. Hij was bijzonder belegen en een groot liefhebber van klassieke muziek en Aboriginalkunst.

Heengegaan is niet alleen een van Nederlands meest vooraanstaande wiskundigen, maar ook een integer man met een zuiver oordeel, wars van lobbypraktijken ten eigen bate. Een type geleerde dat zeldzaam lijkt te zijn geworden.

Raadgever en vriend (door Jacob Murre)

Mijn kennismaking met Springer dateert van 1948 toen ik in Leiden wiskunde ging studeren. De wiskundeafdeling in Leiden bestond toen uit drie hoogleraren, Droste, Kloosterman en Haantjes, en één assistent, Ton Springer. Springer was assistent bij professor Kloosterman. Later kwam er nog een assistent bij, namelijk Gerard Laman bij professor Haantjes. Het hoeft geen betoog dat het assistentschap in Leiden een eervolle baan was, je werd alleen assistent op uitnodiging van de hoogleraar.

Springer was in 1945 begonnen met studeren in Leiden. Hij had in 1942 eindexamen hbs gedaan, maar mede door de oorlog kon hij niet meteen gaan studeren. Tussen 1942 en de aanvang van zijn studie werkte hij bij de PTT in Den Haag. Maar daarnaast studeerde hij in de avonden voor de aktes KI en KV, dat waren aktes die bevoegdheid gaven voor het geven van wiskundeonderwijs op de



Edith, de vrouw van Ilya Piatetski-Shapiro, Tonny Springer, Armand Borel en Tijnje Springer in Israël, 1982

hbs. Eind 1945, dus vrijwel voor het begin van zijn studie aan de universiteit was hij reeds in het bezit van deze aktes, zeker een bijzondere prestatie voor een jongen van die leeftijd. Een prestatie die — voor zover mij bekend — vóór hem alleen geleverd was door zijn latere leermeester Kloosterman en de bekende hoogleraar N.G. de Bruijn, die al op zeer jeugdige leeftijd hoogleraar was aan de TH in Delft en later achtereenvolgens hoogleraar was in Amsterdam en Eindhoven; Springer bevond zich dus toen al in goed gezelschap.

Assistent

Springer studeerde zeer snel af, deed reeds in 1949 doctoralexamen en ondertussen was hij al in 1947 in Leiden assistent geworden. Zijn taak was in het bijzonder het geven van het oefeningen-practicum bij het eerstejaars-college infinitesimaalrekening (calculus) van Kloosterman. Omdat ik meteen de tweedejaars colleges ging volgen (ik had reeds een jaar in Delft gestudeerd) kwam ik in het begin niet veel met hem in aanraking, maar van ouderejaars studenten hoorde ik onmiddellijk dat Springer ‘buitengewoon slim’ was. In die tijd was er in Leiden nog geen apart wiskunde-instituut, maar de bibliotheek voor wiskunde en natuurkunde was gehuisvest in de zogenaamde ‘Leeskamer Bosscha’ die ondergebracht was in het Instituut voor Theoretische Natuurkunde dat zelf in een hoek van het Kamerlingh Onnes Laboratorium voor Natuurkunde lag. In deze leeskamer kon je Ton Springer vrijwel altijd aantreffen. Hij zat daar onafgebroken uren achtereens intensief te werken in boeken en tijdschriften. Gaandeweg ging ik hem wel eens iets vragen, hij was altijd erg behulpzaam en je kreeg steeds waardevolle antwoorden. Zo leerde ik hem langzamerhand beter kennen en ik was zeer onder de indruk van zijn inzicht en kennis, maar Springer liep daar zelf nooit mee te koop.

Kloosterman

Het grote voordeel van het assistentschap was het contact dat je met de hoogleraar had. In het geval van Springer was dat professor Kloosterman, een befaamd wiskundige met een brede kennis van de wiskunde en een zeer stimulerende persoonlijkheid. In de prachtige voordracht die Springer hield in 2000 tijdens de viering van Kloostermans honderdste geboortedag heeft hij de invloed van zijn leermeester op zijn eigen werk toegelicht (*Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/1(2), 2000, 126–129). Hij vertelt daarin dat zijn interesse in de representatietheorie van eindige groepen onder andere gewekt werd bij de be-

studering van een bekend artikel van Kloosterman uit 1946 over representaties van modulaire congruentiegroepen.

Springer promoveerde in 1951 bij Kloosterman op een prachtig proefschrift *Over Symplectische Transformaties*, waarvoor hij het predikaat cum laude kreeg. Dit predikaat was gedurende lange tijd in Leiden afgeschaft, en — voorzover ik weet — was Springer de eerste die het weer kreeg. Ik was tijdens de promotie in het gehoor en was erg onder de indruk; zijn promotor sprak zeer lovende woorden over zijn werk.

Nancy

Het proefschrift van Springer was verwant aan werk van de beroemde Franse wiskundige Jean Dieudonné en Springer kreeg na zijn promotie de gelegenheid om het academisch jaar 1951–52 in Nancy te gaan werken waar Dieudonné toen hoogleraar was. Nancy was toen een bakermat van Bourbaki (die immers in Nancago verbleef). Naast Dieudonné was daar ook Laurent Schwartz hoogleraar (Schwartz had in 1950 de Fields-medaille gekregen) en er waren behalve Springer verschillende andere buitenlandse gasten. Verder waren er een aantal — later beroemde — jonge Fransen waaronder Grothendieck, die daar aan zijn proefschrift werkte. Het spreekt vanzelf dat Springer er veel leerde en vele nieuwe ideeën opdeed, in het bijzonder door het contact met Dieudonné zelf, een man met een geweldige kennis en werkkraft.

Terug in Leiden

In de zomer van 1952 kwam Springer terug naar Leiden waar hij wetenschappelijk ambte-

naar bij de wiskunde werd. Ik was hem ondertussen opgevolgd als assistent bij Kloosterman en we hadden nu veel meer en regelmatig contact. Mijn interesse lag vooral bij de algebra en meetkunde en Springer had daar een grote kennis van. We spraken over allerlei onderwerpen en Springer gaf mij dikwijls advies over artikelen die hij mij aanraade te bestuderen. Zo herinner ik me bijvoorbeeld dat hij me aanraade het bekende proefschrift van Serge Lang, *On Quasi Algebraic Closure*, uit 1952 te lezen (*Annals of Math.*, Vol. 55). Het zal duidelijk zijn dat dergelijke ‘oefeningen’ uitermate nuttig voor mij waren. Overigens, onze gesprekken speelden zich niet altijd in de Leeskamer Bosscha af maar ook bij sociale gelegenheden, we waren ondertussen goede vrienden geworden.

Springer wilde altijd nieuwe dingen leren en toen professor J. de Groot in Amsterdam een werkgroep organiseerde over het toen nieuwe interessante boek van Eilenberg–Steenrod over algebraïsche topologie, gingen Ton en ik iedere vrijdag naar Amsterdam om daaraan deel te nemen. Na afloop van de zittingen gingen we dikwijls samen met Theo Korthagen, die assistent bij De Groot was, biljarten op de Plantage Middenlaan (maar de eerlijkheid gebiedt te zeggen dat geen van ons drieën het daar ver in gebracht heeft).

Algebraïsche meetkunde

Kloosterman raade mij aan om mij in de algebraïsche meetkunde te verdiepen omdat dat een belangrijk gebied was. Ook Springer zelf was daar allang van overtuigd en die overtuiging was alleen maar gegroeid tijdens zijn verblijf in Nancy waar Dieudonné het belang



Tonny Springer en Jean Dieudonné in Toruń, 1980

r van het werk van André Weil op dit gebied met grote kracht propageerde. Voor zijn beroemde bewijs van de Riemann-hypothese voor functielichamen van dimensie één over een eindig lichaam had Weil geheel nieuwe fundamenteën voor de algebraïsche meetkunde nodig en hij had die ontwikkeld en neergelegd in zijn boek *Foundations of Algebraic Geometry*. Om algebraïsche meetkunde te bedrijven was het daarom nu nodig dit in 1946 verschenen standaardwerk te bestuderen; dat was *het* boek waarop de moderne algebraïsche meetkunde (van die tijd) gegrondvest was. Maar de *Foundations* stond (en staat nog steeds) bekend als een ontzettend moeilijk werk. Omstreeks 1952 besloten Ton en ik om gezamenlijk de *Foundations* te gaan bestuderen. Dit is voor mijn verdere loopbaan van cruciaal belang geweest. De hulp van Springer — die veel meer ervaring had en die de dingen beter doorzag — was voor mij van onschatbare waarde. In het laatste hoofdstuk vond ik een open probleem dat tenslotte het onderwerp van mijn proefschrift werd en uiteraard heb ik met Ton daar regelmatig over gepraat. Hoewel ik de oplossing pas later vond (toen ik in 1954 in Chicago was) zijn deze gesprekken met Ton hierover voor mij zeer waardevol geweest en hebben ze misschien — onbewust — kiemen gelegd voor mijn latere oplossing.

Natuurlijk is de studie van de *Foundations* voor Springer zelf ook van groot belang geweest voor zijn latere werk over algebraïsche groepen (maar Ton was ook wel door de *Foundations* heen gekomen zonder mijn hulp).

Getrouwd

In 1953 is Springer getrouwd met Tijnje Stam. Ze gingen in Katwijk wonen, het was toen erg moeilijk — en vooral in Leiden — om woonruimte te vinden. De Springers kregen twee kinderen, een dochter en een zoon. De zoon is helaas vroegtijdig in 1994 overleden.

De academische jaren 1954–56 was ik in Chicago en hadden we geen direct contact. In het najaar van 1955 werd Springer benoemd tot lector in Utrecht waar hij in 1959 hoogleraar werd. Gedurende het academisch jaar 1955–56 bleef hij echter nog colleges geven in Leiden waar hij toen een zware onderwijslast had door het plotselinge overlijden van Haantjes, vroeg in 1955, en door de afwezigheid van Kloosterman die een jaar gasthoogleraar in Ann Arbor was.

Toen ik in 1956 terugkwam in Leiden werd het contact hersteld. De wiskunde had nu een eigen instituut gekregen dat gehuisvest was in een herenhuis in de Vreewijkstraat in Lei-

den en Springer had daar op de tweede verdieping een (kleine) werkkamer. Ik was onder tussen ook getrouwd en gelukkig strekte de vriendschap tussen Springer en mij zich ook uit tot onze vrouwen en deze vriendschap is daarna altijd in stand gebleven.

Maarn

In 1957 verhuisde de familie Springer naar Maarn. Natuurlijk werd daarna het contact tussen ons wel wat minder, maar we zagen en spraken elkaar toch geregeld bij werkgroepen en lezingen, bijvoorbeeld bij de bijeenkomsten van het zogenaamde ‘Schoven colloquium’ en de latere voortzettingen daarvan. Later toen we ieder minder aan de ‘landelijke activiteiten’ gingen deelnemen, zagen we elkaar toch nog vaak bij lezingen en bij familiebezoeken. Natuurlijk gingen we ook in de wiskunde ieder onze eigen weg. Als we elkaar zagen was de voortgang van de wiskunde toch het hoofdonderwerp van gesprek en Springer bleef met name altijd erg geïnteresseerd in de ontwikkelingen in de algebraïsche meetkunde, ook toen daar een nieuw tijdperk, het tijdperk Grothendieck, aantrad. Vooral in de zestiger jaren zijn veel van onze gesprekken over deze nieuwe ontwikkelingen gegaan.

In 1964 werd Springer lid van de KNAW, waar hij lange tijd het jongste lid van de Sectie Wiskunde was. In 1967 werd hij ook gekozen tot lid van de London Mathematical Society.

Utrecht

In Utrecht ontwikkelde Springer een bruisende activiteit. Zijn werk speelt zich (vooral) af in de algebra, getaltheorie en meetkunde, maar voor Springer was de wiskunde één geheel en juist in het inzicht in de samenhang van de gebieden lag een grote kracht. Ik voel me niet competent om de technische details van zijn werk te bespreken, maar ook voor een niet-expert is het duidelijk dat zijn werk indrukwekkend is, niet alleen in omvang maar vooral ook in diepgang. Op het gebied van algebraïsche groepen is Springer wereldberoemd. Hij heeft hier fundamentele bijdragen geleverd en nieuwe begrippen ingevoerd waarvan sommigen nu zijn naam dragen zoals bijvoorbeeld Springerrepresentaties, Grothendieck–Springer-resoluties, Springervezels. Van zijn vier boeken (waarvan een samen met F. Veldkamp) zijn er twee in het Russisch vertaald. Zijn boek *Linear Algebraic Groups* is een standaardwerk, een van Birkhäuser's *Modern Classics*.

Springer had de gave om ook de meest geavanceerde, technische ontwikkelingen onmiddellijk te begrijpen als ze van toepassing

waren op zijn eigen gebied. Een voorbeeld hiervan is de ingewikkelde theorie van intersectiecohomologie en perverse schoven, een theorie die hij al snel wist toe te passen op algebraïsche groepen. Hij hield hierover, op uitnodiging, in 1982 een voordracht in het Bourbaki Seminar. Deze voordracht werd besproken in de *Mathematical Reviews* (MR689529) van 1985 door MacPherson (een van de grondleggers van deze intersectiecohomologie) en hoe bescheiden Springer altijd was over zijn eigen werk blijkt wel uit de laatste zin van deze bespreking waar MacPherson schrijft: “The reader is warned that Springer’s report understates his own contributions to the subject.”

ICM

Springer bleef actief op het gebied van onderzoek tot op hoge leeftijd: in 2006 was hij op tachtigjarige leeftijd nog uitgenodigd spreker op het ICM congres in Madrid.

Hij had vele eervolle ‘visiting positions’, bijvoorbeeld op het Institute for Advanced Study in Princeton (meerdere malen), IHES, University of California, Tata Institute Mumbai, Australian National University en MSRI in Berkeley, om er enkele te noemen.

Springer hield niet alleen van wiskunde. Hij hield ook van klassieke muziek en van literatuur. Hij was ook een groot liefhebber van reizen, samen met zijn vrouw maakte hij uitgebreide reizen, niet alleen in Europa en de Verenigde Staten, maar zij bezochten ook China en meerdere malen India en Indonesië.

Hoewel de ouderdom Ton Springer geestelijk niet scheen te deren, begonnen de jaren lichamelijk wel te tellen, met name het lopen werd steeds moeilijker voor hem. Op 7 December 2011 overleed Springer plotseling tijdens een wandeling. De wetenschappelijke wereld verloor in hem een groot wiskundige, een wiskundige van wereldfaam. Voor mij was Ton Springer niet alleen een raadgever waar ik ontzettend veel aan te danken heb, maar vooral een dierbare vriend.

Een echte wiskundige (door Jan Stroomer)

Over de wiskundige prestaties van Springer weten anderen meer, ik beperk me tot herinneringen en indrukken.

Leiden

Als jongerejaars wiskundestudent in Leiden heb ik hem voor het eerst meegemaakt. Bij een beginnerscollege calculus verzorgde hij als assistent een oefenuur. Vrij schools, ‘sommen’ op het bord voormaken. Didactisch weinig geestdrift wekkend. Maar je merkte toen al dat hij wist waar hij het over had, en hier



Tonny Springer, Hans Freudenthal en Jaap Seidel tijdens de conferentie ter gelegenheid van Springers 60ste verjaardag, 1986

op een enigszins onthechte manier in op ging. Tijdens de verdere Leidse jaren knikten wij elkaar wel vriendelijk toe, maar gingen ieder ons weegs.

Utrecht

Toen ik een halve eeuw geleden naar Utrecht kwam, was Springer daar hoogleraar. Een van de meest veelbelovende wiskundigen van Nederland, zoals ons toenmalig opperhoofd Hans Freudenthal mij toevertrouwde. Springer gaf geavanceerde colleges, en verzorgde seminaria samen met Van der Blij, later alleen, waar een groot deel van de staf aan deelnam. Hier werden nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde doorgenomen. Er ging voor ons een venster open naar de wijde wereld. In 1966 organiseerde hij samen met Monna een week lang p-adische activiteiten in Zeist. Ook hier heeft menig aankomend talent van geprofiteerd.

Internationaal

Naarmate de jaren vorderden en Springer internationaal doorbrak, wist hij steeds meer befaamde buitenlandse geleerden naar Utrecht te halen, voor kortere of langere tijd. Velen hebben hier baat bij gehad, soms op onverwachte wijze.

Zo heb ik zelf met Serre schaakvlugger-tjes gewisseld in een plaatselijk studenten-café, en bij een andere gelegenheid Borel en zijn vrouw thuis naar Zuid-Indiase muziek laten luisteren. Zoals dat gaat, kreeg Springer een wassende reeks van promovendi, waarvan menigeen in binnen- of buitenland tot op de dag van vandaag substantieel bijdraagt

aan zijn vakgebied. Maar nooit omringde hij zich met een schare van discipelen en paladيين, nooit probeerde hij een 'school' te bouwen. Mij bevalt dit, een ander misschien minder.

Zestig

In 1986 vierde Springer zijn zestigste verjaardag en de universiteit haar driehonderdvijftigste. Dit laatste werd onder andere opgeluisterd met een aantal wetenschappelijke congressen of symposia. Tijdens het eerste hiervan, dat begin april plaatsvond en een kleine week duurde, werden beide jubilea gevierd.

Met Arjeh Cohen, Wim Hesselink en Wilberd van der Kallen wisten wij veertien gerenommeerde sprekers te strikken. Uitstekende voordrachten in de binnenstad. Een ontspannen programma liet gelegenheid om ook een aantal gereputeerde collega's uit binnen en buitenland die zich hadden aangemeld, te leren kennen. Dat het een genoeglijk festijn werd, was denk ik ook te danken aan de vriendelijke aard van de hoofdpersoon. Zeker, hij had zijn meningen, bracht die ook wel naar voren, maar niet op een polemische manier, hij dramde niet. Deelnemers voelden zich op hun gemak. Bij deze gelegenheid boden de bij hem gepromoveerden een ets aan. Later breidde Springer zijn verzameling uit met werk van de aboriginals, van wier traditionele kunst hij tijdens een aantal reizen naar Australië onder bekoring was geraakt.

Later

Na deze feestweek ging Springer gewoon door. Hij begeleidde promovendi, hij publi-

ceerde met of zonder mede-auteurs op hoog niveau, door zijn uitgebreide kennis en inzichten bleef hij een vraagbaak voor collega's. Tot ver na zijn pensioen bezocht hij symposia en werkte hij op uitnodiging korte of langere tijd samen met vakgenoten in verre landen. Op voorstel van de eerste winnaar van de Abelprijs in 2003, de al eerder vermelde Jean-Pierre Serre, werd hij uitgenodigd om de voordrachten en plechtigheid in Oslo bij te wonen, een blijk van zijn statuut. Op 82-jarige leeftijd hield hij een voordracht over het werk van de gedeelde winnaar van die prijs in het jaar 2008, Jacques Tits. Met een PowerPoint-presentatie precies op maat, ook dit had hij geleerd. Intussen genoot hij van menige toeristische reis met zijn vrouw Tijnie, onder andere naar Indonesië.

Betrokkenheid

Nog iets over Springers betrokkenheid. Toen het IJzeren Gordijn nog hing en de Muur nog stond, kwam menige wiskundige van daarachter voor kortere of langere tijd naar Utrecht. Gingen al of niet terug. Springer had hier de hand in. Hij zette zich hiervoor in, uit mathematische, maar naar ik vermoed, ook humanitaire redenen. Gedurende een lange reeks van jaren, spanden hij en zijn Tijnie zich in om mensen van ons instituut samen te brengen. Menigmaal, eerst in Maarn, later in Zeist, werden wij uitgenodigd voor een maaltijd. Dikwijls wanneer een buitenlander op bezoek was, het bevorderde het gevoel dat men deel uitmaakte van een grote gemeenschap. In latere jaren uitte dit zich anders. Toen ik zo'n vier jaar geleden na een zware operatie langdurig in het ziekenhuis lag en daaropvolgend nog een maand in een hersteloord, kwamen de beide Springers meer dan eens op bezoek. Opbeurend en bemoedigend. Het had ook iets vertrouwds. Later, tot werkelijk vlak voor zijn dood, kwam hij nog wel naar ons wekelijks colloquium. Hij bewoog moeilijk, maar scherp bleef hij. Meestal kwam hij even langs om een praatje te maken. Vele jaren geleden kwam ik in gesprek met een man die in Utrecht wiskunde had gestudeerd, en op dat moment voorzitter was van de universiteitsraad van een Technische Universiteit. Ik vroeg hem, of hij iets had gehad aan zijn studie wiskunde voor deze bestuurlijke activiteit. Hij dacht even na en antwoordde: "Nee, niet veel. Maar ik heb college gelopen bij professor Springer. Niet dat ik er altijd veel van begrepen heb. Maar hij was een echte wiskundige." Velen van ons hebben hem eveneens zo beleefd. Gedenken doe ik hem met eerbied en genegenheid.

Een baken (door Arjeh Cohen)

Springer was een wiskundige in hart en nieren. Echte wiskunde, dat hield hem bezig, de rest was bijzaak. Wat echte wiskunde is, daar had hij welomlijnde ideeën over. Een bevriende collega ontmoette de heer en mevrouw Springer ergens in China. Omdat mevrouw Springer hem niet kende, stelde hij zich voor als een collega-wiskundige, waarop Springer preciseerde dat hij een toegepast wiskundige was; toon en veelbetekenende blik erbij deden de rest.

Niet alleen mijn vrienden, ook ik zelf kreeg wel eens een kritische vraag naar het wiskundig gehalte van wat ik deed. Toen ik me bijvoorbeeld op de computeralgebra stortte, vroeg Springer zich vaderlijk bezorgd af of er wel voldoende wiskunde in zat. Niet dat hij zo graag een vaderfiguur was. Hij had wel enig begrip voor jonge mensen die hun eigen weg probeerden te vinden en was desgevraagd ook zeer behulpzaam, maar in zijn algemene optreden vertrouwde hij op de eigen verantwoordelijkheid. Dat is niet verwonderlijk voor iemand die in onze wiskundige delta na de Tweede Wereldoorlog vrijwel volledig op eigen kracht tot grote hoogte kwam.

Echte wiskunde

Wat was dan wel echte wiskunde? Dat kon ook hij niet zomaar aangeven. Het zou aanmatigend zijn als ik probeerde dat hier toch maar uit te leggen. Niettemin denk ik veel opgestoken te hebben van zijn interpretaties. Echte wiskunde heeft iets verrassends te vertellen. Daar komt iets uit dat een onverwacht verband tussen twee werelden legt, daar kun je iets mee dat vooraf niet voor mogelijk gehouden was. Echte wiskunde verrast. Vaak kon ik bij Springer waarderend ontdekken voor iemand die een sterk resultaat op geheel eigen wijze (en dat mocht best onorthodox zijn) naar voren bracht. Springer heeft me wiskunde leren appreciëren.

Ik heb Springer bijna 44 jaar lang gekend. In mijn tweede studiejaar (1968) kreeg ik hem als docent voor een algemeen wiskundevak. Tussen het didactische geweld van uiterst begaafde docenten als Van der Blij en Van Tiel viel hij niet op. Daarna des te meer. Bij de wat meer individuele contacten die ik in mijn derde jaar in het wiskundegebouw opdeed, werd me duidelijk dat Springer daar een erg dominante rol speelde. Zijn wetenschappelijke status bracht een groot gezag met zich mee op meerdere terreinen binnen het instituut. Ik volgde verschillende van zijn colleges, die zonder uitzondering een boeiende inhoud hadden. Ik herinner me levendig een college

groepentheorie, waarbij ik als tentamen opgaven uit Bourbaki maakte. Ik denk ook met enige schroom terug aan een mondeling ter afsluiting van het doctoraalexamen in 1971, waarin van de twee examinatoren Van der Blij ons (ik deed het examen samen met een ander) de orde van de algemene lineaire groep over een eindig lichaam probeerde te laten bepalen en Springer ogenschijnlijk verveeld uit het raam keek.

Promotor

Springer werd mijn promotor. Hij heeft me op het pad van de eindige spiegelingsgroepen gebracht. Het is eenvoudig in te zien waarom hij daar zelf in geïnteresseerd was. Vanaf zijn proefschrift (over symplectische groepen) was Springer sterk betrokken bij de ontwikkeling van de theorie van de algebraïsche groepen. Deze variant van Lie-groepen is erg belangrijk voor de eindige groepentheorie omdat bijna alle eindige niet-commutatieve enkelvoudige groepen direct van algebraïsche groepen afkomstig zijn. (De uitzonderingen zijn de alternerende groepen en de 26 sporadische groepen.) De classificatie van de algebraïsche groepen was bekend, maar de structuurbepaling, waaronder de bepaling van de mogelijke voorstellingen als groep van matrices over een lichaam, vormde een grote uitdaging.

Conjugatieklassen

De bepaling van de conjugatieklassen van een algebraïsche groep kan gezien worden als een vroege stap in dit proces. Samen met Steinberg heeft Springer een zeer gedetailleerde en goed bruikbare beschrijving gegeven van deze conjugatieklassen. En daar is dankbaar gebruikt van gemaakt: hun hoofdstuk 'Conjugacy Classes' in de door Borel geredigeerde *Lecture Notes in Mathematics* 131 (1970 Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups) is Springers meest geciteerde artikel (al dit soort tellingen zijn uitgevoerd met MathSciNet). De classificatie koppelt de algebraïsche groepen aan bepaalde spiegelingsgroepen, Weyl-groepen geheten, die ook in de bepaling van die conjugatieklassen dominant aanwezig zijn. Dit leidde tot allerlei vragen over spiegelingsgroepen.

Een daarvan is als volgt te beschrijven. Een prachtig resultaat van Steinberg stelt dat elke stabilisator van een vector in de natuurlijke voorstelling van een eindige spiegelingsgroep weer een spiegelingsgroep is. De elementen van de groep die een eigenvector hebben met triviale stabilisator (dus een vec-

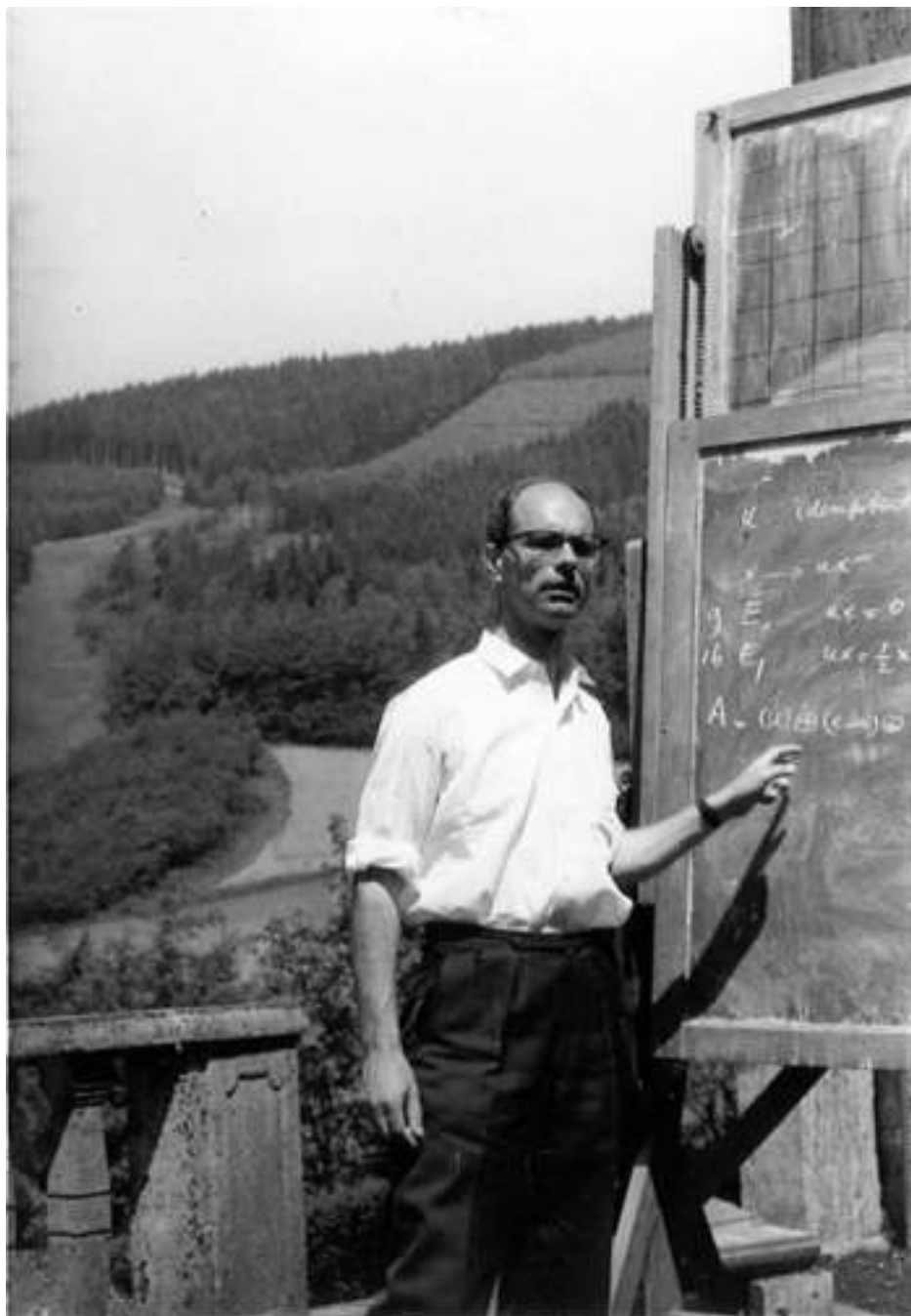
tor die buiten alle spiegelhypervlakken valt) noemde Springer regulier. Hij beschreef hoe hun centralisator gezien kan worden als complexe spiegelingsgroep op een complexe eigenruimte in de natuurlijke voorstelling van de spiegelingsgroep. Terwijl hij dit onderzoek deed, spoorde Springer me aan tot een herziening van de classificatie van de eindige complexe spiegelingsgroepen. In mijn promotietijd heb ik zijn manuscript voor het uiteindelijke artikel (zijn een-na-meest geciteerde artikel) mogen proeflezen. De kracht van zijn stellingen wees er duidelijk op dat dit echte wiskunde was.

CWI

In de jaren na mijn promotie is hij me blijven volgen. Mede dankzij hem ben ik op het CWI (destijds Mathematisch Centrum) terecht gekomen. Dat was nadat ik van de complexe naar de quaternionspiegelingsgroepen was overgegaan, en voordat Springer me deed beseffen dat het onderwerp waar ik me mee bezighield ook gezien kon worden als de bepaling van bepaalde interessante eindige ondergroepen van een gegeven algebraïsche groep. Deze observatie heeft me naar de bepaling van alle eindige ondergroepen van de Lie-groep van type G_2 geleid, naar samenwerking met David Wales, en naar stappen richting de oplossing van een vermoeden van Kostant. Voor deze studie begon ik oud werk van Springer te lezen, zoals de aantekeningen van zijn colleges in Göttingen uit 1959 (die later omgewerkt zijn tot het in 2000 verschenen boek *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups* met Veldkamp). Uitvinden wat er precies in stond werd bemoeilijkt door afwezigheid van inhoudsopgave, een vooruitblik op de stof, en een beschrijving van de resultaten, maar de inspanning van het uitpluizen van de inhoud werd rijkelijk beloond door mooie bewijzen van moeilijke resultaten. Het viel me op dat Springers benadering van voor mij meetkundige resultaten zeer algebraïsch was. Dit gold ook voor zijn waarschijnlijk meest beroemde werk 'Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups', dat in 1976 verscheen en tegenwoordig onder namen als Springerresoluties en Springervoorstellingen bekend staat (het twee-na-meest geciteerde artikel).

Lusztig

In de jaren tachtig volgde ik zijn donderdagmiddagseminar in Utrecht, dat erg veel aandacht besteedde aan werk van Lusztig. Deze grote wiskundige, die al jong in Utrecht



Tonny Springer houdt een voordracht in de openlucht in Oberwolfach (waarschijnlijk 1964)

te gast was, heeft het belang van Springers grootste resultaten vroegtijdig ingezien en op indrukwekkende wijze gegeneraliseerd, hetgeen Springer weer grotelijks inspireerde. Deze vruchtbare onderlinge interactie is nog zeer lang doorgegaan.

Springer was ook de promotor van mijn eerste twee promovendi, Cuypers en Van Bon. Hij had er geen enkele moeite mee me hierin volledig mijn gang te laten gaan, en als hoogleraar de promoties te faciliteren. Ik heb zijn vertrouwen in mij bijzonder gewaardeerd.

Ondertussen volgde Springer zowel Borel als Humphreys in het schrijven van een boek

over lineaire algebraïsche groepen. Ik vind de behandeling van de theorie en de uitwerking van de rationale vormen in de tweede editie (de eerste verscheen in 1981 en de tweede in 1998) bijzonder helder, elegant en bruikbaar.

Springer deed altijd liever wiskunde, maar daar waar het moest vervulde hij de nodige bestuur- en beheertaken, zoals een decanaat, lidmaatschap van adviesraden (waaronder het CWI) en deelname aan visitaties.

Springer is een baken voor me geweest. In bescheidenheid, door, reflecterend op zijn hoge status als wiskundige in Nederland,

openlijk zijn meerderen te erkennen in Serre en Lusztig. In distantie tot de waan van de dag, waar woorden als project en speerpunt de leegten moesten vullen. In appreciatie van wiskunde. In behulpzaamheid, door wiskundige vragen uitgebreid te beantwoorden.

Aimabel

Aimabel als Springer was, kon af en toe iemand een voor mij onverwacht grote dosis toorn bij hem opwekken. Ik herinner me nog dat we met rode oortjes brieven van hem lazen waarin zijn ongenoegen over bepaalde daden van het instituutsbestuur duidelijk gemaakt werd. Niet zozeer de aanleiding van de brieven als wel flarden van zijn formuleringen staan me bij, omdat ze zulke markante en onbegrijpelijke uitspraken bevatten als: "Dan speel ik liever een partijtje tennis op mijn eigen Riemannoppervlak." Wie weet in welke dimensie hij dat nu ook doet.

Mijn promotor (door Wilberd van der Kallen)

Professor Springer was samen met Hans Mars de begeleider bij mijn afstudeerfase. Het onderwerp van mijn proefschrift ontstond toen ik een Lie-algebra had bepaald volgens een opgave van zijn vriend Steinberg. Ik vertelde het resultaat aan Springer en praatte Veldkamp na dat er 'natuurlijk' bij de gevonden Lie-algebra een algebraïsche groep hoorde. Dat vond hij erg grappig, maar vervolgens bedacht hij dat het een goed idee was om op zoek te gaan naar zo'n algebraïsche groep. Dus dat werd mijn onderwerp. Als begeleider was hij heel gemakkelijk. Je kon alles vragen, zolang je maar duidelijk was over wat je wel of niet begreep. En hij was heel positief over alle pogingen.

Hij bleef altijd geïnteresseerd in mijn werk, ook toen ik een andere kant uit ging. Als me iets lukte, dan deed hem dat zichtbaar plezier. Dat heb ik erg gewaardeerd.

In de wiskunde was hij te sterk om veel aan mij te hebben, maar als het de computer betrof, kon ik hem wel eens van dienst zijn met een plaatje of een programma.

Nieuwtjes over wiskunde waren altijd zeer welkom.

Door alle seminaria die hij organiseerde of liet organiseren, was het erg eenvoudig om wat bij te leren. Hij maakte goed zichtbaar wat een mooi vak die wiskunde toch is.

Ook nadat hij bij zijn emeritaat het stokje had overgedragen, kwam hij regelmatig op het instituut. Omdat hij zich steeds moeilijker verplaatste, werd dit op den duur wat minder. Maar met collega's elders had hij tot het laatst intensief contact.



Derk Pik

JSG Maimonides

Postbus 87058

1080 JB Amsterdam

drpik@xs4all.nl

Boekbespreking De zeven grootste raadsels van de wiskunde

Goede vragen

Sinds het uitloven in 2000 van totaal zeven miljoen dollar voor het oplossen van een aantal beroemde wiskundige vermoedens, is de prijs nog nooit uitgekeerd, alhoewel er een van de problemen is opgelost. De problemen zelf en de wiskundigen die er aan werken, zijn door de prijsvraag wel voor het voetlicht gekomen. Er wordt meer over geschreven in de pers en men probeert de problemen, die zelfs voor wiskundigen moeilijk te begrijpen zijn, in gewone taal onder de aandacht te brengen. De zeven grootste raadsels van de wiskunde is het eerste boek over de Clay-problemen in de Nederlandse taal. Het boek *De Riemann-hypothese* gaat dieper in op het meest beroemde van deze problemen. Derk Pik, middelbareschooldocent en hoofdredacteur van *Pythagoras* bespreekt de boeken.

Hoe belangrijk is geld voor de gemiddelde wiskundige? Als Grigori Perelman hiervoor een maatstaf is, dan heeft het uitloven van geld voor het oplossen van wiskundige problemen geen zin. Nadat hij in 2002 drie publicaties op internet heeft gezet waarmee het Poincaré-vermoeden is opgelost, heeft hij de prijs geweigerd. Daarvóór wilde hij de Fields-medaille ook al niet in ontvangst nemen. Het lijkt erop dat prijzengeld er niet toe doet.

Toch is het geweldig voor de wiskunde dat het *Clay Institute* het prijzengeld beschikbaar heeft gesteld. Moeilijke, abstracte wiskunde komt bij het grote publiek onder de aandacht.

Het belang van de prijs

Met het instellen van deze prijs komt de wiskunde zelfbewust naar voren. Eindelijk, kan men wel zeggen, want de zeer formele aanpak van wiskunde in de vorige eeuw heeft — naast veel goeds — ook een diepe communicatiekloof teweeg gebracht tussen de beoefenaren en het gewone publiek. Hoeveel wis-

kundige theorieën zijn er in de vorige eeuw niet verschenen die nu totaal onleesbaar zijn door overmatige generalisatie en abstractie? Men schreef voor een select gezelschap van connaisseurs. Er ontstond een type wetenschapper dat er trots op was dat niemand hem begreep. Deze wetenschapper vindt zijn spiegelbeeld in de leek, die er trots op is dat hij van wiskunde niets begrijpt.

Aan het eind van de vorige eeuw is men het weer belangrijk gaan vinden om te communiceren met de omgeving. Dat kan men zien van laag tot hoog, van de middelbare schoolboeken tot aan de communicatiecursussen voor universiteitsmedewerkers. De buitenwereld kan steeds minder geduld opbrengen met fundamenteel onderzoek in het algemeen: het is een belangrijke taak geworden om aan de buitenwereld uit te leggen waar men zich mee bezighoudt.

Het belang van de Clayprijs kan dan moeilijk worden onderschat. Als iets een miljoen dollar waard is, dan moet het wel belangrijk

zijn. De Clayprijs biedt de gehele wiskunde dus een kans: het heeft een nieuwsgierig publiek gecreëerd. Wij mogen uitleggen wat onze belangrijke problemen zijn: problemen voor een belangrijk deel voortgekomen uit fundamenteel onderzoek.

De auteurs van *De zeven grootste raadsels van de wiskunde* [1] hebben hiervoor de juiste toon gevonden. Ze vergelijken het oplossen van de moeilijke problemen met het beklimmen van hoge bergen. Het kost veel moeite, maar de vergezichten zijn verpletterend. Wat is er nu mooier dan over dergelijke barre tochten te lezen, zonder de ontberingen werkelijk te moeten ondergaan?

Het belang van de grote problemen

Aan de universiteiten en op de grote wetenschappelijke instituten in de wereld wordt eigenlijk weinig aan de grote problemen gewerkt. Althans, niet in het openbaar. De gebruikelijke *proposal*-constructie van de onderzoeksfinanciering maakt in ieder geval dat aanvragers wel uitkijken om dit soort onderwerpen aan te dragen. Veel liever schrijft men een *proposal* voor onderzoek waarvan het resultaat grotendeels voorspelbaar en zeker is.

Vragen als “in hoeveel jaar denkt u de eerste resultaten te behalen?” zijn voor subsidieverstrekkers normaal, maar zijn wiskundig eigenlijk heel vreemd. Hoe kan je weten hoe moeilijk een probleem is voordat je het hebt opgelost? Wiskundig onderzoek ver-

schilt nogal van experimenteel onderzoek. Een negatief resultaat is in de wiskunde geen resultaat.

Stel je voor dat je aan de Riemann-hypothese zou willen werken, dan moet je het beter doen dan al het onderzoek dat er in de voorafgaande honderdvijftig jaar aan is gespendeerd. De kans op resultaat is gering en daar mee ook de mogelijkheid om er subsidie voor te krijgen.

Een ander punt is de openbaarheid. Deze is vanzelfsprekend aan de universiteit, maar kan het onderzoek ook in gevaar brengen. Er staat veel op het spel. Als je iets verkeerd doet, bijvoorbeeld je doet een voorbarige aankondiging van een bewijs, dan valt alles in duigen, en ligt al het werk op straat. Iedereen kan met jouw werk verder gaan, bijvoorbeeld een niet geweldig moeilijke fout repareren en vervolgens het bewijs voor zichzelf opeisen. Misschien moet je onorthodoxe paden bewandelen waar niemand enig heil in ziet. Onbegrepen zul je een eenzame weg op moeten gaan, weggehoond als overmoedige zonderling die de pretentie heeft beter te zijn dan alle voorgangers.

Toch zijn er steeds weer eenlingen die wel aan de grote problemen beginnen. Hoe gaan zij in het werk?

Gregori Perelman werkte alleen, in afzondering in St. Petersburg aan het Poincaré-vermoeden. Hij publiceerde zijn oplossing in drie afzonderlijke artikelen, zonder hierbij het vermoeden te noemen. Specialisten op het vakgebied begrepen wel meteen dat het vermoeden bewezen was.

Toen Louis de Branges een bewijs meende gevonden te hebben van het Bieberbach-vermoeden (een vermoeden uit de complexe functietheorie over de mate waarin de coëfficiënten van de machtreeksontwikkeling van een univalente functie kunnen groeien) reisde hij allerlei colloquia af (onder andere het operatorentheoriecolloquium aan de VU en het analysecolloquium van het Steklov mathematisch instituut in het toenmalige Leningrad) en stuurde manuscripten in het rond met de vraag om deze te controleren. De controle van dergelijke manuscripten is een zeer zware klus, die goed op niets kan uitlopen. Hier ging het goed: het Bieberbach-vermoeden bleek bewezen.

Zijn latere pogingen om de Riemann-hypothese te bewijzen gingen op soortgelijke manier. Alleen: deze bleken niet correct.

Het verhaal van het bewijs van het vermoeden van Fermat door Andrew Wiles is bekend: ook daar zat een gat in, dat gelukkig door Wiles zelf kon worden gedicht.

Nu lijkt het abc-vermoeden bewezen te zijn door Shinichi Mochizuki van de universiteit van Kyoto in Japan. De artikelen zijn gewoon te downloaden op internet: ze zien er onbenaaderbaar uit. De mensen die dit gaan controleren moeten uit de toplaag van het vakgebied komen, zullen er lange tijd mee kwijt zijn en zullen vervolgens niet delen in de roem. Nog erger zal het zijn wanneer er een fout wordt ontdekt: dan is een wetenschappelijk artikel over deze fout het hoogst haalbare.

Anders wordt het als je met een groep aan een probleem kan werken. Bij problemen die wat belangrijker zijn voor toepassingen is dit gemakkelijker te organiseren: daar is meer geld voor beschikbaar. Er zijn overal in de wereld groepen die zich bezig houden met de Navier–Stokes-vergelijkingen: ook een Clay-probleem. Als men niet het antwoord vindt op het Clay-probleem zelf, dan kan men zich altijd nog nuttig maken voor het vele toegepaste onderzoek, dat typisch bij dit onderwerp behoort.

De kwaliteit van de problemen

Dat brengt ons op de vraag: hoe goed is de Clay-lijst eigenlijk? In 1900 maakte Hilbert zijn lijst van 23 problemen bekend op het Internationale Wiskundecongres in Parijs. Steven Smale stelde op verzoek van Vladimir Arnold een soortgelijke lijst samen in 2000. In hetzelfde jaar publiceerde het Clay Institute zijn zeven problemen. Vier van de Clay-problemen staan ook bij Smale op de lijst. De lijst van Smale bevat relatief veel problemen uit de dynamische systemen en niet-lineaire analyse: vakgebieden waar Smale en Arnold actief zijn. Men kan zich voorstellen dat een getaltheoreticus met een andere lijst aankomt.

De Clay-lijst bestaat uit de volgende vermoedens en problemen.

1. Het Riemann-vermoeden: alle niet-triviale nulpunten van de ζ -functie liggen op de lijn $\text{Re } z = \frac{1}{2}$.
2. Het Birch en Swinnerton-Dyer-vermoeden: er is een precies verband tussen de algebraïsche structuur van de rationale punten op een elliptische kromme en de aan deze elliptische kromme geassocieerde analytische L -functie.
3. Het Hodge-vermoeden: een nogal technisch vermoeden over de cohomologieklassen van een compacte complexe variëteit.
4. De vergelijkingen van Navier–Stokes: het bij nette randvoorwaarden al dan niet bestaan van een oplossing voor de differentiaalvergelijkingen van Navier en Stokes die de stroming van een gas of vloeistof beschrijven.

5. Het probleem van P versus NP : de vraag of de klasse P van algoritmen waarvoor in polynomiale tijd een oplossing te berekenen is, gelijk is aan de klasse van algoritmen waarbij slechts het *controleren* van een oplossing in polynomiale tijd behoeft te worden gedaan.

6. Het Poincaré-vermoeden: de vraag of een driedimensionaal boloppervlak (in vier dimensies) topologisch gekarakteriseerd is door de eigenschap dat elke gesloten kromme in dit oppervlak samentrekbaar is tot een punt.

7. De Yang–Mills-theorie: het geven van een wiskundige fundering voor de belangrijkste eigenschappen van het Standaardmodel, dat de elementaire deeltjes en hun eigenschappen beschrijft.

Bij diverse problemen is het moeilijk om bondig te formuleren wat het probleem eigenlijk is. Het is daarbij ook moeilijk voor te stellen hoe belangrijk het is als bijvoorbeeld het Hodge-vermoeden wordt bewezen of weersproken.

Sommige vermoedens laten heel veel wiskunde op zijn plaats vallen, zoals de Riemann-hypothese. Andere vermoedens, zoals bijvoorbeeld de stelling van Fermat hebben dit niet. Bij het werken aan dit vermoeden zijn echter wel hele nieuwe takken wiskunde ontstaan.

Twee van de zeven Clay-problemen hebben direct betrekking op de natuurkunde: de Navier–Stokes-vergelijkingen en de Yang–Mills-theorie. Het laat zien hoe belangrijk wiskunde is voor de natuurkunde en ook hoe natuurkundige grote wiskundige vragen kan oproepen.

Een algemeen wiskundig ontwikkeld publiek

Het is jammer dat de Clay-problemen zo moeilijk aan een algemeen publiek zijn uit te leggen. Toch kan dit niet een norm voor de kwaliteit van deze problemen zijn. Er zijn vele grote open problemen die veel gemakkelijker aan het publiek zijn uit te leggen, zoals het Goldbach-vermoeden of het $3n+1$ -probleem. (Zie voor een representatieve lijst problemen [6].) Het is onduidelijk of het oplossen van deze problemen beter zal zijn voor wiskundige vooruitgang.

Het belang van een resultaat kan natuurlijk niet afhangen van de mate waarin het algemene publiek het begrijpt. Aan de andere kant is het belangrijk dat er voor de moeilijk formuleerbare problemen steeds weer nieuwe, eenvoudigere equivalente formuleringen worden gevonden. Dat is goed voor het algemeen publiek, goed voor de wiskundigen die research-

geld moeten verwerven en ook goed voor de wiskundigen zelf, voor het andere gezichtspunt, voor de dwarsverbanden en voor het houden van overzicht.

Met wat slagen om de arm kunnen we criteria opstellen voor de kwaliteit van een probleem.

- Hoe veel wiskunde hangt af van het resultaat?
- Hoe lang staat het open?
- Hoeveel mensen hebben er aan gewerkt? Hoeveel is er over gepubliceerd?
- Hoe eenvoudig is het uit te leggen?

Het lijkt erop dat de Clay-problemen vooral goed scoren op de eerste drie parameters. Dit stelt de schrijvers van *De zeven grootste raadsels van de wiskunde* [1] voor een grote opgave. We mogen zeker niet verwachten dat de auteurs ons helemaal uit de doeken kunnen doen wat de problemen precies betekenen en wat de moeilijkheden zijn die de onderzoeker zal tegenkomen. Van de lezer wordt verwacht dat hij het middelbareschoolniveau toch wel enigszins is ontstegen. Met behulp van behoorlijk wat analogieën en vereenvoudigingen proberen de auteurs ons de omgeving te schetsen van de problemen.

Het boek

Het boek leest zeer vlot weg; men leest het in een weekend uit en is dan op alle terreinen wel wat wijzer geworden. Niet elk probleem komt even goed uit de verf; bij het Hodge-vermoeden kom je er nauwelijks achter wat het vakgebied is, bij de Navier–Stokes-vergelijkingen ligt de nadruk te sterk op het discretiseren van het probleem en bij Yang–Mills staat de op zich prachtig gevonden analogie van gemiddelden over padintegralen van sinusfuncties te ver verwijderd van het probleem zelf. De sprong naar de deeltjesfysica is onbegrijpelijk.

Bovenstaande bezwaren zijn overigens helemaal niet erg; ik raad iedereen aan dit boek te lezen: het stelt je in staat om als stuurman aan wal mee te filosoferen over de grote problemen van de wiskunde.

We zullen dit boek vergelijken met *De Riemann-hypothese* [2] van Jan van de Craats en Roland van der Veen, beide ook auteurs van *De grootste raadsels van de wiskunde*. In dit boek komt de lezer op een andere manier in aanraking met een van de zeven grote problemen.

De Riemann-hypothese

Na een mooi inleidend hoofdstuk over de spelregels voor het winnen van de Clayprijs begint het boek met het meest beroemde



Links: Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats, Barry Koren, *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*, Bert Bakker, Amsterdam, 2012, 192 p., ISBN 9789035138018, prijs € 19,95; rechts: Jan van de Craats, Roland van der Veen, *De Riemann-hypothese*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2011, 112 p., ISBN 9789050411264, prijs € 19,00.

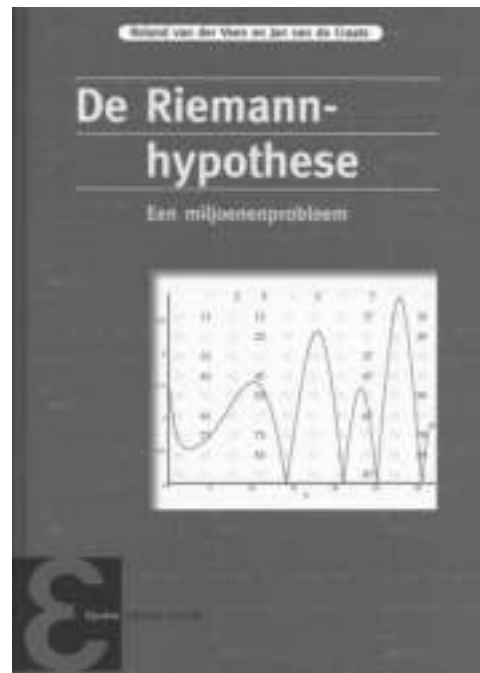
open probleem. Dit probleem betreft de functie $\pi(x)$ die het aantal priemgetallen geeft kleiner of gelijk aan x . Door middel van grafieken en spannende verhalen laten de auteurs overtuigend zien dat $\pi(x)$ verrassend veel lijkt op de logaritmische integraal

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt.$$

De Riemann-hypothese wordt geformuleerd door middel van de kwaliteit van deze benadering: bestaat er een positieve constante C waarbij voor alle $x \geq 2$ geldt dat

$$|\text{Li}(x) - \pi(x)| < C\sqrt{x} \ln x.$$

Vervolgens wordt de zetafunctie geïntroduceerd. Het verband tussen de priemgetallenfunctie $\pi(x)$ en de zetafunctie wordt niet gemaakt: dit is voorstelbaar, want daar komt nogal wat functietheorie bij kijken. De lezer maakt wel kennis met het materiaal van de Riemann-hypothese, al kan men zich afvragen of een lezer die niet thuis is in de complexe-functietheorie zich iets voor kan stellen bij analytische voortzetting of bij nulpunten in het complexe vlak. Al met al is het een heroïsche poging om de lezer wat dichterbij de buurt van de hypothese te brengen. Aan het eind van het verhaal komen we ook nog op een droomniveau van Alain Connes die verbanden ziet met energietoestanden van fictieve atomen.



Een veel verdergaand boek over de Riemann-hypothese, eigenlijk bedoeld voor middelbare scholieren, is het recent verschenen [2]. In dit boek slagen de auteurs er behoorlijk goed in om de relatie te leggen tussen de niet-triviale nulpunten van de zetafunctie en de verdeling van de priemgetallen. Dit boek is ook zeer vlot geschreven. Het bevat als belangrijke extra talloze verdiepende opgaven, die achter in het boek staan uitgewerkt. Interessant is ook hoe de auteurs gebruik maken van de internetrekenmachine Wolfram Alpha, om allerlei grafieken te plotten en zaken uit te rekenen.

De auteurs hebben een diepgaande kennis van het probleem en kiezen steeds voor de juiste balans tussen expliciete berekeningen en het weglaten van techniek. Het is een ideaal boek; het zou van grote betekenis zijn voor de toplaag van het wiskundeonderwijs als er ook zulke boeken verschenen over de andere Clay-problemen.

De stelling van Perelman

In het tweede hoofdstuk wordt het Poincaré-vermoeden behandeld. Het is erg leuk om dit hoofdstuk naast het hoofdstuk in het boek van Devlin [3] van 2002 te leggen: toen was dit vermoeden nog niet bewezen. Op het bewijs gaat [1] natuurlijk niet in, maar de toonzetting van dit hoofdstuk is echt anders: in [3] lijkt het voor de auteur nog plausibel dat het vermoeden niet waar is. Daar wordt meer aandacht besteed aan de betekenis van ge-

strande pogingen: ook het werken aan het Poincaré-vermoeden heeft kennelijk allerlei interessante wiskunde voortgebracht.

Eerst vertellen de auteurs over verschillen de soorten tweedimensionale ruimten, zoals het boloppervlak, de torus en allerlei krakelingen. Ze laten zien door middel van paden op de torus en het boloppervlak dat deze ruimten niet gelijk kunnen zijn. Op de torus bestaan paden die in hetzelfde punt beginnen en eindigen en toch niet tot één punt samentrekbaar zijn. Deze paden bestaan op het boloppervlak niet.

Natuurlijk zijn er meer ruimten waarvoor elk pad dat in hetzelfde punt begint en eindigt tot één punt samentrekbaar is. De auteurs vermijden al deze technische details door te praten over gesloten en begrensde oppervlakken zonder rand. Zij noemen deze kortweg 'gesloten'. Voor lezers met een wiskundige achtergrond kan dit best verwarrend zijn. Voor het algemene publiek, waar toe dit boek zich richt is de keuze natuurlijk wel te rechtvaardigen.

Het vermoeden van Poincaré ligt dan al om de hoek: wordt een driedimensionaal boloppervlak — gesloten, begrensd, zonder rand — op dezelfde wijze gekarakteriseerd? Op dit punt aangekomen kan de lezer zelfs denken dat dat zo moeilijk niet kan zijn. Er volgen inspirerende tekeningen waaruit blijkt dat de topologie van driedimensionale ruimtes behoorlijk wat ingewikkelder zijn dan tweedimensionale (zie Figuur 1). De lezer krijgt enige

notie van de verknoptheid van deze ruimtes en krijgt een indruk van de formidabele moeilijkheden van het probleem. Het Perelman-hoofdstuk is daarmee een van de sterkste van het boek.

Het P-versus-NP-probleem

Aan de hand van Euler-paden en Hamilton-paden wordt gedemonstreerd waarom het zo moeilijk is *P*- en *NP*-problemen uit elkaar te houden. Ook dit hoofdstuk is prima te begrijpen voor een lezer met een stevige algemene ontwikkeling. Het verschil tussen polynomiale en exponentiële groei wordt uitgelegd waarna de lezer goed kan begrijpen wat een *P*-probleem is: een probleem waarvoor een algoritme bestaat, waarvoor de rekentijd polynomiaal afhangt van de grootte van het probleem. Zo kan het sorteren van n getallen met het 'bubblesort'-algoritme geschieden door middel van $n^2 - 3n + 2$ operaties. Dit probleem is dus in polynomiale tijd op te lossen: een *P*-probleem.

Voor veel problemen kennen we geen polynomiaal algoritme om het op te lossen. Toch kan het nog steeds gemakkelijk zijn om een antwoord te controleren. Een getal ontbinden in factoren kan een onmogelijke opgave zijn terwijl het controleren of het product van de factoren het juiste getal oplevert een simpele klus is op een laptop. Een dergelijk probleem, waarvoor we het antwoord wel in polynomiale tijd kunnen controleren, maar waarvoor we geen polynomiale tijd algoritme kennen,

noemen we een *NP*-probleem. De Clay-vraag luidt: Zijn deze twee klassen hetzelfde?

In het boek laat men aan de hand van leuke concrete voorbeelden zien hoe verrassend moeilijk het $P = NP$ -probleem is, welke consequenties er zijn als het waar is, maar ook als het niet waar is. Het is een geanimeerd hoofdstuk waarin de problematiek helder naar voren komt.

De Navier–Stokes-vergelijkingen

Het eerste probleem waar de auteurs van [1] tegenaanlopen, is uit te leggen wat een differentiaalvergelijking eigenlijk is. Het volgende probleem is de complexiteit van de vergelijkingen van Navier en Stokes. De vergelijking modificeert stroming van gas of vloeistof in drie dimensies, en dit medium moet ook nog kunnen worden samengedrukt, afhankelijk van plaats en tijd. Een belangrijke vraag is, hoe goed deze vergelijking de werkelijkheid eigenlijk modificeert.

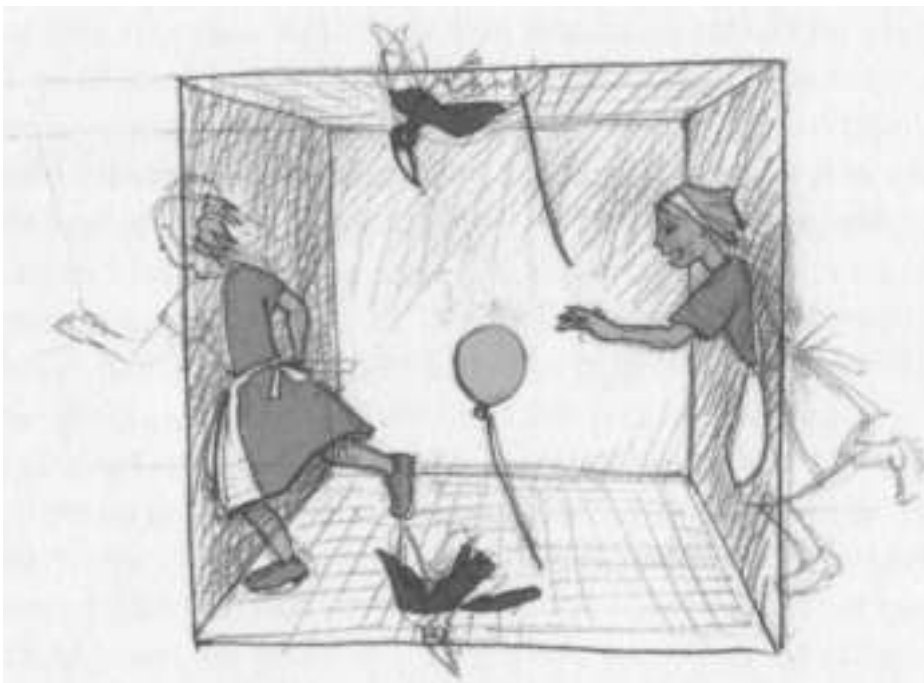
De ruimte in het boek is veel te klein om ook maar enigszins op bovenstaande aspecten in te gaan. De auteurs laten zien hoe je in de praktijk toch nog een indruk van een oplossing kunt krijgen door het probleem te discretiseren. Het resultaat van deze discretisering is een voorspelling op de korte termijn van de stroming van het gas of de vloeistof. Het zegt nog niets over de oplosbaarheid van de vergelijking in het algemeen, terwijl het daar in het Clay-probleem juist wel om te doen is.

Bij alle Clay-problemen komen veel begrippen voor die algemeen wiskundig ontwikkelde lezers niet kennen. Dit is niet anders bij differentiaalvergelijkingen. De auteurs zijn erg onvoorzichtig met begrippen zoals een krachtensor (een 3×3 -matrix), en partiële afgeleiden. Het is jammer dat daar niet wat meer aandacht aan is besteed, in plaats van aan de discretisering, die bovendien voor de Navier–Stokes-vergelijkingen alleen kan worden opgeschreven met een enorm aantal indices. De vragen "wat doe je als je de werkelijkheid modificeert door middel van een differentiaalvergelijking?" en "wat betekent het als je een differentiaalvergelijking hebt opgelost?" zijn natuurlijk buitengewoon moeilijk maar wel belangrijk voor het publiek van dit boek.

Ondanks deze bezwaren is ook dit hoofdstuk wel zeer de moeite waard om te lezen: ik merk bij mezelf dat ik juist over dit onderwerp ben gaan filosoferen.

Het Birch en Swinnerton-Dyer-vermoeden

Het hoofdstuk over dit vermoeden is het meest toegankelijke van het boek. Met al-



Figuur 1 Een illustratie uit *De zeven grote raadsels van de wiskunde*. Het leven binnen een 3-torus wordt gesuggereerd. De illustratie is gemaakt door Marco Swaen en stond eerder in *Pythagoras*, februari 2006.

lerlei gemakkelijk te begrijpen voorbeelden wordt het belang getoond van het aanbrengen van een algebraïsche structuur op elliptische krommen. Je kan het begin van deze theorie volledig uit het hoofdstuk begrijpen en dat is een grote prestatie. Het Birch en Swinnerton-Dyer-vermoeden doet een uitspraak over het aantal rationale punten op deze elliptische krommen en hierbij spelen zogenaamde L -functies een hoofdrol. Pas bij de introductie van deze functies bijt de lezer in het stof. De in het boek gegeven introductie laat waarschijnlijk toe dat, met veel meer pagina's, een lezer met weinig voorkennis nog heel wat verder kan komen.

De kwantum-Yang–Mills-theorie

Dit Clay-probleem is eigenlijk geen vermoeden. Er wordt gevraagd om het standaardmodel voor de elementair deeltjes wiskundig te onderbouwen. In het boek wordt getracht de Yang–Mills-theorie uit te leggen aan de hand van het gedrag van licht. Er wordt stevig in analogieën geredeneerd: analogieën die ergens wel verbinding maken met wat in een wiskundestudie aan de orde komt: gemiddelden over padintegralen, Taylor-ontwikkelingen van een Lagrangiaan van een zeer specifieke vorm. Het is leuk om een beetje een idee te krijgen waar het allemaal mee te maken heeft, maar helaas is het te veel, te beknopt en te vaag om echt tot het begin van begrip te leiden.

Het Hodge-vermoeden

Het Hodge-vermoeden wordt uitgedrukt in dermate abstracte termen, dat het de auteurs van het boek niet is gelukt om duidelijk te maken waar het in dit vermoeden over gaat. Eerst wordt de formule van Euler gedemonstreerd aan de hand van de platonische lichamen. Daarna wordt het Euler-karakteristiek van an-

dere veelvlakken besproken, zoals van de torus en de Klein-fles. Wat dit te maken heeft met cohomologiegroepen wordt niet meer uitgelegd: daar is wel wat voor te zeggen, alleen: deze algebraïsche structuur is nu juist wel het hoofdonderwerp van het Hodge-vermoeden.

Het is echt jammer dat de auteurs aan het eind van dit hoofdstuk het vermoeden op een onbegrijpelijke manier formuleren, met veel onbekende termen, om daarna te concluderen dat het zeer moeilijk is: "Een rationale cohomologieklassie in $H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ wordt gerepresenteerd door een algebraïsche subvariëteit dan en slechts dan als zijn harmonische vorm van het type (p, p) is. Ga er maar aan staan!"

Waarschijnlijk is het correct wat er staat, en dus hoeven de paar kenners in Nederland die deze zin kunnen lezen zich er niet aan te storen. De rest van de lezers moet geloven dat iets wat moeilijk geformuleerd is, ook moeilijk is. En dat is natuurlijk onzin. Wiskundigen zijn het meeste toegerust van alle wetenschappers om dingen op te schrijven die niemand begrijpt. En dat is geen verdienste.

Ik denk overigens dat er wel een mogelijkheid bestaat om voor een algemeen publiek te schrijven over cohomologieklassen. Als uitgangspunt is bijvoorbeeld te nemen het kraakhelder geschreven, calculusachtige *Analysis on Manifolds* [4], waarna de gesloten en exacte vormen kunnen worden begrepen aan de hand van padintegralen uit de natuurkunde. Ook dan wordt het een moeilijk verhaal, maar komen we dichterbij in de buurt van het Hodge-vermoeden.

Conclusie

Ondanks mijn bedenkingen bij verschillende passages vind ik dat iedereen die in wiskunde is geïnteresseerd dit boek moet lezen. Het heeft mij in een aantal gevallen dichterbij de Clay-problemen gebracht. Het boek op

z'n best geeft je het heerlijke gevoel dat de auteurs niet ver genoeg zijn gegaan.

Het boek richt zich op een algemeen geïnteresseerd publiek: toch heb ik er bij het lezen een aantal keren echt nut van gehad dat ik een wiskundige ben, in staat om allerlei analogieën op een diepere manier te plaatsen.

Een andere benadering

Je raakt het beste thuis in een wiskundig onderwerp als je er mee kan werken, als je er sommetjes over kan maken. Daarom wil ik hier ook het boek *De Riemann-hypothese* aanbevelen. Zoals hierboven beschreven, gaat dit boek aanmerkelijk dieper in op deze hypothese en krijgt de lezer de gelegenheid er thuis in te raken door er opgaven over te maken.

Dit boek is bedoeld voor de middelbare school. Het zal voor veel vwo'ers aan de pittige kant zijn, maar voor andere vwo'ers geweldig inspirerend. Eigenlijk komt de Riemann-hypothese in zo'n boek veel beter tot zijn recht. Het lijkt mij geweldig wanneer er nog zes van dit soort boeken zouden kunnen verschijnen, over de andere Clay-problemen, het liefst met een overvloedig aantal opgaven, zodat je zelf aan de slag kan. Dat is goed voor onze algemene wiskundige ontwikkeling, onze kennis van de grote wiskundige problemen en ook is het inspirerend voor middelbare scholieren.

Aan mij is een boek vol met opgaven, zijpaden en open einden beter besteed dan *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*. Toch vind ik laatstgenoemd boek een groot succes. Zonder al te veel kleerscheuren op te lopen, hebben de auteurs een enorme prestatie geleverd. Zij hebben zeven zeer abstract geformuleerde problemen op een heldere manier voor het voetlicht gebracht. 

Referenties

- 1 Alex van den Brandhof, Roland van der Veen, Jan van de Craats, Barry Koren, *De zeven grootste raadsels van de wiskunde*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 2012.
- 2 Jan van de Craats, Roland van der Veen, *De Riemann-hypothese*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2011.
- 3 Keith Devlin, *The Millennium Problems*, Granta Books, London, 2002.
- 4 James R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company, The Advanced Book Program, Redwood City, 1991.
- 5 www.claymath.org/millennium, website van de officiële formulering van de Clayproblemen, 2000.
- 6 *Wikipedia-lijst van onopgeloste wiskundige problemen*, http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_mathematics, 2007.

Ed de Moor

Sloterkade 22-A

1058 HE Amsterdam

e.w.a.demoor@planet.nl

Wim Groen

A.W. van Voordenlaan 15

1241 AN Kortenhoef

we-groen@casema.nl

Geschiedenis

Kijkmeetkunde, een ander uitgangspunt (1970–1980)

In het juninummer van dit blad beschreven Ed de Moor en Sieb Kemme hoe het meetkundeonderwijs er voor de invoering van de Mammoetwet uitzag. Na de invoering van de Mammoetwet in 1968 verandert er veel in het meetkundeonderwijs. Euclidische meetkunde maakt plaats voor vectormetkunde en lineaire algebra. Kijkmeetkunde vindt zijn intrede. Ed de Moor en Wim Groen beschrijven in dit artikel hoe deze nieuwe ontwikkelingen tot stand kwamen. In een derde artikel in deze reeks zal ingegaan worden op de matig vertegenwoordigde theoretische meetkunde in de hoogste klassen van het voortgezet onderwijs.

Zoals in het eerste artikel in deze reeks te lezen is, is gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw de inhoud van het wiskundeonderwijs nauwelijks aan veranderingen onderhevig geweest.¹ Dit geldt ook voor het rekenonderwijs op de lagere school. Maar in 1968 – tegelijk met de invoering van de Mammoetwet – vonden rigoureuze veranderingen plaats in het voortgezet onderwijs. Dit was onder invloed van de toen in de Verenigde Staten ontstane New Math-beweging, die het wiskundeonderwijs gedurende zo'n twee decennia heeft beheerst. Op de effecten daarvan op het Nederlandse meetkundeonderwijs in het vwo zullen we in een volgend artikel ingaan. Ook in kringen van de kweekscholen voor onderwijzers (pabo) ontstond een groep die voor het rekenonderwijs een heel andere inhoud en vorm voor ogen had dan dat van het nog van Willem Bartjens stammende 'koopmansrekenen'.

Men zegt vaak dat de New Math-omslag een gevolg was van de lancering van de Spoetnik in Rusland in 1957. De Sovjets zouden toen met hun kunstmaan een voorsprong op de Verenigde Staten genomen hebben in de

ruimtevaart en daardoor ook in wetenschap en technologie. Om deze wedloop te beslechten ontstond in de Verenigde Staten het idee dat ook het wiskundeonderwijs op de schop moest. Deze verklaring voor het ontstaan van de New Math-beweging, die ook in West-Europa aandacht kreeg, vereist onzes inziens toch enige nuancering. In het vrije Westen was al aan het eind van de jaren vijftig een vuur smeulend dat zou leiden tot de culturele en maatschappelijke revolutie van de jaren zestig, hetgeen ook zijn uitstraling had op het onderwijs. De tijd was rijp voor een dergelijke omslag.²

Het waren echter niet alleen politieke en maatschappelijke veranderingen, maar ook wetenschappelijke en technologische ontwikkelingen die hebben bijgedragen aan de wonderlijke New Math-revolutie.³ Aandrag vanuit de wetenschap om de inhoud van het wiskundeonderwijs aan te passen aan nieuwe ontwikkelingen vond al in de negentiende eeuw plaats. In 1872 had Felix Klein (1849–1925) in zijn 'Erlanger Programm' gewezen op het belang van bestudering van structuren in de wiskunde, zoals de unificatie van

groepentheorie en transformatiemetkunde. Daarmee leek hij de tijden van de New Math, waarin het structuurkarakter van de wiskunde het centrale element was, ver vooruit. Wat overigens vaak vergeten wordt is dat Klein ook een groot voorstander was van een aanschouwelijke start van het meetkundeonderwijs.

Was Klein een betrekkelijke eenling op onderwijskundig gebied binnen de wiskunde van de negentiende eeuw, vanuit de sociale wetenschappen was de invloed in de negentiende eeuw apert. Het zijn met name Duitse filosofen, pedagogen en psychologen geweest, die zich in de negentiende eeuw met de inhoud van het wiskundeonderwijs hebben bezig gehouden. Zo had de romanticus Friedrich Fröbel (1782–1852) met zijn blokken, mozaïeken en ander speelleermateriaal voor meetkunde in 1826 al een nieuw programma voor het meetkundeonderwijs voor kinderen van 4 tot 14 jaar bedacht. Hij heeft aan zijn beschouwingen ook een praktische vorm gegeven, waardoor het mogelijk was (en is) het lerende kind reeds in een vroeg stadium met symmetrieën kennis te laten maken. Zijn werk heeft grote invloed gehad, maar bleef beperkt tot de kleuterschool.⁴

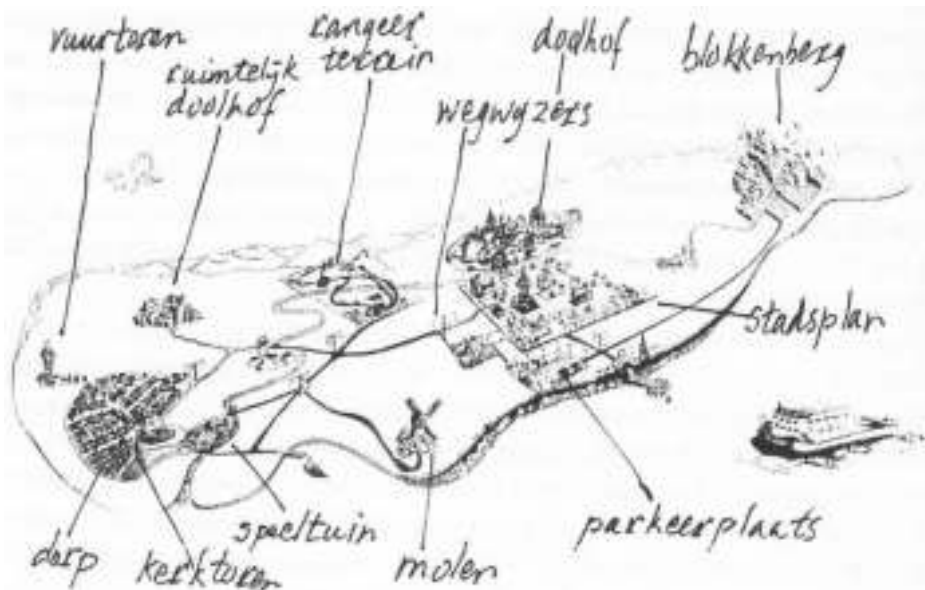
In de jaren zestig van de twintigste eeuw waren het vooral psychologen als Jean Piaget (1896–1980), Jerome Bruner (1915–) en de wiskundige/psycholoog Zoltan Dienes (1916–), die geijverd hebben voor een totaal andere aanpak voor rekenen, meten en meetkunde in het lager onderwijs. Juist door

de bemoeienissen van deze sociale wetenschappers kreeg de New Math in een aantal landen ook in het lager onderwijs voet aan de grond. Later bleek deze structuralistische aanpak van het rekenen voor het jonge kind een totale misslag. Ook in Nederland heeft de New Math invloed gehad, met name op de programma's, die in 1968 voor het voortgezet onderwijs werden ingevoerd. Dit kwam voort uit het werk van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW), die in 1961 door de overheid was ingesteld en die zich in eerste instantie op her- en bijscholing van de leraren wiskunde in het vwo richtte. Ook hierin hadden wiskundige wetenschappers een flinke lepel in de pap. Kort gezegd, het was een samenloop van omstandigheden en vooral de tijdgeest die de wiskundige onderwijsrevolutie van de New Math heeft veroorzaakt. In het volgende zullen we nagaan hoe met deze hype gedurende de jaren zeventig in Nederland is omgegaan en wat de effecten voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs zijn geweest.

Mede voortkomend uit de activiteiten van de CMLW werd in 1971 het Instituut voor Ontwikkeling van het WiskundeOnderwijs (IOWO) opgericht. Hans Freudenthal (1905–1990) werd hoogleraar-directeur, Edu Wijdeveld (1932–) algemeen directeur. Het is vooral de laatste geweest, die zich ingezet heeft voor de ontwikkeling van een integraal (voor alle typen onderwijs) en longitudinaal (van vier tot achttien jaar) leerplan wiskunde.⁵ Men heeft hieraan gedurende de jaren '70 in twee afdelingen gewerkt: Wiskobas (wiskunde op de basisschool) en Wiskivon (wiskunde in het voortgezet onderwijs). Zo werd meetkunde opnieuw een onderwerp van onderzoek en hernieuwde ontwikkeling, ook voor het basisonderwijs.

Wiskundige wereldoriëntatie (Wiskobas)

Aanvankelijk hield de Wiskobas-groep zich ook bezig met de verschillende uitwerkingen, die er inmiddels internationaal uit de New Math waren ontstaan, maar dit werd gezien als een periode van oriëntatie. Al snel werd een richting gekozen die aansloot bij de traditie van het Nederlandse rekenonderwijs. Wel werden naast de traditionele stof ook nieuwe leerstofvlakken als 'relaties en functies', 'waarschijnlijkheid en statistiek' en 'taal en logica' — in eenvoudige vorm — in onderzoek genomen. Het Wiskobaswerk heeft tussen 1971 en 1981 een enorm arsenaal van ontwerpen over rekenen, meten, redeneren, meetkunde en kansrekening voor de basisschool opgeleverd. Sommige onderdelen, zoals combinatoriek en kans-



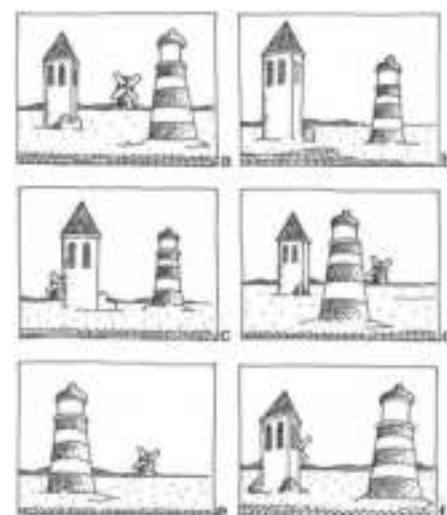
Figuur 1 Wandplaat Waterland met aanwijzingen voor meetkundige activiteiten

rekening bleken niet haalbaar. Ook de meer formele aspecten bleken te ver van de realiteit en de gewone schoolpraktijk af te staan. Uiteindelijk heeft dit er toe geleid dat de leerstof thans opgedeeld wordt in de domeinen rekenen, meten en meetkunde. Na de opheffing van het IOWO is er in de jaren '80 op instigatie van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO) een viertal publicaties tot stand gekomen onder de titel *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs*.⁶ Deze boeken hebben duidelijk invloed gehad op de officiële eindtermen voor de basisvorming, welke later meer gedetailleerd uitgewerkt zijn in de zogenoemde TAL-publicaties.⁷ We beperken ons in dit artikel tot de meetkunde.

Meetkunde is gedurende de twintigste eeuw — althans tot 1993 — nooit een officieel vak van onderwijs in de lagere school geweest. Wel werd er in het kleuteronderwijs in de geest van Friedrich Fröbel en Maria Montessori (1870–1952) aandacht besteed aan ruimtelijke oriëntatie. Waren de eerste meetkundeontwerpen van Wiskobas nogal van formeel wiskundige aard, al snel veranderde dit. Voor de inhoud werd enerzijds eclectisch geput uit de experimenten uit de ontwikkelings- en leerpsychologische onderzoeken over ruimtelijk inzicht bij jonge kinderen, anderzijds bleek ook de realiteit tal van mogelijkheden te bieden tot meetkundige oriëntatie. Zo ontstond in 1973 het project *Waterland*, dat informele meetkundige activiteiten met kinderen van 7 tot 8 jaar tot doel had. Bij een wandplaat (zie Figuur 1) werden vragen gesteld als “Waarom verdwijnt een to-

ren achter een huis als je erop toeloopt?”, “Hoe verschuiven objecten op het eiland voor een waarnemer op een varende boot?”. Er waren ‘foto’s’ met de vraag “waar stond de fotograaf?” en opdrachten als “plaats wegwijzers bij een kruising” of “maak een kaart van het eiland”. Verder activiteiten als “routes beschrijven en symboliseren”, “kortste routes bepalen”, “aanzichten van blokkenbouwsels bepalen” en “meetkunde op een stadsplan(roostermeetkunde)”. De ontwerpers spraken niet van meetkunde, maar noemden deze activiteiten, die in interactieve lessen werden uitgevoerd, ‘wiskundige wereldoriëntatie’.

Voor de hogere leerjaren werden soortgelijke activiteiten, werkbladen en projecten ontworpen. Voorbeelden daarvan zijn ‘Schip



Figuur 2 Foto's vanaf een schip dat langs de kust vaart. Wat is de volgorde? (let op er zijn 2 oplossingen)



Figuur 3 Vind alle mogelijke vierkuberhuisjes

Ahoy' (een project over viseren, zie Figuur 2), de 'Vierkubers' over het vinden van alle mogelijke huisjes van vier kubusblokjes (zie Figuur 3) en 'Met de groeten van de Reus' (vergroten en verkleinen van figuren). Eigenschappen van projecties werden onderzocht door middel van activiteiten met zon- en lamschaduw. Onderzoek van de globe gaf aanleiding tot het afstandsbegrip op de bol en tot hoekberekeningen. De stand van zon, aarde en maan leidden tot meetkundige verklaringen van de wisseling der seizoenen en het dag en nachtritme.

Daarnaast kwamen ook meer traditionele onderwerpen aan de orde. Vlakke en ruimtelijke figuren werden bestudeerd met behulp van spiegelingen en draaiingen. Gelijkvormigheid werd gekoppeld aan vergroten en verkleinen. Een voorbeeld van een opgave over uitslagen van een kubus staat in Figuur 4.⁸

Het was een fenomenologische benadering van meetkunde, die Goffree als 'kijken, doen, denken en zien' omschreef. Hij bedoelde daarmee dat elke meetkundige ervaring begint met waarneming van een verschijnsel in de ons omringende ruimte (*kijken*). Daarna maak je een model of een tekening (*doen*), vervolgens breng je het verschijnsel onder woorden en plaats je het in



Figuur 4 Een kubus is voor de helft in zwarte inkt gedompeld. De onderkant is al ingekleurd. Maak de uitslagen af.



Figuur 5 Door twee punten gaat precies één rechte lijn



Figuur 6 Behoud van oppervlakte, afschuiving van rechthoek

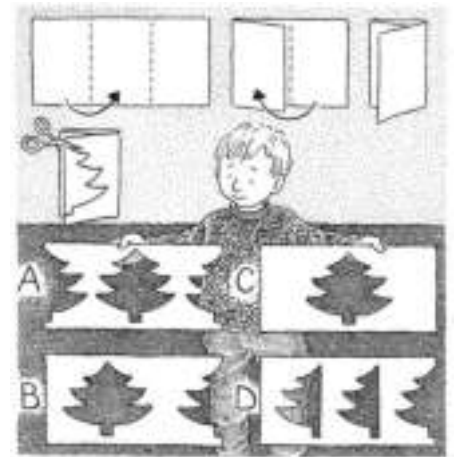
een meetkundige structuur (*denken*). Ten slotte ga je het verschijnsel ook echt zien oftewel begrijpen.⁹ Freudenthal vatte dergelijke informele, intuïtieve meetkundige ervaringen compacter samen met de term 'grasping space', het 'Be-Grijpen van de Ruimte'.

Vergelijking met een aantal voorbeeldvraagstukken uit de *Übungensammlung* van Tatiana Ehrenfest maakt duidelijk dat dit geschrift uit 1931 bewust of onbewust voor de ontwerpers van de Wiskobasmeetkunde mede een inspiratiebron geweest is.¹⁰ Een voorbeeld hiervan zien we in Figuur 5. Het gaat om een activiteit die mevrouw Ehrenfest als funderend zag om op intuïtieve wijze het begrip te doen postvatten dat een rechte lijn door twee punten bepaald wordt. In de hier afgebeelde vorm werd het als het ware het logo van de kijkmeetkunde.

Doelen en leerlijnen

Het ontbrak bij de meetkunde van Wiskobas echter aan welomschreven doelen. Ook kon niet van een duidelijke leerlijn voor dit nieuwe vak voor het basisonderwijs gesproken worden. Zo bleef het een knellende vraag wat nu eigenlijk onder meetkunde op dit niveau verstaan moest worden, waarom dit vak al op de basisschool aan de orde zou moeten komen en hoe. In praktijk werden (en worden) de domeinen meten en meetkunde nog al eens door elkaar gehaald. Voor rekenen en meten kan men lineaire leergangen opstellen, maar voor de bedoelde meetkunde-aanpak bleek dat minder gemakkelijk. Werd er in het vroegere kleuteronderwijs wel expliciete aandacht aan de *ontwikkeling van het ruimtelijke voorstellingsvermogen* besteed, op de toenmalige lagere school kwam dat niet aan de orde. Hoe precair dit onderwerp lag blijkt uit het feit dat de opstellers van de eindtermen voor de basisvorming in 1989 het domein meetkunde aanvankelijk wilden schrappen.¹¹

In 1993 werden de officiële doelen voor meetkunde voor de basisvorming nog tamelijk algemeen geformuleerd. Pas in 2004 wordt in de TAL-brochure *Jonge kinderen leren meten en meetkunde* een wat steviger houvast geboden voor de leraar. In dit boek wordt onder meer op het *praktische nut* van meetkunde en op het belang van de *voorbereidende waarde* voor het vervolgonderwijs gewezen. Tevens wordt in dit boek de meetkunde voor dit niveau ingedeeld volgens een drietal aspecten: *oriënteren*, *construeren* en *opereren*. Bij oriënteren gaat het om plaatsbepalen en viseren, waarbij toegewerkt wordt naar een eerste begrip van hoek, afstand en evenwijdigheid. Bij construeren denke men aan het



Frank vouwt een stuk papier in drieën. Daarna knipt hij deze vorm uit en vouwt hij het stuk papier weer open. Hoe ziet dat stuk opgevouwen papier er dan uit?

Figuur 7 Opgave 6 uit Cito-eindtoets Rekenen III uit 2011

maken van bouwsels, bouwplaten en tekeningen, bij opereren aan het kunnen toepassen van meetkundige begrippen en meetkundige operaties als het omstructureren van figuren, spiegelen, draaien, vergroten/verkleinen en projecteren. Voor een voorbeeld verwijzen we naar Figuur 6.

In de huidige reken-wiskundemethoden voor het basisonderwijs komt meetkunde voor, maar dit domein is slechts een miniem onderdeel van het totale rekenprogramma. Inhoudelijk gezien is het een schraal derivaat van het ambitieuze Wiskobasprogramma. In de schoolpraktijk wordt meetkunde vaak als een extraatje gezien. De Cito-eindtoets rekenen bevat elk jaar enkele meetkundeopgaven. In Figuur 7 zien we één van de twee meetkunde-items uit de toets van 2011, die in totaal 60 opgaven omvatte. De gemiddelde goedscore op deze vraag was 50%. Deze items zijn vrijwel ieder jaar van dezelfde vorm en inhoud: aanzichten, spiegelingen en uitslagen.

Kijkmeetkunde (Wiskivon)

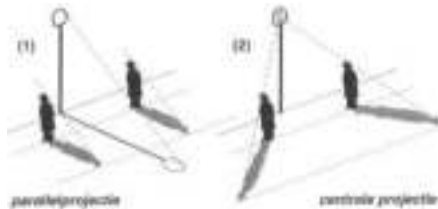
Bij de afdeling Wiskivon van het IOWO richtte men zich aanvankelijk vooral op het Lager Beroepsonderwijs (lbo) en op de eerste leerjaren van de mavo. Tussen 1973 en 1980 werden voor meetkunde twaalf 'pakketjes' (leerlingenmateriaal en handleidingen) ontwikkeld, die in scherp contrast stonden met het meetkundeprogramma van de 'moderne wiskunde'-methoden uit die tijd. Het ging de ontwerpers om begripsvorming van en vaardigheid in het werken met traditioneel bekende onderwerpen als uitslagen, hoeken, op-



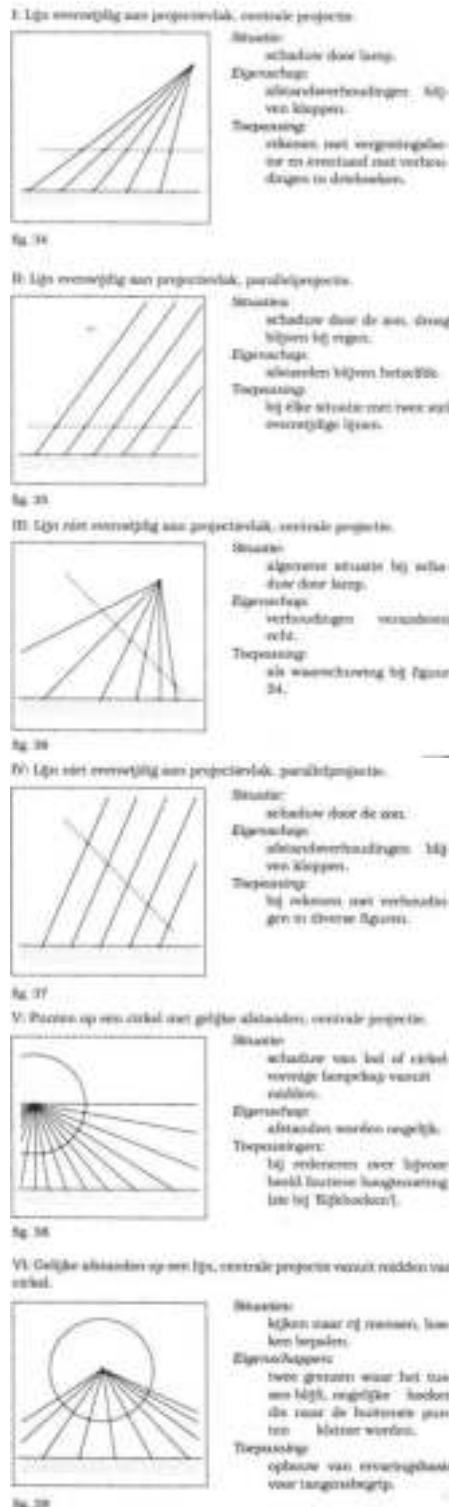
Figuur 8 Welke veelhoeken kun je als schaduw van een kubus krijgen als je die in de zon houdt?¹²

pervlakte, symmetrie, en de stelling van Pythagoras. Het waren tamelijk losstaande onderwerpen, die op aanschouwelijke wijze gepresenteerd werden. De bedoeling was dat het onderwijs een sterk doe-karakter zou hebben. Het verschil met het officiële programma kwam heel duidelijk naar voren in de ontwerpen *Zie je wel* van George Schoemaker (1934–2010) en *Licht op Schaduw* en *Met het oog op diepte* van Aad Goddijn (1947–). Het woord zegt het letterlijk, meetkunde begint met kijken en dat gaat volgens een rechte lijn (zie Figuur 5). Maar ook bij het afbeelden van ruimtefiguren en bij schaduwwerking, zoals te zien in Figuur 8, gaat het in feite alleen om meetkunde met de rechte lijn.

In de spullen van Schoemaker en Goddijn — de laatste heeft de term kijkmeetkunde als eerste gebruikt — komen de specifieke aspecten van deze aanpak van de meetkunde het meest pregnant tot uiting. Het gaat om experimenten in de klas met kijklijnen, kijkhoeken, viseren, lichtstralen, projecteren, schaduwen, en perspectief. Men zou ook van een ‘intuïtieve meetkunde van de rechte lijn’ kunnen spreken. De theoretische kern van de kijkmeetkunde ligt vervat in de principes van *parallelprojectie* en *centrale projectie* (zie Figuur 9). De intentie van de ontwerpers was om in de schoolpraktijk de leerlingen de eigenschappen van deze verschillende afbeeldingen echt te laten ervaren door experimenten uit te voeren met evenwijdige lichtstralen (zonlicht) en met een centrale lichtbron (lamp). Zo zou op intuïtieve wijze de basis gelegd kunnen worden voor het inzicht in de invariante eigenschappen van figuren bij de twee projectiemethoden. In wezen komt dat neer op enkele fundamentele eigenschappen van de elementaire meetkunde, die in Figuur 10 schematisch zijn weergegeven. Het ging dus om fundamentele meetkundige inzichten, die direct ‘gezien’ kunnen worden of zoals Goddijn het omschreef: “Het aardige van kijkmeetkunde is dat het zo gewoon



Figuur 9 Essentiële verschillen van zonnenschaduw en lampenschaduw¹⁵



Figuur 10 Basisvormen van projectie in de kijkmeetkunde

is, dat het dicht ligt bij de gewone ervaringen van alledag. De proef met de duimsprong kan direct overal gedaan worden.” (Zie Figuur 11.) Dit alles staat uitvoerig beschreven in het boek *Achtergronden van het nieuwe leerplan wiskunde 12–16* (band 2).¹³ Zoals eerder opgemerkt, we zien gelijkenis met de ideeën van Tatiana Ehrenfest uit 1931, maar ook met het werk van Piet van Albada (1905–1997) uit 1946 en overeenkomsten met de Wiskobasmeetkunde.¹⁴

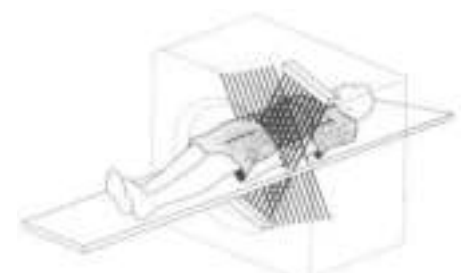
Het hierboven geschetste werk van Wiskobas en Wiskivon kunnen we zien als een nieuwe poging in de jaren 1970–1980 tot veraanschouwelijking van het aanvankelijk meetkundeonderwijs. De nadruk lag op een aantal meetkundige oerbegrippen (rechte lijn, hoek, cirkel) en hun onderlinge relaties. Projectiemethoden speelden daarbij een centrale rol. Naast de impliciete doelen zien we hier ook de mogelijkheden tot diepere ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht, iets dat ook van belang is in allerlei praktische beroepen (zie Figuur 12). De opzet was niet axiomatisch, maar gebaseerd op verschijnselen en ervaringen uit de realiteit. Daarbij sloot men niet alleen aan bij de historische ontwikkeling van de meetkunde (het *historisch-genetische* principe), maar men hield ook rekening met de intellectuele ontwikkeling van het kind (het *psychologisch-genetische* principe). Rest de vraag in hoeverre dit werk ook bijgedragen heeft aan de praktijk van het meetkundeonderwijs van alledag.

Invloed op schoolboeken en examens

In de jaren zeventig en tachtig was er in de praktijk niets te ontdekken van de kijkmeetkunde, omdat in het voortgezet onderwijs nog altijd het programma van 1968 gold.



Figuur 11 Doe één oog dicht en kijk met het andere oog naar de opgestoken duim aan een uitgestrekte arm. Wissel nu van oog, terwijl je duim stil blijft. Je ziet je duim verspringen ten opzichte van de achtergrond.



Figuur 12 Hoe werkt een CAT scanner? Ruimtelijk inzicht is ook een praktische vaardigheid.

De opgaven werden in verzamelingentaal geformuleerd, de meetkunde betrof eenvoudige vraagstukken over vectoren, enige analytische meetkunde en ruimtelijke berekeningen. In Figuur 13 zien we twee voorbeelden van het eindexamen mavo-D uit 1983. Voor opgave 3 waren de goedscores: 50%, 39% en 28%, voor opgave 4: 89%, 70%, 58% en 12%.

In het onderwijs van alledag bestond veel ontevredenheid over dit tamelijk structuralistische programma. Daarom stelde de overheid in 1987 de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs (COW) in, ook wel de Commissie Van der Blij genoemd. Er moest een nieuw leerplan voor mavo/lbo en voor de eerste drie leerjaren havo/vwo komen evenals een eindexamenprogramma lbo/mavo op C-D-niveau. In 1992 werd dit programma door het zogenoemde '12–16-project' afgerond en lag er vrij vlot een nieuw 'leerplan 12–16'.¹⁶ Voor de meetkunde werden de volgende inhoudelijke gebieden onderscheiden: kijkmeetkunde, meetkunde van vormen en figuren, meetkunde over plaatsbepalen en rekenen in de meetkunde. Opnieuw een totaal andere aanpak, zoals blijkt uit de kerndoelen meetkunde voor de basisvorming:

- De leerlingen kunnen vlakke afbeeldingen van ruimtelijke figuren, zoals foto's, plattegronden, landkaarten, bouwtekeningen lezen, interpreteren, zich ruimtelijk voorstellen en weergeven op papier of scherm.
- De leerlingen kunnen concreet handelen aan de hand van voorstellingen van ruimtelijke figuren en aan tastbare voorwerpen. Zij kunnen uitslagen, patronen en dergelijke maken en vlakken uit ruimtelijke figuren op schaal (na)tekenen.

- De leerlingen kennen de stelling van Pythagoras en kunnen deze in eenvoudige situaties toepassen.
- De leerlingen kunnen eenvoudige berekeningen aan voorstellingen van ruimtelijke figuren uitvoeren.
- De leerlingen hebben inzicht in de begrippen richting, evenwijdig, rechte hoek, loodrecht en afstand.
- De leerlingen kunnen congruentie, symmetrie en patroonrelaties in of tussen figuren aangeven en eenvoudige transformaties herkennen en uitvoeren.
- De leerlingen kunnen de invloed van vergroten en verkleinen aangeven op de relatie tussen lengte en oppervlakte, tussen lengte en inhoud.

We zien dus een duidelijke afwending van het 'moderne wiskunde'-programma van 1968. Wel werd de mogelijkheid geboden om meetkunde op aanschouwelijke wijze in de brugjaren aan te bieden, maar de doelen zijn zo geformuleerd dat er geen noodzaak was om kijkmeetkunde te integreren in het programma. De uitgevers manoeuvreerden voorzichtig. De uitwerking in de schoolboeken van de jaren '90 leidde dan ook tot een meetkundeprogramma waarbij net aan de genoemde kerndoelen werd voldaan. Het idee van meetkunde als echte doe-activiteit is moeilijk in een schoolboek vorm te geven. Een begrip als kijkhoek moet echt eens ervaren worden door middel van een activiteit in de klas. De vorm is in de meeste boeken een reeks van sommen over telkens een nieuw begrip of een nieuwe vaardigheid (zie Figuur 14). Het ontbreekt veelal aan probleemstellingen met een echt wiskundige kern. Zogenoemde waarom-

vragen ontbreken, aan redeneren en bewijzen wordt beperkte aandacht besteed. Van een gestructureerde en samenhangende leerlijn kan niet gesproken worden. In feite zijn het sommenboeken met als doel op zichzelf staande begrippen en vaardigheden aan te leren. Als belangrijkste argument voor meetkunde wordt de praktische waarde van het vak aangevoerd. Bekijken we de didactische vorm van de aangeboden boeken dan is de formeel euclidische aanpak voorgoed afgeschaft. Maar ook een opzet via transformaties en of vectoren heeft het niet gehaald. Is het dan kijkmeetkunde geworden, zoals de ontwerpers van de jaren '70 die voor ogen hadden? Er zijn elementen van deze aanpak aan te wijzen, maar het verschil met de oorspronkelijke ontwerpen is fors. Zodoende is een meetkundeprogramma ontstaan, dat 'vlees noch vis' is. Bovendien is er totaal geen afstemming tot stand gebracht tussen het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs, zowel in de formulering van de kerndoelen als in de uitwerking van de methoden. Van een doorlopende leerlijn is geen sprake.

Recapitulatie, reflectie en vooruitblik

In het eerste artikel in deze reeks hebben we gezien dat de traditionele euclidische meetkunde in de twintigste eeuw tot 1968 bepalend is geweest voor het voortgezet onderwijs. Van meet af aan werd uitgegaan van definities en axioma's. Daaruit moesten de stellingen op logische wijze uit elkaar worden afgeleid. Er werd via de bekende 'gegeven – te bewijzen – bewijs' of 'gegeven – te construeren – constructie' opgaven geoefend in logisch deduceren. Aangezien veel leerlingen daar op hun twaalfde jaar nog niet aan toe zijn, is een aantal pogingen gedaan om een meer aanschouwelijke start van het aanvankelijk meetkundeonderwijs op te stellen. In gematigde vorm heeft een dergelijke methode tussen 1958 en 1968 dienst gedaan in het onderwijs. In 1968 heeft een abrupte omslag plaatsgevonden, waarmee een einde kwam aan de euclidische aanpak. Vectormeetkunde en lineaire algebra kwamen er voor in de plaats. Ook deze opvatting over meetkunde kreeg weinig support, zeker niet op de mavo- en lbo-scholen. In dit artikel hebben we beschreven hoe daar weer op gereageerd is. In de jaren '70 is namelijk opnieuw een poging gedaan. Kijkmeetkunde werd het uitgangspunt voor een aanschouwelijke start voor het meetkundeonderwijs. Een belangrijk verschil met de pogingen uit de eerste helft van de twintigste eeuw was dat er nu ook meetkunde voor de basisschool moest komen en dat

3. In een rechthoekig assenstelsel zijn gegeven de plaatsvectoren $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{OC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- 7 a. $\vec{OC} = p \cdot \vec{OA} + q \cdot \vec{OB}$; bereken p en q .
 V is de verzameling punten P waarvoor geldt:
 $|\vec{OP}| = |\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}|$.
- 7 b. Bereken $|\vec{OP}|$ en teken V .
 Verder is gegeven $\vec{OD} = k \cdot \vec{OA}$ en $|\vec{OD}| = \sqrt{5}$.
- 8 c. Bereken k en bereken de coördinaten van D .
4. Gegeven is de balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 12$, $BC = 11$ en $CG = 10$.
 Op de ribbe AB ligt een punt P zo dat $AP = 10$.
 Op de ribbe EH ligt een punt Q zo dat $EQ = 5$.
- 6 a. Toon aan dat $PG = PQ$.
- 7 b. Bereken $\angle GPQ$ in graden nauwkeurig.
 Op de ribbe CG ligt een punt R zo dat $GR = x$.
- 3 c. Toon aan dat $QR = \sqrt{(x^2 + 180)}$.
- 7 d. Bereken voor welke x geldt $PR = QR$.

Figuur 13 Opgaven eindexamen mavo-D uit 1983

de meetkunde voor de eerste twee jaren in het vwo vorm diende te krijgen met praktische activiteiten in de realiteit. ‘Kijken’, ‘afbeelden’ en ‘verklaren’ waren daarbij de kernactiviteiten. Dit met het doel een brede basis te leggen voor een meer formele aanpak in een later stadium. In de praktijk van het onderwijs is hier niet veel van terechtgekomen. De neerslag in de schoolboeken is veelal een wat verwaterde vorm van vanzelfsprekende realistische verschijnselen en meetkundige vaardigheden geworden, waarbij de nadruk niet op denken en redeneren ligt. Ook de achterliggende theoretische en meer gesystematiseerde meetkunde komt in het algemeen niet uit de verf. Verder blijft ook in de hogere leerjaren van het voortgezet onderwijs dit kenmerken-de aspect tamelijk schraal vertegenwoordigd. In een volgend artikel zullen we hier verder op in gaan.

- 20 Stel je voor dat je met een helicopter van Den Oever naar Hoorn wilt vliegen. Je gaat in deze opdracht de koers van Den Oever naar Schagen meten. Dat betekent dat je uitzoekt in welke richting je moet vliegen.
- a Leg je kompasroos op de kaart met het middelpunt op Den Oever, zoals je hiernaast ziet.
Zorg ervoor dat de noordpijl naar boven wijst.
- b Kijk in welke richting je moet vliegen als je van Den Oever naar Hoorn vliegt.
Vul in: De koers van Den Oever naar Hoorn is ...
- c Je vliegt daarna van Hoorn naar Schagen. Waar leg je nu het middelpunt van de kompasroos?
- d Vul in: De koers van Hoorn naar Schagen is ...
- 21 Vanuit Medemblik vaar je 27 kilometer. De koers is noordoost.
Bij welke plaats kom je aan?



Figuur 14 Hoeken meten met een kompasroos (uit *Moderne wiskunde 1 mavo-havo-vwo*, 1993)

Noten

- 1 Dit artikel is een vervolg op het stuk *Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968* van Ed de Moor en Sieb Kemme, NAW 5/13 nr. 2, juni 2012, pp. 102–109
- 2 Zie bijvoorbeeld Hans Righart (1995), *De einde-loze jaren zestig. Geschiedenis van een generatieconflict*, Uitgeverij De Arbeiderspers, Amsterdam.
- 3 Er was ook felle kritiek op de New Math. In 1965 gaf Nobelprijswinnaar Richard Feynman (1918–1988) een vernietigend oordeel over het onnodige formalisme in de nieuwe leerboeken. Morris Kline (1908–1992) haalde de wereldpers met zijn boek uit 1973, *Why Johnny can't add*. Een kleine geschiedenis van de New Math is te vinden in *Van vormleer naar realistische meetkunde* (verder te noemen *VVNRM*) van E.W.A. de Moor (1999), pp. 375–384.
- 4 Voor de betekenis van Fröbel voor het meetkundeonderwijs zie *VVNRM*, pp. 207–230.
- 5 Het IOWO heeft bestaan tot 1981. Toen is het leerplanontwikkelingswerk naar de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO) gegaan, de nascholing naar de opleidingsinstituten. Het onderzoek bleef in Utrecht onder de naam vakgroep Onderzoek Wiskunde Onderwijs &

- Onderwijs Computer Centrum (OW&OC), later weer omgedoopt tot Freudenthal Instituut.
- 6 A. Treffers, E. de Moor en E. Feijs (1989), *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs*. Alleen in deel I van deze reeks is over meetkunde gepubliceerd.
- 7 M. van den Heuvel Panhuizen en K. Buys (red), 2004, *Longe kinderen leren meten en meetkunde*.
- 8 Meer gedetailleerde toelichting en voorbeelden zijn te vinden in het *Wiskobasbulletin*, het tijdschrift dat tussen 1971 en 1981 door het IOWO werd uitgegeven.
- 9 Fred Goffree (1992), *Wiskunde & Didactiek*, deel 2, Wolters-Noordhoff, Groningen. pp. 227–283.
- 10 T. Ehrenfest-Afanassjewa (1931), *Übungen-sammlung zu einer geometrischen Propädeuse*, Den Haag, Martinus Nijhoff.
- 11 Zie *VVNRM*, p. 457.
- 12 Deze foto komt uit *Lessen in projectieve meetkunde*, Epsilon Uitgaven (1993) van Martin Kindt. In dit boek laat de auteur zien dat ook voor de projectieve meetkunde een aan-

schouwelijke aanpak mogelijk is.

- 13 Freudenthal Instituut en SLO (1992), *Achtergronden van het nieuwe leerplan Wiskunde 12–16*, band 2. Deze publicatie gaat bijna geheel over een nieuwe aanpak voor meetkunde. Het is niet duidelijk wie de auteurs zijn van de verschillende hoofdstukken, maar het lijkt dat Goddijn hier een groot aandeel in heeft gehad. De meeste voorbeelden in dit stuk komen uit dit boek.
- 14 Voor het werk van Van Albada zie *VVNRM*, pp. 277–279.
- 15 Deze tekening is afkomstig uit *Wiskunde in een notendop* van M. Kindt en E. de Moor (2008), Prometheus Amsterdam.
- 16 Voor een heldere en leerzame analyse van het werk van de COW verwijzen we naar een artikel van H.J. Smid in de reeks ‘Het Geheugen’ in *Euclides* 87(7), juni 2012, pp. 317–320.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011

Wiskunde die overstromingen opvangt

Een van de doelen van het Nederlandse bedrijf Deltares is om de waterhuishouding van het landelijke rivierensysteem zo goed mogelijk te controleren. Deltares wil van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie graag weten of de ingenieursaanpak die het zelf heeft ontwikkeld, verbeterd kan worden door de wiskundige achtergrond beter te begrijpen.

Deelnemers van de studiegroep

Peter Dickinson (RUG)
Joost Hulshof (VU)
André Ran (VU)
Majid Salmani (Universiteit Bremen)
Martijn Zaal (VU)

Nederland Waterland ligt vol met dijken, dammen, kanalen, uiterwaarden, sluizen, pompen en gemalen, die zorgen dat polders niet onder lopen, het wassende rivierwater binnen de perken blijft en het land droge voeten houdt. Het Nederlandse instituut Deltares probeert fundamenteel onderzoek op het terrein van waterbeheer van rivierdelta's, kustregio's en riviergebieden te vertalen naar de praktijk. Deltares staat voor de uitdaging om het Nederlandse waterbeheer slimmer te sturen, om energiekosten te besparen en de veiligheid te verbeteren. Daarnaast moet idealiter ook de wisselwerking tussen verschillende waterwerken worden meegenomen, iets wat tot nu toe niet gebeurt maar in de nabije toekomst wel gaat veranderen. Deltares heeft zo'n achthonderd mensen in dienst, gevestigd in Delft en Utrecht. Het bedrijf ontstond in 2008 uit een fusie van GeoDelft, Delft Hydraulics en delen van TNO en Rijkswaterstaat.

Veel sturing van de Nederlandse waterwerken gebeurt nog handmatig. Gaat de waterstand lokaal ergens omhoog, dan kan ie-

mand een pomp aanzetten. "Momenteel worden alleen de huidige waterstanden bekeken", vertelt senioronderzoeker Dirk Schwanenberg van Deltares. "In de toekomst willen we ook de weersvoorspelling meenemen in de sturing. Als je weet dat er over een paar uur veel regen gaat vallen, dan kun je een pomp eerder aanzetten, om het waterniveau al wat omlaag te brengen en ruimte te maken voor het regenwater dat nog gaat komen. We zoeken nu naar manieren waarop we de weersvoorspelling het beste kunnen meenemen."

In 2011 voerde Deltares al twee pilotprojecten uit die rekening houden met de weersvoorspelling: een project voor het waterschap Dommel en het waterschap Aa en Maas, en een tweede project voor het waterschap Noorderzijlvest in Groningen, Friesland en Drenthe.

"Een bepaald watersysteem wordt beschreven met wiskundige vergelijkingen die vertellen hoe het watersysteem zich gedraagt", zegt Schwanenberg over de wiskundige achtergrond van het sturingsprobleem. "Dat is een stelsel niet-lineaire gewone differentiaalvergelijkingen. Één belangrijke randvoorwaarde wordt bepaald door de weersvoorspelling. De weersvoorspelling geeft aan hoe veel water je op een bepaald moment verwacht. De tweede randvoorwaarde wordt bepaald door de manieren waarmee we de waterafvoer kunnen beïnvloeden, bijvoorbeeld

met pompen of sluizen. Nu kijken wij bij Deltares als ingenieurs naar het sturingsprobleem. Wij weten dat bepaalde dingen werken, maar we weten niet wat er wiskundig precies achter zit en daar wilden we achter komen. Onze vraag aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie was dan ook of we de sturing beter kunnen optimaliseren wanneer we de achterliggende wiskunde beter begrijpen."

Lagrangemethode

"Het heeft ons veel tijd gekost om de wiskundige achtergrond van het probleem precies in kaart te brengen", vertelt wiskundige en promovendus Martijn Zaal namens de studiegroep die het Deltares-probleem eind januari 2011 bestudeerde. "Deltares gebruikt een intuïtieve methode om de optimale strategie te vinden. Hun methode begint met een bepaalde gok voor de oplossing van het optimalisatieprobleem en probeert de oplossing vervolgens stap voor stap te verbeteren. De manier waarop deze verbeteringen werken begrepen we eerst niet."

Het concrete probleem dat de studiegroep heeft bekeken, bestaat uit vier gekoppelde waterreservoirs, waarbij de waterstroom naar het eerste reservoir op een redelijke tijdschaal voorspelbaar is. Dit probleem staat model voor vier reservoirs in de Rijn-Maasdelta. "Ons idee was nu om hun optimalisatieprobleem te formuleren als een Lagrange-multiplierprobleem. De Lagrangemethode werkt goed bij optimalisatieproblemen waarbij de randvoorwaarden gelijkheden zijn, bijvoorbeeld wanneer er bepaalde behoudswetten gelden. Dingen die je niet kunt kiezen, vat je in deze methode op als

dingen die je wel kunt kiezen, maar dan moeten de wiskundige vergelijkingen wel voldoen aan een paar extra voorwaarden.”

Deze methode geeft in het algemeen een groter stelsel vergelijkingen dan het oorspronkelijk geformuleerde stelsel. Maar het voordeel is dat de oplossing met de Lagrange-methode wel optimaliteit garandeert. Met de Lagrange-multipliermethode kwam de studiegroep uit op een stelsel van zes vergelijkingen. Zaal: “De volgende vraag is of de volgorde waarin je de vergelijkingen gaat oplossen uitmaakt voor hoe gemakkelijk de oplossing te berekenen is. Voor ons was het interessant om te zien dat de Deltares-methode overeen bleek te komen met een van de oplossingsmethoden voor het Lagrangeprobleem dat wij hebben bekeken.”

De methode van de Deltares-onderzoekers gebruikt een slim algoritme om een bepaalde afgeleide uit te rekenen en die gebruiken ze om de volgende gok in hun strategie te verbeteren. Dat slimme algoritme bleek veel te maken te hebben met Lagrange-multipliers en dat dwarsverband verraste de wiskundigen van de studiegroep. Zaal: “Uit een vergelijking van hun oplossingsmethode met onze oplossingsmethode zijn wij tot de conclusie gekomen dat hun strategie goed werkt. Aan de ene kant is het misschien teleurstellend voor hen dat het niet beter lijkt te kunnen, maar aan de andere kant kunnen ze er een bevestiging in zien van de kwaliteit van hun eigen methode.”

Tijdshorizon

De wiskundigen hebben de Lagrange-multipliermethode vervolgens geïmplementeerd voor het concrete probleem van de vier gekoppelde waterreservoirs. “Die berekeningen laten zien dat het heel belangrijk is wat de tijdshorizon van de weersvoorspelling is”, vertelt Zaal. “Wanneer je de weersvoorspelling voor de komende tien uur goed kent, dan kan dat tot een andere strategie leiden dan wanneer je alleen maar de weersvoorspelling voor de komende twee uur kent. Hoe korter de tijdshorizon, hoe minder mogelijkheden je hebt om te anticiperen.”

Weersvoorspellingen worden voortdurend geactualiseerd. Als dan telkens helemaal opnieuw moet worden berekend wat er met de waterstromen gebeurt, is dat meestal inefficiënt. De weersvoorspelling van nu hangt namelijk sterk samen met die van over een paar uur. De vraag is dan wat een efficiënte manier is om rekening te houden met de weersvoorspelling zonder dat je telkens tachtig tot negentig procent van het gereken eerst weg-



De Maeslantkering

gooit en later weer opnieuw gaat doen. Zaal: “Wij zijn tot de conclusie gekomen dat het efficiënter is om de tijdshorizon langer te houden dan vier uur, en de resultaten van de vorige berekening deels te hergebruiken om met een betere schatting te komen.”

De studiegroep heeft het optimalisatieprobleem ook nog met een tweede methode aangepakt. Het stelsel vergelijkingen kan ook numeriek worden opgelost met Niet-Lineair Programmeren (NLP). “Je kunt NLP gebruiken om een beter inzicht in de gevoeligheid voor parameters te krijgen”, zegt Zaal. “En dat is weer handig om inzicht te krijgen in welke invloed een verandering van de weersvoorspelling heeft op de oplossing van het optimalisatieprobleem. Met deze methode hebben we laten zien hoe je de oplossing van het optimalisatieprobleem in theorie kunt laten meeveranderen met een verandering van de weersvoorspelling. Maar dit is niet meer dan een aanzet van hoe het in de praktijk kan. We hebben niet de tijd gehad om deze aanpak in een computerprogramma te implementeren.”

Kennisexport

“Wij kunnen er geen beter product mee maken,” zegt Dirk Schwanenberg van Deltares over de resultaten van de studiegroep, “maar hun werk heeft ons wel een beter begrip gegeven van de wiskundige achtergrond van het probleem. Ik heb het heel nuttig gevonden om te zien hoe mensen met wiskundige achtergrond aankijken tegen een typisch ingenieursprobleem als het onze. Wij hadden ook

niet direct een grote doorbraak verwacht. Eigenlijk heeft de studiegroep aangetoond dat wij het probleem al vrij goed oplossen. De studiegroep heeft ook laten zien dat je onder bepaalde omstandigheden het sturingsprobleem sneller en slimmer kunt oplossen. Nadeel is wel dat de oplossingsmethode dan minder generiek wordt. Dat is voor ons geen optie.”

Deltares is inmiddels begonnen om het meenemen van de weersvoorspelling te implementeren in hun producten. Schwanenberg: “Dit jaar zijn we begonnen onze kennis te exporteren naar de Verenigde Staten, Brazilië en Uruguay. Daar gaat het vaak om watersystemen die waterkrachtcentrales bevatten. Dat levert een soort omgekeerd systeem van wat we in Nederland hebben, maar veel componenten zijn identiek aan wat we in Nederland hebben.”

De betere sturing waarop Deltares zich richt maakt ook onderdeel uit van het nationale onderzoeksproject Flood Control 2015, dat onder andere via sensoren in dijken en real-time informatie over weer en waterstanden de wateroverlast beter probeert te voorspellen en te beheersen. “De sturing van het watersysteem biedt nog veel mogelijkheden om het beter te doen”, besluit Schwanenberg.

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011, van 24–28 januari op de VU in Amsterdam. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.few.vu.nl/~swi2011.

In de verdediging

| In defence



Persistence of noncompact normally hyperbolic invariant manifolds in bounded geometry

Jaap Eldering

Het zal je maar gebeuren: halverwege je promotieonderzoek overlijdt opeens je begeleider. Het overkwam Jaap Eldering, die werkte aan de Universiteit Utrecht. Het plotselinge overlijden van zijn promotor Hans Duistermaat in maart 2010 was een heel zware klap. Hij heeft zich daarna meermalen afgevraagd of hij zijn promotie nog wel zou afronden, temeer omdat zijn onderzoek ook al een tijdje in een dip zat. Gelukkig vond Eldering in Erik van den Ban en Heinz Hanßmann twee nieuwe begeleiders met wie hij de draad weer kon oppakken. En in de zomer van 2010 zag hij hoe hij het bewijs van de stelling waar zijn hele proefschrift om draaide moest rondkrijgen. Na een lange tijd van twijfelen was dat een grote opluchting en hét teken dat hij niet op moest geven. Op 27 augustus 2012 werd zijn werk bekroond met de verdediging van zijn proefschrift *Persistence of noncompact normally hyperbolic invariant manifolds in bounded geometry*.

Normaalhyperbolische invariante variëteiten

Eldering werkt aan normaalhyperbolische invariante variëteiten, die een belangrijke rol spelen in dynamische systemen en toepassingen daarvan. Hij legt uit: “Een vast punt van een differentiaalvergelijking is een punt dat invariant is onder de stroming van het systeem. Zo’n punt heet hyperbolisch als de eigenwaarden van de linearisatie van het systeem niet op de imaginaire as liggen. Oplossingskrommen in de buurt van het vaste punt vormen dan hyperbolen. Normaalhyperbolische invariante variëteiten (NHIMs in het Engels) zijn hier generalisaties van. Het zijn variëteiten die als geheel invariant zijn onder de stroming van het systeem en in de dwarse (normale) richting hetzelfde hyperbolische gedrag vertonen als een hyperbolisch vast punt, zie Figuur 1. Een hyperbolisch vast punt is dus simpelweg een nul-dimensionale NHIM.”

Persistentie van NIMHs

Elderings hele proefschrift draait eigenlijk om het bewijzen van één stelling, namelijk dat normaalhyperbolisch invariante variëteiten behouden blijven onder kleine storingen van het dynamische systeem. Deze stelling was voor compacte variëteiten al bekend sinds de jaren 70. Eldering heeft deze veralgemeniseerd naar niet-compacte variëteiten onder de aanname van zogenaamde ‘begrensde meetkunde’ van de omliggende ruimte (Riemannse variëteit).

Hij legt de persistentie heuristisch uit als volgt: “Bij een hyperbolisch vast punt heeft de afgeleide-matrix geen eigenwaarden op de imaginaire as, dus in het bijzonder is deze inverteerbaar. Volgens de impliciete-functiestelling is er dus nog steeds een vast punt na kleine verstoringen. Voor een algemenere NHIM kunnen we ook een *heuristische* impliciete-functievergelijking opstellen: $F(M, v) = \Phi^t(M) - M$, waarbij M de invariante variëteit is, v het vectorveld en Φ^t de stroming die van v afhangt. De eis van expansie- en contractiesnelheden (zie Figuur 1) kan nu gezien worden als conditie dat de afgeleide van

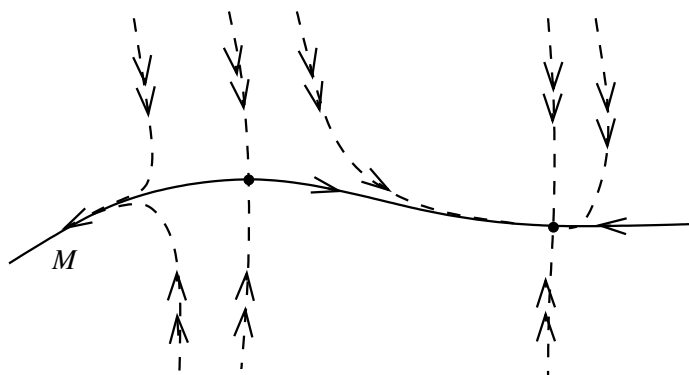
Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl



Figuur 1 Schets van een NHIM M . Merk op dat de stroming langs de variëteit (één pijltje) langzamer is dan die er loodrecht op (twee pijltjes).

F naar M inverteerbaar is. Met de impliciete-functiestelling kan men dus weer concluderen dat er een unieke, een beetje verstoorde M blijft bestaan als v een beetje verstoord wordt.”

Een Riemannse variëteit als omliggende ruimte

Eldering generaliseerde de stelling voor de context waarin de omliggende ruimte ook een (niet-compacte Riemannse) variëteit is. Het basisidee van deze generalisatie is simpel: voor eerdere resultaten werd de compactheid van de variëteiten gebruikt om uniforme conclusies te kunnen trekken, dus als de compactheid vervangen wordt door a priori uniformiteit aan te nemen, dan moet alles goed gaan. Deze gedachte was zeker al bekend, maar nog niet uitgewerkt in deze context.

Een voor de hand liggende eis is dat het vectorveld uniform begrensd en continu is, evenals de verstoring. Maar om hogere gladheid te krijgen moet dit ook voor hogere-orde-afgeleiden geëist worden. Dan duikt meteen de vraag op hoe dit überhaupt geformuleerd kan worden op een variëteit. Het bleek dat Eldering een bepaalde uniformiteit van de onderliggende variëteit nodig had, de ‘begrensde meetkunde’ uit de titel van zijn proefschrift. Dit houdt in dat de kromming inclusief afgeleiden begrensd is en dat de zogenaamde injectiviteitsstraal een ondergrens groter dan nul heeft, allemaal globaal.

Onderzoeksvraag ‘per ongeluk’ geboren.

Elderings oorspronkelijke onderzoeksvraag ging over een toepassing van singuliere perturbatietheorie (waarbij NHIMs gebruikt kunnen worden) op klassiek mechanische systemen. Toen hij de literatuur hierover bestudeerde, suggereerde Hans Duistermaat dat er ook een alternatieve methode (de Perron-methode in plaats van Hadamards *Graph Transform*) gebruikt zou moeten kunnen worden voor het persistentiebewijs voor compacte NHIMs. Dat bleek toch lastiger dan eerst gedacht, maar Eldering beet zich erin vast. Hij stond er in eerste instantie niet bij stil of hij het niet-compacte geval wilde of kon aanpakken; hij probeerde vooral de Perron-methode werkend te krijgen. Hij zag zich daarbij gedwongen om een heleboel details voor zichzelf opnieuw uit te vinden. Naarmate hij de literatuur verder ontdekte, is hij zich bewust gaan focussen op het niet-compacte geval in algemene Riemannse variëteiten, omdat dat geval nog nergens behandeld was.

Toen hij zich expliciet ging richten op dit niet-compacte geval, had hij al door dat het algemene principe was dat compactheid vervangen moest worden door uniforme aannamen.

Een vernieuwend inzicht

Rond die tijd had hij een bepaalde conditie nodig, namelijk dat de holonomie van de Levi-Civita-connectie langs twee naburige oplossingskrommen niet al te sterk mocht groeien met de lengte van deze

krommen. Het inzicht dat hij dat onder controle kon krijgen door te eisen dat de Riemannse kromming begrensd is, gaf Eldering het idee dat bovengenoemde uniforme aannamen ook aan de onderliggende ruimte opgelegd moeten worden in termen van ‘begrensde meetkunde’ (bounded geometry). Dat inzicht was een eye-opener en was ook de reden waarom hij in de zomer van 2010 niet langer twijfelde aan een goede afloop van zijn promotiewerk.

Eldering denkt ook dat dit idee het vernieuwende is aan zijn werk: tot dan toe had men nog niet bedacht dat voor een generalisatie naar het niet-compacte geval de uniformiteit ook aan de onderliggende ruimte opgelegd zou moeten worden.

Eldering vindt zijn ‘hoofdstelling’ zelf mooi, omdat er een combinatie van theorie uit de dynamische systemen, globale analyse en differentiaalmeetkunde bij komt kijken.

Het bewijs van deze stelling is technisch behoorlijk gecompliceerd. Aan de ene kant is hij er wel trots op dat voor elkaar te hebben gekregen; aan de andere kant is hij er ook achter dat een deel van de complicaties achterwege gelaten hadden kunnen worden door een compleet andere methode te gebruiken. De Perron-methode is namelijk niet erg handig voor dit probleem; de Graph Transform had hem achteraf waarschijnlijk een behoorlijke hoeveelheid technische details bespaard. Dat is iets waar Eldering zich gaandeweg bewust van werd. Ook al had hij de ideeën om het bewijs af te ronden in zijn hoofd zitten, bij het uitwerken daarvan kwam hij veel technische problemen tegen, waarvan de oplossing conceptueel duidelijk was, maar nogal wat voeten in de aarde had om precies uit te werken.

De keuze om te wisselen van methode heeft hij nooit durven maken omdat die keuze ook onzekerheid met zich mee zou brengen. Het inzicht dat de Graph Transform handiger was, vorderde bovendien samen met zijn vooruitgang met de Perron-methode. Hij bleef daarom altijd het gevoel houden dat doorgaan met de Perron-methode de veiligere keuze was om binnen afzienbare tijd zijn bewijs af te ronden.

Verder in de wetenschap

Over het algemeen beviel het leven als aio hem wel. Aan de ene kant voelde het vele werken in zijn eentje soms wel eenzaam, aan de andere kant heeft hij een hele gezellige tijd gehad met zijn kamergenoten en mede-aio’s. Ze dachten vaak samen na over wiskundige problemen van elkaar en organiseerden verschillende uitjes.

De conferenties maakten het ook leuk: het reizen naar nieuwe plekken, inspiratie opdoen, en nieuwe en bekende mensen ontmoeten met interesse in zijn onderzoek. Een goed voorbeeld dichtbij huis was het minisymposium bij de promotie van Alef Sterk in Groningen, waar Robert MacKay een voordracht gaf over niet-compacte normaalhyperbolische invariante variëteiten. Dit was de eerste keer dat Eldering iemand ontmoette die vergelijkbare dingen deed en dit contact gaf hem het gevoel dat hij toch niet in zijn eentje op een eiland werkte.

Al met al een positieve balans. Eldering is inmiddels postdoc aan het Imperial College in London en hoopt voor de toekomst op een mooie carrière in de wetenschap.



Figuur 2 Variëteit met globale injectiviteitsstraal gelijk aan nul: je kunt rond de krimpende cilinder steeds kortere gesloten rondjes lopen.

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit

De Boelelaan 1081

1081HV Amsterdam

t.koetsier@vu.nl

Onderwijs

Didactiek met oneindig veel pingpongballen?

In het juninummer van dit blad vertelt Eric Cornet over het onderzoek dat hij voor de Mastermath-cursus Didactiek had gedaan onder middelbare scholieren. Het beschreven pingpongballenvraagstuk riep mooie herinneringen op bij onze redacteur Teun Koetsier. In dit artikel beschrijft hij zijn bevindingen met dit interessante vraagstuk over oneindigheid.

In het juninummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* trof u een verslag aan van Eric Cornet met betrekking tot een interessant didactisch onderzoek dat hij had uitgevoerd samen met een medestudente, Rianne Maes [4]. Het ging om de rol die paradoxen van het oneindige kunnen spelen in het onderwijs en daarbij speelde een 'pingpongballen-vraagstuk' (PPBV1) een rol.

Dat PPBV1 bestaat uit een gedachte-experiment en een daaropvolgende vraag: U heeft een ton en u heeft net zoveel ballen als er natuurlijke getallen zijn, genummerd, 1, 2, 3, ... , die zich aanvankelijk allemaal buiten de ton bevinden. Als het één minuut voor twaalf uur is doet u de eerste tien ballen in de ton en onmiddellijk daarna haalt u de bal met het laagste rangnummer er weer uit, dat is bal nummer 1. Dat moet u allemaal snel doen want een halve minuut voor twaalf uur doet u de volgende tien ballen, 11 tot en met 20, in de ton en weer haalt u de bal met het laagste rangnummer er uit, dat is nu bal nummer 2. En zo gaat u verder: op tijdstip $(1/2)^n$ minuut voor twaalf uur doet u de ballen $10n + 1$ tot en met $10n + 10$ in de ton en haalt u de bal met het laagste nummer er uit, dat is dan bal nummer $n + 1$. De beschrijving wordt gevolgd door de vraag: "Hoeveel ballen zitten er om twaalf uur in de ton?" Waarde lezer, als u hierover nog

nooit hebt nagedacht, dan zou u dat nu eigenlijk moeten doen.

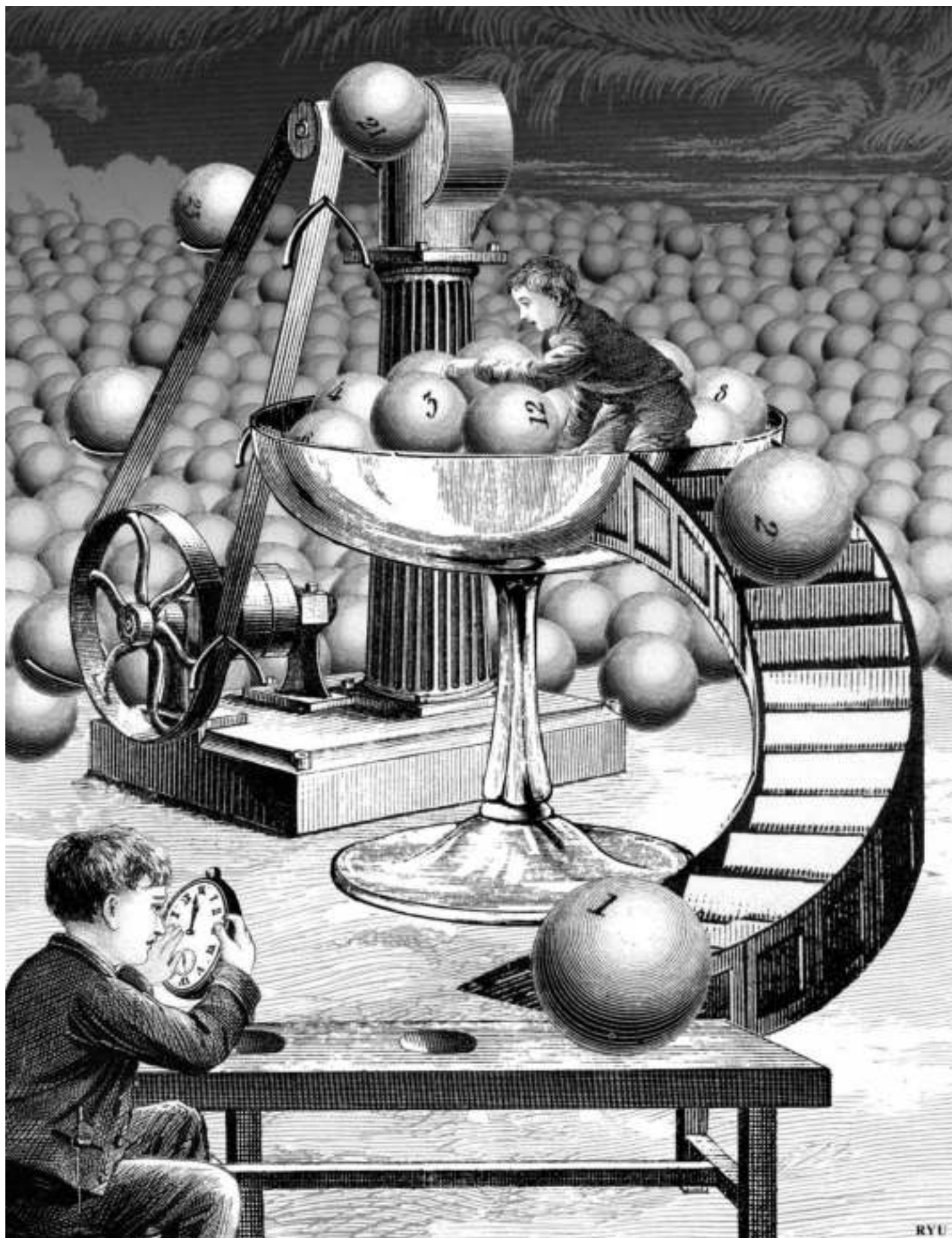
Het is heel goed mogelijk dat u dan op het antwoord komt dat we ook wel in de literatuur vinden. We noemen dat antwoord Oplossing 1: De vaas is leeg. Oplossing 1 vinden we bijvoorbeeld in een bekend leerboek waarschijnlijkheidsrekening van Ross, dat in de tachtiger jaren ook aan de VU werd gebruikt, en al eerder in een boekje van [6,9]. De redenering die tot dat antwoord leidt, luidt als volgt: alle ballen die ooit de ton in gaan, worden er ook weer uitgehaald. Je kunt voor elke bal uitrekenen wanneer hij erin gaat en vervolgens wanneer hij de bal met het laagste rangnummer is en dus weer wordt verwijderd. Dat gebeurt voor alle ballen vóór twaalf uur en dus is de ton leeg om twaalf uur.

Natuurlijk valt het niet te ontkennen dat er tijdens het experiment op alle actiemomenten voor twaalf uur telkens netto 9 ballen de ton ingaan en in de loop van het experiment neemt het aantal ballen in de ton dus onbegrensd toe. Binnen deze oplossing is dit een paradox van het oneindige: de ton is om 12.00 uur leeg en het feit dat daaraan voorafgaand het aantal ballen alsmat groeit, is vreemd, maar niet meer dan één van die rare dingen die zich in het oneindige voordoen. Velen voelen zich helemaal op hun gemak met deze oplossing.

In de literatuur wordt de paradox in deze vorm wel de paradox van Littlewood–Ross genoemd.

Een tweede pingpongballenvraagstuk

Het PPBV1 riep mooie herinneringen bij mij op uit de tachtiger jaren toen Victor Allis bij ons aan de VU studeerde. Victor had grote moeite met de vanzelfsprekendheid waarmee Ross het antwoord op de vraag behandelde en hij bedacht de volgende zeer vernuftige variant op PPBV1, die ik PPBV2 zal noemen. De uitgangssituatie is dezelfde. Om één minuut voor twaalf worden de ballen 1 tot en met 9 in de ton gedaan en onmiddellijk daarna gebeuren twee dingen: bal nummer 1 in de ton wordt bal nummer 10 doordat er een 0 bij wordt gezet en bal nummer 10 buiten de ton wordt van zijn 0 ontdaan, wordt dus bal nummer 1. Om een halve minuut voor twaalf worden de ballen 11 tot en met 19 in de ton gedaan en weer gebeuren er onmiddellijk twee dingen: bal nummer 2 krijgt een extra 0 en wordt bal nummer 20 en de oude bal nummer 20 buiten de ton verliest zijn 0 en wordt bal nummer 2. Bij dit experiment worden telkens negen ballen de ton ingedaan, de bal in de ton met dan het laagste rangnummer krijgt er een 0 bij en de bal buiten de ton met als nummer het laagste tienvoud wordt van een nul ontdaan. Op deze manier wordt bij PPBV2 op elk moment waarop er met de ballen wordt gemanipuleerd in en buiten de ton precies dezelfde situatie gerealiseerd als bij PPBV1. En daarbij worden er alleen maar ballen in de ton gestopt en wordt er nooit een bal verwijderd.





Opmerkelijk is dat bij PPBV2 desondanks niemand de neiging heeft om de vraag naar de inhoud van de vaas om 12.00 uur te beantwoorden met: hij is leeg! In tegendeel, nu zeggen velen: de ton is vol met ballen en op al die ballen staat een natuurlijk getal met oneindig veel nullen.

Het wordt nog gekker

Victor en ik waren door dit alles zeer geïntrigeerd, maar we begrepen niet goed wat we aan het doen waren. Ik herinner mij nog goed dat wij ettelijke wiskundigen en informatici in de koffiekamer, bij printers en zelfs in toiletten met deze kwestie lastigvielen. Sommigen waren geamuseerd, anderen vonden dat we beter iets nuttigs konden doen, maar niemand sprak het voor ons verlossende woord. We bedachten ook nog PPBV3, een variant op PPBV2. Hierbij stellen we dat de ton genummerde plaatsen heeft, net zoveel als er natuurlijke getallen zijn. En bovendien eisen we dat een bal altijd op de plaats ligt die het nummer heeft dat op de bal staat. Wat is er natuurlijker? Het effect hiervan is echter spectaculair: hoewel het verschil tussen PPBV2 en PPBV3 onnozel overkomt, lijkt het er nu op dat om twaalf uur alle plaatsen in de ton onbezet zijn. De ton lijkt dus om twaalf uur leeg.

Als we bijvoorbeeld bal nummer 1 volgen in de loop van de tijd, dan zien we hoe vreemd dat is. Bal nummer 1 ligt eerst op plaats nummer 1, daarna krijgt die bal er een nul bij en wordt bal nummer 10 en ligt dus op plaats 10. De bal krijgt er oneindig vaak een nul bij en wordt daarbij telkens verplaatst. Ons gevoel zegt dat er om twaalf uur een 1 op deze bal staat gevolgd door oneindig veel nullen. Voor zo'n bal is er echter in de urn geen plaats.

Het simpele continuïteitsprincipe

Waar zijn we nou eigenlijk mee bezig? De gedachte-experimenten van PPBV1, 2 en 3 zijn wat men in de literatuur supertaken noemt.

Een gewone taak bestaan uit een eindige rij goed gedefinieerde en achter elkaar uitvoerbare handelingen. Het effect van een gewone taak is de toestand na het uitvoeren van de laatste handeling. Een supertaak is een aftelbaar oneindige rij achter elkaar in een eindige tijd uitvoerbare handelingen. Omdat er geen laatste handeling is, is het effect dat de uitvoering van een supertaak op de wereld heeft niet meteen duidelijk.

Een belangrijk eerste punt om in de gaten te houden is het volgende. Allereerst veronderstellen we dat de handelingen waaruit de supertaak bestaat uitvoerbaar zijn in een eindige tijd. Dit spreekt helemaal niet vanzelf, maar zonder deze veronderstelling is de aardigheid ervan af. Het tweede belangrijke punt is het volgende. Uit de definitie van een supertaak volgt logisch bekeken meestal niets over de eindtoestand. Er zijn extra aannamen nodig. Alle uitspraken over de toestand om twaalf uur zijn dus gebaseerd op extra aannames.

In de drie pingpongballenvraagstukken is de aanname die door de meeste mensen stilzwijgend wordt gemaakt de volgende: als een bal of een cijfer op een bal op enig tijdstip voor twaalf uur een positie krijgt die tussen dat tijdstip en twaalf uur niet wijzigt, dan heeft die bal of dat cijfer ook om twaalf uur die positie. Ik zal de aanname het simpele continuïteitsprincipe noemen. Met dit simpele continuïteitsprincipe laten zich onze intuïties met betrekking tot de situatie om twaalf uur bij de drie pingpongballenvraagstukken goed verklaren. Daarmee zijn echter niet alle problemen opgelost.

Het algemene continuïteitsprincipe

Binnen de wiskunde kom je wel gedachte-experimenten tegen die op een supertaak neerkomen. Als je bijvoorbeeld informeel uitgaande van de lege verzameling de cumulatieve verzamelingenstructuur in gedachten opbouwt om daarna bijvoorbeeld de axioma's van Zermelo–Fraenkel te formuleren, dan verricht je een soort supertaak. Zie bijvoorbeeld [3]. Meer dan een simpel continuïteitsprincipe – als iets geformeerd is, dan is het er – heb je daarbij niet nodig. Veel van de supertakenproblematiek valt eigenlijk binnen de fysica. (Er is inmiddels een uitgebreide literatuur over supertaken. Zie het artikel van Jon Pérez Laraudogoitia in de Stanford Encyclopedia of Philosophy [8].) Een puur logische benadering lijkt niet erg interessant. Het wordt pas boeiend als je wil weten hoe de werkelijkheid gaat reageren op de uitvoering van zo'n oneindige rij handelingen, aannemend

dat die handelingen allemaal kunnen worden uitgevoerd. Het woord 'handeling' wordt hierbij overigens vaak ruim geïnterpreteerd; het gaat er alleen om dat een vorige toestand op de gedefinieerde manier in de volgende toestand overgaat.

We zullen hieronder de pingpongballenvraagstukken kinematisch interpreteren in termen van beweging in een euclidisch vlak. Daarmee zullen we de relatie laten zien met de bekende paradoxen van Zeno, de Dichotomie en Achilles en de Schildpad.

Ondanks het simpele continuïteitsprincipe zullen er lezers zijn die moeite hebben met het informele karakter van de gedachte-experimenten. En dat is niet ten onrechte. De gedachte-experimenten lijken misschien goed gedefinieerd, maar dat is schijn. Uitgaande van het simpele continuïteitsprincipe is dit snel in te zien. Dat principe zegt eigenlijk dat een van de tijd t afhankelijke positiefunctie die vóór twaalf uur constant is, continu is op het moment $t = 12$. Als we de zaak kinematisch interpreteren ligt het erg voor de hand om een algemeen continuïteitsprincipe aan te nemen: positiefuncties van de tijd zijn altijd continu op het moment $t = 12$.

Neem nu PPBV3. We stellen ons de ballen voor als ronde schijfjes in een euclidisch vlak. De positie van het middelpunt van een schijfje bepaalt de positie van de bal. De ton moet dan gezien worden als een puntverzameling in het vlak die minimaal de aftelbaar oneindige rij punten 1, 2, 3, 4, 6, 7, et cetera bevat.

Bij de uitvoering van PPBV3 wordt bal 1 weldra bal 10, daarna bal 100, et cetera. Terwijl het aantal nullen groeit wordt de bal alsmaar verplaatst en de bal doorloopt daarbij de posities $1, 10^1, 10^2, 10^3$, et cetera.

Het hangt nu heel erg van de definitie van de puntverzameling die de ton voorstelt af welke conclusies we met behulp van het algemene continuïteitsprincipe kunnen trekken. Als de rij van punten $1, 10^1, 10^2, 10^3$, et cetera, convergeert naar een limietpunt P binnen de ton en dat punt heeft als nummer $1\emptyset$, een 1 met aftelbaar oneindig veel nullen erachter, dan moeten we ineens vaststellen dat de ton toch niet leeg is om twaalf uur. Immers, op grond van het algemene continuïteitsprincipe bevindt de bal in kwestie, die eerst nummer 1 droeg, dan 10, vervolgens 100, et cetera, zich om twaalf uur in punt P en dus per definitie in de ton en heeft het nummer $1\emptyset$!

De Dichotomie: de truc van Zeno

Zoals gezegd heeft dit alles iets te maken met de paradoxen van Zeno. Een versie van de Dichotomie van Zeno luidt als volgt. Een

beweging van A naar B in een eindige tijd is niet mogelijk omdat eerst het midden van AB , dan het midden van de tweede helft, en vervolgens oneindig vaak het midden van het nog resterende stuk moet worden bereikt. Nota bene: de aanname van het bestaan van al die middens houdt in dat we zowel de tijd als de afstand van A tot B als een continuüm beschouwen. We praten dus over een wiskundig model van de beweging.

Wat Zeno nu deed, is dat relatief onproblematische wiskundig model van de beweging van A naar B problematisch maken door er een supertaak in te projecteren. Het lijkt ineens alsof degene die beweegt in een eindige tijd oneindig veel dingen moet doen. Iemand (Bertrand Russell?) schreef ooit: als degene die beweegt zich bewust zou moeten zijn van alle punten die gepasseerd worden, dan was het inderdaad een onmogelijke opgave; dat is echter helemaal niet nodig.

Achilles en de Schildpad

Dat de kinematisch geïnterpreteerde pingpongballenvraagstukken alles te maken hebben met de paradoxen van Zeno wordt helemaal duidelijk als we Achilles en de Schildpad weer eens laten lopen en wel op een parcours van lengte 2. Achilles start aan het begin en de Schildpad mag halverwege starten. We gaan ervan uit dat Achilles geblesseerd is en vandaag niet erg hard kan lopen. Hij loopt twee maal zo snel als de Schildpad, die 1 lengte-eenheid per minuut loopt. De race begint om één minuut voor twaalf. Langs het parcours staan aftelbaar oneindig veel kleine vlaggetjes, genummerd 1, 2, 3, 4, et cetera. De lopers passeren die vlaggetjes ook in die volgorde. De afstand tot de finish van vlaggetje n noemen we $F(n)$. Er geldt

$$F(n) = 2^{-10 \log(n)}. \quad (1)$$

Het aardige is nu dat de vlaggetjes zo staan dat als de Schildpad bij vlaggetje 1 is, Achilles nog geen enkel vlaggetje heeft gepasseerd. Als de Schildpad bij vlaggetje 10 is, dan is Achilles bij vlaggetje 1. Als de Schildpad bij

vlaggetje 20 is, dan is Achilles bij vlaggetje 2. Als de Schildpad bij vlaggetje 30 is, dan is Achilles bij vlaggetje 3. Algemeen: als de Schildpad bij vlaggetje $10n$ is, dan is Achilles bij vlaggetje n . Dat dit zo is laat zich gemakkelijk inzien. Uit (1) volgt immers

$$F(n) = 2F(10n). \quad (2)$$

Als Achilles bij vlaggetje n is, moet hij nog $F(n)$ afleggen. Omdat hij twee maal sneller loopt dan de Schildpad, moet de Schildpad dan nog $\frac{1}{2}F(n)$ en dat is $F(10n)$.

Als we nu het aantal vlaggetjes dat de Schildpad heeft ontmoet en Achilles nog niet, als de inhoud van de ton interpreteren dan zien we de structuur van PPBV1. Het aantal vlaggetjes tussen Achilles en de Schildpad neemt alsmaar toe, maar als om twaalf uur Achilles en de Schildpad tegelijk de eindstreep bereiken dan is de ton leeg! Zeno zou het vast prachtig hebben gevonden: het feit dat het aantal vlaggetjes tussen de twee lopers alsmaar oploopt en toch plotseling nul is, maakt alleen maar extra duidelijk dat de veronderstelling dat Achilles de Schildpad in zal halen tot absurde conclusies leidt.

Wat kunnen we hiervan leren?

Eric en Rianne, van het stuk uit het juninummer, kwamen tot de conclusie dat het pingpongballenvraagstuk misschien niet zo geschikt is om leerlingen inzicht in het oneindige bij te brengen. Ik ben dat met hen eens. De kans dat je alleen maar verwarring zaait lijkt mij niet gering. Victor en ik hadden ook enige tijd nodig voordat we beter begrepen wat er aan de hand is. We schreven er tenslotte drie artikelen over, zie [1,2,5].

Supertaken zijn intrigerende maar ook glibberige objecten. In het bovenstaande heb ik de pingpongballenvraagstukken minder problematisch gemaakt door ze kinematisch te interpreteren. Daarbij doe ik eigenlijk het omgekeerde van wat Zeno deed: beweging problematisch maken door er supertaken uit te distilleren. Dus: als je het moeilijker wil maken dan gooi je er een supertaak tegen-

aan. Zeno had een specifiek filosofisch doel met zijn paradoxen. Hij verdedigde de visie van zijn leermeester Parmenides dat de waarheid eeuwig en onveranderlijk is. Beweging is essentieel verandering en kan dus niets met waarheid van doen hebben. Dus: voor de echte waarheidszoeker bestaat beweging niet.

In het onderwijs moeten we oppassen dat we het doel niet uit het oog verliezen. Cantors theorie van de oneindige verzamelingen is een paradijs waarover we heel consistent kunnen praten. Hoe onderhoudend supertaken misschien ook zijn, we moeten oppassen dat ze geen verwarring zaaien.

Het is op zich wel interessant om te zien hoe leerlingen reageren op PPBV1. Een deel van de leerlingen zegt: het wordt nooit twaalf uur! Een ander deel zegt: de vaas bevat oneindig veel ballen. Ik zou zeggen: beide antwoorden goed rekenen! En natuurlijk krijgt ook die enkele leerling die stelt dat de ton leeg is om twaalf uur van mij een mooi cijfer. Het eerste antwoord getuigt van gezond verstand. Zo'n supertaak is in feite niet uitvoerbaar in een minuut. Je kunt er alleen maar zinnig over praten als je de taak ziet als een aftelbaar oneindige rij van overgangen en daarbij abstraheert van de problemen die de feitelijke uitvoering, fysiek of mentaal, met zich mee brengen. Dit laatste vereist enige wiskundige volwassenheid. Het tweede antwoord komt voort uit het inzicht dat het aantal ballen in de ton in de loop van de tijd een rij vormt met limiet oneindig. Dit is ook een prima redenering. Een andere eveneens voortreffelijke redenering leidt tot de conclusie dat de ton leeg is en als je al deze redeneringen overziet, lijkt het antwoord "Ik weet het niet" ook niet onverstandig. Aan de leerlingen ligt het dus niet.

Mamolo en Zazkis schreven een artikel met als titel 'Paradoxes as a window to infinity' [7]. Ik denk dat paradoxen, en zeker paradoxen die supertaken betreffen voorzichtig moeten worden gehanteerd. Als we niet oppassen dan wordt het 'Paradoxes as a window to confusion'.

Dankwoord

Ik dank Nellie Verhoef en Martijn Zaal voor hun commentaar op een eerdere versie van dit stuk.

Referenties

- 1 V. Allis, T. Koetsier, On some paradoxes of the Infinite, *British Journal Philosophy of Science*, 42, 1991, pp. 187–194.
- 2 V. Allis, T. Koetsier, On some Paradoxes of the Infinite II, *British Journal Philosophy of Science*, 46, 1995, pp. 235–247.
- 3 G. Boolos, The iterative conception of set, *The Journal of Philosophy* 68, 1971, pp. 215–231.
- 4 Eric Cornet, Met de trein van Utrecht naar Ankara: over oneindig gesproken, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/13, juni 2012, pp. 135–136.
- 5 T. Koetsier, V. Allis, Assaying Supertasks, *Logique & Analyse* 40, 1997, pp. 291–313.
- 6 J. E. Littlewood, *A Mathematicians's Miscellany*, London, 1953, p. 5 (<http://archive.org/details/mathematiciansmio33496mbp>).
- 7 A. Mamolo en R. Zazkis, Paradoxes as a window to infinity, *Research in Mathematics Education* 10, 2008, pp. 167–182.
- 8 Jon Pérez Laraudogoitia, Supertasks, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 29 June 1999, plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks.
- 9 S. Ross, *A First Course in Probability*, New York, 1988, p. 46.

De derde wet

| Solicited Comments

Het onderstaande is een reactie op het interview met David Tall en de bespreking van twee boeken van Thomas Colignatus uit het NAW-maartnummer van 2012.

David Tall versus EWS en COTP

In het maartnummer staat een interview met David Tall (pp. 54–58) en bespreekt Richard Gill (pp. 66–68) mijn boeken *Elegance with Substance* (EWS 2009) en *Conquest of the Plane* (COTP 2011). Beide artikelen concentreren zich op de afgeleide. Het is een gelukkig toeval dat deze artikelen gelijktijdig zijn verschenen, want er valt iets belangrijks bij te melden, ook al zijn EWS en COTP veel breder dan alleen de afgeleide.

EWS en COTP geven een nieuwe algebraïsche aanpak van de afgeleide. Deze aanpak maakt onderscheid tussen statische en dynamische deling, legt het ‘probleem’ dus bij rekenkunde/algebra, en de afgeleide komt er gewoon uitrollen, en er is geen noodzaak limieten te gebruiken. De aanpak kan gezien worden in relatie tot het *procept* van Gray en Tall. Die relatie tot het *procept* wordt ook besproken in EWS en COTP, ook al behoud ik voor dat ikzelf in 1980 ook al, en blijkbaar parallel, het onderscheid tussen statisch en dynamisch gebruik van wiskundige concepten heb gezien. Hoe dan ook zou het niet onlogisch zijn dat Tall die nieuwe aanpak in EWS en COTP omarmt. Hij houdt echter vast aan limieten, en laat leerlingen op functies inzoomen en sensomotorisch met de vinger langs de curve gaan om de helling te voelen. Dat laatste is ook weer niet zo logisch vanuit EWS en COTP gezien, omdat deze boeken calculus opbouwen vanuit oppervlakteberekening, zodat de helling niet het primaire concept is. Mij is gebleken dat Tall geen tijd heeft hiernaar te kijken. Het is nuttig dat lezers weten dat deze logische spanning in ieder geval bestaat.

In zijn didactiek volgt Tall Freudenthal en heeft dan hetzelfde misverstand als Freudenthal, zoals COTP uitvoeriger bespreekt. Tall stelt terecht dat je moet kijken naar wat leerlingen doen, maar hij is nog steeds een abstract-denkende wiskundige die doorschiet naar een werkelijkheid die er niet is. Hij neemt aan dat de werkelijkheid zo is dat leerlingen via zulk sensomotorisch voelen tot een abstract inzicht in de afgeleide komen, maar dit is alleen maar een veronderstelling, en niet per se de werkelijkheid. Die veronderstelling wordt alleen gemaakt omdat Freudenthal als abstract-denkende wiskundige ooit bedacht dat het mooi zou zijn wanneer didactiek zo zou werken. De werkelijkheid is anders. Misschien is het flauw om te zeggen, maar begrip in de afgeleide leidt immers tot de algebraïsche aanpak en niet tot de limietbenadering. Maar zelfs ten aanzien van de limietbenadering is het de vraag of die aanpak wel tot abstract inzicht leidt, waar het immers om gaat. Twee principes lijken me juist: (1) De ervaringswereld van leerlingen is van belang, (2) wiskunde is per definitie abstract. Hoe met beide principes om te gaan vergt meer pagina's. Ik verwijs naar COTP met het kernvoorbeeld van ‘named lines’ of ook naar mijn nieuwe boek *Een kind wil aardige en geen gemene getallen* (2012) met in het Nederlands ‘benoemde lijnen’. Mijns inziens is hiermee een oplossing geboden voor de vele misverstanden en de ongelukkige schoolstrijd in wiskundeland. Wel geldt dat alleen empirisch onderzoek mijn hypothese kan toetsen, want didactiek is een empirisch vak. *Thomas Colignatus, Scheveningen*

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

derdewet@nieuwarchief.nl

Joseph Steenbrink

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

j.steenbrink@math.ru.nl



Joseph Steenbrink

Afscheidsrede

Mijn spectrum

Sinds de invoering van coördinaten door Descartes bestaat er een nauw verband tussen formules en meetkundige figuren. Singulariteiten zijn meetkundige figuren die worden beschreven door formules waarvan constante en lineaire term nul zijn. Een lineaire benadering hebben ze niet, en daarom moeten andere middelen worden aangewend om ze te begrijpen. Op 17 februari 2012 nam Joseph Steenbrink afscheid als hoogleraar wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen. In zijn afscheidsrede richt hij de schijnwerper op het singulariteitspectrum. Hij laat daarbij ook een verband zien met toonreeksen in de muziek. Steenbrink werd in 1978 lector in Leiden, in 1980 hoogleraar aldaar en in 1988 hoogleraar in Nijmegen. Zijn specialisme is algebraïsche meetkunde, in het bijzonder de verbinding tussen Hodgetheorie en singulariteitentheorie. Hij is daarnaast klavecijnist, organist en koorzanger.

In deze afscheidsrede kijk ik terug op een hoogleraarschap van ruim twintig jaar aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Het was een turbulente periode. Het begin van mijn verblijf in Nijmegen viel samen met de opsplitsing van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen in twee faculteiten: die der Natuurwetenschappen en die der Wiskunde en Informatica. Aanleiding hiertoe was de verwachte explosieve groei van de instroom in de informatica. Tien jaar later werd de opsplitsing weer ongedaan gemaakt. Een stagnatie in de groei van de informatica, hogere eisen aan de professionaliteit van het facultaire bestuur (integraal management) en gebleken gebrek aan synergie tussen wiskunde en informatica waren hier de belangrijkste redenen voor.

Uit deze terugblik op de bestuurlijke ontwikkelingen blijkt hoe snel de inzichten met betrekking tot het universitaire bestuur kunnen veranderen. Het relatief trage ritme van de wiskunde, haar gerichtheid op de lange termijn, spoort hiermee slecht. Wiskundigen, de

Nijmeegse niet uitgezonderd, gaan niet met iedere mode mee. Mogelijke studenten echter wel. De aantallen eerstejaars studenten in de wiskunde daalden tot een kritiek niveau en de opleiding liep het gevaar te verdwijnen. Dit gevaar werd afgewend, dankzij een nieuw faculteitsbestuur dat vertrouwen had in de mogelijkheid tot vernieuwing: de afgelopen zes jaar kenmerken zich door een pijnlijk maar succesvol aanpassingsproces van de Nijmeegse wiskunde aan de moderne eisen. Dit gebeurde onder de bezielende leiding van Klaas Landsman, gesteund door een fantastisch team van studenten.

Ik wil hier echter niet verder ingaan op de bestuurlijke aspecten van de afgelopen periode, hoe belangwekkend die ook zijn. Daar-entegen wil ik een poging wagen u een indruk te geven van het onderzoek dat mij in de afgelopen veertig jaar heeft beziggehouden. Want bij het onderzoek lag mijn hart. Het zal duidelijk worden dat ik veel geluk heb gehad, door op het juiste moment de juiste mensen tegen te komen.

Phillip Griffiths, grondlegger van de moderne Hodgetheorie, gaf in het voorjaar van 1970 gastcolleges in Amsterdam. Ik bezocht deze samen met mijn toenmalige promotor Jan de Boer. Op een zomerschool in Oslo dat jaar leerde ik Frans Oort en de theorie van moduli kennen. Een jaar later was ik zijn promovendus aan de Universiteit van Amsterdam, met een onderwerp ontleend aan de cursus van Griffiths. Frans had een enorm netwerk, mede door zijn hoofdredacteurschap van het tijdschrift *Compositio Mathematica*, dat onder zijn leiding een vooraanstaande plaats onder de wiskundetijdschriften wist te veroveren. Zijn promovendi werden geacht vrijelijk van dit netwerk gebruik te maken.

Zo bezocht ik begin 1972 Pierre Deligne en Nicholas Katz op het Institut des Hautes Études Scientifiques te Bures-sur-Yvette, kortweg het IHES, een onderzoeksinstituut 25 km ten zuiden van Parijs. De directeur van het IHES was Nico Kuiper, tot 1970 hoogleraar meetkunde aan de Universiteit van Amsterdam. Het IHES had slechts vijf vaste stafleden, zonder uitzondering wereldtoppers: de wiskundigen Thom, Deligne en Sullivan en de fysici Ruelle en Michel. Alexander Grothendieck had het IHES in de jaren zestig tot hét centrum van de algebraïsche meetkunde gemaakt en onder Deligne werd deze reputatie nog versterkt. Deligne en Katz reikten mij de juiste hulpmiddelen aan om het probleem van Griffiths aan te pakken.

Een jaar later bezocht ik een conferentie in Cambridge waar Deligne een reeks opzienba-

rende voordrachten hield: hij had de vermoedens van Weil over aantallen oplossingen van vergelijkingen opgelost. Voor dit werk ontving hij in 1978 de prestigieuze Fields-medaille. Van nog groter belang voor mij persoonlijk was dat David Mumford op deze conferentie een voordracht hield over gemengde Hodge-structuren, een nieuwe theorie die Deligne in de jaren daarvoor had uitgewerkt. Het bleek dat mijn berekeningen naadloos in het kader van de gemengde Hodge-theorie pasten! Daarmee was mijn proefschrift een feit en werd ik plotseling expert in een veelbelovend, onontgonnen gebied.

Op uitnodiging van Deligne bracht ik na mijn promotie een jaar door op het IHES. Ik maakte er een begin met de toepassing van mijn proefschrift op het relatief jonge gebied van de singulariteitentheorie. Ik leerde veel over deze theorie van Norbert A'Campo, met wie ik op het IHES een kamer deelde, en maakte kennis met Bob MacPherson en Mark Goresky, de grondleggers van de Intersectiehomologietheorie, ook volkomen nieuw terrein.

Ik ga u nu in het kort iets vertellen over de singulariteitentheorie. Een beschrijving van dit gebied heb ik reeds gegeven in mijn Leidse oratie van 1978. De technische hulpmiddelen waren destijds erg beperkt: figuren moest ik laten zien door blaadjes uit te delen. Dat gaat tegenwoordig wel anders, zoals u zult zien.

Formules

Als een wiskundige een populairwetenschappelijk artikel gaat schrijven is de eerste stelregel: vermijd formules. Bij iedere formule in de tekst haakt namelijk een deel van de lezers af. Toch verwacht ik dat het belang van formules door een grote meerderheid van u worden onderschreven. Formules beschrijven immers wetmatigheden. Ze vatten in al hun beknoptheid soms zeer gecompliceerde theorieën samen.

Albert Einstein is de geschiedenis ingegaan door zijn relativiteitstheorie. Iedereen associeert de formule

$$E = mc^2$$

met hem. Newton is vooral bekend door zijn theorie van de zwaartekracht, waarvan de tweede wet kernachtig wordt gegeven door

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

In beide formules komen *variabelen* voor met een bepaalde fysische betekenis: zo staat m in beide wetten voor 'massa', en staat c in Einsteins wet voor de lichtsnelheid. Telkens wor-

den twee formules aan elkaar gelijkgesteld. Een ander voorbeeld is de algemene gaswet,

$$pV = nRT.$$

De meest bekende formules uit de middelbareschoolwiskunde zijn misschien wel de Stelling van Pythagoras,

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

voor de lengtes van de zijden in een rechthoekige driehoek en de abc-formule,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

voor de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$. Hier stellen a , b en c getallen voor.

In de abstracte algebra wordt het verband tussen formules bestudeerd onafhankelijk van de betekenis van de letters (variabelen) die erin voorkomen. Zo geldt de gelijkheid

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

voor elk tweetal grootheden A en B die kunnen worden opgeteld en vermenigvuldigd, mits ze voldoen aan $AB = BA$.

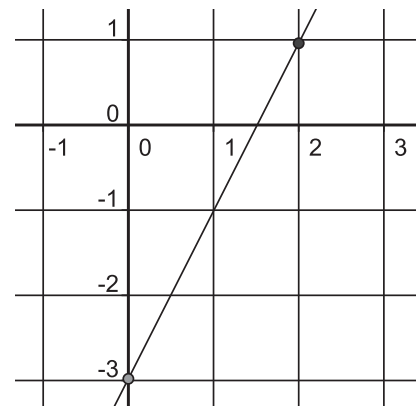
Ook in de singulariteitentheorie zijn formules onderwerp van onderzoek. Het vak heeft derhalve een sterk abstract algebraïsch karakter.

Algebra en meetkunde

In het werk van Descartes wordt een direct verband gelegd tussen bepaalde formules en meetkundige figuren. De variabelen in de formules hebben hierbij de betekenis van *coördinaten*, waardoor de locatie van punten in vlak of ruimte wordt vastgelegd.

Gebruik van coördinaten kennen we allemaal uit de topografie: om de locatie van een plaats op aarde te bepalen wordt gebruikgemaakt van de geografische lengte (ooster- of westerlengte) en breedte (noorder- of zuiderbreedte). Descartes geeft de positie van een punt in het vlak aan met twee getallen. Hij beschouwt hiertoe twee onderling loodrechte getallenlijnen in het vlak, de x -as en de y -as. De projecties van een gegeven punt in het vlak op deze beide assen leveren twee getallen, de x -coördinaat of abscis en de y -coördinaat of ordinaat.

Een vergelijking zoals $y = 2x - 3$ bepaalt nu een figuur in het vlak, bestaande uit die punten waarvan de x - en y -coördinaat aan



Figuur 1

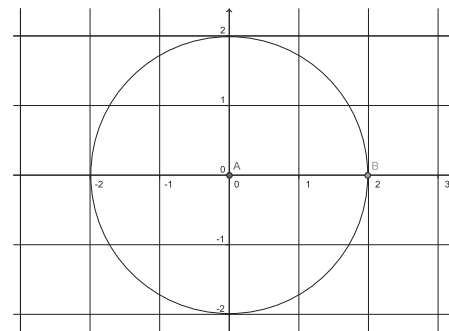
deze vergelijking voldoen. Dit is een rechte lijn door de punten $(0, -3)$ en $(2, 1)$, zie Figuur 1. De vergelijking $x^2 + y^2 = 4$ bepaalt een cirkel met straal 2, zie Figuur 2.

Zodoende wordt door iedere vergelijking (dat is, een relatie tussen formules) een meetkundig object bepaald, bestaande uit die punten waarvan de coördinaten voldoen aan de gegeven vergelijking. De algebra wordt hierdoor concreet gemaakt: de meetkundige objecten zijn een afspiegeling van de algebraïsche vergelijkingen.

Men moet ermee rekening houden dat een plaatje niet steeds alle informatie over de vergelijking weergeeft. Dit is een gevolg van het feit dat wij doorgaans werken met de getallen waar we aan gewend zijn geraakt: de zogeheten *reële getallen*. Het is een diep inzicht uit de twintigste eeuw dat dit informatieverlies geheel kan worden ondervangen door te werken met complexe getallen!

De reële getallen bevatten de natuurlijke getallen $1, 2, 3, \dots$, maar ook de negatieve getallen, breuken en getallen als π en $\sqrt{3}$. Men kan deze voorstellen als kommagetallen (waarbij we oneindig veel getallen achter de komma toelaten) of als punten op een getallenlijn.

De complexe getallen hebben hun plaats in de wiskunde pas rond het jaar 1800 ingenomen. Ze waren noodzakelijk om te komen tot een goed begrip van de oplossingen



Figuur 2

van vergelijkingen van graad drie. In feite komen ze al om de hoek kijken bij vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant. In de abc-formule komt namelijk de wortel uit de discriminant voor. Als die negatief is, dan zijn de twee wortels complexe getallen, die niet reëel zijn. Complexe getallen kan men voorstellen als punten in een vlak. Dit vlak bevat twee onderling loodrechte lijnen, te weten de reële as en de imaginaire as. Het punt $(0, 1)$ wordt meestal i genoemd (de *imaginaire eenheid*) en voldoet aan $i^2 = -1$.

Singulariteitentheorie

Veeltermen

Laten we eens kijken naar een bepaald soort formules in twee variabelen, bijvoorbeeld x^2y of $y - 4x^2$. Deze formules ontstaan door de variabelen x en y met een getal, zichzelf of elkaar te vermenigvuldigen, en de zo ontstane termen bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken. Zulke formules noemt men *veeltermen* of *polynomen*.

In zo'n veelterm kan men aan de variabelen getalswaarden toekennen: door invullen in de formule krijg je dan een getal als resultaat van een berekening. Een formule kan dus worden opgevat als rekenvoorschrift.

Vlakke krommen

Bekijk de veelterm $y - x^2$. We vullen in: $x = 2$ en $y = 4$. Het resultaat van de berekening is dan $4 - 2 \times 2 = 0$. Daarom heet het paar $(2, 4)$ een *nulpunt* van $y - x^2$. We kunnen nu in het vlak alle nulpunten van $y - x^2$ proberen te tekenen. Het resultaat is een parabool. Een vlakke kromme is nu de collectie nulpunten van een veelterm in de variabelen x en y .

Constante en lineaire term

Het getal dat men verkrijgt als voor de variabelen x en y beide de waarde nul wordt ingevuld, heet de *constante term* van de veelterm. Van de veelterm

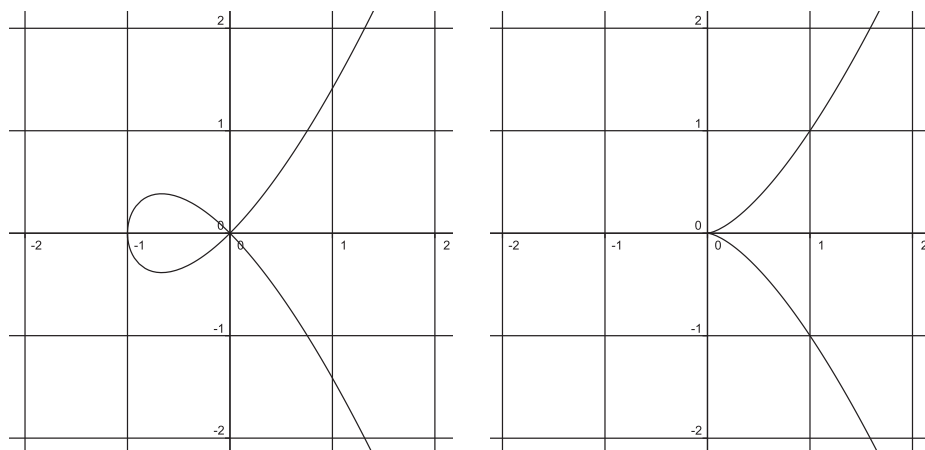
$$3 - 5x + 2y + x^2 - 7xy + 5y^2$$

is 3 de constante term, en $-5x + 2y$ heet de *lineaire term*. In de overige termen van de veelterm worden telkens minstens twee variabelen met elkaar vermenigvuldigd.

Een *singulariteit* is nu een veelterm waarvoor zowel de constante term als de lineaire term nul zijn. De nulpuntenverzameling van een singulariteit bevat steeds het punt $(0, 0)$, en dit is een speciaal punt! Zie Figuur 3.

Inzoomen

Laten we eens met een factor 1000 inzoomen



Figuur 3. De nulpuntenverzamelingen van $y^2 - x^2 - x^3$ (links) en $y^2 - x^3$ (rechts)

op beide singulariteiten uit Figuur 3. Dan krijgen we de afbeeldingen in Figuur 4. Hieraan is het volgende op te merken. De linker afbeelding is niet meer te onderscheiden van twee onderling loodrechte lijnen. Het is alsof we met de vergelijking $y^2 = x^2$ waren gestart, in plaats van $y^2 = x^2 + x^3$. Omdat we x en y beide erg klein hebben genomen, kan de term x^3 worden verwaarloosd. In de rechter afbeelding is nog steeds het keerpunt zichtbaar en doet de term x^3 er wel degelijk toe.

In de singulariteitentheorie zijn we geïnteresseerd in eigenschappen van figuren die ook bij inzoomen op een gegeven punt van kracht blijven.

Meer variabelen

Tot nu toe hebben we veeltermen in twee variabelen x en y beschouwd. Dat is echter een onnodige beperking: in de algebra kan men zonder meer veeltermen en singulariteiten in meer variabelen bekijken. Nulpuntenverzamelingen van zulke veeltermen hebben dan hogere dimensie: men krijgt oppervlakken, lichamen of nog hogerdimensionale objecten.

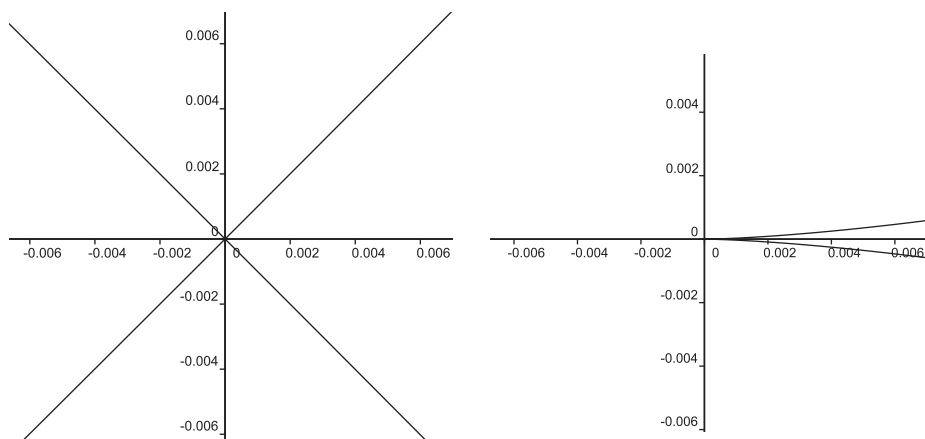
Deformer

Vaak is niet snel aan plaatjes te zien of twee singulariteiten werkelijk verschillen. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de singulariteiten $y^2 - x^5$ en $y^2 - x^3$ (zie Figuur 5): men zou kunnen zeggen dat het eerste keerpunt wat scherper is dan het tweede, maar het is zeer de vraag of dit een eigenschap is die bij inzoomen standhoudt.

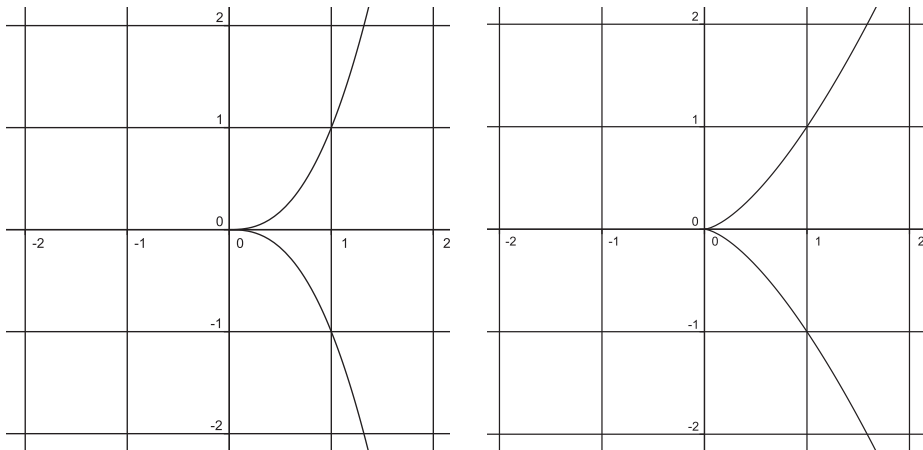
Er is een andere meetkundige techniek beschikbaar om deze singulariteiten te onderscheiden. We kunnen bekijken wat er gebeurt als we de vergelijking een beetje verstoren. Zie Figuur 6. Uit een kleine verstoring van de eerste singulariteit kunnen twee lussen voortkomen, terwijl de tweede singulariteit hoogstens één lus kan produceren. Zodoende onderscheidt men de singulariteiten aan hun 'buren': de singulariteiten die er door kleine verstoringen uit kunnen ontstaan!

Het singulariteitenproject

Het idee dat er in Nederland kansen lagen voor een zwaartepunt in de singulariteitentheorie is afkomstig van Nico Kuiper. Op een bijeenkomst in Metz in februari 1974 wa-



Figuur 4. De singulariteiten uit Figuur 3 een factor 1000 ingezoomd



Figuur 5. De singulariteiten $y^2 = x^5$ (links) en $y^2 = x^3$ (rechts)

ren drie promovendi uit Amsterdam van dat jaar aanwezig: Dirk Siersma, Eduard Looijenga en ikzelf. Ons werk kwam op verschillende wijzen in de voordrachten aan de orde. Deligne gaf er een toepassing van een stelling uit mijn proefschrift. Kuiper constateerde doodleuk dat er sprake was van een Nederlandse Singulariteitenschool. Belangrijke mentoren van ons jonge driemanschap waren Kuiper zelf, de Amsterdamse hoogleraren Van Est en Oort en Norbert A'Campo, die enige jaren eerder naar Frankrijk was uitgeweken. In het voorjaar van 1974 promoveerden wij drieën in Amsterdam en Chris Peters in Leiden. Binnen enkele jaren was Looijenga hoogleraar in Nijmegen, Siersma lector in Utrecht en ik lector in Leiden.

In 1979 zetten wij gedrieën, op instigatie van de Eindhovense hoogleraar Jaap Seidel, die toen een belangrijke rol in de Nederlandse wiskunde vervulde, het project Singularity Theory op. Dit was het eerste grootschalige project in de wiskunde van ZWO, de toenmalige organisatie voor de tweede geldstroom. Onder de vlag van dit project voltooiden Wil

Janssen, Duco van Straten, Theo de Jong en Ruud Pellikaan hun proefschrift, terwijl diverse anderen, zoals Jan Stevens en Hans Sterk, veel steun ondervonden van de colleges, seminars en de talrijke bezoekers van onze groep. Binnen Singularity Theory was namelijk sprake van landelijk onderwijs aan promovendi en onze activiteiten stonden model voor diverse grote NWO-projecten zoals Moduli, Arithmetische Algebraïsche Meetkunde en de latere onderzoeksclusters. Het aio-onderwijs kreeg een vervolg in de Master Classes binnen de onderzoeksschool MRI, die op hun beurt mede de aanzet hebben gegeven tot het landelijk onderwijsaanbod van mastercolleges binnen Mastermath.

Het singulariteitspectrum

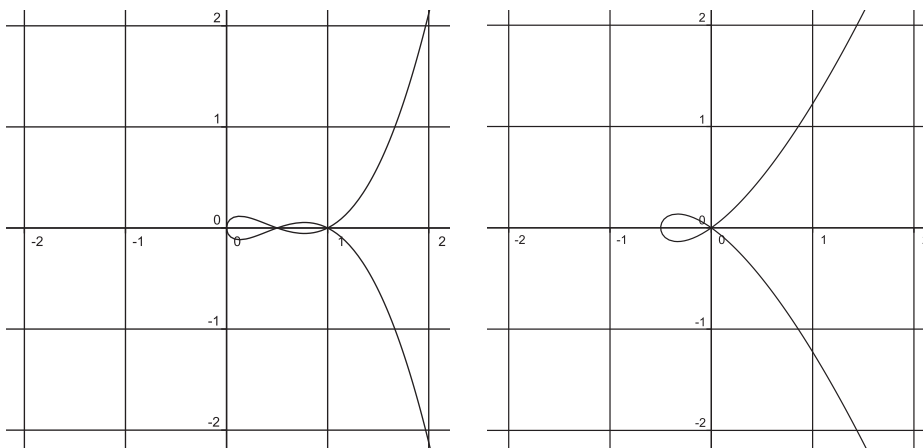
In juni 1975 bezocht ik voor het eerst de Arbeitstagung in Bonn. Stelt u zich voor: een conferentie zonder een van tevoren vastgesteld programma. Friedrich Hirzebruch heeft de leiding en neemt voorstellen voor onderwerpen en sprekers in ontvangst die uitgebreid bediscussieerd worden. Na een aantal

stemmingen ontstaat dan een boeiend actueel programma. Vast onderdeel zijn ook een ontvangst door de rector en een boottocht op de Rijn met de Carmen Silva.

Op die boot ontmoette ik voor het eerst Alexander Varchenko. Hij was een leerling van Vladimir Arnol'd, een van de leidende wiskundigen uit Moskou en een van de grondleggers van de singulariteitentheorie. Varchenko vertelde mij dat in het seminarium van Arnol'd over mijn werk was gesproken en legde mij een vraag van Arnol'd voor. Daarmee ging ik de maanden daarna aan de slag. Er kwam een tiental voorbeelden in aanmerking om te worden doorgerekend. Het met de hand doorrekenen van het eerste voorbeeld kostte mij een halve dag werk. Ik besloot dat ik beter met de primitieve computer aan de slag kon gaan die het IHES rijk was, al kostte het ook een halve dag om hiermee te leren werken. Nadat de computer enkele uren had gerekend, werd een patroon zichtbaar, dat leidde tot het idee van het singulariteitspectrum.

Ons regionale dagblad *De Gelderlander* heeft elke zaterdag een bijlage met de naam Spectrum. Daarin worden diverse onderwerpen uitvoeriger belicht dan doorgaans mogelijk is. De wetenschappelijke term 'spectrum' is afkomstig uit de natuurkunde en heeft betrekking op de vele kleuren die zichtbaar worden door breking van licht: de kleuren van de regenboog. Door breking blijkt dat het witte licht is samengesteld uit vele onderdelen. Met het begrip 'spectrum' associeer ik derhalve het uitlichten van bepaalde interessante facetten of details.

Ook elke singulariteit heeft een spectrum. Dit kan men zich voorstellen als bestaande uit een aantal verschillende golflengtes, elk met zijn eigen intensiteit. Iedere optredende golflengte is een rationaal getal (breuk) dat ligt tussen 0 en n , waarbij n het aantal variabelen is. Voor twee variabelen ligt elke golflengte dus tussen 0 en 2. Verder wordt elke intensiteit weergegeven door een positief geheel getal. Als we alle intensiteiten van alle golflengtes in het spectrum van een singulariteit bij elkaar optellen, krijgen we het *Milnorgetal* van de singulariteit, één van de eerste invarianten van singulariteiten uit de recente literatuur. Het werd gedefinieerd door John Milnor, in diens boek uit 1968, dat een enorme invloed heeft gehad. Bovendien bepaalt het spectrum de karakteristieke veelterm van de monodromie, ook reeds in het boek van Milnor gedefinieerd. De monodromiestelling kent een lange historie. Landman, Grothendieck, Katz, Clemens, Brieskorn en vele anderen hebben erover gepubliceerd. Uit deze



Figuur 6. De singulariteiten uit Figuur 5 een klein beetje verstoord

Musica spectralis

Mezzosoprano

A 1 A 2 A 3 A 3 A 2 A 1 Com-po - si - ti - o

Baritone

A 1 A 2 A 3 A 3 A 2 A 1 Com-po - si - ti -

Mzs.

ma - the - ma - ti - ca Dat was dan A 5: heeft niet veel om't lijf.

Bar.

o ma - the - ma - ti - ca Dat was dan A 5: heeft niet veel om't

Mzs.

Can - tat col - le - gi - um vo - ca - le Pa - ni - cum spec - tra - lem

Bar.

lijf. Can - tat Pa - ni - cum

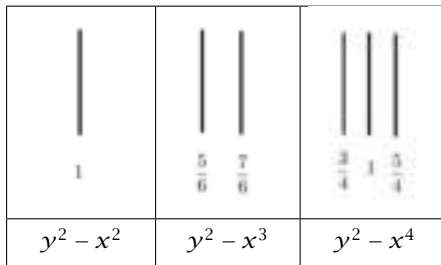
Mzs.

can - ti - cum sin - gu - la - ris - si - mum.

Bar.

sin - gu - la - ris - si - mum.

Figuur 7. Bladmuziek van een toonreeks die tijdens de afscheidsrede van Joseph Steenbrink ten gehore werd gebracht door Vocaal Ensemble PANiek uit Nijmegen. Dit optreden is te beluisteren op www.vocaalensemblepaniek.nl.



Figuur 8

stelling volgt dat de golflengtes in het spectrum rationale getallen zijn. Uit voorbeelden blijkt dat het spectrum wezenlijk meer informatie bevat dan de karakteristieke veelterm van de monodromie.

Hoe ingewikkelder een singulariteit is, hoe groter het Milnorgetal en des te meer informatie het spectrum kan bevatten. Zie Figuur 8. De singulariteiten $y^2 - x^2$, $y^2 - x^3$ en $y^2 - x^4$ hebben Milnorgetallen 1, 2 en 3. Hun spectra vertonen een steeds grotere spreiding. Bovendien valt de symmetrie op ten opzichte van golflengte 1.

Er is een mooie analogie tussen het spectrum van singulariteiten en toonreeksen in de muziek. De golflengtes uit het spectrum bepalen hierbij de toonhoogte van een muzieknoot. De intensiteit ervan kan men laten corresponderen met de klanksterkte of met de klankduur. Voor de frequentie van de toon die correspondeert met de 'golflengte' b kies ik de formule

$$f = 2^b \cdot 440 \text{ Hz.}$$

Als we de golflengte b dan met één eenheid verhogen, klinkt de corresponderende toon precies een octaaf hoger. Om de spectra van singulariteiten van krommen tot klinken te brengen, is dus een bereik van twee octaven nodig. De betreffende tonen passen echter niet steeds in ons gebruikelijke muzieksysteem. Daarvoor is nodig dat iedere golflengte een geheel getal wordt als je deze met 12 vermenigvuldigt. Laten we die singulariteiten vandaag 'muzikaal' noemen.

Kennis van de karakteristieke veelterm van deze singulariteiten is equivalent met de kennis van de notennamen in dit klankspectrum: a, b, c, cis, enzovoorts. De informatie in welk octaaf deze tonen moeten klinken, is daar echter niet bij inbegrepen: daarvoor is het singulariteitspectrum nodig. Ter illustratie is in

Figuur 7 bladmuziek te zien van een toonreeks die tijdens de rede ten hore werd gebracht door Vocaal Ensemble PANiek.

De berekening van het spectrum vereiste aanvankelijk de resolutie van singulariteiten, een tijdrovend proces dat alleen voor singulariteiten van krommen goed te overzien is. Varchenko produceerde echter rond 1980 een nieuwe aanpak, die meer analytisch van aard was. Zijn methode was verwant aan de wijze waarop Brieskorn rond 1970 de monodromie van singulariteiten had bestudeerd. Deze aanpak heeft uiteindelijk geleid tot een algoritme voor de berekening van het singulariteitspectrum dat een tiental jaren geleden door Matthias Schulze, een student uit Kaiserslautern die deelnam aan de Masterclass van het MRI, werd geïmplementeerd in het computeralgebraprogramma SINGULAR. De eerste aanzet tot dit algoritme lag in Nijmegen, waar Peter Nacken, een student van Ton Levelt, een rekenmethode voor de monodromie had ontwikkeld. Levelt kan worden beschouwd als één van de pioniers van de computeralgebra in Nederland. Het algoritme is verder gebaseerd op mijn gezamenlijke artikel met John Scherk uit 1985, waarin wij Varchenko's werk herformuleren in de taal van D-modulen.

Semicontinuiteit

Een heel subtiële vraag is, hoe men kan beslissen of de ene singulariteit meer singulier is dan de andere. Daarmee bedoelen we dat de andere uit de ene kan ontstaan door een kleine verstoring van de vergelijking. Een voorwaarde die dan moet zijn vervuld, is dat het ene Milnorgetal groter is dan het andere.

Vladimir Arnol'd bedacht op grond van een groot aantal voorbeelden hoe deze relatie aan de spectra van de singulariteiten kon worden afgelezen. Tegelijkertijd was Egbert Brieskorn met een andere methode bezig. Er werd toen een voorbeeld gevonden waarvoor beide methodes met elkaar in tegenspraak waren! Een van beiden moest het dus mis hebben. Uiteindelijk werd in 1985 de strijd in het voordeel van Arnol'd beslecht, door de stelling over de *semicontinuiteit van het spectrum*. Deze stelling werd door Varchenko bewezen voor een speciale klasse van singulariteiten en door mij in het algemeen, doordat ik de aanpak van Varchenko kon combineren met een stuk Hodgetheorie dat door Philippe du Bois uit Nantes was ontwikkeld. Deze stelling

beschouw ik als het fraaiste resultaat uit mijn wetenschappelijke loopbaan.

Series van singulariteiten

In de Arnol'd-classificatie van singulariteiten treedt een groot aantal reeksen van singulariteiten op, naast talrijke individuele gevallen. Arnol'd merkte op dat deze reeksen samenhangen met niet-geïsoleerde singulariteiten. In zijn fundamentele artikel 'Isolated line singularities' uit 1981 legde Dirk Siersma de basis voor een diepgaande studie van deze singulariteiten, die werd voortgezet door Ruud Pellikaan, Duco van Straten en Theo de Jong. De vraag deed zich voor hoe de spectra van singulariteiten uit eenzelfde reeks met elkaar samenhangen.

In de trein op de terugweg van een conferentie in Nancy discussieerden Dirk Siersma en ik over dit probleem. Dirk loste binnen korte tijd het gerelateerde probleem over de karakteristieke veelterm van de monodromie op. Een vermoeden dat ik formuleerde over de samenhang van het spectrum voor singulariteiten binnen een reeks werd enige tijd later bewezen door Morihiko Saito, als toepassing van zijn zeer gecompliceerde theorie van gemengde Hodgemodulen. Op grond van deze formules konden diverse tegenvoorbeelden worden gevonden voor bestaande vermoedens.

De singulariteitentheorie had inmiddels een graad van complexiteit bereikt die het voor jonge onderzoekers steeds moeilijker maakte om in te stappen. In mijn periode als hoogleraar aan de Radboud Universiteit heb ik dan ook steeds naar promotieonderwerpen in de algebraïsche meetkunde buiten de singulariteitentheorie gezocht, waarin wél toepassingen van singulariteitentheorie een rol speelden. Het onderzoek naar singulariteiten sec deed ik grotendeels in samenwerking met ervaren onderzoekers als Andras Némethi en Wolfgang Ebeling. Met deze laatste slaagde ik erin het begrip singulariteitspectrum voor een veel bredere klasse van singulariteiten te definiëren, met behoud van de symmetrie-eigenschap en de semicontinuiteit. Hierbij maakten wij gebruik van Saito's theorie.

Ook werkte ik samen met Chris Peters, die me als mede-auteur hielp eindelijk, na 25 jaar, het handboek *Mixed Hodge Structures* af te maken. Dat was een mooi moment om met prepensioen te gaan.

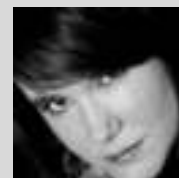


Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com



Het keerpunt van Jantine Ruinard

Onderwijs is perfect voor de tweede helft van je leven

Ze is nu wiskundelerares, maar eind jaren tachtig reisde Jantine Ruinard (47) de wereld over als fotomodel. Daarna werkte ze als boeker bij een modellenbureau. In 2005 begon het echter te kriebelen. Ze wilde iets nuttigs doen. Via haar zoon herontdekte ze haar oude liefde voor wiskunde. De tweedegraads lerarenopleiding op afstand was zwaar, maar sinds een paar jaar geeft ze met veel plezier les aan de onderbouw vmbo/havo/vwo op het Vlaardingse Groen van Prinstererlyceum.

Ruinard was op de middelbare school goed in wiskunde. Ze was zelfs het enige meisje dat natuurkunde en wiskunde II deed. Toch vroeg nooit iemand of ze al eens aan een exacte studie had gedacht: "Achteraf vind ik dat zó raar. Dat geen docent tegen me zei dat ik dat zou kunnen." Ze koos voor fysiotherapie aan de Haagse Academie voor Lichamelijke Opvoeding, het leek haar fijn om mensen te kunnen helpen.

Hoe ben je ontdekt als fotomodel?

"Een jongen uit het dorp moest voor zijn school een foto-opdracht doen en ik hielp hem door te poseren. Hij vroeg daarna of ik de foto's naar modellenbureau Intermode in Rotterdam wilde brengen. Hij hoopte dat ze hem dan wilden huren. In de vakantie ging ik met zijn afdrucken naar dat bureau, ik liep gewoon binnen zonder afspraak. Er was toen net een modellenbureau uit Milaan op bezoek. Die Italiaanse meneer sprak me aan alsof ik een model was. Hoe lang was ik? Wanneer kon ik naar Milaan komen?"

Had je er zelf aan gedacht om model te worden?

"Nee, het kwam me ook helemaal niet uit. Ik had het naar mijn zin bij fysiotherapie. Eerst dacht ik dat ik modellenwerk als bijbaan kon

doen. Maar voor ik het wist, slokte het werk me op: een show in Düsseldorf, dan weer naar Tunesië. Het was niet te combineren met mijn studie en het was ook heel spannend om mee te maken. Ik dacht dat ik op den duur wel weer verder zou gaan met fysiotherapie. Maar na een paar jaar was alles weggezakt en ik zag er enorm tegenop om alles te herhalen. Dus dat werd hem niet.

Alles kon ook altijd op het laatste moment veranderen. Dan werkte ik in Keulen en dan hoorde ik 's avonds dat ik de volgende ochtend een opdracht in Lille had. Dan moest ik maar zien hoe ik daar kwam. Soms reed ik midden in de nacht huilend door een uitgestorven industriewijk en moest ik in het Frans de weg vragen. Voordat ik dan eindelijk op mijn hotelkamer was, wilde ik wel eens dat ik gewoon thuis was. Na vijfenhalf jaar wilde ik meer regelmaat, gewoon een baan op een kantoor van negen tot zes met het weekend vrij. Een vriend was net zijn eigen bureau Max Models begonnen en vroeg me om daar boeker te worden. Zo bleef ik toch nog betrokken bij het glamourwereldje. Ik vond het contact met de klanten leuk en ook het begeleiden van beginnende modellen. Maar op een gegeven moment gaf het werk me niet meer genoeg voldoening. Dit wilde ik niet tot mijn 65ste blijven doen. Ik voelde heel erg de drang om betekenisvoller werk te gaan doen."



Jantine Ruinard op het *Libelle* kerstnummer van 1988

Dacht je toen gelijk aan onderwijs?

"Ik dacht nog even om terug te gaan naar fysiotherapie. Maar dat leek me toch geen goed idee voor het tweede deel van je werkzame leven. Het is een fysiek zwaar vak en je wordt zelf juist lichamelijk zwakker. En dan word je elke dag geconfronteerd met al die tekortkomingen, blessures en ellende die het lichaam kan overkomen. Dat leek me niet leuk. Onderwijs leek me veel vrolijker. Dat is misschien soms een beetje saai, maar ik heb vroeger genoeg spannende dingen meegemaakt. Nu gaat het meer om de inhoud, en dat is op deze leeftijd een veel interessantere uitdaging."

Waarom besloot je om juist wiskunde te gaan geven?

"Mijn zoontje was in die tijd zeven en had plezier in rekenen. Ik verzon sommen voor hem, dan vroeg ik $x - 4 = 3$, wat is x ? Ik vond dat zó leuk om te doen. Toen ben ik voorzichtig uit gaan zoeken hoe ik wiskundelerares kon worden. Een avondstudie zat er met twee jonge kinderen niet in. Ik koos voor de lerarenopleiding via afstandsleren bij Windesheim-LOI."

Hoe beviel het om wiskunde op eigen kracht te doen?

"Als mijn kinderen naar school waren, sloeg ik gelijk mijn boeken open. Als ze dan tijdens de lunchpauze ineens weer voor mijn neus stonden, duurde het even voor ik weer helemaal terug op aarde was. Ik moest bij



Jantine Ruinard voor de klas

mijn studie alles zelf doen. Als ik een docent mailde met een vraag, dan kreeg ik pas na twee dagen antwoord. In de tussentijd had ik dan al lang uitgezocht hoe het zat. Pas bij de tentamens in Leiderdorp ontmoette ik andere studenten. Daarna mailden we en overlegden we hoe je een bepaalde opgave moest aanpakken. Dat was wel een grote steun. Het was heel zwaar, 90% van de studenten viel af. Op een validatiecongres vroegen ze me later hoe dat kwam, was de opleiding misschien een beetje te moeilijk?"

En? Was hij te moeilijk?

"Ach, weet je wat die wiskundelerares dachten? Ze wisten dat de afstandsstudenten 35-plussers zijn. Die wilden ze niet diezelfde kinderachtige stof geven als die kinderen die direct van de middelbare school komen. Ze wilden het een beetje spannender maken. Maar ze vergaten dat wij al ruim twintig jaar uit de schoolwiskunde waren. Ik moest eerst mijn niveau weer terugkrijgen op waar ik ooit geëindigd was in 6 vwo. Daar was ik een paar maanden mee bezig en dan wilden de docenten gelijk een enorme sprong maken naar hbo-plus. Daarnaast leer je als je boven de veertig bent minder makkelijk even iets uit je hoofd. En die grafische rekenmachine hadden wij nooit gezien. Pfoe! Dan moest je kijken hoe dat ding in hemelsnaam werkte."

Wat verbaasde je het meeste toen je begon met lesgeven?

"Ik was gewend om te werken van negen tot zes. Op vrijdagmiddag om vier uur moest je bij Max Models nog even door. Je moest dan de boekingen voor het weekend én maandag doorgeven. Er moest dan echt een tandje bij. En toen kwam ik hier voor het eerst op school en zaten de leraren op vrijdagmiddag om twee uur te puffen dat ze nog een uur moesten. Toen vroeg ik me af wat een belachelijke ambtenarenmentaliteit dat was."

Maar nu ben ik zelf hier en merk ik hoe enorm veel energie het onderwijs kost. Als ik zes uur les moet geven, dan heb ik tussen 8.15 en 14.05 uur twee kleine pauzetjes, daarin kun je net even naar de wc. Dan ben je daarna echt moe. Tijdens de les moet je er gewoon staan, je kan geen koffie halen, niet eten, niet even iets kopiëren. Er staat een groep voor je neus en je moet zó wakker zijn en helemaal bij. Op kantoor kom je er griepiger nog wel door op de automatische piloot. Voor de klas kan dat niet, daar moet je fit zijn."

Wat vind je het leukste aan voor de klas staan?

"Als je ziet dat ze het snappen. En de humor die ze hebben, ze kunnen je ook heel goed typeren: je krijgt echt een spiegel voorgehouden. Het is natuurlijk hartstikke leuk als je bij het nakijken ziet dat iets dat je hebt uitgelegd goed gaat. Ik leer de brugklas bij het optellen van letterrekenen dat ze de gelijksoortige termen moeten omcirkelen, elke soort term met een eigen kleurtje. Als ze dat dan doen op de toets en het is allemaal goed... Vooral de meiden zijn daar zo keurig in, jongens zitten toch een beetje te krassen en friemelen. Ze kunnen dan zelf niet meer zien of iets een 9 of een γ is. Terwijl je in de onderbouw een heel eind komt als je dingen netjes opschrijft en een beetje structuur en orde hebt."

Ik wil mijn leerlingen het gevoel geven dat ze het kunnen op de repetitieweek, met alle sommen die ze geoefend hebben. Dat ze trots zijn op zichzelf, omdat ze iets kunnen. Ze moeten het leuk vinden omdat het lukt. Zelf vond ik dat bij wiskunde vroeger altijd heel fijn. Bij Frans kon je wel twee uur bezig zijn voor je die woordjes uit je hoofd kende. Bij wiskunde maakte je vijf opgaven, die kwamen uit en dan was je klaar. Dat is toch heerlijk? Bij de andere vakken is dat veel minder duidelijk."

Wil je tot je 65ste voor de klas blijven?

"Ja! Er zijn nog zoveel mogelijkheden hier. Volgend jaar ga ik ook in het Engels lesgeven. Dat is natuurlijk ook wel een uitdaging. Ik ben net drie jaar bezig, maar word ontiegelijk gestimuleerd om cursussen te doen. Je wordt constant achter je broek gezeten. Maar ik ben pas net een beetje bijgekomen van die studie." 

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar ionica.smeets@gmail.com.

Johan Jeuring

Faculteit Informatica en Departement Informatica
Open Universiteit Universiteit Utrecht
Postbus 2960 Postbus 80.089
6401 DL Heerlen 3508 TB Utrecht
J.T.Jeuring@uu.nl

Bastiaan Heeren

Faculteit Informatica
Open Universiteit
Postbus 2960
6401 DL Heerlen
Bastiaan.Heeren@ou.nl

Onderwijs

Feedback genereren in leeromgevingen voor algebra

Het gebruik van leeromgevingen bij het wiskundeonderwijs in algebra is de afgelopen jaren toegenomen. Het geven van feedback, bijvoorbeeld door een diagnose van een stap die een leerling heeft gezet te stellen, een hint te geven, of een volledige uitwerking van een opgave te geven, is binnen veel van deze omgevingen niet mogelijk, of zeer arbeidsintensief om te specificeren. In dit artikel presenteren Johan Jeuring en Bastiaan Heeren het IDEAS-raamwerk, waarmee leeromgevingen automatisch feedback kunnen geven. Voor het geven van feedback wordt gebruik gemaakt van fundamentele concepten uit de wiskunde en informatica, zoals herschrijfstappen, views of normaalvormen en herschrijfstrategieën. Door het probleem van het geven van feedback te transformeren naar het ontleden van gebruikersstappen aan de hand van een herschrijfstrategie, wordt gebruik gemaakt van kennis over ontleden om automatisch feedback te geven.

Het gebruik van leeromgevingen bij het wiskundeonderwijs in algebra is de afgelopen jaren toegenomen. De methodes *Getal & Ruimte* en *Moderne Wiskunde* maken gebruik van de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) van het Freudenthal Instituut [5], MathDox [3] wordt gebruikt in de eerstejaars wiskundevakken en bij de aansluitingsvakken voor de masterprogramma's op de technische universiteiten, en de Open Universiteit en verschillende andere Europese universiteiten maken gebruik van Math-Bridge [9]. Deze drie leeromgevingen worden zowel in het voortgezet onderwijs als in het hoger onderwijs gebruikt en bieden theorie, voorbeelden, interactieve opgaven en toetsen aan. In gedrukte vorm zou de inhoud van deze leeromgevingen duizenden pagina's beslaan.

Elektronische leeromgevingen bieden een leerling de mogelijkheid om onderwijsmateriaal te selecteren dat bij hem of haar past, en om zelfstandig te oefenen met wiskundeopgaven, op een willekeurig tijdstip. Leeromgevingen kunnen direct feedback geven op het werk van leerlingen, en hun vorderingen bijhouden. Hoewel het niet eenvoudig is om leeromgevingen en de feedback die zij geven zo op te zetten dat het leren wordt bevorderd, is er door de jaren heen het nodige bewijs

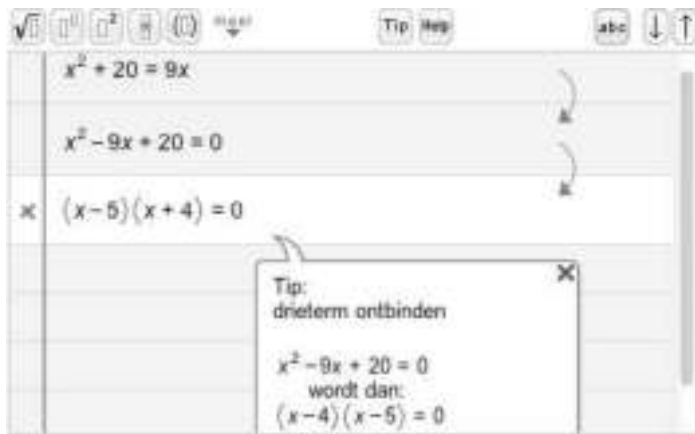
geleverd dat leeromgevingen het leren van algebra effectief ondersteunen [4].

Alle bovengenoemde wiskundeleeromgevingen bieden opgaven aan waarin een leerling een expressie met variabelen, breuken, haakjes en/of polynomen moet vereenvoudigen, of een lineaire, kwadratische, wortel, logaritmische, exponentiële, gebroken of polynomiale (on)gelijkheid op moet lossen. Zeker op het niveau van het voortgezet onderwijs zijn deze opgaven relatief eenvoudig: er bestaan beslissingsprocedures waarmee de opgaven opgelost kunnen worden. Een oplossing vergt meestal slechts een aantal stappen en het aantal verschillende manieren om een opgave op te lossen is vaak beperkt. Hoewel het aantal manieren om dit soort opgaven op te lossen beperkt is, zijn er toch nog talloze mogelijkheden om verschillende oplossingen te construeren, mede door allerlei vereenvoudigen expliciet of impliciet of in een andere volgorde uit te voeren. In een experiment onder negen docenten kregen we zeven verschillende uitwerkingen voor het oplossen van de lineaire vergelijking $3(4x - 1) + 3 = 7x - 14$.

Mede door de variatie in volgorde en vereenvoudigingen is het geven van goede feedback in een leeromgeving een lastig probleem. De drie hierboven genoemde leerom-

gevingen gaven tot voor kort alleen goed/fout feedback, of vereisten de volledige specificatie van welke feedback waar en wanneer moet worden gegeven in een opgave. Het geven van goed/fout feedback helpt leerlingen bij het oplossen van opgaven, maar vertelt bij een fout niet *wat* er fout is of wat een goede volgende stap is. Voor het expliciet beschrijven van feedback in een opgave die een leerling in meerdere stappen oplost, zijn in deze leeromgevingen tientallen tot honderden regels code nodig. Gegeven dat de leeromgevingen duizenden opgaven aanbieden, betekent dit dat er alleen al voor de feedback honderdduizenden regels code nodig zijn. Niet alleen vergt het ontwikkelen van opgaven dan zeer veel werk, het wijzigen en verbeteren van opgaven wordt nagenoeg onmogelijk, omdat iedere verbetering op tientallen tot honderden verschillende plaatsen uitgevoerd moet worden.

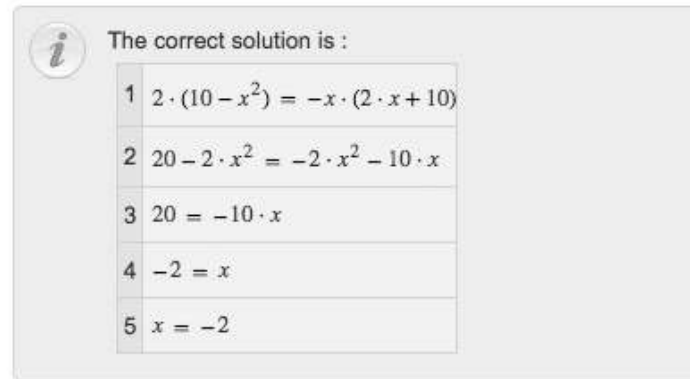
De afgelopen vijf jaar hebben we het IDEAS-raamwerk voor het geven van feedback in leeromgevingen ontwikkeld [7] (<http://ideas.cs.uu.nl>). De bovenstaande leeromgevingen gebruiken het IDEAS-raamwerk om feedback te geven aan een leerling die een opgave in meerdere stappen oplost. In Figuur 1 staat een voorbeeld van het gebruik van het IDEAS-raamwerk in de DWO. Een leerling kan op ieder punt in de opgave vragen om een 'Tip', 'drieterm ontbinden' in dit voorbeeld, of om 'Help', ' $x^2 - 9x + 20 = 0$ wordt dan: $(x - 4)(x - 5) = 0$ ' in dit voorbeeld. De tips en de help worden automatisch berekend uit de strategie voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. De docent hoeft alleen maar de opgave te specificeren en aan te geven dat de opgave opgelost moet worden met behulp van de strategie voor kwadratische vergelijkingen. Alle tips en help worden dan automa-



Figuur 1 Gebruik van IDEAS-raamwerk in de DWO

Solving quadratic equations

Solve the quadratic equation $4 \cdot (10 - x^2) = -2 \cdot x \cdot (2 \cdot x + 10)$



Figuur 2 Gebruik van IDEAS-raamwerk in Math-Bridge

tisch berekend wanneer de leerling daar om vraagt.

In Figuur 2 staat een voorbeeld van het gebruik van het IDEAS-raamwerk in Math-Bridge. Ook de uitwerking wordt automatisch berekend uit de strategie voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Math-Bridge kan voor veel opgaven voorbeelduitwerkingen laten zien.

In dit artikel beschrijven we hoe leeromgevingen gebruik maken van het IDEAS-raamwerk, en hoe het IDEAS-raamwerk feedback geeft. We zullen met name de achterliggende concepten van het IDEAS-raamwerk introduceren. We beginnen met een aantal voorbeelden van interacties van leerlingen met een leeromgeving. Daarna beschrijven we hoe leeromgevingen gebruik maken van het IDEAS-raamwerk en welke *services* het raamwerk aanbiedt. We beschrijven de eisen die we stellen aan onze *domain reasoners*, de centrale componenten in ons raamwerk, en introduceren herschrijffregels voor het beschrijven van de stappen die een leerling kan uitvoeren. Vervolgens kunt u lezen hoe we omgaan met vereenvoudigingsstappen die een leerling impliciet of expliciet uitvoert en hoe we de verschillende componenten voor het oplossen van een opgave combineren in een strategie. Tot slot beschrijven we hoe andere leeromgevingen het probleem van het geven van feedback oplossen en geven we onze conclusies.

Interacties in leeromgevingen

In deze paragraaf geven we een aantal voorbeelden van interacties in een leeromgeving zoals de DWO. We relateren de voorbeelden aan de concepten die we later zullen bespreken.

Een leerling lost de lineaire vergelijking

$6x - 2 = 2x + 14$ op. Als de leerling niet weet hoe zij een lineaire vergelijking op moet lossen kan ze om een uitwerking vragen. Ze krijgt dan:

$$\begin{aligned} 6x - 2 &= 2x + 14 \\ \Rightarrow \{ \text{trek } 2x \text{ van beide zijden af} \} \\ 4x - 2 &= 14 \\ \Rightarrow \{ \text{tel } 2 \text{ bij beide zijden op} \} \\ 4x &= 16 \\ \Rightarrow \{ \text{deel beide zijden door } 4 \} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Deze uitwerking, die bestaat uit het toepassen van een drietal regels in een bepaalde volgorde, wordt berekend uit de *strategie* voor lineaire vergelijkingen, zie de paragraaf 'Strategieën' verderop.

Als een leerling niet een hele uitwerking wil zien, maar wel wil weten wat de volgende stap is, dan kan ze om een hint vragen. Ook de hint wordt uit de strategie berekend en bestaat uit een enkele regel. Stel bijvoorbeeld dat de leerling de opgave heeft herschreven naar $6x - 2x = 14 + 2$, dan is de hint: combi-neer gelijkvormige termen.

In een leeromgeving willen we ook stappen van leerlingen analyseren. Als een leerling een stap maakt die de strategie verwacht, dan wordt dit gerapporteerd. Veelvoorkomende fouten worden ook gerapporteerd, maar kunnen uiteraard niet uit een strategie worden berekend, omdat een strategie alleen maar goede oplossingen berekent. Iedere strategie is voorzien van een verzameling regels die veelvoorkomende fouten representeren. Deze regels worden geprobeerd als een leerling een fout maakt. Als de leerling in de eerste stap $6x - 2 = 2x + 14$ herschrijft naar $8x - 2 = 14$,

dan reageert de leeromgeving met: je hebt rechts $2x$ afgetrokken en links $2x$ bijgeteld. Regels en buggy regels (veelvoorkomende fouten) komen verderop in de paragraaf 'Herschrijffregels' aan bod.

We laten niet alle regels die worden toegepast om een vergelijking op te lossen zien. In de bovenstaande uitwerking hebben we bijvoorbeeld de stappen

$$\begin{aligned} 4x - 2 &= 14 \\ \Rightarrow \{ \text{tel } 2 \text{ bij beide zijden op} \} \\ 4x - 2 + 2 &= 14 + 2 \\ \Rightarrow \{ \text{optellen van constanten} \} \\ 4x + 0 &= 14 + 2 \\ \Rightarrow \{ 0 \text{ is neutraal element van } + \} \\ 4x &= 14 + 2 \\ \Rightarrow \{ \text{optellen van constanten} \} \\ 4x &= 16 \end{aligned}$$

als één stap laten zien. In een strategie configureren we welke stappen we wel en niet laten zien met behulp van zogenaamde *views*, zie verderop. Hoewel we bovenstaande tussenstappen niet willen laten zien, mag een leerling die stappen uiteraard wel maken. Het effect van een *view* is dus afhankelijk van of we een stap laten zien of willen herkennen in het werk van een leerling.

Feedbackservices

Het IDEAS-raamwerk levert feedbackservices aan externe leeromgevingen. Het raamwerk bestaat uit een collectie van zogenaamde *webservices*. Een leeromgeving stuurt een *request* naar het raamwerk, waarin het bijvoorbeeld vraagt om een *hint*, een *diagnose* of een *uitwerking*. Bijvoorbeeld:

- Geef een *hint* voor de vergelijking $x^2 - 9x + 20 = 0$ die opgelost moet worden met de strategie voor kwadratische vergelijkingen. De *hint*-service geeft dan als antwoord: gebruik de regel nice-factors van de algebra.equations.quadratic opgaven. De DWO vertaalt deze regel naar tekst in 'drieterm ontbinden'.
- Geef een *diagnose* van de vergelijking $4x = 16$ gegeven de vorige vergelijking $6x = 16 - 2x$, en dat de strategie voor het oplossen van lineaire vergelijkingen met de balans-methode wordt gebruikt. De *diagnose*-service geeft de buggy regel buggy.addbal10 van de algebra.equations.linear.balance opgaven terug, die de DWO vertaalt naar 'Je telt er rechts $2x$ bij op, maar links trek je $2x$ er vanaf'.
- Geef een *uitwerking* van de opgave $4(10 - x^2) = -2x(2x+10)$ die opgelost moet worden met de strategie voor kwadratische vergelijkingen. De *derivation*-service geeft als resultaat de lijst van vergelijkingen die gepresenteerd wordt in de screenshot van de Math-Bridge omgeving.

Naast *hint*, *diagnose* en *uitwerking* biedt het IDEAS-raamwerk nog een tiental services aan, variërend van *klaar* om te bepalen of een opgave opgelost is, tot *voorbeelden*, waarmee tientallen voorbeelden van de verschillende soorten opgaven worden verkregen.

Domain reasoners

Een *domain reasoner* genereert hints en uitwerkingen en analyseert stappen van leerlingen voor een specifiek domein. We hebben *domain reasoners* voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen, lineaire vergelijkingen, et cetera. *Domain reasoners* zijn de centrale componenten in ons raamwerk. Een *domain reasoner* moet aan een aantal eisen voldoen.

Een *domain reasoner* kan automatisch hints en uitwerkingen genereren en automatisch stappen van een leerling analyseren. Ze lost een opgave op op de manier zoals de docent of het leerboek beschrijft (het *cognitive fidelity* principe [1]). De componenten waaruit een *domain reasoner* bestaat zijn observeerbaar, aanpasbaar en kunnen gebruikt worden in samenstellingen. Zo kunnen we bijvoorbeeld de strategie voor het oplossen van lineaire vergelijkingen hergebruiken in de strategie voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Een *domain reasoner* maakt zoveel als mogelijk gebruik van generieke componenten, die voor verschillende soorten opgaven hergebruikt kunnen worden.

De belangrijkste onderdelen van een *domain reasoner* zijn: herschrijfstrategieën voor het beschrijven van hoe termen herschreven kunnen worden naar een oplossing, herschrijfregels die eenvoudige transformatiestappen op termen beschrijven, en views en canonieke vormen die specifieke vormen van termen herkennen en het automatisch vereenvoudigen van termen ondersteunen. In de volgende paragrafen zullen we ieder van deze drie componenten nader beschouwen.

Herschrijfregels

Een leerling lost een opgave op door het toepassen van herschrijfregels. Een mogelijke oplossing voor de lineaire vergelijking $3(4x - 1) + 3 = 7x - 14$ is:

$$\begin{aligned} 3(4x - 1) + 3 &= 7x - 14 \\ \Rightarrow \{\text{distr-times}\} \\ 12x &= 7x - 14 \\ \Rightarrow \{\text{var-left met parameter } 7x\} \\ 5x &= -14 \\ \Rightarrow \{\text{times met parameter } \frac{1}{5}\} \\ x &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

In deze oplossing worden drie herschrijfregels gebruikt: *distr-times*, *vermenigvuldigen distribueert over optellen* (of 'haakjes uitwerken', zoals de DWO deze regel beschrijft),

$$a(b + c) \Rightarrow ab + ac;$$

het aftrekken van een expressie aan beide zijden van een gelijkheid met als doel de expressies met variabelen naar links te brengen, *var-left*; en het delen door een expressie aan beide zijden van een gelijkheid. De laatste twee regels nemen de expressie die afgetrokken of gedeeld moet worden als argument.

Een *domain reasoner* kan een regel *toepassen* op een (sub)expressie, als in $3(4x - 1) \Rightarrow 12x - 3$, om een *hint* of een *uitwerking* te geven. Ook kan een *domain reasoner* een expressie van een leerling analyseren om te bepalen of en welke regel door een leerling is toegepast. Bijvoorbeeld, is de expressie $12x - 3$ te verkrijgen uit de vorige expressie $3(4x - 1)$ door het toepassen van een regel? De *domain reasoner* past dan alle toegestane regels toe op de vorige expressie, en bepaalt of een van de resultaten overeenkomt met de expressie die een leerling heeft ingevoerd.

Sommige regels verwachten een parame-

ter, zoals de regel *times* in het bovenstaande voorbeeld:

$$\forall c: a = b \Rightarrow ac = bc \quad (\text{mits } c \neq 0).$$

Strikt genomen zijn dit soort regels geen herschrijfregels. Een *domain reasoner* kan zo'n regel alleen maar toepassen als er ergens een specifieke parameter c beschikbaar is, waarmee de regel geïntanceerd kan worden. Vaak kunnen we voor zo'n regel een functie schrijven die een expressie van een leerling analyseert om te bepalen of een regel die gebruikt wordt van een parameter is toegepast.

Een speciale categorie regels vormen de *buggy regels*. Deze regels beschrijven veel voorkomende fouten in oplossingen van leerlingen. Voorbeelden van buggy regels zijn:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &\neq a^2 + b^2, \\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &\neq \frac{a+c}{b+d}, \\ \forall c: a = b &\neq a + c = b - c. \end{aligned}$$

Iedere klasse van opgaven heeft een verzameling buggy regels die bij het oplossen van de opgave mogelijk door een leerling gebruikt worden. Wanneer de *domain reasoner* een stap van een leerling niet kan verklaren met behulp van een toegestane regel, worden de buggy regels geprobeerd. Als blijkt dat inderdaad een buggy regel is toegepast, dan wordt deze regel gerapporteerd. Het bepalen van wat een buggy regel is, is niet altijd eenvoudig. Bijvoorbeeld, het is mogelijk om honderden buggy regels te verzinnen alleen al voor opgaven over breuken [8]. In onze *domain reasoners* hebben we ervoor gekozen om buggy regels door docenten in te laten brengen.

Sommige stappen die een leerling moet zetten hebben geen visueel resultaat. Bijvoorbeeld, bij het oplossen van een kwadratische gelijkheid die mooie factoren heeft, zoals $x^2 + x - 6 = 0$, moet een leerling eerst de factoren bepalen en daarna de expressie factoriseren. Hier is sprake van twee regels: het bepalen van de factoren van een kwadratische expressie en het factoriseren met behulp van de gevonden factoren. Een ander voorbeeld van stappen zonder visueel effect zijn de stappen die een *domain reasoner* intern gebruikt om door een expressieboom te lopen, om herschrijfregels op een bepaalde plaats toe te passen. Zo wordt in het voorbeeld van de kwadratische vergelijking de expressie links van het gelijkteken gefactoriseerd; de expressie rechts wordt ongemoeid gelaten. Het doorlopen van de ex-

pressieboom wordt ook met behulp van regels beschreven. Herschrijfgeregels zonder visueel effect noemen we *minor* regels. Minor regels spelen een belangrijke rol bij het implementeren van ‘gestalt view’ [2] gerelateerde regels waarin een leerling een expressie moet analyseren om te bepalen of de expressie aan een voorwaarde voldoet en gebaseerd op die analyse de volgende stap zet.

Views

Binnen de wiskunde zijn er een aantal conventies bij het tonen van afleidingsstappen en expressies aan leerlingen. In deze paragraaf beschrijven we hoe we daar mee omgaan en welke concepten we daarvoor gebruiken.

In de vorige paragraaf wordt een afleiding voor een oplossing van een lineaire vergelijking gegeven. Daarin komt onder andere de stap $3(4x - 1) + 3 = 7x - 14 \Rightarrow 12x = 7x - 14$ voor, die *distr-times* wordt genoemd. Maar wat gebeurt er eigenlijk in detail aan de linkerkant van de gelijkheid in deze regel?

$$\begin{aligned} & 3(4x - 1) + 3 \\ \Rightarrow & \{ \text{definitie van } - \} \\ & 3(4x + (-1)) + 3 \\ \Rightarrow & \{ \text{distr-times} \} \\ & (3 \cdot 4x + 3 \cdot (-1)) + 3 \\ \Rightarrow & \{ \text{associativiteit van } \cdot \} \\ & ((3 \cdot 4)x + 3 \cdot (-1)) + 3 \\ \Rightarrow & \{ \text{vermenigvuldigen van constanten} \} \\ & (12x + 3 \cdot (-1)) + 3 \\ \Rightarrow & \{ \text{vermenigvuldigen van constanten} \} \\ & (12x + (-3)) + 3 \\ \Rightarrow & \{ \text{associativiteit van } + \} \\ & 12x + ((-3) + 3) \\ \Rightarrow & \{ \text{optellen van constanten} \} \\ & 12x + 0 \\ \Rightarrow & \{ 0 \text{ is neutraal element van } + \} \\ & 12x \end{aligned}$$

Deze stap is dus niet een enkele herschrijfgregel, maar bestaat uit een serie van bijna tien herschrijfgeregels! Een leerling mag in plaats van een enkele herschrijfstap één of meerdere van de bovenstaande tussenstappen gebruiken, maar we willen dat onze *domain reasoner* de tussenstappen niet laat zien als de leerling om een *hint* of een *uitwerking* vraagt. Deze granulariteit in herschrijfstappen kan overigens verschillen voor verschillende leerlingen. Het ligt voor de hand dat gevor-

derde leerlingen minder tussenstappen zetten dan beginnende leerlingen die voor het eerst met een specifieke categorie opgaven oefenen.

Bij het tonen van expressies aan leerlingen willen we graag veelgebruikte, *canonieke*, vormen gebruiken. Zo willen we liever $a - b$ dan $a + (-b)$ laten zien, en schrijven we $x + 0$ liever direct als x . Ook dit is weer afhankelijk van het niveau van de leerlingen.

Tenslotte komen we een vergelijkbaar probleem tegen bij het beschrijven van de herschrijfgeregels die leerlingen mogen toepassen. We definiëren de regel

$$a(b + c) \Rightarrow ab + ac$$

maar we willen liever niet ook de regels:

$$\begin{aligned} a(b - c) &\Rightarrow ab - ac, \\ -a(b + c) &\Rightarrow -ab - ac \end{aligned}$$

en andere varianten definiëren.

Voor het berekenen van canonieke vormen, voor het bepalen van de granulariteit van regels, en voor het beperken van het aantal herschrijfgeregels dat we moeten definiëren gebruiken we zogenaamde *views* [6]. Een *view* bestaat uit twee onderdelen: een *match*-functie die een waarde van het domein als argument neemt, en een waarde in het codomein oplevert, en een *build*-functie die weer terug gaat naar het domein vanuit het codomein. De compositie van de twee functies, *build* $\circ$ *match*, geeft een canonieke vorm. Bijvoorbeeld, de *plusView* neemt een expressie als argument, en probeert de expressie als de som van twee expressies te schrijven. De *plusView* herkent dus voorkomens van $+$ op topniveau in een expressie, of probeert die te creëren:

$$\begin{aligned} \text{match plusView } (a - b) &\Rightarrow a + (-b), \\ \text{match plusView } -(a + b) &\Rightarrow -a + (-b). \end{aligned}$$

De *build*-functie van de *plusView* voert de inverse acties uit op deze termen. Hieronder staat een voorbeeld van hoe we gebruik maken van *views* in onze afleidingen:

$$\begin{aligned} & 3(4x - 1) \\ \Rightarrow & \{ \text{match plusView op } 4x - 1 \} \\ & 3(4x + (-1)) \\ \Rightarrow & \{ \text{distr-times} \} \\ & 3 \cdot 4x + 3 \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \{ \text{vermenigvuldigen van constanten} \} \\ & 12x + (-3) \\ \Rightarrow & \{ \text{build plusView op } 12x + (-3) \} \\ & 12x - 3 \end{aligned}$$

Veel herschrijfgeregels maken gebruik van verschillende *views* om de linkerkant van de regel te matchen, en om de expressie verkregen na toepassing van de regel vervolgens op te schonen. *Views* en geparametriseerde regels lossen het probleem van het expliciet maken van alle herschrijfgeregels in een oplossing van een opgave op.

Strategieën

Een herschrijfstrategie beschrijft hoe een term herschreven kan worden naar een oplossing. De beginterm is de opgave die de leerling voorgeschoteld krijgt, en de oplossing is de uitdrukking die als antwoord wordt verwacht. We illustreren het concept van herschrijfstrategieën met een aantal strategieën voor het oplossen van een kwadratische vergelijking. De beginterm van een opgave waarin een leerling een kwadratische vergelijking op moet lossen is een vergelijking waarin mogelijk aan beide zijden kwadratische expressies voorkomen. Een oplossing bestaat uit twee of minder lineaire vergelijkingen van de vorm $x = c$, waar c staat voor een willekeurige constante.

Een naïeve strategie voor het oplossen van een kwadratische vergelijking staat het toepassen van willekeurige herschrijfstappen op expressies en vergelijkingen toe totdat de vergelijking van de goede vorm is. Zo’n strategie keurt elke correcte herschrijfstap goed, zelfs al brengt de stap een leerling verder van een goede oplossing. Als een leerling om een *hint* vraagt, dan zullen er in het algemeen veel stappen mogelijk zijn in deze strategie. Als er meerdere stappen mogelijk zijn raadpleegt de *hint-service* een *ordering* op regels die voor een opgave wordt gespecificeerd. Het is echter zo goed als onmogelijk een *ordering* te specificeren die ervoor zorgt dat de gegeven hints niet al te vreemd zijn. Een naïeve strategie biedt weinig ondersteuning aan een leerling om het doel op de gewenste manier te bereiken.

Een meer algoritmische strategie voor het oplossen van een kwadratische vergelijking bestaat uit het eerst herschrijven van de vergelijking naar de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, en dan het toepassen van de *abc*-formule. Deze strategie biedt meer ondersteuning voor het bereiken van een oplossing. De meeste wiskundedocenten verwachten echter meer

```

quadraticStrategyG =
  label "Quadratic Equation Strategy" $ repeat5 $
  -- Relaxed strategy: even if there are "nice" factors,
  -- allow use of quadratic formula
  somewhere (generalForm <|> generalABCForm)
  > somewhere zeroForm
  > somewhere constantForm
  > simplifyForm
  > topForm
  where
    -- as2 + bx + c ==> 0, without quadratic formula
    generalForm = label "general form" --
    generalABCForm = --
  ...

```

Figuur 3

van hun leerlingen: een leerling moet bijvoorbeeld ook een kwadratische vergelijking op kunnen lossen door een term met mooie factoren te factoriseren en de zo verkregen lineaire vergelijkingen op te lossen.

De 'expert'-strategie voor het oplossen van een kwadratische vergelijking bestaat uit de volgende stappen:

1. Analyseer de vorm van de vergelijking.
2. Herschrijf zo mogelijk de vergelijking in een mooie vorm.
3. Gebruik de volgende substrategie, afhankelijk van de vorm van de vergelijking:
 - a. Als er geen lineaire term is: neem de vierkantswortel.
 - b. Als er geen constante term is: factoriseer en los de lineaire vergelijkingen op.
 - c. Als er mooie factoren zijn: factoriseer en los de lineaire vergelijkingen op.
 - d. Gebruik in alle andere gevallen de *abc*-formule.

Een *domain reasoner* die gebruik maakt van deze strategie kan precies aangeven wat de goede volgende stap is, op een manier die gebruikelijk is in de Nederlandse schoolboeken. Ook de *uitwerkingen* die door de *domain reasoner* worden gegenereerd zullen in het algemeen goedgekeurd worden door Nederlandse wiskundedocenten.

Voor het beschrijven van een strategie hebben we een *strategietaal* ontwikkeld. Onze strategietaal bevat verschillende componenten die nodig zijn om het soort strategieën die hierboven staan te specificeren. Dit zijn:

- *Pas een herschrijffregel toe*, zoals vermenigvuldigen distribueert over optellen.
- *Sequentie*. 'Eerst *s* dan *t*' schrijven we als $s <*> t$.
- *Keuze*. 'Gebruik *s* of *t*' schrijven we als $s <|> t$. Een variant van keuze heeft voorkeur voor het toepassen van het eerste argument: $s |> t$ past *s* toe indien mogelijk, en anders *t*.
- *Slaag of faal*. De strategieën *succeed* en *fail* zijn de neutrale elementen van respectievelijk sequentie en keuze.
- *Labels*. We gebruiken labels om posities aan te geven in een strategie. Aan zo'n positie kunnen we een specifieke feedbacktekst koppelen.
- *Recursie*. We gebruiken *fix* voor herhaling, bijvoorbeeld bij het toepassen van stappen totdat geen stap meer mogelijk is.

De algoritmische strategie voor het oplossen van een kwadratische vergelijking wordt bijvoorbeeld gespecificeerd door: *rightzzero <*> abc*, waarin *rightzzero* de strategie is voor het herschrijven van een vergelijking zodat de rechterterm gelijk is aan 0 en *abc* de regel is die de *abc*-formule implementeert. Figuur 3 laat een fragment van de strategie voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen zien die in gebruik is in de bijbehorende *domain reasoner*. De magercursieve onderdelen zijn componenten van de strategietaal.

Een *domain reasoner* gebruikt een herschrijfstrategie voor het volgen van een oplossing van een leerling en voor het geven van *hints* en *uitwerkingen*. De strategie beschrijft welke sequenties van herschrijffregels zijn toegestaan. We beschouwen een strate-

gie als een contextvrije grammatica, en ontleenden de sequentie van herschrijfstappen van een leerling om te controleren of de stappen de strategie volgen. Een *hint* is het eerste symbool (een herschrijffregel) dat is toegestaan volgens de strategie. Een *uitwerking* bestaat uit een correcte zin van de grammatica. Een opgave is *klaar* als de strategie de lege zin accepteert. Op deze manier geven we feedback met behulp van functionaliteit voor ontleden.

Conclusies

Het automatisch geven van feedback en hints in een leeromgeving voor algebra is een uitdagend probleem, dat slechts door weinig leeromgevingen wordt opgelost. Sinds een paar jaar hebben we het IDEAS-raamwerk ontwikkeld, waarmee *hints*, *uitwerkingen* en *diagnoses* gegeven kunnen worden. Verschillende leeromgevingen maken nu gebruik van het raamwerk.

Voor het bieden van feedback-services beschrijft het raamwerk wiskundige kennis met behulp van herschrijffregels voor het uitvoeren van eenvoudige herschrijfstappen, views voor het beschrijven van wiskundige normaalvormen en het automatisch uitvoeren van vereenvoudigingen, en herschrijfstrategieën voor het beschrijven hoe een opgave opgelost wordt. Dit artikel introduceert en illustreert deze concepten.

Er zijn een aantal andere leeromgevingen die het probleem van het geven van feedback (gedeeltelijk) oplossen, zoals de Cognitive Tutor van Carnegie Learning. Onze aanpak verschilt van andere leeromgevingen door de expliciete beschrijving van de wiskundige concepten, zodanig dat deze beschrijvingen observeerbaar, herbruikbaar en aanpasbaar worden. In de toekomst hopen wij experimenten met docenten uit te voeren waarin we docenten feedback laten aanpassen.

Referenties

- 1 M.J. Beeson, Design principles of MathPert: Software to support education in algebra and calculus, in N. Kajler, ed., *Computer-Human Interaction in Symbolic Computation*, Springer, 1998, pp. 89–115.
- 2 C. Bokhove, Use of ICT for acquiring, practicing and assessing algebraic expertise, PhD thesis, Utrecht University, 2011.
- 3 A. Cohen, H. Cuypers, E. Reinaldo Barreiro en H. Sterk, Interactive mathematical documents on the web, in *Algebra, Geometry and Software Systems*, Springer, 2003, pp. 289–306.
- 4 A.T. Corbett, K.R. Koedinger en J.R. Anderson, Intelligent Tutoring Systems, in M. Helander, T. K. Landauer, P. Prabhu (eds), *Handbook of Human-Computer Interaction, Second, Completely Revised Edition*, Chapter 37, Elsevier Science, 1997, pp. 849–874.
- 5 M. Doorman, P. Drijvers, P. Boon, S. van Gisbergen en K. Gravemeijer, Design and implementation of a computer supported learning environment for mathematics, in *Earli 2009 SIG20 invited Symposium Issues in designing and implementing computer supported inquiry learning environments*, 2009.
- 6 B. Heeren en J. Jeuring, Canonical forms in interactive exercise assistants, in *MKM'09*, Vol. 5625 of *LNCS*, Springer, 2009, pp. 325–340.
- 7 B. Heeren, J. Jeuring en A. Gerdes, Specifying rewrite strategies for interactive exercises, *Mathematics in Computer Science* 3(3), 2010, pp. 349–370.
- 8 M. Hennecke, *Online Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen (in German)*, PhD thesis, Hildesheim University, 1999, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 10, Informatik / Kommunikationstechnik; 605, Düsseldorf: VDI-Verlag.
- 9 E. Melis en J. Siekmann, ActiveMath: An intelligent tutoring system for mathematics, in *ICAISC*, Vol. 3070 of *LNCS*, Springer, 2004, pp. 91–101.

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

Boekbespreking Alexander Masters: *Simon, The Genius in my Basement*

Het gapende genie

Wiskundigen zijn raar, kijken je niet aan, maken gigantische rekensommen, hebben allemaal brillen — autisten toch? Nieuw is dat dit nu ook in de populaire romancultuur is opgepikt. Of is het allemaal niet zo voor de hand liggend als het lijkt? Een soort biografie van een van 's werelds meest beroemde levende groepentheoretici zet aan het denken. Gunther Cornelissen, redacteur van dit blad, bespreekt het boek.

In *The Genius in my Basement* beschrijft Alexander Masters zijn onderbuur, die tegelijk ook zijn huisbaas is: een raar mannetje dat z'n haar niet kamt, altijd in hetzelfde soort T-shirt rondloopt, alleen voorgekookte rijst met ingeblikte makreel eet (*behalve* in tomatensaus, *bah!*), en altijd een amorse zwarte tas vol kaarten en busdienstregelingen met zich meedraagt. Het is Simon Norton, briljant wiskundige, medeauteur van de *Atlas of finite groups*, medeontdekker van de sporadische enkelvoudige groep F_5 (met 273030912000000 elementen) en mede-opsteller van het *Monstrous Moonshine*-vermoeden, dat een verband geeft tussen de representatietheorie van de monstergroep en modulaire functies. Dit vermoeden werd een aantal jaren later door Richard Borcherds opgelost met methoden uit de mathematische fysica. Hij kreeg onder andere hiervoor de Fields-medaille (zie kader).

Een gekelderd genie

The Genius in my Basement is een stilistisch interessant, ietwat vreemd vormgegeven boek. De auteur wisselt tekst en zelfgemaakte tekeningen en foto's af. In een paar hoofdstukken probeert hij door het tekenen van vermenigvuldigingstabellen uit te leggen wat een groep en een ondergroep is. Vooral interessant is de beschrijving van het leven van Norton: van zijn jeugdijaren, via zijn bezoldigde aanstelling als wiskundige in Cambridge, tot zijn huidige leven als openbaarvervoersactivist, huisbaas en onbezoldigd wiskundige.

Simon Norton is een jeugdig genie. Toen hij nog geen vier was, kon hij getallen met tien-

tallen cijfers vermenigvuldigen; prompt daarna breuken vereenvoudigen, en als Etonian won hij op de leeftijd van vijftien jaar alle wiskunde-olympiades. Zijn uitzonderlijke capaciteiten beperken zich trouwens niet tot wiskunde: hij beheerst bijvoorbeeld Engelse linguïstiek tot in de fijnste details (en heeft er ook regelmatig over gepubliceerd). Tijdens

Monsterlijke Maneschijn

Het *Monster* M is de grootste sporadische enkelvoudige groep, met ongeveer $8 \cdot 10^{53}$ elementen, voor het eerste geconstrueerd door Robert Griess in 1982, als automorfismengroep van een 196884-dimensionale algebra. John McKay merkte toen op dat die dimensie ook een coëfficiënt is in de Fourierontwikkeling van een modulaire functie, de j -invariant $j = 1/q + 744 + 196884q + \dots$, met $q = \exp(2\pi iz)$ en $\Im(z) > 0$ (bekend uit de theorie van moduli van elliptische krommen). Alle coëfficiënten van j blijken eenvoudige lineaire combinaties van dimensies van irreducibele voorstellingen van M . Nader onderzoek door John Conway en Simon Norton leidde tot het zogenaamde *Monstrous Moonshine* vermoeden, namelijk: er is een oneindig-dimen-

sionaal gegradeerd M -moduul $\bigoplus_{n \geq 0} V_n$, zodat $j - 744 = q^{-1} \sum_{n \geq 0} \dim(V_n) q^n$; en zelfs zodat voor ieder element $\gamma \in M$ de reeks $q^{-1} \sum_{n \geq 0} \text{Tr}(\gamma|V_n) q^n$ een voortbrenger is van het functioneellichaam van een modulaire kromme van geslacht nul. Het geval j correspondeert met $\gamma = 1 \in M$ en de modulaire kromme $X(1)$ voor de modulaire groep $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Het vermoeden werd in 1992 bewezen door Richard Borcherds, die hiervoor in 1998 de Fields-medaille won, door onder andere gebruik te maken van de theorie van vertex-operatoren-algebra's en veralgemeniseerde Kac-Moody-algebra's, plus de *geen-geest*-stelling: allemaal onverwachte hulpmiddelen afkomstig uit de mathematische fysica. Voor meer informatie, zie bijvoorbeeld [2].



Al die willen aan 't monster werken, moeten mannen met baarden zijn: John, John, Simon en Richard, ...

het werk aan de *Atlas of finite groups* deed hij de meest ingewikkelde berekeningen in de kortste tijd en meteen foutloos. Er is ook drama in het boek: het moment dat hij zijn eerste fout maakt, zijn worsteling met het overlijden van zijn moeder en de vraag of hij nog wel iets groots heeft gedaan sinds 1985. Is hij een vroeg uitgeblust genie? Als bewoner van het souterrain is hij letterlijk en figuurlijk gekelderd.

Masters' Simon en Simons Masters

Masters schrijft in zijn boek op een hyperpersoonlijke manier over Norton: hoe ze samen onderweg zijn met de bus, en samen op vakantie gaan; in welke toestand zijn toilet en boekenkast zich bevinden. Foto's van stapels plastic tassen, rommel in een lade, enzovoorts. Dit is duidelijk een gewild effect, maar mij ging deze voorstelling als 'exotisch object in de dierentuin' wat te ver. Terwijl Masters het schreef heeft Simon Norton zelf het manuscript van het boek gelezen, en zijn commentaren erop staan plompverloren in de tekst, bijvoorbeeld: "I don't feel that the episode of the toilet falling through the floor has anything to do with my character." *Indeed...* Er zit iets van *freakshow* in, maar toch is het dat ook weer niet echt. Het is duidelijk dat Masters, en met hem vele voormalige huurders, hoog oplopen met Norton. De confrontatie met Norton zet ook Masters aan het denken over zichzelf; ook dit komt in het boek aan bod. Of Simon Norton een 'happy man' is, zoals de ondertitel van de eerste uitgave beweert, is toch niet zo duidelijk.

Het is wel zo dat Masters een positief, of tenminste sympathiek, beeld van Norton schetst — misschien is dit de traditionele Britse hang om excentriciteit enigszins te omarmen; in mainstreaming Nederland zie ik al weer een klein legertje welgemeende en tegelijkertijd contraproductieve hulpverleners opduiken. (Na tien jaar in dit land ben ik mijn illusies over tolerantie wel kwijt: erger, ik ben in zelfanalyse verwickeld om vast te stellen in welke mate ik ondertussen intolerantie en hufterigheid heb overgenomen.)

Simon is doodeerlijk — hij zou niet anders kunnen. Hij is hoogintelligent, heeft een fenomenaal geheugen, en kent alle busregelingen rond Cambridge. Hij gelooft in kaarten. Hier rechtsaf is hier rechtsaf, ook als dat eigenlijk niet kan. Geeuwt ongecontroleerd. Bewaart letterlijk alles. Hij is (verkeers-)politiek actief. Heeft geen rijbewijs. De vraag dringt zich aan de lezer op: heeft Simon Norton het syndroom van Asperger?

Excentriek is ziek?

Een link tussen het wiskundige en het autistische brein werd populair na studies van psycholoog Simon Baron-Cohen, met name zijn oudere studie naar het verband tussen informatici, ingenieurs, natuurkundigen of wiskundigen als ouders en autisme in hun kinderen, of zijn beschrijving van wiskundige Borchers in één van zijn boeken over het 'mannelijke brein' [4, 6]. Sowieso doet het autismespectrum het momenteel goed in de literatuur. Een paar jaar geleden was er een hype rond het boek van Mark Haddon *Het vreemde voorval met de hond in de nacht* [3], over een jongen die denkt in een *murder mystery* met een dode hond te zijn beland, maar ... eigenlijk zijn zijn ouders aan het scheiden. Na een treinreisje weet de jongen precies *hoeveel* bomen en koeien hij door het raam heeft gezien, niet gewoon dat er bomen en koeien waren. Een kennis van ons die in de psychiatrie veel met autisten werkt, vertelde dat ze dacht dat dit boek de denkwereld van kinderen met het syndroom van Asperger goed beschreef, in zoverre het natuurlijk mogelijk was voor haar om daarover een uitspraak te doen.

De populaire cultuur was nog nooit zo doordrenkt van expliciet benoemde psychische afwijkingen. Met de *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (DSM-IV-TR) in de hand, de diagnostiekbijbel waarin de criteria in de opeenvolgende versies steeds fluider werden, gaan steeds meer personen vaststelbaar afwijken van de 'neurotypische' mens (die dus een steeds dunner lijn voorstelt). Een pedagoog beschreef dit voor mij ooit treffend als volgt: een kind dat twintig jaar geleden als buitenbeentje zou gelden, kan ondertussen via DSM makkelijk 'een beetje' deze-of-gene geestesziekte hebben, bijvoorbeeld in het autisme-spectrum. Een ongewenst neveneffect hiervan is jaren geleden al pregnant theoretisch beschreven door Michel Foucault in zijn studies over *abnormaliteit* in relatie tot macht [1]. Iets of iemand kwantitatief als normafwijkend voorstellen opent de mogelijkheid tot ingrijpen, maar ook tot verder macht uitoefenen, op allerlei manieren — van in hokjes stoppen (letterlijk en figuurlijk), tot medicalisatie (denk hierbij ook aan psychofarmaca), tot eenvoudig dit: door expliciet benoemen ook expliciet reduceren tot het benoemde. Interessant is ook het feit dat de cultureel dominante geestesziekten klaarblijkelijk ook modegevoelig zijn: eind 19de eeuw 'hysterie', nu dus ADHD en het autisme-spectrum [5]. Misschien begin ik er wel over *omdat* het in de mode is. In ieder geval was ik aangenaam verrast toen een

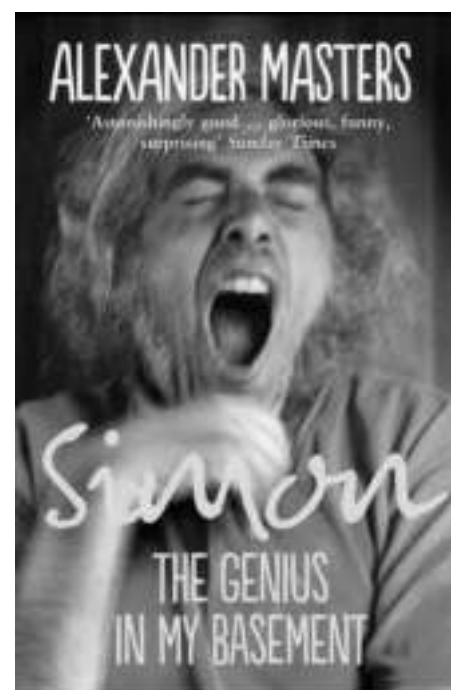
(Vlaamse) leraar mij vertelde dat deze problemen expliciet in zijn opleiding werden aangesproken.

Geen label

Excentriek is Simon Norton zeker, maar een label aan hem hangen lijkt me ongewenst. Het is een sterk punt van dit boek dat de auteur niet zomaar in de val trapt om een verkapte analyse te maken. Zoals John Conway op een bepaald moment in het boek zegt: "You must be very careful not to jump to easy answers with Simon. That is a danger." *Indeed...*

Referenties

- 1 Michel Foucault, *Les Anormaux*, Cours au Collège de France, Seuil (1999).
- 2 Terry Gannon, Monstrous Moonshine: The first twenty-five years, *Bull. London Math. Soc.* **38** (2006), pp. 1–33, arxiv:0402345.
- 3 Mark Haddon, *The Curious Incident of the Dog in the Night-Time*, Vintage (2004).
- 4 Oliver Morton, Think Different? (interview with Simon Baron-Cohen), *Wired* 9.12, www.wired.com.
- 5 Hans van der Ploeg, Waarom mensen lijden aan modeziekten, *NRC Handelsblad*, dinsdag 22 mei 2012, Mens& pp. 6–7.
- 6 Simon Singh, Interview with Richard Borchers, *The Guardian*, 28 augustus 1998, simonsingh.net.



Alexander Masters, *The Genius in my Basement*, nieuwe editie bij Fourth Estate onder de titel *Simon, The Genius in my Basement*, 2011, 368 p., ISBN 9780007243396 (paperback), prijs € 11,99.

Jeroen Spandaw

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TU Delft,

Postbus 5031,

2600 GA Delft

j.g.spandaw@tudelft.nl

Vakantiecursus

Kansrijke symmetrie

Hoe groot is de kans op een stompe driehoek? Hoe groot is de kans dat een koorde 'lang' is? Sinds 1946 organiseert het CWI aan het eind van de zomervakantie een vakantiecursus voor Nederlandse en Vlaamse wiskundeleraren. In 2011 is het thema 'Symmetrie'. Jeroen Spandaw houdt een lezing over kansrekening.

In de geest van de vakantiecursus wilde ik met mijn voordracht over kansrekening vooral mooie en hopelijk verrassende wiskunde laten zien. Een tweede doel was de docenten ervan te doordringen dat kansrekening uitgaat van kansmodellen en dat die modellen keuzes inhouden. Soms kunnen verschillende keuzes gemaakt worden die tot verschillende resultaten leiden.

Om dat punt duidelijk te maken heb ik een deel van het publiek geshockeerd met enkele *ill-posed* vragen, iets waar sommige wiskundig denkende mensen slecht tegen kunnen. Als wiskundedocenten altijd wiskundig onberispelijke vragen stellen, dan ontnemen ze hun leerlingen en studenten de gelegenheid om te leren vage vragen om te zetten in wiskundige vragen. Ik vind het ook niet de taak van de docent om zijn studenten zorgvuldig om iedere valkuil heen te leiden. Integendeel, ik geloof in de heilzame werking van struikelen en opstaan. Achteraf natuurlijk wel goed lessen proberen te trekken uit de struikelpartij. Wees dus op uw hoede, geachte lezer!

De kans op een stompe driehoek

Een paar jaar geleden vroeg ik mijn studenten in de lerarenopleiding om een 'willekeurige driehoek' te tekenen. Veertien getekende driehoeken waren stomp en zeventien waren

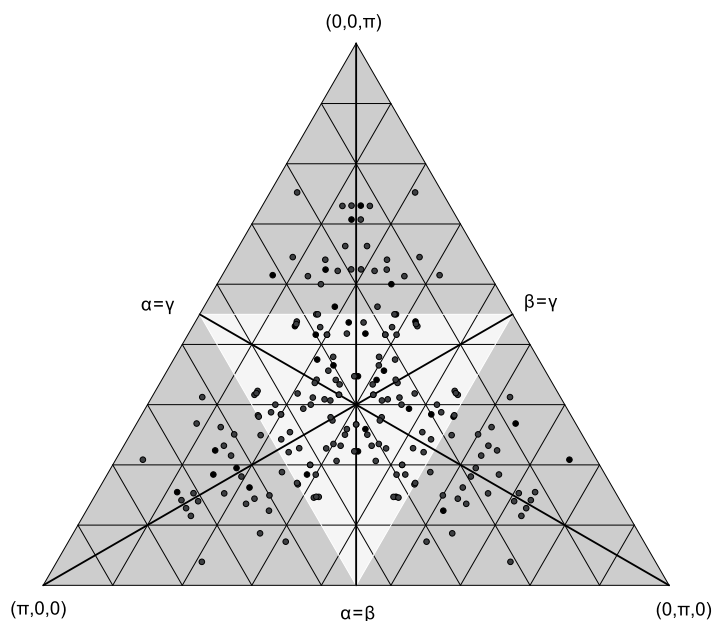
symmetrische manier is

$$\mathcal{D} := \{(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, \pi]^3 \mid \alpha + \beta + \gamma = \pi\}.$$

Een driehoek is in deze opvatting dus een geordend drietal van hoeken. (Voor onze vraag mogen we gelijkvormige driehoeken identificeren.) We verspillen natuurlijk geen tijd aan de vraag of de hoeken 0 en π wel of niet mee mogen doen. Figuur 1 bevat de resultaten van mijn studenten. De dikke punten (α, β, γ) representeren de getekende driehoeken. Omdat de driehoeken van de studenten onge-

scherp. De vakantiecursisten tekenden eveneens vaker een scherpe dan een stompe driehoek. Maar hoe groot is eigenlijk de kans op een stompe driehoek?

Om die vraag te beantwoorden bekijken we een uitkomstenruimte $\mathcal{D}$ die alle driehoeken parametrizeert. Dat kan op verschillende manieren gedaan worden, maar een mooie



Figuur 1

ordend waren, heb ik alle permutaties van een drietal (α, β, γ) ook genoteerd. In de driehoek $\mathcal{D}$ correspondeert dit met spiegelen in de lijnen $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ en $\gamma = \alpha$.

De donkergrijze driehoeken parametriseren de driehoeken met een stompe hoek; het lichtgrijze gedeelte in het midden parametrizeert de scherpe driehoeken. Dit plaatje suggereert dat de kans op een stompe driehoek maar liefst 75% is! Zouden leraren dus vaker stompe driehoeken moeten tekenen?

U begrijpt het al: de vraag naar de kans op een stompe driehoek is *ill-posed*. Die kans is pas gedefinieerd als we een uitkomstenruimte en een kansmaat hebben vastgelegd. Als we de bovenstaande uitkomstenruimte $\mathcal{D}$ kiezen en als we de kansmaat evenredig aan de oppervlaktemaat op $\mathcal{D}$ nemen, dan is de kans op een stompe driehoek inderdaad 75%. Verschillende studenten hadden verschillende uitkomstenruimten geconstrueerd met verschillende kansmaten die tot verschillende antwoorden leiden. Natuurlijk ontstond een discussie over wat nu ‘het goede antwoord’ was. Dat was er dus niet. Een heilzaam cognitief conflict, hoop ik.

Na het college dacht ik na over andere, meer natuurlijke kansmaten op de ruimte van alle driehoeken. Ik neem aan dat de zes coördinaten onafhankelijk en standaardnormaal verdeeld zijn. Wat is nu de kans op een stompe driehoek? Leo Breebaart schreef een programmaatje in Python waarmee ik een miljard driehoeken simuleerde. 74.9995% van de driehoeken was stomp! Rogier Brussee en ik hebben vervolgens geverifieerd dat de kans exact $\frac{3}{4}$ is door de zesvoudige integraal

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathcal{A}} \exp(-\frac{1}{2}(A^2 + B^2 + C^2)) dA dB dC$$

over $\mathcal{A} = \{(A, B, C) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \angle BAC \text{ is stomp}\}$ te berekenen. (Substitueer $B = A + b$, $C = A + c$, splits een kwadraat af, integreer A weg, voer poolcoördinaten voor b en c in, ontwikkel de factor $\exp(|b||c|\cos(\angle A))$ in een machtreeks en verwissel sommatievolgorde.) Een veel mooier bewijs is te vinden in [1].

De paradox van Bertrand

Neem een cirkel met een ingeschreven gelijkzijdige driehoek. Een koorde (een lijnstuk waarvan de eindpunten op de cirkel liggen) noemen we *lang* als ze langer is dan de zijde van de ingeschreven gelijkzijdige driehoek. Hoe groot is de kans dat een ‘willekeurige koorde’ lang is? De volgende drie redeneringen (van Wikipedia) leiden tot verschillende antwoorden.

1. Door de koorde te roteren mogen we aannemen dat het eindpunt P van de koorde PQ samenvalt met het hoekpunt A van de ingeschreven gelijkzijdige driehoek $\triangle ABC$. De koorde is lang dan en slechts dan als het andere eindpunt Q van de koorde tussen B en C ligt. De kans is dus $\frac{1}{3}$.
2. De koorde PQ wordt bepaald door haar middelpunt N . (Dit is niet waar als N samenvalt met het middelpunt M van de cirkel, maar de kans daarop is nul. We mogen deze subtiliteit dus negeren.) De koorde is lang dan en slechts dan als N binnen de cirkel met middelpunt M en halve straal ligt. De kans hierop is dus $\frac{1}{4}$.
3. Door te roteren mogen we aannemen dat de koorde horizontaal ligt. Het punt N ligt dus op de verticale diameter. De koorde is lang dan en slechts dan als N hoogstens een halve straal van M ligt, dus de kans op een lange koorde is $\frac{1}{2}$.

Een vierde argument grijpt terug naar de schooldefinitie van Laplace: de kans is het aantal gunstige gebeurtenissen gedeeld door het totaal aantal gebeurtenissen. Dat argument levert $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3}$ of iets anders. Dit voorbeeld illustreert de beperkingen van Laplace. Niet alleen faalt Laplace bij oneindige uitkomstenruimten, zelfs in eindige gevallen zoals het gooien met twee dobbelstenen moeten we keuzes maken: representeren we $(5, 6)$ en $(6, 5)$ als verschillende uitkomsten of niet? Je kunt niet met wiskunde alleen bepalen welk kansmodel de werkelijkheid het best beschrijft. Laplace is geen recept.

De belangrijkste boodschap was echter: je kunt pas over de kans op een lange koorde spreken als je een kansmaat op de verzameling korden hebt vastgelegd. Verschillende kansmaten geven verschillende kansen en verschillende invullingen aan het begrip ‘willekeurige koorde’. De vraag was dus *ill-posed*, zelfs als stilzwijgend (onbewust?) wordt aangenomen dat de kansverdeling invariant onder rotaties is. De eerste drie argumenten laten zien dat die symmetrie alleen onvoldoende is om een kansmaat vast te leggen.

Simulatie geeft ook geen uitsluitsel, want voor een simulatie moet je vastleggen hoe je een ‘willekeurige’ koorde genereert. Daarmee kies je in feite een kansverdeling. In de eerste redenering worden de eindpunten van de koorde onafhankelijk van elkaar getrokken uit de uniforme verdeling op de cirkel. In de tweede redenering wordt het middelpunt N van de koorde getrokken uit de uniforme verdeling op de cirkelschijf. (De kans op $N = M$ is nul, dus de kans is 1 dat N precies één koor-

de definieert.) In de derde redenering wordt N getrokken uit de uniforme verdeling op de verticale diameter. Vervolgens wordt de koorde geteerd over een hoek die wordt getrokken uit de uniforme verdeling op $[0, 2\pi]$. Ik heb overigens met opzet in de drie argumenten deze kansverdeling niet uitgespeeld. Die zijn immers niet nodig om in te zien dat er verschillende rotatie-invariante oplossingen zijn die verschillende kansen opleveren. De bovenstaande argumenten kunnen besproken worden met leerlingen, die niet weten wat een σ -algebra is.

Rad van Fortuin in drie dimensies

Na de anarchie van Bertrand, waarin verschillende antwoorden mogelijk zijn, is het tijd voor eenduidiger wiskunde. We gaan kijken naar rotaties in drie dimensies. Ik stel me een kandidaat in een spelshow voor die aan een drijvende bol draait. Zo’n rotatie wordt bepaald door een rotatieas en een rotatiehoek. We vragen ons af of alle rotatieassen en -hoeken even waarschijnlijk zijn. Van Bertrand hebben we geleerd dat we eerst een kansmaat op de verzameling rotaties moeten vastleggen. De theorie van Liegroepen leert ons dat er precies één kansmaat is, de *Haar-maat*, die invariant is onder alle rotaties. Deze kansmaat nemen we, dus we spreken nu over welgedefinieerde kansen. (Ik weet niet in hoeverre deze kansmaat een goede weerspiegeling is van zo’n spelshow.)

Door de rotatiesymmetrie zijn alle rotatieassen even waarschijnlijk. Preciezer: de kansdichtheid op de verzameling rotatieassen is uniform. (Ik zou het nog preciezer kunnen formuleren, maar daar wordt niemand wijzer van.) Hoe ziet de kansverdeling op de rotatiehoeken eruit? Allereerst merken we op dat we alleen hoeken tussen 0 en 180° nodig hebben. Is de kansverdeling uniform op het interval $[0, 180^\circ]$? Bas Edixhoven leerde mij dat dat niet het geval is. De kansdichtheid $p(\varphi)$ is evenredig met $\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)$. Grote hoeken zijn dus waarschijnlijker dan kleine hoeken! Na de eerste schok vond ik dat wel plausibel: er zijn immers veel meer rotaties over 180° dan over 0° .

Voor de mooie afleiding van de kansdichtheid $p(\varphi)$ met behulp van quaternionen verwijs ik u naar de syllabus [2], die gratis te downloaden is.

Maar Bas had nog een tweede verrassing in petto: we gaan de rotatie verdubbelen. We houden dus dezelfde rotatieas, maar we verdubbelen de rotatiehoek. Dan wordt de kansverdeling op de rotatiehoeken wél homogeen! Ook dit is na de eerste verbazing wel te be-

grijpen: als we bijvoorbeeld een rotatiehoek van 170° verdubbelen, krijgen we een rotatiehoek van 340° en dat is equivalent met een rotatiehoek van 20° . (Verander de oriëntatie van de rotatieas.) De rotatiehoeken van 10° en 170° worden door verdubbeling dus op een hoop gegoooid. Bij verdubbeling moeten we dus de kansdichtheid bij supplementaire hoeken φ en $\pi - \varphi$ optellen. We vinden dat de kansdichtheid na verdubbeling evenredig is met de constante $\sin^2(\frac{1}{2}\varphi) + \sin^2(\frac{1}{2}(\pi - \varphi))$.

Benford en Weyl

Symmetrie is niet beperkt tot meetkundige contexten als stompe driehoeken, lange korden of 3-dimensionale rotaties. Neem een lange lijst van getallen, bijvoorbeeld de inwoneraantallen van alle landen ter wereld of de afstanden tot andere sterrenstelsels uitgedrukt in lichtjaren of de afstanden tot andere sterrenstelsels uitgedrukt in Rijnlandse roeden. Bekijk nu van al die getallen het eerste cijfer. Zijn alle begincijfers 1 tot en met 9 even waarschijnlijk? Volgens de Wet van Benford is het antwoord ontkennend: we verwachten dat ongeveer 30% van de getallen met een 1

begint, terwijl minder dan 5% met een 9 zal beginnen. Voor begincijfer n geeft Benford de kans

$$p(n) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Er bestaan wiskundig exacte formuleringen van de Wet van Benford, maar ik houd het bij deze empirische versie.

Wat heeft dit met symmetrie te maken? Wel, als er een ‘universele’ kansverdeling op de begincijfers is, dan geldt deze ook na verandering van eenheid, zoals in het voorbeeld van de sterrenstelsels. Alle afstanden x in de lijst worden dus met een vaste omrekeningsfactor c vermenigvuldigd, de begincijfers zullen in het algemeen veranderen, maar de relatieve frequenties van de begincijfers moet idealiter gelijk blijven. De kansverdeling is dus invariant onder $x \mapsto cx$. Voor de uitkomstenruimte Ω starten we met $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. We identificeren x met $10x$, want die hebben hetzelfde begincijfer. De uitkomstenruimte is dus de multiplicatieve groep $\Omega := \mathbb{R}^+ / \langle 10 \rangle$. Topologisch is Ω een cirkel. Net als in het ge-

val van de groep van 3-dimensionale rotaties is er een unieke maat, de Haar-maat, die invariant is onder alle herschalingen $x \mapsto cx$. De bijbehorende kansdichtheid is evenredig met dx/x , want $d(cx)/cx = dx/x$. Nu kunnen we Benford begrijpen:

$$p(n) \sim \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \log \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

Normeren van de totale kans verandert het grondtal van de logaritme in 10.

Om u niet met een katterig gevoel over een empirische wet achter te laten, sluit ik af met een echte stelling, die ik heb geleerd van Ben de Pagter. Neem een willekeurige macht 7^k van 7. Hoe groot is de kans dat het begincijfer een 4 is? Volgens de gelijkverdelingsstelling van Hermann Weyl luidt het antwoord $\log_{10}(5/4)$, net als in de wet van Benford. Met ‘kans’ wordt het volgende bedoeld: Neem de machten 7^k voor $k = 1, \dots, N$ en bekijk de relatieve frequentie van de machten die met het cijfer n beginnen. Volgens Weyl convergeert deze relatieve frequentie naar $\log_{10}(1 + 1/n)$ als $N \rightarrow \infty$. $\leftarrow$



Referenties

- 1 Stephen Portnoy, A Lewis Carroll Pillow Problem: Probability of an Obtuse Triangle, *Statistical Science*, 1994, 9(2), 279–284.
- 2 Symmetrie, Vakantiecursus 2011, CWI syllabus 61, oai.cwi.nl/oai/asset/18770/18770D.pdf.

Tom Koornwinder

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam
t.h.koornwinder@uva.nl

Boele Braaksma

Johann Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407, 9700 AK Groningen
b.l.j.braaksma@rug.nl

Gerrit van Dijk

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
dijk@math.leidenuniv.nl

Tony Dorlas

School of Theoretical Physics
Dublin Institute for Advanced Studies
10 Burlington Road, Dublin 4, Ireland
dorlas@stp.dias.ie

Jacques Faraut

Institut de Mathématiques
Université Pierre et Marie Curie, Case 247
4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France
faraut@math.jussieu.fr

J. Leo van Hemmen

Physik Department T35
Technische Universität München
85747 Garching bei München, Germany
lvh@tum.de

Jan Stegeman

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 3508 TA Utrecht
jd.stegeman@hccnet.nl

In Memoriam Erik G.F. Thomas (1939–2011)

"A good definition is half the work"

Erik G.F. Thomas, professor of mathematics at the University of Groningen, passed away on 13 September 2011 at age 72. His colleagues and former colleagues Boele Braaksma, Tom Koornwinder (coordinator), Jan Stegeman, Jacques Faraut, Gerrit van Dijk, Leo van Hemmen and Tony Dorlas look back on his life and work.

Erik Thomas was born in The Hague on 19 February 1939. He died in Groningen on 13 September 2011. He is survived by his wife Gerda and his daughters Karin and Christine.

Life and career (by Boele Braaksma)

Erik Thomas studied mathematics at the University of Paris, where in 1969 he obtained his PhD on the thesis *L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle* published in *Annales de l'Institut Fourier* [1]. His advisor was Laurent Schwartz, a Fields medalist, whose best known achievement is the foundation of the theory of distributions. After obtaining his PhD he stayed for a year as maître de conférence in Orsay before taking up the post of assistant professor of mathematics at Yale University. In 1973 he was appointed professor of mathematics at the University of Groningen.

Because of his background he brought a rich mathematical culture with him to Groningen. Erik was a passionate mathematician who conveyed his knowledge and enthusiasm to his many students and colleagues, and who often influenced them a great deal. His lectures and seminars were lucid and inspiring and showed many facets of the beauty of mathematics. He could explain very complicated pieces of mathematics in a transparent manner. His students were enthusiastic about his lectures and his inspiring personality. His door was always open to students and colleagues and he answered their questions with much care and without regard of his time.

Many problems posed to him came from other disciplines, in particular from Theoretical Physics and Applied Mathematics. Until recently he had a close collaboration with his colleague Joop Sparenberg from Technical

Mechanics. Consequently he was advisor for several theses from these areas. Erik supervised his PhD students very closely and he had much influence on them. Their theses were valuable contributions to mathematics.

Erik had extremely high standards in his research. Although he had several unpublished works lining his shelves and despite the 'publish or perish' atmosphere during the



Erik Thomas, circa 2000

later part of his career, he submitted only his very best manuscripts for publication.

He also took his share in the administrative duties. From 1992 until 1994 he was chairman of the (nowadays Koninklijk) Wiskundig Genootschap. He remains in our memory as a man of the highest integrity and as both an inspired and inspiring mathematician of high calibre with a great desire to share his love and knowledge of mathematics with others.

Research (by Tom Koornwinder)

Erik Thomas has published 48 research papers. All of them are reviewed in *Zentralblatt MATH* (but only 39 are found there with the author identification thomas.erik-g-f, of which two are wrong), while MathSciNet misses two of these (but gives the other 46 with the author identification Thomas, Erik G. F.). Curiously, MathSciNet misses his 101 page AMS Memoir from 1974. His papers can be divided in six categories:

- *Integration with respect to vector-valued Radon measure* (10 papers, 1968–1997). This is the subject of his thesis [1] in Orsay. See the contributions by J. Faraut and J. Stegeman. The already mentioned AMS Memoir [2] also belongs to this subject.
- *General functional analysis and integration theory* (10 papers, 1965–1995). A paper of 60 pages with Alain Belanger in *Canad. J. Math.* [5] falls under this subject, but it also relates to Analysis on Lie groups.
- *Integral representation in convex cones* (8 papers, 1978–2004; 1 unpublished, 2011). See the contribution by J. Faraut.
- *Analysis on Lie groups* (9 papers, 1984–2005). See the contributions by J. Faraut and G. van Dijk. His work on this subject was strongly influenced by his expertise on the previous subject.
- *Applied mathematics* (4 papers, 1981–2002; 2 reports, 1997). Under this heading fall collaborations with his colleagues J.A. Sparenberg and J.C. Willems (see also the contribution by B. Braaksma), and with his former PhD student J.L. van Hemmen, as described in the contribution by Van Hemmen.
- *Path integrals* (7 papers, 1996–2008). This was the subject in which he was much interested during the last part of his career. See the contribution by T.C. Dorlas, with whom he wrote his last published paper.

Of course, there is much interrelation between these categories. In particular they are all fed by his impressive knowledge and mastery of functional analysis and integration theory. But he was the opposite of a narrow

specialist who only publishes ever increasing technicalities in his own field. He enjoyed inspiration, interaction and collaboration with people from other fields, both pure and applied mathematics and also physics. But he avoided long series of papers with the same co-authors. He had 12 different co-authors with whom he wrote 11 papers.

A similar pattern can be seen from the subjects of the PhD theses under his guidance. According to the Mathematics Genealogy Project Thomas has had ten PhD students. For three of them (Klamer, Pestman and Capelle) he was the only advisor. All three wrote a thesis in Analysis on Lie groups. The other seven theses are with co-advisors, often on applied topics, and sometimes defended at another Dutch university.

Personally I got a closer acquaintance with Erik when he started to come regularly to the sessions of the Analysis on Lie groups seminar during the eighties (see also the contribution by G. van Dijk). His own lectures there were marvellous. But it gave also a great added value to a session if Erik was in the audience. By his frequent questions he really wanted to understand what was said by the speaker, and thus helped the speaker as well to understand his own stuff better.

Erik brought joy and enthusiasm to the annual sessions on Lie theory that Gerard Helminck organized at Twente University for a few days before Christmas. Even, in later years, as Erik battled his disease, he kept attending. His curiosity remained, and he could inspire us as he always had done.

Orsay (door Jan Stegeman)

Graag wil ik iets vertellen over de bijzondere relatie die ik meer dan veertig jaar met Erik Thomas heb gehad. Onder de Nederlandse wiskundigen neemt Erik een bijzondere plaats in, omdat hij niet in ons land heeft gestudeerd. De middelbare school bezocht hij in Engeland. Aanvankelijk was het de bedoeling dat hij in Cambridge zou gaan studeren, maar uiteindelijk kwam hij in Orsay terecht, 25 kilometer ten zuiden van Parijs (tegenwoordig onderdeel van de Université Paris-Sud). In zijn eerste studiejaar raakte hij gefascineerd door een analyse-college van Jacques Deny. Dit zou bepalend zijn voor Eriks latere carrière. Later kwam hij in contact met Laurent Schwartz, de vader van de distributietheorie. Deze gaf hem enkele problemen die Erik wist op te lossen, hetgeen uiteindelijk tot zijn promotie op 12 juni 1969 heeft geleid.

Doordat ik in 1969 een aanstelling in Orsay had om aan mijn promotieonderzoek te wer-

ken, kwam ik met Erik in contact. Als landgenoten trokken wij regelmatig met elkaar op. Erik maakte mij wegwijs in de Franse wereld, en anderzijds was hij geïnteresseerd in het wiskundige leven in Nederland, want daar wist hij heel weinig van. Ik heb toen voorgesteld om samen het paascongres van het Wiskundig Genootschap bij te wonen, dat dat jaar in Wageningen gehouden werd. Daar had ik de gelegenheid hem bij diverse Nederlandse wiskundigen te introduceren. Ik vlei mij soms met het idee dat mede daardoor Erik enkele jaren later er toe kwam om vanuit Amerika te solliciteren naar een lectoraat in Groningen.

Erik en ik hebben altijd contact gehouden, zowel wiskundig als op het persoonlijke vlak. Bij mijn afscheid in Utrecht in 2000 was Erik bereid iets over mijn werk te vertellen, terwijl ik drie jaar later bij Eriks afscheid een verhaal over Erik heb mogen houden 'vanuit een historisch perspectief'. Een samenvatting van dit verhaal is opgenomen in het Groningse *Alumnieuws*, no. 12, maart 2004. Men kan dit nalezen op <http://www.cs.rug.nl/jbi/History/Thomas>.

Terugblikkend op mijn verblijf in Orsay besef ik wat een geweldig instituut dat was, waar Erik bijna tien jaar heeft kunnen studeren en werken. Ter illustratie wil ik enkele verdere namen noemen van wiskundigen (meest analytici) die ik daar in 1969 heb mogen ontmoeten: Jean-Pierre Kahane, Pierre Eymard, Nicholas Varopoulos, Michel Demazure, Henri Cartan, Pierre Cartier, Paul Malliavin, Antoni Zygmund, Lennart Carleson, Carl Herz, Adrien Douady, Jacques Faraut, Yves Meyer. Men kan zich voorstellen hoe Eriks talenten, waarvan het Groningse mathematisch instituut zoveel profijt heeft gehad, zich in zo'n omgeving hebben kunnen ontwikkelen.

Paris years and after (by Jacques Faraut)

I met Erik Thomas in Paris at the beginning of the 60's, when we were both students. Since then we kept in touch, and we had still recently exchanges by mail and phone.

I recall with pleasure the time we were both assistants at the University of Orsay, Paris-Sud. Erik was showing much enthusiasm for mathematics, communicating his enthusiasm on every occasion. For instance, I remember one evening in a restaurant in Paris when Erik was explaining quantum mechanics to me. Suddenly, all people at neighbouring tables stopped talking and listened to Erik's explanations. At the University we organized together a workshop for the students, something rather unusual for assistants in these days.

At that time Erik Thomas was writing his thesis under the prestigious supervision of Laurent Schwartz. The defense was a real event, which was attended by a large number of mathematicians.

After his doctorate, Erik Thomas worked for some years at American universities. While I was visiting him at Yale University, New Haven, Erik introduced me to the New York life.

Let me say a few words about some of his main mathematical achievements.

The thesis of Erik Thomas, defended in 1969, is devoted to the integration with respect to a vector-valued Radon measure. For a locally compact topological space T and a real Banach space E , a Radon measure μ on T with values in E is a continuous map $\mathcal{K}(T) \rightarrow E$, where $\mathcal{K}(T)$ denotes the space of real-valued continuous functions with compact support. (More generally one considers a locally convex topological vector space E which is quasi-complete.) One defines first the *semi-variation* of a function $f \geq 0$ by $\mu^*(f) = \sup_{|\varphi| \leq f, \varphi \in \mathcal{K}} \|\mu(\varphi)\|$, and then the space $\mathcal{L}^1(\mu)$ of integrable functions f with the property: $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{K} \mu^*(|f - \varphi|) \leq \varepsilon$. Then the map μ extends continuously to $\mathcal{L}^1(\mu)$ and, for $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, this defines $\int f d\mu$ as an element of E .

The thesis originated from two questions posed by L. Schwartz:

- Is there a dominated convergence theorem?
- Let the function f be *scalar-integrable* with respect to μ , i.e., integrable for all the scalar measures $\mu_{x'} = x' \circ \mu$ ($x' \in E'$, the dual of E). The *weak integral* of f is the linear form on E' given by $\langle w, \int f d\mu, x' \rangle = \int f d\mu_{x'}$. The question is: Does $w \cdot \int f d\mu$ belong to E ?

For the first question Thomas introduced the notion of extendable measure (*mesure prolongeable*). For such a measure every bounded Borel function with compact support is integrable. Thomas established a dominated convergence theorem for these measures.

For the second question Thomas introduced the notion of Σ -completeness. A Banach space E is Σ -complete if, for every sequence (x_n) with the property that $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x' \rangle| < \infty$ for all $x' \in E'$, there exists $x \in E$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x' \rangle = \langle x, x' \rangle$ for all $x' \in E'$. Then Thomas proved: If the Banach space E is Σ -complete then a scalar-integrable function f is integrable, and the weak integral of f agrees with the integral of f . The thesis, which contains a large number of other results, has



Lecturing at Lorentz Center, Leiden, 2004

been published in extenso in the *Annales de l'Institut Fourier* [1].

In a next period Thomas' interest focused on the Choquet theory of integral representation in convex cones. For a convex cone Γ in a locally convex topological vector space E consider a parametrization $t \mapsto e_t : T \rightarrow \text{ext}(\Gamma)$ of the extremal rays. The problem is, for $f \in \Gamma$, to establish the existence and uniqueness of a measure m on T such that $f = \int_T e_t dm(t)$. By Choquet's Theorem such a measure exists if the cone Γ is well-capped, and it is unique if the cone Γ is a lattice with respect to its proper order. In the paper 'Integral representations in conuclear cones' [6], Thomas replaces the condition that Γ is well-capped by: E is a quasi-complete *conuclear space* (a notion too technical to be explained here) and the order intervals $\Gamma \cap (f - \Gamma)$ are bounded.

Thomas' condition is more general, and, in some instances, easier to be checked. Classical applications are Bernstein's and Bochner's theorems [13].

Thomas was very eager to find further applications. Generalizations of the Bochner-Schwartz theorem can be obtained as applications of Thomas' results. For a Lie group G , the space $\mathcal{D}'(G)$ of distributions is conuclear. The set Γ of distributions of positive type is a convex cone with bounded intervals. In general, for non-commutative G , the cone Γ is not a lattice. However the subcone of central distributions of positive type is a lattice. This leads to a generalization of the Bochner-Schwartz theorem for unimodular Lie groups.

For a compact subgroup $K \subset G$, the cone Γ_K of K -bi-invariant distributions on G of positive type is a lattice if and only if (G, K) is a Gelfand pair. This leads to the notion of generalized Gelfand pair. For a closed subgroup $H \subset G$, not assumed to be compact, both G and H unimodular, the following three properties are equivalent:

- For each irreducible unitary representation on a Hilbert space $\mathcal{H}$ the space of H -invariant distribution vectors has dimension at most 1.
- For a unitary representation π realized on a G -invariant Hilbert subspace $\mathcal{H}$ of $\mathcal{D}'(G/H)$ the commutant of $\pi(G)$ in $\text{End}(\mathcal{H})$ is commutative.
- The cone Γ_H of H -bi-invariant distributions of positive type on G is a lattice.

If these equivalent properties hold, then the space G/H is said to be *multiplicity free*, or the pair (G, H) to be a *generalized Gelfand pair*, and for such a pair there is a Bochner-Schwartz-Godement theorem [3].

Consider the Heisenberg group $H_n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ with the product $(z, t)(z', t') = (z + z', t + t' + \text{Im}(z' | z))$. The unitary group $U(n)$ acts on H_n by automorphisms, and $(U(n) \ltimes H_n, U(n))$ is a Gelfand pair. The closed subgroups $K \subset U(n)$ such that $(K \ltimes H_n, K)$ is a Gelfand pair have been classified by Carcano. On the other hand, it has been proved by van Dijk and Mokni that $(U(p, q) \ltimes H_n, U(p, q))$ is a generalized Gelfand pair. In [10] Mokni and Thomas obtain an analogue of Carcano's result for non-compact groups H by determin-

ing for which closed subgroups H in $U(p, q)$ the pair $(H \ltimes H_n, H)$ is a generalized Gelfand pair.

I had the chance to write with Thomas a paper [11] about the decomposition of unitary representations which are realized on Hilbert spaces of holomorphic functions. We gave a geometric criterion for multiplicity-free decomposition. (Our result has been reformulated in a much wider setting by T. Kobayashi, who introduced the concept of *visible action*.)

Thomas has been a very active mathematician until the last months of his life. An unpublished paper [15] written in June 2011 deals with multivariate completely monotonic functions.

A true analyst (by Gerrit van Dijk)

With Erik Thomas I shared a continuing interest in Gelfand pairs. It all started in 1979 with the doctoral dissertation of Erik's student F.J.M. Klammer, entitled *Group representations in Hilbert subspaces of a locally convex space*, for which I was asked to serve in the examination committee.

The theory developed by Klammer appeared to have immediate implications for my own work on Gelfand pairs: pairs of groups (G, K) with K compact, with the property that every irreducible unitary representation of G , when restricted to K , contains the trivial representation of K at most once. Klammer's dissertation gave rise to an extension to pairs (G, H) with H a closed, not necessarily compact subgroup of G . This was a breakthrough which excited Erik and me. A lot of new questions arose. Would it be possible to generalize in some form the well-known criterion of Gelfand for showing that (G, K) is a Gelfand pair, to pairs (G, H) ? On a beautiful day in July 1980 I received at my home address a letter from South Africa. Upon opening, the letter appeared to contain the solution. I was very thrilled by the elegance of the result, but I also wondered why this letter was posted in South Africa. Later this became clear to me: Erik was visiting South Africa to make his acquaintance with the family of his future wife Gerda.

After returning to the Netherlands, Erik reported extensively on his new mathematical results in the seminar ‘Analysis on Lie Groups’, chaired by Tom Koornwinder and myself. He proved, in passing, also an important result [4] for classical Gelfand pairs: if G is connected, then the pair (G, K) is a Gelfand pair if the algebra of G -invariant differential operators on G/K is commutative. A little

later it dawned upon us that Helgason had proven the same result, almost simultaneously.

Erik always impressed us with an excellent presentation of his lectures. His enthusiasm infected us, his independent thinking roused admiration. The importance of a good presentation he also successfully emphasized to his students. I have been a witness of this several times because some of his master students later wrote their doctoral dissertation under my guidance. With the passing of Erik we have lost a pure analyst and a true colleague.

Clarity of exposition (by Leo van Hemmen)

Erik Thomas was striving for mathematical clarity all his life, both while teaching and while discussing open problems. The way in which he practiced this clarity was fascinating and at the same time totally convincing. I was effectively Erik's first graduate student. In fact, I had two doctoral thesis advisors, Nico Hugenholz in theoretical physics and Erik Thomas in mathematics. My topic was ‘ergodic theory’ for a dynamical system with *a priori* infinitely many particles; in my case, the infinite harmonic crystal in thermodynamic equilibrium, a problem that I knew from my solid-state physics days.

What I learned from Erik while working on my doctoral dissertation *Dynamics and ergodicity of the infinite harmonic crystal* (University of Groningen, 1976; *Phys. Rep.* 65, 1980, 43–149) was focusing on total mathematical clarity. To quote him: “A good definition is half the work.” How true, but easi-

ly forgotten. As for buying books: “Only the very best is good enough.” This wise advice has saved me from the nuisance of having seductively cheap but in reality boring books looking down upon me. We always kept contact and two decades later we embarked on another project, that suited him even better.

Suppose we have a differential equation

$$dx/dt = f(x) + \varphi \quad (1)$$

in some Banach space E ; for example, $\mathbb{R}^n$. The system $dx/dt = f(x)$ is autonomous. It is supposed to have an equilibrium state; without restriction we can take it to be $x = 0$, i.e., $f(0) = 0$. Quite often the full f is neither known nor accessible to experiment, except for some of its ‘components’ where also the time-dependent input φ lives, and which can be sampled experimentally.

What we are hunting for is the solution operator that generates the time evolution induced by (1). Since Volterra (*Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Blackie, London, 1930; Dover, 1959) one has often represented the solution to (1) as a series, which one now calls the Volterra series, with respect to increasing powers of φ . A canonical representation of the Volterra series expansion for the scalar case $\mathbb{R}^n$ with $n = 1$ reads

$$\begin{aligned} x(t) = & \kappa_0 + \sum_{n \geq 1} \int_{-\infty}^t ds_1 \cdots \int_{-\infty}^t ds_n \\ & \cdot \kappa_n(t - s_1, \dots, t - s_n) \\ & \cdot \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_n). \end{aligned} \quad (2)$$



At reception after G. van Dijk's farewell lecture, Leiden, 2004



With Gerda in Strasbourg, 2005, at a conference in honor of J. Faraut

Since $x = 0$ is our equilibrium point, we substitute $\varphi = 0$ and find $\kappa_0 = 0$. In real life $x(t)$, or part of it, is given experimentally and we would like to determine the kernels κ_n . In Banach space Erik Thomas, my former graduate student Werner Kistler and I could solve this problem fully [12].

A solution operator is said to be *nonanticipative*, or *causal*, if for each t the solution $\mathcal{A}(\varphi)(t)$ depends on the restriction of φ to $(-\infty, t]$ only, i.e., on the past of the input. What we have actually done is obtaining the unique nonanticipative solution operator $\varphi \mapsto \mathcal{A}(\varphi)$ for (1) so that $x = \mathcal{A}(\varphi)$ solves (1). The Volterra expansion (2) amounts to expanding the solution operator $\mathcal{A}(\varphi)$ into a Taylor series around $\varphi = 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n(\varphi), \\ \mathcal{A}_n(\varphi) &= \frac{1}{n!} D^n \mathcal{A}(0)(\varphi, \dots, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

where $D^n \mathcal{A}(0)(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ denotes the n -th order directional derivative at 0 in the directions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, the dependence upon t being understood; a glance at (2) may be helpful. What, then, can be said about convergence of the series in (3) and, if so, in what sense? Here a fundamental manuscript of Erik Thomas [8, Theorem 6.1] comes in where he introduces the notion of quotient-analytic maps in locally convex spaces, or for short Q -analyticity. The manuscript was intended to precede our common paper [12] but the journal found its mathematics too 'pure'. There is also a nice companion note [9],

which needs to be included as well.

A few more words on the convergence of the Volterra series (3) are in order. The solution operator $\mathcal{A}(\varphi)$ is not analytic but 'quotient-analytic' (Q -analytic) in φ , as set forth by Thomas [8]. Neither is the convergence in (3) uniform in t . The consequence of the novel notion of Q -analyticity is that a Volterra series such as (3) converges uniformly for t in a compact interval I and for inputs φ in a neighborhood of zero that depends on the compact interval I under consideration.

Furthermore, on the basis of (3) we can now conclude [12] that the kernels κ_n in (2) exist. But how to determine them? This is a classical problem for instance in neuroscience, which Wiener had already tried to solve. Let us work on the real line and substitute $\varphi = \lambda \delta_{t_0}$ into (1) and hence (2); here δ_{t_0} is a Dirac measure (unit mass) at $t_0 \in \mathbb{R}$. Substituting a Dirac measure ('delta function') into (1) is opposite to what Wiener proposed but we will see in a minute why it all fits. Equation (2) now reads

$$x_\lambda(t) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n \kappa_n(t - t_0, \dots, t - t_0), \quad (4)$$

which, for t in a given compact interval, converges uniformly. Differentiating (4) once with respect to λ at $\lambda = 0$, which we may do because convergence is uniform, we find $\kappa_1(t - t_0)$. Similarly, by substituting $\varphi = \lambda_1 \delta_{t_1} + \lambda_2 \delta_{t_2}$ into the series (3) and hence (2), and differentiating with respect to λ_1 and λ_2 at 0 we obtain $\kappa_2(t - t_1, t - t_2)$. We have developed [12] an algorithm, *differential sampling*, to obtain the n -linear $\mathcal{A}_n$ for arbitrary n

through recurrence relations in Banach space, showing that the $\mathcal{A}_n$ are actually represented by continuous kernels κ_n .

What Wiener (*Nonlinear problems in random theory*, MIT Press, 1958) did was substituting white noise (wn) for φ , averaging (arithmetically) over ℓ runs (while taking advantage of the strong law of large numbers), and exploiting a key property of white noise in that its mean gives a Dirac delta measure: $\langle \varphi_{\text{wn}}(t) \varphi_{\text{wn}}(t + s) \rangle = \delta_s$ with, as usual, $\langle \cdot \cdot \rangle$ denoting the stochastic mean. To see how this works, we take a simple example, viz., the linear case in (2) with $x(t) = \int ds \kappa_1(t - s) \varphi(s)$, multiply this by $\varphi_{\text{wn}}(t')$, average over finitely many runs and obtain as approximation for ℓ finite but large

$$\begin{aligned} \langle x(t) \varphi_{\text{wn}}(t') \rangle &= \int_0^\infty ds \kappa_1(t - s) \langle \varphi_{\text{wn}}(s) \varphi_{\text{wn}}(t') \rangle \\ &= \int_0^\infty ds \kappa_1(t - s) \delta(s - t') = \kappa_1(t - t'). \end{aligned} \quad (5)$$

Generating white noise is nontrivial, so why not use a delta measure as input? White noise has been used extensively in e.g. auditory experiments but why not use a click? A click sounds like, and is, an approximate delta measure (see W. A. Yost, *Fundamentals of hearing*, Academic Press, 1994), but the approximation is easy to produce and quite good. However, for using Dirac delta measures as input φ the kernels κ_n must be continuous. Together with Erik Thomas [12, Section 3] we could prove that they are even real analytic, under the fairly general condition of f in (1) being an analytic function satisfying a Lipschitz condition, which suffices for most purposes.

Now one could complain that white noise may well be hard to generate but in experiment a delta function is not perfect either. True. That is why we have also proven a continuity theorem [12, Section 6] showing that for $E = \mathbb{R}^N$ the approximate kernels approach the exact ones as the sampling, approximating, click becomes an exact Dirac delta measure. In passing we note that, though quite a bit clumsier, white-noise averaging is completely justified too once the kernels κ_n such as those in (2) are continuous.

Looking backwards, I realize that working with Erik Thomas was a fascinating experience where we all greatly enjoyed his deep insight, his clear explanations, and his great enthusiasm for clarifying why mathematical structures give new insight. You 'only' need to see them, as Erik did.

Path integrals (by Tony Dorlas)

For me as a student at Groningen University, Erik Thomas was one of my favourite lecturers. I really intended to study theoretical physics but his inspiring lectures persuaded me to complete a degree in mathematics as well. He used to give his lectures entirely without notes and would often wear a round-necked jumper which he took off during the lectures. The lectures were always a model of clarity and organisation, showing a real mastery of the subject. Later, as a lecturer myself, it was always his lecturing style that I tried to imitate. Having just returned from Yale, and having studied in France, Erik sometimes used uncommon words during the lectures. Thus, I first learnt the word *digressie* (Dutch for *digression*) from him. Despite his encouragement, I nevertheless decided to do my PhD in theoretical physics, but kept in close contact with Erik through his weekly seminar, which touched on many interesting subjects, but especially harmonic analysis, which was his main interest at the time. It consisted of a small group of students, giving a number of lectures in turn, often studying a particular book or article. I have learnt a lot from those seminars, not just mathematics but also how to present a talk. Around Christmas time, Erik would often invite us home for dinner with his wife Gerda. Here his French habits were also apparent. We would have a cognac and a plate of lettuce before the main meal. The conversation was often quite philosophical in nature, in keeping with Erik's interests.

Although not trained in physics, Erik did have an interest in it and in the 90's he started work on the mathematical definition of the Feynman path integral. This is the *La-*

grangian formulation of quantum mechanics introduced by Feynman after a tentative suggestion by Dirac. Originally, Feynman formulated his path integral as an alternative way of expressing the solution of the Schrödinger equation in non-relativistic quantum mechanics, but then he generalised it to the relativistic case and quantum field theory. It proved to be a particularly useful tool in perturbation theory giving rise to his introduction of Feynman diagrams. This led to much shorter calculations of relevant quantities than the traditional Hamiltonian approach.

However, the concept is still poorly understood in a mathematical sense. Many alternative formulations have already been suggested to give a mathematical meaning to this concept, but none is particularly satisfactory. The most fruitful to date is the *Euclidean approach*. Here one makes an 'analytic continuation' of the time variable to imaginary time. This turns the ill-defined oscillatory Feynman path integral into a well-defined Wiener integral. This was done by Kac, and is known as the *Feynman-Kac path integral*. It is such a powerful tool that many theoretical physicists today think in terms of Euclidean space rather than Minkowski space quite routinely. As Erik remarked, however, this does not really answer the question what mathematical entity corresponds to the Feynman path integral itself. It is known that it cannot be a (complex-valued) measure. Cecile De Witt-Morette suggested that it should be a distribution of some kind, but she did not give a more detailed construction.

A proper mathematical definition was given by Albeverio and Hoegh-Krohn after a suggestion by Ito, in terms of the Fourier trans-

form of a bounded measure. Although this is indeed a proper mathematical formulation, Erik was not happy with it. He argued that the space of Fourier transforms of bounded measures is an unwieldy space. He initiated a new approach, exploring various simplified scenarios. One of those was to discretise space, another to discretise time.

At the time I was a lecturer at the University of Swansea, where professor Truman had also worked on the Feynman path integral. As I was interested myself, I invited Erik to Swansea, where we started a collaboration. At that time he had already worked out a discrete-time formulation [7], and we considered a possible continuous-time limit. Unfortunately, the result was negative. This discouraged me more than him, and I turned my attention to other projects. More than ten years later, on a visit to Groningen I discussed the matter again with him. It turned out that he had only published his work on a finite-space version but thought that it could be generalised to infinite discrete space. I offered to try and work this out, and sent him a draft version of a paper some time later. Although Erik was already unwell at that time, he nevertheless sent some comments and we communicated about its publication. We decided to send it to the *Journal of Mathematical Physics*, where it was accepted [14].

Just this year, I had a new post-doc (Matieu Beau) with whom I decided to work on the path integral again. So far, we have been able to extend Erik's work on the discrete-time integral, simplifying his approach somewhat and considering more general boundary conditions. Sadly, we will have to do without his comments and encouragement. ←

Selected papers by Erik Thomas

- 1 L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) 20 (1970), 55–191.
- 2 The Lebesgue-Nikodym theorem for vector valued Radon measures, *Mem. Amer. Math. Soc.* 139 (1974), 101 pp.
- 3 The theorem of Bochner-Schwartz-Godement for generalised Gel'fand pairs, in: *Functional analysis: surveys and recent results, III*, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 291–304.
- 4 An infinitesimal characterization of Gel'fand pairs, in: *Conference in modern analysis and probability*, *Contemp. Math.*, 26, Amer. Math. Soc., 1984, pp. 379–385.
- 5 (with A. Belanger) Positive forms on nuclear $\ast$ -algebras and their integral representations, *Canad. J. Math.* 42 (1990), 410–469.
- 6 Integral representations in conuclear cones, *J. Convex Anal.* 1 (1994), 225–258.
- 7 Path integrals on finite sets, *Acta Appl. Math.* 43 (1996), 191–232.
- 8 *Q*-Analytic solution operators for non-linear differential equations, preprint, Univ. of Groningen, 1997.
- 9 A polarization identity for multilinear maps, preprint, Univ. of Groningen, 1997.
- 10 (with K. Mokni) Paires de Guelfand généralisées associées au groupe d'Heisenberg, *J. Lie Theory* 8 (1998), 325–334.
- 11 (with J. Faraut) Invariant Hilbert spaces of holomorphic functions, *J. Lie Theory* 9 (1999), 383–402.
- 12 (with J. L. van Hemmen and W. M. Kistler) Calculation of Volterra kernels for solutions of nonlinear differential equations, *SIAM J. Appl. Math.* 61 (2001), 1–21.
- 13 Bochner and Bernstein theorems via the nuclear integral representation theorem, *J. Math. Anal. Appl.* 297 (2004), 612–624.
- 14 (with T. C. Dorlas) The discrete Feynman integral, *J. Math. Phys.* 49 (2008), 092101, 11 pp.
- 15 Completely monotonic functions and elementary symmetric polynomials, unpublished manuscript, 2011.

Bennie Mols*Kijkduinstraat 121-2**1055 XW Amsterdam**benniemols@gmail.com***Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011**

Veiling in reservestroom

In het Europese elektriciteitsgrid moet de energieopwekking te allen tijde overeenkomen met het energieverbruik. Om in te kunnen spelen op een plotseling toenemende energievraag, verplicht de Duitse regelgever energieaanbieders om voldoende energiereserve op voorraad te hebben. Deze energiereserve wordt op een veiling verhandeld. Het Noorse energiebedrijf Statkraft vroeg aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie of men met speltheorie het biedgedrag op deze veiling kan voorspellen.

Deelnemers van de studiegroep

Denes Palvolgyi (UM)

Gergely Csapo (UM)

Meike Wortel (VU)

Thijs Ruijgrok (UU)

Wander Wadman (TUD)

Zsombor Meder (UM)

Statkraft is een Noors staatsbedrijf dat de grootste producent van hernieuwbare energie in Europa is. Statkraft beheert onder andere een groot aantal waterkrachtcentrales. Zo'n tien jaar geleden besloot het bedrijf zijn energie ook op het Europese vasteland te verhandelen. Als eerste opende het een kantoor in Amsterdam; een jaar later volgde een kantoor in het Duitse Düsseldorf. Energieproducent Statkraft verkoopt zijn energie aan energieleveranciers, die op hun beurt de energie weer verkopen aan de eindgebruikers, zoals particulieren en bedrijven.

Duitsland heeft de operators van het elektriciteitsgrid verplicht om reserve-energie op voorraad te hebben voor het geval bijvoorbeeld een plotselinge black-out optreedt. Die reserve-energie moet binnen tien seconden geleverd kunnen worden. "De reserve-energie wordt verhandeld op een maandelijks veiling", vertelt elektrotechnisch ingenieur Philipp Siemes, hoofd van de afdeling Short term Energy Management van Statkraft in Düsseldorf. "De aanbieders bieden daar x megawatt aan tegen een prijs van y euro per megawatt. De veiling werkt zo dat de ca-

paciteiten met de laagste prijs per eenheid-verhoudingen worden gekocht totdat gridoperators hun verplichte reserve-energie hebben gehaald. De uitkomsten van de veiling zijn publiek toegankelijk."

De verzoeken van de gridoperators worden volautomatisch door software gegenereerd. Technisch is het een veeleisend probleem om binnen een tiental seconden een grote hoeveelheid energie te kunnen leveren. Niet alle energiecentrales kunnen immers zo snel op een sterk toegenomen energiebehoefte inspelen. Als energieproducent wil Statkraft natuurlijk een zo goed mogelijke prijs krijgen op de energieveiling. De vraag is hoe ze dat voor elkaar krijgen.

Siemes had zelf al behoorlijk wat tijd in dit probleem gestopt. Hij probeerde om de energieveiling te begrijpen vanuit fundamentele economische wetten: Wat is de invloed van de energieprijzen? Wat is de invloed van de brandstofprijzen? Wat zijn de invloeden van diverse andere economische factoren? Siemes: "Ik vond echter geen fundamentele correlatie tussen deze factoren en de werkelijke veilingprijzen. Vandaar dat ik het probleem wilde aanpakken vanuit speltheoretisch oogpunt."

In de speltheorie wordt immers de strategische interactie tussen de diverse rationeel handelende spelers van een 'spel' geanalyseerd. Omdat Siemes niet vertrouwd was met de ins en outs van speltheorie zou het hem veel te veel tijd kosten om het probleem speltheoretisch te analyseren. Siemes: "Dus dacht ik: laat ik het probleem voorleggen aan

een stel slimme wiskundigen. Via een Nederlandse collega had ik gehoord over de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, en zo is het gekomen dat ik ons veilingprobleem heb voorgelegd aan een studiegroep van wiskundigen."

Behalve het proberen te achterhalen van de beste veilingprijs voor Statkraft, is er nog een reden om de veilingprijzen goed onder de loep te nemen. Juist omdat er relatief weinig energieaanbieders op de veiling opereren, zou het kunnen dat er stilzwijgende afspraken bestaan tussen die aanbieders om de prijs kunstmatig hoog te houden. Siemes: "Het zou in principe kunnen dat er subtiele strategische samenwerkingen bestaan tussen aanbieders, zonder dat er overduidelijk sprake is van een kartel. In onze traditionele economische analyse konden we zo'n subtiele samenwerking niet vinden, maar misschien dat een speltheoretische analyse zich beter leent om een subtiele samenwerking bloot te leggen."

Gehele of gedeeltelijke rationaliteit

Een groep van zes wiskundigen boog zich eind januari 2011 een week lang over het veilingprobleem van Statkraft. Promovendus Gergely Csapo van de afdeling Kwantitatieve Economie van de Universiteit Maastricht was een van hen. Hij vertelt dat de groep drie oplossingswegen heeft bewandeld: allereerst een speltheoretische aanpak gebaseerd op perfecte rationaliteit van de spelers; ten tweede een model gebaseerd op gedeeltelijke rationaliteit van de spelers; en ten derde een econometrisch model dat alleen maar is gebaseerd op een tijdreeksanalyse van de veilingresultaten uit het verleden. In de tijdreeksanalyse wordt er helemaal geen aanname gedaan over de rationaliteit van de spelers.

"In de speltheoretische aanpak waarbij de spelers perfect rationeel zijn, hebben we



Foto: Statkraft/Hans Starosta

Het hogere reservoir van de Statkraft energieopslagcentrale in Erzhausen (Duitsland). Deze centrale kan de reserve-energie leveren die op veilingen wordt verhandeld. Wanneer de elektriciteit goedkoop is (bijvoorbeeld 's nachts), gebruikt deze centrale energie door water van het lagere naar het hogere reservoir te pompen. Bij de eerstvolgende goede gelegenheid mag water van het hogere naar het lagere reservoir stromen. Daarbij drijft het turbines aan die elektriciteit opwekken.

twee soorten markten bekeken”, vertelt Csapo. “Als de markt groot genoeg is zodat er geen dominante speler kan ontstaan, dan zien we dat de prijs per verkochte eenheid daalt totdat de laatste verkoper op die laatste eenheid geen winst meer maakt. Als de markt zo klein wordt dat één speler dominant kan worden, dan zien we inderdaad dat deze de prijs kan gaan opdrijven.”

In de tweede aanpak simuleerden de wiskundigen tweeduizend biedingsrondes van zeven verschillende spelers met zeven verschillende biedstrategieën. In de eenvoudigste gevallen zijn de biedstrategieën bijvoorbeeld het gemiddelde van de geaccepteerde biedingen van de afgelopen maand, of de hoogste bieding van de afgelopen maand. “Ondanks het feit dat gedeeltelijke rationaliteit realistischer is dan perfecte rationaliteit, bleek deze aanpak niet zoveel op te leveren”, concludeert Csapo. “We zien dat de prijs langzaam convergeert naar de kostprijs om de reserve-energie te maken. Dat is niet realistisch voor de energie-aanbieders want dan verdienen ze niets meer.”

In de derde aanpak hanteerden de wiskundigen de algemene econometrische manier van modelleren, waarbij wordt verondersteld dat er a priori niets bekend is over hoe de data tot stand komen. Uitgangspunt waren de geaccepteerde biedingen (hoeveel energie voor welke prijs) tussen december 2007 en januari 2011: een periode met 25 veilingen. Csapo: “We hebben geprobeerd met een *autoregressive moving average model* (ARMA) een onderliggende structuur te ontdekken, maar dat is niet gelukt. We hebben geen manier gevonden om de bieding op de eerst volgende veiling goed te voorspellen.”

Een paar jaar geleden werd de reserve-energie nog elk half jaar geveild. Dat veranderde in eerste instantie naar een maandelijkse veiling, en in het afgelopen jaar zelfs naar een wekelijkse veiling. De wiskundigen hebben ook nog onderzocht of ze theoretisch kunnen verklaren wat er dan in de praktijk gebeurt. Csapo: “Wij hebben aangetoond dat het verkorten van de tijd tussen twee veilingen leidt tot hogere prijzen, en dat is precies het omgekeerde van wat de regelgevers hadden gedacht. Maar het komt wel overeen met wat er in werkelijkheid is gebeurd. Ik denk dat dit het belangrijkste resultaat is van ons werk.”

Conclusie

“Zelfs de speltheorie blijkt het veilingprobleem niet te kunnen oplossen”, zegt Philipp Siemes van Statkraft over de resultaten van de studiegroep. “Het lijkt erop dat er geen ultimatum model is dat de toekomstige veilingprijzen kan voorspellen. Aan de ene kant is dat teleurstellend. Maar aan de andere kant is het voor ons als bedrijf aardig om te zien dat een groep slimme wiskundigen niet in staat is geweest om het beter te doen dan wij het hebben gedaan. In ieder geval niet binnen een week. Statkraft heeft het goed gedaan op de veiling.”

Wat is dan Statkrafts strategie op de veiling? Siemes: “Wat wij doen is dat we twee of drie mensen laten kijken naar de trends uit het verleden. Zij bediscussiëren die trends en komen op een vrij subjectieve manier tot een consensus over een nieuw bod. Er ligt geen model aan ten grondslag dat precies berekent hoe wij op de veiling moeten handelen. Uit de resultaten van de wiskundigen blijkt echter

ook dat de andere energieproducenten geen model hebben waarmee ze de toekomstige veilingprijzen voorspellen. Als ze zo’n model wel hadden gehad, dan hadden we het in de analyses wel gevonden.”

De speltheoretische aanpak kon wel een praktijksituatie uit 2008 verklaren, vertelt Siemes. “Toen was één producent de hoofdleverancier. Hij kon de prijs opdrijven. De situatie veranderde in 2009, waardoor de prijs naar beneden liep. En dat laat het eerste model van de wiskundigen ook zien. Dat model is voor ons het interessantste. Het model met de gedeeltelijke rationaliteit kon de resultaten uit het verleden niet verklaren en ook de aanpak met de tijdreeksanalyse gaf geen goede fit met de data.”

Siemes weet nog niet of hij verder gaat met de speltheoretische aanpak. “Het punt is dat de markt is veranderd. Tijdens de studieweek gebeurde de veiling nog maandelijks. Niet lang daarna werd het een wekelijkse veiling, wat de situatie weer heeft veranderd. Een tweede punt is dat tot nu toe alleen de geaccepteerde biedingen werden gepubliceerd en niet de afgewezen biedingen, die te hoog waren. De Duitse regelgever denkt erover na om te verplichten ook de afgewezen biedingen openbaar te maken. Als dat gaat gebeuren, dan willen we dit nieuwe type veiling zeker opnieuw gaan analyseren. Maar als dat niet gebeurt, dan denk ik dat we bij onze huidige veilingstrategie blijven.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011, van 24–28 januari op de VU in Amsterdam. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.few.vu.nl/~swi2011.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.101
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Jan Guichelaar, George B. Huitema, Hylkje de Jong (red.)

Zekerheden in waarnemingen Natuurwetenschappelijke ontwikkelingen in Nederland rond 1900

Uitgeverij Verloren, 2012

237 p., prijs € 29

ISBN 9789087041946

Obe Postma (1868–1963) is de meeste lezers van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* waarschijnlijk niet of nauwelijks bekend, tenminste als ze geen Friese connecties hebben, ook al is er recent in dit tijdschrift een artikel over hem verschenen (NAW 5/12, pp. 198–202, 2011). Hij dankt zijn grootste roem niet zozeer aan zijn wetenschappelijke prestaties, maar aan zijn dichterschap en zijn volkskundige artikelen over Friesland. Er bestaat een Obe Postma-prijs voor literaire vertalingen van de provincie Friesland, en ook een Obe Postma ‘selskip’ (genootschap) en een daaraan verbonden website. Het meeste van het werk waarop zijn reputatie berust, verrichtte hij evenwel na zijn pensionering. Hij was gedurende veertig jaar (1894–1933) werkzaam als wiskundeleraar aan de Rijks HBS te Groningen, na gepromoveerd te zijn bij Van der Waals, de Nobelprijswinnaar. In Groningen was hij actief lid van het lokale Natuurkundig Genootschap, waar hij lezingen hield. Hij publiceerde een aantal wetenschappelijke artikelen, bewerkte schoolboeken en was een gerespecteerd lid van de ontwikkelde Groningse burgerij.

Het naar hem vernoemde genootschap organiseerde vorig jaar een studiedag over de natuurwetenschappelijke aspecten van Postma, waarvan de lezingen nu gebundeld zijn. Ze geven een mooi tijdsbeeld van het intellectuele leven in die Groningse periode. Persoonlijk apprecieerde ik met name de stukken van Jan Guichelaar over Postma en de statistische mechanica, van Martinus van Hoorn over Postma als wiskundeleraar aan de Rijks HBS te Groningen en van Anne Kox over de bloei van de Nederlandse wetenschap in de ‘tweede Gouden Eeuw’ (die vaak aan de door Thorbecke gestichte hbs wordt toegeschreven, onderwijshervormingen kunnen ook positieve gevolgen hebben...).

De artikelen die Postma schreef omtrent de statistische mechanica zoals Boltzmann die ontwikkeld had, en met name dat over de afleiding van de tweede hoofdwet en Boltzmanns H-theorema en over het gebruik van een coarse-grained entropiebegrip, in een versie geïntroduceerd door Poincaré, lijken nog steeds hun waarde behouden te hebben. Drie ervan werden vermeld in het klassieke overzichtsartikel van het echtpaar Paul en Tatiana Ehrenfest, en de omschrijving van Guichelaar maakte me nieuwsgierig naar de details. Dat de afleiding van irreversibel gedrag in het Boltzmann-programma de gemoederen nog steeds bezig houdt kon de NAW-lezer recent nog zien bij de discussie tussen Redig en Van Kampen (NAW 5/12, pp. 134–140 en p. 240).

De positie van leraren aan gymnasia en vooral aan de toen nog vrij jonge hbs'en is onvergelijkbaar met de hedendaagse situatie. Menig hoogleraar kwam op zijn leerstoel na een aantal jaren onderwijs gegeven te hebben op middelbare scholen, en van een kloof tussen universiteit en middelbaar onderwijs was toen veel minder sprake dan nu.

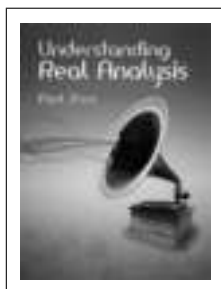
Ook Obe Postma was een gerespecteerd leraar, die zeker de eerste jaren zijn vak op niveau bijhield, publiceerde en correspondeerde met grootheden als Lorentz en Korteweg. Hij was dan wel geen grote ster, maar speelde zeker mee in de wetenschappelijke eredivisie van zijn tijd. Het lijkt onvoorstelbaar hoe vaak dat toen voorkwam, en des te onvoorstelbaarder in een periode waarin de discussie binnen de wis-

kundige gemeenschap erover gaat of een universitair bachelordiploma voldoende zou moeten zijn voor een eerstegraads lesbevoegdheid.

Als houder van lezingen voor het Natuurkundig Genootschap (beschreven door Guichelaar en Huitema) bevond hij zich in goed gezelschap, van Groningse grootheden als de sterrenkundigen De Sitter en Kapteyn en de psycholoog Heymans (waarover Douwe Draaisma een artikel bijdraagt), alsook van fameuze bezoekers van elders, onder wie de fysici Ehrenfest, Sommerfeld en Lorentz en de bioloog Hugo de Vries. Postma's ideeën en bijdragen over kansen en statistiek (beschreven door Klaas Nevels) en neokantiaanse filosofie (beschreven door Herman Paul) boeiden me maar matig en lijken flink verouderd te zijn geraakt. Hetzelfde geldt ook wel een beetje voor zijn opinies over het meten, metrologie, fundamentele versus afgeleide grootheden, de rol van eenheden, dimensieanalyse en dergelijke, beschreven door Jaap Smit, al had Postma daarover ook wel iets zinnigs te melden. Sommige auteurs hebben Postma's Friese teksten — met name uit zijn gedichten — voorzien van een vertaling, andere hebben dat tot mijn spijt nagelaten.

Ik heb het boek met plezier gelezen, en kan het ieder aanbevelen als portret van een tijdperk, en ook van de toenmalige intellectuele omgeving en de toenmalige onderwijsomstandigheden in Nederland.

Aernout van Enter



Paul Zorn

Understanding Real Analysis

A.K. Peters Ltd./CRC Press, 2010

292 p., prijs \$ 49

ISBN 9781568814155

Paul Zorn richt zich met zijn boek op beginnende wiskundestudenten die nog geen ervaring hebben met redeneren en bewijzen. Het boek bevat vijf hoofdstukken. Het eerste hoofdstuk behandelt diverse onderwerpen als verzamelingen, afbeeldingen, cardinaliteit en volledigheid. De volgende hoofdstukken gaan over rijen en reeksen, limieten en continuïteit, afgeleides en de Riemannintegraal. Zorn heeft er bewust voor gekozen om zich te beperken tot de meest elementaire onderwerpen. Reeksen van functies, machtrekken in het bijzonder, komen in het geheel niet aan de orde. Ook topologische begrippen, zoals open, gesloten en compact, worden niet behandeld.

Het boek is helder geschreven. Het eerste hoofdstuk zet uiteen hoe bewijzen gelezen en geschreven dienen te worden. Een groot pluspunt is dat hierbij ook taalkundige aspecten aan bod komen. Bij formele definities geeft Zorn vaak een halve bladzijde uitleg over de intuïtieve betekenis; waar mogelijk geeft hij ook een grafische interpretatie. Elk hoofdstuk bevat een groot aantal opgaven waarmee geoefend kan worden. De nadruk ligt vooral op het toepassen van definities en stellingen in concrete gevallen. (Het getal 42 duikt daarbij vaak op: kennelijk is Zorn een liefhebber van Douglas Adams' boek *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*.) Opgaven waarbij de lezer zelf stellingen moet bewijzen zijn duidelijk in de minderheid.

Op twee punten laat Zorn naar mijn idee stekken vallen in de presentatie. De definities van puntsgewijze en uniforme convergentie worden afgedaan met twee regels tekst. Ook een figuur blijft achterwege, terwijl dit een lastig begrip als uniforme convergentie juist kan verduidelijken. Ik kan alleen maar gissen naar de reden waarom Zorn er voor kiest om

stijlbreek te plegen. De ontwikkelingsstelling van Taylor is weggemoffeld in één alinea en twee opgaves waarin enkel het tweedegraads geval wordt behandeld. Met een aantal extra bladzijden en aanvullende opgaven had Zorn deze onderwerpen veel beter tot hun recht kunnen laten komen.

Samenvattend is Zorns boek door de uitgebreide en heldere uitleg vooral geschikt voor een inleidende cursus of zelfstudie. Als tekstboek bij voortgezette cursussen is het niet geschikt.

Alef Sterk



Mario Livio

Is God een wiskundige?

Vertaling Maarten Doude van Troostwijk

Veen Magazines, 2010

350 p., prijs € 29,95

ISBN 9789085713166

Alles lijkt wel wiskundig te beschrijven: natuurlijke processen, de economie, noem maar op. Deze kennelijke almacht en alomtegenwoordigheid is de aanleiding voor de suggestieve titel *Is God een wiskundige?* De titel wordt vertaald in twee aardse vragen:

- Hoe kan het dat wiskunde zo succesvol is?
- Wordt wiskunde bedacht of ontdekt?

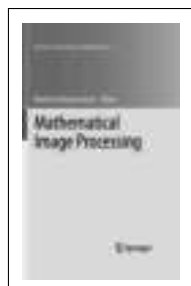
Een verrassend succes is dat wiskunde ontwikkeld zonder toepassing in het achterhoofd, later toch toegepast wordt. De Britse wiskundige Hardy schreef in 1940 trots over zijn onderzoeksterrein: "Tot nu toe heeft niemand enig oorlogsdoel ontdekt dat door de getaltheorie gediend kan worden." Hij had het fout: versleutelingen worden nu gebruikt voor communicatie in zowel vredes- als oorlogstijd. Of wiskunde bedacht of ontdekt wordt is een vraag die de wiskunde overstijgt: bestaat wiskunde onafhankelijk van de menselijke geest? Zou een buitenaards, kwalachtig, continu wezen behoefte hebben aan onze discrete getallen? De meningen hierover lopen uiteen.

Een boeiende mix van persoonlijke anekdotes en wetenschappelijke resultaten ontstaat door de historische aanpak van de twee vragen. Bekende wiskundigen, natuurkundigen, filosofen, cognitieve wetenschappers en taalkundigen worden behandeld: Pythagoras, Plato, Archimedes, Galilei, Descartes, Newton, statistici/probabilisten (de Bernoulli's, Quetelet,...), meetkundigen (Gauss, Riemann,...), logici (Russell, Gödel,...), enzovoort.

De ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde vanaf de achttiende eeuw krijgt uitgebreide aandacht. Met Galilei dacht men gewoonlijk dat "het boek van de natuur in de taal van de wiskunde geschreven is". Nu leek er meer wiskunde te zijn dan voor de beschrijving van onze vlak geachte wereld nodig leek. Cantor brak geheel en al met de realiteit met zijn zienswijze dat "de essentie van de wiskunde geheel in haar vrijheid besloten ligt". Maar slechts enkele decennia later gebruikte Einstein de nieuwe meetkunde voor zijn relativiteitstheorie, waarin de invloed van energie en materie beschreven wordt als kromming van de ruimte. In het laatste hoofdstuk beantwoordt de schrijver de twee vragen voorzichtig. Het succes volgt voor een deel uit de selectie van effectieve wiskunde. Tevens wordt een soort co-evolutie van mens, wiskunde en wereld gesuggereerd. Voor de kwestie of wiskunde bedacht of ontdekt wordt, gaat hij te rade bij onder andere neuro-, cognitieve- en taalwetenschappers. Immers, wiskunde komt tot ons in woord en geschrift, dus op zijn minst met een mens als tussenpersoon. Wiskundige aannamen zijn uitvindingen, en de daaruit volgende resul-

taten ontdekkingen, zo concludeert hij. Hiermee vormt het boek een afgerond geheel, dat een aanrader is voor wie interesse heeft in de filosofie van de wiskunde.

Jos Groot



Maïtine Bergounioux (ed.)
Mathematical Image Processing

Springer Verlag, 2011

197 p., prijs €96,25

ISBN 9783642196034

This book contains a series of papers from a conference held in Orléans, 2010, on mathematical image processing. Science developing here is entirely different from the more common image analysis, where the images and the information contained in them is crucial. Mathematical image processing deals with the processes from the image to the brain. Hence, the topic is much more rooted in medical statistics and related sciences.

Developments of methods and tools in mathematical image processing have been going rapidly during the last decades. This book reflects the latest developments in the area. The contributors in the volume are mainly from France, with one paper from Austria. The whole volume is written in readable, though not totally flawless English. As often in conference proceedings, the ten different chapters are of a wide variety, both in terms of contents, in terms of style and in terms of readability. It starts with a good chapter by Stéphane Jaffard on the state of the art in the area. It presents the essential splitting between function spaces and scaling functions. This chapter is interesting, culminating into the grand canonical formalisms. Before that point is reached, aspects of wavelet bases have been introduced as well as the uniform Hölder exponent, and we have been exposed to the multifractal formalism and fractal integration. It is all well presented and well readable and, in particular, it contains a range of useful references. The nine following contributions are shorter and more topical. Some are relatively simple extensions of existing theory, others are more introductory into novel directions. An interesting contribution, and as far as I am concerned the most surprising one, is the one by Ugo Boscain and co-authors on modelling of the image observation system, namely: how do our brains operate when they observe an image? The nerves are modelled mathematically, and the visual cortex is related to sub-Riemannian manifolds on which kernels are used. Clearly, this way of modelling has been undertaken since long and a convincing and interesting analysis follows. Another contribution that I found interesting was one from the group around Guillaume Masson, on a neural model for motion estimation. Relations between an image and the primate visual system are modelled mathematically and this model is used for local motion estimation. Of some interest in this chapter was also the application. Where most of the chapters restrict themselves to the standard images (commonly young ladies, named Laura or Barbara) or to simulated images, this contribution considers an image sequence on three taxis in Hamburg. Different optimal flows are then estimated. As a second example, the Yosemite sequence is addressed. Such illustrations are highly motivating and contain appropriate elements to illustrate and proceed with the methods within different settings.

The strong points, as identified above, are the depths and variation of the topics, and the possibility to learn about progress in the area from

one particular but important country in the world, namely from France. A little drawback that we may identify is the relatively limited scope in applications. Neither medical images, nor remote sensing images, are addressed, and there is only one contribution on multiband (color) images. These analyses must exist but were not included in the volume. In all, those interested in image processing and analysis will find this a very useful and interesting volume, presenting the latest developments within an exciting and important area in mathematical science. It would now be time to have a modern and solid textbook in the area, in which the depth of the topics remains, but the wider context of the field is presented.

Alfred Stein



Tonny A. Springer, Dirk van Dalen (eds.)
Hans Freudenthal, Selecta

European Mathematical Society, 2009

661 p., prijs €128

ISBN 9783037190586

In de serie *Heritage of European Mathematics* is uitgegeven de *Selecta*, Hans Freudenthal, een keuze uit het werk van Freudenthal. De serie heeft als zinspreuk: "Il me paraît que si l'on veut faire des progrès dans les mathématiques, il faut étudier les maîtres" (Niels Abel, Paris Notebook, August 1826). Eerder verschenen in deze serie onder andere *Lobatchevsky*, *Pangeometry*, uitgegeven door A. Papadopoulos, en *The mathematical writings of Evariste Galois*, bezorgd door P.M. Neumann. De onderhavige uitgave is bezorgd door T.A. Springer en D. van Dalen. Het is een keuze uit het wiskundige werk van Freudenthal. De didactiek van de wiskunde, een gebied waarop Freudenthal bijzonder actief geweest is en onmiskenbaar zijn sporen heeft nagelaten, is in deze uitgave buiten beschouwing gelaten. Uit de bespreking van dit werk in het *Zentralblatt MATH*, (Zbl 1186.01026), blijkt dat een soortgelijke uitgave van het pedagogische werk van Freudenthal in voorbereiding is. Volgens de telling van de *Mathematical Reviews* heeft Freudenthal vanaf 1936 op verschillende gebieden van de wiskunde in totaal 154 artikelen gepubliceerd. De gebieden zijn in afnemende aantallen van publicaties geordend: geschiedenis van de wiskunde, logica en grondslagen, topologie, groepen en Lie-groepen, enzovoort. In bijna al zijn publicaties neemt Freudenthal de tijd om in de inleidende beschouwing een heldere uiteenzetting te geven van doel en opzet van het onderzoek en zijn plaats in de literatuur aan te wijzen, en wel op een wijze die ook aan de niet ingewijde lezer inzicht biedt. In het onderhavige werk zijn 41 artikelen opgenomen, elk voorzien van kort en bondig commentaar van de uitgevers. De gekozen artikelen geven een bijna-overdekking van het wiskundige werk van Freudenthal, al is de verhouding in aantallen artikelen per deelgebied allermindst in overeenstemming met de verdeling die vermeld is in de *Mathematical Reviews*. Het eerste artikel is een herdruk van het proefschrift, getiteld *Über die Enden topologischer Räume und Gruppen*, waarop Freudenthal op 6 oktober 1931 promoveerde. Het is de opmaat tot een (hier niet opgenomen) uitgebreide studie van natuurlijke compactificaties met behulp van zogenaamde eindpunten, die bekend zouden worden als Freudenthal-compactificaties. Freudenthal kwam in oktober 1930 naar Amsterdam door toedoen van Brouwer. Freudenthals belangstelling voor Brouwers intuïtionisme blijkt uit het artikel 'Zur intuitionistischen Raumbegriff'. De bloemlezing bevat verder een beschouwing over de geschiedenis

van de wiskunde, die tevens dienst deed als een boekbespreking van de 8ste druk van Hilberts boek *Grundlagen der Geometrie*. De tweede helft van de bloemlezing is geheel gewijd aan Freudenthals werk betreffende Lie-groepen. Het laatste artikel, 'Lie groups in the foundation of geometry' geeft een beeld van Freudenthals werk in Lie groepen en de meetkunde.

Tot besluit: ik beschouw dit boek als een waardig eerbetoon aan een groot Nederlands wiskundige.

Jan Aarts



Alex van den Brandhof, Jan Guichelaar, Arnout Jaspers (samenstellers)

De Pythagoras Code **Het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers**

Bert Bakker, 2011

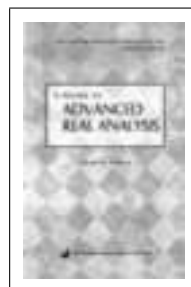
272 p., prijs €22,50

ISBN 9789035136465

Wat een feest der herkenning! In het najaar van 1961 zat ik in de vierde klas van het gymnasium en abonneerde me via mijn wiskundeleraar op *Pythagoras* dat toen als 'wiskundetijdschrift voor jongeren' begon. En ik ben nog steeds abonnee. *Pythagoras* werd toen uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap. In het eerste nummer stellen de redacteurs Gerrit Krooshof en Bruno Ernst het tijdschrift voor, onder andere met de volgende woorden: "We hopen, dat het tijdschrift *Pythagoras* voor zijn lezers twee doeleinden mag bereiken: belangstelling te wekken voor de wiskunde als gereedschap, dat in ons leven van vandaag onmisbaar is, maar daarnaast ook en vooral de innerlijke vreugde te verschaffen, die verbonden kan zijn aan het denken over wiskundige problemen." Dit werd onder andere geconcretiseerd met verhalen over de strofoïde, constructies met alleen de passer, de landmeetkundige Platlander die toevallig op een bol terecht komt, logica, de bijzondere eigenschappen van de oppervlakte van een vierhoek onder de grafiek van $f(x) = 1/x$, begrensd door de positieve x -as, de grafiek en de lijnen $x = 1$ en $x = p$, de paradox van de scheepskapper en denkertjes en andere puzzels. Het bijzondere van de eerste jaargangen van *Pythagoras* was dat bij elk artikel werd aangegeven wat de moeilijkheidsgraad ervan was door middel van één, twee of drie kleine cirkeltjes. De bijdragen van het huidige *Pythagoras*, nu uitgegeven door het Koninklijk Wiskundig Genootschap, met nog steeds als ondertitel 'wiskundetijdschrift voor jongeren' hebben nog altijd hetzelfde karakter. Uit een nummer van de 51ste jaargang: verhalen over sportrecords, een seconde in het vierkant (over de geografische seconde), cellulaire automaten, de computer als illustrator, krommen op de wereldbol, sudoku's en diagonalen, en de opgaven van de Pythagorasolympiade (de opvolger van de denkertjes). De *Pythagoras Code* is uitgekomen bij gelegenheid van het vijftigjarig bestaan van *Pythagoras*. Het bevat een selectie van de bijdragen uit de eerste vijftig jaargangen. Die bijdragen zijn gerubriceerd in denkertjes, geschiedenis van de wiskunde, puzzels en spellen, wiskunde en kunst, meetkunde, getallen en dionigma's: een collectie exclusieve opgaven die tussen 1996 en 2007 zijn bedacht door redacteur Dion Gijswijt. Op het omslag staat de 'onmogelijke' figuur waarmee Simon Biesheuvel de Escherprijsvraag won, die in 1998 bij het honderdste geboortjaar van Escher door *Pythagoras* werd uitgeschreven. De rijke inhoud bevat veel lezenswaardige wiskundige verhalen en uitdagende denkertjes, puzzels, opgaven, breinbrekers en spellen, al hadden er wat mij betreft wel wat meer verhalen in gemogen, ik ben

niet zo'n puzzelmens. De door de toenmalige redactie ingezette lijn met een grote variatie aan leuke en inspirerende wiskunde, afwijkend van en soms voortbouwend op de schoolwiskunde, bestaat nog steeds in het huidige *Pythagoras* en heeft geleid tot de bloemlezing van *De Pythagoras Code*. Zeker voor wie niet alle jaargangen heeft, is dit boek van harte aanbevolen.

Bert Zwaneveld



Gerald B. Folland

A Guide to Advanced Real Analysis

Mathematical Association of America, 2009

MAA Guides #2

107 p., prijs \$ 49,95

ISBN 9780883853436

In dit boekje behandelt de bekende schrijver Gerald B. Folland enkele onderwerpen uit de reële analyse met de classificatie 'geavanceerd'. De context waarin de verschillende onderwerpen worden behandeld is inderdaad abstracter dan bij de behandeling van de klassieke reële analyse van functies van een of meer variabelen, zoals men die in de regel aantreft in de curricula van wiskundeopleidingen in de bachelorfase.

Veel wiskundigen zullen van dezelfde auteur het boek *Real Analysis* kennen, een klassieker op het gebied van de analyse (de eerste editie is verschenen in 1988 en de tweede in 1999, uitgegeven door John Wiley). In feite is het boekje *A guide to Advanced Real Analysis* (hierna kortweg *Guide* genoemd) hiervan een compacte versie. Echter, de auteur beweert dat de *Guide* niet alleen een 'condensed version' is van *Real Analysis*, maar ook geschreven is vanuit een ander perspectief. Dit nieuwe perspectief gaf aanleiding tot een andere volgorde in de behandeling van de verschillende onderwerpen, maar de globale indeling is hetzelfde gebleven. Behalve compact is de *Guide* ook een ingekorte versie van *Real Analysis*. Zo zijn toepassingen op het gebied van de partiële differentiaalvergelijkingen en van de kansrekening weggelaten en is de behandeling van de Fourier-analyse en distributies duidelijk beperkt. De globale indeling van de *Guide* is als volgt.

De *Guide* begint met een proloog, waarin een overzicht van de elementaire verzamelingenleer is opgenomen, afgesloten met Zorns lemma en het keuzeaxioma. Het eerste hoofdstuk ('Topology') kent een algemene verhandeling over topologische en metrische ruimten. Centraal in dit hoofdstuk staan: de stelling van Tychonoff, lokaal-compacte Hausdorff-ruimten en de Baire-categoriëstelling. Daarna volgen twee hoofdstukken over maat- en integratietheorie. Hoofdstuk 2 bevat de algemene theorie over dit onderwerp (σ -algebra's, meetbare verzamelingen) en ontwikkelt de integraaltheorie voor reële en complexwaardige functies, en niet alleen voor functies van één variabele. Zo wordt de stelling van Fubini–Tonelli behandeld. Met betrekking tot convergentie van integralen en functies is er evident aandacht voor Fatou's lemma en de dominated convergence theorem. De stelling van Lebesgue–Radon–Nikodym sluit dit hoofdstuk af. Hoofdstuk 3 zoomt in op specifieke constructies van maten (Lebesgue-maten en Hausdorff-maten) en schenkt speciale aandacht aan reguliere Borel-maten op de reële getallenrechte. In dit kader komen de functies van begrensde variatie aan de orde. De Riesz-representatiestelling wordt geformuleerd in de context van σ -compacte lokaal compacte Hausdorff-ruimten. Aan L^p -ruimten is een apart hoofdstuk (Hoofdstuk 5) besteed, maar deze wordt eerst, zoals dat ook in *Real Analysis* is ge-

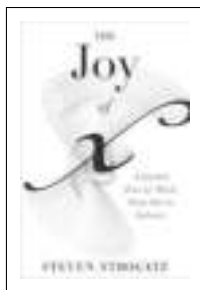
beurd, voorafgegaan door een hoofdstuk (Hoofdstuk 4) over 'Rudiments of Functional Analysis' (genormeerde vectorruimten, Hilbert-ruimten en begrensde lineaire afbeeldingen). Het boek wordt afgesloten met 'Topics in Analysis on Euclidean Space' (Hoofdstuk 6). Dit hoofdstuk bevat een korte verhandeling over de essentialia van de Fourier-theorie en eindigt met een elegante inleiding over distributies.

Vraagstukken ontbreken. De *Guide* is mede daarom als leerboek minder geschikt, maar voldoet uitstekend als een gids die de lezer rondleidt in de fraaie delen van de analyse. Opvallend in de *Guide* is de elegante en motiverende opzet van de maat- en integratietheorie.

De scepticus die deze theorie wat overdreven vindt en die denkt dat hij in zijn dagelijkse praktijk met een intuïtief beeld van een integraal kan volstaan, komt tot inkeer bij het lezen van de Banach–Tarski-paradox die in de *Guide* helder wordt uiteengezet. Ondanks de compactheid van de inhoud, worden de stellingen in een algemene context geformuleerd. De bewijzen worden in de regel schetsmatig gegeven. Voordeel van schetsmatige bewijzen is dat de ideeën die aan een bewijs ten grondslag liggen veel beter in kaart worden gebracht.

Al met al is de *Guide* een leuk boekje om snel een goed overzicht te hebben van de meer geavanceerde reële analyse. *Hennie ter Morsche*

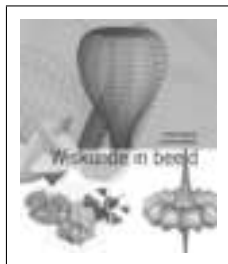
Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



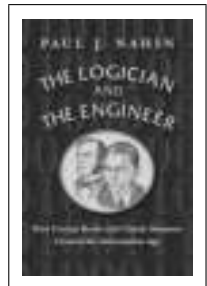
Steven Strogatz
The Joy of x
A Guided Tour of Math, From One to Infinity
 Eamon Dolan/Houghton Mifflin Harcourt, 2012
 ISBN 9780547517650
www.hmhbbooks.com/hmh/site/hmhbooks/bookdetails?isbn=9780547517650



P. Drijvers, A. van Streun, B. Zwaneveld (red.)
Handboek wiskundendidactiek
 Epsilon Uitgaven, 2012
 ISBN 9789050411301
www.epsilon-uitgaven.nl/E72.php



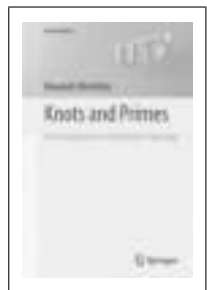
Georg Glaeser, Konrad Polthier
Wiskunde in beeld
 Vertaling Anne Frehen
 Veen Magazines, 2012
 ISBN 9789085712503
www.veenmedia.nl/nl/online-bestellen/86549152844



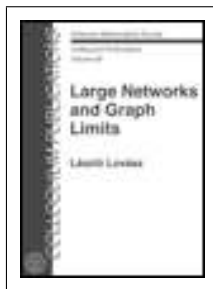
Paul J. Nahin
The Logician and the Engineer
How George Boole and Claude Shannon Created the Information Age
 Princeton University Press, 2012
 ISBN 9780691151007
press.princeton.edu/titles/9819.html



John B. Walsh
Knowing the Odds
An Introduction to Probability
 AMS, 2012
 ISBN 9780821885321
www.ams.org/bookstore-getitem/item=gsm-139



Masanori Morishita
Knots and Primes
An Introduction to Arithmetic Topology
 Springer Verlag, 2012
 ISBN 9781447121572
www.springer.com/mathematics/numbers/book/978-1-4471-2157-2



László Lovász
Large Networks and Graph Limits
 AMS, 2012
 ISBN 9780821890851
www.ams.org/bookstore-getitem/item=coll-60



Carel Faber, Gavril Farkas, Robin de Jong (eds.)
Geometry and Arithmetic
 European Mathematical Society, 2012
 ISBN 9783037191194
www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=155

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 Euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 Euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is 1 March 2013.

Problem A (proposed by Jan Turk)

Let $\phi(n)$ denote the Euler totient function. Find the set of limit points of the sequence $(\phi(n)/n)_{n=1}^{\infty}$.

Problem B

Find nonzero integers c_0, c_1, c_2, c_3 such that the sequence given by $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 68, a_4 = 504$, and

$$a_{n+4} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + c_3 a_{n+3} \quad (n > 0)$$

consists of positive terms and has the property that a_m divides a_n whenever m divides n .

Problem C (proposed by Johannes Winterink)

A circle in $\mathbb{R}^2$ is called *Apollonian* if its centre coordinates and radius are all integers.

Do there exist eleven distinct Apollonian circles $A, B, C, T_1, \dots, T_8$ such that for $i = 1, \dots, 8$, the circle T_i is tangent to A, B , and C ?

Edition 2012-2 We received solutions from Wouter Cames van Batenburg (Leiden), Cor Hurkens (Eindhoven), Thijmen Krebs (Nootdorp), José H. Nieto (Maracaibo) and Hans Zantema (Eindhoven).

Problem 2012-2/A Let P and Q be distinct points in the plane. Let $n \geq 2$. Assume n distinct lines through P but not through Q are given, as well as n distinct lines through Q but not through P . Let T be a collection of $2n$ intersection points of these lines. Suppose that the (unoriented) angle between the lines RP and RQ is the same for all R in T , and not a multiple of $\frac{1}{4}\pi$. Show that T can be partitioned into subsets of at least three elements each, such that every subset consists of the vertices of a regular polygon.

Rectification. The common angle in this problem should not be a multiple of $\pi/4$. (Thanks to Thijmen Krebs for pointing this out.)

Solution We received a correct solution from Thijmen Krebs.

All angles are oriented angles modulo π , unless stated otherwise. Let α be the unoriented angle modulo π of the common angle of the $\angle PRQ$, where $R \in T$.

Observation 1. Every line through P (resp. Q) contains exactly two points of T .

Proof. Let L be a line through P . As Q is not on this line, there is a unique isosceles triangle with base inside L , top Q , and base angles α . Hence there are at most two points of T on any given line through P . But since we have n lines going through P , and $\#T = 2n$, it must follow that every line must contain exactly two points of T . The same argument holds for Q . $\square$

Observation 2. The set T is a subset of the union of two distinct circles intersecting at P and Q .

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Jinbi Jin

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Proof. Note that by the inscribed angle theorem, the subset T_+ of T consisting of the points $R \in T$ such that $\angle PRQ = \alpha$ lies on a circle Γ_+ containing P and Q , and that the subset T_- of T consisting of the points $R \in T$ such that $\angle PRQ = -\alpha$ also lies on a circle Γ_- containing P and Q . Moreover, these circles are distinct since $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi$ by assumption. $\square$

We now define two maps $f_P, f_Q: T_+ \rightarrow T_-$ as follows. Let $R \in T_+$. Then $f_P(R)$ (resp. $f_Q(R)$) is the unique intersection point of the line RP (resp. RQ) with Γ_- not equal to P (resp. Q). This map is well-defined, as for $R \in T_+$, we have $\angle P f_P(R) Q = \angle P f_Q(R) Q = -\alpha$, hence $f_P(R), f_Q(R) \in T_-$ by Observation 1.

Observation 3. *The maps f_P and f_Q are bijections. In particular, $\#T_+ = \#T_- = n$.*

Proof. We simply note that the inverse is given by sending $R \in T_-$ to the unique intersection point of the line RP (resp. RQ) with Γ_+ not equal to P (resp. Q). $\square$

Observation 4. *The maps $f_P^{-1} f_Q$ and $f_Q f_P^{-1}$ are rotations by 4α (as an oriented angle modulo 2π) on T_+ and T_- , respectively (with centres those of Γ_+ and Γ_- , respectively).*

Proof. Let $R \in T_+$. Then $\angle PRQ = \angle Q f_Q(R) P = \alpha$, it follows that $\angle R P f_P^{-1} f_Q(R) = \angle R P f_Q(R) = 2\alpha$. Hence if C_+ is the centre of Γ_+ , then $\angle R C_+ f_P^{-1} f_Q(R) = 4\alpha$, as an oriented angle modulo 2π . The same argument works for $f_Q f_P^{-1}$. $\square$

Now we note that the orbits of T_+ (resp. T_-) under the action of $f_P^{-1} f_Q$ (resp. $f_Q f_P^{-1}$) all have the same length by the above, which hence divides n , so it follows that $f_P^{-1} f_Q$ and $f_Q f_P^{-1}$ have order dividing n . Hence $4n\alpha = 0$ modulo 2π , so $\alpha = 0$ modulo $\pi/2n$. As we assumed that α was not a multiple of $\frac{1}{4}\pi$, it follows that orbits of length at most 2 cannot occur. Orbits of higher length are sets whose vertices form a regular polygon with at least three vertices, so we are done.

Problem 2012-2/B Show that there exist an $n \geq 1$, a polynomial $P \in \mathbb{Z}[X, Y_1, \dots, Y_n]$ and an infinite set S of positive integers such that the set

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Z}^n : P(k, y_1, \dots, y_n) = 0\}$$

is empty for all $k < 0$ and has precisely k elements for all $k \in S$.

Solution We received a correct solution from Thijmen Krebs.

An example can be deduced from Jacobi's four-square theorem. It states that for each positive integer p , the number of solutions $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{Z}^4$ to

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = p$$

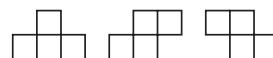
is $r_4(p) = 8 \sum_{d \in D} d$, where D is the set of divisors of p that are not multiples of 4. In particular, if p is prime we have $r_4(p) = 8(p+1)$.

Set $n = 4$ and let $P \in \mathbb{Z}[X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$ be the polynomial

$$P = 8(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + 1) - X.$$

Define $S = \{8(p+1) : p \text{ prime}\}$. The equation $P(k, y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ has no solutions for $k < 0$. For $k = 8(p+1) \in S$ the equation reduces to $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = p$, which has $r_4(p) = k$ solutions.

Problem 2012-2/C Is it possible to tile a 30 by 30 square grid using the following blocks?

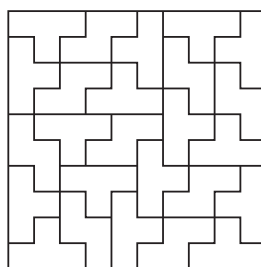


Solution We received correct solutions from Wouter Cames van Batenburg, Cor Hurkens, Thijmen Krebs, José H. Nieto and Hans Zantema. The book token goes to José H. Nieto.

Oplossingen

| Solutions

There exists a tiling as desired. In fact, we can already tile a 10×10 grid.



Note that we do not even need both types of Z-tiles.

More generally, an $n \times m$ grid can be tiled with the given pieces if and only if n and m are at least 4, nm is divisible by 4, and (n, m) is not $(6, 6)$, $(6, 10)$ or $(10, 6)$.

