

# Inhoud | Contents

## Artikelen | Features

- Interview | Interview**
- 84 **Richard Gill: De Lucia-zaak heeft mijn leven ingrijpend veranderd** *Klaas Landsman, Hans Maassen*
- Onderzoek | Research**
- 92 **Patiënten in getallen: wiskunde toegepast in de neurologie** *Natasha Maurits*
- Evenement | Events**
- 100 **NMC 2012: Een dynamisch ééndaags congres** *Jos Maubach, Gerhard Woeginger*
- Geschiedenis | History**
- 102 **Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968** *Ed de Moor, Sieb Kemme*
- Onderzoek | Research**
- 110 **Dynamica en periodieke rijen** *Frans Oort*
- Recreatieve wiskunde | Recreational maths**
- 112 **Een wiskunstenaar: portretten van wiskundigen en tegeltjes** *Henk van der Vorst*
- Boekbespreking | Book review**
- 117 **Succesverhalen om beleidsmakers te overtuigen** *Sjoerd Rienstra*
- Evenement | Events**
- 119 **NWD: IJscoupes bereiden en boten bouwen** *Messalina Heimans*
- Biografie | Biography**
- 121 **Pierre Marie van Hiele: Een leven lang wiskundig denken** *Harrie Broekman, Nellie Verhoef*
- Onderzoek | Research**
- 127 **Het minimale opspannend bos** *Wim Pijls*
- Boekbespreking | Book review**
- 131 **Slecht in wiskunde** *Derk Pik*
- Maatschappij | Society**
- 133 **SWI 2011: Energiemanagement van een draadloos sensornetwerk** *Bennie Mols*
- Onderwijs | Education**
- 135 **Met de trein van Utrecht naar Ankara: over oneindig gesproken** *Eric Cornet*

## Rubrieken | Departments

- 74 **Colofon**
- 75 **Redactioneel** *Ferdinand Verhulst*
- 76 **Servicepagina**
- 77 **Agenda** *Martijn Zaal*
- 79 **Nieuws** *Martijn Zaal*
- 83 **De derde wet** *Ferdinand Verhulst*
- 98 **In de verdediging** *Geertje Hek*
- 125 **Het keerpunt van Jan Sijbrand** *Ionica Smeets*
- 137 **Boekbesprekingen**
- 142 **Problemen**

### Uitgelicht



Een openhartig interview met de vooraanstaande en spraakmakende statisticus Richard Gill op pagina 84.



Ed de Moor en Sieb Kemme beschrijven het meetkundeonderwijs van voor de invoering van de Mammoetwet op pagina 102.

## Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

### Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde  
Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121  
redactie@nieuwarchief.nl  
www.nieuwarchief.nl

### Hoofredactie

Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

### Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

### Redactie

Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)  
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)  
Steven Wepster (s.a.wepster@uu.nl)  
Martijn Zaal (m.m.zaal@vu.nl)

### Bureau redactie

Lætitia Diemer  
Harm de Vries

### Medewerkers

Gerard Alberts (UvA), Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier (VU), Ronald van Luijk (UL), Derk Pik (JSG Maimonides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL), Wouter Zomervrucht (UL)

### Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

### Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

### Abonnementen/Subscriptions

Ten Brink abonnementenservice  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

### Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode.

The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

### Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library  
Centrum voor Wiskunde en Informatica  
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam  
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

### Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)  
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)  
**Programmatuur** (CONTEX)  
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)  
**Druk**  
Drukkerij Ten Brink, Meppel

## Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven' is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €80 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €40. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €30 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60.

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €10 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €12,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €100 (Nederland), €110 (Europa) of €112,50 (buiten Europa). Website: [www.wiskgenoot.nl](http://www.wiskgenoot.nl)

### Ledenadministratie

Ten Brink abonnementenservice  
Postbus 41  
7940 AA Meppel  
admin@wiskgenoot.nl, tel. 088-2265256

### Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

André Ran (VU, voorzitter), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Krüger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster, Gert Vegter (RUG)

## Informatie voor auteurs

### Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op [www.nieuwarchief.nl](http://www.nieuwarchief.nl).

### Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

### Volgende nummers

| nummer | verschijningsdatum | deadline kopij |
|--------|--------------------|----------------|
| 3      | 03-09-2012         | verstreken     |
| 4      | 03-12-2012         | 01-08-2012     |
| 1      | 04-03-2013         | 01-11-2012     |
| 2      | 03-06-2013         | 01-02-2013     |

## Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde  
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit  
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit  
Nijmegen

### FIsm

Freudenthal Instituut

## Op het omslag

Voor de diagnostiek van spier- en zenuwziekten wordt de spierkracht van patiënten gemeten. Hoe daar beschrijvende statistiek bij gebruikt wordt, kunt u lezen in het artikel van Natasha Maurits op pagina 92. (Afbeelding uit 'Einführung in die Biologie des Menschen', Verlag Moritz Diesterweg.)

# Vintage wiskundigen

Het komt met enige regelmaat voor dat iemand me vraagt of er nog wat gebeurt in de wiskunde. Van nature ben ik nogal ongeduldig (hoe kun je zoiets vragen!), maar ik probeer dan toch altijd uit te leggen hoe levendig het is in dit vak. Een bezoek aan het Nederlands Mathematisch Congres op 12 april jongstleden maakte dit ook weer overduidelijk, temeer omdat het congres in een hogedrukpan van een dag was geconcentreerd. Het gaf veel indrukken, ook over de toekomst van de wiskunde.

Dit nummer gaat over uiteenlopende zaken als medische toepassingen door Natasha Maurits, periodieke rijen door Frans Oort, een stuk over Van Hiele die zich zo'n honderd jaar met meetkunde bezig hield en dan het eerste deel van de geschiedenis van de discussies rond het meetkundeonderwijs, behandeld door Ed de Moor en Sieb Kemme. Die geschiedenis van de meetkunde is nog steeds actueel. Henk van der Vorst heeft na de numerieke wiskunde een nieuw, interessant speelveld gevonden in het creatief omgaan met wiskunde en betegelingen.

Bijzondere interviews zijn tot stand gekomen met twee opmerkelijke wiskundigen, Richard Gill en Jan Sijbrand. Gill vertelt openhartig over zijn werk en leven, waarbij zijn aandeel in het steekspel rond Lucia de B. veel aandacht krijgt; het verhaal met zijn brede maatschappelijke aspecten is schokkend. Sijbrand is na het schrijven van een excellent proefschrift en enige jaren wiskundig werk in de financieel-economische hoek terecht gekomen, tegenwoordig als directeur van De Nederlandsche Bank. De band met de wiskunde is toch nog aanwezig, leest u zelf.

Opvallend op congressen en mathematische instituten, en ook dus in het NAW, is de grote bijdrage van ouderen, de vintage wiskundigen. Je ziet dat ook aan bovengenoemde artikelen. Vijftig jaar geleden was je als wetenschapper afgeschreven na je dertigste, nu is er boven de vijftig vaak nog veel wetenschappelijk leven. Is dat een echte cultuuromslag en zo ja, hoe komt dat? Het lijkt een echt verschijnsel te zijn. Allereerst komt dat natuurlijk door de sterk verbeterde gezondheidszorg die zorgt voor vitaliteit op hogere leeftijd. Minstens even belangrijk zijn echter de voorwaarden waaronder creativiteit tot stand komt. We komen hier op een zorgelijke kant van de zaak. De jongeren, laten we zeggen degenen onder de veertig, staan onder grote druk om te produceren in de vorm van artikelen, subsidieaanvragen, internationale

contacten en organisatie. Jongeren zullen geen grote fundamentele onderzoeksprojecten aanpakken omdat de uitkomst daarvan veel te onzeker is, de kans om te scoren met fundamenteel onderzoek is klein en weg is dan de financiering. De beroepsbestuurders, die meestal geen notie hebben van wetenschappelijk onderzoek, streven ernaar om jaar in jaar uit deze druk te verhogen. Echte creativiteit komt echter niet onder externe druk tot stand. In een bedrijf als 3M in Minnesota heeft men dat goed begrepen. Het is een van de meest innovatieve bedrijven ter wereld met meer dan 55000 producten, maar in werktijd laat men personeel ook naar behoefte spelletjes doen en wandelen. Hun creatieve output wordt verkregen door de mensen ruimte te geven, ze stellen dan onconventionele vragen en geven misschien dito antwoorden. Dat zou ook als vanzelfsprekend op de universiteit moeten gebeuren, dat is toch bij uitstek de plaats voor 'free-floating imagination'. Het is ook belangrijk om de tijd te hebben om buiten je directe vakgebied te kijken, dat geeft soms een frisse kijk op oude zaken. Het woord 'universiteit' suggereert het universele, het veelzijdige, maar die betekenis zou je kunnen vergeten in gespecialiseerde diploma-fabrieken. De university colleges die de laatste jaren zijn ontstaan, als eerste bij de UU, geven met hun brede bachelor wel de juiste aanzet met hun opleiding, de studenten die er vandaan komen doen het in het algemeen ook goed. In hun vervolgoopleidingen komen ze echter toch weer in het traditionele patroon terecht.

Over ouderen, verbonden aan de universiteit, had ik eens een gesprek met David de Wied (1925–2004, eminent medisch-bioloog, president van de KNAW). De Wied vond dat er van oudere wetenschappers onvoldoende 'gebruik' werd gemaakt; hij had daarover een notitie geschreven, maar zijn universiteit had er niets mee gedaan. Als ouderen inderdaad een bijzondere bijdrage kunnen leveren, dan zou het KWG hier eens een adviserend rapport aan moeten wijden. Wellicht kan de wetenschappelijke output van de universiteiten langs deze weg kwalitatief flink omhoog.

**Ferdinand Verhulst**, hoofdredacteur

*Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht*

# Servicepagina

| Service page

## Koninklijk Wiskundig Genootschap

### □ Secretariaat

Joke Blom, CWI  
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam  
wiskgenoot@wiskgenoot.nl  
www.wiskgenoot.nl

### □ Nederlands Mathematisch Congres

Het 48ste Nederlands Mathematisch Congres vond plaats op de Technische Universiteit Eindhoven. Het was weer een succesvol congres met meer dan 200 deelnemers en een zeer veelzijdig programma. Terugkerend onderdeel van het NMC is de Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Tijdens de ALV is André Ran unaniem gekozen tot voorzitter van het KWG, als opvolger van Gert Vegter. Het 49ste Nederlands Mathematisch Congres zal in Nijmegen plaatsvinden.

### □ Philips Wiskundeprijs voor Promovendi

Tijdens het NMC 2012 hebben twaalf kandidaten een voordracht gegeven in de strijd om de zevende Philips Wiskundeprijs voor Promovendi. De prijs, een geldbedrag en een wisselbeker, is toegekend aan Ruben van der Zwaan promovendus van de Universiteit Maastricht met de voordracht 'Intentions matter' over een intuïtieve en efficiënte methode voor een personalized search engine.

### □ Controle ledenadministratie

Nogmaals het verzoek de bij het KWG bekende adresgegevens te controleren. Uw gegevens kunt u vinden op [www.wiskgenoot.nl/watbiedt/ledenlijst.php](http://www.wiskgenoot.nl/watbiedt/ledenlijst.php). Eventuele verbeteringen graag per e-mail naar de ledenadministratie ([admin@wiskgenoot.nl](mailto:admin@wiskgenoot.nl)) met 'mailadres Nieuw Archief' als onderwerp en onder vermelding van uw 'relatienummer'.

## Platform Wiskunde Nederland

### □ Bureau PWN

Science Park 123, L013, 1098 XG Amsterdam  
[bureau@platformwiskunde.nl](mailto:bureau@platformwiskunde.nl)  
[pr@platformwiskunde.nl](mailto:pr@platformwiskunde.nl) (publiciteit)  
Tel: 020-5924006/06-51892525  
[www.platformwiskunde.nl](http://www.platformwiskunde.nl)

### □ PWN Nieuwsbrief

PWN publiceert maandelijks een PWN Nieuwsbrief, die op de website te vinden is. Actuele PWN informatie wordt verder zowel via de website als via Twitter gegeven.

### □ Vakantiecursus voor leraren

PWN organiseert dit jaar de vakantiecursus voor leraren met als titel 'De exacte benadering'. De vakantiecursus zal eind augustus plaatsvinden, zowel op het CWI als op de TU/e.

### □ Vacature redacteur Kennislink-pagina

PWN is op zoek naar een nieuwe redacteur voor de Kennislink-pagina wiskunde.

## European Mathematical Society

### □ 6ECM

Het 6th European Congress of Mathematics vindt plaats op 2–7 juli, in Krakau, Polen. Op de voorafgaande Council Meeting van de EMS zullen het KWG en PWN vertegenwoordigd worden door Herman te Riele, Jan Wiegerinck en Wil Schilders. Voor nadere informatie, zie [www.6ecm.pl](http://www.6ecm.pl).

### □ Encyclopedia of Mathematics

De Encyclopedia of Mathematics open access wiki is officieel in gebruik genomen. De website is het resultaat van een samenwerking tussen de EMS en Springer.

[www.encyclopediaofmath.org](http://www.encyclopediaofmath.org)

## Recente publicaties van het KWG

### □ Indagationes Mathematicae ([www.elsevier.com/locate/indag](http://www.elsevier.com/locate/indag))

*Special issue devoted to: Floris Takens (1940–2010)*; S. van Strien and H. Broer (eds.), Volume 22, issues 3–4 (gratis toegankelijk op [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)).

### □ Epsilon Uitgaven ([www.epsilon-uitgaven.nl](http://www.epsilon-uitgaven.nl))

72. *Handboek wiskundendidactiek*, Paul Drijvers, A. van Streun, B. Zwaneveld, €34,00, 2012.

71. *Kansrekening* – een introductie, A.J. van den Brandhof, €17,00, 2012.

70. *Wiskunde in Werking van A naar B*, M. de Gee, €34,00, 2011.

69. *De Riemann-hypothese* – een miljoenenprobleem, R. van der Veen en J. van de Craats, €19,00, 2011.

66. *Intuitionistische Analyse* – een constructief denkraam, D. van Dalen, €21,00, 2011.

### □ Zebra-reeks (Epsilon Uitgaven)

34. *De Ster van de dag gaat op en onder* – rekenen aan zonsopkomst en zonsondergang, A. Goddijn, €10,00, 2012.

33. *Ontwikkelen met Kettingbreuken*, M. Kindt en P.W.H. Lemmens, €10,00, 2011.

Manuscripten voor Epsilon Uitgaven kunt u mailen naar [c.boss@epsilon-uitgaven.nl](mailto:c.boss@epsilon-uitgaven.nl).

# Agenda

| Upcoming Events

## juni 2012

2 juni 2012

### ☐ De nacht van kunst en wetenschap

Festival van muziek, theater, wetenschap, debat en tentoonstellingen

**plaats** Binnenstad Groningen

**info** [www.denachtvankunstenwetenschap.nl](http://www.denachtvankunstenwetenschap.nl)

4 juni 2012

### ☐ Bessensap 2012

Jaarlijks evenement waarbij wetenschap en pers elkaar ontmoeten

**plaats** Museon, Den Haag

**info** [www.nwo.nl/bessensap](http://www.nwo.nl/bessensap)

4 – 6 juni 2012

### ☐ Parameter Estimation for Dynamical Systems

Workshop over het schatten van parameters in stochastische en deterministische dynamische systemen vanuit zowel een theoretisch als toegepast perspectief

**plaats** Eurandom, Eindhoven

**info** [www.eurandom.nl/events](http://www.eurandom.nl/events)

15 juni 2012

### ☐ Bèta onder de Dom 2012

Workshops over de nieuwe curricula voor natuurkunde, scheikunde en biologie, en de nieuwe NLT-modules

**plaats** Nog te bepalen

**info** [www.betasteunpunt-utrecht.nl/?pid=11](http://www.betasteunpunt-utrecht.nl/?pid=11)

18 – 22 juni 2012

### ☐ Summerschool Macroscopic and large scale phenomena

Summerschool over macroscopische fenomenen in dynamische systemen

**plaats** Universiteit Twente

**info** [aacs.ewi.utwente.nl](http://aacs.ewi.utwente.nl)

20 – 22 juni 2012

### ☐ HPOPT 2012

Twaalfde editie van de internationale workshop High Performance Optimization

**plaats** TU Delft

**info** [sites.google.com/site/hpopt2012](http://sites.google.com/site/hpopt2012)

## juli 2012

4 – 16 juli 2012

### ☐ IMO2012

53ste editie van de internationale wiskunde olympiade, dit jaar in Argentinië

**plaats** Mar del Plata, Argentinië

**info** [oma.org.ar/imo2012](http://oma.org.ar/imo2012)

23 – 27 juli 2012

### ☐ Summer School Poisson Geometry

Jaarlijkse Summer School, dit jaar over Poisson Meetkunde

**plaats** Universiteit Utrecht

**info** [www.projects.science.uu.nl/poisson2012/School.php](http://www.projects.science.uu.nl/poisson2012/School.php)

25 – 29 juli 2012

### ☐ Bridges 2012

Interdisciplinaire conferentie over de relatie tussen wiskunde en kunst

**plaats** Towson University, Baltimore

**info** [bridgesmathart.org/bridges-2012](http://bridgesmathart.org/bridges-2012)

30 juli – 3 augustus 2012

### ☐ Third Workshop on Graphs and Matroids

Workshop voor onderzoekers (inclusief postdocs en studenten) met ruimte voor discussie

**plaats** The Maastricht University School of Business and Economics

**info** [homepages.cwi.nl/~bgerards/workshops/2012](http://homepages.cwi.nl/~bgerards/workshops/2012)

30 juli – 3 augustus 2012

### ☐ From Conservative Dynamics to Symplectic and Contact Topology

Workshop over symplectische en contactmeetkunde, en de interactie met topologie en dynamische systemen

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

30 juli – 3 augustus 2012

### ☐ Conferentie Poisson Geometry

Conferentie voor onderzoekers en studenten over Poisson meetkunde

**plaats** Utrecht

**info** [www.projects.science.uu.nl/poisson2012/Conference.php](http://www.projects.science.uu.nl/poisson2012/Conference.php)

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Martijn Zaal

[agenda@nieuwarchief.nl](mailto:agenda@nieuwarchief.nl)

## augustus 2012

13 augustus – 7 september 2012

### □ **Modelling the Dynamics of Complex Molecular Systems**

Programma van twee workshops en twee focusgroepen over het moleculaire dynamica op verschillende schalen

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

20 – 24 augustus 2012

### □ **Resonance and Synchronization**

Workshop met als doel wetenschappers uit de wiskunde, natuurkunde, biologie en engineering die werken aan problemen gerelateerd aan resonantie en synchronisatie samen te brengen

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

20 – 31 augustus 2012

### □ **Summerschool Mathematics Education**

Zomerschool met lezingen, seminars en andere activiteiten over wiskunde in het lager en middelbaar onderwijs

**plaats** Universiteit Utrecht

**info** [www.utrechtsummerschool.nl](http://www.utrechtsummerschool.nl)

24 – 25 augustus, 31 augustus – 1 september 2012

### □ **Vakantiecursus Wiskunde**

Jaarlijkse cursus over wiskundeonderwijs, met dit jaar als thema 'De exacte benadering'

**plaats** TU/e, Eindhoven en CWI, Amsterdam

**info** [www.platformwiskunde.nl/onderwijs.vakantiecursus.wiskunde.htm](http://www.platformwiskunde.nl/onderwijs.vakantiecursus.wiskunde.htm)

## september 2012

3 – 7 september 2012

### □ **Modern Perspectives on Thin Sheets**

Interdisciplinaire workshop over het modelleren van diverse aspecten van dunne vellen

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

14 september 2012

### □ **Finale Nederlandse wiskundeolympiade**

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd, waarbij het Nederlandse team voor de internationale wiskundeolympiade 2013 zal worden geselecteerd

**plaats** TU/e, Eindhoven

**info** [www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)

17 – 21 september 2012

### □ **Active Dynamics on Microscales: Molecular Motors and Self-Propelling Particles**

Workshop over dynamica op microscopische schaal, met name zichzelf voortbewegende eiwitten

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

20 september 2012

### □ **Henri Poincaré Centennial Symposium**

Symposium met diverse binnen- en buitenlandse sprekers ter gelegenheid van de 100ste sterfdag van Henri Poincaré

**plaats** De Uithof, Utrecht

**info** [www.staff.science.uu.nl/~wepst101/poincare.html](http://www.staff.science.uu.nl/~wepst101/poincare.html)

21 september 2012

### □ **Wiskundetournooi**

Jaarlijkse wiskundewedstrijd voor teams van vijf middelbare scholieren uit de bovenbouw

**plaats** Radboud Universiteit, Nijmegen

**info** [www.ru.nl/wiskundetournooi](http://www.ru.nl/wiskundetournooi)

28 september 2012

### □ **Discovery Festival**

Uitgaansnacht-met-inhoud vol wetenschap, muziek, kunst en experimenten

**plaats** NEMO, Amsterdam

**info** [www.discoveryfestival.nl](http://www.discoveryfestival.nl)

## oktober–november 2012

3 – 5 oktober 2012

### □ **Woudschoten Conferentie**

Jaarlijkse conferentie van de Nederlandse en Vlaamse numerieke wiskundige gemeenschappen

**plaats** Woudschoten Conferentiecentrum, Zeist

**info** [wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php](http://wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php)

4 oktober 2012

### □ **Opening LorentzCenter@Snellius**

Officiële opening van de nieuwe locatie van het Lorentz Center

**plaats** LorentzCenter@Snellius, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

12 oktober 2012

### □ **Junior Wiskunde Olympiade 2012**

Jaarlijkse wiskundewedstrijd voor scholieren uit de onderbouw

**plaats** VU, Amsterdam

**info** [www.wiskundeolympiade.nl/junior](http://www.wiskundeolympiade.nl/junior)

15 – 19 oktober 2012

### □ **The Future of Phylogenetic Networks**

Workshop over het bestuderen van netwerkmodellen die in de evolutietheorie worden gebruikt

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lorentzcenter.nl](http://www.lorentzcenter.nl)

12 – 14 november 2012

### □ **41ste bijeenkomst Stochastici**

Jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse stochastici en statistici

**plaats** NEMO, Amsterdam

**info** [www.cwi.nl](http://www.cwi.nl)

14 – 18 november 2012

### □ **Upscaling Techniques and Homogenization**

Korte cursus over schalings- en homogenisatietechnieken voor modellen in een complex domein of met sterk oscillerende eigenschappen

**plaats** TU/e, Eindhoven

**info** [www.win.tue.nl/~pop/JMBCCourse.html](http://www.win.tue.nl/~pop/JMBCCourse.html)

18 november 2012

### □ **Waarom drijf je in de Dode Zee?**

Kinderlezing door natuurkundige Marcel Vreeswijk over dichtheid, drijven en zinken

**plaats** NEMO, Amsterdam

**info** [www.kinderlezingen.nl](http://www.kinderlezingen.nl)

29 november 2012

### □ **DIAMANT symposium**

Halfjaarlijks symposium van het DIAMANT onderzoekscloster

**plaats** Nog te bepalen

**info** [websites.math.leidenuniv.nl/diamant](http://websites.math.leidenuniv.nl/diamant)

# Nieuws

| News

*Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.*

Redacteur: Martijn Zaal

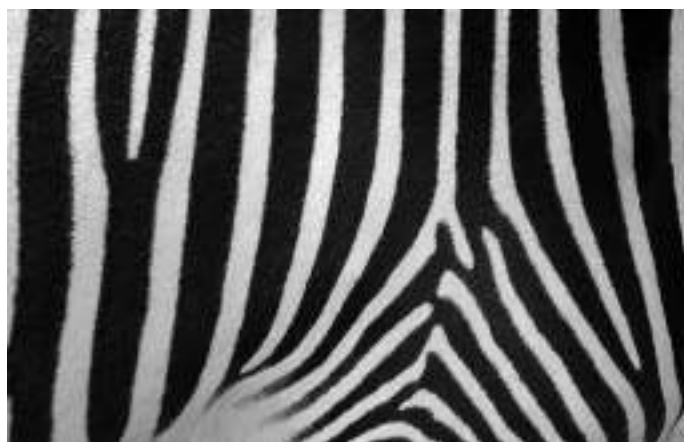
[nieuws@nieuwarchief.nl](mailto:nieuws@nieuwarchief.nl)

## Vici-beurzen voor Jan Bouwe van den Berg en Harry van Zanten

In de ronde van januari 2012 heeft NWO Vici-beurzen toegekend aan 31 topwetenschappers. Onder de gehonoreerde voorstellen zijn ook twee wiskundige onderwerpen.

Het voorstel 'De oorsprong van patronen', ingediend door Jan Bouwe van den Berg, is erop gericht om de patronen die in veel biologische systemen zichtbaar zijn te verklaren met behulp van meetkunde en computersimulaties. Daarnaast richt het onderzoek zich op chaotisch gedrag zoals bijvoorbeeld turbulentie.

'Grondslagen van de niet-parametrische Bayesiaanse statistiek', ingediend door Harry van Zanten, gaat over de ontwikkeling van een theoretische basis voor Bayesiaanse statistiek, die steeds meer wordt gebruikt voor complexe statistische problemen met grote aantallen onbekenden. Op dit moment is het niet duidelijk wat precies de mogelijkheden en beperkingen van deze technieken zijn. [www.nwo.nl](http://www.nwo.nl)



## Tien keer snellere draadloze verbinding

Onderzoek van het CWI en technologiebedrijf Thales heeft laten zien dat de snelheid van mobiele communicatie mogelijk tien keer hoger kan door het gebruik van meerdere netwerken tegelijkertijd.

Onderzoeker Gerard Hoekstra analyseerde verschillende wiskundige methoden om mobiel dataverkeer te verdelen over meerdere netwerken. Het blijkt dat door twee mobiele netwerken te gebruiken, de snelheid niet toeneemt met een factor twee. Als de netwerkbezetting varieert is zelfs een factor vijf tot tien haalbaar.

De resultaten zijn misschien op korte termijn al in de praktijk toepasbaar. Op veel plaatsen zijn al meerdere mobiele telefonie- of datanetwerken beschikbaar. Naast sneller wordt de communicatie door het gebruik van meerdere netwerken ook robuuster. [www.cwi.nl](http://www.cwi.nl)

## Wiskunde voor sierlijk haar bij Wisactueel

Hoe helpt wiskunde bij de ontwikkeling van een haarföhn? In de *Wisactueel* van maart 2012 is te lezen hoe onderzoeker Paul Ackermans, werkzaam bij Philips Research, onderzoek deed naar de natuurkunde en wiskunde die beschrijft hoe haar droogt onder een föhn. De kunst is om met behulp van de temperatuur de snelheid waarmee het haar opdroogt zorgvuldig uit te kiezen.

*Wisactueel* is een initiatief van Jongeren en Technologie Netwerk Nederland (Jet-Net), dat probeert meer jongeren te interesseren voor een bètatechnische vervolgopleiding. De digitale nieuwsbrief *Wisactueel* verschijnt vier keer per jaar. [www.wisactueel.nl](http://www.wisactueel.nl)

### Bronzen medaille bij wiskundeolympiade voor meisjes

Bij de eerste European Girls Mathematics Olympiad (EGMO) in Cambridge heeft Michelle Sweering (15) een bronzen medaille gewonnen. Twee andere teamleden, Marieke van Wegen (17) en Loes Bazuin (17), behaalden een eervolle vermelding. Het Nederlandse team behaalde de dertiende plaats in het landenklassement.

De EGMO is georganiseerd door de United Kingdom Mathematics Trust met de bedoeling om meisjes meer gelegenheid te geven om internationaal te excelleren in wiskunde. Het Nederlandse team wordt gesteund door het ministerie van OCW. [www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)

### Hongaar Szemerédi wint Abelprijs 2012

De Noorse Academie van Wetenschappen heeft de Abelprijs 2012 toegekend aan Endre Szemerédi vanwege zijn 'diepgaande en blijvende impact' op de discrete wiskunde en theoretische informatica.

Als een van de eersten onderkende Szemerédi het belang van discrete wiskunde voor de theoretische informatica. Zo kan bijvoorbeeld het internet als een graaf worden bestudeerd. Inmiddels heeft hij meer dan tweehonderd artikelen gepubliceerd en een flink aantal ontdekkingen op zijn naam staan. Zijn beroemdste werk is het bewijs van het Erdős-Turán-vermoeden, inmiddels beter bekend als de Stelling van Szemerédi. Deze stelling zegt dat binnen elke voldoende grote verzameling natuurlijke getallen willekeurig lange rekenkundige rijen te vinden zijn. Gebruikmakend van het werk van Szemerédi hebben Tao en Green in 2004 bewezen dat ook de verzameling van priemgetallen, die niet voldoet aan de eisen van de Stelling van Szemerédi, willekeurig lange rekenkundige rijen bevat.

De prijs, ongeveer 750.000 euro, is op 22 mei uitgereikt in Oslo, Noorwegen. [www.kennislink.nl](http://www.kennislink.nl)

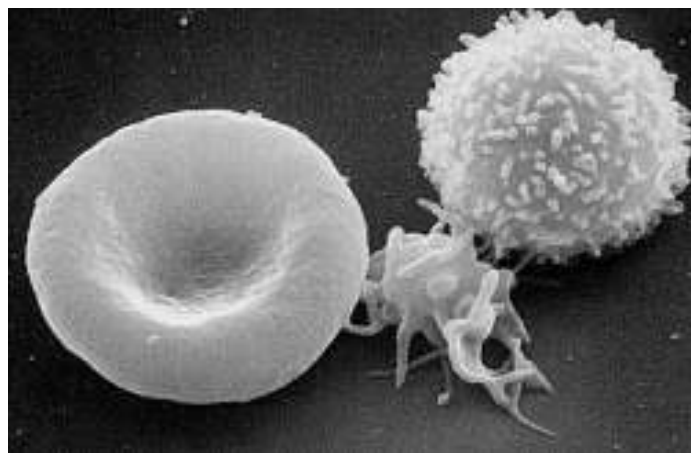


### Genezing door getallen

Veel diabetespatiënten hebben last van wonden die niet helen. Onderzoeker Fred Vermolen, verbonden aan de TU Delft, ontwikkelt wiskundige modellen die inzicht geven in dit probleem.

Om het helen van wonden goed te begrijpen, combineert Vermolen diverse wiskundige modellen voor verschillende aspecten van het helingsproces beschrijven, zoals bijvoorbeeld de groei van bloedvaten. De combinatie van deze modellen, die vaak in zichzelf al gecompliceerd zijn, leverde een complex 'supermodel' op met een groot aantal parameters.

Vermolen besloot opnieuw te beginnen en het gedrag van individuele cellen te modelleren, een aanpak die veel effectiever bleek. Een van de factoren die bij diabetespatiënten een rol blijkt te spelen is dat de wanden van bloedvaten veel stijver zijn. Hierdoor kunnen witte bloedcellen een besmette wond niet bereiken en daardoor ook niet ontsmetten. [delta.tudelft.nl](http://delta.tudelft.nl)



Witte bloedcel (rechts)

### PWN formuleert tien aandachtspunten voor rekenonderwijs

De onderwijscommissie van Platform Wiskunde Nederland (PWN) heeft tien aandachtspunten geformuleerd waar secties wiskunde in het middelbaar onderwijs op zouden moeten letten. De tien aandachtspunten variëren van aansluiting vanuit het basisonderwijs tot het zelfvertrouwen van leerlingen. De aandachtspunten zijn te lezen op de website van PWN. [www.platformwiskunde.nl](http://www.platformwiskunde.nl)

### Nederlandse Wiskunde Olympiade groeit nog altijd

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade heeft wederom meer deelnemers getrokken dan het jaar ervoor. Op 27 januari werkten 5574 deelnemers van 270 scholen aan de opgaven. Hiervan zijn 811 deelnemers uitgenodigd voor de tweede ronde, die op 23 maart werd gehouden aan twaalf Nederlandse universiteiten.

De beste 130 scholieren bij de tweede ronde worden uitgenodigd voor de landelijke finale aan de TU Eindhoven op 14 september. [www.wiskundeolympiade.nl](http://www.wiskundeolympiade.nl)

### Bewezen: Mario is NP-compleet

Onderzoekers van het Massachusetts Institute of Technology (MIT) hebben de computationele complexiteit van diverse videospelletjes, waaronder Mario en Donkey Kong, bestudeerd. Het blijkt dat het vinden van een route door het speelveld, waarbij bananenschillen, bliksemschichten en allerlei andere hindernissen moeten worden ontweken, net zo lastig is als bijvoorbeeld het vinden van een priemontbinding van een getal of de kortste route langs een rij steden.

De daadwerkelijk uitgegeven versies bestaan uit vooraf vastgestelde speelvelden met een vaste grootte waarin de obstakels zo geplaatst zijn dat het voor de speler mogelijk is om tussen alle hindernissen door te navigeren. De onderzoekers van MIT bestudeerden algemene speel-

velden van een onbeperkte grootte waarin de obstakels op elke manier geplaatst konden worden, zelfs zodanig dat het onmogelijk is om een route tussen de hindernissen door te vinden.

Het vinden van een route door een speelveld blijkt een NP-compleet probleem te zijn. In tegenstelling tot 'polynomiale' problemen is er voor de 'niet-polynomiale' (NP) problemen geen methode bekend waarmee een computer relatief snel het probleem op kan lossen. NP-complete problemen hebben een bijzondere extra eigenschap: als er voor één NP-compleet probleem een snelle oplossingsmethode wordt gevonden, dan kan deze methode worden vertaald naar een snelle oplossingsmethode voor elk NP-probleem. Voor de spelers van videospelletjes zou dit misschien goed nieuws zijn, maar voor veel bedrijven niet: veel online beveiligingen zijn gebaseerd op het feit dat het moeilijk is om van een getal de priemontbinding te vinden. [www.kennislink.nl](http://www.kennislink.nl)



### Wetenschap101 van start

In februari 2012 is het videoblog *Wetenschap101.nl* van start gegaan. Op dit blog verschijnen regelmatig filmpjes van maximaal 101 seconden waarin een wetenschappelijke vraag wordt beantwoord of een wetenschappelijk idee wordt uitgelegd. De makers, wiskundige Ionica Smeets en sterrenkundige Govert Schilling, willen op deze manier hun vakgebied promoten voor een breed publiek. Sinds de start zijn al diverse filmpjes verschenen, met titels als 'Hoe moeilijk is een sudoku?', 'Help, de aarde wordt steeds zwaarder' en 'Glaasje draaien — over verbazingwekkende rotaties'. [www.wetenschap101.nl](http://www.wetenschap101.nl)

### SOWISO lanceert online oefenomgeving wiskundeschool.nl

SOWISO, ontwikkelaar van educatieve software, heeft op pi-dag (14 maart) 2012 de online oefenomgeving *wiskundeschool.nl* gelanceerd. Met de lancering van deze website hoopt de ontwikkelaar de eindexamenresultaten bij wiskunde A te verbeteren.

Het bedrijf SOWISO is in 2009 ontstaan als spin-off van de TU Eindhoven. Een groot deel van de software is daar geschreven. Daarnaast hebben EIT ICT Labs en Stichting Computer Algebra Nederland bijgedragen aan de ontwikkeling van *wiskundeschool.nl*.

In tegenstelling tot veel andere oefenprogramma's werkt wiskun-

deschool.nl met open vragen. Bij een fout antwoord kan de software bovendien vaak herkennen welke fout de leerling heeft gemaakt.

Het komend jaar zal *wiskundeschool.nl* worden uitgebreid met andere wiskundevakken en richting havo-eindexamen.

[www.wiskundeschool.nl](http://www.wiskundeschool.nl)

### Brief rekenmachinegebruik naar Tweede Kamer

Naar aanleiding van een motie over het gebruik van de rekenmachine bij toetsen in het primair en voortgezet onderwijs hebben het College van Examens (CvE) en nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling (SLO) een advies opgesteld. Het CvE adviseert om het gebruik van de rekenmachine tijdens toetsen niet verder terug te dringen, omdat dit te koste zou gaan van andere exameneisen. Het advies van het SLO onderkent het risico dat rekenmachineverbruik leidt tot verdringing van basale rekenvaardigheid, maar stelt dat met het Referentiekader Rekenen, mede door de verplichte rekentoetsen, er al voldoende maatregelen zijn genomen. In het advies van SLO zijn ook de commentaren van diverse deskundigen opgenomen.

In haar brief aan de tweede kamer geeft minister Van Bijsterveldt van OCW aan op dit moment geen aanvullende maatregelen te nemen. De brief van de minister is, samen met de adviezen van CvE SLO, te lezen via de website van Steunpunt taal & rekenen vo.

[www.steunpunttaalenrekenenvo.nl](http://www.steunpunttaalenrekenenvo.nl)

### Lorentz Center breidt uit

Vanaf juli 2012 heeft het Lorentz Center beschikking over een nieuwe locatie voor workshops tot 25 deelnemers. De officiële opening van de nieuwe locatie, *LorentzCenter@Snellius*, zal plaatsvinden op 4 oktober. De nieuwe locatie zal worden gebruikt voor workshops over meer gespecialiseerde onderzoeksthema's. De bestaande locatie van het Lorentz Centrum, voortaan bekend onder de naam *LorentzCenter@Oort*, blijft beschikbaar voor workshops tot 55 deelnemers. [www.wetenschap101.nl](http://www.wetenschap101.nl)



### CWI onderzoekers analyseren foutgevoeligheid DNA-code

Onderzoekers van het CWI hebben laten zien dat de genetische code in DNA uitzonderlijk goed bestand is tegen kopieerfouten en mutaties. De genetische code is de manier waarop de samenstelling van aminozuren wordt opgeslagen in het DNA. Een kleine fout in het kopiëren of lezen van het DNA levert meestal geen problemen op.

De onderzoekers hebben laten zien dat, in vergelijking met andere

coderingen, de genetische code uitzonderlijk foutongevoelig is. Daarnaast hebben de onderzoekers een 'ideale' codering geconstrueerd. Het onderzoek is gepubliceerd in *Transactions of Computational Biology and Bioinformatics*. In een vervolgartikel in de *Journal of Molecular Evolution*, samen met onderzoekers van de Oklahoma State University, wordt een set van 23 codes voor alle benodigde aminozuren geconstrueerd, die mogelijk een voorloper is van de huidige genetische code.

[www.cwi.nl](http://www.cwi.nl)

#### Svend Pendersen Lecture Award voor Van den Heuvel-Panhuizen

De afdeling wiskunde- en wetenschapsonderwijs van de universiteit van Stockholm heeft de Svend Pendersen Lecture Award toegekend aan Marja van den Heuvel-Panhuizen.

De lezing is vernoemd naar wiskunde-didacticus Svend Penderon, die eind jaren '70 het initiatief nam om de resultaten van onderzoek naar wiskunde- en wetenschapsdidactiek op de te nemen in het curriculum van docentenopleidingen. Veel van het onderzoek dat vandaag nog wordt gedaan aan de afdeling wiskunde- en wetenschapsonderwijs is terug te voeren op zijn werk.

De prijs is toegekend aan Marja van den Heuvel-Panhuizen vanwege de invloed van haar werk op zowel het onderzoek van de afdeling wiskunde- en wetenschapsonderwijs in Stockholm als op reken- en wiskundedocenten in heel Zweden, met name op het gebied van beoordelen en toetsontwikkeling.

De Svend Pendersen Lecture vond plaats op 1 februari, en had dit jaar als titel 'Mathematics education research should come more often with breaking news'.

[www.wiskundepersdienst.nl](http://www.wiskundepersdienst.nl)



#### Slimmer plannen in de zorg

De capaciteit van ziekenhuizen kan beter worden ingezet door wiskundige methoden in te zetten bij het maken van de planning. Wiskundige Maartje Zonderland promoveerde op 27 januari 2012 op haar onderzoek naar deze problematiek (een uitgebreide bespreking is te lezen in de rubriek 'In de verdediging', verderop in dit blad).

Het probleem bij de planning in ziekenhuizen is dat er verschillende stromen van patiënten zijn. Bekend is de tegenstelling tussen spoedeisende en planbare zorg: vanzelfsprekend moet de spoedeisende zorg snel worden geboden, maar de wachttijd voor patiënten met een afspraak mag niet te ver oplopen. Daarnaast zijn er veel afhankelijkhe-

den: in toenemende mate combineren patiënten hun afspraken met specialisten met bijvoorbeeld een MRI-scan. Dit maakt het opstellen van een goede planning extra uitdagend.

Met behulp van wachtrijtheorie heeft Zonderland de problematiek rond planning in ziekenhuizen geanalyseerd. Het toepassen van deze wiskundige modellen heeft bijgedragen tot een verbetering in de planning van ziekenhuizen.

[www.utwente.nl](http://www.utwente.nl)

#### Hans Clevers nieuwe president KNAW

Per 1 juni 2012 volgt geneticus en arts Hans Clevers Robbert Dijkgraaf op als president van de KNAW. Tegelijkertijd treedt Clevers terug als directeur van het Hubrecht Instituut voor ontwikkelingsbiologie en stamcelonderzoek van de KNAW. Clevers blijft verbonden aan het UMC Utrecht als hoogleraar moleculaire genetica.

[www.knaw.nl](http://www.knaw.nl)



#### Ramanujan en het Indiase onderwijssysteem

Op 22 december 2012 zal de 125ste geboortedag van de Indiase wiskundige Srinivasa Ramanujan zijn. Tijdens zijn korte leven (Ramanujan werd slechts 32 jaar oud) heeft hij, met minimale wiskundige opleiding, een grote bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van onder meer de wiskundige analyse, getaltheorie, reeksen en kettingbreuken. Om zijn werk te eren heeft de Indiase overheid het jaar 2012 uitgeroepen tot nationaal jaar van de wiskunde.

Prof.dr. Arunabha Bagchi, werkzaam aan de Universiteit Twente, heeft in *The Statesman*, een van de oudste dagbladen van India, een artikel gepubliceerd waarin een verband wordt gelegd tussen het talent van Ramanujan en het huidige Indiase onderwijssysteem.

[www.thestatesman.net](http://www.thestatesman.net)

#### Rectificatie nieuwsbericht 'Overlijden van prof.dr. T.A. Springer'

In het nieuwsbericht 'Overlijden van prof.dr. T.A. Springer' in het NAW-maartnummer werd ten onrechte gesuggereerd dat professor Springer verbonden was aan het CWI. Professor Springer was werkzaam bij het Mathematisch Instituut te Utrecht.

# De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

derdewet@nieuwarchief.nl

*Het onderstaande is een reactie op het redactioneel 'Creatief wiskunde organiseren' door Ferdinand Verhulst uit het NAW-maartnummer van 2012.*

## Terug naar de regentenwereld van de 18de eeuw

Uw hoofdredactioneel in het maartnummer beschrijft wel aardig de rol van leidinggevende onderzoekers, maar gaat voorbij aan de unieke bestuurlijke situatie die in 1997 is ontstaan bij de universiteiten. Dat belangrijke aspect van de werkelijkheid wil ik graag toevoegen. Tot 1970 hadden de hoogleraren die samen de senaat van de universiteit vormden het grotendeels voor het zeggen. In 1970 kwam de wet universitaire bestuursvorming (WUB) van toenmalig minister Veringa tot stand; dit opende de mogelijkheid van inspraak en ook machtsvorming door andere groepen aan de universiteit. Bij de bètafaculteiten functioneerde dit in het algemeen goed, bij andere faculteiten gaf dit soms problemen. Dat verschil is op zich interessant. Een mogelijke verklaring is wellicht dat de sterke onderzoekstraditie bij de bètafaculteiten, gepaard gaande met een zakelijke werkinstelling, maakt dat het wetenschappelijk personeel meer een eenheid vormt dan bij alfa- en gammafaculteiten.

Hoe het ook zij, in 1997 werd bij voorstel van minister J.M.M. Ritzen de wet modernisering universitaire bestuursorganisatie (MUB) aangenomen met kamerbrede parlementaire steun. Dit is een curieuze wet die de wetenschappelijke onderzoekers, inclusief de hoogleraren, geheel machteloos maakt en het bestuur van de universiteit op consequent regenteske wijze organiseert. Het almachtige college van bestuur kan competent zijn, maar ook worden voorgezeten door lichtgewichten (voorbeeld: UU) en graaiers (voorbeeld: TUD), bijgestaan door apparatsjiks om hun zin door te drijven. Zoiets kan in elk bedrijf of constellatie gebeuren, maar er is hier geen mechanisme dat tot bijsturen leidt. Discussie en commentaar dat door wetenschappers naar buiten in de publiciteit wordt gebracht, wordt onmiddellijk afgestraft. Alleen gepensioneerde betrokkenen durven zich nog in het openbaar uit te spreken. De regentenstructuur wordt consequent voortgezet in de faculteiten door deze door een benoemde decaan te laten besturen; deze is, binnen het kader dat door het college van bestuur wordt gesteld, eveneens almachtig. Waar de WUB in 1970 een einde maakte aan de achterhaalde 19de-eeuwse macht van de hoogleraren, voerde de MUB de academische wereld terug in de regentenwereld van de 18de eeuw. Dit alles onder het bedrieglijke etiket van 'een meer bedrijfsmatige aanpak'. Gezegd moet worden dat er externe raden van toezicht zijn die door jaknikkende notabelen worden bevolkt; met serieuze evaluaties houden deze raden zich niet bezig. In opdracht van de Nederlandse regering werd in 2005 een evaluatie van de MUB uitgevoerd door een groep van de UT. De beoordeling van de MUB door de academische wereld op een schaal van 1 tot 10 was 6.4; indien we van de geënuqueterden de 16% bestuurders en ambtenaren aftrekken, kom je op een onvoldoende. De toenmalige staatssecretaris, de bekende liberaal Mark Rutte, maakte bekend dat de MUB goed functioneerde.

Om nu terug te komen op uw redactioneel, dan moeten we de hier samengevatte context erbij betrekken. Onderzoekers moeten zich onderwerpen aan een autoritaire bestuursstructuur, zij moeten zich aanpassen aan de waan van de dag in de vorm van modieuze onderzoeksthema's, ze kunnen een voor de wetenschap typerende onderzoekshorizon van twintig jaar wel vergeten. Ik raad veelbelovende jonge onderzoekers aan zich in het buitenland te vestigen.

*Marinus de Goede, Leiden/Pavia*

Klaas Landsman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Hans Maassen

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

maassen@math.ru.nl

Interview Richard Gill

# De Lucia-zaak heeft mijn leven ingrijpend veranderd

Richard Gill (1951) is een vooraanstaand en spraakmakend Brits/Nederlands statisticus. Hij was van 1974–1983 werkzaam als statistisch consultant op het Mathematisch Centrum en promoveerde in 1979 aan de VU. Gill was van 1983–1988 hoofd van de afdeling Mathematische Statistiek van het MC en bekleedde sinds 1986 verschillende leerstoelen in de stochastiek en statistiek in Utrecht en Leiden. Hij werd in 1999 gekozen tot lid van de KNAW, was van 2007–2010 president van de Nederlandse Vereniging voor Statistiek en Operations Research, en was in 2010–2011 Distinguished Lorentz Fellow op het NIAS in Wassenaar. Bij een groter publiek werd hij vooral bekend door zijn tomeloze (en uiteindelijk succesvolle) inzet voor de vrijlating van de tot levenslang veroordeelde Lucia de B. In dit interview door Klaas Landsman en Hans Maassen, vorig jaar april, blikt Richard Gill openhartig terug op zijn loopbaan tot nu toe.

Mijn ouders waren beiden licht autistisch, net als ikzelf. Ik geloof dat ze mij niet helemaal goed hebben voorbereid op het leven, vooral op de momenten dat het zwaar wordt. Maar ik zie de positieve kant, veel van je talenten worden ontwikkeld als compensatie voor gebreken in een ander domein. “Ieder nadeel heeft zijn voordeel”, zoals Johan Cruijff terecht zegt.

Mijn moeder was een van Alan Turing's ‘computers’ in Bletchley Park. Ze heeft daar vijftig jaar lang niet over mogen praten en ik weet het pas sinds tien jaar. Ze is nu 86. De meisjes in het Enigma-project wisten wiskundig totaal niet waar ze mee bezig waren, alleen dat hun werk tegen de Duitsers gericht en streng geheim was. Mijn wiskundeknobbel moet wel van haar komen, al is ze nauwelijks naar school geweest.

Mijn vader was experimenteel fysicus. In de oorlog studeerde hij natuurkunde in Cambridge, waardoor hij niet in het leger hoefde. Vervolgens deed hij toegepast onderzoek by de Paper Research Association en de Water Research Association in Surrey, waar ik de eerste helft van mijn jeugd doorbracht. Hij was een soort uitvinder

en deed bijvoorbeeld ook onderzoek naar bakstenen. Waarschijnlijk had hij een paar patenten, maar vanwege zijn politieke onhandigheid hebben die nooit tot een product geleid. Hij was bijzonder naïef en onbevangen. Hij werd ontslagen en werd uiteindelijk onderwijzer, maar dat liep uit op een mislukking. Hij is daarna nog bij de ontwikkeling van de *personal computer* betrokken geweest, je weet wel, in de dagen van de BBC- en Acorn-computers. Toen ze ontdekten hoe oud hij al was werd hij echter uit die functie ontslagen en zijn leven eindigde in een door Alzheimer verergerde depressie. Hij probeerde me destijds nog uit te leggen wat er in zijn brein gaande was door de vergelijking met iemand die eeuwig rondloopt op een Möbius-band.

Hij probeerde sowieso altijd alles te begrijpen. Als dat dan gelukt was, was hij zo gelukkig dat hij het onmiddellijk aan anderen uit wilde leggen. Die eigenschap heb ik zonder meer van hem geërfd.

## Cambridge

Na de middelbare school nam ik een *year out*. Ik was computerassistent by Rank Hovis

McDougall, die in de voedselbusiness zaten. De computers waren destijds enorme kasten met allemaal lichtjes die voortdurend aan en uit gingen. Ik schreef daar een *decompiler*. Vervolgens ging ik ook naar Cambridge, zelfs naar hetzelfde college als mijn vader (Gonville and Caius). Ik deed echter het Mathematical Tripos [1].

Vanwege mijn college had ik Stephen Hawking als supervisor voor *applied math* [2]. *Very off-putting*. Hij zat maar wat in een hoekje rond te kijken [doet dit na, zie foto linksboven op pagina 86]. Ik kreeg mede door hem een geweldige hekel aan *applied math*. Ik was ook al geen goed zuiver wiskundige, ik vond groepentheorie bijvoorbeeld vreselijk. Ik had sowieso geen ambitie voor een academische carrière. Ik had destijds totaal geen belangstelling voor onderzoek. Ik wilde iets praktisch doen. Ik was wel geboeid door calculus, analyse, topologie en kansrekening. Ik heb goede herinneringen aan het college ‘Markov Chains’ van David Kendall. En het college ‘Foundations of Mathematics’ van John Conway vond ik zelfs fantastisch. Ik had als tiener al belangstelling voor filosofie en las op mijn vijftiende Hegel en Kant. Zo kwam ik uiteindelijk op statistiek terecht. Het combineert kansrekening met analyse en heeft voor mij een duidelijke filosofische, en zelfs een morele kant. Al zou ik daar pas veel later echt mee te maken krijgen.

## Heroes and villains

Inderdaad, ook R.A. [Ronald] Fisher was verbonden aan Gonville and Caius. Of hij mijn held in de statistiek is? Nou, dan wel een



Foto: Maartje Geurts



Foto: Maartje Geurts

*tainted hero*. Hij heeft geweldige dingen gedaan voor de genetica en de statistiek, hij heeft bij wijze van spreken de twintigste eeuw veranderd. *But he was a bastard*, die in de superioriteit van het Engelse ras geloofde. Hij was de *high priest* van de statistiek van zijn tijd. Zijn volgelingen onderdrukten alle tegenvoorbeelden tegen zijn theorieën.

Als ik al een held heb is het Lucien Le Cam. Hij verbond wiskundige waarheid met een [Niels] Bohr-achtige intuïtie.

### Nederland

Ik leerde via onze wederzijdse ouders mijn huidige (en enige) echtgenote Sophia Hoffstädt al in Engeland kennen. We waren toen 15 of 16. Ze wilde eigenlijk met George Harrison van de Beatles trouwen, maar na een mooie zomervakantie in de Engelse natuur... Ik begon toen in Cambridge al Nederlands te leren en las bijvoorbeeld Multatuli, Wolkers, Mulisch en Hermans. Ook gedichten, met name Lucebert.

Na vier jaar Cambridge verhuisde ik vanwege Sophia in 1974 naar Nederland. Zij was toen halverwege haar studie, waar ze, zoals zowat iedereen in die tijd, tamelijk lang over deed. Ik moest dus de kostwinner worden en solliciteerde op iedere baan in Nederland die ook maar iets met statistiek te maken had. Ik begon bij het bedrijf ICI [later opgegaan in AkzoNobel] maar wilde toch liever naar een universiteit. Ik schreef daarom een open sollicitatie aan alle hoogleraren mathematische

statistiek. Ik kreeg welgeteld twee antwoorden: van Geert Leppink uit Utrecht en Jan Hemelrijk van de UvA en het MC [het latere CWI]. Leppink was door Hans Freudenthal ingehuurd om aan *statistical consultancy* te gaan doen. Beetje een *alien body* daar, maar hij heeft vooral bestuurlijk veel gedaan voor de Utrechtse wiskunde. Hemelrijk bood me een concreet uitzicht op een baan in de *statistical consultancy* en mogelijk ook op een promotie, en ik ging dus naar het MC in Amsterdam.

### Mathematisch Centrum

Dat was een fantastische leerschool. Je werd meteen in het diepe gegooid, maar ik had mijn kamergenoot Piet Groeneboom als leermeester. Een geweldig wiskundige, maar ik leerde ook van alles over filosofie en psychologie van hem. Het idee was destijds dat je in opdracht statistische consultancy deed en daar desgewenst zelf een promotieonderwerp bij bedacht. Ik moest ook mijn promotor zelf vinden. Dat werd Jacob Oosterhoff van de VU. Die was zelf een leerling van Willem van Zwet, die als promotor natuurlijk ook voor de hand had gelegen. Het grote artikel uit die tijd was namelijk 'Asymptotic expansions for the power of distribution free tests in the one-sample problem' van Alberts, Bickel en Van Zwet [3], en veel statistici wilden het liefst een volgen de Van Zwet worden. Dat werk interesseerde me echter totaal niet [4]. Zware analyse, veel te moeilijk. Ik hield niet zo van complexe analyse en Fouriertransformaties. Uiteindelijk

ben ik in 1979 gepromoveerd op *Censoring and Stochastic Integrals*.

### Censored data

Ik ben later ook met mijn promotieonderzoek doorgegaan. Ik kan me statistisch onderzoek naar ratten herinneren waarvan de voorpoten waren verwijderd, en naar muizen die moesten roken om kanker te krijgen. Het ging dan steeds om de overlevingstijd van die dieren; onvolledige gegevens omdat sommigen nog leefden of om andere reden doodgingen (zie kader op de pagina hiernaast). Voor het werk aan zulke 'gecensureerde' gegevens kreeg ik in 1990 de Van Dantzigprijs, die om de vijf jaar wordt uitgereikt door de Vereniging voor Statistiek en Operationele Research. Er verscheen toen een artikel in *NRC Handelsblad* over apen die een bos uitkwamen, maar waarbij de onderzoekers zaten te slapen en ze niet allemaal gezien hadden.

### Stochastische analyse

De moderne methode om zulke problemen aan te pakken is de stochastische analyse [6]. Problemen in 'survival analysis' kun je vaak ook wel via elementaire combinatoriek en analyse aanpakken, maar stochastische analyse voegt een krachtig element toe. De Franse school rond Paul-André Meyer en Claude Dellacherie heeft dit concept van dynamische stochastiek goed begrepen. Het begrip *martingaal*, generalisatie van een 'eerlijk' gokspel, speelt hierin de hoofdrol (zie kader op de pagina hiernaast). De Franse school ontwikkelde een vergaande generalisatie van de stochastische integraal van Itô voor het Wienerproces naar stochastische integralen met betrekking tot willekeurige 'semimartingalen'. Hierdoor kwamen ook sprongprocessen zoals de (gecensureerde) overlevingsprocessen onder de theorie te vallen. Ik raakte in een vroeg stadium, in 1976, bij deze ontwikkeling betrokken, en werd zeer gefascineerd door de centrale limietstelling voor martingalen, die de asymptotiek van overlevingsprocessen toegankelijk maakt voor analyse.



Foto: Maartje Geurts

### Gecensureerde overlevingsdata en stochastische integratie

Statistiek met behulp van martingalen loopt als een rode draad door het werk van Richard Gill. Zijn proefschrift [5] uit 1979, en de Van Dantzigprijs uit 1990 getuigen van het succes van deze aanpak. Het leerboek [6] uit 1993, geschreven met Andersen, Borgan en Keiding, geldt als het standaardwerk op dit terrein.

‘Survival analysis’ komt voort uit de wereld van bevolkingsstatistiek, waar zij letterlijk betrekking heeft op dood en leven, maar kan even goed worden toegepast op de overlevingsduur van machineonderdelen of de verblijftijd van apen in een bos. Laten we hier voor het gemak van leven en dood blijven spreken.

Het gaat om de observatie van scherp in de tijd gelocaliseerde *gebeurtenissen* (overlijden). Soms echter onttrekt een individu zich aan de observatie, door bijvoorbeeld verhuizing. Het is dan bekend dat vanaf zeker ogenblik geen informatie meer voorhanden is: men spreekt van *gecensureerde* overlevingsdata.

Een van de toepassingen van de martingalen-aanpak is een zeer robuuste ongelijkheid, bewezen door Gill in zijn proefschrift op basis van Doobs martingaal-ongelijkheid, voor een klassieke *schat*ter van de overlevingscurve (kansverdeling van de levensduur).

Zij  $X$  een stochastische variabele die de levensduur van een individu voorstelt. De dalende functie  $S(t) := \mathbb{P}[X \geq t]$  wordt de *overlevingscurve* genoemd. We veronderstellen hier dat  $S$  een gladde functie is  $[0, T] \rightarrow [0, 1]$  met  $S(T) = 0$ .

De levensduur van  $n$  individuen, geboren op tijdstip 0, zijn onafhankelijk en worden beschreven door dezelfde overlevingscurve  $S$ . Een hiervan onafhankelijk censuurproces doet af en toe een individu verdwijnen. Dan kan uit observaties van deze indi-

viduen de functie  $S$  geschat worden met de klassieke Kaplan–Meier-schatte uit 1958:

$$\hat{S}(t) := \prod_{t_i < t} \frac{n_i - 1}{n_i}.$$

Hierbij zijn  $t_1, t_2, \dots$  de geobserveerde overlijdenstijdstippen, en  $n_i$  is het aantal individuen dat vlak vóór  $t_i$  noch dood was, noch gecensureerd (de ‘population at risk’). Door de censuur geldt niet noodzakelijk dat  $n_{i+1} = n_i - 1$ . (Is dit wèl het geval, dan wordt de schat  $\hat{S}(t)$  eenvoudig gegeven door de fractie  $n_{i+1}/n$  van overlevers ten tijde  $t$ ; inderdaad een voor de hand liggende schat  $S(t)$ .)

Gills ongelijkheid zegt nu dat voor  $0 < \beta \leq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \forall t \in [0, T] : \hat{S}(t) \leq \frac{1}{\beta} S(t) \right] \geq 1 - \beta. \quad (1)$$

We schetsen hiervan een heuristisch bewijs.

Het *gelopen risico* of de *hazard rate*  $\alpha(t)$  van hen die *at risk* zijn op tijd  $t$ , bedraagt

$$\alpha(t) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}[t \leq T < t + \varepsilon | T \geq t] = -\frac{S'(t)}{S(t)}.$$

We schrijven dit als

$$dS(t) = -\alpha(t)S(t)dt. \quad (2)$$

Anderzijds voldoet  $\hat{S}$  aan de stochastische differentiaalvergelijking

$$d\hat{S}(t) = -Y(t)^{-1}dN(t), \quad (3)$$

waarbij  $Y(t)$  het aantal individuen *at risk* is op tijd  $t$ , en waarbij  $dN(t)$  gelijk is aan 1 als een gebeurtenis plaatsvindt in het tijds-

interval  $[t, t+dt)$ , en anders 0. Er geldt daarom:

$$\mathbb{E}(dN(t)|\text{informatie op } t) = \alpha(t)Y(t)dt. \quad (4)$$

Uit de vergelijkingen (2) en (3) volgt dat

$$d \left( \frac{\hat{S}(t)}{S(t)} \right) = \left( \frac{\hat{S}(t)}{S(t)} \right) \left( \alpha(t)dt - \frac{dN(t)}{Y(t)} \right). \quad (5)$$

De clou is nu dat het stochastische proces  $M(t)$  gegeven door

$$M(t) = \int_0^t dN(t) - \alpha(t)Y(t)dt$$

wegens (4) voor  $s \leq t$  voldoet aan

$$\mathbb{E}(M(t)|\text{informatie op } s) = M(s),$$

een heuristische definitie van een *martingaal*. Een *stochastische integraal* van de vorm  $\int_0^t F(t)dM(t)$  is zelf ook weer een martingaal. In het bijzonder geldt dit voor  $\hat{S}/S$ ; immers, wegens (5):

$$\frac{\hat{S}(t)}{S(t)} = 1 - \int_0^t \frac{\hat{S}(u)}{S(u)Y(u)}dM(u). \quad (6)$$

De ongelijkheid (1) volgt nu door Doobs martingaal-ongelijkheid

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{t \in [0, T]} Q(t) \geq C \right] \leq \frac{\mathbb{E}(Q(T))}{C},$$

geldig voor  $C > 0$  en  $Q$  een positieve martingaal, toe te passen met  $Q = \hat{S}/S$ .

De ongelijkheid van Gill is geldig voor alle waarden van  $n$ , en onafhankelijk van de aard van de censuur. Voor grote waarden van  $n$  is echter de centrale limietstelling voor martingalen scherper, die leidt tot *asymptotische normaliteit*.

### Bell-ongelijkheden

In 1998 vertelde Hans Maassen in Utrecht dat in de quantummechanica de axioma's van Kolmogorov niet geldig zijn, en moeten worden verruimd naar iets met  $C^*$ -algebra's. Ik vind dat complete nonsens. Kolmogorovs axioma's zijn niets meer dan ‘ $1 + 1 = 2$ ’, en kunnen niet door een fysisch argument onderuit gehaald worden. Ik was kwaad en opgewonden hierover, en heb me er verder in verdiept. Het is natuurlijk wel zo dat hier iets bijzonders aan de hand is. Quantum-cryp-

tografie, quantum-computing en quantum-informatie zijn intrigerende nieuwe mogelijkheden waar wij ons als statistici niet buiten mogen houden. De schending van de Bell-ongelijkheden, zoals die in fysische experimenten zijn aangetoond, zijn in ‘lokaal-realistische’ modellen niet mogelijk. Ik heb daar met Luigi Accardi, die zich graag als de godfather van de quantum-kanstheorie ziet, een weddenschap over afgesloten om 3000 euro [7] (zie kader op volgende pagina). De weddenschap is nog altijd niet beslecht.

### Quantum stochastiek

Met Barndorf-Nielsen, Malley en Jupp zijn we begonnen aan het in kaart brengen van de quantum-statistiek. Tot dan toe hadden statistici zich, op een enkeling na (Helström, Holevo) niet serieus in de quantumtheorie verdiept. Er lag nog veel terrein braak: het ontwerp van optimale meetprotocollen, waarbij de keuzes voor verdere meting door de uitkomsten worden gestuurd. De uitwerking van het begrip asymptotische normaliteit van Le Cam voor quantumsystemen, et cetera. In

### Een weddenschap met Luigi Accardi

De fysische werkelijkheid is stochastisch van karakter, maar kan toch niet met behulp van een klassiek stochastisch model worden beschreven. Dit is een uitspraak over de grondslagen van de natuurkunde waar al tientallen jaren discussie over woedt. Die discussie wordt scherp gesteld door de *ongelijkheid van Bell*, waarvan de claim is dat zij geldt in de klassieke stochastiek, maar niet in de fysische werkelijkheid. Tegen deze claim komt veel oppositie, onder andere van Luigi Accardi [21]. Richard Gill daagde hem uit, met klassieke middelen (computers) de Bell-ongelijkheid te schenden [7].

#### De Bell-ongelijkheid

Voor elk viertal  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  van 0,1-waardige stochastische variabelen op een kansruimte  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  geldt:

$$\mathbb{P}[X_1 = Y_1] \leq \mathbb{P}[X_1 = Y_2] + \mathbb{P}[X_2 = Y_2] + \mathbb{P}[X_2 = Y_1]. \quad (7)$$

Deze ongelijkheid is gemakkelijk te bewijzen: voor alle  $\omega \in \Omega$  geldt dat, als de gelijkheid  $X_1(\omega) = Y_1(\omega)$  waar is, er van de drie gelijkheden  $X_1(\omega) = Y_2(\omega)$ ,  $X_2(\omega) = Y_2(\omega)$ , en  $X_2(\omega) = Y_1(\omega)$ , een oneven aantal waar moet zijn, dus minstens één. Anderzijds is de ongelijkheid (7) *niet geldig* als zij op een geheel andere manier wordt gelezen. Laat  $X_1, X_2, Y_1$  en  $Y_2$  projectie-operatoren voorstellen op een complexe inproductruimte, zó dat  $X_a$  en  $Y_b$  voor  $a, b = 1, 2$  steeds met elkaar commuteren (dus  $X_a Y_b = Y_b X_a$ ), met als gevolg dat de uitdrukkingen  $X_a Y_b + (\mathbb{I} - X_a)(\mathbb{I} - Y_b)$  ook weer orthogonale projecties voorstellen. Noem deze projecties  $[X_a = Y_b]$ . Laat tenslotte  $\mathbb{P}$  een quantumtoestand zijn, dat wil zeggen een positief lineaire functionaal op de ruimte van complexe  $4 \times 4$ -matrices, zó genormeerd dat  $\mathbb{P}(\mathbb{I}) = 1$ . Dan is (7) niet altijd juist. Het is bijvoorbeeld mogelijk de zaken zó in te richten dat

$$\mathbb{P}[X_a = Y_b] = \sin^2(\xi_a - \eta_b), \quad (8)$$

waarbij we de hoeken  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in [0, \pi)$  nog mogen kiezen. (7) is dan niet waar; bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \sin^2(0 - 90^\circ) &= 1 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \sin^2(0 - 30^\circ) + \sin^2(30^\circ - 60^\circ) \\ &\quad + \sin^2(60^\circ - 90^\circ). \end{aligned} \quad (9)$$

Het saillante is nu, dat de bovenstaande

projecties door de quantummechanica worden geïnterpreteerd als 0,1-waardige, door het toeval bepaalde fysische grootheden. In het baanbrekende experiment van Aspect, Dalibart en Roger [22], konden deze grootheden worden gerealiseerd als de polarisaties van fotonenparen  $(X_a, Y_b)$  die vanuit een centraal punt in hun laboratorium naar de linker- en de rechtervleugel werden gestuurd, en daar werden gemeten onder de hoeken  $\xi_a$  en  $\eta_b$ . De quantummechanica voorspelt (8) als resultaat. Als deze voorspelling juist is, zal zo'n experiment nooit in de vorm  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P}, X_1, X_2, Y_1, Y_2)$  gegoeten kunnen worden wegens (7) en (9). Deze conclusie blijft staan, ook voor wie niet in de quantummechanica gelooft: alleen de *experimentele* schending van (7) voor één stel  $(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$  doet ter zake.

#### Localiteit

Een eerste tegenwerping was al door Aspect zelf ondervangen: hoe weet je dat je werkelijk  $X_a$  en  $Y_b$  meet, en bijvoorbeeld niet  $X_a$  en  $Y_{ab}$ ? Voor deze laatste grootheden geldt immers geen Bell-ongelijkheid. Anders gezegd: hoe voorkom je een invloed van de keuze tussen  $a = 1$  en  $a = 2$  rechts in het lab op de uitslag  $Y$  links? Om dit te garanderen liet Aspect de keuze van  $a$  en  $b$  zéér kort voor de meting vaststellen: zó kort dat een eventuele invloed van  $a$  op  $Y$  sneller dan het licht zou moeten reizen. De aanname dat dit niet mogelijk is, wordt *Einstein-causaliteit* genoemd. Deze garandeerde dus de *localiteit* van het experiment van Aspect.

#### Het computer-experiment

Luigi Accardi beweerde met klassieke middelen (een 'kameleon'-model) een schending van de Bell-ongelijkheden te kunnen produceren. Gill en Accardi kwamen overeen het volgende experiment te doen. Vijf computers zouden zó geschakeld worden:

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathcal{X} \leftarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Y} \leftarrow \mathbb{B}$$

De pijlen geven de richting aan waarin informatie-overdracht is toegestaan. De computers  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{B}$  staan onder beheer van Gill. Hij is van plan deze, met behulp van muntworpen of een randomgenerator, keuzes van de indices  $a$  en  $b$  te laten genereren.

Accardi krijgt het beheer over de andere drie computers, die hij geheel naar eigen inzicht mag programmeren. Het experiment zal bestaan uit 15.000 rondes. In elke ronde gebeurt het volgende: Computer  $\mathcal{O}$  stuurt

informatie naar de *meetstations*  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$ . Vervolgens leveren de computers  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{B}$  hun random indices. De meetstations mogen nu op basis van alles wat zij weten een output 0 of 1 bepalen. De random indices  $a_n$  en  $b_n$  van  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{B}$ , en de output  $x_n$  en  $y_n$  van  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  worden vervolgens op een lijst gezet voor latere evaluatie. Tenslotte mogen de computers  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  en  $\mathcal{O}$  overleg voeren, waarbij de communicatierichting geheel vrij is.

Na afloop van  $N = 15.000$  rondes worden de punten geteld: ronde  $n$  levert Accardi

- een punt op als  $x_n = y_n$ , terwijl  $a_n = b_n = 1$ ;
- een strafpunt op als  $x_n = y_n$ , terwijl  $a_n = 2$  of  $b_n = 2$ ;
- nul punten op als  $x_n \neq y_n$ .

(Deze puntentelling is natuurlijk niet arbitrair, maar hangt nauw samen met de Bell-ongelijkheid (7)). Het doel van Accardi is, punten te halen. Haalt hij er meer dan, zeg, 500, dan heeft hij de 3000 euro gewonnen. Zo niet, dan verliest hij ze.

Accardi zal deze weddenschap niet kunnen winnen, ondanks de grote vrijheid die hij heeft bij de programmering van zijn computers. (Door het quantum-experiment van Aspect is deze weddenschap wél gewonnen!) De Achilleshiel van deze computers is precies hun klassiek, deterministische karakter: Op elke combinatie  $(a, b)$  van indices uit  $\mathbb{A}$  en  $\mathbb{B}$  moeten zij *een of ander antwoord* hebben. Maar bij het bewijs van de Bell-ongelijkheid hierboven hebben we gezien dat elke combinatie  $(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$  van outputs negatief verwacht puntental heeft. Omdat de informatie waar de computers gebruik van mogen maken, alleen het verleden betreft, is de verwachte toename van het puntental  $Z_n$ , gegeven dit verleden, negatief:  $Z_n$  is een *supermartingaal*. (Vergelijk het eerste kader in dit artikel.) Met behulp van de ongelijkheid van Hoeffding kan men dan aantonen dat

$$\mathbb{P}\left[\max_{n \leq N} Z_n \geq k\sqrt{N}\right] \leq \exp\left(-\frac{1}{2}k^2\right).$$

Invullen van de gegevens levert een winstkans kleiner dan 0,00025.

Inmiddels is een *Quantum Randi Challenge* op het internet in voorbereiding volgens de lijnen van de hierboven beschreven weddenschap. De ontwerper, Sascha Vongehr, daagt de hele wereld uit om met lokaal realistische middelen de Bell-ongelijkheden te schenden. Richard Gill adviseert hem.



Foto's: Maartje Geurts

Eurandom had ik enkele jaren een project lopen op dit terrein; mijn toenmalige postdoc Mădălin Guță, nu in Nottingham bij Belavkin, is hier nu specialist is geworden.

#### Lucia de B.

Ik hoorde voor het eerst over Lucia de B. van mijn vrouw, in 2001 [8]. Ze had het nieuws gezien en kreeg de indruk dat er een heksenjacht tegen iemand gaande was. Twee jaar later was de heksenjacht overgegaan in een heksenproces. Mijn eerste reactie was dubbelzinnig. Er kwam statistiek in het proces voor en ik voelde dus dat ik, als midden in de maatschappij staand statisticus, iets moest doen. Maar daar stond tegenover dat er al goede statistici bij betrokken waren. Of dat dacht ik toen tenminste. In 2006 verscheen echter het boek van Ton Derksen [9]. Mijn collega Peter Grünwald beval me dit aan als een goed onderbouwd betoog dat er iets grondig mis was met haar proces. Ik las dat boek en werd zeer boos.

Ik zocht de publiciteit en werd geïnterviewd door twee journalisten van *NOVA*. Ze vroegen me hoe ik dacht alles beter te kunnen weten dan zeventien Nederlandse rechters? Mijn antwoord was dat het klonen van elkaar waren, ze maakten allemaal dezelfde denkfouten. Of ik dan het arrest [van het gerechtshof van Den Haag d.d. 18 juni 2004] eigenlijk wel had gelezen? Nee (oei). Dat deed ik dus maar gauw, en toen bleek dat het nog erger was dan ik dacht. Wij, statistici, zijn collectief opgelicht door juristen. Alle zogenaamde moorden door Lucia zouden medisch bewezen zijn zonder gebruik van statistiek. In werkelijkheid is dat hele arrest opgebouwd rond statistiek, vermomd in medische terminologie. Al was die berekening

zogenaamd verdwenen uit de redenering van het Hof, overall sijpelt de door Henk Elffers berekende kans van 1 op de 342 miljoen dat de sterfgevallen toevallige coïncidenties waren, door het arrest. En iedereen vertaalde dat natuurlijk in de kans dat Lucia onschuldig was. Dat soort statistiek heette nu echter een schakelbewijs. Maar het lot van Lucia was bezegeld zodra die kans op tafel lag. In werkelijkheid is die kans, als je al kansen wil toekennen [10], niet 1 op 342 miljoen maar ongeveer 1 op 20. Dat maakte echter niets meer uit, het daderschap van Lucia gold als bewezen.

#### Omslag

Mijn brief aan de CEAS [11] had geen direct effect. Ton Derksen stelde zich heel verstandig op als boven de partijen staande geleerde, maar zijn zus [Metta de Noo-Derksen] zocht contact met de media en zorgde steeds voor nieuws. Via contacten van Peter [Grünwald] is *The Guardian* erover gaan schrijven. Ook *Nature* pikte het op; het kwam in Engeland zelfs op de TV.

Ik ben zelf ook nader onderzoek gaan doen, heb alle betrokken pathologen en toxicologen gesproken. Mijn petitie in *NRC Handelsblad* voor de vrijlating van Lucia is door duizenden academici ondertekend, onderwie een groot aantal vooraanstaande statistici uit Nederland en buitenland [12]. De druk op het systeem werd steeds verder verhoogd, de laatste journalisten die Lucia nog schuldig achtten gingen om. Uiteindelijk viel het hele bewijs om en was er zelfs geen verdenking meer. Formeel had de Hoge Raad een novum nodig om de zaak te herzien, dat er ook kwam omdat Freek de Wolf [de patholoog-anatoom die de digoxine-vergiftiging bij baby Amber had vastgesteld [9]] 'om' ging [13].

Het OM eiste toen nog meer onderzoek, maar werd door de Rechtbank van Arnhem uitgelachen [14].

#### Woede

In eerste instantie richtte mijn woede zich op de juridische wereld, met name op de rechters in de zaak, later en in mindere mate ook op de betrokken advocaten. Maar uiteindelijk zag ik in dat ze hun best hadden gedaan. Het was een hele moeilijke zaak. De rechters en het OM waren overtuigd van de schuld van Lucia en vonden dat de samenleving tegen deze heks beschermd moest worden. Ze dachten dat er zowel een bewijs als een motief was. Ze hadden voldaan aan de eis dat er wettige bewijsmiddelen waren, al die rapporten, et cetera.

Inmiddels ben ik vooral boos op de medische wereld, met name op het JKZ [Juliana Kinderziekenhuis] uiteraard. Al voor Lucia in beeld kwam, zijn daar achteraf medische dossiers veranderd om ouders minder kans op succes te geven bij klachten over de behandeling of zelfs de dood van hun kinderen. Om de eventuele schuld van het ziekenhuis helemaal weg te poetsen is Lucia er vervolgens bewust ingeluisd. Het ziekenhuis had al een slechte reputatie en wilde fuseren met twee andere ziekenhuizen. De toenmalige directeur ging letterlijk over lijken om de marktwerking in de zorg door te zetten, waaronder zijn salaris van vele malen de Balkenende-norm [15].

#### Nasleep

Ben ik nu klaar met de zaak? Nog lang niet! De Lucia-zaak heeft mijn leven ingrijpend veranderd. OK, Lucia heeft smartengeld, een leuke man, en zowel Harm Brouwer als Ernst Hirsch-

### Het Probiotica-onderzoek

Ethische commissies die medische proeven begeleiden, dienen goed op de hoogte te zijn en inzicht te hebben in standaard-statistische methoden. Dit is de hoofdconclusie van Gills artikel [18] in *Statistica Neerlandica* in 2009 naar aanleiding van het probiotica-onderzoek van 2004 tot 2007 aan het Universitair Medisch Centrum Utrecht. Deze noodzaak heeft tweeërlei redenen: ook de standaardmethoden en -pakketten bevatten ethische keuzes waar zij achter zouden moeten staan. Bovendien zou het hen behoeden voor technische blunders.

Het probiotica-onderzoek PROPATRIA was gericht op het aantonen van een heilzame werking op patiënten met alvleesklierontsteking van zogenaamde *probiotica*, 'goede darmbacteriën' zoals die bijvoorbeeld in yoghurt voorkomen. Het ging niet om een medische behandeling, maar om een dieet. De bacteriën zouden het gezond functioneren van de darm stimuleren.

De oorspronkelijk 200, later 296 deelnemende ernstig zieke patiënten werden verdeeld in een te behandelen groep en een controlegroep. De eerste kreeg de bacteriedrank, de tweede een placebo toegediend. Het onderzoek werd 'driedubbelblind' uitgevoerd: de behandelaars noch de patiënten wisten welk preparaat deze toegediend kregen. Bovendien verkeerde de evaluatiecommissie, verantwoordelijk voor beslissingen over voort- of stopzetting van het experiment op basis van tussentijdse uitslagen, in het ongewisse over welke groep de behandelde groep was. Dit driedubbelblinde protocol is in de jaren '90 in Nederland gepropageerd [19] om voortijdig stoppen van experimenten bij gunstig uit-

ziende, maar toevallige pieken in de uitslag tegen te gaan.

Aan het einde van het experiment bleken in de behandelde groep 24 doden en in de placebogroep 9 doden gevallen te zijn. Het schandaal trok begin 2008 zeer de aandacht. Hoe had dit kunnen gebeuren? Waarom had de commissie niet eerder aan de bel getrokken?

Deze beriep zich echter op een van tevoren overeengekomen protocol, beschreven in het standaardwerk van Snappinn [20], bij nadere navraag in de Nederlandse versie van Schoutens. Hoewel de commissie niet bereid bleek de tussentijdse gegevens vrij te geven, wist Gill aan de hand van per ongeluk uitgelekte informatie de gang van zaken te reconstrueren.

Er waren twee tussentijdse beslissingen geweest: één na 100 behandelingen, om het deelnemertal te vergroten van 200 naar circa 300, en één na 184 behandelingen, om door te gaan tot 300. Was de eerste beslissing al enigszins aanvechtbaar (zie het artikel [18]), de tweede kan achteraf slechts als een blunder worden aangemerkt. Als het tevoren afgesproken protocol naar behoren was gevolgd, zou tot stopzetting van de proeven moeten zijn besloten.

Hoe is dit mogelijk? Om dit te begrijpen, is een korte uitleg van het protocol van Snappinn nodig. Bij een tussentijdse evaluatie onderscheidt dit drie mogelijkheden. (1) Het gehoopte effect is al bewezen: men kan stoppen wegens *significantie*. (2) Er is nauwelijks meer hoop dat het effect bewezen gaat worden: ook dan is het beter te stoppen, nu wegens *futiliteit*. (Deze mogelijkheid omvat het stoppen wegens averechts ef-

fect!) (3) Het effect is nog niet bewezen, maar er is goede hoop: doorgaan! In de praktijk wordt dit protocol uitgevoerd door eerst de zogenaamde *eenzijdige p-waarde* te berekenen: de kans dat de waargenomen verdeling (of sterker disbalans) optreedt terwijl drank en placebo eigenlijk gelijk effect hebben. (Dit laatste heet de 'nulhypothese'.) Deze *p-waarde* wordt nu vergeleken met kritische *p-waarden* die in het protocol staan: de significantie- en de futiliteitsgrens.

Tot dusver is de situatie doorzichtig. Maar er komt een complicatie bovenop: omdat de commissie niet weet wie wie is, moet zij met twee mogelijkheden rekenen: zeg groep A is de behandelde groep en groep B de placebogroep, en omgekeerd. Dit geeft twee *p-waarden*. Beide kunnen worden berekend met Fishers  $2 \times 2$  kruistabel. Nu heeft het statistische softwarepakket SPSS de eigenschap dat het bij zo'n tabel maar één *p-waarde* berekent: de kleinste, meest significante! Beide alternatieven leveren dezelfde *p-waarde*, die in de buurt van 20% moet hebben gelegen. Conclusie: onthulling van de identiteit van de groepen is niet nodig; doorgaan!

Correct zou zijn geweest: beide *p-waarden* berekenen (de ander lag rond de 85%), erkennen dat één mogelijkheid de futiliteitsgrens overschreed, de identiteit van de groepen A en B onthullen, en stopzetten wegens futiliteit.

Achteraf beschouwd was de feitelijke reden tot voortzetting: men maakte nog een kans aan te tonen dat de probiotica averechts werkten!

Op cynische wijze is dit doel ruimschoots bereikt.

Ballin hebben namens justitie hun excuses aangeboden. Ook weer typisch Nederlands: we hebben het opgelost met geld en gaan vrolijk verder.

Ik geloof wel dat justitie veel van deze zaak heeft geleerd, maar de medische wereld blijft de andere kant op kijken. In hun persbericht na de vrijspraak herhaalt het [na fusie inmiddels HagaZiekenhuis geheten] JKZ dat ze niets fout hebben gedaan en in dezelfde omstandigheden ook weer precies hetzelfde zouden handelen. Zij hebben ook nooit excuses aan Lucia aangeboden, het is te walgelijk voor woorden.

Mij wordt door dat ziekenhuis nog steeds

de mond gesnoerd, op straffe van astronomische dwangsommen. Je wilt niet weten wat mijn advocatenkosten zijn, gelukkig hoef ik die niet zelf te betalen. Medewerkers van het HagaZiekenhuis hebben ook nog steeds een spreekverbod over Lucia. Veel mensen daar denken trouwens nog steeds oprecht dat ze schuldig is.

De juridische wereld is hier gelouterd uitgekomen, terwijl de medici geen enkele fout toegeven. Al die machtige posities, al die enorme salarissen. En dat terwijl de juristen in feite zijn voorgelogen door de medici. Ik ga hier ook mee door, bijvoorbeeld via het in 2010 opgerichte *Bureau of Lost Causes* [16].

### Forensische statistiek

Mijn onderzoek is er ook sterk door van koers veranderd. In die zin kwam Lucia als geroepen, hoe wrang het ook klinkt. Ik was mijn werk rond de quantummechanica en de Bell-ongelijkheden eerlijk gezegd al een tijdje aan het uitmelken en was aan iets nieuws toe. Dat werd de forensische statistiek.

Het bewijsmateriaal is het product van een kansmechanisme. In het huidige systeem is het de taak van de statisticus om de *likelihood ratio* aan de rechter te vertellen. De rechter en [in het Angelsaksische rechtssysteem] de jury moeten de *prior* bepalen [17]. Maar wat mij als wiskundige het meest is opgevallen

aan deze hele zaak is dat we juist de normale situatie slecht kennen. Er waren geen data om de statistiek rond Lucia tegen te kalibreren.

En in zaken waarbij DNA-identificatie een rol speelt zijn er allerlei databanken met profielen van criminelen, maar veel minder van de normale bevolking. Daar is geen geld en geen belangstelling voor. Op zulke dingen wil ik me de komende tijd gaan richten. Het is goed dat er nu een NWO-programma in *Forensic Science* is, al is daarin helaas nog geen participatie van juristen en medici.

### The shadow side

Ik wil wel wat reliëf aanbrengen in deze tot nu toe traditionele academische *success story*. Ik ben niet voor niets geïnteresseerd in psychiatrie, met name in *post traumatic stress syndrome* en manische depressies.

Het eerste heeft, als *second generation effect*, te maken met mijn vrouw. Haar vader was half Duits, en diens vader bouwde in de oorlog V2-raketten in Peenemünde. Haar moeder overleed al jong aan kanker, evenals een van haar broers. De andere heeft multiple sclerose. Geen vrolijke familie.

Het laatste heeft een persoonlijke achtergrond. Ik heb vier perioden van zware depressies achter de rug. Ik zal dat wel van mijn vader hebben geërfd. Dan heb ik het over perioden van zo'n maand of negen waarin je iedere dag opstaat met de gedachte dat je jezelf zo spoedig mogelijk van kant wilt maken. Je kunt van niets genieten en je op niets concentreren.

Ik ben daardoor veel over Boeddhisme en meditatie na gaan denken, maar ook over de statistiek van mentale problemen en de be-

handeling daarvan. De meeste mentale problemen zijn volgens mij een gezonde reactie op een zieke omgeving. Het valt me ook op hoe goed mensen in staat zijn zulke moeilijkheden voor hun omgeving te verbergen, en zelfs voor zichzelf.

Dergelijke problemen zijn volgens mij veel belangrijker voor je ontwikkeling dan de triomfen. Die komen vaak door geluk, door op het juiste moment de juiste mensen te ontmoeten en je kansen te grijpen.

Voor dat laatste moet je dan natuurlijk wel zijn gepredisposeerd. *Chance favours the prepared mind*. Maar het zijn de nederlagen die je iets vertellen over jezelf en de wereld.

*What doesn't kill you only makes you stronger. Life is about learning and sharing, I think. At least that's what keeps me going.* ←

### Referenties

- 1 Dit is de driejarige studie wiskunde en theoretische fysica die al eeuwen bestaat in Cambridge. De drie jaren heten echter Part I, IIa, en IIb. Het fameuze Part III is een additioneel vierde jaar dat voorbereidt op een promotie. Gill volgde dat laatste niet en behaalde in plaats daarvan in zijn vierde jaar in Cambridge het (beroepsgeoriënteerde) *Diploma in Statistics*.
- 2 In Cambridge wordt dit begrip in de beperkte zin van differentiaalvergelijkingen, hydrodynamica, et cetera, gebruikt.
- 3 W. Albers, P.J. Bickel en W.R. van Zwet, Asymptotic expansions for the power of distribution free tests in the one-sample problem, *Ann. Statist.* **4** (1976), 108–156.
- 4 Toevallig was Gill in 1999 de promotor van Erik van Zwet, de zoon van Willem!
- 5 Richard. D. Gill, *Censoring and Stochastic Integrals*, Dissertatie Vrije Universiteit te Amsterdam, 1979, Mathematisch Centrum.
- 6 P.K. Andersen, O. Borgan, R.D. Gill, N. Keiding, *Statistical models based on counting processes*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- 7 R.D. Gill, Time, finite statistics, and Bell's fifth position, *Foundations of Probability and Physics*, 2 (Växjö, 2002), Vol. 5 of *Math. Model. Phys. Eng. Cogn. Sci.*, pp. 179–206, Växjö Univ. Press, Växjö (2003), arXiv:quant-ph/0301059.
- 8 De feiten rond het proces tegen Lucia de B. zijn bijvoorbeeld te vinden op de Wikipedia-pagina over Lucia de Berk.
- 9 Ton Derksen, *Lucia de B.: Reconstructie van een gerechtelijke dwaling*, Veen Magazines, Diepen, 2006.
- 10 Michiel van Lambalgen en Ronald Meester argumenteerden in de rechtszaal dat dit in het onderhavige geval in principe onmogelijk was.
- 11 Commissie Evaluatie Afgesloten Stafzaken (ook bekend als 'Posthumus II'), onder voorzitterschap van de Nijmeegse jurist Ybo Buruma.
- 12 Gepubliceerd in *NRC Handelsblad* van 14 december 2007.
- 13 De dood van Amber vormde de eerste stap in het 'schakelbewijs' tegen Lucia. Nadat toxicoloog Jan Meulenbelt van het RIVM toegang had gekregen tot de medische dossiers rond de rechtszaak tegen Lucia de Berk, bleek dat alle aan haar toegeschreven sterfgevallen ofwel een natuurlijke oorzaak hadden ofwel een gevolg waren van medische fouten (waarvan geen aan Lucia te wijten was).
- 14 Lucia de Berk werd uiteindelijk op 14 april 2010 vrijgesproken, na al eerder in afwachting van de uitspraak te zijn vrijgelaten. Haar leven in de gevangenis staat op aangrijpende wijze beschreven in haar boek *Lucia de B.: levenslang en tbs* (Arbeiderspers, 2010).
- 15 Dezelfde man werd later directeur van het Maasland Ziekenhuis, waar hij in augustus 2011 moest vertrekken vanwege de 3 à 13 doden die een bacterie in dat ziekenhuis had veroorzaakt, klaarblijkelijk niet gehinderd door tijdige maatregelen. Eerder was al maatschappelijke beroering ontstaan vanwege zijn salaris en (ook na ontslag niet terugbetaalde) bonussen.
- 16 Zie [www.bolc.nl](http://www.bolc.nl).
- 17 De *likelihood ratio*  $LR = P(E|H)/P(E|\bar{H})$  is de kans op het aanwezige bewijsmateriaal  $E$  gegeven de hypothese  $H$  dat de verdachte schuldig is, gedeeld door de kans op  $E$  gegeven de hypothese  $\bar{H}$  dat de verdachte onschuldig is. De *prior*  $Pr = P(H)/P(\bar{H})$  is de kans dat de verdachte schuldig is, gedeeld door de kans dat hij/zij onschuldig is, zonder het bewijsmateriaal in acht te nemen. Volgens de regel van Bayes is dan de kans  $P(H|E)$  dat de verdachte schuldig is in het licht van het bewijsmateriaal gelijk aan  $P(H|E) = 1/(1 + (Pr \cdot LR)^{-1})$ . Het is deze laatste kans die bepaalt of de verdachte veroordeeld zou moeten worden. Ook bij een enorme *likelihood ratio* (waarvan bij Lucia de B. in eerste instantie sprake leek te zijn) kan de kans  $P(H|E)$  nog steeds klein zijn vanwege de vermenigvuldiging met de *prior*. Het weglaten van de *prior* is een bekende fout in de forensische statistiek (*Prosecutor's Fallacy*).
- 18 R.D. Gill, Statistics, ethics and probiotics, *Statistica Neerlandica* **63** (2009), 1–12. doi: 10.1111/j.1467-9574.2008.00411.x.
- 19 J.P. Vandenbroucke, Dwalingen in de methodologie XIV. Het voortijdig beëindigen van een gerandomiseerde trial, *Nederlands Tijdschrift voor Geneeskunde* **143** (1999), 1305–1308.
- 20 S.M. Snappinn, Monitoring clinical trials with a conditional probability stopping rule, *Statistics in Medicine* **11** (1992), 659–672.
- 21 L. Accardi en M. Regoli, *Locality and Bell's inequality*, quant-ph/0007005v2.pdf.
- 22 A. Aspect, J. Dalibart en G. Roger, Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analysers, *Phys. Rev. Letters* **49** (1982), 1804–1807.

## Natasha Maurits

Afdeling Neurologie & BCN NeuroImaging Centrum  
Universitair Medisch Centrum Groningen  
Postbus 30001  
9700RB Groningen  
n.m.maurits@umcg.nl

### Onderzoek

# Patiënten in getallen: wiskunde toegepast in de neurologie

Wist u dat beschrijvende statistiek gebruikt kan worden om onderscheid te maken tussen spier- en zenuwziekten? Dat spectraalanalyse toegepast wordt om verschillende vormen van tremor te herkennen? En dat bij het meten van de effecten van veroudering op motoriek differentiaalrekening een belangrijke rol speelt? Dit zijn slechts enkele manieren waarop wiskunde toegepast wordt in de dagelijkse praktijk van een neurologische afdeling in een academisch ziekenhuis. Op het Wintersymposium van het KWG afgelopen januari hield Natasha Maurits, hoogleraar aan het Universitair Medisch Centrum Groningen, een voordracht over wiskunde toegepast in de neurologie.

De kans is groot dat u al eens een keer een bezoek aan een medisch specialist in een ziekenhuis hebt gebracht. En hoewel u daarbij natuurlijk niet als een nummer behandeld wilt worden, zal ik u laten zien dat u en uw klacht voor u het weet in getallen zullen worden uitgedrukt. Hoe verloopt zo'n bezoekje aan de specialist nu? Het begint onschuldig: u komt binnen, wisselt beleefdheden uit en de arts begint u wat vragen te stellen. "Wat voor klachten heeft u eigenlijk? Wanneer zijn ze begonnen? Komen ze ook in de familie voor?" Tot zover geen getallen.

In de volgende fase van het consult doet de arts wat meer of minder eenvoudig lichamen onderzoek: u moet misschien een stukje lopen of uw armen uitstrekken, uw reflexen worden getest en de arts meet uw bloeddruk en temperatuur. Nu worden u en uw klachten al enigszins in getallen uitgedrukt. Uw bloeddruk blijkt 140/90 mmHg te zijn: "Dat is net-

jes", zegt de arts. Uw temperatuur is 39,5 °C: "Dat is veel te hoog, u heeft koorts", zegt de arts nu. Heeft u zich ooit al eens afgevraagd hoe uw arts nu eigenlijk weet dat die bloeddruk normaal en de temperatuur te hoog is? En mocht u daarna verder de medische molen ingaan, dan komen er steeds meer getallen in uw dossier te staan. Bij veel klachten zullen bloedwaarden bepaald worden om bijvoorbeeld na te gaan of u een ontsteking heeft, of bloedarmoede, diabetes of een verminderde nierfunctie. Misschien wordt er een röntgenopname, CT- of MRI-scan gemaakt, krijgt u een ECG of een EEG, moet u een inspanningstest doen of wordt uw longinhoud gemeten. Een modern ziekenhuis heeft tegenwoordig een heel arsenaal aan tests en onderzoeken voor u in petto.

Nadat u al deze onderzoeken heeft ondergaan, zal uw arts bepalen of de uitslagen normaal zijn en of ze wijzen op een bepaalde

ziekte. Maar hoe weet uw arts dat nu? Wat is normaal en wat is abnormaal, of pathologisch zoals artsen zeggen? En als de uitslag pathologisch is, hoe weet de arts dan om welke ziekte het waarschijnlijk gaat?

Elk jaar in april stellen we soortgelijke vragen aan groepjes 4-vwo-scholieren. In het kader van de College Carroussel meten ze bij ons op de afdeling de snelheid van zenuwsignalen in hun eigen armen. Nadat voor een tiental leerlingen de gemeten snelheid op een whiteboard is geschreven, stel ik ze vergelijkbare vragen: "Kun je nu aangeven wat een normale snelheid is?" "En waarom is dat dan normaal?" Meestal bedenkt een leerling dan wel dat een te hoge snelheid in elk geval niet erg is, maar dat te langzaam niet goed is. En dat de laagste van de tien metingen misschien te langzaam is, maar dat je in een groepje van tien jonge en hoogstwaarschijnlijk gezonde scholieren, aan de andere kant eigenlijk bijna nooit een te lage snelheid zult meten. En zouden de gemeten waarden eigenlijk precies hetzelfde zijn als we iedereen nog een keer zouden meten? En heeft de temperatuur in de armen misschien ook invloed op de snelheid? Bij deze vragen komen al een aantal elementen naar voren die van groot belang zijn om te bepalen of het resultaat van een meting normaal of abnormaal is.

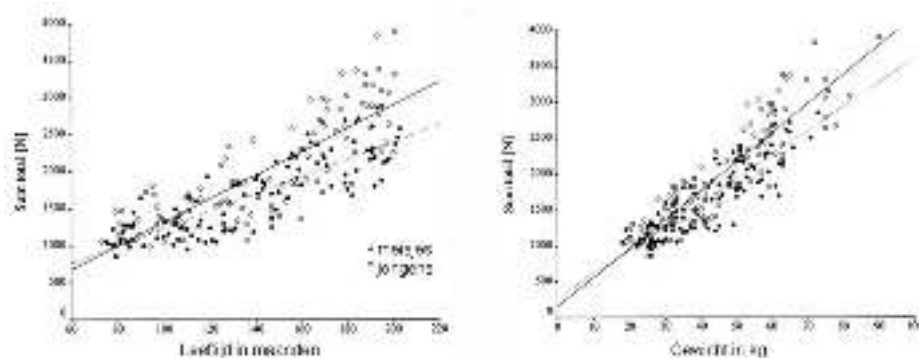
Zoals altijd, maar zeker in het ziekenhuis van de 21ste eeuw, lopen de technische mogelijkheden vaak voor op de klinische toepassingen. Het UMCG (Universitair Medisch Centrum Groningen) heeft heel veel geavanceerde meettechnieken in huis, die we alleen nog niet allemaal optimaal weten te gebruiken. We kunnen bijvoorbeeld tegelijkertijd op 128 plaatsen op het hoofd de elektrische hersenactiviteit meten, maar we weten nog niet goed wat normaal en wat abnormaal is. En hoe kunnen we die techniek dan gebruiken om beter onderscheid te maken tussen verschillende ziekten? Ook maken we hersenfoto's met steeds meer detail, maar weten we nog niet precies wanneer afwijkingen op een dergelijke foto klinisch relevant zijn of wanneer ze eigenlijk helemaal geen betekenis hebben. We kunnen het hele menselijk genoom — wat ons erfelijk materiaal bevat — al enkele jaren ontcijferen, maar weten tot nu toe eigenlijk maar beperkt wat we met al die informatie kunnen doen.

In dit veld beweegt mijn onderzoek zich. Ik bedenk nieuwe meet-, analyse- en modeleringsmethoden om de moderne technieken die we op de afdeling Klinische Neurofysiologie tot onze beschikking hebben, voor de patiënt tot nut te maken. De technieken die ik bestudeer zijn heel divers: op onze afdeling meten we namelijk functies van alle componenten van het centrale en perifere zenuwstelsel, dat wil zeggen functies van de hersenen, het ruggenmerg en de zenuwen. Daarnaast kunnen we de bloedstroom naar de hersenen meten en in beeld brengen en hebben we allerlei mogelijkheden om spierfunctie en -opbouw te bestuderen.

Al deze meetmethoden leveren getallen op. Van een enkel getal in het geval van de geleidingssnelheid in de polszenew, tot miljoenen getallen in het geval van een 128-kanaals EEG-meting. Een van de doelen van mijn werk is om de diagnostiek van neurologische ziekten te verbeteren. Ik zal u aan de hand van een aantal voorbeelden laten zien dat het gebruik van wiskunde veel waardevols oplevert voor het bepalen van een diagnose en, daarmee, voor het inzetten van een behandelplan. Hierbij is het belangrijk dat de *juiste* diagnose wordt gesteld en in veel gevallen, dat deze diagnose *zo snel mogelijk* wordt gesteld. Een snel vastgestelde longontsteking is immers goed behandelbaar, maar bij lang wachten wordt deze misschien wel levensbedreigend.

### Biomarkers

Eerder schetste ik al dat de moderne onderzoekstechnieken vaak getallen opleveren,



**Figuur 1** Totale spierkracht zoals gemeten in een groep gezonde jongens en meisjes, van 6–16 jaar oud, als functie van leeftijd (links) en gewicht (rechts). De Pearson-correlatiecoëfficiënt ( $r$ ) in jongens (getrokken lijn) is 0,83 en in meisjes (gestippelde lijn) is 0,85 voor de figuur links. Voor de figuur rechts zijn deze waarden respectievelijk 0,91 en 0,88.

van één enkele tot miljoenen. Hoe gebruik je die hoeveelheid gegevens nu om tot een nuttige maat te komen, die bijdraagt aan het snel stellen van een juiste diagnose? Dat kan door gebruik te maken van 'getalsmatige samenvattingen van de toestand van de patiënt', zoals bijvoorbeeld temperatuur of bloeddruk. Deze samenvattingen zou je ook als biomarkers kunnen beschouwen.

Om een biomarker van nut te laten zijn in de klinische praktijk is het belangrijk te weten (1) wat de verwachte waarden in de meest gezonde en in de meest zieke mensen zijn; (2) hoe de biomarker verandert als iemand langs het continuüm van gezond naar ziek schuift en (3) hoe specifiek de biomarker is voor een bepaalde ziekte. Ofwel: kunnen andere ziekten of veranderingen in bijvoorbeeld levensstijl eenzelfde verhoging of verlaging in de biomarker geven? Daarnaast moet elke nuttige biomarker betrouwbaar zijn en herhaalbaar te meten zijn, en dit liefst zonder al te veel belasting voor de patiënt. Dat zijn dus heel wat vereisten!

Om een biomarker geschikt te maken voor klinisch gebruik is het dus allereerst belangrijk zogenaamde normaalwaarden te bepalen. Je weet dan welke waarden de biomarker kan aannemen in een groep van gezonde mensen. In dit verhaal zal ik u aan de hand van een viertal voorbeelden laten zien hoe je van één tot heel veel getallen tot een biomarker kunt komen en hoe hier wiskunde bij gebruikt wordt.

### Van één getal tot biomarker

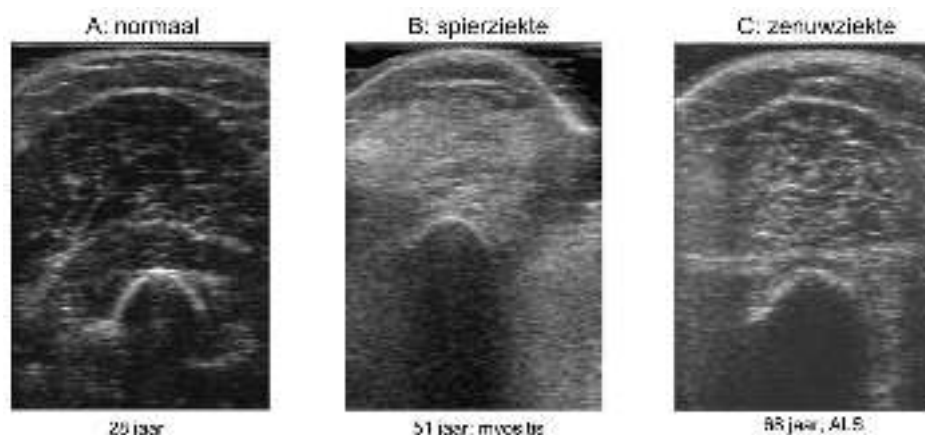
#### Voorbeeld 1: spierkracht

In 2001 hebben wij met promovendus Martijn Beenakker normaalwaarden voor kracht in kinderen vastgelegd [1]. Kracht wordt door een neuroloog vaak op een semi-kwantitatieve schaal (*Medical Research Council scale*) vastgelegd. Die varieert van 5, wat

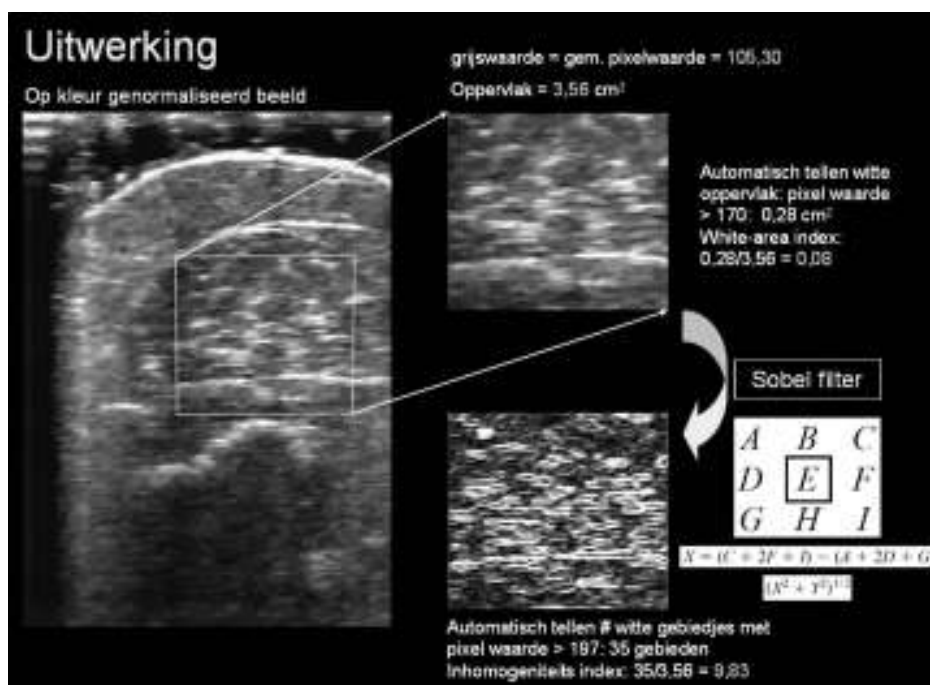
een normale kracht betekent, tot 0, waarbij helemaal geen spiercontractie plaatsvindt en er dus eigenlijk sprake is van verlamming. U kunt zich vast voorstellen dat op een dergelijke schaal kleine veranderingen ten gevolge van een werkende behandeling of natuurlijke verbetering of achteruitgang, niet of nauwelijks vast te leggen zijn. Bij gebruik van een kracht- ofwel dynamometer, kan de kracht veel nauwkeuriger worden vastgelegd. Om normaalwaarden te bepalen, moet je een representatieve steekproef uit de gezonde bevolking nemen. Bij kinderen, die immers in de groei zijn, betekent dit dat je voldoende kinderen van elke leeftijdsgroep moet testen en dat voor beide geslachten. Daarbij moeten behalve de kracht zelf ook de waarden van andere variabelen, die mogelijk van invloed op de kracht kunnen zijn, genoteerd worden. Hierbij kunt u denken aan bijvoorbeeld lengte of gewicht (zie Figuur 1).

Als er veel variatie in kracht binnen elke leeftijdsgroep is, zullen er meer kinderen per leeftijdsgroep moeten worden gemeten om tot betrouwbare normaalwaarden te komen. Om te bepalen wat normale kracht bij kinderen is, hebben we de onderzochte kinderen uiteindelijk niet alleen op leeftijd ingedeeld, maar ook op gewicht. Gewicht en leeftijd bleken namelijk de beste voorspellers te zijn voor spierkracht, op basis van een correlatieanalyse. Door normaalwaarden ook als functie van gewicht te definiëren kun je ook bij patiëntjes met een groeiachterstand nog nagaan wat een normale kracht is.

Om betrouwbaarder waarden te krijgen, hebben we niet naar de kracht per spiergroep gekeken, maar naar de totale kracht, opgeteld over verschillende spiergroepen, zoals armen en beenspieren. Ten slotte hebben we een abnormale kracht gedefinieerd als een kracht die lager is dan de kracht die 97,5% van de kinderen in dezelfde leeftijds- of gewichtsklasse kan leveren.



**Figuur 2** Echografiebeelden van een normale bicepsspier, een bicepsspier van een patiënt met een spierziekte (myositis) en een bicepsspier van een patiënt met een zenuwziekte (amyotrofe lateraalsclerose). Terwijl de normale spier donker gekleurd is, zijn de aangedane spieren veel witter. Daarnaast is het beeld van de spier met een zenuwziekte vlekkeliger dan dat van de spier met een spierziekte.



**Figuur 3** Uitwerking van een spierechobeeld in stappen (zie tekst). Het Sobel-filter is een ruimtelijk filter dat overgangen in kleur benadrukt door grote gradiënten een grote waarde te geven. De getallen 105,30, 0,08 en 9,83 worden uiteindelijk gebruikt voor diagnostisch onderscheid.

De verzamelde gegevens boden ook de mogelijkheid om naar verschillen in kracht tussen jongens en meisjes te kijken, door middel van Students t-toetsen binnen leef-

tijdscategorieën. Hieruit bleek dat significante krachtsverschillen ten voordele van de jongens voor het eerst op 5-jarige leeftijd in een enkele spiergroep worden gezien. Op 10-

jarige leeftijd zijn jongens sterker dan meisjes voor vrijwel alle spiergroepen. Tussen 11- en 13-jarige leeftijd zijn meisjes tijdelijk sterker dan jongens, waarna de jongens de meisjes definitief inhalen op 14-jarige leeftijd. Dit laatste fenomeen heeft te maken met de groeispurt in de puberteit, die bij meisjes eerder plaatsvindt. De wiskunde die hier gebruikt is, betreft dus beschrijvende statistiek.

### Van veel getallen tot biomarker

#### Voorbeeld 2: spierechografie

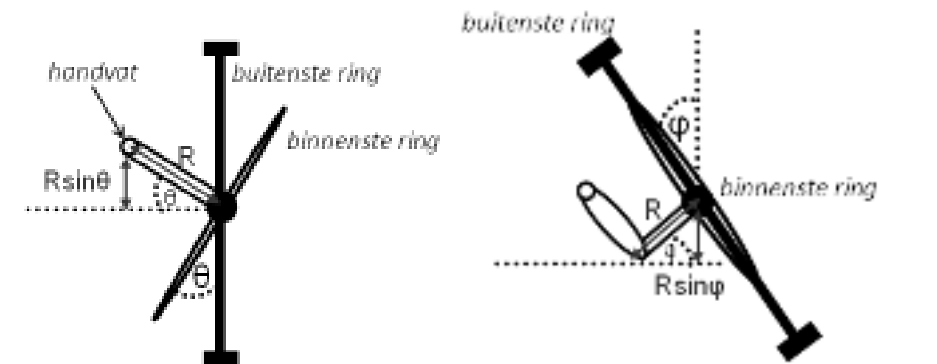
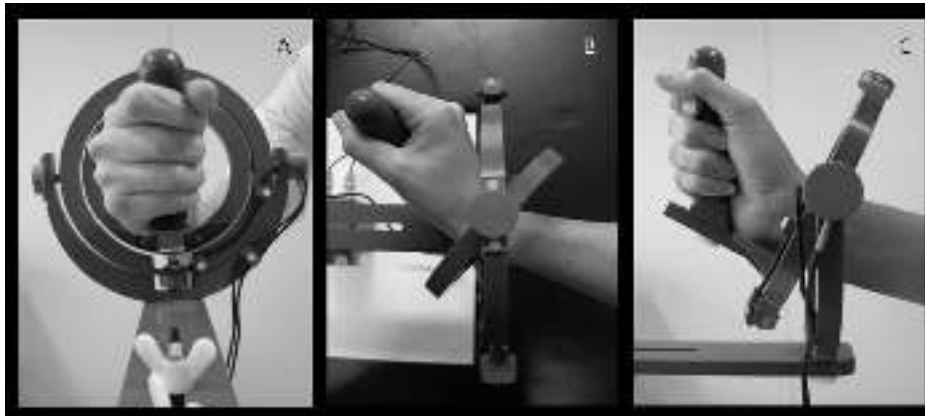
Niet altijd geeft de meting zelf direct de variabele waar de normale waarden van bepaald kunnen worden, zoals dat bijvoorbeeld bij temperatuur, bloeddruk of kracht wel het geval is. Soms moeten de verkregen gegevens eerst voorbewerkt worden. Hierbij wordt meestal geprobeerd om de hoeveelheid gegevens in te perken. Dit heet datareductie. Als voorbeeld van een dergelijke voorbewerking wil ik u iets vertellen over het bepalen van normaalwaarden voor spierechografiebeelden. Bij spierechografie maak je een plaatje dat in grijstonen, van wit tot zwart, de opbouw van de spier laat zien.

Het doel van spierechografie is nu om te bepalen of de betreffende spier normaal is, of dat het plaatje juist aanwijzingen geeft voor een spier- of zenuwziekte. Tot enkele jaren geleden werden ook deze plaatjes voornamelijk kwalitatief beoordeeld. Een egaal zwarte spier betrof dan zeer waarschijnlijk een normale spier, een egaal witte spier een spierziekte en een zwarte spier met daarin witte vlekken een zenuwziekte (zie Figuur 2).

Om nu een plaatje kwantitatief te kunnen analyseren, moet je eerst weten wat een plaatje eigenlijk is. Eenmaal opgeslagen als een computerbestand bestaat een plaatje meestal uit enkele miljoenen getallen, waarbij de getallen de kleuren van beeldpunten vertegenwoordigen. Hier komen dus de getallen vandaan waar we een nuttige biomarker uit moeten zien te halen. Bij een beeld in 8-bits grijswaarden wordt de kleur gecodeerd door een waarde tussen 0 en 255, waarbij 0 diepzwart is en 255 helderwit. Bij de analyse van dit beeld moet eerst een representatief stuk uit de spier geselecteerd worden. Dan kan de gemiddelde pixelwaarde in deze selectie bepaald worden, waarmee de 'grijsheid' (densiteit) van het beeld in één getal wordt uitgedrukt. Ook kunnen de witte pixels (gedefinieerd als een waarde  $> 170$ ) in de selectie geteld worden. Wanneer dit aantal gedeeld wordt door het oppervlak van de selectie in  $\text{cm}^2$ , hebben we een maat voor de hoeveel-

| Bicepsspier          | Specificiteit | Sensitiviteit spierziekten | Sensitiviteit zenuwziekten |
|----------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|
| Densiteit            | 93%           | 94%                        | 0%                         |
| White area index     | 93%           | 82%                        | 0%                         |
| Inhomogeniteitsindex | 93%           | 35%                        | 100%                       |

**Tabel 1** Specificiteit en sensitiviteit van spierechowaarden voor de diagnostiek van spier- en zenuwziekten. Omdat de normaalwaarden gebaseerd zijn op de waarden in de gemeten gezonde populatie, is het te verwachten dat de specificiteit hoog is voor alle parameters. De sensitiviteit laat zien dat de densiteit en de white area index vooral nuttig zijn om spierziekten te identificeren, terwijl de inhomogeniteitsindex juist nuttig is om zenuwziekten te diagnosticeren.



**Figuur 4** Voor- (A), boven- (B) en zijaanzicht (C) van de polsbewegingsmeter. Daaronder staat links aangegeven hoe de hoeken  $\theta$  en  $\varphi$  gedefinieerd zijn bij polsextensie (zie ook B) en bij pols-ulnair-deviatie (vergelijk ook C).

heid wit in de spier (*white area index*). Om nu een maat voor de vlekkerigheid van de spier te krijgen, hebben we gebruik gemaakt van het feit dat een vlek wordt gedefinieerd door zijn randen [2]. Die randen kunnen geïdentificeerd worden door een ruimtelijk filter te gebruiken (Sobel-filter; Figuur 3) dat bij grote gradiënten in de kleurwaarden een hoge waarde oplevert (wit) en bij kleine gradiënten een lage waarde (zwart).

De waarde van de pixel *E* na filteren wordt berekend uit de  $3 \times 3$ -omgeving van de pixel *E* op de volgende manier:

$$\sqrt{X^2 + Y^2}$$

waarbij  $X = (C + 2F + I) - (A + 2D + G)$  en  $Y = (A + 2B + C) - (G + 2H + I)$  en de omgeving van de pixel *E* is gedefinieerd als:

|   |   |   |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

Door dan weer de witte pixels te tellen (dit keer alle waarden  $> 197$ ) en dit aantal te normaliseren met het oppervlak van de selectie in  $\text{cm}^2$ , krijgen we een maat voor de vlekkerigheid (inhomogeniteitsindex; Figuur 3).

De vraag is nu of deze drie getallen samen inderdaad een nuttige biomarker opleveren; in dit geval om spier- en zenuwziekten te kunnen onderscheiden. Een manier om naar het nut van een biomarker te kijken, is om de specificiteit (het percentage normale bevindingen in gezonden) en de sensitiviteit (het percentage abnormale bevindingen in patiënten) uit te rekenen. Een goede biomarker heeft zowel een hoge specificiteit als sensitiviteit. Zoals uit Tabel 1 is af te lezen, bleek uit een onderzoek in groepen patiënten met spieren zenuwziekten in vergelijking met gezonden dat de spierechowaarden van groot belang kunnen zijn in de diagnostiek van spieren zenuwaandoeningen [2]. Hierbij is, eigenlijk zoals verwacht, de 'grijsheid' met name van belang om spierziekten te identificeren en de 'vlekkerigheid' om zenuwziekten te onderscheiden. Bij dit voorbeeld is wederom beschrijvende statistiek gebruikt, maar daarnaast is ook beeldanalyse (in de zin van ruimtelijke filters) toegepast.

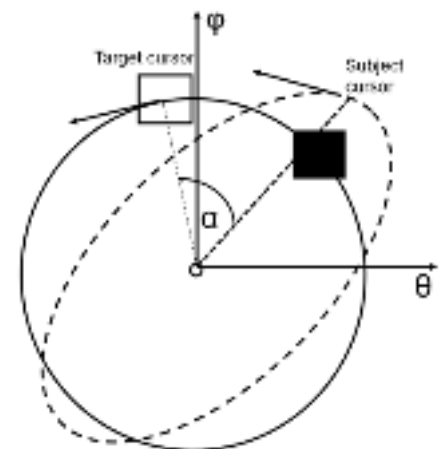
#### Voorbeeld 3: motoriek bij veroudering

Recent hebben we op onze eigen afdeling een apparaatje ontwikkeld dat het mogelijk maakt bewegingen van de pols nauwkeurig te meten (zie Figuur 4). Wanneer iemand het handvat van het apparaatje vasthoudt, kan

de pols nog in twee richtingen bewegen: in het vlak van de duim en de pink (radiaal-ulnair-beweging) en in het vlak hier loodrecht op (flexie-extensie-beweging). De derde vrijheidsgraad in bewegingen van de pols (rotatie) is niet mogelijk in dit apparaatje.

Alle combinaties van flexie-extensie- en radiaal-ulnair-bewegingen zijn ook te maken, zoals bijvoorbeeld draaibewegingen van de pols. Ons doel is om dit apparaatje te gebruiken in de diagnostiek van bewegingsstoornissen, zoals bijvoorbeeld de ziekte van Parkinson. Omdat dit type bewegingsstoornissen vooral voorkomt bij oudere mensen, hebben we eerst onderzocht hoe de met dit apparaatje gemeten waarden variëren tussen jongere en oudere gezonde proefpersonen [3]. De software die we gebruiken registreert de positie van de pols voor beide bewegingshoeken honderd keer per seconde. Wanneer we dus proefpersonen een cursor op het scherm laten volgen (zie Figuur 4) die tien keer binnen drie seconden een cirkel beschrijft, hebben we voor die drie seconden te maken met  $2 \times 10 \times 100 = 6000$  datapunten. Ook hier was dus weer de vraag hoe we de verkregen gegevens tot een potentieel nuttige biomarker konden omvormen.

Er zijn in principe heel veel manieren om de verkregen gegevens te analyseren, dus we zijn eerst maar eens begonnen met de meest voor de hand liggende. Als eerste hebben we de daadwerkelijke vorm van de polsbeweging (wanneer de pols ronddraait, beschrijft deze geen perfecte cirkel maar een ovaal) bepaald, die gedefinieerd wordt door  $R\sqrt{\sin^2 \theta + \sin^2 \varphi}$  (zie Figuur 4). Daarbij heb-



**Figuur 5** Schematisch overzicht van de cirkelbewegingstaak. De getrokken lijn geeft de voorgeschreven cirkelbeweging aan met daarop de cursor die gevolgd moet worden, de gestippelde lijn de daadwerkelijk uitgevoerde beweging. Hierbij geven  $\theta$  en  $\varphi$  de beweging van de pols in respectievelijk de flexie-extensie- en de mediaal-ulnair-richting aan (zie Figuur 4). De daadwerkelijke positie van de hand wordt geprojecteerd op de cirkel (op het scherm), zodat het volgen van de cursor niet te complex wordt.

ben we de hoeksnelheid waarmee de beweging wordt uitgevoerd en de fout ( $\alpha$ : het verschil in de positie van de cursor en de positie van de hand in graden) bepaald. Om bijvoorbeeld de hoeksnelheid te verkrijgen, heb je de afgeleide van de hoekpositie nodig. Om deze uit te rekenen, maak je gebruik van differentiaalrekening: snelheid wordt immers benaderd door een verschil in twee (hoek)posities te delen door de verstreken tijd. Snelheid in rad/s werd daarom bepaald als de numerieke eerste-orde-afgeleide van de hoekverplaatsing, dus als het verschil tussen twee na elkaar gesampled hoekposities, gedeeld door de sample-duur (0,01 s). Door nu vervolgens de standaarddeviatie van de hoeksnelheid (per hoek, over alle uitgevoerde cirkels) uit te rekenen, kregen we een maat voor de variabiliteit van de hoeksnelheid. Een soortgelijke berekening is uitgevoerd voor de positie en de fout. Tot slot zijn positie, hoeksnelheid en fout en hun standaarddeviaties nog gemiddeld over alle hoeken van de cirkel.

Om nu te weten te komen of deze maten tot potentieel nuttige biomarkers kunnen leiden, hebben we eerst gekeken hoe sensitief en specifiek deze maten zijn om jongeren en ouderen te onderscheiden. Hieruit bleek dat de variabiliteit van de hoeksnelheid en de variabiliteit van de fout het beste presteerden met een sensitiviteit en specificiteit in de orde van 70–75%. Ook hierbij is dus weer gebruik gemaakt van statistiek, met daarnaast differentiaalrekening.

### Van héél veel getallen tot biomarker

#### Voorbeeld 4: diagnostiek van tremoren

Tot slot wil ik laten zien hoe signaalanalytische technieken gebruikt kunnen worden om onderscheid te maken tussen verschillende vormen van tremor (trillen). Iedereen kent wel de tremor van parkinsonpatiënten, die vooral in rust optreedt, maar daarnaast zijn er nog vele andere vormen, zoals bijvoorbeeld essentiële en versterkt fysiologische tremor, die juist typisch optreden bij het aannemen van houdingen. In principe probeert een neuroloog op basis van het klinisch consult er achter te komen welke vorm van tremor de patiënt heeft, maar dat is niet altijd even gemakkelijk. Een aantal kenmerkende eigenschappen van veelvoorkomende tremoren is weergegeven in Tabel 2. In deze tabel valt de kolom met getallen op die de trillingsfrequentie weergeeft. Dit geeft aan dat we ook wiskunde kunnen gebruiken bij de diagnostiek van tremoren. Het is zo goed als onmogelijk om de trillingsfre-

### Fourierreeks, Fouriertransformatie en discrete Fouriertransformatie

Deze samenvatting is niet bedoeld om de details van Fourieranalyse uit te leggen (daar zijn veel goede boeken voor), maar als een herinnering aan de belangrijkste formules.

#### Fourierreeks

Elke periodieke functie  $x(t)$  met periode  $T$  kan uitgedrukt worden als een Fourierreeks op de volgende manier:

$$x(t) = \sum_n a_n \sin(2\pi n t/T) + b_n \cos(2\pi n t/T), n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Hierbij is  $n/T$  de frequentie van elke sinus en cosinus. Wanneer  $x(t)$  gegeven is, kunnen de coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  berekend worden door integratie van  $x(t)$  over één periode:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi n t/T) dt, n > 0, a_0 = 0, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi n t/T) dt, n > 0, b_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (3)$$

Er bestaan andere manieren om de Fourierreeks van een functie uit te rekenen, door bijvoorbeeld alleen sinussen of alleen cosinussen te gebruiken, maar die worden hier niet verder toegelicht.

#### Fouriertransformatie

De Fouriertransformatie is een uitbreiding van de Fourierreeks, voor niet-periodieke functies. Voor Fouriertransformatie is een functievoorschrift voor  $x(t)$  vereist. De Fouriertransformatie levert dan weer een functionele (complex-waardige) uitdrukking op:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (4)$$

Hierbij is de som in vergelijking (1) een integraal geworden en zijn de sinussen en cosinussen infinitesimaal klein geworden: ze worden teruggevonden als:  $e^{-2\pi i f t} = \cos 2\pi i f t - i \sin 2\pi i f t$ . In dit geval wordt in het spectrum meestal de waarde van  $|X(f)|$  weergegeven.

#### Discrete Fouriertransformatie (DFT)

DFTs kunnen worden toegepast op gediscrètiseerde functies of signalen, die niet periodiek zijn en geen functievoorschrift hebben. De DFT is speciaal ontwikkeld om de frequentie-inhoud van gediscrètiseerde signalen van eindige lengte te bepalen. Hierbij worden  $N$  waarden van het signaal  $x$  in het tijdsdomein getransformeerd naar  $N$  waarden van de DFT  $X$  in het frequentie-domein op de volgende manier:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-2\pi i k n/N}. \quad (5)$$

Hierbij lopen zowel  $k$  (in het tijdsdomein) als  $n$  (in het frequentie-domein) van 0 tot  $N-1$ . De waarden  $x[k]$  komen overeen met de waarden van  $x(t)$  op  $t = k/f_{\text{sampling}}$ , waarbij  $f_{\text{sampling}}$  de sample-frequentie is. In dat geval corresponderen de waarden  $X[n]$  met de waarden van  $X(f)$  op  $f = f_{\text{sampling}} n/N$ .

quentie van een beweging te zien; om nu hiervoor in de plaats wiskunde te kunnen gebruiken hebben we eerst een serie getallen nodig.

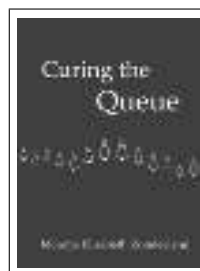
De tremor kan gelukkig goed gemeten wor-

den met behulp van oppervlakte elektromyografie (EMG); hierbij worden elektroden op de huid boven de spieren geplakt die betrokken zijn bij de trillingsbeweging. Dit kunnen bij



# In de verdediging

| In defence



## Curing the Queue

Maartje Zonderland

Het is een geregeld onderwerp van gesprek: de kosten van de zorg in Nederland rijzen de pan uit. Met de vergrijzing wordt instandhouding van het huidige zorgniveau steeds moeilijker en onbetaalbarer. Ook over wachtlijsten in de zorg wordt veelvuldig geklaagd — het efficiëntieniveau in de meeste ziekenhuizen lijkt te wensen over te laten. “Gezien wat er op het spel staat, is het moeilijk te begrijpen dat het in ziekenhuizen eerder regel dan uitzondering is om expliciete beslissingen over de verdeling van schaarse goederen en capaciteit te vermijden,” aldus Maartje Zonderland. Zij is na het afronden van de studies Technische Bedrijfskunde en Toegepaste Wiskunde in 2008 als adviseur bedrijfsvoering aan de slag gegaan bij het Leids Universitair Medisch Centrum (LUMC) en was daarnaast promovenda aan de Universiteit Twente. Op 27 januari 2012 promoveerde ze op het proefschrift *Curing the Queue* dat ze schreef onder begeleiding van prof.dr. Richard Boucherie (UT), dr. Nelly Litvak (UT) en dr. Fred Boer (LUMC).

## Verbeteren van zorglogistiek

In haar werk en in haar onderzoek hield Zonderland zich bezig met het verbeteren van zorglogistiek. Hierbij maakte ze gebruik van technieken uit de operationele research, ook wel bekend als mathematische besliskunde. Logistieke uitdagingen, geïnspireerd op de dagelijkse praktijk van het LUMC, vormen de basis van de bestudeerde problemen in haar proefschrift. Denk hierbij aan de inzet van artsen of de MRI-scanner, de verdeling van verpleegbedden of het maken van een spreekuurplanning.

In ziekenhuizen wordt vaak op een ad-hocmanier geanticipeerd op problemen die spontaan lijken te ontstaan en vergezeld worden door ongewenste bijeffecten zoals het moeten afzeggen van patiënten voor behandelingen, lange wachtlijsten en lange wachttijden in het ziekenhuis. Met de modellen van Zonderland kan een goed inzicht verkregen worden in het betreffende capaciteitsprobleem, de mogelijke oplossingen en de gevolgen van de gekozen oplossing.

Verschillende oplossingen die in het proefschrift gepresenteerd worden, zijn inmiddels geïmplementeerd in het LUMC. De directe link met de praktijk was voor Zonderland het grote voordeel van de combinatie werk-onderzoek. Hoewel ze het soms wel moeilijk vond om de waan van de dag achter zich te laten en rustig te gaan zitten om onderzoek te doen, was het combineren van de twee voor haar wel goed te doen. Sterker nog, volgens haarzelf is Zonderland ‘niet zo’n theoreticus’ en had ze het niet vier jaar lang aan de universiteit volgehouden. Van de vier dagen per week die ze aan het LUMC werkte, was er één beschikbaar voor haar onderzoek. Het hielp dat het LUMC ook een academische instelling is. Daardoor begreep men het wanneer ze een probleem wat verder wiskundig moest uitdiepen dan voor het ziekenhuis interessant was. En omgekeerd was ook de begeleiding en het begrip in Twente goed. “Richard Boucherie heeft oog voor de praktijk.”

*Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.*

Redacteur: Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

### Wachtrijmodellen

Zonderland bestudeerde in haar werk verschillende processen, die ze vrijwel alle probeerde te optimaliseren met behulp van wachtrijtheorie. Een goed geformuleerd wachtrijmodel kan helpen bij het plannen van de capaciteit of het aanbod van een bepaalde dienst. Een typisch wachtrijmodel bestaat uit een kansverdeling voor de aankomsten bij het wachtrijstelsel, een kansverdeling voor het bedieningsproces of het verlaten van het systeem en het aantal 'servers' (bijvoorbeeld doktoren of bedden).

In termen van patiënten komen in het meest gebruikelijke wachtrijmodel patiënten aan volgens een Poissonproces en zijn de bedieningstijden exponentieel verdeeld of verdeeld volgens een algemene (niet nader gedefinieerde) verdeling. Als de parameter  $\lambda$  het verwachte aantal patiënten is dat aankomt per tijdseenheid, geldt voor een Poissonproces dat het aantal patiënten  $X_t$  dat aankomt voor tijdstip  $t$  voldoet aan  $P(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ . De kans dat wachttijd  $T$  tot de eerste patiënt arriveert groter is dan  $t$  is dan  $P(T > t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$ . Met andere woorden, de wachttijd  $T$  tot de eerste patiënt aankomt is exponentieel verdeeld.

Een heel belangrijke eigenschap van een exponentiële verdeling is dat deze *geheugenloos* is: de kans dat de tijd tussen de aankomsten van twee opeenvolgende patiënten groter is dan  $t$  is gelijk aan de kans dat de wachttijd tot de eerste patiënt groter is dan  $t$ . Preciezer geformuleerd:  $P(T > u + t | T > u) = P(T > t)$ , voor alle  $u, t \geq 0$ . De kans dat de tijd tussen twee aankomsten groter is dan  $u + t$ , gegeven dat die tijd al groter is dan  $u$ , is dus gelijk aan de kans dat de tijd groter is dan  $t$ . Met andere woorden, de aankomsten zijn onafhankelijk.

Een belangrijk aspect aan aankomstprocessen is dat er een grote spreiding in de tijdsintervallen tussen twee aankomsten kan zitten en dat het een slecht idee is om deze variatie niet in beschouwing te nemen of te laag in te schatten. Een klassiek resultaat uit de wachtrijtheorie zegt dat er 'ontploffing' van de wachttijd zal optreden als je het aanbod van een dienst exact gelijk laat zijn aan de gemiddelde vraag. Het modelleren van een aankomstproces als een Poissonproces is daarom niet alleen een standaard, maar ook een veilige keuze, aangezien een Poissonverdeling in het algemeen de variantie iets overschat.

### Elkaar kruisende patiëntenstromen

Zonderland modelleerde voor haar proefschrift zeven verschillende processen, ieder met een ander, nieuw model. De reorganisatie van een polikliniek, het opstellen van afspraken schema's voor een polikliniek met zowel inloop- als afspraakpatiënten, een planning voor een MRI-scanner waarvoor medische afdelingen de benodigde tijd soms overschatten en een planning die rekening moet houden met zogenaamde zorgpaden, zijn voorbeelden.

In het laatste gedeelte van haar proefschrift bestudeerde Zonderland de afdeling Neurochirurgie van het LUMC, waar (semi-)spoed- en electieve (planbare) patiëntenstromen elkaar kruisen. Bij de planning moet men hier een afweging maken tussen het afzeggen van electieve operaties door de tussenkomst van semi-spoedpatiënten, en ongebruikte operatietijd door het reserveren van teveel tijd voor deze patiënten. Door de onvoorspelbaarheid van het precieze aantal semi-spoedpatiënten per week is de benodigde hoeveelheid operatietijd onzeker en komt de planning van electieve patiënten in het gedrang. Wanneer de operatiekamers (OK) een hoge bezettingsgraad hebben, biedt het reserveren van tijd voor semi-spoedpatiënten uitkomst, aangezien zo minder electieve patiënten afgezegd hoeven te worden. Echter, door de genoemde onvoorspelbaarheid kan het ook zijn dat de OK

leeg staat. Zonderland presenteerde een wachtrijmodel en een Markov-beslissingsmodel om dit planningsproces te reguleren.

### Implementatie in de praktijk bleek lastig

Genoemde afdeling heeft de volledige beschikking over een OK en kan een andere voor drie dagen per week gebruiken. Toen Zonderland op de OK mee ging draaien om de processen in kaart te brengen, werd de beschikbare OK-tijd vrijwel volledig volgepland, waarbij beperkt rekening werd gehouden met het gemiddelde aantal semi-spoedoperaties dat er per week te verwachten was. Volgens het klassieke wachtrijresultaat leidt een dergelijke planning al snel tot de ongewenste afgelasting van veel electieve operaties.

Zonderland modelleerde de aankomst van semi-spoedpatiënten als een samengesteld Poissonproces, een Poissonverdeling met nog een andere kansverdeling eronder. Ze drukte de verschillende operaties in de OK uit in slots en gebruikte het totaal aantal slots per week als parameter voor de Poissonverdeling. Op basis van haar model becijferde ze dat de afdeling de OK  $3\frac{1}{3}$  van de 8 dagen zou moeten reserveren voor semi-spoedpatiënten. Hoewel ze concludeerde dat haar resulterende Markov-beslissingsmodel en vuistregels eenvoudig in een spreadsheet te implementeren waren, bleek de uitvoering in de praktijk toch erg lastig. De praktijk bleek toch weerbarstiger dan de theorie, want er is nu eenmaal weerstand tegen veranderingen. Zonderland heeft daarom een tijd lang een schaduwplanning bijgehouden waarmee duidelijk werd wat de voordelen waren van haar model. Na een lange opstartperiode wordt de OK nu dus toch zo veel mogelijk vrijgehouden voor semi-spoedoperaties, met als gevolg minder afzeggingen en weinig leegstand. Er is nog een reden waarom implementatie van Zonderlands model een goed idee was. Met een spreadsheet op basis van het Markov beslissingsmodel kan een secretaresse de planning maken. Voorheen was de invulling van de agenda gebaseerd op allerlei medische argumenten waardoor alleen een chirurg de planning kon maken. Die chirurg was hier geregeld twee dagen per week mee bezig, terwijl zij die tijd toch veel beter aan opereren zou kunnen besteden!

### Professionals geloven je niet zomaar

Hiervan heeft Zonderland geleerd dat professionals je niet zomaar geloven, ook al is je model nog zo goed of mooi. Aan de andere kant bleek het wel waardevol om wiskundige te zijn en niet een willekeurige adviseur of manager. "Artsen weten een bewijs te waarderen." Als voorbeeld noemt ze de Pollaczek–Khintzine-formule die de verhouding tussen wachttijd en bedieningsduur uitdrukt als functie van de *load* of bezettingsgraad  $\rho$ , met  $0 < \rho < 1$ . In de praktijk weet iedereen dat de gemiddelde wachttijd  $\mathbb{E}(W^q)$  toeneemt als de bezettingsgraad  $\rho$  hoger is, maar wordt gedacht dat het verband tussen genoemde verhouding en bezettingsgraad lineair is. Geconfronteerd met een grafiek die de Pollaczek–Khintzine-formule  $\mathbb{E}(W^q) = \mathbb{E}(S) \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1+c_s^2}{2}$  illustreert, ziet men meteen in dat de verhouding tussen gemiddelde wachttijd  $\mathbb{E}(W^q)$  en gemiddelde bedieningstijd  $\mathbb{E}(S)$  meer dan exponentieel toeneemt als functie van  $\rho$ : bij een lage bezettingsgraad heeft een kleine toename ervan maar een klein gevolg voor de wachttijd; bij een hoge bezettingsgraad leidt een kleine toename ervan tot een enorme toename van de wachttijd (in de formule is de constante  $c_s^2$  de variantie van  $S$  gedeeld door  $\mathbb{E}(S)^2$ ). Die formule is voor de artsen voldoende bewijs dat een overvolle agenda geen goed idee is.

'Patiënt is de lijdende vorm van *patience*' is een van de stellingen bij het proefschrift van Zonderland. Hopelijk weet zij met haar eigen bedrijf Zonderland ZorgLogistiek, dat ze na haar promotie is begonnen, bij te dragen aan een afname van deze vorm van patiëntenleed. ←

**Jos Maubach**

Faculteit Wiskunde & Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513  
5600 MB Eindhoven  
j.m.l.maubach@tue.nl

**Gerhard Woeginger**

Faculteit Wiskunde & Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513  
5600 MB Eindhoven  
g.j.woeginger@tue.nl

**Evenement** 48ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2012)

# Een dynamisch ééndaags congres

Het 48ste Nederlands Mathematisch Congres vond plaats op de campus van de Technische Universiteit Eindhoven. Anders dan voorheen duurde de conferentie slechts één dag. Op het programma stonden de wiskunde en haar schoonheid, toepassingen, geschiedenis, didactiek en puzzels. Onder andere de vier NWO-wiskundeclusters DIAMANT, GQT, NDNS+, STAR en het Platform Wiskunde Nederland verzorgden voordrachten binnen vijf parallelle sessies. Gerhard Woeginger en Jos Maubach doen verslag van een aantal van de activiteiten.

Het congres werd geopend door TU/e rector magnificus Hans van Duijn met onder andere anekdotes uit het NMC 2002 dat tien jaar geleden in Eindhoven werd georganiseerd door Arjeh Cohen, de huidige decaan van de faculteit Wiskunde & Informatica. Daarna startte

direct de plenaire lezing van keynotespreker Herbert Edelsbrunner.

Herbert Edelsbrunner gaf een aansprekende en breed toegankelijke lezing over computationele geometrie en topologie met een breed scala aan toepassingen zoals het

zuurstoftransport via hemoglobine, vergif-neutralisatie, ribonuclease regulatie, kunsttanden, theekopjes, bakstenen muren en (vanzelfsprekend?) doughnuts.

Keynotespreker Yuri Manins voordracht over foutcorrectiecodes was op expertniveau. Zijn voordracht verbond een aantal ver uiteenliggende gebieden binnen de wiskunde: hij startte met codes, vervolgde met toegepaste berekenbaarheidstheorie (zoals Kolmogorov complexiteit en Diophantische beschrijvingen met behulp van polynomen) en eindigde met een fasetransitie in analogie met thermodynamica.

## De Philips Wiskundeprijs voor Promovendi

Op uitnodiging droegen elk van de twaalf wiskundeafdelingen in Nederland precies één van hun promovendi voor. Dat leidde tot twaalf voordrachten van elk twaalf minuten inclusief het stellen en beantwoorden van vragen. De voordrachten waren van hoge kwaliteit, de promovendi namen duidelijk de moeite om hun onderwerpen begrijpelijk te maken voor een algemeen wiskundig publiek. De jury, bestaande uit Jaap Top (RUG, voorzitter), Jan Korst (Philips), Johan van Leeuwen (TU/e) en Jaap Molenaar (WUR) had slechts één uur om de winnaar te bepalen: Het werd Ruben van der Zwaan van de Universiteit Maastricht met zijn voordracht 'Intentions matter'. Jan Korst overhandigde hem de envelop met de door Philips gesponsorde hoofdprijs, waarna de winnares van vorig jaar, Julia Mikhal, de wisseltrofee doorgaf — door een

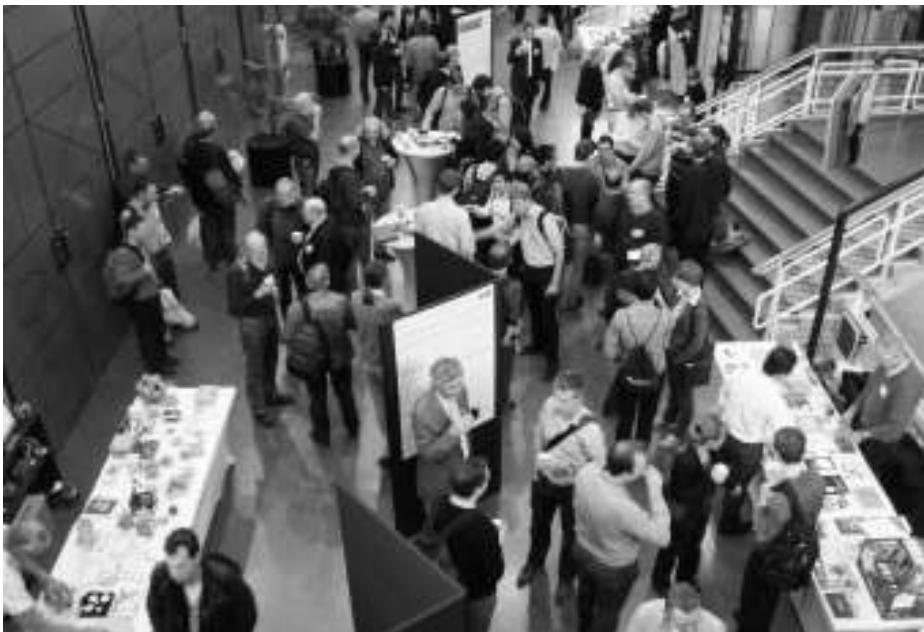


Foto: Patty Koom

misverstand iets minder ceremonieel dan gehoopt. De overige elf kandidaten gingen niet met lege handen naar huis: elk van hen ontving een boekenbon.

### De didactiekssessie

Bij het opzetten van de didactiekssessie was inhoudelijk gekozen voor twee thema's: aan de ene kant voor recent afgerond promotie-onderzoek op het gebied van de wiskunde-didactiek en aan de andere kant voor enkele onderwerpen die vo-docenten tot inspiratie kunnen dienen bij het inrichten van hun onderwijs. Er werd gekozen voor sprekers van scholen en instituten afkomstig uit uiteenlopende plaatsen in het land. Zowel de sprekers als het aanwezige publiek vormden een vertegenwoordiging van het voortgezet en hoger onderwijs.

Aan het eind van de dag bleek dat er behoefte was aan een tijdslot voor discussie over een aantal nu in het wiskundeonderwijs levende onderwerpen. Dat tijdslot was niet gepland, wellicht dat de toekomstige organisatoren van deze sessie aan deze behoefte gehoor kunnen geven.

### De postersessie en vergaderactiviteiten

Tijdens de lunchpauze was er tijd gereserveerd voor het bekijken van de ingezonden posters op de postersessie. Die gaf aan promovendi en postdocs de gelegenheid hun werk te tonen. De ruim twintig ingezonden posters uit Twente, Groningen, CWI, UvA en Eindhoven werden gedurende de hele dag tentoongesteld en toonden een breed spectrum aan veelbelovende Nederlands wiskundige activiteiten.

Daarnaast was er tijdens de lunch de Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap evenals de Mastermath lunchdiscussie waar masterstudenten hun wensen en feedback met de leden van het Mastermath-bestuur konden bespreken. Het landelijk werkcontact voor de Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde (GMFW) vergaderde aan het einde van de middag.

In de centrale ruimte waren verschillende tafels ter beschikking gesteld voor een presentatie van gremia, boeken, puzzels en dergelijke. De uitgevers Birkhäuser en Oxford



Illustratie: Sonja Cox

University Press maakten hiervan gebruik om boeken ten toon te stellen. Ook NWO, KWG en PWN vulden ieder een tafel. De firma's van Deventer, Optische Fenomen en Materialized Mathematical Models presenteerden er hun producten. De presentatoren waren zeer tevreden over de aandacht van de deelnemers.

### De afsluiting

De receptie aan het eind van de dag werd goed bezocht. Velen namen ruim de tijd om de dag af te sluiten met een ontspannend drankje en hapje. Aan de goede sfeer en uit de gesprekken was af te leiden dat men een nuttige en aangename dag had gehad. De congresduur van één dag viel over het algemeen

goed — een suggestie om het af en toe twee dagen te laten duren werd genoteerd. Enige correlatie tussen de drukte op de receptie en de problemen van de NS op het spoor valt niet uit te sluiten — niet alle treinen reden, menigeen kon niet vroeg of eerder naar huis.

Tot slot dank aan de sponsors NWO, KWG, Philips, 3TU.AMI, faculteit W&I en TU/e voor hun steun aan dit Nederlands Mathematisch Congres en *last but not least* aan de sprekers en alle ruim 200 participanten die dit congres tot een dynamisch succes maakten. Een meer volledige samenvatting van de activiteiten is te vinden in het NMC2012-programmaboekje op [www.win.tue.nl/nmc2012](http://www.win.tue.nl/nmc2012).

Ed de Moor

Sloterkade 22-A  
1058 HE Amsterdam  
e.w.a.demoor@planet.nl

Sieb Kemme

Educatieve Adviezen Kemme BV  
Hoofdstraat 149  
9827 PA Lettelbert  
siebkemme@educadvb.nl

## Geschiedenis

# Meetkundeonderwijs op gymnasium en hbs 1900–1968

Tot 1968 vormden meetkunde en algebra de kern van het wiskundeprogramma op gymnasium en hbs. Met de Mammoetwet van 1968 ontstonden de nieuwe schooltypen mavo (thans vmbo), havo en vwo (waaronder het gymnasium). Ed de Moor en Sieb Kemme beschrijven in dit artikel hoe het meetkundeonderwijs er voor de invoering van de Mammoetwet uitzag en welke discussies speelden rond de invulling van dat meetkundeonderwijs. In een vervolgartikel zal beschreven worden wat er in het meetkundeonderwijs veranderde na de invoering van de Mammoetwet.

“Euclides werd mij bijgebracht door een privéleraar en ik weet nog goed welke grote bevrediging de duidelijk meetkundige bewijzen mij gaven.” Zo schreef Charles Darwin (1808–1882) in zijn autobiografie. Bertrand Russell (1872–1970) zegt in zijn geschiedenis van de filosofie dat zonder de Griekse meetkunde er geen moderne wetenschap zou zijn ontstaan. Of dit te rechtvaardigen valt, durven wij niet te zeggen, het is in ieder geval zeker dat velen — wetenschappers, denkers, leraren — hun eerste scholing in deductief denken hebben gehad via bestudering van *De Elementen* van Euclides (300 voor Christus).

Wiskundeonderwijs, dat was eeuwenlang in feite identiek met een cursus euclidische meetkunde. Tot 1968 bepaalde dit vak ook in Nederland samen met algebra het wiskundeprogramma op hbs en gymnasium. De inhoud voor het eerste leerjaar betrof evenwijdigheid, congruentie, meetkundige plaatsen, constructies met passer en liniaal en de stellingen over bijzondere vierhoeken. Een gemiddeld leerboek uit het begin van de 20ste eeuw omvatte zo’n 50 stellingen en ongeveer

250 vraagstukken. Ze verschilden van logische strengheid, maar qua leerstof en methode (‘gegeven – te bewijzen – bewijs’ of ‘gegeven – te construeren – constructie’) scheelde dat niet zo erg veel. In het modale onderwijs hadden de boeken waarin aan de strengheid van een zuiver axiomatische aanpak niet de hoogste eisen werden gesteld het meeste succes.

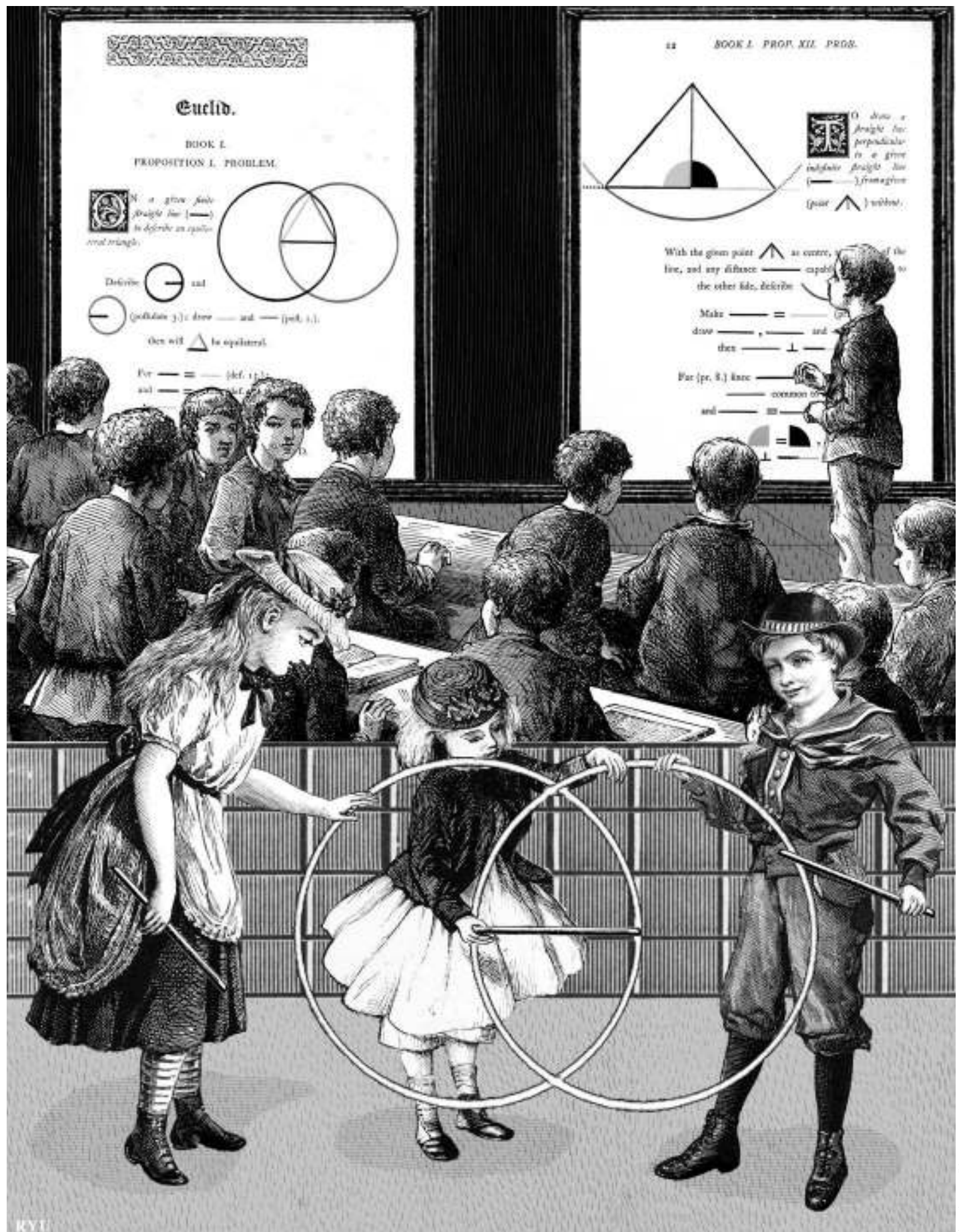
Sommige leraren hadden bezwaren tegen het sjoemelen met de axioma’s en streefden een zuiver logische opzet na. De meest extreme vorm daarvan is te vinden in het werk

van J.H. Schogt (1892–1958). Diens meetkunde-cursus omvatte 18 axioma’s, 5 postulaten, 266 stellingen, 24 werkstukken en bijna 1500 vraagstukken. In de inleiding van het vraagstukkenboek stelt de auteur dat hij “formeel-logische quaesties” (omkeering, contrapositie) reeds vroeg ter sprake brengt, omdat hij ondervonden had “dat deze onderwerpen den leerlingen opmerkelijk weinig moeilijkheden” gaven. Hoe formeel en anti-aanschouwelijk deze aanpak was zien we in het voorbeeld in Figuur 1.

De wiskundeleraren Eduard Jan Dijksterhuis (1892–1965)<sup>1</sup> en H.J.E. Beth (1880–1952) prezen Schogts werk, maar zijn methode heeft nooit echt voet aan de grond gekregen. In het onderwijs van alledag bestond veel onvrede met een strenge aanpak voor de inleiding in de meetkunde, zelfs in een gematigde vorm, zoals die in de gemiddelde leerboeken werd gehanteerd. Het is Tatja-

‘Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.  
Onderstelde:  $AB = A'B'$ ,  $PQ$  is de helft van  $AB$ ,  $P'Q'$  is de helft van  $A'B'$ .  
Gestelde:  $PQ = P'Q'$   
Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar:  $PQ > P'Q'$ ,  $P'Q' > PQ$  en  $PQ = P'Q'$ .  
Was  $PQ > P'Q'$ , dan was volgens stelling 7  $PQ + PQ > P'Q' + P'Q'$  en daar  $P'Q' + P'Q' = A'B'$ , volgens stelling 4  $AB > A'B'$ . Dit is in strijd met het onderstelde, dat  $AB = A'B'$ , dus kan het geval, dat  $PQ > P'Q'$  is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat  $P'Q' > PQ$  zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat  $A'B' > AB$ , hergeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet  $PQ = P'Q'$  zijn.  
Hiermede is de stelling bewezen.’ (Schogt, 1929a, p. 13)

Figuur 1 De strenge aanpak van Schogt



na Ehrenfest-Afanasjeva (1876–1964) — verder te noemen mevrouw Ehrenfest — geweest, die hierover met haar brochure *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* uit 1924 aandacht trok. Deze publicatie leidde tot een discussie met Dijksterhuis en is de directe aanleiding geweest voor de oprichting van het *Bijvoegsel van Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, dat over didactische vraagstukken handelde en dat later tot het ook nu nog bekende tijdschrift *Euclides* omgedoopt werd.

Hoofdstreven van de aanhangers van de puur logisch-deductieve stroming (Dijksterhuis c.s.) was het zuiver leren denken. Dat was dan ook het kernthema van de discussies, die zich in de beginjaren van het vakblad *Euclides* voltrokken. Het tijdschrift werd geleid door de meest fervente aanhangers van deze richting: Schogt, Beth, Dijksterhuis en de befaamde schoolboekenauteur Piet Wijdenes (1892–1972). Een betere naam dan *Euclides* hadden deze didactici zich niet kunnen wensen. Veel aanhang ontvingen zij uit de academische wereld, hoewel er uitzonderingen zijn te noemen als David van Dantzig (1900–1959) en Gerrit Mannoury (1867–1956).

Nu kwam het ‘probleem van de didactiek’ niet zo maar uit de lucht vallen. Allereerst was aan het eind van de negentiende eeuw door de pedagogische Reformbeweging of Nieuwe Schoolbeweging een ‘nieuw denken’ over onderwijs ontstaan. Hierin kwam het kind centraal te staan en begon didactiek als zelfstandige discipline vorm te krijgen. Op de talloze uitwerkingen hiervan gaan we nu niet in. Ook in universitair-wiskundige kringen ont-

stond interesse voor het onderwijs op de middelbare scholen. Zo werd in 1908 tijdens het vierde Internationale Congres van Wiskundigen te Rome de CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique) opgericht. Felix Klein (1849–1925) werd hiervan de eerste voorzitter. Het eerste dat men toen ter hand nam, was het aanvankelijk meetkunde onderwijs. In die tijd kwam in Duitsland ook het denkpsychologische onderzoek op gang, waaruit bleek dat kinderen rond hun twaalfde levensjaar in het algemeen nog niet in staat zijn formeel-logische redeneringen te voltrekken.

### Wat wilde mevrouw Ehrenfest?

Pogingen om de didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs te verbeteren waren in het begin van de twintigste eeuw al verschillende malen ondernomen. Onder meer door Willem Reindersma (1877–1946)<sup>3</sup>, met wie mevrouw Ehrenfest al spoedig na haar aankomst in Nederland in contact was gekomen. In de geest van die tijd lag voor de vernieuwers het accent op ‘leren door doen’, waarmee zowel zelfstandig werken als concreet handelen van de leerling werd bedoeld. Mevrouw Ehrenfest sloot zich hier in zekere zin bij aan, maar haar uiteindelijke doel was veel fundamenteeler. Zij maakte onderscheid tussen *ruimteleer* en *axiomatiek*. Met het eerste bedoelde zij het ‘begrijpen’ van de ruimte en het kunnen toepassen daarvan, het tweede betreft de meetkunde doorgronden als een formeel logisch systeem van definities, axioma’s en stellingen. Haar stond een drietrapsprogramma voor ogen dat als volgt was ingedeeld:

- propedeutische of inleidende cursus (10 tot 12 jaar)
- systematische cursus (12 tot 16 jaar)
- strikt axiomatische leergang (16 tot 18 jaar)

De *propedeutische cursus* diende een aanschouwelijk karakter te hebben, waarbij werd uitgegaan van intuïtieve meetkundige noties, die kinderen op natuurlijke wijze in de realiteit hebben verworven. Een voorbeeld daarvan is een strak gespannen touw als notie van een rechte lijn. Zo kon het voorstellingsvermogen — het vormen van mentale beelden zouden wij thans zeggen — ontwikkeld worden. Deze intuïtieve werkzaamheid achtte zij niet alleen van belang voor het verwerven van begrippen en relaties tussen die begrippen, maar zag zij zelfs als een noodzakelijke voorwaarde voor datgene waar het haar in feite om ging: leren denken. Deze opvatting had zij zelfs tot haar credo verheven: ‘Zonder intuïtie is geen denken mogelijk’.

Zo’n intuïtieve start moest de basis leggen voor de tweede trap in het programma de *systematische cursus*. Daarin kon dan al enige nadruk op het logische redeneren gelegd worden. Niet volgens de traditionele euclidische opbouw, maar aangepast aan het niveau van de leerlingen. Praktisch betekende dit, dat evidente stellingen (zoals, de basis-hoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk) niet bewezen werden, maar voorlopig als aanschouwelijke evidenties (axioma’s) werden opgevat. Verder dat de leerlingen zelf — wel onder leiding van de leraar — de stellingen dienden te formuleren en bewijzen. En ten slotte dat de inhoud van de cursus zo beknoot mogelijk diende te zijn. Alles diende in het teken te staan van de essentie van de theorie. Daartoe zouden ketens van stellingen opgebouwd moeten worden, ook wel stambomen genoemd, waarvan een voorbeeld in Figuur 3 zien. Het opbouwen van zo’n beperkt stukje theorie werd later door Freudenthal ‘lokaal deductief redeneren’ genoemd.

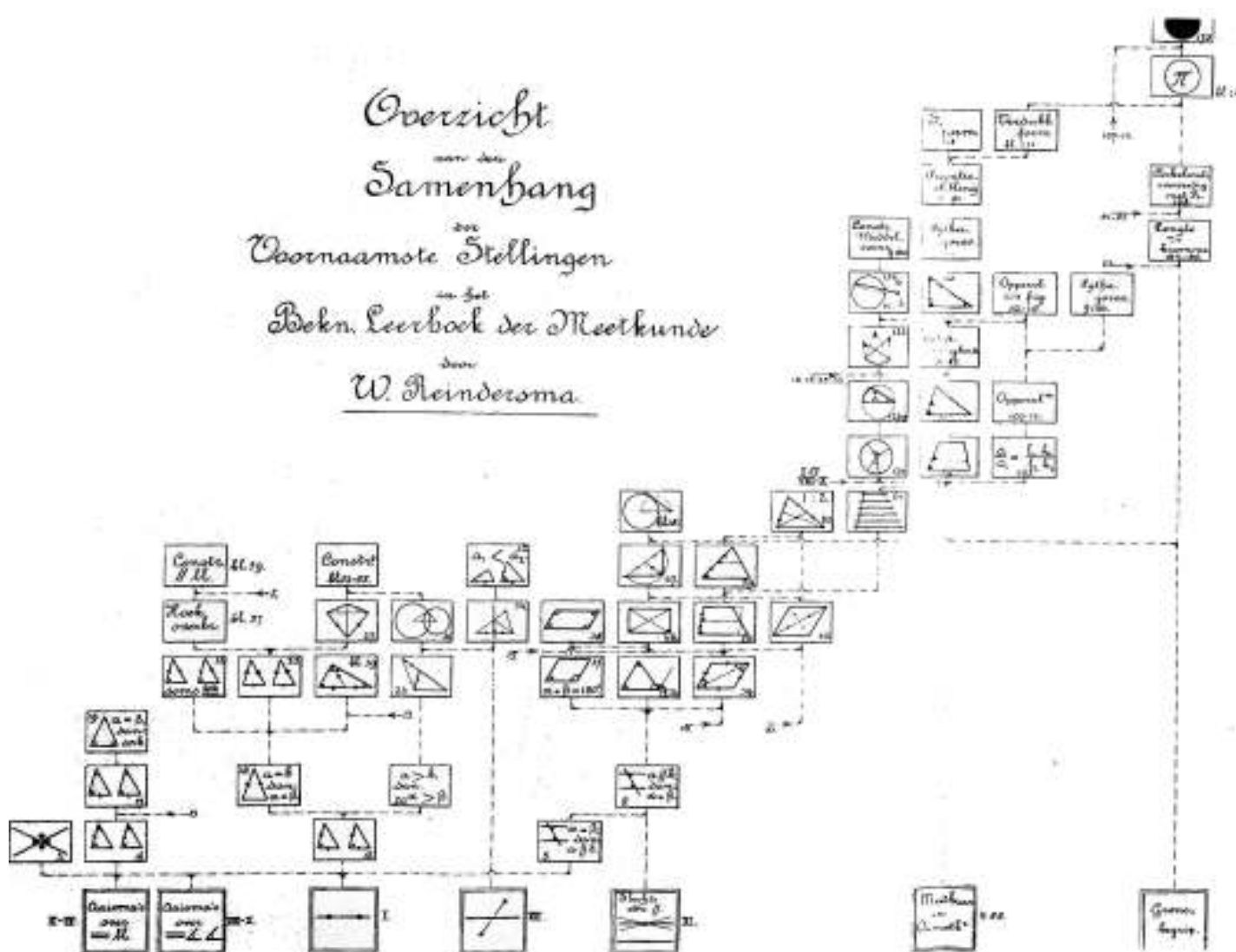
De derde trap in dit ambitieuze plan tot een herziening van het toenmalige meetkundeonderwijs moest een strak opgezette *axiomatische leergang* van de meetkunde worden. Naast het feit dat de leerlingen zouden leren wat de consistentie van een formeel systeem is, zouden zij ook geconfronteerd moeten worden met de betekenis van het parallellen-postulaat van de euclidische meetkunde. Het ging haar in dit programma-voorstel dus vooral om het leren denken. Zij achtte het “van grote praktische betekenis, dat iemand zich niet alleen voor de juistheid van zijn opvattingen, maar ook voor den oorsprong en de logische reden daarvan interesseert”. In dit verband zij er aan herinnerd, dat de studie van de grondslagen van de wiskunde in het begin van deze eeuw een grote vooruitgang had geboekt en dat mevrouw Ehrenfest deze ontwikkelingen van zeer nabij had meegemaakt, waarbij zij met name gefascineerd was door de ontdekking van de niet-euclidische meetkonden met hun eigen axiomastelsels en bijbehorende modellen. Juist dit laatste zag zij ook als een mogelijk onderwerp van studie voor de derde trap van haar leergang.

### Dijksterhuis’ kritiek

Na de Eerste Wereldoorlog was in intellectuele kringen in West-Europa een zekere antimathematische stemming ontstaan. In sommige kringen wilde men de wiskundeprogramma’s beknootten — voor enkele schooltypen zelfs afschaffen. Iets wat Dijksterhuis in het geheel niet beviel. In het bijzonder stuitte



Figuur 2 De gewraakte brochure uit 1924



**Figuur 3** Stamboom van stellingen

hem het streven naar een informele start van het meetkundeonderwijs tegen de borst. Het was dan ook niet verwonderlijk dat hij de pen opnam tegen mevrouw Ehrenfest. 'Moet het meetkundeonderwijs gewijzigd worden?' was het artikel van zijn hand in het eerste nummer van het *Bijvoegsel van Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Hierop volgde nog een weerwoord van mevrouw Ehrenfest, direct gevolgd door het 'laatste woord' van Dijksterhuis.

Het zal niet verbazen, dat Dijksterhuis zich door mevrouw Ehrenfests brochure “in zijn meest fundamentele mathematische overtuigingen (voelde) aangetast”. Het antwoord op de door hem zelf gestelde vraag was dan ook een hartgrondig en onomwonden ‘neen’. Het omvangrijke, nog immer zeer leesbare artikel, is een felle, in scherpe bewoordingen gestelde kritiek op mevrouw Ehrenfests opvattingen. Niet alleen betreffende enkele vorm- en begripskwesties, maar vooral ook

ten aanzien van de feitelijke strekking van het geschrift. Dit betrof op de eerste plaats het feit dat Dijksterhuis bezwaren had tegen het aannemen van evidente stellingen. Dit zou tot een verkeerde habitus kunnen leiden, waardoor het meetkundeonderwijs zou worden ontdaan van het belangrijke doel, namelijk leren redeneren. Het tweede bezwaar richtte zich op de door Ehrenfest zo belangrijk geachte intuïtieve ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. Weliswaar erkende ook Dijksterhuis het belang van een zekere intuïtieve fase, maar hij meende dat “meetkundig denken (ook) mogelijk is zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen”. Als voorbeeld haalt hij de ‘stereometrische constructies’ aan, die alleen door middel van redeneringen op te lossen zijn, zoals: “Gevraagd moge worden een rechte  $x$  te construeren, die twee gegeven kruisende rechten  $l$  en  $m$  onder gelijke hoeken kruist, die evenwijdig is aan een vlak  $V$  en

twee geven kruisende rechten  $p$  en  $q$  snijdt.”  
 Voor de zwakkere leerling zag hij dit zelfs als  
 een goede oefening in het leren redeneren,  
 zo argumenteerde hij: “Men kan juist den niet  
 wiskundig aangelegden leerling geen sterke-  
 ren moreelen steun geven, dan wanneer men  
 hem de overtuiging weet bij te brengen, dat  
 alles wat hij op H.B.S. van wiskunde heeft te  
 leeren (...) voor hem bereikbaar is door zuiver  
 logisch redeneeren en dat een goed voorstel-  
 lingsvermogen weliswaar voor hem, die het  
 bezit, een machtig hulpmiddel vormt, maar  
 dat het gemis aan dat vermogen nooit een  
 onoverkomelijk struikelblok kan zijn.”

Kortom er viel in de jaren '20 met Dijksterhuis niet te praten over een andere start van het meetkundeonderwijs. Hij bleef bij zijn standpunt dat ook de aanvang volgens een strak logisch-deductieve opbouw moest plaatsvinden. Hij achtte de axiomatisch opgestelde meetkunde, eerst planimetrisch, daar-

32. De leerling moet op weg van huis naar school bij elke straathoek de hoek die hij maakt, opmeten en deze optekenen. Op grond daarvan de hoek bepalen die de voorgevel van zijn huis en die van de school maken. Dit controleren met de stadsplattegrond. Wat te doen als de wegen niet recht zijn? Iets analoogs als oefening vooraf binnen het schoolgebouw doen.

53. Welke richting moet een vliegtuig in Berlijn nemen om via de kortste weg in Moskou te komen? En hoe van Berlijn naar Java? Maak gebruik van een globe en een touwtje. Is de boog van een parallelcirkel op de bol de kortste afstand?

69. Waarom loopt de maan met je mee? Als je in een rijdende trein zit, waarom schieten de dingen die dichterbij zijn dan sneller voorbij dan die welke verder weg zijn? Maak een schematische tekening.

101. Houd een beker zó dat je de rand als een rechte lijn ziet. (Kijk met één oog.) Daarna langzaam naar beneden bewegen. Wat gebeurt er nu met de vorm van de rand? Hoe moet je die tekenen? Zet een glasplaat tussen je oog en de beker en teken daarop de rand van de beker. Hoe moet je de beker houden opdat de rand precies een cirkel wordt?

155. Men wil een grote vloer met één soort tegels volledig bedekken. Welke vorm kunnen deze tegels hebben? Kunnen het driehoeken, vierhoeken, vijfhoeken zijn? Kunnen ze ook willekeurige hoeken hebben?

162. Maak schematische tekeningen van de methode om de straal van de aarde te bepalen. Evenzo voor de afstand van de maan als je de straal van de aarde kent.

170. Je moet een rok en een broek van gelijke lengte naaien. Waarvoor heb je het meeste stof nodig? Je kunt dit ongeveer schatten, als je de rok als een koker opvat en de broek als twee kokers.

**Figuur 4.** Enkele voorbeelden uit de *Übungensammlung*

na in de ruimte, daartoe hét geijkte middel, ook voor de allerjongste kinderen in het voortgezet onderwijs. Verder beriep hij zich voor zijn standpunt op de historische betekenis,

zowel van de euclidische meetkunde zelf als van de onderwijskundige traditie en ook op het esthetische aspect. De opvoedende waarde, zoals het kweken van discipline en karaktervorming, werd hogelijk door hem geprezen, maar bovenal was het aspect van de vormen de waarde, die er van het wiskundeonderwijs uit zou gaan, zijn leidend motto: “Wat ik als doel van het meetkunde-onderwijs zie, oefening in zuiver denken en spreken (...)”

Moeten we een winnaar in deze ‘strijd’ aanwijzen dan is dat overduidelijk Dijksterhuis. Zo kwam een officiële commissie onder leiding van Dijksterhuis en H.J.E. Beth in 1926 met een voorstel voor een nieuw hbs-programma, waarin vastgehouden werd aan een logisch-deductieve inleiding in de meetkunde. De geest van dit voorstel wordt het meest duidelijk uit het volgende citaat: “Hoofddoel van het wiskundeonderwijs is het bijdragen tot geestelijke ontwikkeling; nevensdoel het aanbrengen van nuttige kennis.” Zo bleef alles voorlopig bij het oude.

### Übungensammlung

Mevrouw Ehrenfest gaf echter niet op. Zo kwam zij in 1931 met haar *Übungensammlung* waarmee zij een praktische handreiking wilde geven voor de uitwerking van de propedeutische cursus. Dit in het Duits geschreven boekje bevat 194 ideeën, geordend naar 19 onderwerpen. Het is geen lineaire leergang; de losse activiteiten zijn bedoeld als ideeën voor lessen, die door de leraar uitgewerkt dienen te worden. Het hoofddoel is het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Mentale activiteiten worden geprogeerd boven het concrete handelen. Empirische activiteiten dienen betekenis te hebben voor het denken. Als voorbeeld hiervoor noemt zij het vinden van de constante verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel door middel van meten versus de methode van de ingeschreven zeshoek, twaalfhoek, enzovoort.

Naast activiteiten in het platte vlak wordt vooral ook in de ruimte gewerkt, ook op gekromde oppervlakken. De begrippen worden zoveel mogelijk ontleend aan objecten en verschijnselen uit de realiteit, met inbegrip van machines en werktuigen. Bij het onderwerp afstanden komt het schatten, kiezen van een maat en de relativiteit van maten aan de orde. Het begrip hoek ontstaat uit de beweging van de wijzers van de klok, waardoor meteen draaiing en draaiingszin ter sprake komen. In Figuur 4 zien we een aantal voorbeelden (vertaling van de auteurs).

Het begrip kortste afstand wordt aan de

hand van allerlei reële situaties onderzocht. Voor de ontwikkeling van het begrip rechte lijn wordt uitgegaan van intuïtieve ervaringen bij viseren, het spannen van een touw, de gang van een lichtstraal, maar ook van de lijn als rotatie-as, die een lichaam invariant laat. Doorsneden met behulp van vloeistoffen in ruimtelijke vormen, onderzoek van schaduw, perspectivische beelden en het maken van aanzichten, maken duidelijk wat zij wilde: inzicht verwerven in ruimtelijke begrippen en relaties op grond van aanschouwelijkheid.

In veel van deze opgaven wordt duidelijk dat mevrouw Ehrenfest eerst en vooral natuurkundige was. De aangehaalde voorbeelden laten zien hoe de ‘opgaven’ qua inhoud en vorm afwijken van de gewone schoolboekopgaven. Ook het niveau van de verschillende oefeningen onderling is sterk verschillend. Redenen waarom dit boek bepaald niet erg geschikt was (en dat ook nu niet zou zijn) voor de modale leraar. Toch zou dit obscure boek een belangrijke betekenis gaan krijgen voor de ontwikkeling van het meetkundeonderwijs in Nederland. Hans Freudenthal (1905–1990) maakte Pierre van Hiele (1909–2010)<sup>4</sup> al in 1931 attent op dit geschrift. In 1951 schreef Freudenthal: “(...) dat haar heelaas tot verregaande onbekendheid gedoemde *Übungensammlung* het beste is dat ik op mathematisch-didactisch gebied ooit heb gezien (...)” We wijzen er nogmaals op dat de propedeutische cursus als doel had om op aanschouwelijke wijze de basis — en in feite kon dat grotendeels al op de lagere school — te leggen voor de tweede trap: een systematische meetkundecursus.

### De Wiskunde Werkgroep

Sinds 1915 bestond de *New Educational Fellowship* (NEF), waarin nieuwe onderwijsvormen een gemeenschappelijk internationaal platform hadden gevonden. In 1936 richtte Kees Boeke (1884–1966) de Nederlandse tak van de NEF op onder de naam *Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* (WVO). Voor het wiskundeonderwijs ontstond toen vrijwel meteen een aparte afdeling: de Wiskunde Werkgroep. Tot de eerste leden behoorden mevrouw Ehrenfest, in wier huis in Leiden de meeste bijeenkomsten werden gehouden, de wiskundeleraar Piet J. van Albada (1905–1997)<sup>5</sup>, de logicus Evert W. Beth (1908–1964), de fysicus en pedagoog Philip Kohnstamm (1875–1990) en Dijksterhuis. Men ging direct aan het werk en men nam niet de eenvoudigste problemen ter hand. Hoe zijn denkprocessen bij het oplossen van wiskundeopgaven bij de leerlin-

gen te bevorderen, welke zijn de taalmoeilijkheden daarbij, hoe leer je kinderen een probleemstelling organiseren en zijn er mogelijkheden om het voorstellingsvermogen te oefenen. Deze vraagstellingen kwamen van de kant van Kohnstamm, die samen met de Wiskunde Werkgroep aan het Nutsseminarium in Amsterdam werkte aan de zogenoemde aansluitingsproblematiek tussen lager en middelbaar onderwijs.

In 1938 werden nog eens drie studiegroepen ingesteld met de volgende opdrachten:

1. Uitwerking van de propedeutische cursus in de geest van mevrouw Ehrenfest.
2. Meetkundeonderwijs aan twaalfjarigen, in verband met de ontwikkeling van de denkpsychologie.
3. Minimum-eisen (...) om de culturele waarde van het planimetrie-onderwijs tot zijn recht te doen komen.

Evert Beth deed op eigen kracht een onderzoek naar het tweede punt en gaf daarvan in 1939 in *Euclides* een verslag met tamelijk teleurstellende resultaten.

Een heel bijzondere bijdrage was die van Van Albada, die op geheel eigen wijze de ideeën van de *Übungensammlung* voor de eerste klas van het Montessori Lyceum in Rotterdam had uitgewerkt. De vorm was die van werkkaarten, die de leerlingen zelfstandig moesten afwerken. De aard van de activiteiten wordt gekenmerkt door het werken met concrete materialen, modellen en foto's, door tekenen, meten, construeren, knippen en kleuren zonder dat dit alleen om concreet handelen gaat. Het is een cursus van bijzonder hoog niveau. Helaas is het materiaal nooit officieel uitgegeven. Later heeft Van Albada nog een beschrijving gegeven van een vijfjarig programma, waarin hij de beoogde drietrapsaanpak van mevrouw Ehrenfest gebruikte, maar ook dit geschrift is helaas nooit gepubliceerd.

Na de oorlog zouden de activiteiten van de werkgroep weer opgevat worden. De groep groeide doordat veel wiskundendidactici zich aansloten bij de werkers van het eerste uur. Het is geen overdrijving te stellen dat de jaren '50 het decennium van de meetkundendidactiek waren. Henk Mooij schreef een proefschrift over het klassengesprek in de meetkundeles, Chris Boermeester behandelde dit onderwerp voor de mulo. De denkpsycholoog A.D. de Groot (1914–2006) — oprichter van het Cito — stelde onderzoek in naar opbrengsten van het meetkundeonderwijs. Rudolf Troelstra voerde onder supervisie van De Groot een experiment met transformatie-meetkunde in de brugklas uit. Hoogtepun-

ten als nevenresultaat van het werk van de werkgroep waren de proefschriften van Pierre van Hiele en Dina van Hiele-Geldof (1911–1958)<sup>6</sup> in 1957 over denkniveau's en de toepassing daarvan op een inleidende meetkuncursus, die gebaseerd was op het werk van mevrouw Ehrenfest. In praktische zin gaven de Van Hieles dit vorm in hun *Werkboek der Meetkunde*, later in *Van Figuren naar Begrippen*. Het doel voor het eind van de eerste klas was nog steeds dat de stellingen over parallelogrammen en hun bijzonderheden gekend moesten worden. Er werd ook na de oorlog nog steeds uitgegaan van het hbs-leerplan uit 1937, dat weer gestoeld was op dat van Beth en Dijksterhuis uit 1925.

De Wiskunde Werkgroep wilde echter een structurele verandering en stelde eind 1948 vijf commissies (algebra, meetkunde, analytische meetkunde, goniometrie en beschrijvende meetkunde) in met als doel een eensluidend programma voor gymnasium bèta en hbs B op te stellen. Dit heeft geleid tot 'Het wiskundeprogramma voor het vwo', een rapport dat in 1953 werd gepubliceerd. Uiteindelijk heeft dit werk in 1958 tot een officiële herziening van het leerplan geleid. Beschrijvende meetkunde verdween van het hbs-programma, analytische meetkunde kwam er voor in de plaats.

### Een compromis

Over de aard van het aanvankelijk meetkundeonderwijs was nog lang niet het laatste woord gesproken. In het aanbevelingsrapport voor deze leerplanherziening lezen we:

“Naar de mening van de Commissie zullen de resultaten van het aanvangsonderwijs verbeteren, als niet te spoedig wordt overgegaan tot de opbouw van een logisch systeem. De bedoeling van een dergelijke opbouw met behulp van definities, axioma's en stellingen moet door de leerlingen worden ingezien alvorens het zin heeft hen deze te laten bestuderen. Hiertoe dient de meetkuncursus met een intuïtieve inleiding aan te vangen. Deze inleiding behoeft niet van lange duur te zijn en kan geleidelijk overgaan in het logisch-systematische gedeelte. (...)”

Dit lijkt een zekere honorering van de gedachten van mevrouw Ehrenfest, maar uit latere bronnen blijkt dat hier sprake was van een compromis tussen de Dijksterhuis-aanhangers en de Ehrenfest-protagonisten. Er werd alle mogelijkheid gelaten om toch weer snel over te stappen naar een logisch-deductieve opbouw van de vertrouwde euclidische meetkunde. In het officiële programma van 1958 werd dan ook alleen nog over

een 'inleiding' tot de meetkunde gesproken. Vrijwel alle meetkundeboeken voor het vmo begonnen toen met een korte 'intuïtieve' of 'inductieve' inleiding. Bekende boeken voor het aanvankelijk meetkundeonderwijs in die periode waren die van Vredenduin, Alders en Van der Neut. In feite was de uitwerking van de oorspronkelijke ideeën van mevrouw Ehrenfest op het aanvankelijk meetkundeonderwijs in het vmo marginaal, maar de didactische en onderwijskundige discussies waren in de jaren '50 in een veel breder kader geplaatst, vooral omdat de didactiek van de meetkunde ook een onderwerp van wetenschappelijk onderzoek was geworden.

### Nekslag voor de oude meetkunde

Terwijl het programma van 1958 nog maar net ingevoerd was, kondigden zich al weer nieuwe ontwikkelingen aan. De jaren zestig kwamen namelijk in het teken van de wereldwijde New Math-beweging te staan. De artikelen in *Euclides* gingen in die jaren steeds meer over dé 'modernisering' van het wiskundeonderwijs. Analyse en lineaire algebra moesten de kern van het leerplan worden. Voor meetkunde leek nauwelijks nog plaats. Door de leerplanherziening van 1958 was het planimetrie-programma al vereenvoudigd. Maar er moest volgens de aanhangers van de moderne wiskunde meer veranderen. De wiskundige Dieudonné (1906–1992) had reeds in 1959 zijn befaamde “À bas Euclide!” uitgesproken. Meetkunde diende alleen nog als een structuur behandeld te worden en wel vanuit de algemenere structuur der afbeeldingen, dus als transformaties.

Wellicht nog belangrijker achtte men in de New Math de vectormeetkunde, die de weg kon openen naar lineaire algebra. Weliswaar werd er tot 1968 nog klassieke meetkunde gegeven, maar met de acceptatie van de moderne wiskunde was de nekslag voor dit vak al gevallen. Slechts een enkeling verzette zich tegen het slechten van het eens door Dijksterhuis zo bewierookte euclidisch-meetkundige 'gebouw van zoo groote schoonheid'. De wiskundige Herman Duparc (1918–2002) was één van die weinigen:

“Wie dan ook heel radicaal is zou misschien de gehele meetkunde willen bannen van ons schoolonderwijs. Ik kom hier ten sterkste tegen op (...) Redeneringen die gebruik maken van wat men in een figuur meent te zien, verkrijgen pas hun waarde als het 'geziene' wordt aangetoond. (...) Dit dooreenlopen van intuïtie, aanschouwing en een zakelijke redenering vindt men bij de ingenieur terug (...) Het meetkundeonderwijs nu kan



Van links naar rechts: Tatjana Ehrenfest-Afanasjeva, Eduard Jan Dijksterhuis, Willem Reindersma, Piet J. van Albada, Pierre van Hiele en Dina van Hiele

naast het belang dat het op zichzelf heeft, dit type gedachtegang op een prachtige wijze aan de leerlingen bijbrengen.”

Verder prees Duparc de mogelijkheden om in kennis te komen met het logisch-deductieve systeem, maar hij noemde ook het praktische nut en de cultuurhistorische waarde. Interessant is dat hij voor een goed begrip van de vectoranalyse en vectoralgebra een goed ruimtelijk inzicht noodzakelijk achtte. Met name deze laatste opmerking over de noodzaak van de ‘ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht’ was de voorgaande decennia altijd een belangrijk punt geweest. Maar kennelijk werd dit in de eufore vernieuwingsdrang gemakkelijk vergeten.

Zo ontstond in 1968 een situatie in het wiskundeonderwijs, waarbij de leraren van het gehele vo, die leerstofinhoudelijk en didactisch nauwelijks voorbereid waren, voor de zware taak gezet werden om tegelijk met de invoering van de Mammoetwet, een nieuw programma te gaan onderwijzen, dat geënt was op de ‘moderne wiskunde’. Aldus kreeg de New Math ook in Nederland, althans in het vo, voet aan de grond. Spoedig verschenen er nieuwe methoden op de markt: *Van A tot Z* (Van Hiele, Boormeester) en *Moderne Wiskunde* (Krooshof en anderen). Het principe van gescheiden leerboeken voor algebra, meetkunde en verdere onderwerpen was verlaten, waarmee uitdrukking gegeven werd aan het uniforme karakter van de wiskunde. Hoewel in deze leerboeken nog wel enige aandacht aan meetkundige figuren besteed werd, kunnen we wel stellen dat 1968 het rampjaar voor de klassieke meetkunde is geweest.

### Reflectie

Kijken we terug op de zogenoemde vete tussen mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis, dan kan men zich afvragen of hun opvattingen eigenlijk wel erg verschilden. In 1934 publiceerde Dijksterhuis namelijk een artikel over epistemisch (inzichtelijk) onderwijs, waarin hij zijn standpunt over een formele start van

het meetkundeonderwijs relateert:

“Men kan zich (...) een heele scala van opvattingen voorstellen, die tusschen het standpunt van mevrouw Ehrenfest en dat van J.H. Schogt als uitersten inliggen en die men toch alle epistemisch zou kunnen noemen. Persoonlijk zou ik er het meest voor voelen, in de beginstadias van het meetkunde-onderwijs wel vrij spoedig deductief te werk te gaan door stellingen te bewijzen, maar alleen dan, wanneer een bewijsbehoefte óf spontaan optreedt, óf door het stellen van de vraag, gemakkelijk kan worden gesuggereerd. (...) Na eenigen tijd wordt het dan al mogelijk en wenschelijk, tot een partieele ordening van stellingen te komen (...). Ik zou dan echter het meetkunde-onderwijs niet willen laten eindigen, zonder dat de basis nog eens opnieuw in behandeling is genomen, dat wil zeggen ik zou de beginselen der vlakke meetkunde in de hogere klassen, eventueel gelijktijdig met die der stereometrie, nog eens in een correct logisch systeem willen ordenen, waarin dan axiomata nog wel uitdrukking zouden zijn van meetkundige inzichten, die voor het natuurlijke denken inductief evident zijn, maar waarin hun aantal zoveel mogelijk zou worden beperkt en het bewijzen uitsluitend als criterium voor logische ordening zou dienen.”

Afgaande op dit citaat zou men kunnen zeggen dat de opvattingen van mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis niet strijdig waren. Beiden hadden eenzelfde einddoel voor ogen: inzicht in een axiomatische opbouw van de meetkunde, en wel aan het eind van de gehele cursus, dus voor de leeftijdsgroep van 16 tot 18 jaar. Mevrouw Ehrenfest ging daar in zelfs nog verder dan Dijksterhuis, waar zij ook pleitte voor eventuele bestudering van niet-euclidische axiomastelsels. Zowel Dijksterhuis als mevrouw Ehrenfest geloofden in de scholing van het denken door middel van de meetkunde. En midden jaren dertig blijken beiden zich uit te spreken voor een aanschouwelijke start.

Het verschil lag in de uitwerking. Dijk-

sterhuis nam de traditionele euclidische vlakke meetkunde als uitgangspunt, terwijl mevrouw Ehrenfest om didactische redenen de ruimtelijke realiteit als startpunt koos, ten einde de elementaire meetkundige noties te ontwikkelen. Mevrouw Ehrenfest wilde het keurslijf van de euclidische opbouw aan het begin van het onderwijsleerproces afleggen, terwijl Dijksterhuis slechts een minieme knieval wilde doen voor het aanschouwelijke element van de meetkunde. Dijksterhuis hield dus ook voor het aanvangsonderwijs vast aan de logische structuur van de meetkunde, terwijl Ehrenfest uit wilde gaan van een psychologische ordening, waarbij rekening gehouden werd met de cognitieve ontwikkeling van de leerling. Bij Ehrenfest herkennen we zowel het historisch-genetische als het psychologisch-genetische principe, terwijl Dijksterhuis dit geheel vreemd scheen te zijn. Mevrouw Ehrenfest benadrukte voor haar propedeutische cursus het principe van ‘leren door doen’. Ook in concreet praktische zin, iets waarover Dijksterhuis zich nimmer openlijk heeft uitgelaten. Wij vermoeden echter, gezien zijn welbevinden in louter theoretische wetenschap, dat hij daaraan weinig waarde hechtte. In feite school het verschil in beider opvattingen slechts in het idee van de propedeutische cursus van mevrouw Ehrenfest. Dijksterhuis hield bij zijn beschouwingen altijd het oog gericht op de hbs- en gymnasiumleerlingen, en naar onze mening daarvan weer de meest begaafden, terwijl mevrouw Ehrenfest toch aan een meer heterogeen samengestelde groep dacht.

Tijdens de promotie van Dina van Hiele-Geldof in 1957 sprak Dijksterhuis zeer waardierend over dit onderwijsexperiment en noemde het ‘een stuk pionierswerk’. Zou het beleefdheid geweest zijn of was Dijksterhuis toen op het punt van de intuïtieve inleiding bijgedraaid? Gezien door de bril van het heden lijkt het wat wonderlijk dat Dijksterhuis zich in de jaren twintig zo opwond over de ideeën van een propedeutische cursus à la

Ehrenfest, die hij als een werkelijk gevaar zag voor het wiskundeonderwijs. Mogelijk dat mevrouw Ehrenfest toen te weinig benadrukt heeft dat zij met de propedeutische cursus slechts een inleiding op het oog had, die ook, althans voor een deel, geschikt was voor de lagere school. Een voor de hand liggende reden kan gezocht worden in het feit dat Dijksterhuis elke vorm van toepasbaarheid of samenhang met de realiteit uit de wiskunde wilde weren. Tenslotte was hij een platonist van het zuiverste water. In feite werden noch de ideeën van Dijksterhuis noch die van mevrouw Ehrenfest in praktisch onderwijs omgezet. In de modale onderwijspraktijk werd gebruik gemaakt van modale boeken van een of andere logisch-deductieve snit.

Al meende mevrouw Ehrenfest dat zij weinig succes had geboekt, toch hebben haar activiteiten invloed gehad op de ontwikkeling van de vakdidactiek voor wiskunde, in het bijzonder die van de meetkunde. Van Albada ontwierp een unieke propedeutische cursus, Pierre van Hiele maakte wereldnaam met zijn niveautheorie. Dina van Hiele-Geldof werkte één idee uit de *Übungensammlung* uit tot een inleidende cursus, Adriaan de Groot deed methodologisch onderzoek naar de vor-

deringen van de leerlingen, Chris Boermeester propageerde een vorm van interactief onderwijs: het klassengesprek. Van Hiele had bewondering voor haar ideeën, maar ook ernstige bezwaren. Zo zei hij ter gelegenheid van haar 85ste verjaardag in 1961 dat haar ‘methode onuitvoerbaar en ook ongewenst’ was. In haar dankwoord bevestigde mevrouw Ehrenfest dit: “(...) ik heb niemand van de Hollandse wiskundeleraars van mijn opvattingen betreffende het wiskundeonderwijs overtuigd.” Zij kon toen niet vermoeden dat precies tien jaar later haar *Übungensammlung* opnieuw als vertrekpunt gebruikt zou gaan worden voor het meetkundeonderwijs op de basisschool en de brugklas van mavo en vmbo.

In 1964 is mevrouw Ehrenfest overleden. Het meetkundeonderwijs was toen al bijna de nek omgedraaid. Hoe wonderlijk kan de geschiedenis gaan. Bijna vijftig jaar lang werd er wiskundig, didactisch en pedagogisch ‘gebakkeleid’ over opzet en aanpak van het oudste wiskundevak, in feite ging het om een relatief kleine methodische wijziging van het aangepast onderwijs — en toen werd het hele programma als het ware van de ene op de andere dag rigoreus gewijzigd. Met die wijziging van

1968 zijn het specifieke logisch-deductieve redeneren en het opbouwen van een consistent systeem voor het onderwijs verloren gegaan. Dat dit in het algemeen te moeilijk is voor kinderen van twaalf jaar was eigenlijk de inzet van de discussies. Deze psychologische hobbel werd later bevestigd. Er zijn pogingen gedaan om een opzet te maken waarmee deze belangrijke doelen, zoals Darwin, Russell en vele anderen dit ervaren hebben, wel bereikt konden worden. Maar we hebben gezien dat dit niet gelukt is. Wat er daarna van meetkunde voor het onderwijs als vak terechtgekomen is, zal in een volgende aflevering worden beschreven. ←

### Nawoord

Dit stuk is gebaseerd op een deel van een hoofdstuk uit *Van vormleer naar realistische meetkunde*, een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw van E.W.A. de Moor (1999). De auteurs doen onderzoek naar het werk van Tatjana Ehrenfest-Afanasjeva met als doel een vertaling en heruitgave van haar *Übungensammlung* uit 1931.

### Noten

- 1 Dijksterhuis was vanaf 1916 tot 1953 leraar wiskunde aan de Rijks-hbs Willem II in Tilburg. In 1953 werd hij buitengewoon hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen aan de Universiteit van Utrecht. In 1952 ontving hij voor zijn werk de P.C. Hooftprijs. Als wetenschapshistoricus verwierf hij wereldfaam met *De mechanisering van het wereldbeeld*. Zijn bijdragen aan het wiskundeonderwijs bepaalden zich in hoofdzaak tot de uitgangspunten, doelstellingen en programmatische uitwerking. De geleerde, nauwgezette, hardwerkende en met de pen vaardige Dijksterhuis was geknipt voor allerlei commissiewerk, dat hij vele malen op zich nam.
- 2 Tatjana Afanasjeva, geboren in het (toen nog) Russische Kiev, groeide op en studeerde in St. Petersburg. In het toenmalige Mekka van de wiskunde, het Duitse Göttingen, waar zij bij Felix Klein en David Hilbert (1862–1943) studeerde, leerde zij haar man, de Oostenrijkse fysicus Paul Ehrenfest (1880–1933), kennen. In 1912 kwamen zij naar Leiden, waar Paul Ehrenfest

- de opvolger werd van Hendrik Lorentz (1853–1928). Zij kwam in contact met Willem Reindersma (1877–1946), die wiskundeleraar was aan het Nederlandsch Lyceum te Den Haag en die toen al een vernieuwend meetkundeboek op zijn naam had staan. Al spoedig vonden er onder haar leiding bijeenkomsten over didactiek plaats. In 1915 verscheen in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* haar eerste artikel in het Nederlands en in 1924 volgde de genoemde brochure.
- 3 Willem Reindersma was een Groningse boerenzoon. Hij begon als onderwijzer en studeerde tegelijkertijd wis- en natuurkunde. Daarna was hij leraar aan het Nederlandsch Lyceum te Den Haag, van welke school hij later rector werd.
- 4 Pierre M. van Hiele studeerde wis- en natuurkunde en is zijn gehele leven leraar geweest. Hij heeft veel gepubliceerd over de didactiek van de wiskunde. Tevens auteur van schoolboeken. In 1957 promoveerde hij op *De problematiek van het inzicht*. Met zijn theorie over

- de denkniveau's bij het leren van wiskunde, heeft hij in de wiskundendidactiek wereldfaam verkregen.
- 5 Piet J. van Albada is leraar geweest aan het Montessori Lyceum te Rotterdam. In 1955 is hij gepromoveerd op een wiskundig onderwerp. Van 1951 tot 1958 was hij hoogleraar te Bandoeng (Indonesië). Daarna wetenschappelijk medewerker aan de TU te Eindhoven. Voor meer informatie zie E.W.A. de Moor (2001), Het kistje van Van Albada, *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 21(2), pp. 32–43.
- 6 Dina van Hiele-Geldof was leraar wiskunde. Zij is in 1957 gepromoveerd op een praktische uitwerking van een van de ideeën (gebruik van tegelvloeren) van mevrouw Ehrenfest voor een aanschouwelijke inleiding voor de planimetrie. Zij komt in dit proefschrift onder meer tot een gunstige conclusie over de theorie van de denkniveau's van Pierre van Hiele.

Frans Oort

Mathematisch Instituut

P.O. Box. 80.010

3508 TA Utrecht

f.oort@uu.nl

## Onderzoek

## Dynamica en periodieke rijen

In dit artikel belicht Frans Oort een eenvoudig probleem over periodieke rijen. Hij introduceert de term D-rij en geeft twee bewijzen voor de periodicititeit van zulke rijen.

We bestuderen rijen  $\xi = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$  met

$$x_i \in \mathbb{R}, \quad |x_i| = x_{i+1} + x_{i-1}, \quad \forall i.$$

Omdat deze rijen in dynamische processen worden bestudeerd, introduceren we de naam 'een D-rij' voor dit begrip. We zullen laten zien dat elke D-rij periodiek is; het zal blijken dat dit eenvoudig te bewijzen is. Voor de lezer is het wellicht aardig om dit eerst zelf te laten zien.

De rij  $\{\dots, 0, 0, \dots\}$  zullen we de nul-D-rij noemen. Deze rij wordt (gemakshalve) van verdere beschouwingen uitgesloten.

We zeggen dat D-rijen  $\xi = \{x_i\}$ , en  $\eta = \{y_j\}$  equivalent zijn, notatie  $\xi \sim \eta$ , als er een  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  en een  $t \in \mathbb{Z}$  bestaan zodanig dat

$$y_{i+t} = \lambda \cdot x_i,$$

dat wil zeggen, na eventueel schalen en verschuiven van de indices zijn ze gelijk. Voor een D-rij  $\xi = \{z_i\}$  schrijven we  $\xi^{-1} = \{z_{-i}\}$ ; merk op dat dit weer een D-rij is. Als  $z_i$  en  $z_{i+1}$  gegeven zijn, voor een keuze van  $i$ , dan ligt de bijbehorende D-rij vast.

We bestuderen eerst een bijzondere D-rij, gegeven door  $x_0 = 0$  en  $x_1 = 1$ :

$$\sigma := \{\dots, 0, 1, 1, 0, -1, 1, 2, 1, -1, 0, 1, \dots\}.$$

We zien dat deze rij 9-periodiek is.

**Lemma 1.** Als een D-rij  $\eta$  niet de nul-rij is, en  $\eta$  bevat tenminste één element gelijk aan nul, dan is  $\eta \sim \sigma$ .

Het eenvoudige bewijs laten we aan de lezer over. Een dergelijke D-rij noemen we *speciaal*.

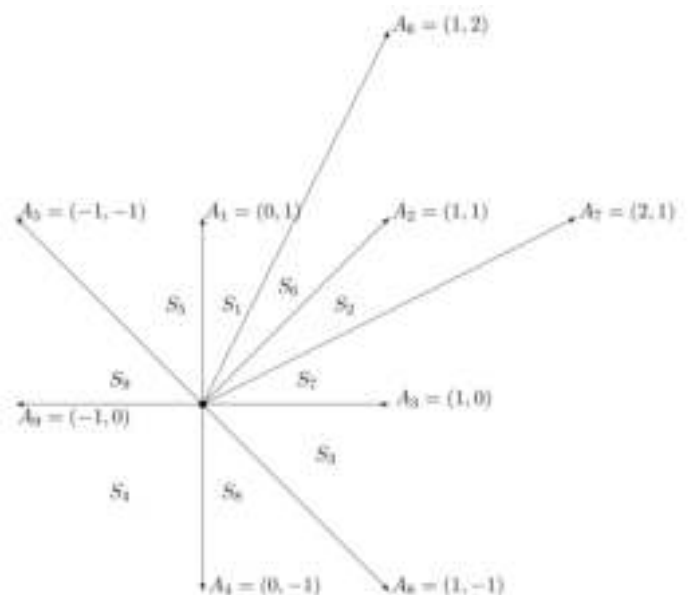
**Stelling 2.** Elke D-rij is 9-periodiek.

We gaan twee bewijzen geven. En we laten ook zien dat de periode van een niet-nul-D-rij precies 9 is. We zien dat dit al bewezen is voor speciale rijen.

*Eerste bewijs.* Neem de speciale rij  $\sigma = \{x_i\}$  gegeven door  $x_0 = 0$  en  $x_1 = 1$ . We definiëren voor elke  $i$  de vector

$$A_i := (x_i, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^2.$$

Zie Figuur 1. Deze vectoren lopen met de klok mee voor groeiende  $i$ , en  $A_{i+5}$  is gelegen tussen  $A_i$  en  $A_{i+1}$  (indices modulo 9). We verdelen



**Figuur 1** Vectoren en sectoren voor de speciale rij met  $x_0 = 0$  en  $x_1 = 1$

het vlak  $\mathbb{R}^2$  in gesloten sectoren:

$$S_i := \{v = \alpha \cdot A_i + \beta \cdot A_{i+5} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}.$$

We definiëren

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) := (y, |y| - x).$$

We zien dat voor elke D-rij  $\{z_i\}$  geldt dat  $\varphi(z_i, z_{i+1}) = (z_{i+1}, z_{i+2})$ . Voor de speciale rij  $\sigma$  geldt  $\varphi(A_i) = A_{i+1}$  en  $\varphi^9(A_i) = A_i$ .

Merk op: elke sector ligt óf geheel in het bovenhalfvlak  $H^+ := \{x, y \mid y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ , óf geheel in het onderhalfvlak  $H^- := \{x, y \mid y \leq 0\}$ , de afbeelding  $\varphi$  is lineair op  $H^+$ , en  $\varphi$  is lineair op  $H^-$ , en  $\varphi(S_i) = S_{i+1}$  voor all  $i$ .

Zij  $\{z_j\}$  een D-rij. Dan is er een index  $i$  zodanig dat  $(z_0, z_1) \in S_i$ ; we schrijven

$$(z_0, z_1) = \alpha \cdot A_i + \beta \cdot A_{i+5}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} \varphi^9(z_0, z_1) &= \alpha \cdot \varphi^9(A_i) + \beta \cdot \varphi^9(A_{i+5}) \\ &= \alpha \cdot A_i + \beta \cdot A_{i+5} \\ &= (z_0, z_1) \end{aligned}$$

waarbij de tweede gelijkheid volgt uit het feit dat  $\varphi$  lineair is op elke sector.  $\square$

We merken op dat de afbeelding  $\zeta : (x, y) \mapsto (y, y - x)$  orde 6 heeft, en gelijk is aan  $\varphi$  op het bovenhalfvlak. De afbeelding  $\delta : (x, y) \mapsto (y, -y - x)$  heeft orde 3 en is gelijk aan  $\varphi$  op het onderhalfvlak. Deze curieuze, niet-lineaire  $\varphi$ , een mix van  $\zeta$  en  $\delta$ , blijkt precies orde 9 te hebben.

We zien dat voor elke niet-speciale D-rij in elke 9-cykel het tekenpatroon  $- - + + + - + + +$  heeft, op cyclische permutatie na.

**Tweede bewijs.** Zij  $\eta = \{y_i\}$  een D-rij die niet de nul-rij is, en niet speciaal is (met andere woorden, alle  $y_i$  zijn ongelijk aan 0). Als drie opeenvolgende termen positief zijn, dan is de volgende negatief: voor  $\{\dots, a, b, c, \dots\}$  geldt dan  $b = a + c$ , en de volgende term is  $c - b = -a < 0$ ; we concluderen dat de rij tenminste één negatief getal bevat. (In dit argument, en in de volgende redeneringen geldt  $a, b, c > 0$ .) Als er één negatieve term te midden van twee positieve termen staat, dan komt er verderop een tweetal negatieve termen: voor  $\{\dots, a, -b, c, \dots\}$ , geldt  $b = a + c$ , er komt  $\{\dots, a, -b, c, c + b, b, -c, c - b, \dots\}$  en we weten  $c - b = -a < 0$ . Conclusie: elke niet-speciale D-rij bevat twee opeenvolgende negatieve termen.

Voor  $\eta = \{\dots, -a, -b, \dots\}$  met  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  is die rij

$$\eta = \{\dots, -a, -b, a + b, a + 2b, b, -a - b, a, 2a + b, a + b, -a, -b, \dots\}$$

en we hebben bewezen dat elke D-rij 9-periodiek is.  $\square$

De D-rijen

$$\sigma \sim \sigma' := \{\dots, 0, 1, 1, 0, -1, 1, x_0 = 2, x_1 = 1, -1, 0, 1, \dots\}$$

en

$$\epsilon := \{\dots, -1, -1, 2, 3, 1, z_0 = -2, z_1 = 1, 3, 2, -1, -1, \dots\}$$

hebben de eigenschap  $(\sigma')^{-1} = \sigma'$  en  $\epsilon^{-1} = \epsilon$ . Zijn dit de enige met deze eigenschap?

We merken op dat elke speciale  $\sigma''$  de eigenschap heeft dat  $(\sigma'')^{-1} \sim \sigma''$  en  $\sigma'' \sim \sigma' \sim \sigma$ . We zien dat elke speciale  $\sigma''$ , op verschuiven van de indices na, de eigenschap  $(\sigma'')^{-1} = \sigma''$  heeft.

**Propositie 3.** Voor een niet-nul, niet-speciale D-rij  $\tau$  met de eigenschap  $\tau^{-1} \sim \tau$  geldt  $\tau \sim \epsilon$ . Omgekeerd, als  $\tau \sim \epsilon$  dan geldt, na eventueel verschuiven van de indices, dat  $\tau^{-1} = \tau$ .

**Bewijs.** In  $\tau$  komt  $\dots, a, -b, -c, d, \dots$  voor met  $a, b, c, d > 0$ . Uit  $\tau^{-1} \sim \tau$  en uit het feit dat in elke 9-cykel het patroon  $- - +$  precies één keer voorkomt, volgt dat  $b = c$ . Na schalen zien we dat  $\tau \sim \{\dots, -1, -1, \dots\} \sim \epsilon$ .

Omgekeerd, omdat  $\epsilon^{-1} = \epsilon$ , volgt de tweede conclusie.  $\square$

Het bovenstaande probleem noemde ik aan een aantal collega's, vooral om te zien welke oplossingen er gekozen werden. Meetkundigen vonden de oplossing vermeld in het eerste bewijs. Wiskundigen met affiniteit voor getaltheorie en combinatoriek vonden meestal het tweede bewijs. Ook kreeg ik een oplossing waar *Mathematica* een bewijs leverde.

Het probleem hier behandeld is eenvoudig. Het werd in [1] gesteld en opgelost ("The problem turned out to be rather elementary"). In [3] worden dynamische systemen van dergelijke afbeeldingen bestudeerd, en  $\varphi$  hierboven is het bijzondere geval  $\mu = 1, \nu = 0$  in (1.5) van [3]. Verdere studie van zulke afbeeldingen vinden we in [2].  $\leftarrow$

#### Dankwoord

Maxim Kontsevich noemde dit probleem in zijn voordracht op de Mathematische Arbeitstagung 2011 in Bonn. Don Zagier had het onder zijn aandacht gebracht. Ik dank Maxim Kontsevich voor het geven van informatie over dit probleem en voor de referenties.

#### Referenties

- 1 M. Brown, Problem 6349, *Amer. Math. Monthly* **90** (1983), 569. [Solution, **92** (1985), 218.]
- 2 M. Herman, Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, *Astérisque* **144**, Soc. Math. France, 1986.
- 3 J. Lagarias en E. Rains, Dynamics of a family of piecewise-linear area-preserving plane maps I. Rational rotation numbers, *Journal of Difference Equations and Applications* **11** (2005), 1089–1108.

Henk van der Vorst

Eekhoornlaan 9

3951 AV Maarn

info@henkvandervorst.nl

## Recreatieve wiskunde

# Een wiskunstenaar: portretten van wiskundigen en tegeltjes

In het decembernummer 2011 van het Nieuw Archief voor Wiskunde publiceerden we een artikel van Jan van de Craats over symmetrie op de bol en in het vlak en een artikel van Jan Hogendijk over middeleeuwse islamitische geometrische ornamentiek. Deze twee artikelen trokken de bijzondere aandacht van 'wiskunstenaar' Henk van der Vorst. In dit artikel legt hij uit waar de raakvlakken met zijn eigen activiteiten liggen.

Na mijn pensionering had ik sterk de behoefte om mijn creativiteit langs andere dan direct wiskundige weg te uiten. Ik had al lang een zekere fascinatie voor druktechnieken en grafisch werk, met name het grafisch werk van de Duitse kunstenaar Ewald Mataré (1887–1965) sprak me erg aan en ik begon me te bekwaamen in het maken van lino'sneden. Het principe is eenvoudig: je snijdt een patroon in een plaat linoleum, rolt de overgebleven delen in met drukinkt en maakt hiermee een afdruk op een vel papier. De uitgesneden delen houden de kleur van het papier; het met inkt bedekte linoleumoppervlak leidt tot een kleurafdruk. Als je voor het gemak de gewenste prent in twee tinten wilt afdrukken, zeg zwart en wit, dan moet je het witte deel van de prent dus wegsnijden uit het linoleum. Verder moet je er rekening mee houden dat het drukken tot een spiegeling van de gesneden voorstelling leidt.

### Portretten

Het proces bleek lastiger dan aanvankelijk gedacht, zo vereist het maken van een ac-

ceptabele druk nogal wat ervaring met papier-soorten, met de keuze van drukinkt, het op de juiste wijze inkten van de plaat en met het leveren van voldoende druk om de inkt op het papier over te brengen. Er is niet zo heel veel

literatuur over en ik vond het ook een uitdaging om het allemaal zelf te proberen. Vooral ook omdat je bij elk onderdeel van het proces vooraf het gevoel hebt dat het toch niet moeilijk kan zijn. Enfin, na verloop van (veel) tijd had ik genoeg ervaring opgedaan om acceptabele drukken tot stand te brengen en om voorstellingen in het linoleum te snijden zonder daarbij met enige regelmaat mijn handen te verwonden. Toen kwam de wens op om portretten in lino'snede te maken. Ik heb



Figuur 1 De Linpack-professor



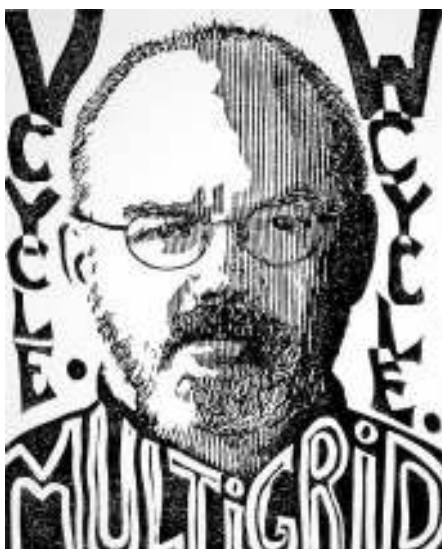
Figuur 2 De pseudospectrale prof



Figuur 3 Mr Onbepaald



Figuur 4 Made in Holland



Figuur 5 De VW-rijder

er voor gekozen om een serie portretten te maken van ex-collega's en dat dan ruim opgevat. In eerste instantie begon ik met numeriek wiskundigen, later kwamen er ook andere personen in beeld waarmee ik op een of andere wijze tijdens mijn loopbaan in contact was geweest. Voorwaarde was wel dat ik me de persoon goed voor de geest moest kunnen halen. Ik werk dan wel op basis van foto's, maar bij het reduceren tot een beperkt aantal — meestal twee — tinten moest ik me de persoon voor de geest kunnen halen om te kunnen beoordelen of er nog voldoende gelijkens overbleef. Verder moet je er ook voor zorgen dat er ruimtelijke werking van de prent uitgaat en die ruimtelijkheid moet je dus zelf aan de foto toevoegen. Ik ondervond met name problemen bij het weergeven van mond en tanden. De lippen komen doorgaans donker in de prent naar voren en zeker in zwart-wit, zonder tussentinten, worden de lippen al gauw als te zwaar ervaren als je ze net zo groot als op de foto weergeeft. De tanden ontstaan juist door het wegsnijden uit het linoleum en worden dan in zuiver wit ook al snel te dominant, maar als je die witheid wat vermindert door zwarte streepjes te laten staan, dan wordt het gauw een vuil gebit. Reductie tot twee tinten geeft al snel een zekere verharding aan het beeld en dat maakt het lastig om een portret van een vrouw goed te krijgen.

Het leek me verder leuk om de specifieke deskundigheid van de geportretteerde weer te geven door geschikte keuze van symbolen of teksten in de prent.

Een van de eerste portretten die zo ontstond was dat van mijn Amerikaanse collega Jack Dongarra (University of Tennessee), zie Figuur 1. Hij heeft zich veel beziggehouden met het vervaardigen van software voor numerieke lineaire algebra en was een drijvende kracht achter het pakket LINPACK voor het oplossen van lineaire stelsels vergelijkingen  $Ax = b$ .

Een ander voorbeeld is het portret van de huidige president van de Society for Industrial and Applied Mathematics: Nick Trefethen (Oxford University), zie Figuur 2. Hij is een expert in het berekenen van spectra (S) en pseudospectra (PS) van lineaire operatoren.

De oplossingen van de vergelijking  $\|(z - A)^{-1}\|_2 = \infty$  zijn de eigenwaarden van de (vierkante) matrix  $A$ .

In de afgelopen paar jaar is zo een serie van ongeveer vijftig portretten ontstaan, vrijwel allemaal op het formaat van circa 20 bij 25 cm. Daarin komt ook een flink aantal Nederlandse collega's aan bod en, gelukkig, ook een aantal vrouwen, hoewel die schaars ver-



Figuur 6 De Mixed FE man

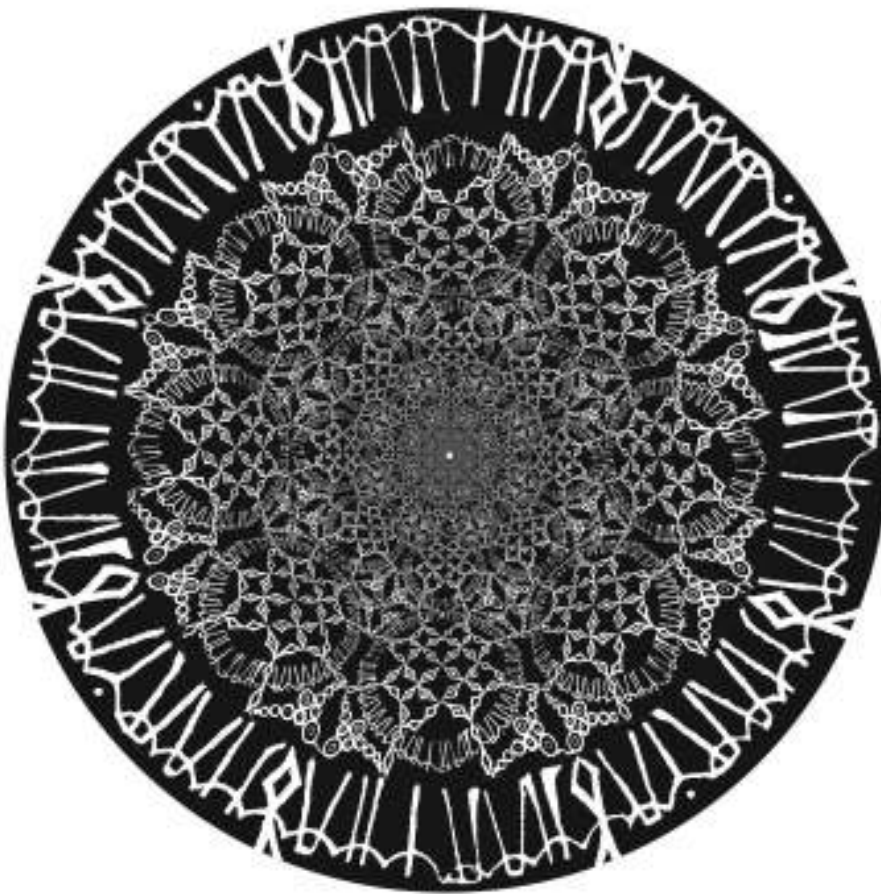
tegenwoordigd zijn in ons metier. In Figuur 3 tot en met 6 laat ik Wil Schilders (TUE), Margot Gerritsen (Stanford University), Piet Wesseling (TUD) en Jan Brandts (UvA) zien, zonder verdere toelichting op de weergegeven teksten. Die zijn voor de kenner duidelijk.

### Cyclische tegelpatronen

Naast portretten ben ik ook andere voorstellingen in linoleum blijven snijden en daarbij ondervond ik als probleem dat er eigenlijk geen noodzaak bestond om deze prenten meer dan één keer af te drukken (de portretten zijn wel allemaal op zijn minst twee keer afgedrukt vanwege de vraag eraan). Ik wilde tegeltjes ontwerpen waarbij het herhaald naast en boven elkaar afdrucken zou leiden tot een complexere afbeelding. Zo zijn mijn zogenaamde cyclische tegelpatronen ontstaan. Dat vind ik een typische eigenschap voor een wiskundige: je bedenkt iets en dat heeft dan voornamelijk zin als je het meermalen kunt gebruiken. Daarbij zat de kennis van het werk van Escher en van islamitische kunst natuurlijk wel in mijn achterhoofd. Escher heeft op inspiratie van de tegelpatronen in het Alhambra geëxperimenteerd met eenvoudige tegeltjes die flexibel gebruikt konden



Figuur 7 Basistegeltje



**Figuur 8** Cirkelvulling

worden, zie bijvoorbeeld [1, p. 45]. In het decembernummer van SIAM NEWS, 2011, staat op de achterzijde een voorbeeld van een tegelpatroon uit het Alhambra, Granada. Daaruit is goed de inspiratiebron van Escher af te leiden. En zie natuurlijk het eerder genoemde artikel van Jan Hogendijk [2].

Mijn eerste experimenten verliepen soortgelijk aan die van Escher, waarbij ik wel streefde naar minder strak geometrische ontwerpen. Een vroeg voorbeeld hiervan is de eenvoudige linsnede in Figuur 7. Met dit tegeltje kun je leuke breiwerkjes maken. Het is eenvoudig in te zien dat als je deze tegeltjes geroteerd aan elkaar plakt, dat er dan een cirkelvormig patroon ontstaat.

In deze fase vroeg mijn vrouw of het niet mogelijk was om het ronde motief te gebruiken voor een bord. Dat geeft in eerste instantie een tamelijk eenvoudig en voorspelbaar resultaat, en al snel rees de vraag of ik het oorspronkelijke tegeltje niet wat kon vervormen en dan een heel tegeltafelau kon samenstellen dat zich op Escher-achtige manier zou verdichten, maar dan naar het centrum toe.

Na wat puzzelwerk kwam zo met Ado-

be Photoshop het cirkelvormige tableau in Figuur 8 tot stand (vergelijk dit met de zogenaamde cirkellimieten van Escher, die zich juist verdichten naar de rand toe). In deze cirkel zijn 224 kleine (vervormde) tegeltjes gebruikt. Het principe is dat je de tegels geroteerd tot viertallen schikt. Zo'n viertal vorm je conisch zodat er acht viertallen in een cirkelband passen. Die cirkelbanden worden dan weer verkleind en naar binnen toe aansluitend gemonteerd. Het aardige is dat die banden ook qua figuur weer keurig op elkaar aansluiten. Omdat er slechts zeven banden zijn aangebracht, blijft er een klein wit cirkeltje in het midden over.

#### Vissen en vogels

Het tweede hier getoonde ontwerp is ook weer gebaseerd op een linsnede. In Figuur 9 is een afdruk te zien die ontstaat na het over elkaar drukken van vijf tegeltjes in verschillende kleuren. Als je dat zestien keer herhaalt (dus in totaal tachtig afdrukken; vijf voor elk deel van de prent), dan krijg je de prent in Figuur 10.

Achter het ontwerp zit (uiteraard) een verhaal. Ik ben veertig jaar bezig geweest als toe-

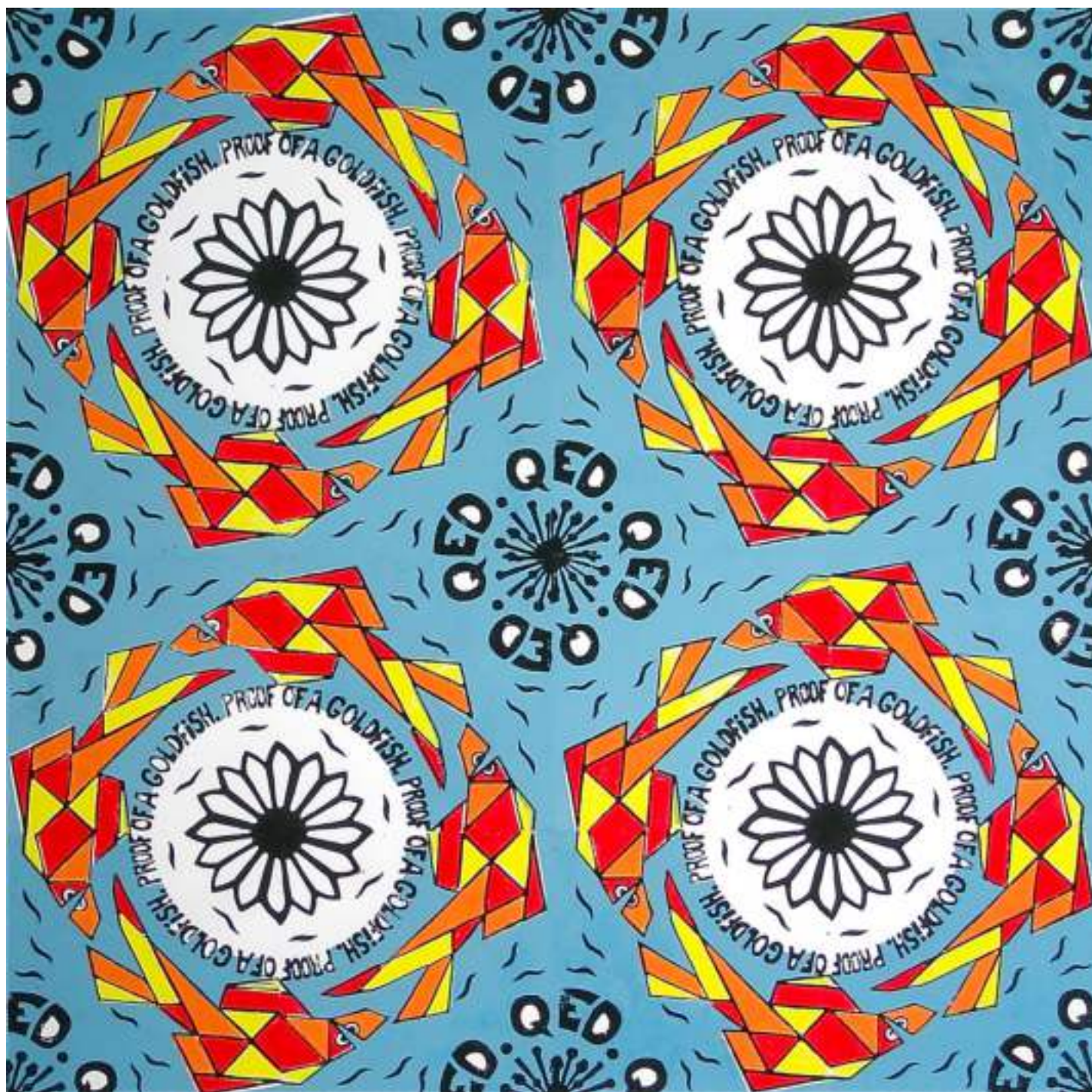
gepast wiskundige en dit is een illustratie van mijn toegepast wiskundig denken. Een toegepast wiskundige neemt verschijnselen waar, bijvoorbeeld een stroming van vloeistof, en hij probeert dat wiskundig te modelleren en te analyseren. De metafoor voor het verschijnsel is hier de goudvis. Die wordt zwemmend waargenomen, en nu moet de wiskundige dat inpassen in zijn virtuele wereld van wiskundige constructies. Dat leidt tot een soort constructie die uit de verte nog wel lijkt op een goudvis, maar die zeer veel eenvoudiger te gebruiken is in de modellering. Het model kan uiteraard meermalen gebruikt worden en we zien hier dan ook zestien goudvissen. De wiskundige is tevreden, hij heeft als het ware een bewijs (of constructie) voor de goudvis bedacht, vandaar de cirkelvormige teksten 'Proof of a goldfish'. Dit is natuurlijk een sterk vereenvoudigde weergave van het denkproces; in werkelijkheid zal het model er zeer veel ingewikkelder uitzien; de goudvis is wel heel eenvoudig, want star, en kan niet werkelijk zwembewegingen maken.

In de afdruk zitten (kleine) onvolkomenheden die ontstaan bij het handmatig afdrukken en die zou je hier nog kunnen interpreteren als verwijzingen naar (kleine) onvolkomenheden in een wiskundig model.

Ik laat nu een tegeltje zien waarbij na samenvoeging tot zestien tegeltjes iets nieuws ontstaat. Het basistegeltje (een drie-kleuren linsnede) is te zien in Figuur 11. Als je dat vier keer geroteerd om de zon heen afdruckt dan krijg je de afbeelding in Figuur 12. Als je daar geroteerd nog weer twaalf keer het tegeltje omheen afdruckt, dan komen de balkjes mooi aan elkaar te zitten en gaan de vogels elkaar in evenwicht houden. Ik heb daarom de complete prent (zie Figuur 13) de titel 'Give your kids a balanced meal' meegegeven.



**Figuur 9** Basistegeltje goudvis



Figuur 10 Bewijs van een goudvis

### Ontwerpen met de computer

Na deze vrij bewerkelijke pogingen via lino-snede realiseerde ik me dat je met moderne elektronische hulpmiddelen veel vrijer en sneller kan experimenteren, sneller dan bijvoorbeeld Escher ooit kon doen. Het mooi aan elkaar plakken van de tegeltjes met de computer vergt ook nogal wat ervaring, maar dat zal ik u besparen. Het heeft onder meer tot de prent in Figuur 14 geleid, die uit zestien exact dezelfde tegeltjes bestaat, waarbij het basistegeltje met kleurpotlood is gemaakt. De

prent is daarna gescand en verder met de computer bewerkt. Het tableau is recent op keramische tegels uitgevoerd.

Ik heb inmiddels tientallen van dit soort ontwerpen gemaakt en er verschillende laten afdrukken, meest op 40 bij 40 cm, of 50 bij 50 cm, omdat die maten ongeveer overeenkomen met de grootte van het getekende basistegeltje. Ook kun je bij sommige tegelmotieven nog gebruik maken van spiegeling, naast rotatie en translatie. Bij de tot nu toe getoonde voorbeelden kan dat niet verant-

woord, omdat je dan geknakte vreemde figuren krijgt. Het spiegelen kon wel verantwoord gebeuren bij wat ik voor het gemak mijn Australische tegeltje noem. Het doet oppervlakkig een beetje denken aan de Aboriginal stipelpatronen. Via spiegeling, rotatie en translatie, kreeg ik met zestien identieke tegeltjes het resultaat getoond in Figuur 15.

### Toepassingen

Verschiedende ontwerpen zijn als computerprint (C-print) uitgevoerd; een paar zijn er te-



Figuur 11 Basistegeltje vogel



Figuur 12 Tegeltje vier keer geroteerd



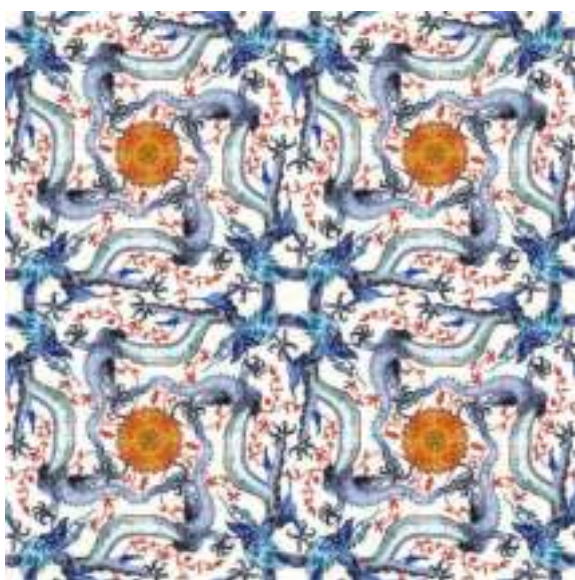
Figuur 13 Give your kids a balanced meal

recht gekomen op stoffen en daar worden (op kleine schaal) kledingstukken van gemaakt. Ook zijn verschillende van de cirkelvullingen ingebrand op porseleinen borden en één ontwerp is terecht gekomen op de tegels in een douche-cabine. Het ontwerpen van deze te-

gels is uitdagend werk, maar je blijft als toegepast wiskundige toch oog houden op de toepassing. Voor wie na het lezen van dit verhaal nog meer wil zien: op [www.henkvandervorst.nl](http://www.henkvandervorst.nl) is veel meer te vinden, onder meer alle tot nu toe gesneden portretten.

#### Referenties

- 1 Bruno Ernst, *De toverspiegel van M.C. Escher*, Taschen, Köln, 2007.
- 2 Jan P. Hogendijk, Middeleeuwse islamitische geometrische ornamentiek, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/12(4) (2011), 253–258.



Figuur 14 Drakenfeest (zestien tegeltjes)



Figuur 15 Zestien 'Australische' tegeltjes

**Sjoerd Rienstra***Faculteit Wiskunde & Informatica**Technische Universiteit Eindhoven**Postbus 513**5600 MB Eindhoven**s.w.rienstra@tue.nl***Boekbespreking** T. Lery e.a.: *European Success Stories in Industrial Mathematics*

# Succesverhalen om beleidsmakers te overtuigen

De European Mathematical Society en de European Science Foundation hebben het initiatief genomen om de interactie tussen wiskunde en industrie in kaart te brengen. Hiermee hopen ze beleidsmakers beter te kunnen adviseren over onderzoeksprogramma's en toepassingen voor de industrie. Onlangs werd binnen dit project het boek *European Success Stories in Industrial Mathematics* uitgebracht. Sjoerd Rienstra bespreekt deze bundel van succesverhalen.

Met GPS-navigatie reis je probleemloos langs de kortste route van en naar vrijwel elk punt op aarde. Onthutsend kleine onderdelen (~ 0.1 mm) van je lichaam worden routinematig met MRI zichtbaar gemaakt. Vliegtuigen gaan, ondanks intensief gebruik, tientallen jaren mee en zijn zo veilig dat je de meeste risico's loopt op de ritten van en naar het vliegveld en zijn zo zuinig dat je voor een habbekrats kunt funshoppen in New York. Iets onthouden is ouderwets als je in tienden van seconden het gehele internet kunt afgooglen. De lijst is eindeloos en kan elk jaar worden uitgebreid. De explosieve toename van technologische toepassingen van fundamentele kennis gaat nog steeds door, en is door de computerrevolutie nauw verbonden met wiskunde.

Je zou dus denken dat de maatschappij in eerbiedige dankbaarheid overal rode lopers zal uitrollen voor de natuurwetenschappers en ingenieurs die dat allemaal hebben mogelijk gemaakt. Het is geen nieuws dat dit niet het geval is. Voor een kek ontworpen toetsenbordje of een magisch-onbegrijpelijke geheugenchip kan nog wel waardering worden opgebracht, maar het in al deze technologie aan-

wezige fluïdum van kennis, methoden, formules en algoritmen, voortgebracht met en geco-

deerd in de taal van de wiskunde, is als lucht voor de vogels of water voor de vissen: te alom aanwezig om zichtbaar te zijn.

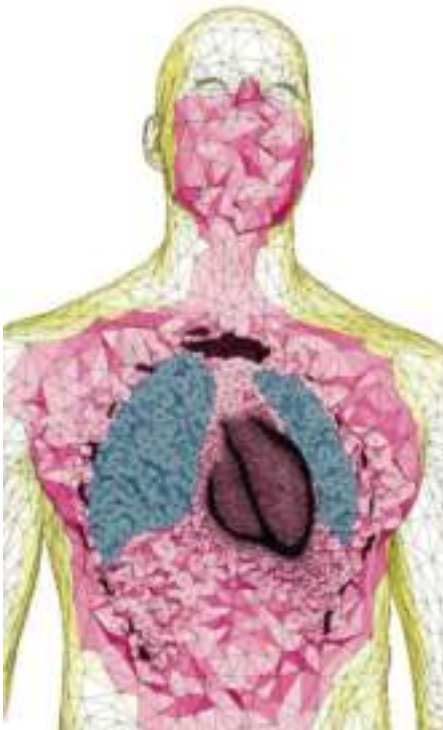
Daarom ontkomen we er niet aan om het van de daken te blijven roepen: nota's en beleidsvoornemens voorspellen het weer niet, computers groeien niet aan bomen, banken genezen geen zieken, en er is geen enkel auto-

**Doelstelling Forward Look on Mathematics and Industry**

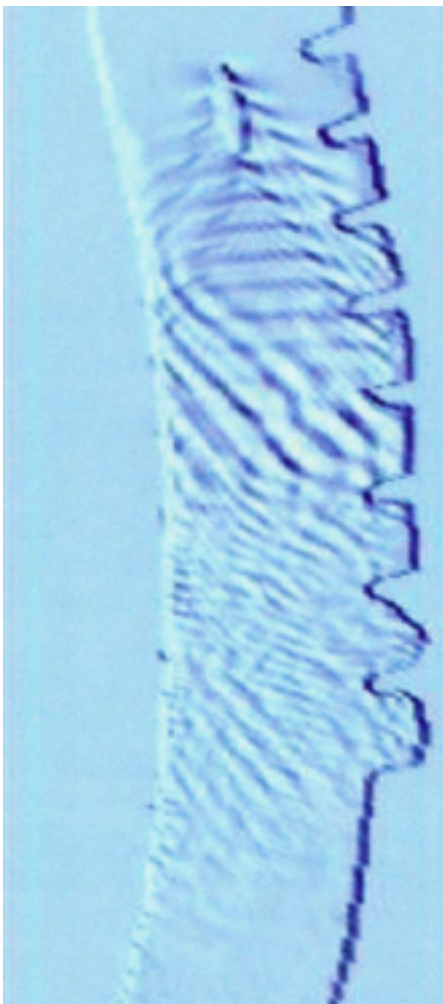
"Mathematics provides a universal framework for innovation, which is vital for society and industry. However, the interaction between mathematics and industry is far from optimal. Consequently, a strong inter-connected community and a vision for Europe are needed more than ever.

This Forward Look is aimed at analysing the current state of interaction between mathematics and industry. Through its analyses and recommendations, it will enable the scientific and industrial communities, together with policy makers, to develop medium to long-term strategies for future research activities and applications. It is expected that it will impact society by strengthening the mathematical knowledge base of a wide spectrum of research-intensive industries. One key goal is thus to define well-adapted and ambitious research and political agendas at national and European levels.

One of the key factors in this respect is the use of mathematics as a driving factor for innovation. Only via mathematics, the complex processes and products in current key technologies and short innovation cycles can be managed in an efficient, robust and sustainable way. Although the mathematics-industry interaction has reached a satisfactory level in some countries of the European Union, it is not the case in others. This fragmentation is a source of imbalance and inhomogeneity at the European level. Even in the countries where the interface is functional, it needs to be improved and extended. The conclusion of the analysis of the different scenarios was that unless important measures are taken by the various actors, Europe is using a too small amount of its potentialities and risks losing its position in the global competition."



ECG-simulatie



Golfpatroon van een schip op de IJssel

matisme dat maakt dat al die zo vanzelfsprekende techniek *uit zichzelf* beter en efficiënter wordt. Hiervoor is de 'echte' kennis nodig van de wiskunde en natuurwetenschappen, plus de vertaalslag door ingenieurs en industrieel wiskundigen.

In een poging om eenieder die het aan gaat te bereiken: een overheid die over de horizon van de volgende verkiezingen wil kijken, scholieren die aan het stuur willen staan van hun eigen toekomst, ondernemende ondernemers die niet geloven dat Europa oud nieuws is en dat nu alles BRIC moet heten, hebben de EMS (European Mathematical Society) en de ESF (European Science Foundation) de handen ineengeslagen en een initiatief genomen onder de titel 'Forward Look on Mathematics and Industry' (zie [www.ceremade.dauphine.fr/FLMI](http://www.ceremade.dauphine.fr/FLMI)). De doelstelling van deze Forward Look is terug te vinden in het kader op de vorige pagina.

Een uitkomst van deze Forward Look is het boek *European Success Stories in Industrial Mathematics*, uitgegeven bij Springer, met een indrukwekkende lijst van succesverhalen. Tien capabele redacteurs uit Frankrijk (3), Duitsland (2), Verenigd Koninkrijk, Italië, Zweden, Portugal en Nederland hebben 130 succesvolle voorbeelden bij elkaar gebracht van Europees (toegepast) onderzoek met voor wiskunde een cruciale rol.

Er is gekozen voor breedte en weinig diepte, waarbij elk voorbeeld wordt samengevat op een pagina. Dat is begrijpelijk als je het boek hanteerbaar wilt houden, maar zodra je iets ziet wat je interesseert, zul je nog wel in de benen moeten om de echte informatie boven water te krijgen. Elk verhaal volgt eenzelfde indeling: Executive Summary, Challenge Overview, Implementation of the Initiative, The Problem, Results and Achievements, en Lessons Learned. Vooral bij die Lessons zitten nog wel eens memorabele quotes ("Engineering and technology need mathematics and physics, and mathematics and physics need real engineering challenges. Problems from the real world make us humble and show that the distinction between pure and applied mathematics is false.")

Een minpunt is het ontbreken van een inhoudsopgave van de voorbeelden, je zult dus alles moeten doorbladeren. Er is alleen een opdeling in hoofdgroepen:

- Health & Biology (18)
- Energy & Environment (23)
- Finance & Modelling (24)
- Automotive Industry & Manufacturing (18)
- Aerospace & Electronics (17)
- Services, Transport & Logistics (30)

De onderwerpen variëren zeer, maar soms is wel een nationale traditie te herkennen. Hoewel de numerieke oplossing of implementatie vrijwel altijd de finale vorm is waarin het resultaat de wereld wordt ingestuurd, zijn er niet zoveel (althans minder dan ik verwachtte) typische numerieke-simulatievoorbeelden opgenomen (dus waarbij de wiskunde min of meer standaard is). Er is vaak ook een wiskundige noot gekraakt. Dat is natuurlijk leuk voor de wiskundige, maar niet nodig om de wiskundige bijdrage belangrijk te laten zijn. Een numeriek experiment met standaardsoftware van een niet-triviaal of nieuw model kan ook een doorbraak betekenen.

Het is niet duidelijk hoe de verdeling van de bijdragen over de Europese landen tot stand is gekomen. Heel erg uniform is het niet en het volgt ook zeker niet de bevolkingsgrootte of het BBP van de landen. Ik hoop dat dit toeval was en geen indicator voor het feit dat België niets doet in dit verband of dat Nederland minder dan de helft doet van wat Ierland of Zweden doen.

Het is een nuttig boek dat hopelijk beleidsmakers zal overtuigen dat we met het in stelling brengen van ons Europese wiskundige potentieel heel veel kunnen (en moeten) doen om onze economische high-tech slagkracht verder te mobiliseren. Jammer genoeg maakt de ontbrekende inhoudsopgave het lastig om de informatie vlot tevoorschijn te halen. ←



T. Lery e.a. (eds.), *European Success Stories in Industrial Mathematics*, Springer, 2011, 136 p., ISBN 9783642238475, prijs € 49,95.

## Messalina Heimans

Instituut voor Lerarenopleidingen

Hogeschool Rotterdam

Museumpark 40

3015 CX Rotterdam

c.t.m.g.heimans@hr.nl

### Evenement 18de Nationale Wiskunde Dagen

# IJscoupes bereiden en boten bouwen

In februari vonden in Noordwijkerhout voor de achttiende keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Net als voorgaande jaren waren deze dagen een treffen van wiskundedocenten, wiskundigen, onderzoekers en opleiders, die met elkaar een passie voor wiskunde en onderwijs delen. Docente Messalina Heimans nam voor de eerste keer deel en beschrijft haar ervaringen.

“Wie kinderen via onderwijs gelijke kansen wil bieden, moet geen gelijke uitkomsten nastreven.” Deze woorden sprak Diederik Samson (PvdA-politicus) tijdens de opening van de NWD. Met zijn openingsspeech, getiteld ‘Docenten maken het verschil’, maakte hij de toehoorders, voornamelijk wiskundedocenten, deelgenoot van zijn beeld dat onderwijzers het verschil maken in het leven van jonge mensen. Onderwijzers geven jongeren inspiratie, maken de nieuwsgierigheid in hen wakker en maken jongeren hongerig naar meer kennis. Zelf doceer ik wiskunde en was ik voor het eerst op de NWD aanwezig. In dit verslag neem ik u graag even mee in mijn ervaringen.

Sinds september 2011 werk ik als docent aan de Hogeschool Rotterdam. Door de recente verandering in de samenstelling van het team werd er gekozen om samen als nieuw team naar deze NWD toe te gaan. Buiten het feit dat de NWD een gelegenheid bieden om nieuwe ideeën op te kunnen doen en creatief en actief met een bijzonder mooi vak bezig te zijn, is het ook een plek voor ontmoetingen. Gedurende deze tweedaagse viel mij op dat er een gevoel van ‘ons-kent-ons’ heerst. De NWD geven ruimte voor docenten om elkaar weer eens te zien, maar ook om nieuwe contacten te leggen en zelfs werkoverleg in te plannen. Als nieuweling heb ook ik mijn ‘wiskundenetwerk’ kunnen uitbreiden.

#### Pi-ralines

Tijdens een van de drie plenaire lezingen heb ik als proefpersoon deelgenomen aan de ongebruikelijke wiskundige voorstellingen van Dirk Huylebrouck. Het maken van fractale broccoli en aardappelen geeft toch een ander

kijkje in de keuken van de wiskunde. Of wat denkt u van het bereiden van een ijscoupe aan de hand van de bollen van Dandelin en het consumeren van pi-ralines? Zoals het op Twitter verwoord staat: een vermakelijke Dirk Huylebrouck hield het midden tussen een razende Roeland en Tommy Cooper, maar dan wel met inhoud.

In zijn openingslezing kon Robbert Dijkgraaf kort zijn over de schoonheid van grote vermoedens: “Een groot vermoeden moet op een T-shirt passen.” Op speelse wijze bracht Dijkgraaf enkele grote vermoedens, vernoemd naar hun opstellers Fermat, Poincaré en Riemann, onder de aandacht.

Vervolgens liet in de laatste plenaire lezing een van de grootste wiskundigen van onze tijd, de Belgische Ingrid Daubechies, ons kennis maken met de naar haar vernoemde wavelets. Vele toepassingen van deze wiskundige formules zijn terug te vinden in de kunst, FBI (vingerafdruk) en de fotografie (beeldcompressietechnieken). Zij heeft met een aantal studenten meegedaan aan de workshop NOVA, waarin zij met succes gekopieerde schilderijen van originelen kon onderscheiden met gebruik van deze wavelettechniek.

#### Samenwerkend leren

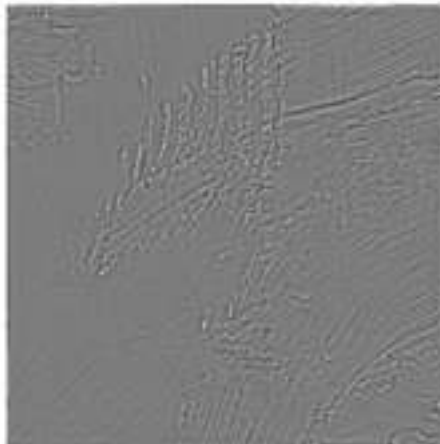
Niets is leuker dan je vast te kunnen bijten in uitdagende wiskunde problemen. Tenminste, dat vind ik en gelukkig velen die deel konden nemen aan een veertigtal workshops met mij. Maar hoe verloopt het proces om met het probleem aan de slag te gaan? Verschillende workshops gingen in op het bevorderen van interacties en het activeren van denkprocessen.

Bij de workshop ‘Over sommige proble-

men moet je praten’ door Rijkje Dekker werd de aanwezigen gevraagd na te denken over hoe je leerlingen aan het praten krijgt over wiskunde problemen. Alsof dat al niet genoeg gespreksstof opleverde, was de volgende vraag hoe deze interactie kan leiden tot wiskundige niveauverhoging. Dit werd met een levendig rollenspel uit de praktijk geïllustreerd. Ook een interessant vraagstuk: kan het leerproces bij de leerling beter plaatsvinden in twee- of drietallen tijdens het samenwerken? Met mijn buurman, docent aan een middelbare school, discussieerde ik over deze vragen. Deze collega bleek met het samenwerkend leren nog geen ervaring te hebben opgedaan. Doordat ik in de afgelopen vijf jaar ervaring heb opgedaan in het lesgeven aan een middelbare school in scenario 3 en 4, kon ik mijn persoonlijke ervaringen met deze collega delen en bekeken wij vervolgens samen in de workshop de resultaten uit de di-



Docenten maken een Dandelin-ijsje



Difference = A - B



Met de wavelettechnieken van Ingrid Daubechies kunnen gekopieerde schilderijen van originelen worden onderscheiden

verse onderzoeken. De aanwezige onderzoekers die deze processen in de praktijk hebben onderzocht, werd getoond dat het laten werken in drietallen een beter resultaat oplevert. Bij het werken in tweetallen blijken leerlingen vast te komen zitten bij opdrachten die gericht zijn op niveauverhoging. Dit was een voor mij verwacht resultaat, dat mij motiveert om de kernactiviteiten in de klas op het gebied van samenwerkend leren voort te zetten. De rol van de docent is in deze toepassing belangrijker dan ik tot nu toe dacht.

Om antwoord te kunnen geven op de vraag hoe je leerlingen aan het praten krijgt over wiskunde problemen uit de vorige workshop, zat ik goed bij de sessie 'Wiskundige denkactiviteiten' door Peter van Wijk en Piet Versnel. Nadat eerst de definitie (het gebruik van wiskundig gereedschap om patronen te onderzoeken, problemen aan te pakken en redeneringen te rechtvaardigen) werd gegeven, werd

er gekeken naar hoe deze activiteiten in lesmethoden en eindexamens vorm krijgen. Vervolgens mocht ik met een groepje docenten die lesgeven in de onderbouw aan de slag om wiskundige denkactiviteiten te ontwerpen. In mijn groep ontstond de discussie wanneer er sprake is van een wiskundige denkactiviteit. Het interactieve deel leverde op dat het voor elk niveau verschillend kan zijn en dat het ook gaat om hoe de docent er in het proces mee omgaat. Dat klonk me bekend in de oren (lees: "over sommige problemen moet je praten").

#### De ultieme boot

De vijftien rode ballen van een snookerspel passen precies in een frame (gelijkzijdige driehoek) met zijden van 30 cm. Hoe groot is de diameter van een bal? Dit voorbeeld kan inderdaad een wiskundige denkactiviteit zijn. Maar kun je iedere opdracht uit een metho-

de of examen zo herontwerpen dat het een denkactiviteit wordt? Het weglaten van een instapvraag bij een opgave, het samenvoegen van opsommingsvragen of het vragen naar de denkmethoden: zijn dat de mogelijkheden om het tot een denkactiviteit om te vormen? Dit alles is voor mij toepasbaar in mijn lessen, door er met mijn studenten over te praten en hen zelf te laten ontwerpen.

Symmetrische betegelingen op de bol en in het vlak is een onderwerp dat in een van mijn lessen meetkunde zou kunnen worden geplaatst. Jan van de Craats besprak het onderwerp op interactieve wijze zeer vermakelijk. Mijn collega en ik luisterden, deden mee en wisselden van gedachten over hoe vlakvullingen op een bol werken met de notatie die afgeleid is van John H. Conway en de ideeën van Coxeter en Fejes Toth. Tot mijn verbazing wist ik in zestig minuten helder hoe de symmetrie-eigenschappen van zulke tegelingen genoteerd worden!

Als laatste heb ik deelgenomen in de werkgroep van Jan de Lange. Hierin stond de vraag centraal hoe het leren van meetkunde bij kinderen werkt. De Grand Canyon werd als context gebruikt. Voorbeelden van lessen die op een overheadprojector met sheets werden verduidelijkt werden besproken. Het ging niet over de gepresenteerde opdrachten, maar veel meer over hoe deze ontworpen waren en de gebruikte ontwerpcirkel. Een (doe-)activiteit waarbij dit was ingezet, was de opdracht over boten. Met blokjes probeerden wij een van de afgebeelde boten na te bouwen, kijklijnen en kijkhoeken te benoemen en zo toe te werken naar het ontwerpen van de ultieme boot. Deze opdracht heb ik vervolgens in mijn vakdidactiekles uitgeprobeerd om te zien wat mijn studenten doen met het resultaat dat zij eruit halen. Met succes! Dit blijkt een geschikte opdracht om met studenten het denkproces van leerlingen op het gebied van de meetkunde te bekijken.

#### Een geschikte ontmoetingsplaats

Wat de Nationale Wiskunde Dagen al niet te weeg kunnen brengen! Naast de lezingen en workshops was er een informatiemarkt met stands van instanties die zich met wiskunde of wiskundeonderwijs bezig houden. Ook een goed gevuld avondprogramma met een band, wiskundequiz en spellen, gaf voor mij duidelijk aan dat deze dagen een geschikte ontmoetingsplaats zijn voor wiskundigen en docenten. Daarnaast heb ik mijn collega's beter leren kennen. Misschien voor u een goed idee voor volgend jaar: kom naar de Nationale Wiskunde Dagen 2013!



**Harrie Broekman***Universiteit Utrecht  
h.g.b.broekman@uu.nl***Nellie Verhoef***Faculteit Gedragwetenschappen, instituut ELAN  
Universiteit Twente  
Postbus 217  
7500 AE Enschede  
n.c.verhoef@utwente.nl***Biografie Pierre Marie van Hiele (1909–2010)**

# Een leven lang wiskundig denken

Op 1 november 2010 overleed Pierre Marie van Hiele op de respectabele leeftijd van 101 jaar. Harrie Broekman en Nellie Verhoef kijken terug op zijn leven en werk. Een hommage aan een markant mens. Zijn invloed bleef niet beperkt tot de vorige eeuw maar is ook vandaag nog springlevend.

Begin vorige eeuw wees Pierre van Hiele al op de ontwikkeling in het wiskundig denken van kinderen. Hij benadrukte de rol van de docent die oog heeft voor individuele leerprocessen. Zijn vrouw Dina complementeerde zijn visie met uitdagend lesmateriaal.

Pierre van Hiele was een veelzijdig mens: wiskundeleraar, wiskundendidacticus, leerboekenauteur, (vakdidactisch) onderzoeker en — niet te vergeten — observator en verslaglegger (Figuur 1).

“De wereld van de waarneming, waarin het gezichts- en het gehoorvermogen als technische wonderen ontwikkeld zijn, is basis voor een denken dat oorspronkelijk non-verbaal is, maar waarin zich bij de mens langzamerhand een taal ontwikkelt. Die taal maakt het mogelijk hogere rationele denkniveaus te bereiken. Het menselijk denken kan daarmee tot enorme prestaties gevoerd worden. Dit heeft ertoe geleid in de psychologie van het denken zich voornamelijk te richten op intellectuele prestaties. Men kan er zelfs toe komen een lager denken te ontkennen omdat dat denken niet rationeel toetsbaar is. Toch bestaat dit visuele denken wel en maken wij er voortdurend gebruik van.” [8]

## Van jongs af aan

Als scholier was Pierre al bezig met het helpen van jongere leerlingen ‘wiskunde te le-

ren’. Vanaf die tijd was hij ook al dusdanig kritisch op het beschikbare lesmateriaal dat hij pogingen ondernam om aangepast/verbeterd materiaal te ontwikkelen. Dit leidde onder andere tot een aantal leerboeken — samen met zijn eerste vrouw Dina van Hiele-Geldof — en de latere leerboekenserie *Van A tot Z*. Het was tevens de aanzet tot het levenslang bestude-

ren van het leren ‘redeneren’ in de wiskunde: “In 1944 gingen wij er over denken zelf boeken te schrijven. Het eerste boek zou heten *Werkboek der algebra*. We hadden in het begin een tabel gemaakt van de machten van 2, waarbij we doorgingen tot  $2^{64}$ . Als je 64 wilde vermenigvuldigen met 256 dan zag je dat er naast 64 stond 6 en naast 256 stond 8. Je telde die twee getallen op, dat was 14 en de conclusie was dat  $64 \times 256$  gelijk was aan 16384 (Figuur 2). Er was ook een tabel met machten van 5 waarmee je op dezelfde manier kon werken (Figuur 3). Maar je kon ook



**Figuur 1** Pierre van Hiele inspecteert zijn leerboeken

| Tabel der machten van 2 |               |    |                            |
|-------------------------|---------------|----|----------------------------|
| 1                       | 2             | 31 | 2 147 483 648              |
| 2                       | 4             | 32 | 4 294 967 296              |
| 3                       | 8             | 33 | 8 589 934 592              |
| 4                       | 16            | 34 | 17 179 869 184             |
| 5                       | 32            | 35 | 34 359 738 368             |
| 6                       | 64            | 36 | 68 719 476 736             |
| 7                       | 128           | 37 | 137 438 953 472            |
| 8                       | 256           | 38 | 274 877 906 944            |
| 9                       | 512           | 39 | 549 755 813 888            |
| 10                      | 1 024         | 40 | 1 099 511 627 776          |
| 11                      | 2 048         | 41 | 2 199 023 255 552          |
| 12                      | 4 096         | 42 | 4 398 046 511 104          |
| 13                      | 8 192         | 43 | 8 796 093 022 208          |
| 14                      | 16 384        | 44 | 17 592 186 044 416         |
| 15                      | 32 768        | 45 | 35 184 372 088 832         |
| 16                      | 65 536        | 46 | 70 368 744 177 664         |
| 17                      | 131 072       | 47 | 140 737 488 355 328        |
| 18                      | 262 144       | 48 | 281 474 976 710 656        |
| 19                      | 524 288       | 49 | 562 949 953 421 312        |
| 20                      | 1 048 576     | 50 | 1 125 899 906 842 624      |
| 21                      | 2 097 152     | 51 | 2 251 799 813 685 248      |
| 22                      | 4 194 304     | 52 | 4 503 599 627 370 496      |
| 23                      | 8 388 608     | 53 | 9 007 199 254 740 992      |
| 24                      | 16 777 216    | 54 | 18 014 398 509 481 984     |
| 25                      | 33 554 432    | 55 | 36 028 797 018 963 968     |
| 26                      | 67 108 864    | 56 | 72 057 594 037 927 936     |
| 27                      | 134 217 728   | 57 | 144 115 188 075 855 872    |
| 28                      | 268 435 456   | 58 | 288 230 376 151 711 744    |
| 29                      | 536 870 912   | 59 | 576 460 752 303 423 488    |
| 30                      | 1 073 741 824 | 60 | 1 152 921 504 606 846 976  |
|                         |               | 61 | 2 305 843 009 213 693 952  |
|                         |               | 62 | 4 611 686 018 427 387 904  |
|                         |               | 63 | 9 223 372 036 854 775 808  |
|                         |               | 64 | 18 446 744 073 709 551 616 |

Figuur 2 Tabel der machten van twee

Behoort bij  
**WERKBOEK DER ALGEBRA**  
 I en II  
 door Dr. P. M. van HIELE en  
 Dr. D. van HIELE GELDOLF  
 Uitgave van J. Muusses N.V. Purmerend

| Tabel der machten van 3 |  | Tabel der machten van 5 |                             |
|-------------------------|--|-------------------------|-----------------------------|
| 1                       |  | 1                       | 5                           |
| 2                       |  | 2                       | 25                          |
| 3                       |  | 3                       | 125                         |
| 4                       |  | 4                       | 625                         |
| 5                       |  | 5                       | 3 125                       |
| 6                       |  | 6                       | 15 625                      |
| 7                       |  | 7                       | 78 125                      |
| 8                       |  | 8                       | 390 625                     |
| 9                       |  | 9                       | 1 953 125                   |
| 10                      |  | 10                      | 9 765 625                   |
| 11                      |  | 11                      | 48 828 125                  |
| 12                      |  | 12                      | 244 140 625                 |
| 13                      |  | 13                      | 1 220 703 125               |
| 14                      |  | 14                      | 6 103 515 625               |
| 15                      |  | 15                      | 30 517 578 125              |
| 16                      |  | 16                      | 152 587 890 625             |
| 17                      |  | 17                      | 762 939 453 125             |
| 18                      |  | 18                      | 3 814 697 265 625           |
| 19                      |  | 19                      | 19 073 486 328 125          |
| 20                      |  | 20                      | 95 367 431 640 625          |
| 21                      |  | 21                      | 476 837 158 203 125         |
| 22                      |  | 22                      | 2 384 185 791 015 625       |
| 23                      |  | 23                      | 11 920 928 955 078 125      |
| 24                      |  | 24                      | 59 604 644 775 390 625      |
| 25                      |  | 25                      | 298 023 223 876 953 125     |
| 26                      |  | 26                      | 1 490 116 119 384 765 625   |
| 27                      |  | 27                      | 7 450 580 596 923 828 125   |
| 28                      |  | 28                      | 37 252 902 984 619 140 625  |
| 29                      |  | 29                      | 186 264 514 923 095 703 125 |
| 30                      |  | 30                      | 931 322 574 615 478 515 625 |

Figuur 3 Machten van 5

bedenken dat  $2 \times 5 = 10$ , zodat bijvoorbeeld  $2^5 \times 5^5 = 10^5 = 100.000$ . Op die manier waren er allerlei aardige vraagstukken te bedenken. Direct na de oorlog gingen we dit boek aan Wolters aanbieden, maar daar hielden ze de boot af.” [7]

Via ‘Vernieuwing’ kwamen Pierre en Dina bij de uitgeverij Muusses terecht. Hier werd vanaf de jaren 60 ook de eerder genoemde leerboekenserie *Van A tot Z* uitgegeven. Deze methode was een volledige reeks werkboeken met bijbehorende werkschriften voor alle leerjaren (en alle typen) van het voortgezet onderwijs. Aan de methode lagen een aantal duidelijk geformuleerde didactische principes ten grondslag (Figuur 4).

Wiskundige begrippen werden intuïtief ingeleid. Leerlingen werden uitgedaagd om aan de slag te gaan, ieder op zijn eigen ontwikkelingsniveau. Zo was de aanpak, de tekst en daarbij passende illustratie toegesneden op de individuele mavo-leerling (Figuur 5) of vwo-leerling (Figuur 6).

Op de intuïtieve aanpak volgde een geleidelijke groei naar deductief denken, waarbij de plaatjes steeds minder nodig zijn en waarbij de taal langzaam steeds formeler wordt. De methode *Van A tot Z* moest opboksen tegen de meer algoritmische methodes, met automatiseren als hoogste doel. *Van A tot Z* redde het uiteindelijk niet en ging samen met uitgeverij Muusses ten onder. Wel was er nog een — tijdelijke — voortzetting middels een uitgave van de wiskundewerkschriften via vakpublicaties.

### Observatie als methode van onderzoek

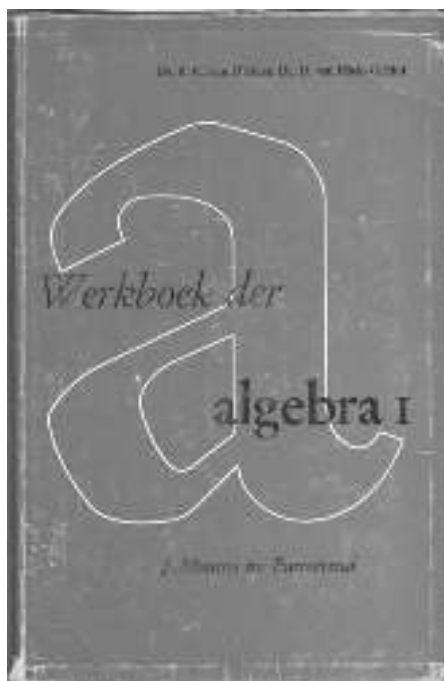
Van Hiele gaf ruim 40 jaar les aan 12 tot 18 jarigen, en bleef de daarbij opgedane ervaringen benutten bij het denken over, en het werken aan een verdere theorievorming. Dit leidde tot vele publicaties waarin hij zijn ideeën over de ontwikkeling in ‘denkniveaus’ verder ontwikkelde (Figuur 7).

Van Hiele liet zich zijn hele werkzame leven inspireren door het observeren van lerende leeftijdgenoten en kinderen. Wezenlijk voor zijn werk was echter vooral dat hij tot het eind toe bezig was met het weergeven, beschrijven en doordenken van zijn observaties. Voor wat betreft het leren van wiskunde hanteerde hij daarbij zeer nadrukkelijk het principe dat het leerproces dient aan te sluiten bij de intuïtieve, informele wiskunde die lerenden hebben geleerd door eigen experimenten. Motivatie speelde daarbij een belangrijke rol, evenals ‘structuur’ [1].

Pierre en zijn vrouw bewonderden de onderzoeksmethoden van Piaget — *observeren*



Figuur 4 Werkboeken, uitgegeven bij Muusses



Freudenthal — besteedde zijn inziens tevens te weinig aandacht aan het oplosgedrag van leerlingen, waardoor veel vaardigheden als vanzelfsprekend ‘aanwezig’ beschouwd werden. Dit mondt gemakkelijk uit in een verkeerde houding ten aanzien van niet alleen vraagstukken, maar ook ten aanzien van wiskunde en wiskundig denken.

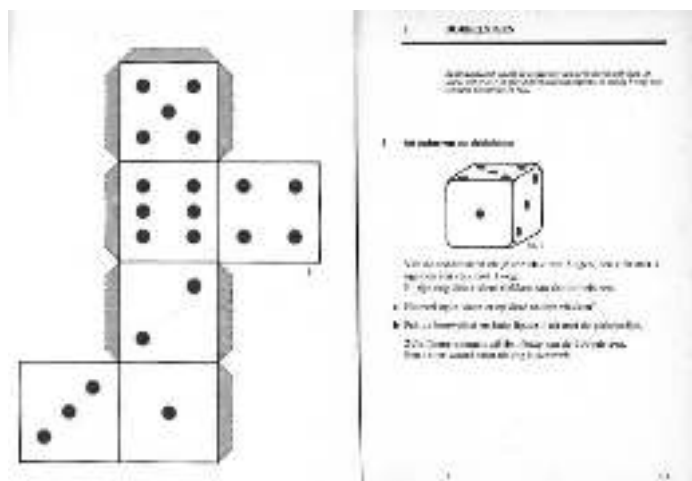
Op de achtergrond speelde hierbij de worsteling van Van Hiele met het werken met twee verschillende intuïties die ook al bij Pythagoras en zijn tijdgenoten te onderkennen waren. Dit komt voor lerende kinderen tot uiting in de intuïtie van continuïteit en die van discreetheid zoals die naar voren komen in de (ruimte-) meetkunde respectievelijk het (met gehele getallen) rekenen. Die discreetheid heeft betrekking op de overgang van aanschouwelijkheid naar abstracties in de vorm van symbolen — dus het zich losmaken van het aanschouwelijke beeld dat het ‘aantal’ bepaald heeft. Het rekenen komt in zicht, getallen zijn knooppunten geworden in een groot relatienet [5, pp. 113–114].

Zelf heeft Van Hiele in besloten kring meerdere malen het idee geopperd dat de keuze van Freudenthal om eerste promotor te zijn van Dieke, waardoor hijzelf Langeveld als eerste promotor ‘kreeg’, door hem altijd beschouwd is als een afwijzing door Freudenthal van zijn meer theoretisch (denk/leerpsychologisch) werk. Dat zijn keuze om fulltime te blijven werken als wiskundeleraar — er was in die tijd geen functie als didactiekdocent of didactisch onderzoeker voor hem beschikbaar — het uitbouwen van zijn ideeën bemoeilijkte, weet hij vrijwel altijd aan het ‘Nederlandse universitaire wereldje’.

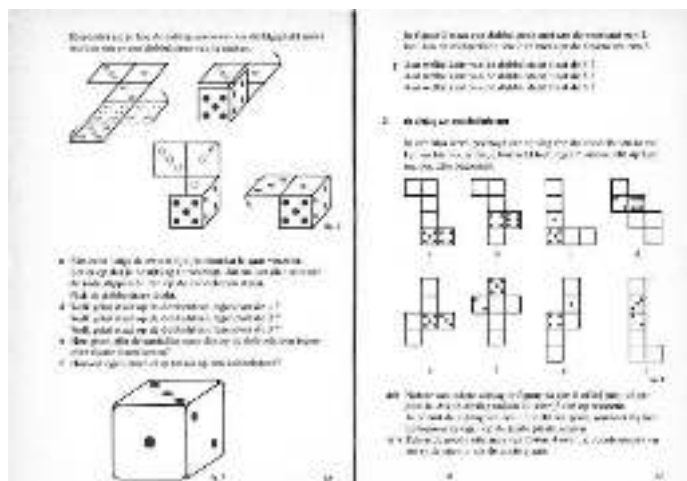
Toch was het mede dankzij de voordrachten en publicaties van Freudenthal dat het theoretisch werk over ‘niveaus in het denken’

en *luisteren* — maar deelden de conclusies van Piaget dat wiskundig begrip zich ontwikkelt door ‘ouder worden’ of door ‘natuurlijke groeiprocessen’ beslist niet. Al vrijwel vanaf zijn allereerste publicaties benadrukt hij — geïnspireerd door de praktijk van het lesgeven — het belang van het (gefaseerde) leren van kinderen, ondersteund door zorgvuldig samengesteld materiaal en de begeleiding door een goede docent. Het blijft jammer dat hij hierover — voor zover bekend — nooit een echte dialoog heeft kunnen/willen voeren met Freudenthal. Zo’n dialoog zou zeker geen gemakkelijk gesprek geweest zijn: Van Hiele was op zoek naar essentiële kenmerken van begrip/inzicht met als uitgangspunt de lerende en de gedachte dat reflectief

denken noodzakelijk is om een hoger denkniveau te bereiken. Zijns inziens was dat echter niet genoeg: materialen en eventuele vragen van de docent zijn nodig om te stimuleren dat die reflectie ‘in de juiste richting’ gaat. Daarbij benadrukte hij met name het belang van het visuele/grondniveau. Hij dacht dat dit anders was bij Freudenthal. Deze was volgens hem meer geïnteresseerd in het leren van wiskunde met als startpunt onder andere een fenomenologische en didactische analyse en het gebruik van contexten om het gat tussen realiteit en het formele systeem te overbruggen. Freudenthal veronachtzaamde daarbij volgens hem juist het belang van het visuele (deels intuïtieve) niveau en overschatte daarmee de mogelijkheid van lerenden. Hij —



Figuur 5 De uitslag van een kubus voor de mavo-lerling



Figuur 6 De uitslag van een kubus voor de vwo-lerling



**Figuur 7** Promotie Pierre en Dina van Hiele-Geldof (1956)

internationaal veel aandacht kreeg en met name in de Verenigde Staten vele onderzoekers stimuleerde: “In mijn wiskunde-onderwijskundig leerproces is de kennis van Van Hieles niveaus cruciaal geweest omdat ik daarbij de reflectie als niveauverhogende activiteit herkende: bewustmaking van je onbewust kennen, weten, handelen, het er op reflecteren — hoe weet je dat, waarom doe je dat — en ten slotte het verwoorden van het resultaat van je analyse, soms door beproefde taalmiddelen een nieuwe functie toe te kennen, soms door nieuwe te scheppen.” [4, p. 355]

#### Invloed op het huidige wiskundeonderwijs

Het gedachtegoed van de Van Hieles doordrong de veranderende inzichten. In de meetkunde bleef de zorgvuldige opbouw in niveaus van denken, van intuïtief (zintuiglijk

waarneembaar), via beschrijving (herkennen van eigenschappen) naar formalisering (stellingen en definities), herkenbaar. Een representatief voorbeeld in het huidige wiskunde-onderwijs is het gebruik van vectoren en de opbouw van dat begrip, het inzicht en de vaardigheden in het hanteren ervan dat illustratief is voor de toenmalige ideeën van Van Hiele. In *de Wageningse Methode* worden vectoren in havo wiskunde D intuïtief opgebouwd door leerlingen te laten tekenen en vervolgens te laten rekenen, waardoor het begrip van lengte en richting op een natuurlijke wijze ontstaat (intuïtief niveau). Het katern vervolgt met vectoren in een assenstelsel, lijnen en vlakken in de ruimte, rekenen in de ruimte (het beschrijvende niveau), de (co)sinusregel, en eindigt met vlakken en vergelijkingen van vlakken (het formele niveau), zie [www.wageningsemethode.nl/download/Vectoren%20en%20meetkunde.pdf](http://www.wageningsemethode.nl/download/Vectoren%20en%20meetkunde.pdf).

Van Hiele zocht — meer dan Freudenthal — contexten die ‘dicht tegen de wiskunde aan lagen’, maar probeerde daarbij wel dusdanig dicht bij de leerling te blijven dat deze er een uitdaging in kon vinden. Zoals bekend, was Freudenthal voorstander van een ruim gebruik van contexten, hetgeen er toe geleid heeft dat er in de huidige leerboeken veel — kleine, op zichzelf staande — contexten (zogenoemde reële situaties) gebruikt worden die de leerlingen weinig steun geven bij het opbouwen van een bruikbaar begrippenkader en benodigde vaardigheden. Dat deze ‘controversie’ rond het gebruik van contexten ook nu nog speelt, moge blijken uit publicaties in dit tijdschrift van Paul Drijvers [3] en Jan van de Craats [2]: “Goede context nodigt uit tot abstractie en algebraïsche begripsontwikkeling” versus “Juist het gebruik van contexten veroorzaakt het probleem”.

#### Uitdaging, taal en leerinhouden

Voor ons liet hij naast zijn gedachten/theorie over niveaus in het denken (beschrijvend) en ideeën over de opbouw van begrip (voorschrijvend) een aantal aandachtspunten na voor eenieder die zich bezighoudt met wiskundeonderwijs. Zo legde hij de nadruk op het gebruik van taal op de verschillende niveaus. Op het intuïtieve niveau wordt alledaagse spreektaal gebruikt. Op het beschrijvende niveau komen wiskundige begrippen aan de orde zoals punten, hoeken, lijnen en vlakken, inclusief alle combinaties daarvan aan de hand van figuren (representaties). Op het formele niveau staat het taalgebruik los van figuren en gaat het om relaties, om de (abstracte) structuur. In het bovenstaande vectorvoorbeeld gaat het op het formele niveau over een vectorruimte waarin lichaamskenmerken een rol spelen.

Van Hiele benadrukte dat het noodzakelijk is dat de lerende actief participeert in het proces van begripsontwikkeling door bezig te zijn met wat geleerd moet worden in een leeromgeving die onderzoeken, verwoorden en activiteit ondersteunt. Dat betekent dat er geen sprake is van een serie stapelopgaven, waarbij de voorgaande opgave eerst opgelost moet zijn voordat er aan de volgende kan worden begonnen. Dat betekent ook dat het zelf verwoorden van denkstappen — een aanzet tot activiteit — als noodzakelijk wordt gezien om tot niveauverhoging te komen. In zijn boek *Structure and Insight* [6, p. 43] gaat Van Hiele expliciet in op het bewust creëren van een ‘crisis of thinking’ om op een hoger niveau te komen. In zijn observaties had hij een behoefte waargenomen om uitdaging te benutten.

Tot slot: na een lang, werkzaam leven is Pierre in het najaar van 2010 vredig ingeslapen. ←

#### Referenties

- 1 G. Alberts en R.H. Kaenders (2005), Ik liet de kinderen wel iets leren, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/6(3), 247–251.
- 2 J. van de Craats (2007), Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8(2), 132–136.
- 3 P. Drijvers (2006), Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/7(3), 198–202.
- 4 H. Freudenthal (1991), *Revisiting Mathematics Education*, China Lectures, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- 5 P.M. van Hiele (1964), *Rechenunterricht und Zahlbegriff: Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffes und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht*, Westermann: Taschenbuch.
- 6 P.M. van Hiele (1986), *Structure and Insight: A theory of Mathematics Education*, Orlando: Academic Press.
- 7 P.M. van Hiele (1987), *Structuur*, Purmerend: Muusses.
- 8 P.M. van Hiele (1999), *Bewust of onbewust: Denken in een nieuw perspectief*, Niet gepubliceerde reactie op het artikel ‘Zinloos bewust-

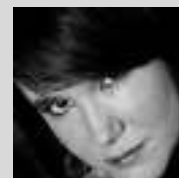
zijn’ van Harm Visser in *NRC Handelsblad* van 11 september 1999.

**Ionica Smeets**

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com

**Het keerpunt van Jan Sijbrand**

# Na mijn promotie kwam het niet in me op om bij een bank te solliciteren

De carrière van Jan Sijbrand (1954), directeur toezicht bij De Nederlandsche Bank, kent twee grote keerpunten. Na zijn promotie was er in Nederland geen baan voor hem aan de universiteit, dus vertrok hij naar Shell. Elf jaar later had hij het daar wel gezien en stapte over naar het bankwezen. Hij vertelt hoe je stap voor stap carrière maakt. "Al die wiskundigen vinden uiteindelijk hun weg wel."

Jan Sijbrand was een echte studiebol en nog geen 21 toen hij in Utrecht afstudeerde als wiskundige. Hij voelde zich nog niet klaar voor de maatschappij: "Niet dat ik dat zo bewust formuleerde, maar achteraf gezien is dat duidelijk." Gelukkig kon hij in Utrecht blijven voor een promotie-onderzoek bij Viktor Eckhaus. Met veel plezier werkte hij aan zijn proefschrift *Studies in non-linear stability and bifurcation theory*. Maar na zijn promotie in 1981 was er in Nederland geen plek voor hem op de universiteit: "Misschien had ik een jaar later of eerder wel geluk gehad, dan was ik graag in het onderzoek gebleven. Ik kon wel terecht in Amerika, maar ik had geen zin om op die manier het land uit te moeten. Dus ik solliciteerde bij wat bedrijven, onder andere bij Philips en Shell."

**Waarom koos je uiteindelijk voor Shell?**

"Ik vond Shell verder vooruit kijken. Philips zocht mensen voor het laboratorium, dat was een baan voor vier of vijf jaar, daarna zocht je het maar uit. Shell keek of iemand geschikt was voor een loopbaan in het management."

**Had je in die tijd dan management-ambities?**

"Nee, dat was helemaal niet mijn plan. Sterker nog, toen ze tijdens de sollicitatie vroegen wat ik als eerste baan wilde, antwoordde ik dat ik verder wilde met wiskundig onderzoek. Dat was helemaal het verkeerde antwoord!"

Blijkbaar had ik het toch goed gemotiveerd, want ik werd aangenomen. En ik begon er inderdaad met wiskundig onderzoek, bijvoorbeeld modelleren van vlammen in een reactor."

**Hoe beviel de overgang van universiteit naar bedrijfsleven?**

"Dat was een anti-climax. Van wiskunde als doel op zichzelf ging je naar het toepassen van bekende en al lang uitgekristalliseerde technieken. Als promovendus verzijn je zelf een vraag die zo ingewikkeld is dat niet iedere hoogleraar direct het antwoord ziet, maar anderzijds ook niet té ingewikkeld om zelf op te lossen. Het verzinnen van de juiste vraag is de grote uitdaging. In het bedrijfsleven is er een duidelijke vraagstelling, die hoef je niet zelf te bedenken."

**Bleef je lang in het onderzoek?**

"Nee, na drie jaar zeiden ze dat het tijd was voor een managementbaan. Ik werd hoofd van het informatica-onderzoek. Daarna deed ik elke drie jaar een andere baan, steeds iets dat half bekend was en half nieuw. Zo kwam je stap voor stap steeds verder van waar je begon, zonder dat je ooit al te grote risico's nam. Van informatica ging ik naar managementinformatiesystemen in



Jan Sijbrand

raffinaderijen en van daaruit naar de handel in Londen.”

*Dat klinkt als een bepalende stap voor de rest van je carrière.*

“Op dat moment was het een heel normale stap, maar het was inderdaad mijn eerste commerciële functie. Ik was onder andere verantwoordelijk voor de handel in oliederivaten en de risico’s in de dealing room en gaf leiding aan jongens met van die bretels. Na een paar jaar wilde mijn vrouw weg uit Engeland. Zelf vond ik Shell na elf jaar wat beklemmend worden, zo’n grote organisatie heeft een wil van zichzelf. Het was tijd voor iets anders. Het lag voor de hand om vanuit mijn handelsfunctie verder te gaan bij een bank. Ik stuurde de drie grootste Nederlandse banken een brief en de Rabobank gaf de beste reactie.”

*Wat vind je interessant aan de financiële wereld?*

“Je hebt met verschillende aspecten van de economie te maken. Met olie kom je over de hele wereld, maar het blijft één industrie. Bij de bank zie je alles, je krijgt een heel breed overzicht. Na mijn promotie kwam het niet in me op bij een bank te solliciteren. In 1981 was de echte bankman een econoom of een jurist, er liepen bij de bank weinig mensen met een exacte achtergrond. Het echte modellenwerk kwam pas begin jaren negentig van de grond. Toen ik in 1992 bij de Rabobank begon, waren de banken juist begonnen om bèta’s binnen te halen.”

*Gebruik je nog iets van je wiskundige achtergrond in je huidige functie als toezichthouder?*

“Het is geen wiskunde zoals tijdens mijn promotie, maar een zekere vertrouwde met stochastische processen, onzekerheden en correlaties komt me wel van pas. Mijn werk draait om controles van financiële instellingen, relaties met die instellingen, afdelingen die moeten samenwerken en mensen die niet allemaal hetzelfde willen.”

*Want wat doet een toezichthouder nou eigenlijk?*

“Financiële instellingen, zoals banken, verzekeraars en pensioenfondsen, nemen risico’s. Dat hoort bij het bedrijf. Als toezichthouder wil je instellingen tot zekere hoogte ruimte voor risico’s geven en dan een grens trekken. Die grens moet je zo stellen dat er geen schade kan optreden. Als toezichthouder moet je bedenken wat er met een

bepaalde waarschijnlijkheid kan gebeuren. Daarin komt het kwantitatieve in mijn huidige functie tot uiting.

Door mijn achtergrond ga ik anders om met risico’s dan veel collega’s. Een risico betekent dat het kan vriezen of dooien. Zolang verlies en winst zich via de voorspelde verdeling gedragen, ben ik tevreden. Ook als je eens wat verliest. Want dat hoort bij risico’s. Maar er zijn ook mensen in het risicomanagement die vooral verliezen willen voorkomen. Dat is een eenzijdige benadering.”

*Was je wiskundige achtergrond een voordeel tijdens je carrière?*

“Vaak wel. Leidinggeven aan mensen met een exacte achtergrond gaat het beste als je zelf feeling hebt met het vak. Medewerkers vinden het fijn als je het verschil ziet tussen iets dat ze heel goed gedaan hebben en een standaardtechniek.

Soms is mijn achtergrond juist onhandig, een typische wiskundige is buitengewoon precies. Tijdens mijn promotie was ik soms drie dagen bezig om een bladzijde helemaal te begrijpen. Ik ben gewend om teksten woord voor woord te lezen. Dat is slopend nu ik honderden pagina’s per dag moet lezen. Al die stukken. Mijn collega’s zijn daar beter in. Maar als er een angel in zo’n stuk zit, dan halen ze die er niet altijd uit, en ik wel.

Al met al helpt het toch om wiskunde gedaan te hebben. Ik denk dat de kredietcrisis ook komt doordat mensen niet begrepen wat modellen en producten deden. De entree van de exacte vakken is een *mixed blessing*. Door de modellen is er veel verbeterd in de beheersing van risico’s, maar aan de andere kant is het in de kredietcrisis ook akelig uit de hand gelopen.”

*Ligt dat aan de modellen of aan degenen die ze gebruiken?*

(zonder aarzeling) “Aan degenen die ze gebruiken. In de wapenlobby zeggen ze: ‘Guns don’t kill, people do.’ Ik zeg daarentegen wel eens: ‘Models don’t kill, people do.’ Mensen die modellen gebruiken moeten ze in principe zelf kunnen bouwen. Het is vreselijk link als iemand een model gebruikt als black box en niet snapt welke oorzaken welke gevolgen hebben.”

*Dus bankiers moeten genoeg van wiskunde weten. En andersom, wat moeten wiskundigen weten om goed te functioneren in de financiële wereld?*

“Het heeft geen zin om in de wiskundestudie iets in te brengen dat gericht is op een bepaalde baan. De meeste wiskundestudenten kiezen, net als ik vroeger, de studie omdat ze hem leuk vinden. Ze hebben niet zo’n duidelijk beroep voor ogen. En uiteindelijk vinden ze allemaal hun weg wel, ook in het bedrijfsleven of bij De Nederlandsche Bank.

De opleiding zou misschien wel iets meer tijd kunnen besteden aan communicatie. Als ik mensen interview voor een baan, dan vraag ik altijd om uit te leggen wat hun afstudeer- of promotiewerk was. Als die uitleg helder en simpel is, dan maakt zo iemand eigenlijk al meteen een heel grote kans. Die combinatie van exacte achtergrond en goed communiceren is een goede voorbode.”

*Wat heeft je in je carrière het meest verbasd?*

“Dat je op elke plek anders beoordeeld wordt, dat je in elke baan met iets anders kunt scoren. Hoe meer je dat meemaakt, hoe minder afhankelijk je daarvan wordt. Dan wordt het een spel dat je meespeelt.

Op de universiteit scoorde je met artikelen, lezingen op conferenties en onderzoeksgeld binnenhalen. Bij Shell speelde dat allemaal niet. Daar draaide het om hoe hoog je kwam op de managementsladder. Dat was wel even wennen, maar ik heb me aangepast. Daarna kwam ik bij de Rabobank en daar bleek vooral de titel van je functie heel belangrijk. Voor precies hetzelfde werk kon je verschillende titels krijgen. Collega’s vroegen me bij de eerste lunch nieuwsgierig welke titel ik had gekregen. Ik wist niet dat dat belangrijk was en ik had helemaal géén titel. Toen ik later bij ABN AMRO begon, zorgde ik dus snel voor een mooie titel. Maar dat bleek daar helemaal niet belangrijk, daar ging het er vooral om hoeveel je verdiende.”

*En waarmee scoor je bij De Nederlandsche Bank?*

“Dit is een cerebraal instituut, het gaat hier om academische vaardigheden. Er zitten hier heel slimme, jonge mensen. Die bieden tegen elkaar op met goede, uitvoerbare ideeën. Het gaat om de inhoud, niet om de titel.”

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar [ionica.smeets@gmail.com](mailto:ionica.smeets@gmail.com).

Wim Pijls

Econometrisch Instituut  
Erasmus Universiteit Rotterdam  
Postbus 1738  
3000 DR Rotterdam  
pijls@ese.eur.nl

## Onderzoek

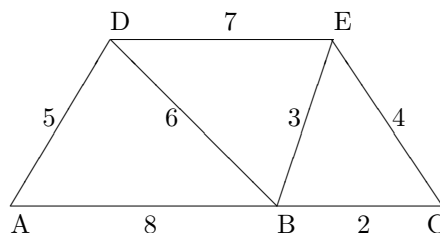
# Het minimale opspannend bos

In vrijwel elk leerboek over grafentheorie wordt het probleem van het minimale opspannend bos behandeld. Hetzelfde onderwerp komt ook aan de orde in de literatuur over datastructuren en algoritmen, een populair gebied binnen de informatica dat mogelijk meer boektitels kent dan de grafentheorie. In het decembernummer van 2010 werden de lezers van dit blad in een artikel van Stefan van Zwam ingeleid in het relatief onbekende gebied der matroïden. Wim Pijls gebruikt de theorie van de matroïden om het probleem van het minimale opspannend bos te behandelen. Een benaderingswijze die men in de informatica-literatuur niet aantreft. Tevens geeft hij hiermee een voorbeeld van optimalisatie in matroïden.

We recapituleren eerst enkele definities uit de grafentheorie. Een *graaf*  $G(V, E)$  bestaat uit een eindige verzameling  $V$  van knopen ('vertices') en een verzameling  $E$  van kanten ('edges'). Een kant is een verbinding tussen twee knopen. De definities van *pad* en *cykel* (of *circuit*) in een graaf spreken voor zich. Een *bos* definiëren we als een verzameling van kanten die geen cyclen bevat. Een graaf heet *samenhangend* als tussen elk tweetal knopen een pad bestaat. Een deelgraaf  $G'(V', E')$  met  $V' \subseteq V$  en  $E' \subseteq E$  heet een *component* van  $G$  als  $G'$  samenhangend is en niet tot een grotere samenhangende deelgraaf uitgebreid kan worden. Een *sneede* in een graaf  $G$  is een verzameling  $S$  van kanten zodanig dat na verwijdering van  $S$  het aantal componenten van  $G$  toeneemt. Een sneede kan als volgt verkre-

gen worden. Geef elke knoop naar willekeur een A- of een B-label. De kanten tussen een A- en een B-label vormen een sneede.

Een *gewogen graaf* is een graaf  $G(V, E)$  met een functie  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  die elke kant van een gewicht voorziet. Een opspannend bos  $B$  in graaf  $G(V, E)$  is een bos, zodanig dat elke knoop in  $V$  aan tenminste één kant van



Figuur 1 Een gewogen graaf

$B$  grenst. Een minimaal opspannend bos is een opspannend bos met minimaal gewicht. In plaats van 'minimaal opspannend bos' gebruiken wij de in de Engelstalige literatuur gebruikelijke afkorting MSF ('minimal spanning forest').

Een voorbeeld van een gewogen graaf is te vinden in Figuur 1. Een MSF bestaat uit de verzameling van kanten  $\{AD, BC, BD, BE\}$ , een sneede is bijvoorbeeld  $\{AB, BD, DE\}$ .

### Het Blauw-rood algoritme

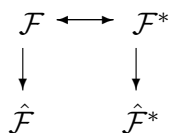
Terwijl al meerdere algoritmen voor de MSF bekend waren, voegde Tarjan er nog een aan toe in de tachtiger jaren [12]:

**Blauw-rood algoritme.** Herhaal de blauwe en de rode stappen in willekeurige volgorde, totdat alle kanten gekleurd zijn.

**Blauwe stap:** zoek een sneede zonder blauwe kanten; kleur de kant met minimaal gewicht blauw.

**Rode stap:** zoek een cykel zonder rode kanten; kleur de kant met maximaal gewicht rood.

De klassieke algoritmen voor de MSF zijn gemakkelijk als bijzonder geval af te leiden,



Figuur 2 Schema van families

zoals we verderop in dit artikel zullen zien. Het Blauw-rood algoritme roept enkele vragen op. Allereerst is daar natuurlijk de vraag naar de correctheid. Ten tweede: hoe is de symmetrische rol van cykel en snede te duiden? Deze vragen zijn het beste te beantwoorden met behulp van de theorie der matroïden. In de volgende paragraaf wordt deze theorie beschreven. Daarna wordt een generiek algoritme voor optimalisatie in matroïden gepresenteerd, dat volledig equivalent is met het Blauw-rood algoritme.

### Matroïden

De eerste definitie betreft het begrip *familie*, het fundament onder de matroïde.

**Definitie 1.** Een familie  $\mathcal{F}$  bij een gegeven verzameling  $E$  is een collectie van deelverzamelingen met de eigenschap: als  $I \in \mathcal{F}$  en  $I' \subset I$ , dan ook  $I' \in \mathcal{F}$ .

Een familie is dus gesloten onder inclusie. Een verzameling  $I \in \mathcal{F}$  heet maximaal als er geen  $I' \in \mathcal{F}$  bestaat met  $I \subset I'$ , dus als  $I$  geen superset heeft in de familie.

Elke familie  $\mathcal{F}$  heeft een *anti-familie*  $\hat{\mathcal{F}}$  gedefinieerd als de collectie van deelverzamelingen van  $E$  die niet tot  $\mathcal{F}$  behoren. Een anti-familie is gesloten in omgekeerde richting: elke superverzameling van een verzameling behoort tot de anti-familie. Een anti-familie kent derhalve minimale verzamelingen.

Elke familie  $\mathcal{F}$  bij een verzameling  $E$  heeft ook een *duale* familie  $\mathcal{F}^*$ . Een verzameling  $I^* \subseteq E$  behoort tot de duale familie  $\mathcal{F}^*$  als  $I^*$  disjunct is met tenminste één maximale verzameling van  $\mathcal{F}$ . Het is gemakkelijk na te gaan dat  $\mathcal{F}^*$  ook gesloten is onder inclusie. De maximale verzamelingen in  $\mathcal{F}^*$  zijn precies de complementen van de maximale verzamelingen in  $\mathcal{F}$ . Daaruit volgt:  $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$ . De duale familie heeft ook zijn anti-familie. Zo komt men tot het schema van Figuur 2. Een direct verband tussen  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\hat{\mathcal{F}}^*$  is niet eenvoudig vast te stellen. We komen hier aan het einde van deze paragraaf op terug. Een belangrijke stelling is de volgende.

**Stelling 1.** Elke verzameling  $\hat{I} \in \hat{\mathcal{F}}$  heeft een niet-lege doorsnede met elke maximale verzameling uit  $\mathcal{F}^*$ .

Het bewijs is triviaal: als  $\hat{I}$  disjunct zou zijn met een maximale verzameling in  $\mathcal{F}^*$ , dan behoorde  $\hat{I}$  tot  $\mathcal{F}$ . De stelling geldt natuurlijk ook dual. In de theorie van de hypergrafen wordt  $\hat{I}$  een transversaal van  $\mathcal{F}^*$  genoemd [1].

De eerder geïntroduceerde begrippen passen naadloos in het schema van Figuur 2. We beschouwen verzamelingen van kanten en nemen voor  $\mathcal{F}$  de familie van bossen. Een opspannend bos is een maximale verzameling in  $\mathcal{F}$ . Het complement van een maximaal of opspannend bos is snede-vrij, want na verwijdering van dit complement neemt het aantal componenten in de graaf niet toe. Een snede-vrije verzameling van kanten noemen we een *vulling*. Een bos en een vulling kan men opvatten als het geraamte en het vlees van de graaf. Figuur 3 is een specifieke invulling van Figuur 2. We ontdekken hier de dualiteit van cyclen en sneden.

Het zal blijken dat het Blauw-rood algoritme in feite een optimalisatie-algoritme voor matroïden is. We introduceren het begrip matroïde in de volgende definitie. De notaties  $A + b$  en  $A - b$  staan respectievelijk voor  $A \cup \{b\}$  en  $A \setminus \{b\}$ .

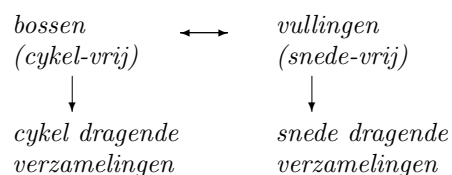
**Definitie 2.** Een matroïde  $M$  is een paar  $(E, \mathcal{F})$  met  $\mathcal{F}$  een familie bij de verzameling  $E$  zodanig dat geldt: als  $I, J \in \mathcal{F}$  met  $|I| < |J|$ , dan is er een  $j \in J \setminus I$  zodat  $I + j \in \mathcal{F}$ .

De volgende twee stellingen laten zien dat zowel bossen als vullingen matroïden zijn.

**Stelling 2.** De matroïde  $(E, \mathcal{F})$  met  $\mathcal{F}$  de familie van bossen in een graaf  $G(V, E)$  is een matroïde.

**Bewijs.** Beschouw twee bossen  $I$  en  $J$  met  $|I| < |J|$  en de bijbehorende deelgrafen bepaald door de paren  $(V, I)$  en  $(V, J)$ . Als elke kant van  $J$  binnen een component van  $I$  ligt, is het aantal componenten van  $J$  tenminste gelijk aan het aantal componenten van  $I$ . Dit is in tegenspraak met de volgende stelling uit de grafentheorie: elk bos  $B$  in een graaf  $G(V, E)$  voldoet aan  $|V| = |B| + c$ , waarbij  $c$  het aantal componenten van  $B$  aanduidt. We concluderen dat er een kant  $j \in J$  moet zijn die twee componenten van  $I$  verbindt. Dan is  $I + j$  cykel-vrij.  $\square$

Uit de definitie van een matroïde volgt meteen: de maximale verzamelingen van  $\mathcal{F}$  bevatten hetzelfde aantal elementen, immers twee maximale verzamelingen  $Z_1, Z_2$  met  $|Z_1| < |Z_2|$  kunnen niet bestaan. Ook de volgende eigenschap is duidelijk: als  $Z$  maxi-



Figuur 3 Verzamelingen van kanten

maal is in  $\mathcal{F}$  en  $I$  niet, dan is  $I$  met elementen van  $Z \setminus I$  uit te breiden tot een maximale verzameling.

De duale matroïde  $M^*$  wordt bepaald door het paar  $(E, \mathcal{F}^*)$ .

**Stelling 3.** De duale van een matroïde is ook een matroïde.

**Bewijs.** Beschouw  $I^*$  en  $J^*$  uit  $\mathcal{F}^*$  met  $|I^*| < |J^*|$ . Dan is er een maximaal element  $J$  uit  $\mathcal{F}$  dat disjunct is met  $J^*$  en een maximaal element  $I$  uit  $\mathcal{F}$  dat disjunct is met  $I^*$ . Verwijder uit  $J$  de elementen van  $I^*$ , dus construeer  $J \setminus I^*$ . Omdat  $J \cap J^* = \emptyset$ , worden hoogstens  $|I^* \setminus J^*|$  elementen verwijderd. Breid de gereduceerde  $J$  uit tot een nieuw maximaal element  $Z$  in  $\mathcal{F}$  door aan te vullen met elementen uit  $I$ . Dan is  $Z$  disjunct met  $I^*$ . Omdat elke maximale verzameling hetzelfde aantal elementen heeft, vergt deze uitbreiding ten hoogste  $|I^* \setminus J^*|$  elementen. Vanwege  $|I^* \setminus J^*| < |J^* \setminus I^*|$  zal deze uitbreiding niet de gehele verzameling  $J^* \setminus I^*$  beslaan. Er is dus een  $j \in J^* \setminus I^*$  zodat  $j \notin Z$ . Er volgt dat  $I^* + j$  disjunct is met  $Z$  en dus in  $\mathcal{F}^*$  zit.  $\square$

Omdat we de matroïde van Figuur 3 bestuderen, hanteren we in dit artikel de terminologie uit die figuur, ofschoon dit niet geheel de algemene matroïden-terminologie is. De elementen van  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{F}^*$  in een willekeurige matroïde noemen we respectievelijk bossen en vullingen. De minimale elementen van  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\hat{\mathcal{F}}^*$  heten respectievelijk cyclen en sneden. (Deze laatste begrippen treden wél in de matroïden-literatuur op.)

We besluiten met twee stellingen die in de volgende paragraaf nodig zijn.

**Stelling 4.** Voor elk paar  $C, S$  met  $C$  een cykel en  $S$  een snede geldt  $|C \cap S| \neq 1$ .

**Bewijs** (uit het ongerijmde). Stel  $C \cap S = \{x\}$ . Dan zijn de disjuncte verzamelingen  $C - x$  en  $S - x$  respectievelijk cykel-vrij en snede-vrij. Er is een maximale vulling  $Z_0$  die disjunct is met  $C - x$ . De verzameling  $S - x$  is met elementen uit  $Z_0$  uit te breiden tot maximale vulling  $Z_1$ . Deze bevat  $x$  niet, omdat  $Z_1$  dan de snede  $S$  zou bevatten. Omdat  $C - x$  disjunct is met

$S - x$  en met  $Z_0$ , is  $C - x$  ook disjunct met  $Z_1$ . De cykel  $C$  is dan ook disjunct met  $Z_1$  en dit is in strijd met Stelling 1.  $\square$

**Stelling 5.** *Als  $Z \in \mathcal{F}$  een maximaal bos is en  $e \notin Z$ , dan bevat  $Z + e$  een unieke cykel  $C$ . Na verwijdering van tenminste één element uit  $C$  wordt weer een maximaal bos verkregen.*

*Bewijs* (uit het ongerijmde). Stel  $Z + e$  bevat twee verschillende cyclen  $C_1$  en  $C_2$ . Kies een  $e'$  uit  $C_1 \setminus C_2$ . Breid  $C_1 - e'$  uit tot een maximaal bos in  $\mathcal{F}$ . De uitgebreide verzameling is cykelvrij, maar is ook een superverzameling van  $C_2$ . Tegenspraak.

Als men een element uit de unieke cykel verwijdert, ontstaat een cykel-vrije verzameling met hetzelfde aantal elementen als een maximale verzameling en deze is dus zelf ook maximaal.  $\square$

Merk op dat Stelling 4 een verband aanbrengt tussen  $\hat{\mathcal{F}}$  en  $\hat{\mathcal{F}}^*$ . Het omgekeerde van deze stelling geldt ook: als een verzameling  $S$  de eigenschap  $|C \cap S| \neq 1$  heeft voor elke cykel  $C$ , dan is  $S$  een snede. Zie [11] voor een bewijs.

### Een generiek algoritme

In deze paragraaf presenteren wij een generiek algoritme voor het optimaliseren van een gewogen matroïde, een matroïde met een gewichtsfunctie. Dit algoritme maakt gebruik van zogeheten minoren van matroïden. Een minor wordt verkregen door de verzameling  $E$  van een gegeven matroïde  $M = (E, \mathcal{F})$  te verkleinen. Stel een verzameling  $D \subset E$  wordt verwijderd uit de verzameling  $E$ . De minor-matroïde is gedefinieerd als  $M' = (E \setminus D, \mathcal{F}')$  met  $\mathcal{F}' = \{I' \mid I' \in \mathcal{F} \wedge I' \subseteq E \setminus D\}$ . De familie van deelverzamelingen wordt dus beperkt tot de gereduceerde verzameling  $E \setminus D$ . De minor-matroïde wordt genoteerd als  $M \setminus D$ ; de bijbehorende operatie wordt *restrictie* genoemd. (De term *restrictie* ontleen we aan [13]. De Engelstalige literatuur gebruikt ook 'deletion'.) Men kan ook uitgaan van de duale matroïde  $M^*$ . Als men hier de verzameling  $D \subset E$  verwijdert, is de resulterende matroïde  $M^* \setminus D$ . De duale hiervan is een transformatie van de oorspronkelijke  $M$  en wordt genoteerd als  $M/D$ . Deze transformatie van  $M$  wordt *contractie* genoemd. Op grond van deze definities is duidelijk dat  $M^* \setminus D = (M/D)^*$  en dus  $M^*/D = (M \setminus D)^*$ .

De operaties 'restrictie' en 'contractie' zijn gemakkelijk voor te stellen in onze voorbeeld-matroïde  $M(E, \mathcal{F})$  van bossen in een graaf. Restrictie betekent dat de kanten in  $D$  wor-

den verwijderd en contractie betekent dat de kanten van  $D$  worden samengeknepen.

In geval van restrictie, de overgang van  $M$  naar  $M \setminus D$ , gaan de cyclen door  $D$  verloren, maar de sneden door  $D$  blijven in afgeslankte vorm (zonder  $D$ ) bestaan. In geval van contractie, blijven cyclen verkleind behouden maar gaan sneden verloren.

Het onderstaande algoritme genereert een cykel-vrije verzameling met minimaal gewicht, alsmede een snede-vrije verzameling met maximaal gewicht. Het algoritme gaat uit van een matroïde  $M_0 = (E_0, \mathcal{F}_0)$ . Vanwege de contractie- en restrictie-operaties slinken  $E$  en  $\mathcal{F}$  tijdens executie. De verzamelingen  $R$  en  $B$  zijn deelverzamelingen van de initiële verzameling  $E_0$ .

**Generiek algoritme.**  $M := M_0$ ;  $R := B := \emptyset$ . Herhaal de volgende operaties in willekeurige volgorde totdat  $E = \emptyset$ .

*Contractie:* selecteer een kant  $x$  met minimaal gewicht in een snede  $S$ ;  $B := B + x$ ;  $M := M/\{x\}$ .

*Restrictie:* selecteer een kant  $x$  met maximaal gewicht in een cykel  $C$ ;  $R := R + x$ ;  $M := M \setminus \{x\}$ .

Het bewijs van het algoritme wordt gegeven in Stelling 6, die door drie lemma's wordt voorbereid. Een triviale invariant is:  $E_0 = E \cup B \cup R$ .

**Lemma 1** (invariant).

(a)  $C$  is cykel van  $M_0$  en  $C \subseteq E \cup B \Rightarrow C \setminus B$  is cykel van  $M$ .

(b)  $S$  is snede van  $M_0$  en  $S \subseteq E \cup R \Rightarrow S \setminus R$  is een snede van  $M$ .

*Bewijs.* We bewijzen alleen (a). Deel (b) is dual. Bij contractie ofwel overheveling van  $x$  uit  $E$  naar  $B$  blijft een cykel door  $x$  in afgeslankte vorm (zonder  $x$ ) bestaan. Na de restrictie ofwel de overheveling naar  $R$  is een cykel  $C$  door  $x$  niet langer een cykel, maar een dergelijke cykel  $C$  ligt in  $E \cup R$ .  $\square$

**Lemma 2** (invariant). *Er is een partitie van  $E_0$  zodat  $E_0 = B_0 \cup R_0$  en*

(a)  $B_0$  is een maximaal bos van  $M_0$  met minimaal gewicht en  $B \subseteq B_0$ ;

(b)  $R_0$  is een maximale vulling van  $M_0$  met maximaal gewicht en  $R \subseteq R_0$ .

*Bewijs.* De invariant geldt bij aanvang. Vanwege dualiteit bewijzen we de invariant alleen ingeval contractie wordt uitgevoerd. Als een  $x \in B_0$  geselecteerd wordt, wordt de invariant behouden.

Stel een  $x$  met  $x \notin B_0$  wordt geselecteerd. In  $B_0 + x$  bevindt zich volgens Stelling 5 een unieke cykel  $C$  met  $x \in C$ . Vanwege de invariant zelf ( $B_0$  is disjunct met  $R_0$  en dus met  $R$ ) bevindt  $C$  zich in  $E \cup B$ . Volgens Lemma 1 is  $C \setminus B$  een cykel in  $M$ . De doorsnede in  $M$  van  $S$  en  $C \setminus B$  heeft behalve  $x$  nog een doorsnede-element  $y$  dat tot  $C - x \subseteq B_0$  behoort. Na de contractie-operatie wordt de invariant hersteld door  $x$  toe te voegen aan  $B_0$  en  $y$  te verwijderen uit  $B_0$ . Volgens Stelling 5 is  $B_0$  nu een maximaal bos. Het complement van de nieuwe  $B_0$  is de nieuwe  $R_0$ . (Deze twee verzamelingen hebben  $x$  en  $y$  onderling geruild.) Omdat  $y$  ook in  $S$  is, is zijn gewicht niet kleiner dan dat van  $x$ . De nieuwe  $B_0$  heeft dus ook een minimaal gewicht.  $\square$

**Lemma 3.** *Het algoritme termineert.*

*Bewijs.* Als een nog niet geselecteerd element  $x$  in  $R_0$  is, dan bevat  $B_0 + x$  een cykel  $C$ . Op dezelfde manier als in Lemma 2 volgt dat  $C \setminus B$  een cykel is in  $M$ . De restrictie-operatie kan worden toegepast. Het geval  $x$  in  $B_0$  is dual. Zolang  $E \neq \emptyset$ , kan dus een  $x$  geselecteerd worden.  $\square$

**Stelling 6.** *Het generieke algoritme is correct.*

*Bewijs.* Lemma 2 impliceert dat het algoritme de juiste postconditie heeft. Lemma 3 betreft de terminatie.  $\square$

Het generieke algoritme en het Blauw-rood algoritme zijn gelijkwaardig. De verzameling  $B$  in het generieke algoritme komt overeen met de blauwe kanten, de verzameling  $R$  met de rode. Een cykel in  $M$  is een cykel in de oorspronkelijke  $M_0$  zonder rode kanten, of zonder kanten die bij een restrictie betrokken zijn geweest. Evenzo is een snede in  $M$  een snede in  $M_0$  zonder blauwe kanten, of zonder kanten die bij een contractie betrokken zijn geweest. Met behulp van Stelling 4 is gemakkelijk aan te tonen dat de kanten met minimaal gewicht in een snede niet alle rood kunnen worden.

### Algoritmen

In de literatuur over algoritmië, vooral gericht op informatici, vindt men altijd de algoritmen van Kruskal en van Jarnik-Prim-Dijkstra, zie bijvoorbeeld [2, 5]. Deze zijn geschikt voor implementatie. Van historisch belang is verder het algoritme van Boruvka. De hier genoemde 'klassiekers' zijn geheel buiten de matroïdentheorie om ontwikkeld. Voor een historisch overzicht, zie [4].

**Algoritme van Kruskal.** Herhaal de volgende stappen totdat  $|B| = |V| - 1$ . Kies een niet eerder gekozen kant  $k$  met minimaal gewicht. Als  $B + k$  geen cykel bevat, voeg  $k$  toe aan  $B$ , anders aan  $R$ .

**Algoritme van Jarník–Prim–Dijkstra.** Kies een willekeurige knoop  $v$  en voeg de lichtste kant  $k$  grenzend aan  $v$  toe aan  $B$ . Herhaal de volgende stappen totdat  $|B| = |V| - 1$ . Kies de lichtste (niet eerder gekozen) kant  $k$  grenzend aan  $B$ . Als  $B + k$  geen cykel bevat, voeg  $k$  toe aan  $B$ , anders aan  $R$ .

**Algoritme van Boruvka.** We starten met de graaf  $G(V, B)$  met  $B = \emptyset$ . Deze bevat  $|V|$  componenten elk bestaande uit één punt. Neem bij elke component  $C_i$  zijn lichtste aangrenzende kant  $k_i \in E$  (dus  $k_i$  heeft slechts één punt in  $C_i$ ). Voeg de kanten  $k_i$  toe aan  $B$ . (Een kant  $k_i$  kan al vanuit een andere component aan  $B$  zijn toegevoegd.) De graaf  $G(V, B)$  met de nieuwe  $B$  heeft minder componenten. Herhaal de actie op de componenten totdat  $|B| = |V| - 1$ .

Merk op dat dit laatste algoritme niet goed werkt als de graaf onderling gelijke kanten bevat. Het is dan mogelijk dat bij voorbeeld drie  $k_i$ 's een driehoek vormen.

We kunnen hieraan nog het Duaal Kruskal algoritme toevoegen.

**Duaal Kruskal algoritme.** Verwijder een kant  $k$  met maximaal gewicht uit de graaf, tenzij daardoor nieuwe componenten ontstaan. Voeg  $k$  toe aan  $R$ . Herhaal dit totdat  $|V| - 1$  kanten overgebleven zijn. Deze vormen dan de verzameling  $B$ .

In de literatuur over matroïden treft men gewoonlijk het *Greedy algoritme* aan, dat vrijwel gelijk is aan Kruskal: kies, zolang mogelijk, een kant  $x$  met minimaal gewicht zodanig dat  $B + x$  geen cykel bevat.

De simpelste afgeleide van het generieke algoritme laat zich als volgt formuleren: breek alle cycli open en wel bij hun zwaarste schakel.

Het algoritme van Kruskal maakt meteen duidelijk: als alle gewichten verschillend zijn, is de MSF eenduidig bepaald.

Uit het Blauw-rood algoritme is de volgende eigenschap af te leiden. De langste kant in een cykel kan altijd buiten een MSF gehouden worden; voor de kortste kant  $e$  van een snede is altijd een MSF te vinden die  $e$  bevat. De laatste uitspraak vindt men ook als volgt [3, 5]: geef elke knoop in een graaf naar willekeur een A- of een B-label; voor de kortste kant tussen een A-knoop en een B-knoop is altijd een MSF te vinden. Deze uitspraak kan weer specifiek gemaakt worden: voor de kortste kant  $e$  grenzend aan een knoop  $v$  is altijd een MSF te vinden.

## Slotopmerkingen

In dit artikel is theorie bijeengebracht die slechts in gefragmenteerde vorm in de literatuur te vinden is. Algemene theorie over matroïden is te vinden in [9] en [11], maar het generieke algoritme wordt daar niet vermeld. Het bewijs van Stelling 2 komt ook voor in [14]. De bewijzen van de Stelling 3 en 4 zijn parafrases van bewijzen uit [11].

De blauw-rood-formulering van het generieke algoritme is zoals gezegd afkomstig van Tarjan [12], die echter in zijn bewijs geen gebruik maakt van de dualiteit, maar de blauwe en de rode stap afzonderlijk behandelt. De tekstboeken over algoritmiek zoals [2, 5–6, 12] richten zich gewoonlijk op een informatica-publiek en vermelden niet het begrip matroïde en benutten dus ook niet de dualiteit. In [7] wordt het Blauw-rood algoritme met behulp van matroïden behandeld. Het bij mijn weten oudste tekstboek dat het generieke algoritme, zonder bewijs, beschrijft, is [8] dat [10] als bron aanwijst.

We hebben alleen in Stelling 2 een eigenschap van grafen gebruikt. Voor de rest is algemene matroïdentheorie behandeld. De waarde van abstractie in de wiskunde wordt hiermee opnieuw geïllustreerd. 

## Referenties

- 1 C. Berge, *Hypergraphs, Combinatorics of finite Sets*, North-Holland Publishing Company, 1973.
- 2 Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein, *Introduction to Algorithms*, Third Edition. MIT Press, 2009.
- 3 E.W.Dijkstra Archive, nr. 1273, beschikbaar op: <http://www.cs.utexas.edu/~EWD/ewd12xx/EWD1273.pdf>
- 4 R.L.Graham and Pavol Hell, On the History of the Minimum Spanning Tree Problem, *Annals of the History of Computing*, Vol. 7, Nr. 1, January 1985.
- 5 M.T. Goodrich and R. Tamassia, *Algorithm Design*, Wiley, 2002.
- 6 Jon Kleinberg and Eva Tardos, *Algorithm design*, Addison Wesley, 2005.
- 7 Dexter Kozen, *The Design and Analysis of algorithms*, Springer, 1991.
- 8 E. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rhinehart and Winston, New York, 1976.
- 9 J.G. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, 1992.
- 10 P. Rosenstiehl, L'Arbre Minimum d'un Graphe, in: *Theory of Graphs*, Rosenstiehl, ed., Gordon and Breach, New York 1967.
- 11 A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Vol. 2, Springer, 2003.
- 12 R.E. Tarjan, Data Structures and Network Algorithms, *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 1983.
- 13 R.J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Longman, 1972.
- 14 Stefan van Zwam, Matroïden en hun representaties, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/11 nr. 4, december 2010.

Derk Pik

JSG Maimonides

Postbus 87058

1080 JB Amsterdam

drpik@xs4all.nl

**Boekbespreking** Jeanine Daems en Ionica Smeets: *Ik was altijd heel ...*

# Slecht in wiskunde

Als assistent in opleiding aan de Universiteit van Leiden vormden Jeanine Daems en Ionica Smeets een webloggend duo. Met hun weblog [wiskundemeisjes.nl](http://wiskundemeisjes.nl) trokken ze een nieuw en divers publiek aan en wonnen ze vele prijzen. De wiskundemeisjes werden een begrip en verwierven zich een vaste plaats in de media. Nu is er een boek. Derk Pik, redacteur van dit tijdschrift, bespreekt het.

De titel van het boek, *Ik was altijd heel slecht in wiskunde*, kan goed ontleend zijn aan de voordracht van de Nijmeegse burgemeester Guusje ter Horst op het Nederlands Mathematisch Congres in 2003. Parmantig vertelde zij aan een volle zaal van wiskundigen dat ze op de middelbare school een drie had voor wiskunde. Zij is daarmee helaas niet de enige: overall hoor je mensen hun onvermogen epateren wat wiskunde betreft. Slecht zijn in wiskunde is een kwaliteit waarmee goede sier is te maken in gezelschappen. Helaas hebben de mensen die dit doen er geen benul van waar ze nu eigenlijk slecht in zijn. Het boek *Ik was altijd heel slecht in wiskunde* steekt de draak met dergelijke meningen. Het laat zien hoe hip en bij de tijd wiskunde eigenlijk is.

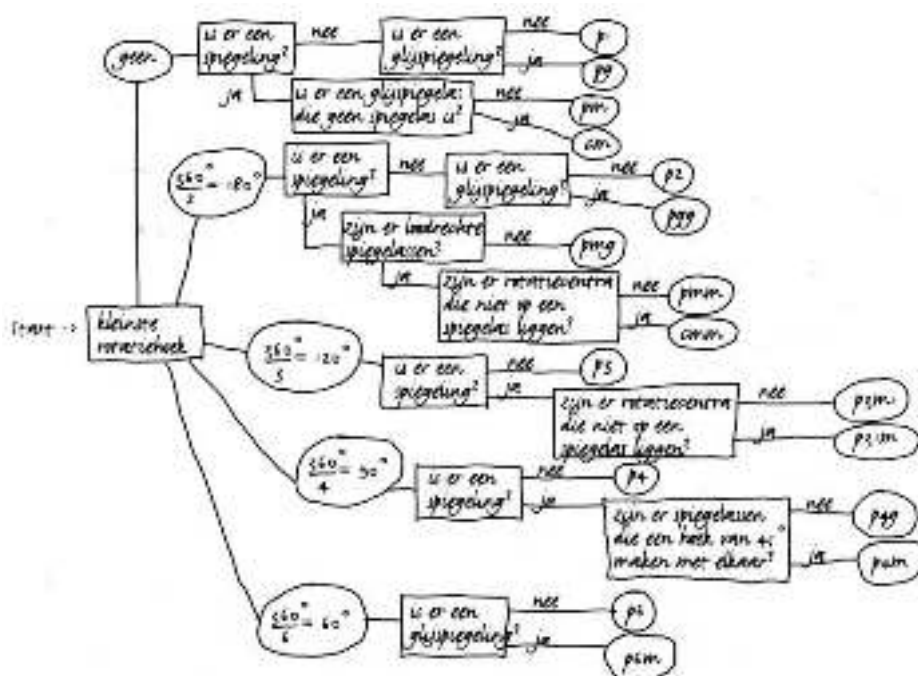
## Doe het zelf

Het frisse kleurige boek doet sterk denken aan knutselboeken die je vroeger in speelgoedwinkels kon kopen, met interessante verhalen, veel puzzels en regelmatig terugkerende gedeelten met het thema 'Doe het zelf'. Ook staan er columns in die eerder in *de Volkskrant* zijn verschenen en worden er boeken, websites en wiskundig interessante ob-

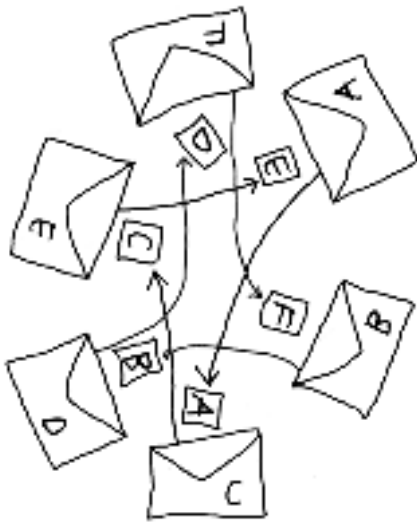
jecten beschreven. Verbindend thema is de persoonlijke onbevangen kijk op wiskunde, waarbij de lezer steeds geprikkeld wordt om

iets te doen. Een bewijs wordt samen met de lezer beleefd en voor allerlei constructies staan complete handleidingen afgedrukt. Elke pagina is een uitnodiging om er zelf mee aan de slag te gaan.

De vormgeving van het boek, met herinneringen aan zeventiger jaren pop-artbehang, draagt ook bij aan het persoonlijke karakter van het boek. Tabellen die normaal strak en



Illustratie uit het boek: stroomdiagram van de behanggroep



Illustratie uit het boek: het maken van lootjes voor Sinterklaas zonder dat daarbij iedereen aanwezig behoeft te zijn

recht zouden zijn afgedrukt, zijn nu met dunne bibberige lijntjes handgetekend, net als de assen van grafieken en allerlei andere verhelderende diagrammen. Op sommige plaatsen zijn de plaatjes en de schrijfflettertjes wel erg klein, waardoor de instructies soms moeilijk te volgen zijn. Je wilt echter zo graag weten wat er staat, dat ik een paar pagina's onder een kopieermachine heb gelegd en vergroot heb afgedrukt. Ook zijn sommige foto's wat te donker afgedrukt.

#### Voorbeeld uit het dagelijkse leven

Sommige beschrijvingen zijn wel erg kort. Is dit de bedoeling? Neem bijvoorbeeld op bladzijde 100 de rubriek 'De cadeautip: de planimeter'. Er staat in één alinea "De planimeter is zonder meer de stoerste rekenhulp die je kunt hebben. Hij berekent probleemloos de oppervlakte van een willekeurige tweedimensionale vorm — altijd handig als je wilt weten

hoe groot de koffievlek in je vloerbedekking precies is." Er volgen nog twee zinnen hoe je de planimeter bedient en een opmerking dat je ze tussen de 50 en 200 euro op internet kan vinden. Dat is alles. Het boek vervolgt met een zoektocht naar de decimalen van  $\pi$  door Ludolph van Ceulen. Is dit superieure humor? Hoe ziet zo'n planimeter er eigenlijk uit? Ik kan onmogelijk meer verder lezen.

Dit boek verschilt sterk van alle andere populariserende boeken die ik ken. Natuurlijk bevat het veel van de grote en bekende wiskundemijlpalen. Wat het boek echter uniek maakt is de persoonlijke interpretatie die aan deze zaken wordt gegeven. Wiskundige theorieën worden in verband gebracht met het dagelijkse leven, zoals: hoe vind je de allerbeste geliefde uit honderd kandidaten? Vaak ligt het persoonlijke in het overbrengen van verwondering, bijvoorbeeld over normale getallen of de Banach-Tarskiparadox. De lezer die niet bekend is met de wiskundewereld krijgt een goed idee van de emoties van wiskundigen bij de uitoefening van hun beroep.

#### Bewijzen

Het boek heeft enigszins verstopt ook een boodschap: op allerlei plaatsen wordt duidelijk gemaakt waarom het bewijzen zo belangrijk is. Niet voor niets sluit het boek af met het hoofdstuk 'Ik lieg nu: paradoxen en bewijzen'. Via de statistische paradox van Simpson, de verkiezingsparadox en de Banach-Tarskiparadox bereiken we met de laatste aflevering van de Doe-het-zelfrubriek de instructie hoe we een sinaasappelschil in de knoop kunnen leggen, zonder hem door te snijden. Er volgen bewijzen: plaatjesbewijzen (jammer genoeg erg weinig), bewijzen over het niet-bestaan van een formule, een bewijs van een uitspraak over het aantal haren op de hoofden van Amsterdammers, zonder dat

je er Amsterdammers bij nodig hebt. Het boek besluit met bewijzen die in de soep lopen en een aantal onbewezen vermoedens.

#### Verfrissend boek

Het boek *Ik was altijd heel slecht in wiskunde* biedt een verfrissende en steeds persoonlijke kijk op wiskunde in kraakheldere Nederlandse zinnen. De auteurs hebben een geheel eigen en nieuwe manier gevonden om over wiskunde te schrijven. Het is een leuk boek om cadeau te doen; het ziet er prachtig uit. Ik denk dat het boek ook geschikt is voor lezers die wel goed zijn in wiskunde. 



Jeanine Daems en Ionica Smeets, *Ik was altijd heel slecht in wiskunde*, Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam, 2011, 206 p., ISBN 9789057123368, prijs € 19,95

**Bennie Mols***Kijkduinstraat 121-2  
1055 XW Amsterdam  
benniemols@gmail.com***Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011**

# Energiemanagement van een draadloos sensornetwerk

Steeds meer toepassingen bevatten draadloze sensoren die in een netwerk met elkaar communiceren. Hoe kunnen die sensoren met zo veel mogelijk burens praten en toch zo min mogelijk energie verbruiken, vroeg het bedrijf Chess aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie.

## Deelnemers van de studiegroep

Joep Evers (TU/e)  
Demeter Kiss (CWI)  
Wojtek Kowalczyk (VU)  
Tejaswi Navilarekallu (VU)  
Michiel Renger (TU/e)  
Lorenzo Sella (UL)  
Vincent Timperio (UL)  
Adrian Viorel (Univ. Babes-Bolyai)  
Sandra van Wijk (TU/e)  
Albert-Jan Yzelman (UU)

Het is 's avonds laat wanneer je in je auto komt aanrijden bij een tankstation. Buiten springt er één lamp aan. Je rijdt verder en er springt nog een lamp aan en zo gaat het door. Het lijkt wel of je wordt gevolgd. Je voelt je onprettig. Om dat gevoel te voorkomen, wordt er gewerkt aan subtielere verlichting waarbij lampen niet slechts aan of uit zijn, maar op een prettige manier worden gedimd. Een tankstation krijgt zo een slimme, energiezuinige verlichting die ongeveer weet waar jij als automobilist rijdt en waar het dus lichter moet zijn, zonder je het gevoel te geven dat je wordt gevolgd. Voor zo'n slim sensornetwerk is meer elektrische bekabeling nodig. Dat is duur; vandaar dat er wordt gekozen voor draadloze sensoren die met elkaar praten. Het sensornetwerk moet weten waar een automobilist precies rijdt om daar een prettige verlichting op maat te verzorgen.

Het Nederlandse bedrijf Chess maakt draadloze sensoren voor deze tankstationtoepassing, maar ook voor vele andere toepas-

singen. Chess is gespecialiseerd in de ontwikkeling van hard- en software op maat. Behalve draadloze sensoren heeft het bedrijf bijvoorbeeld een real-time-uitlezing van een MRI-hersenscanner ontwikkeld, een manier om met een laserbundel de doorbuiging van een vliegtuigvleugel te meten, maar ook systemen voor microbetalingen. Chess is gevestigd in Haarlem en heeft ongeveer honderdvijftig medewerkers.

In 2006 deed het bedrijf ook al eens mee aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. "Dat is ons goed bevallen," zegt Chess-onderzoeker Bert Bos, "vandaar dat we graag weer eens wilden meedoen. In 2006 ging het om de betrouwbaarheid van een draadloos sensornetwerk dat een bosbrand detecteert. Dit keer wilden we graag weten hoe een draadloos sensornetwerk zo goed mogelijk kan communiceren bij een zo laag mogelijk energieverbruik."

## Radiocommunicatie

Een enkele draadloze sensor is klein, goedkoop en energiezuinig. Zijn processorkracht en geheugen zijn beperkt. In een netwerk communiceren de sensoren met elkaar op een en dezelfde radiofrequentie. Elke andere sensor die binnen het radiobereik ligt, kan het signaal van de zender ontvangen. Maar hoeveel ontvangende burens dat zijn, hangt sterk af van de omstandigheden, zoals obstakels onderweg of de hoeveelheid vocht in de lucht. Het bereik kan variëren van vijf tot vijftig meter. Het aantal burens dat het signaal van een zender ontvangt kan bovendien van moment tot moment variëren. Verder is het probleem

asymmetrisch: dat sensor B een bericht van sensor A kan ontvangen, betekent niet automatisch dat sensor A ook een bericht van sensor B kan ontvangen. Wanneer twee of meer sensoren precies tegelijk zenden, dan storen ze elkaar en horen de andere betrokken sensoren niets. Chess staat daarom voor de opdracht om een zo efficiënt mogelijk communicatieprotocol voor een dynamisch netwerk van sensoren te ontwikkelen.

Om zo lang mogelijk met hun batterijen te doen, doen de sensoren het gros van de tijd niets en communiceren ze alleen maar in een korte tijdspanne. Typisch zijn ze in een paar milliseconden actief en doen ze de rest van de seconde niets. Zo is elke sensor lang inactief, kort actief, lang inactief, enzovoort. "Bij het ontwerpen van een communicatieprotocol", zegt Bos, "ontstaat een spanningsveld tussen het aantal burens dat signaal ontvangt van een sensor en zijn energieverbruik. Hoe meer burens, hoe beter in principe de communicatie verloopt, maar ook hoe meer energie het netwerk verbruikt. Wij willen dus graag het optimum aantal burens weten waarmee een sensor moet communiceren."



Draadloze sensor van Chess

### Random identificatienummers

Albert-Jan Yzelman was een van de tien wiskundigen die in januari 2011 een week lang aan het probleem hebben gewerkt. “Wij hebben ons geconcentreerd op de beantwoording van twee vragen”, vertelt Yzelman. “Allereerst de vraag: ‘Wat is een schatting voor het aantal burens dat een bericht van een bepaalde sensor ontvangt?’ Om die vraag te beantwoorden hebben we vier algoritmen ontwikkeld. De tweede vraag die we hebben onderzocht is: ‘Wat is een schatting voor het aantal sensoren dat zich op een bepaald moment in het netwerk bevindt?’ In toepassingen waarin de sensoren kunnen bewegen — denk aan sensoren op vogels of mensen — varieert het aantal sensoren dat met elkaar kan communiceren in de tijd. Sensoren kunnen immers tijdelijk buiten bereik van alle andere sensoren vallen. Voor de beantwoording van deze vraag hebben we zes algoritmen ontwikkeld.”

Sommige algoritmen hadden een statistisch karakter, andere waren deterministisch. Voor elk algoritme schreven de wiskundigen een pseudocode, die een programmeur in de gewenste programmeertaal omzette. Elk algoritme werd vervolgens geïmplementeerd en getest in een simulatie die verschillende netwerkgroottes (van 100 tot 1000 sensoren) en een verschillend aantal communicatiecycli (30 en 300 stappen) gebruikte.

Uit deze simulaties bleek dat als schatter voor het aantal burens het zogeheten Random ID-algoritme het beste presteerde. Yzelman: “Het idee van dit algoritme is dat elke sensor op een willekeurige manier een identificatienummer tussen 0 en  $L$  kiest.  $L$  is typisch groter dan het aantal burens van een sensor, maar kleiner dan het aantal sensoren in het netwerk.  $L$  mag niet te groot zijn omdat het een sensor dan te veel energie kost om het nummer naar al zijn burens te sturen. Meerdere sensoren in het netwerk zullen dus hetzelfde identificatienummer krijgen. Bij elk bericht dat een sensor verstuurt, wordt het identificatienummer meegestuurd.”

Elke sensor onthoudt een vector met bit-



Sensor voor lokalisatie bij Crime Scene Investigation The Hague (2011)

lengte  $L$  waarvan de componenten 0 of 1 kunnen zijn. In het begin worden alle componenten van deze vector op 0 gezet. De plaats van de component wordt bepaald door het identificatienummer van de verzendende sensor. Een 0 geeft aan dat er nog geen bericht van die sensor is ontvangen; een 1 geeft aan dat er wel al een bericht van die sensor is ontvangen. De ontvangende sensor past deze vector bij elke nieuwe communicatiestap aan.

“Na een bepaald aantal communicatiestappen stabiliseert deze vector”, legt Yzelman uit. “Uit deze gestabiliseerde vector kunnen we dan een schatting van het aantal burens berekenen. Als schatter voor het aantal burens presteert dit algoritme verreweg het beste van de vier die we ontwikkeld en getest hebben.”

### MinTopK

Het best presterende algoritme om het aantal sensoren in het netwerk te bepalen, bleek het zogeheten MinTopK-algoritme. Yzelman: “Het idee is simpel en elegant en het blijkt nog te werken ook. Net als bij het Random ID-algoritme kiest elke sensor weer willekeurig een identificatienummer tussen 0 en  $L$  dat bij elke communicatiestap wordt verzonden. Vervolgens laten we elke sensor de  $K$  grootste identificatienummers die hij ooit heeft ontvangen onthouden.  $K$  kan vrij klein zijn, bijvoorbeeld een getal tussen tien en honderd. Hoe groot dat getal mag zijn, hangt af van hoeveel geheugenruimte een sensor heeft: hoe groter de geheugenruimte, hoe groter  $K$  mag zijn. In plaats van een veel langere lijst met een lengte  $L$  te onthouden, hoeft een sensor nu alleen maar een veel kortere lijst van lengte  $K$  te onthouden.”

De truc is nu dat het kleinste getal van die  $K$  getallen, zeg  $s$ , een goede schatting blijkt te geven voor de netwerk grootte.  $s$  is het minimum van de top- $K$  waarden, vandaar dat het algoritme de naam MinTopK heeft gekregen. Als het interval  $[s, 1]$  — dat dus een lengte  $1 - s$  heeft —  $K$  waarden bevat, dan bevat het hele interval  $[0, 1]$  ongeveer  $K/(1 - s)$  waarden. Yzelman: “Het quotiënt  $K/(1 - s)$  is dan een goede schatter voor het aantal sensoren in het netwerk. Ik denk dat de vraag van Chess is beantwoord wanneer ze het MinTopK-algoritme gebruiken. Het algoritme kan nog wel verbeterd worden, maar ik denk dat het nu al in de praktijk bruikbaar is.”

De wiskundigen pasten het eerder gebruikte Random ID-algoritme een beetje aan om ook een schatting te geven van het aantal sensoren in het netwerk. Yzelman: “Ik denk dat Chess ook dit aangepaste Random ID-



Het 1000-node-experiment: dit experiment toont aan dat je geen 1000 nummers wilt toekennen, of wilt gaan tellen op basis van toegekende nummers.

algoritme kan gebruiken. Nadeel is dat het niet stabiel is: wanneer je meer stappen gebruikt, wordt de fout groter. Maar misschien valt die stabiliteit nog wel te verbeteren.”

### Stap naar de toepassing

“De wiskundigen hebben verrassende oplossingsmethoden gepresenteerd, waar ik zelf niet op was gekomen”, vertelt Chess-onderzoeker Bert Bos over de resultaten van de studiegroep. “Voor mij springen twee inzichten er uit. Allereerst het inzicht dat het handig is om alleen maar tijdelijk een random identiteitsnummer toe te kennen aan de sensoren. Identiteiten van sensoren hoeven dan niet eens uniek te zijn. Deze methode geeft voor ons een aardige maat voor het optimale aantal burens. De nauwkeurigheid van de uitkomsten is misschien nog niet zo hoog, maar ons gaat het vooral om de orde grootte. En die klopt. Het tweede inzicht dat voor ons nuttig is, is dat we via een stochastische methode kunnen meten hoe lang een bericht onderweg is.”

Chess zoekt naar eenvoudige, effectieve algoritmen die op een goedkope manier een goede oplossing kunnen berekenen, zonder dat dat automatisch de optimale oplossing is. Het MinTopK-algoritme, dat volgens Yzelman het beste presteert, vindt Bos lastiger te begrijpen. Of hij daar verder mee gaat, weet hij nog niet. Met de andere twee algoritmen gaat hij in ieder geval wel verder: “Het komende jaar gaan we ze verder testen, zowel met simulaties als in echte experimenten met een sensornetwerk. Wij hopen dat we ze daarna kunnen implementeren in onze draadloze sensoren.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2011, van 24–28 januari op de VU in Amsterdam. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website [www.few.vu.nl/~swi2011](http://www.few.vu.nl/~swi2011).

Eric Cornet

Ambachtstraat 13

3512 ER Utrecht

e.e.cornet@students.uu.nl

Onderwijs Mastermath-cursus Didactiek

# Met de trein van Utrecht naar Ankara: over oneindig gesproken

In de context van een Mastermath-cursus Didactiek lukte het studenten Eric Cornet en Rianne Maes (beiden UU) om een wetenschappelijk artikel te mogen presenteren bij de Psychology of Mathematics Education (PME)-conferentie in Ankara, juli 2011. Rianne Maes was verhinderd. Dit artikel is een persoonlijke reflectie van Eric Cornet.

Stel je voor, je speelt het volgende gedachte-spel: links van je ligt een berg pingpongbal-len, het is een vrij grote berg, namelijk oneindig groot. Alle pingpongballen zijn netjes geordend en genummerd, 1, 2, 3, ... Voor je staat een ton, het is een flinke ton, alle ballen passen erin. Recht naast je ligt niets. Het spel duurt precies één minuut. In de eerste helft van de tijd, dus in 30 seconden, doe je het volgende: je pakt links van je de ballen nummer 1 tot en met 10, legt die voor je in de ton en je pakt bal nummer 1 er weer uit en legt deze rechts van je neer. In de helft van de resterende tijd, dus in 15 seconden, pak je de ballen nummer 11 tot en met 20. Je stopt ze in de ton en je pakt bal nummer 2 weer uit de ton en legt deze rechts naast je neer. Zo ga je door. In de helft van de resterende tijd pak je de ballen nummer 21 tot en met 30, legt ze in de ton en je pakt bal nummer 3 er weer uit. En zo ga je verder. De vraag is nu: Na die ene minuut, hoeveel ballen zitten er in de ton?

## De fascinatie voor oneindig

Oneindig is een onderwerp dat me altijd gefascineerd heeft. Toen we vorig jaar bij de Mastermath-cursus Didactiek in groepen van twee een onderzoek onder middelbare scholieren moesten doen, was de richting snel bepaald. Iets met oneindig. Na het lezen van het artikel 'Paradox as a lens for exploring notions of infinity' van Mamolo en Zazkis [4] kwamen we op het idee om hun onderzoek te volgen en het pingpongbalvraagstuk (PPBV) te gebruiken. Het werd uiteindelijk: Welke problemen ondervinden middelbare scholieren bij het oplossen van problemen over oneindig? En hoe pakken ze het PPBV aan als ze weten wat kardinaliteiten zijn?

## De treinreis naar Ankara

We moesten een artikel schrijven dat aan alle eisen van de Psychology of Mathematics Education (PME)-conferentie voldeed. Dit heb ik samen met mijn studiegenoot Rianne Maes gedaan. Onze docenten, Nellie Verhoef (UT) en Pauline Vos (UvA), raadden ons aan om het artikel als Research Report (RR) in te sturen. Twee maanden later kregen we een e-mail van de PME-organisatie: *accepted!* Dat betekent dat we ons onderzoek mochten presenteren op de PME-conferentie die dit jaar in Ankara werd gehouden. Hier zaten natuurlijk kosten aan verbonden die we voor een deel probeerden te dekken met subsidie van het A.F. Monna Fonds en het U-fonds. Studiegenoot Rianne kon uiteindelijk helaas niet meegaan. De reis naar Ankara was erg leuk. Een vriend wilde met mij van de gelegenheid gebruikmaken om meer van Turkije te zien. Om die reden besloten we om met de trein van Utrecht naar Ankara te gaan. Vanwege een tentamen moest de heenreis in één ruk. Van Utrecht naar Ankara in 63 uur, met twee keer een klein sprintje om over te stappen. In Ankara was het nog een heel gedoe om de locatie te vinden, maar met veel geduld kwamen we er. De presentatie ging goed. Er waren naderhand veel vragen en de vragen waren kritisch. Dat gaf aan dat er goed geluisterd werd en dat men geïnteresseerd was. Een erg leuke ervaring!

## Theorie

Voor het artikel hebben we ons eerst verdiept in de bestaande theorieën en gekeken welke we konden gebruiken als fundament voor ons onderzoek. Volgens Sfard [5] zijn er twee manieren waarop mensen over een wiskun-

dig begrip kunnen denken. Je kan het zien als een proces, of je kan het zien als een object. Het begrip oneindig zien als een proces betekent bijvoorbeeld dat je oneindig ziet als eindeloos, 'voor altijd doorgaand'. Naarmate een onderwerp beter bestudeerd en begrepen wordt, zal het begrip meer als een object gezien worden. Volgens Hazzan [3] reduceren mensen de mate van abstractie bij de introductie van een nieuw wiskundig begrip. Omdat de eigenschappen van oneindige verzamelingen nogal wat verschillen van de eindige verzamelingen zorgt dit voor problemen. Daarnaast en daardoor zijn volgens Fischbein, Tirosh en Hess [2] de eigenschappen van oneindige verzamelingen contra-intuïtief.

Het moest een verkennend onderzoek worden, er werd ons op het hart gedrukt dat we het beperkt moesten houden. Dat is ons gelukt. We hadden een 4-vwo-klas wiskunde D tot onze beschikking. De klas bestond uit vijf leerlingen en de middag van het onderzoek waren er ook nog twee ziek. We wilden de leerlingen eerst een aantal opdrachten over verzamelingen geven. Het PPBV leek ons dan een handig gereedschap om de bovenstaande theorieën te testen.

We hebben de leerlingen eerst opdrachten over verzamelingenleer laten maken. Hierin werd het begrip kardinaliteit uitgelegd. Daarna werd het PPBV voorgelegd. Alle opdrachten moesten eerst individueel en schriftelijk gemaakt worden. Daarna werden ze in een groepsdiscussie besproken. Dat was erg leuk om te doen. De leerlingen waren enthousiast en ze konden hun redeneringen goed onderling delen. De discussie werd opgenomen en tijdens het analyseren werd al snel duidelijk waarom we het 'beperkt' moesten houden.

## En?

De resultaten van de opdracht over verzamelingenleer waren zoals verwacht. De leerlingen bleven 'oneindig' vooral als een proces

|    | Eerste antwoord        |                                |                | Antwoord na discussie  |                                |                |
|----|------------------------|--------------------------------|----------------|------------------------|--------------------------------|----------------|
|    | De minuut eindigt niet | Oneindig veel ballen in de ton | De ton is leeg | De minuut eindigt niet | Oneindig veel ballen in de ton | De ton is leeg |
| L1 | X                      |                                |                |                        | X                              |                |
| L2 | X                      |                                |                |                        | X                              |                |
| L3 | X                      | X                              |                |                        | X                              |                |

Tabel 1 De antwoorden op het PPBV

zien en volgden vaak hun intuïtie van een lager abstractieniveau. Ze hadden moeite met het accepteren dat voor oneindige verzamelingen een deelverzameling even groot kan zijn als de gehele verzameling. Op de vraag of de verzamelingen  $E$ , van positieve gehele getallen, en de natuurlijke getallen  $N$  even groot zijn, antwoordde een van de leerlingen:

L3: “Laat elk getal corresponderen met een dier. Alle elementen die in  $E$  voorkomen zitten ook in  $N$ . Stel 3 is een geit, dan zit er geen geit in  $E$ , maar alle dieren in  $E$  zitten in  $N$ , dus  $N$  is groter.”

Daarnaast hadden ze weinig vertrouwen in een een-op-een correspondentie.

L2: “Als het bestaan van een een-op-een correspondentie de definitie is voor de gelijkheid van de kardinaliteit van twee verzamelingen, dan is het waar [er zijn even veel positieve even getallen als natuurlijke getallen].”

Het lukte L2 wel om een goede een-op-een correspondentie te maken, maar de conclusie dat de twee verzamelingen gelijk zijn was te contra-intuïtief en werd niet gemaakt. Hetzelfde geldt voor L1.

L1: “Je kan een correspondentie maken, maar B heeft altijd een element meer.”

Tijdens de groepsdiscussie kwam een student met een reactie die het contra-intuïtieve van Fischbein et al. [2] mooi aangeeft:

L2: “Ik denk niet dat je me een definitie van oneindig kunt geven die ik kan accepteren.”

De leerlingen hadden er moeite mee dat het PPBV een gedachtespel was. In overeenstemming met Sfard zagen ze het telkens delen van de tijd als een proces dat ‘eindeloos’ zou doorgaan. Bij alle drie was hun individuele antwoord dan ook dat de minuut niet zou eindigen.

L1: “Voor degene die de ballen pakt zal de

minuut nooit eindigen, omdat hij de actie eindeloos blijft herhalen.”

L3: “De minuut eindigt niet. Je kan ook zeggen dat er oneindig veel ballen in de ton gaan en er ook oneindig veel weer uit gaan. Maar er gaan elke keer meer ballen in dan eruit, dus vlak bij de 60 seconden zullen er oneindig veel ballen in de ton zitten.”

Het antwoord van L3 is tegenstrijdig, op elk moment vóór de 60 seconden zijn er immers maar eindig veel handelingen verricht. Maar je ziet het goede antwoord verborgen zitten.

Tijdens de groepsdiscussie, en na het vertellen van een variant op een paradox van Zeno, accepteerde de leerlingen dat het om een gedachte-experiment ging en dat de minuut kon eindigen. Ze kwamen tot de conclusie dat er oneindig veel ballen in de ton moesten zitten. Bij elke handeling gingen er immers negen keer meer ballen in dan uit de ton en “negentien keer oneindig is oneindig”. Op de vraag of ze, aangezien er genoeg ballen in de ton zitten, een getal konden noemen van een bal in de ton reageerde L3.

L3: “Oh nee, er zitten geen ballen meer in de ton...”

### Wat betekent dit?

De leerlingen L1 en L2 hadden vooral moeite met de contra-intuïtieve eigenschappen van oneindig. Door reduceren van het abstractieniveau naar eigenschappen van eindige verzamelingen was het moeilijk om de opdrachten goed te beantwoorden. L3 wist de meeste vragen goed te beantwoorden, maar bleef oneindig toch ook vooral als een proces zien, en niet als een object.

Voor het PPBV hadden we vooraf drie mogelijke antwoorden bedacht.

1. De minuut eindigt niet.
2. Je stopt elke keer meer ballen in de ton dan

dan dat je eruit haalt, dus er zitten uiteindelijk oneindig veel ballen in de ton.

3. Elke bal die je erin stopt haal je er ook weer uit, dus de ton is leeg.

We hebben de antwoorden van de leerlingen in een schema gezet, zie Tabel 1. In de tweede rij staan de drie mogelijke antwoorden. In de tweede kolom staan de individuele antwoorden van de leerlingen en in de derde kolom staan de antwoorden na de groepsdiscussie.

Dat de leerlingen denken dat de minuut niet eindigt, geeft aan dat ze oneindig vooral als ‘een proces dat nooit ophoudt’ zien. Na de groepsdiscussie reduceren ze de mate van abstractie: er gaan immers bij elke handeling meer ballen in de ton dan eruit. Het valt op dat geen van de leerlingen het PPBV oplost.

### Opvallend

Het was opmerkelijk dat geen van de leerlingen de geleerde stof gebruikte bij het beantwoorden van het PPBV. Dit gebeurde in het onderzoek van Mamolo en Zazkis [4] wel. Een verklaring hiervoor kan zijn dat onze leerlingen jonger waren dan in het voorgaande onderzoek. Wat verder opvalt is dat het in beide onderzoeken geen van de studenten is gelukt om het vraagstuk op te lossen. Dit geeft reden om te twifelen aan de doeltreffendheid van het vraagstuk bij het bestuderen van het begrip oneindig. Het is redelijk om te concluderen dat het PPBV te contra-intuïtief is voor deze middelbare scholieren en andere mensen die geen wiskundige scholing gehad hebben op universitair niveau. Deze groep mensen heeft nog te weinig wiskundig zelfvertrouwen om bij het wiskundig redeneren meer op hun redenering te vertrouwen dan op hun intuïtie.

### Nawoord

Met dank aan het A.F. Monna Fonds en het Utrechts Universiteitsfonds voor de verleende subsidie. Het Utrechts Universiteitsfonds — opgericht in 1886 — is met 10.000 begunstigers de oudste en grootste begunstigersorganisatie van alumni, (oud-)medewerkers en studenten in Utrecht. Dankzij hun bijdragen kan het Utrechts Universiteitsfonds al meer dan honderd jaar onder andere wetenschappelijke, culturele en sportieve activiteiten van Utrechtse studentenverenigingen ondersteunen. Wilt u hier in de toekomst ook aan bijdragen? Zie [www.ufonds.uu.nl](http://www.ufonds.uu.nl).

### Referenties

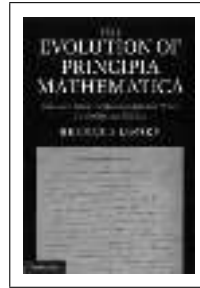
- 1 E. Cornet, R. Maes, N.C. Verhoef en H.P. Hendrikse, High School Students’ Problems With Infinity, 2011, Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 161–168, Turkey: University of Ankara.
- 2 E. Fischbein, D. Tirosh en P. Hess, The intuition of infinity, 1979, *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 3–40.
- 3 O. Hazzan, Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts, 1999, *Educational Studies in Mathematics*, 40, pp. 71–90.
- 4 A. Mamolo en R. Zazkis, Paradox as a lens for exploring notions of infinity, 2008, Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 353–360, The Netherlands: Utrecht University.
- 5 A. Sfard, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, 1991, *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1–36.

# Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - HG 8.38  
Faculteit Wiskunde & Informatica  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513  
5600 MB Eindhoven  
reviews@nieuwarchief.nl  
www.win.tue.nl/wgreview



Bernard Linsky

**The Evolution of Principia Mathematica**

**Bertrand Russell's Manuscripts and Notes for the Second Edition**

Cambridge University Press, 2011

407 p., prijs \$150.00

ISBN 9781107003279

Bertrand Russell (1872–1970) is één van de grondleggers van de moderne analytische filosofie, die in de eerste helft van de 20ste eeuw toonaangevend was. Wiskundigen zullen hem vooral kennen als auteur, samen met Alfred North Whitehead, van de monumentale *Principia Mathematica* (drie delen, 1910–1913), een werk dat aan de basis stond van de ontwikkeling van de moderne logica en dus ook van computers en informatica. De tweede editie werd in de periode 1925–1927 uitgebracht, eveneens in drie delen. Behalve een herdruk van het origineel bevatte deze uitgave een nieuwe inleiding, drie aanhangsels waarvoor Russell alléén tekende, en een lijst met definities. Hoewel het nieuwe materiaal slechts een bescheiden aantal bladzijden besloeg (namelijk 66), bevatte het voorstellen voor radicale wijzigingen in de opbouw van de *Principia Mathematica*, waarvan sommige noopten tot niets minder dan een fundamentele herbezinning op de aard van de logica.

Eind jaren '60 verwierf McMaster University in Canada Russells aantekeningen, brieven en bibliotheek. Hierin bevond zich onder meer een manuscript getiteld *The Hierarchy of Propositions and Functions*, waarvan de verschillende onderdelen blijken te zijn hergebruikt voor de opstelling van bovengenoemde nieuwe inleiding en aanhangsels voor de tweede editie. Bernard Linsky, verbonden aan de universiteit van Alberta, heeft ons een goede dienst bewezen door deze bron in druk te bezorgen, de ermee samenhangende wijzigingen in de opbouw van *Principia Mathematica* na te gaan en deze zeer nauwgezet te analyseren tegen de achtergrond van de ontwikkeling van de logica in de periode 1910–1925.

*Principia Mathematica* geeft uitvoering aan het programma van het logicisme, de uiteindelijke reductie van de gehele wiskunde tot logica. Men kan dit zien als een uitbreiding van de 19de-eeuwse tendens de gehele wiskunde op de aritmetica van de natuurlijke getallen te baseren. Het was in het bijzonder Gottlob Frege die vervolgens poogde de aritmetica van de natuurlijke getallen op zuivere logica te funderen. Het verhaal is bekend: Russell vond een inconsistentie in Freges bouwwerk, de zogenaamde Russell-paradox of antinomie van de irreflexieve klassen. Om deze antinomie te omzeilen ontwikkelden Russell en Whitehead een nieuw logisch systeem, de 'vertakte typentheorie' ('ramified theory of types'). Deze berust op de algemene aanname dat alle predicaten in een oneindige hiërarchie kunnen worden geplaatst (predicaten van een individueel object, predicaten van predicaten van een individueel object, enzovoort). Om niet in de paradox te vervallen, moeten alle beschouwde predicaten slechts tot één laag in de hiërarchie, dus tot precies één type, behoren. Predicaten worden in *Principia Mathematica* niet 'extensioneel' opgevat (niet als begrippen met een klasse als 'extensie', zoals Frege had gedaan), maar 'intensioneel', als 'propositiefuncties'. Verzamelingen worden door Russell en Whitehead opgevat — althans in de eerste editie — als slechts een 'manier van spreken'; alle symbolen voor verzamelingen worden behandeld als 'tekens die niets betekenen'.

De radicale wijziging waarop hierboven werd gedoeld, en die een diepe herbezinning op de eigenlijke aard van de logica inhield, betrof

de overgang van de intensionale logica van de vertakte typentheorie in de eerste editie, naar de zogenaamde ‘simple theory of types’, ontwikkeld in het bijzonder door Chwistek en Ramsey, in de tweede. In tegenspraak met de aanpak in de eerste editie, was deze gemoediceerde typentheorie geformuleerd in een extensionale logica. De tweede editie van *Principia Mathematica* is vrij algemeen beschouwd als achterhaald, als een vergeefse poging van Russell om aan te sluiten bij een ontwikkeling die hem inmiddels had ingehaald en voorbijgestreefd. Om die reden heeft het werk niet de aandacht gekregen die het verdiende, laat staan dat er diepgaand onderzoek naar is verricht. Linsky heeft in dit manco willen voorzien en is zeer zeker geslaagd in zijn opzet ons ervan te overtuigen dat ook de tweede editie van een verbluffende diepgang getuigt en alleszins als een serieuze bijdrage aan de logica moet worden beschouwd. Als zodanig geeft dit boek een waardevolle inkijk in het denken van een van de invloedrijkste zestiende-eeuwse filosofen, alsmede in een veelbewogen en belangrijke historische episode in de ontwikkeling van de logica en de analytische filosofie.

Eduard Glas



Amir D. Aczel  
**A Strange Wilderness**  
**The Lives of the Great Mathematicians**

Sterling, 2011  
 xix + 284 p., prijs £15.99  
 ISBN 9781402785849

Amir Aczel, a prolific author of popular books on mathematics and science in general, came up with a new book devoted to the lives of mathematicians. On the whole the book is highly informative, entertaining and produced with great care. Several illustrations, interesting photos, and various aesthetically chosen fonts and font sizes make it an attractive volume.

Aczel occasionally writes with flair and panache. Regrettably, the book is very uneven. The fifteen page long account of Cantor's life and his conflicts with Kronecker is fascinating, and so is the chapter on Grothendieck. However, some other parts of the books read as if they came from the pen of a secondary school pupil forced to write a homework on a boring topic. The two pages on the Chinese mathematician Li Zhi are uninteresting and just boring. We finally learn that “Li Zhi [...] studied equations as high as sixth order [...] obtained when one relationship about triangles involving an unknown quantity is inserted into another”. Those interested to understand what equation Li Zhi actually studied, and why, might turn to Chapter 5 of *History of Mathematics, A Supplement* by Craig Smoryński, Springer, 2008.

Also, some details are simply unneeded. Why should we care to know that the wife of the eldest son of Tartaglia was called Brandonia di Seroni?

Aczel begins the book by mentioning some lively lecturers during his studies of mathematics at Berkeley. One of them, John Kelley, used to come to the lectures with two dogs, non-stop smoking a pipe. Kelley is given as an example of a brilliant and eccentric mathematician, whose manners demonstrate that mathematicians can be as interesting and unusual as artists. The book is indeed full of known and less known anecdotes and accounts of unusual stories concerning mathematicians, but it is in this sense strangely incomplete. If the author's intention was to highlight lives of some more unusual mathematicians,

then one would have expected some references to twentieth century mathematicians, in particular to: Kurt Gödel, who starved himself to death, suspecting that one was trying to poison him (and thus succumbing to a form of the liar paradox that was at the base of his incompleteness theorems), see *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel* by John Dawson, AK Peters, 1996; Alfred Tarski, a notorious womanizer and user of drugs, who during his long term association with the University of Berkeley organized well-attended parties during which his homemade vodka was lavishly served, see *Alfred Tarski: Life and Logic* by Anita Burdman Feferman and Solomon Feferman, Cambridge University Press, 2004; The brothers Chudnovsky, who in their quest to compute  $\pi$  with an ever bigger precision developed an algorithm and ran it on a supercomputer built in their small apartment in New York, see ‘The Mountains of Pi’ by Richard Preston, *The New Yorker*, March 2, 1992; Jean van Heijenoort, a secretary and bodyguard of Trotsky, mainly known for the standard source book on the history of logic in the 19th and 20th century, who was killed by his fourth and fifth wife (the same person), see *From Trotsky to Gödel* by Anita Burdman Feferman, AK Peters, 2000. Not to mention Paul Erdős, John Forbes Nash and Grigori Perelman.

If in turn the intention of the book was to discuss lives of the towering figures of mathematics, then several *dramatis personae* are missing, for instance Blaise Pascal (only briefly mentioned in the context of the work of his predecessors), Henri Lebesgue (only briefly mentioned once while discussing Grothendieck), Stefan Banach and John von Neumann, to name a few.

Also, the space devoted to individual mathematicians reflects neither their relative importance nor their ‘degree’ of eccentricity. For example, Thales is generously accorded five pages, while Archimedes only two.

For the sake of completeness let me mention a few slips: the rational numbers are defined three times, on pages 15, 18 and 35, Hilbert's list of problems consisted of twenty-three and not of ten problems, Lebesgue's name does not appear in the index.

Krzysztof R. Apt



Chris A.M. Peters, Joseph H.M. Steenbrink  
**Mixed Hodge Structures**

*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Vol. 52*  
 Springer, 2008  
 xiv + 470 p., prijs €139,05  
 ISBN 9783540770152

De ontstaansgeschiedenis van de Hodge-theorie illustreert mooi hoe de onderlinge verwevenheid van wiskundige disciplines profijtelijk kan zijn voor één daarvan. Voor de cohomologie van gladde complex-algebraïsche variëteiten zou dat kunnen beginnen met de stelling van Hodge–De Rham, die tot stand kwam door een opmerkelijke interactie met de functionaalanalyse. Deze stelling zegt dat de De Rhamcohomologie van een georiënteerde compacte Riemannse variëteit eenduidig door de harmonische differentiaalvormen kan worden voorgesteld. Dit fundamentele resultaat, waaraan ook Cartan *père*, De Rham, Kodaira en Weyl hebben bijgedragen, is vooral toe te schrijven aan Hodge en is te vinden in zijn boek *The Theory and Applications of Harmonic Integrals* (1941), een werk dat door Weyl tijdens het ICM 1954 te Amsterdam werd gekarakteriseerd als ‘one of the great landmarks in the history of science in the present century’. Hij was het ook die wat

later, rond 1948, liet zien dat als we ons beperken tot gladde complex-algebraïsche variëteiten  $M$  die voorzien kunnen worden van een speciaal type Riemannse metriek, een zogenaamde *Kählermetriek* — en onze landgenoot Mannoury had al opgemerkt dat iedere gladde complex-projectieve variëteit er zo een heeft — de genoemde stelling tot het inzicht leidt dat de complexwaardige cohomologie  $H^*(M; \mathbb{C})$  heel wat extra structuur heeft, waaronder een decompositie in zekere deelruimten. Het door hem gevonden geheel van eigenschappen, tegenwoordig geabstraheerd door een begrip *Hodgestructuur*, is afhankelijk van de complexe structuur van  $M$ , maar niet van de Kählermetriek. Deze invariant van het isomorfietype van deze complexe structuur bleek dikwijls een zeer getrouwe afspiegeling daarvan te leveren in de lineaire algebra. Het leidde ook tot een aantal bijzondere eigenschappen van het cupproduct op de cohomologie van zo'n variëteit, met de 'Moeilijke Lefschetzstelling' als het meest opmerkelijke voorbeeld. Zo vond Hodge, anders dan Lefschetz oorspronkelijk gemeend had, dat harde analyse benodigd was om een diep resultaat over de cohomologie van gladde complex-projectieve variëteiten af te leiden.

Een nieuwe wending nam dit twee decennia later, maar nu vanuit een heel andere hoek, want ditmaal werd de complex-algebraïsche meetkunde de weg gewezen door zijn tegenhanger in positieve karakteristiek. Rond 1968 merkten Deligne en Grothendieck op dat het door Grothendieck opgetrokken imposante bouwwerk dat tot een bewijs van de Weilvermoedens moest gaan leiden, voorspelde dat de rationale cohomologie van *iedere* complex-algebraïsche variëteit, singulier of niet, compact of niet, op natuurlijke wijze voorzien is van een nietdalende rij van deelruimten (die voor het gladde compacte geval flauw is) en die zo functorieel is als men maar zou kunnen wensen. Deligne bewees kort daarna de veel sterkere eigenschap dat deze cohomologie in feite voorzien is van wat hij noemde een *gemengde Hodgestructuur*, een geraffineerde, en allermindst triviale generalisatie van het begrip Hodgestructuur, die eveneens de lineaire algebra als zijn tehuis heeft. (Nog weer even later bewees Deligne het enig overblijvende Weilvermoeden en gebruikte dat om een nieuw bewijs van de Moeilijke Lefschetzstelling voor gladde complex-projectieve variëteiten te geven langs de weg van positieve karakteristiek.)

De invloed die dit werk heeft gehad en nog steeds heeft is moeilijk te overschatten. Het heeft tal van toepassingen gevonden en is met veel succes verder ontwikkeld. In het bijzonder is gebleken dat de Hodge-theorie ons veel heeft te zeggen over ontandingen van variëteiten en de lokale variant daarop, die doorgaans vanuit het omgekeerde perspectief beschouwd wordt, te weten als deformaties van de daarbij optredende singulariteiten. Hierbij heeft een der auteurs (Steenbrink) een centrale rol gespeeld. Vermeldenswaard is dat ook de theorie van geïtereerde integralen hier zijn natuurlijke interpretatie heeft gevonden als de gemengde Hodge-theorie van de fundamentealgroep (of nog algemener, van de lussenruimte) van een complex-algebraïsche variëteit.

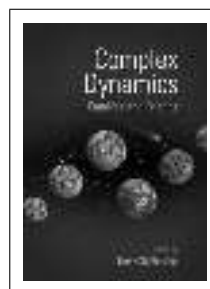
Dit is zeker niet het eerste boek over de Hodge-theorie, maar het onderscheidt zich van zijn voorgangers door zijn veelomvattendheid. Het brengt een schat aan materiaal bijeen dat voordien verspreid was over vele artikelen en doet dat op een aansprekende en coherente manier. Bewijzen worden meestal volledig gegeven en zijn soms eenvoudiger dan in de literatuur, en in de overige gevallen worden precieze referenties verschaft. De beschrijving en het voorkomen van de Hodge-theorie in allerhande situaties, waaronder de hierboven genoemde, wordt helder uiteengezet.

Een onderwerp krijgt een aparte behandeling en dat is eigenlijk het uiteindelijke concept in dit gebied, te weten een 'gederiveerde' versie

van een gemengde Hodgestructuur: een afgeleide categorie van abelse schoven met veel extra's op een complex-algebraïsche variëteit. Deze zogenaamde categorie van de *gemengde Hodge-modulen* werd ingevoerd door M. Saito en is zo gemaakt dat die stabiel is onder bijna alle denkbare operaties. Voor een enkel punt reproduceert dit de categorie van gemengde Hodgestructuren. Een volledige behandeling hiervan vereist diepgaande kennis van onder meer de theorie van  $\mathcal{D}$ -modulen en perverse schoven, en de auteurs hebben er dan ook verstandig aan gedaan om hier voor een axiomatische behandeling te kiezen. Een drietal uitvoerige appendices verzamelen de benodigde voorkennis (en geven de lezer steun) op het gebied van de homologische algebra, de schoventheorie en de topologie.

De oorsprong van dit boek is een handschrift van de tweede auteur (daterend uit 1983 of daaromtrent, 'tekstverwerken' was ons onderzoekers toen onbekend), vervaardigd ten behoeve van het Intercity Seminarium Singulariteiten. Veel landgenoten, waaronder uw recensent, hebben hier indertijd veel van geleerd. In de kwart eeuw die daarop volgde is dit in samenwerking met de eerste auteur geëvolueerd tot een waar *magnum opus*. Het is daardoor weliswaar niet meer geschikt voor een eerste kennismaking met deze materie, maar voor iemand die al wel enigszins aan dit onderwerp is blootgesteld, en daartoe reken ik iedere algebraïsch meetkundige, is dit een naslagwerk om op grijpbare afstand in de boekenkast te hebben. Want de Hodge-theorie doordringt de complex-algebraïsche meetkunde overal en is nog lang niet uitontwikkeld.

Eduard Looijenga



Dierk Schleicher (ed.)

**Complex Dynamics  
Families and Friends**

A.K. Peters/CRC Press, 2009

663 p., £45.99

ISBN 9781568814506

One of the areas in mathematics which has attracted the attention of expert and lay-person alike is 'complex dynamics', in particular the study of iterations of a quadratic map acting on the complex plane. Mathematicians are drawn to this field because it is mathematically extremely interesting, for example because it has connections with many areas in mathematics, while it has attracted lay-interest because of the stunning computer pictures that come out of these studies. Many school children became intrigued by amazingly rich but highly structured fractal images, often related to the so-called Mandelbrot and Julia sets, and decided to pursue mathematics as a result.

The book is to commemorate the 60th birthday of one of the key players in the subject, John Hamal Hubbard. The subject area was initiated in the 1920's by two French mathematicians, Julia and Fatou (who were fierce competitors). The main tool at their disposal was the theorem of Montel which states that if you take a sequence of holomorphic functions defined on a domain in the complex plane and which all omit three values in the Riemann sphere, then this sequence is normal (i.e. equicontinuous). Using this, Julia and Fatou were able to show that polynomial maps on the complex plane (and more generally holomorphic maps on the Riemann sphere) have infinitely many repelling periodic points, whose closure — now called the Julia set — has many beautiful properties. Taking the special case of quadratic maps  $z \mapsto z^2 + c$ , the set of parameters  $c$  for which the Julia set is connected

is now called the Mandelbrot set. In fact, others drew computer images of this set before Mandelbrot did, but their contribution is largely forgotten. The recent revival of the subject began in the 1980's with the work of Douady, Hubbard and Sullivan. Douady and Hubbard proved a large number of remarkable properties about the Julia and Mandelbrot set, such as that the Mandelbrot set is a full set (the complement is connected) and that the Julia set is locally connected for many parameters. One of the tools that caused the revival of 'complex dynamics' in the 1980's is that of quasiconformal mappings, and more in particular the Ahlfors–Bers Theorem. This tool gives a way of deforming a polynomial in certain cases. It formed the main ingredient of Sullivan's celebrated wandering domain theorem. Many of Douady and Hubbard's results also rely on this tool.

The current volume is a collection of seventeen research articles, all of a very high standard. Some of the articles in this volume were folklore manuscripts, as for example the opening chapter by Thurston which also benefited from careful editing, and chapter 7 by Shishikura. However, most articles report results which were obtained recently. The volume includes contributions on polynomials maps, but also on rational maps and polynomial maps in complex dimension two.

The book is definitely aimed at the expert. However, the introduction by Schleicher with some interesting photographs and the foreword by Yoccoz both give insight into the human side of Hubbard. The quality of the editing is superb, making this volume an absolute pleasure to read.

Sebastian van Strien



Marjolein Kool, Ed de Moor  
**Rekenen is leuker dan/als je denkt**

Bert Bakker, 2009  
304 p., prijs €19,95  
ISBN 9789035134331

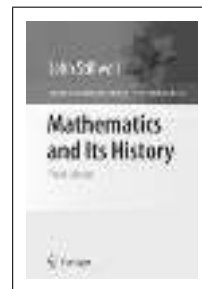
In het 'Woord vooraf' wordt als doelgroep voor dit boek aangegeven: ouders, leraren en leraren in opleiding, beleidsmakers, politici, journalisten, liefhebbers van rekenen en zij die dat willen worden, nogal veelomvattend dus. Verder wordt door de auteurs gesteld dat dit boek geen leerboek, geen didactiekboek, geen puzzelboek, geen historisch boek is, maar dat al deze aspecten wel in de verschillende hoofdstukken aan bod komen. Het boek bestaat uit een uitvoerige inleiding, en vervolgens 47 korte hoofdstukken (van 3–7 pagina's). Van deze hoofdstukken is telkens een aantal onder een bepaald thema samengevoegd. Zo staan de eerste drie hoofdstukken bijvoorbeeld onder het thema 'Positiesystemen', daarna staan er vier hoofdstukken onder het kopje 'Getallen', enzovoort. De meeste hoofdstukken eindigen met een vraag of een opgave, en de oplossingen/antwoorden staan achterin. Een voorbeeld van zo'n opgave uit het hoofdstuk 'Nul erachter en komma schuiven': *Mieneke heeft de vermenigvuldiging  $0,184 \times 213,25$  met haar rekenmachine uitgerekend. Bij het overschrijven van het antwoord 39238 is ze vergeten de komma te noteren. Weet u waar de komma moet staan?*

In de meeste hoofdstukjes gaat het over aspecten van het rekenen op zich. Soms gaat het wat verder, zoals in 'Kaal en verhaal', waar een pleidooi voor contextsommen wordt gehouden. En in 'Delen door nul' worden argumenten aangedragen ter rechtvaardiging van de uitdrukking 'delen door nul is flauwekul'. Hier ontstijgt het niveau zeker

dat van de basisschool: op een gegeven moment wordt de hyperbool  $y = 1/x$  er bij betrokken. En ook in 'Oppervlakte meten en berekenen' wordt aan het eind nogal wat verder gegaan dan in verschillende andere hoofdstukken: daar wordt min of meer een bewijs gegeven voor de oppervlakteformule voor de cirkel, uitgaande van de formule voor de omtrek. De hoofdstukken zijn prettig leesbaar geschreven, en vormen steeds een afgerond stukje. In de huidige discussie over het rekenonderwijs is het onvermijdelijk dat ook in dit boek standpunten worden ingenomen. Dat gebeurt dan ook, bijvoorbeeld in 'Kaal en verhaal' en in 'Wie kan nog staartdelen'. Daarin geven de auteurs toch wel vrij duidelijk aan waar zij in de discussie staan. Maar hoewel ik zelf op nogal wat punten met hen van mening verschil, heb ik dat niet als storend ervaren.

Of de hele in het voorwoord genoemde doelgroep bereikt zal worden, betwijfel ik. Het lijkt me toch vooral een boek voor docenten in het basisonderwijs of de eerste jaren van het voortgezet onderwijs. Voor hen zijn er veel aanknopingspunten met de dagelijkse praktijk, en ze kunnen er ideeën uit opdoen om het rekenen af en toe eens op een andere manier aan de orde te stellen.

Bram van Asch



John Stillwell  
**Mathematics and its History (3rd ed.)**

Springer, 2010  
xxii + 660 p., prijs €58,80  
ISBN 9781441960528

Voor deze derde editie heeft de auteur enkele nieuwe hoofdstukken geschreven, diverse hoofdstukken uitgebreid en elk hoofdstuk van een inleiding voorzien. De omvang is daarmee flink toegenomen in vergelijking met de tweede editie. Aan de oorspronkelijke opzet van het boek is echter niets veranderd: Stillwell bespreekt een aantal (toegankelijke) wiskundige thema's in historische context en per onderwerp is van enkele hoofdpersonen een korte biografie opgenomen. In het boek staat dus de wiskunde voorop. Ook de historische context blijft dicht bij de wiskunde; de maatschappelijke context blijft grotendeels buiten beschouwing. Het boek is dan ook geen 'geschiedenis van de wiskunde', en de titel is in die zin goed gekozen.

Nieuw zijn de hoofdstukken over de classificatie van de eindige enkelvoudige groepen en over combinatoriek. Maar ook diverse secties zijn toegevoegd, zoals een sectie over het vermoeden van Poincaré, of aangepast. De auteur bespreekt de diverse onderwerpen vanuit modern perspectief en met moderne notaties. Komt een onderwerp aan bod, dan biedt het boek een snelle toegang tot de wiskundige ontwikkelingen op dat terrein. Het is toegankelijk geschreven en gaat de wiskunde niet uit de weg. Anderzijds kan de auteur natuurlijk niet in kort bestek 'moeilijke' onderwerpen uitdiepen. Je kunt er gemakkelijk materiaal vinden om als historische aanvulling bij diverse wiskunde-colleges te gebruiken. Al is het boek sterk uitgebreid, er blijven nog talloze onderwerpen over die niet aan bod komen, voornamelijk meer specialistische, maar ook onderwerpen uit de kansrekening, statistiek en optimalisering.

Hans Sterk

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan [reviews@nieuwarchief.nl](mailto:reviews@nieuwarchief.nl).



Apostolos Doxiadis, Barry Mazur (eds.)  
**Circles Disturbed**  
**The Interplay of Mathematics and Narrative**

Princeton University Press, 2012  
 ISBN 9780691149042  
[press.princeton.edu/titles/9764.html](http://press.princeton.edu/titles/9764.html)



Jacqueline Stedall  
**The History of Mathematics**  
**A Very Short Introduction**

Oxford University Press, 2012  
 ISBN 9780199599684  
[ukcatalogue.oup.com/product/9780199599684.do](http://ukcatalogue.oup.com/product/9780199599684.do)



Amy N. Langville, Carl D. Meyer  
**Who's #1**  
**The Science of Rating and Ranking**

Princeton University Press, 2012  
 ISBN 9780691154220  
[press.princeton.edu/titles/9661.html](http://press.princeton.edu/titles/9661.html)



Adelchi Azzalini, Bruno Scarpa  
**Data Analysis and Data Mining**  
**An Introduction**

Oxford University Press, 2012  
 ISBN 9780199767106  
[ukcatalogue.oup.com/product/9780199767106.do](http://ukcatalogue.oup.com/product/9780199767106.do)



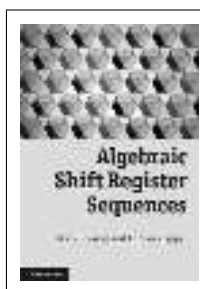
Jayce Getz, Mark Goresky  
**Hilbert Modular Forms with Coefficients in Intersection Homology and Quadratic Base Change**

Springer, 2012  
 ISBN 9783034803502  
[www.springer.com/978-3-0348-0350-2](http://www.springer.com/978-3-0348-0350-2)



Steven G. Krantz  
**A Mathematician Comes of Age**

MAA, 2012  
 ISBN 9780883855782  
[maa-store.hostedbywebstore.com/db/o88385578X](http://maa-store.hostedbywebstore.com/db/o88385578X)



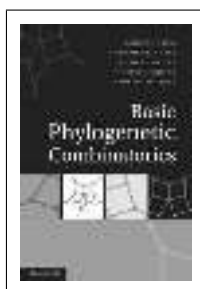
Mark Goresky, Andrew Klapper  
**Algebraic Shift Register Sequences**

Cambridge University Press, 2012  
 ISBN 9781107014992  
[www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6585766](http://www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6585766)



Avinoam Mann  
**How Groups Grow**

Cambridge University Press, 2012  
 ISBN 9781107657502  
[www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6612615](http://www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6612615)



Andreas Dress, Katharina T. Huber, Jacobus Koolen et al.  
**Basic Phylogenetic Combinatorics**

Cambridge University Press, 2012  
 ISBN 9780521768320  
[www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6439332](http://www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6439332)



Ernesto Gironde, Gabino González-Diez  
**Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants**

Cambridge University Press, 2012  
 ISBN 9780521740227  
[www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6550068](http://www.cambridge.org/us/knowledge/isbn/item6550068)

# Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 Euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 Euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is September 1st, 2012.

---

## Problem A (proposed by Simone Di Marino)

Let  $P$  and  $Q$  be distinct points in the plane. Let  $n \geq 2$ . Assume  $n$  distinct lines through  $P$  but not through  $Q$  are given, as well as  $n$  distinct lines through  $Q$  but not through  $P$ . Let  $T$  be a collection of  $2n$  intersection points of these lines. Suppose that the (unoriented) angle between the lines  $RP$  and  $RQ$  is the same for all  $R$  in  $T$ . Show that  $T$  can be partitioned into subsets of at least three elements each, such that every subset consists of the vertices of a regular polygon.

---

## Problem B (proposed by Apoloniusz Tyszką)

Show that there exist an  $n \geq 1$ , a polynomial  $P \in \mathbf{Z}[X, Y_1, \dots, Y_n]$  and an infinite set  $S$  of positive integers such that the set

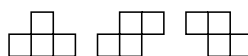
$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{Z}^n : P(k, y_1, \dots, y_n) = 0\}$$

is empty for all  $k < 0$  and has precisely  $k$  elements for all  $k \in S$ .

---

## Problem C (proposed by Gabriele Dalla Torre)

Is it possible to tile a 30 by 30 square grid using the following blocks?




---

**Edition 2011-4** We received solutions from Rik Bos, Pieter de Groen, Alex Heinis, Nicky Hekster and Merlijn Staps.

---

**Problem 2011-4/A** Let  $\Gamma$  be a finite undirected graph (without loops or multiple edges). Denote the set of vertices by  $V$ . Assume that there are a function  $f: V \rightarrow \mathbf{Z}$  and a positive integer  $n$  such that

$$\sum_v \left| \sum_w (f(v) - f(w)) \right| = 2n,$$

where  $v$  runs over all the vertices of  $\Gamma$  and  $w$  over all the neighbours of  $v$ . Show that there are an  $m \leq n$  and a collection of  $m$  edges such that the graph obtained from  $\Gamma$  by removing those edges is not connected.

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Jinbi Jin

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

**Solution** We received solutions from Pieter de Groen, Alex Heinis and Merlijn Staps. The book token goes to Pieter de Groen. The following is based on the solutions of Alex Heinis and Pieter de Groen.

For a vertex  $v \in V$  we write

$$\delta(v) = \sum_w f(v) - f(w),$$

where  $w$  runs over all the neighbours of  $v$ . Denote by  $V_+$  the set of vertices  $v$  with  $\delta(v) \geq 0$ . Since  $\sum_{v \in V} \delta(v) = 0$  and  $\sum_{v \in V} |\delta(v)| = 2n$ , we must have  $\sum_{v \in V_+} \delta(v) = n$ .

Let  $M$  be the maximal value of  $f$ . Consider the partition  $V = A \cup B$  with  $A = f^{-1}(M)$  and  $B = V \setminus A$ . Since  $f$  is not constant, we know that  $A$  and  $B$  are non-empty. Clearly  $A$  is a subset of  $V_+$ .

Let  $E$  be the set of edges connecting  $A$  and  $B$ . Clearly the group obtained by removing  $E$  from  $\Gamma$  is not connect. Moreover, we have

$$|E| = \sum_{e \in E} 1 \leq \sum_{v \in A} \delta(v) \leq \sum_{v \in V_+} \delta(v) = n,$$

where the first inequality follows because for every neighbour  $w$  of a  $v \in A$  we have  $f(v) - f(w) \geq 1$ .

---

**Problem 2011-4/B** Let  $\epsilon$  be a positive real number. Show that there is a finite group  $G$  that is not a 2-group, but in which the proportion of elements that have 2-power order is at least  $1 - \epsilon$ .

**Solution** We received solutions from Nicky Hekster, Alex Heinis and Merlijn Staps. The book token goes to Merlijn Staps. The following is based on the solution of Nicky Hekster.

Let  $n > 0$  be such that  $2^{-n} < \epsilon$ . Let  $p$  be a prime number congruent to 1 modulo  $2^n$ . Let  $C$  be the unique subgroup of  $\mathbf{F}_p^\times$  of order  $2^n$ . Consider the subgroup

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in C, b \in \mathbf{F}_p \right\}$$

of the group of invertible 2 by 2 matrices over  $\mathbf{F}_p$ . Then the order of  $G$  is  $p2^n$ . For every  $a \in C \setminus \{1\}$  and  $b \in \mathbf{F}_p$  the matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is conjugate to the matrix

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and thus has 2-power order. Therefore the proportion of elements of 2-power order is at least  $(2^n - 1)/2^n > 1 - \epsilon$ .

---

**Problem 2011-4/C** Let  $B$  be a commutative ring and  $A$  a subring of  $B$ . Assume that the additive group of  $A$  has finite index in  $B$ . Show that the unit group of  $A$  has finite index in the unit group of  $B$ .

**Solution** We received solutions from Rik Bos, Nicky Hekster and Alex Heinis. The book token goes to Nicky Hekster. All solutions were similar to the following.

# Oplossingen

| Solutions

The set  $I = \{a \in A : aB \subset A\}$  is an ideal in both  $A$  and  $B$ . The kernel  $U$  of the homomorphism  $B^\times \rightarrow (B/I)^\times$  is contained in  $1+I$ , which is contained in  $A$ . Because  $U$  is a multiplicative group, we find  $U \subset A^\times$ , so it suffices to show that  $B^\times/U$  is finite. As this injects into  $(B/I)^\times$ , we are reduced to showing that the latter is finite.

Note that  $B/A$  is a finite group, so the endomorphism ring  $\text{End}(B/A)$  is finite. Note also that the kernel of the ring homomorphism  $B \rightarrow \text{End}(B/A)$  that sends  $b$  to the map  $(x \mapsto bx)$  is exactly  $I$ , so we get an injection  $B/I \rightarrow \text{End}(B/A)$ . It follows that  $B/I$  is finite as well, and therefore so is  $(B/I)^\times$ .

## Correction to Problem 2011-3/A

**Problem 2011-3/A** Fix a point  $P$  in the interior of a face of a regular tetrahedron  $\Delta$ . Show that  $\Delta$  can be partitioned in four congruent convex polyhedra such that  $P$  is a vertex of one of them.

**Correction** We thank Jan C. Smit (Nieuwegein) for kindly notifying us that our solution to this problem was incomplete. Indeed, referring to the published solution, the polyhedra we constructed are convex only in the case that  $P_d$  lies inside the triangle  $Q_{ab}Q_{bc}Q_{ac}$ . Jan Smit also gave the following fix, which is identical to some of the solutions we had received originally. Assume without loss of generality that  $P_d$  lies inside the triangle  $AQ_{ab}Q_{ac}$ . Then the polyhedron  $AP_bP_cP_dQ_{ab}Q_{ac}Q_{ad}Z$  is not convex. The plane that contains  $Q_{ad}$ ,  $Q_{bc}$ ,  $Z$ ,  $P_a$  and  $P_d$  cuts this polyhedron into two parts. One checks that the union of one of these parts and the image of the other part under the rotation  $(AD)(BC)$  is also a convex polyhedron and the images of this union under  $V_4$  give the desired partition.

