

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

Rubrieken | Departments

Nieuws | News

- 234 **KWG: Indagationes Mathematicae** *Henk Broer*

Interview | Interview

- 235 **Jan Karel Lenstra: “Eer is niet meer waard dan een schep kerkhofzand”** *Ionica Smeets*

Recreatieve wiskunde | Recreational maths

- 241 **Symmetrie op de bol en in het vlak** *Jan van de Craats*

Vakantiecursus | Summer course

- 253 **Middeleeuwse islamitische geometrische ornamentiek** *Jan P. Hogendijk*

Maatschappij | Society

- 259 **Lauwerkransen voor wiskundigen** *Bennie Mols*

Boekbespreking | Book review

- 262 **Verzamelingenleer naar alle kanten uitgewaaierd** *Klaas Pieter Hart*

Onderwijs | Education

- 265 **Linear algebra with a didactical focus** *Barbara Jaworski, Stephanie Treffert-Thomas, Thomas Bartsch*

Afscheidsrede | Valedictory lecture

- 276 **Komt onvermoeide arbeid alles te boven?** *Kees Roos*

Nieuws | News

- 286 **PWN: Terugblik en plannen** *Wil Schilders*

- 226 **Colofon**

- 227 **Redactioneel** *Ferdinand Verhulst*

- 228 **Agenda** *Martijn Zaal*

- 230 **Nieuws** *Martijn Zaal*

- 239 **De derde wet** *Ferdinand Verhulst*

- 271 **Het keerpunt van Hans Zantema** *Ionica Smeets*

- 273 **In de verdediging** *Geertje Hek*

- 290 **Boekbesprekingen**

- 295 **Problemen**

Uitgelicht



Een vakantiecursus ‘Symmetrie’ van Jan Hogendijk over islamitische geometrische ornamentiek op pagina 253.



Een conflict waarin Brouwer verzeild raakte, wordt nader beschouwd door Kees Roos in zijn afscheidsrede op pagina 276.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)
Steven Wepster (s.a.wepster@uu.nl)
Martijn Zaal (m.m.zaal@vu.nl)

Bureau redactie

Lætitia Diemer
Harm de Vries

Medewerkers

Gerard Alberts (UvA), Johan Bosman (IEM Essen),
Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL),
Geertje Hek (UvA), Jinbi Jin (UL), Teun Koetsier
(VU), Ronald van Luijk (UL), Derk Pik (JSG Maimonides),
Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL),
Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176
admin@wiskgenoot.nl

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Programmatuur (CONTEX)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)
Druk
Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €80 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €40. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €30 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €90 respectievelijk €105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176
admin@wiskgenoot.nl

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), André Ran (VU, ondervoorzitter), Joke Blom (CWI, secretaris),
Onno van Gaans (UL, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Krüger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	05-03-2012	verstreken
2	04-06-2012	23-01-2012
3	03-09-2012	23-04-2012
4	03-12-2012	23-07-2012

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Flsme

Freudenthal Instituut

Op het omslag

Symmetrische bollen in een symmetrisch vlak. Lees het artikel van Jan van de Craats op pagina 241 over discrete symmetriegroepen van bolpatronen en patronen in het vlak. Nog meer over symmetrie is te lezen in het artikel over islamitische ornamentiek van Jan Hogendijk op pagina 253.

Verbindingen in de wiskunde

Het decembern timer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* maakt goede sier met de wiskunde in de artikelen van Van de Craats en Hogendijk; beiden tonen ze onder meer de rol van meetkundige inspiratie voor kunstvormen. Interessant zijn ook de reflecties van Roos bij zijn afscheid en van Lenstra die zich bij zijn afscheid van het CWI innemend openhartig toont. Over het onderwerp didactiek van het universitaire onderwijs is buiten het anekdotische niet veel bekend. Het leek de redactie goed om van Jaworski en haar collega's te horen over een Engels onderzoek in dit verband. Misschien zit die onbekendheid wel in de aard van het universitaire onderwijs: voor massaproductie van gediplomeerden heb je goede didactiek nodig, maar meeslepende, inspirerende docenten hoeven geen goede didactici te zijn, ze kunnen dat zelfs beter niet zijn. Een universiteit is tenslotte geen hbo-instelling. Didactici kunnen daar echter niet veel mee, bovendien hebben ze meestal niet het niveau om universitair onderwijs te kunnen beoordelen.

Ons vak kent bijzondere mensen, in binnen- en buitenland. Een aantal malen had ik het voorrecht en genoegen om Jack Hale te ontmoeten. Hij overleed in 2009 en was een excellent (Amerikaans) wiskundige die op zeldzame wijze concrete en abstracte wiskunde wist te combineren. Die combinatie komt helaas niet veel voor. Zijn boeken en artikelen zijn niet altijd even toegankelijk, maar een studie meer dan waard. Bij een van onze ontmoetingen mopperde ik tegen hem dat ik bij al mijn onderzoek het gevoel had dat ik in wiskundekennis tekort schoot, dat ik altijd veel meer zou moeten weten. Hij keek me peinzend aan en merkte toen op dat hij het idee had dat ik mijn wiskundekennis optimaal gebruikte. Niet eerder kreeg ik een compliment dat tegelijk zo verhelderend was. Men moet bij wiskunde onderzoek al zijn kennis gebruiken en het is toch nooit genoeg. Het

klinkt als een paradox, maar het heeft te maken met het feit dat er geen grenzen zijn aan de wiskunde. Het is niet een land dat ontdekt wordt, maar een universum dat geschapen wordt met ook nog parallelle universa. Dat is de reden dat een goed mathematisch instituut herkend wordt aan een bloeiend en goed bezocht algemeen mathematisch colloquium en de interactie tussen haar wiskundigen. Ook bibliotheekgebruik zou je daarbij kunnen noemen, hoewel dat langzamerhand voor een groot deel wordt vervangen door het raadplegen van teksten op het internet. Merkwaardig genoeg schijnt onderzoek aan te geven dat er de laatste jaren kortere referentielijsten bij artikelen verschijnen.

Die opvatting over de noodzaak van brede kennis heeft wel consequenties. De verbinding tussen de vele onderdelen van de wiskunde moet in een breed bachelorprogramma vorm krijgen, zowel abstract als concreet, zowel algebra als analyse als meetkunde. Zowel routinetechniek als diepzinnigheid. En eigenlijk zou die breedheid zich zelfs moeten uitstrekken tot de verbinding met natuurwetenschappelijke en technische vakken. Maar misschien vinden de lezers van het NAW dat laatste al te nostalgisch, zo was het immers vijftig jaar geleden. In elk geval probeert de redactie van het NAW, met hulp van de lezers, de verbindingen binnen de wiskunde tot stand te houden en te belichten.

Dit decembern timer is ook een afscheid van Wil Schilders als mede-hoofdredacteur. De redactie is hem zeer erkentelijk voor zijn enorme inzet, gezond verstand en ideeën. Hij zal hopelijk in verschillende andere functies wiskundig Nederland op zijn eigen creatieve wijze blijven steunen. 

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur naw
Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Agenda

| Upcoming Events

december 2011

1 – 2 december 2011

WCNT 2011

Workshop over computationele getaltheorie ter gelegenheid van het afscheid van Herman te Riele bij het CWI

plaats CWI, Amsterdam

info event.cwi.nl/wcnt2011

12 – 15 december 2011

13th IMA International Conference of Cryptography and Coding

Jaarlijkse conferentie over cryptografie

plaats University of Oxford

info www.ima.org.uk/conferences/conferences.calendar/cryptography_and_coding.cfm

19 – 23 december 2011

Workshop Dynamical Gibbs–non-Gibbs transitions

Workshop voor het STAR onderzoekscluster, georganiseerd door A.C.D. van Enter (RUG), R. Fernández (UU), F. den Hollander (UL), F. Redig (RU)

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/STAR/events/workshops

20 december 2011

Afscheid prof. dr. Jan van Leeuwen

Afscheidsrede en symposium 'From the World of Algorithms to Algorithms for the World'

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.cs.uu.nl/wiki/AfscheidJanVanLeeuwen

januari 2012

7 januari 2012

Wintersymposium KWG

Het symposium staat in het teken van grootschalig rekenen en rekenen in onze gezondheidszorg, met sprekers Herman te Riele (CWI), Richard Boucherie (UT) en Natasha Maurits (UMC Groningen)

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

8 – 11 januari 2012

Free Boundary Problems in Fluid Mechanics

Conferentie over vrije-rand-problemen in vloeistof-mechanica

plaats University of Nottingham

info www.nottingham.ac.uk/mathematics/research/conferences/conferencefluidmechanics.aspx

17 – 19 januari 2012

37ste Lunteren Conferentie Mathematische Besliskunde

Jaarlijkse conferentie van het LNMB, met sprekers Kurt Anstreicher (Iowa), Nikhil Bansal (TUE), Benny Moldovanu (Bonn) en Assaf Zeevi (New York)

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info www.lnmb.nl/conferences/2012

18 – 20 januari 2012

Panamaconferentie

Conferentie gericht op de ontwikkeling van reken- en wiskundeonderwijs in Nederland

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

23 – 25 januari 2012

11th Winter school on Mathematical Finance

Winterschool over het modelleren van risico en volatiliteit in stochastische systemen met lezingen door Tom Hurd en Alexander Lipton

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/~spreij/winterschool/winterschool.html

27 januari 2012

Eerste ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 2012 wordt op middelbare scholen gehouden

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

30 januari – 3 februari 2012

SWI 2012

Jaarlijkse Studiegroep Wiskunde met de Industrie waarin wiskundigen werken aan open problemen uit de industrie

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/events/workshops/2012/SWI_2012

februari 2012

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Martijn Zaal

agenda@nieuwarchief.nl

1 februari 2012

Winterschool WKRU Nijmegen

Studiedag voor (aankomende) docenten over wetenschap en techniek in het onderwijs

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info www.ru.nl/wetenschapsknooppunt/actueel/agenda/agenda-items/winterschool-2012

3 – 4 februari 2012

Nationale Wiskundedagen

Conferentie voor wiskundeleraars met presentaties, workshops en demonstraties uit binnen- en buitenland

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

20 – 24 februari 2012

Modeling Strategic Reasoning

Workshop over strategisch gedrag en het modelleren ervan

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/484/info.php3?wsid=484

27 februari – 2 maart 2012

Nonlocal PDEs, Variational Problems and their Applications

Workshop over variationele vergelijkingen en hun toepassingen

plaats UCLA, Los Angeles

info www.ipam.ucla.edu/programs/pde2012

28 februari – 2 maart 2012

YEP IX: Two-dimensional statistical mechanics

Workshop voor jonge Europese kansrekenaars in het kader van de Stochastic Activity Month met thema 'scaling limits in spatial probability'

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events/workshops/2012/YEPiX_2012

maart 2012

14 maart 2012

W&T Academie

Studiedag voor leraren basisonderwijs en pabo-studenten over wetenschap en techniek in het basisonderwijs

plaats Nog te bepalen

info www.fisme.uu.nl/wtacademie/archief/2012

15 maart 2012

Kangoeroewedstrijd

Reken- en wiskundewedstrijd voor leerlingen vanaf groep 5

plaats Deelnemende scholen

info w4kangoeroe.nl

19 – 23 maart 2012

Noncommutative Algebraic Geometry and its Applications to Physics

Workshop over de interactie tussen niet-commutatieve algebra en theoretische natuurkunde

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2012/485/info.php3?wsid=485

29 maart 2012

Nationale Rekendag

Conferentie voor leerkrachten basisonderwijs

plaats Nog te bepalen

info www.rekenweb.nl/rekendagen

april 2012

2 – 4 april 2012

SIAM Conference on Uncertainty Quantification

Conferentie voor wiskundigen en andere wetenschappers met een interesse voor het kwantificeren van risico en onzekere gebeurtenissen

plaats Raileigh, North Carolina

info www.siam.org/meetings/uq12

13 april 2012

Leve de Wiskunde! 2012

Congres waarop vooraanstaande wetenschappers over hun bevindingen in en rondom de wiskunde vertellen

plaats CWI, Amsterdam

info www.science.uva.nl/actueel/levedewiskunde

12 april 2012

NMC 2012

Jaarlijks congres voor de wiskundige gemeenschap van Nederland

plaats TU/e, Eindhoven

info www.win.tue.nl/nmc2012

mei 2012

31 mei – 1 juni 2012

DIAMANT symposium

Halfjaarlijks symposium van het onderzoekscluster DIAMANT, met sprekers Christiane Frougny (LIAFA, Jussieu, Paris) en Sam Payne (Yale University)

plaats Nog te bepalen

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant/?pid=calendar&nid=176

juni 2012

13 – 16 juni 2012

SIAM conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures

Conferentie over golven en coherente structuren en hun toepassing in verschillende vakgebieden

plaats University of Washington, Seattle

info www.siam.org/meetings/nw12

juli 2012

23 – 27 juli 2012

Summer School Poisson Geometry

Jaarlijkse zomerschool, dit jaar over Poisson Meetkunde

plaats Universiteit Utrecht

info www.math.uu.nl

Nieuws

| News

142 finalisten Nederlandse Wiskunde Olympiade

Op vrijdag 16 september werd de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden op de Technische Universiteit Eindhoven. De finale sloot een reeks van drie wedstrijdmomenten af. Aan de eerste ronde, die in februari werd gehouden, deden ruim 5200 leerlingen mee. De 800 beste deelnemers gingen door naar de regionale tweede ronde, die werd gehouden op tien Nederlandse universiteiten. Voor de landelijke finale werden 149 deelnemers uitgenodigd. Uiteindelijk bogen 142 wiskundetalenten zich over de vijf uitdagende finaleopgaven. Voor deze groep gaf Johan van Leeuwen, onderzoeker en docent aan de TU/e, een workshop met als titel 'Kansrekening, simulatie en schaalvoordelen'.

De vijf bestpresterende deelnemers in iedere deelnemerscategorie worden uitgenodigd voor de prijsuitreiking in november. Samen met nog tien hoogscorende deelnemers komen zij in een trainingsprogramma voor de International Mathematical Olympiad (IMO) die in Argentinië wordt gehouden. Uiteindelijk wordt uit de trainingsgroep van 25 deelnemers de zeskoppige Nederlandse IMO-afvaardiging geselecteerd. Afgelopen zomer was Nederland gastland van de IMO. Het thuisteam deed het goed: met twee zilveren en drie bronzen medailles hebben ze de lat voor de volgende afvaardiging hoog gelegd.

Bron: Jorn van der Pol



Foto: Josse van Dobben de Bruyn

Eiwit-puzzel blijkt eitje voor online gamers

Online gamers hebben de oplossing gevonden van een raadsel dat onderzoekers van de University of Washington (UW) al ruim tien jaar bezighield: de ruimtelijke structuur van het enzym genaamd 'retroviral protease'. Omdat dit enzym een belangrijke rol speelt bij de groei en verspreiding van het AIDS-virus, kan kennis over dit enzym helpen bij de bestrijding ervan. De zoektocht naar medicijnen die dit enzym blokkeren werd erg gehinderd doordat de onderzoekers niet wisten hoe het molecuul er precies uit ziet.

Om de meetkundige puzzel op te lossen hebben de onderzoekers het onlinespel 'Fold-it' bedacht waarin spelers ruimtelijke puzzels moesten oplossen. Over meerdere spelniveaus liep de moeilijkheidsgraad van de puzzels geleidelijk op van kleine puzzels tot het complexe probleem waarin de onderzoekers geïnteresseerd zijn. De resultaten waren verbluffend: binnen een paar dagen waren gamers erin geslaagd een werkbaar model voor het enzym te vinden. Bovendien werden er plekken in het molecuul aangewezen die misschien gebruikt kunnen worden om het enzym uit te schakelen.

Volgens de makers van het spel combineert deze aanpak het beste

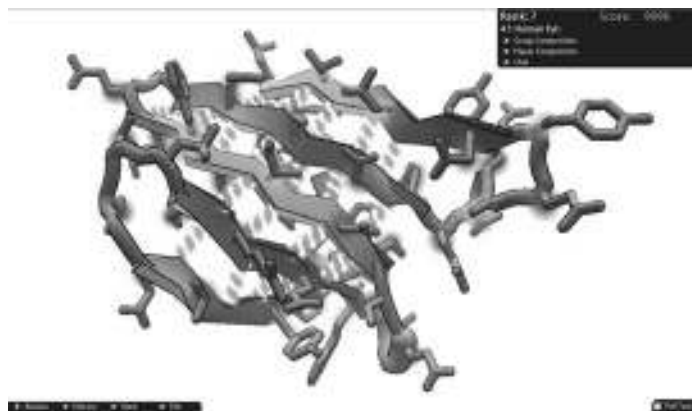
Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Martijn Zaal

nieuws@nieuwarchief.nl

van menselijke en kunstmatige intelligentie. Hoewel computers (nog) niet in staat zijn meetkundige problemen als deze op te lossen, bieden ze wel de mogelijkheid om grote groepen mensen met heel verschillende achtergrond tegelijk aan hetzelfde probleem te laten werken. De makers verwachten dat de combinatie van wetenschap en computerspellen in de toekomst voor verrassende ontdekkingen kan zorgen.

www.fold.it



Schermafbeelding van het spel

Wiskundeknobbel of rekenmeester?

Bestaat er zoiets als een aangeboren 'wiskundeknobbel' of heeft wiskunde met talent niets te maken? Nieuw onderzoek van de Johns Hopkins University (Baltimore) bij schoolgaande kinderen licht een tipje van de sluier op.

Mensen en dieren hebben een natuurlijk mechanisme om aantallen te beoordelen en vergelijken. Omdat dit gevoel voor aantallen zelfs bij baby's kan worden vastgesteld, gaat men ervan uit dat het aangeboren is. Kinderen met een goed gevoel voor aantallen blijken vanaf het begin al beter te presteren bij het rekenonderwijs. Dit lijkt te suggereren dat talent voor wiskunde aangeboren is. Toch moeten we voorzichtig zijn met het trekken van conclusies, vinden de onderzoekers. Kinderen met een minder gevoel voor aantallen vermijden misschien instinctief zo veel mogelijk activiteiten die met aantallen en rekenen te maken hebben, waardoor ze bij het begin van het rekenonderwijs simpelweg minder ervaring hebben.

www.sciencedaily.com

Stieltjes Prijs voor Peter Bruin

De Stieltjes Prijs 2010 voor het beste proefschrift in de wiskunde is toegekend aan Peter Bruin. De Stieltjes Prijs wordt sinds 1996 jaarlijks toegekend. Tot 2009 werd dit door het Thomas Stieltjes Institute for Mathematics gedaan. Vanaf 2010 verzorgt WONDER, de nieuwe Nederlandse onderzoeksschool voor wiskunde, de toekenning. De prijs wordt door de Stichting Compositio Mathematica ter beschikking gesteld.

Bruin kreeg de prijs voor zijn proefschrift *Modular curves, Arakelov theory, algorithmic applications*, dat hij op 1 september 2010 in Leiden verdedigde. Zijn promotor was prof. dr. S.J. Edixhoven.

web.science.uu.nl/WONDER

Dan Roozmond wint eerste Schoonschip Prijs

De eerste Schoonschip Prijs is toegekend aan Dan Roozmond. Deze prijs zal jaarlijks worden toegekend voor het beste proefschrift dat gebruik maakt van of bijdraagt aan de ontwikkeling van de computer-

algebra, en is vernoemd naar het programma 'Schoonschip' van Martinus Veltman, een van de eerste algebraprogramma's. De Stichting Computer Algebra Nederland stelt de prijs ter beschikking.

Roozmond kreeg de Schoonschip Prijs voor zijn proefschrift *Algorithms for Lie algebras of algebraic groups*, verdedigd op 18 maart 2010 in Eindhoven. Prof. dr. A.M. Cohen was zijn promotor.

web.science.uu.nl/WONDER

Eén vogel in de hand...

Wie wel eens een zwerm vogels of een school vissen heeft gezien, kent het fenomeen: de vogels (of vissen) lijken vooraf afgesproken routes te volgen waardoor een bewegende 'vlek' ontstaat. De groep van theoretisch bioloog prof. dr. Charlotte Hemelrijk van de Rijksuniversiteit Groningen heeft ontdekt dat deze opvallende patronen niet worden veroorzaakt door telepathie tussen de vogels of buitengewone intelligentie, maar door enkele eenvoudige principes.

Zo kan de vorm van een school vissen verklaard worden door aan te nemen dat vissen achter hun voorganger aan zwemmen en een botsing proberen te voorkomen. Doordat elke vis een beetje afstand zal houden, zullen de vissen ernaast naar binnen schuiven. Als de vissen aan één kant van de school iets langzamer gaan zwemmen, en aan de andere kant iets sneller, maakt de school een bocht. Op deze manier wordt een school vissen vanzelf smal en langgerekt, zonder dat er coördinatie nodig is. Dit principe heet ook wel *zelforganisatie*.

Een zwerm vogels blijkt ook zelforganiserend te zijn. De basisprincipes bij een zwerm vogels lijken verrassend veel op de principes die in een school vissen gelden: vogels proberen in een groep te blijven, maar niet te botsen. Het verschil zit hem in hoe een zwerm vogels draait: elke vogel in de zwerm draait om zijn eigen as. Waarschijnlijk is dit de reden dat de vorm van een zwerm vogels veel meer variaties heeft dan die van een school vissen.

www.kennislink.nl

Kritiek op monopoliepositie academische uitgevers

In een artikel in The Guardian uit George Monbiot stevige kritiek op de academische uitgevers. George Monbiot is naast auteur en journalist ook tijdelijk hoogleraar aan de Oxford Brookes University, en heeft verscheidene eredoctoraten aan Britse universiteiten.

Monbiot betoogt dat de academische uitgevers een monopoliepositie hebben die de wetenschap bedreigt, allereerst doordat de prijzen zo hoog zijn geworden dat bibliotheken gedwongen zijn hun aanbod in te perken. Hoewel de uitgevers beweren dat de hoge prijzen nodig zijn om kwaliteit en verspreiding op peil te houden, lopen de winstmarges van enkele grote uitgevers op tot zo'n 40%. Daarnaast worden auteurs zelden betaald door de uitgever, maar eerder met publiek geld zoals onderzoeksbeurzen. Ondertussen zijn de lange doorlooptijden, vaak een jaar of meer, eerder een bedreiging dan een hulpmiddel voor de verspreiding van kennis. Monbiot claimt zelfs dat deze situatie in strijd is met het recht om te delen in de resultaten van wetenschap, zoals vastgelegd in de Rechten van de Mens.

Volgens Monbiot blijft deze situatie bestaan doordat de grote uitgevers vrijwel alle belangrijke tijdschriften in handen hebben. Om fondsen te werven, zijn onderzoekers gedwongen in juist deze tijdschriften te publiceren. De oplossing die Monbiot voorstelt, is dat in beurzen standaard de voorwaarde wordt opgenomen dat de resultaten in een publiektoegankelijk tijdschrift gepubliceerd worden. Daarnaast suggereert hij dat regeringen de uitgevers onder de loep laten nemen door de mededingingsautoriteiten. Op lange termijn betoogt Monbiot dat

wetenschappelijke artikelen worden opgenomen in een universele database. De kwaliteit van deze database moet dan bewaakt worden door een onafhankelijke autoriteit, betaald uit de astronomische bedragen die nu worden neergeteld voor abonnementen op wetenschappelijke tijdschriften.

www.guardian.co.uk

HBO bedrijfswiskunde populair

Het aantal eerstejaars bedrijfswiskunde aan het HBO blijft stijgen. Met 193 eerstejaars zijn er ook dit jaar weer meer studenten begonnen: vorig jaar startten er 175 studenten, in 2009 waren dat er 163. De opleiding bedrijfswiskunde wordt aangeboden aan de Hogeschool van Amsterdam, Fontys Hogeschool Tilburg, de Delftse vestiging van de Haagse Hogeschool, Hogeschool Inholland vestiging Diemen en de NHL Hogeschool in Leeuwarden. Met 74 nieuwe studenten heeft de Hogeschool van Amsterdam net als eerdere jaren de meeste eerstejaars.

www.wiskundepersdienst.nl

Fibonacci maakte het MCMXCIX keer makkelijker

Het westelijke deel van het keizerlijke Rome kwam in de vijfde eeuw aan zijn einde, maar de Romeinse getalnotatie heeft het keizerrijk zo'n zeven eeuwen overleefd. Hoewel de Arabische getallen aan wiskundigen al langer bekend waren, blijkt dat Leonardo da Pisa, beter bekend als Fibonacci, de Arabische getalnotatie in West-Europa populair heeft gemaakt met zijn boek *Liber Abbaci*. Schrijver Keith Devlin beschrijft in zijn boek *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetics Revolution* hoe het werk van Fibonacci de getalnotatie en rekenkunde die nu nog wordt gebruikt, heeft ingevoerd in West-Europa. Zoals de opkomst van de computer onlosmakelijk is verbonden met de namen Steve Jobs en Bill Gates, zo hoort de naam Fibonacci bij de opkomst van de moderne rekenkunde, claimt Devlin.

www.charlotteobserver.com



Hans-Peter Postel

Standbeeld van Fibonacci in Pisa

Verrassingen voorspellen

Onderzoekers van de Ruhr-Universiteit Bochum (Duitsland) hebben een methode ontwikkeld die helpt bij het voorspellen van extreme gebeurtenissen. Een voorbeeld hiervan is de recente economische crisis, die door de meeste statistische modellen niet voorspeld kon worden. De moeilijkheid is dat statistici in sommige gevallen alleen de extreme gebeurtenissen moeten analyseren en in sommige gevallen juist

alle gebeurtenissen. Dit komt doordat een extreme gebeurtenis veroorzaakt kan worden door één andere extreme gebeurtenis, zoals een natuurramp of aanslag, maar ook door veel kleine, onopvallende gebeurtenissen, in dit geval het geven van kredieten met een veel te hoog risico.

De onderzoekers hebben een handleiding geschreven die helpt bij de beslissing om alle data, of juist een gedeelte te bestuderen. Hiermee kunnen betere modellen ontwikkeld worden die betere voorspellingen geven. De resultaten zijn gepubliceerd in het toonaangevende tijdschrift *The Annals of Statistics*.

www.eurekalert.org

Math-bridge.org gelanceerd

Negen Europese universiteiten hebben samen de website math-bridge.org opgezet, waarop leerlingen en studenten hun zwakke punten op wiskundegebied kunnen bijspijkeren. Op de website worden in zeven talen cursussen aangeboden over een groot aantal onderwerpen uit de wiskunde. Bovendien kunnen gebruikers zelf cursussen toevoegen of bestaande cursussen vertalen. Naast tekst bevat de website ook interactieve opgaven, waardoor de website ook gebruikt kan worden bij aansluitingscursussen wiskunde.

www.math-bridge.org

Rekenen met post-its

Uitgeverij Zwijsen, het APS en het Freudenthal Instituut hebben samen de online wedstrijd '#postitwarrekenen' opgezet. Elke vijf weken wordt een opdracht op Facebook gezet, waarna leerkrachten een week de tijd hebben om aan de hand van deze opdracht een mooie figuur in post-its op het raam te plakken. De opdrachten gaan steeds over een rekenkundig begrip, een van de opdrachten was bijvoorbeeld om een zich herhalend patroon of een reeks te maken. De inzendingen worden op de Facebook-pagina van de website geplaatst. Een jury kiest uit de inzendingen het meest creatieve kunstwerk.

www.facebook.com/postitwarrekenen

Vaste grond dankzij wiskunde

Het afstudeerproject van studente toegepaste wiskunde Miranda van Wijngaarden aan de TU Delft heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van een proces om zand te verstevigen.

In 2007 kwam Van Wijngaarden in contact met het Deltares, een Nederlands kennisinstituut gericht op deltatechnologie. Deltares was op dat moment voor het project BioGrout juist op zoek naar een rekeninstrument. BioGrout is een Australische vinding waarbij los zand met behulp van een enzym genaamd urease kan worden verstevigd tot zandsteen. Door het enzym samen met de juiste stoffen in de bodem te injecteren, slaat er kalk neer, waardoor de bodem steviger wordt. Het gebruikte enzym wordt geproduceerd door de bacterie *Sporosarcina pasteurii*.

Doordat er fysische, biologische en chemische processen een rol spelen, is het lastig te voorspellen wat precies het effect is als het enzym en de bijbehorende stoffen in de bodem worden geïnjecteerd. Van Wijngaarden heeft hiervoor een simulatieprogramma ontwikkeld, gebaseerd op een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen. Met behulp van numerieke methoden wordt het verloop van het verstevigingsproces voorspeld. Hiermee kunnen verstevigingsprocedures voor specifieke projecten van tevoren worden getest.

De proef op de som volgde dit jaar bij de aanleg van een gaspijpleiding onder de Waal bij Beuningen. Met behulp van het simulatie-

programma werd de procedure voor het verstevigen van de bodem van tevoren uitgetoet. De resultaten van de simulatie hebben bovendien geholpen bij het verkrijgen van een bouwvergunning.

Inmiddels werkt Deltares aan een tweede generatie BioGrout, een variant die goedkoper moet worden en bovendien milieuvriendelijker stoffen gebruikt. Miranda van Wijngaarden is inmiddels werkzaam als promovenda bij Deltares. Met haar collega's van geotechniek en biotechnologie werkt ze mee aan de ontwikkeling van BioGrout2.

www.ewi.tudelft.nl

Jan Karel Lenstra geridderd

Op 4 november is Jan Karel Lenstra, oud-directeur en onderzoeker van het Centrum Wiskunde & Informatica, onderscheiden als Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Wethouder Eric Wiebes van de gemeente Amsterdam speldde de versierselen op tijdens het symposium ter gelegenheid van Lenstra's terugtreden als directeur van het CWI.

Lenstra begon zijn wetenschappelijke loopbaan op het CWI. Van 1969 tot 1989 was hij een prominent onderzoeker op het instituut. Hij werd hoogleraar Combinatorische Optimalisering en decaan van de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Vervolgens vertrok hij naar het Georgia Institute of Technology in Atlanta. Van 2003 tot 2011 was Lenstra algemeen directeur van het CWI. Lenstra blijft aan het CWI verbonden en gaat zijn tijd besteden aan onderzoek en bestuurlijke taken.

www.cwi.nl



Nederlands succes bij IMO 2011

Deze zomer was, voor het eerst in de geschiedenis, de Internationale Wiskunde Olympiade in Nederland. In deze 52ste editie namen 564 deelnemers uit 101 landen het tegen elkaar op.

Na de officiële opening op zaterdag 16 juli begonnen de wedstrijden op maandag 18 en dinsdag 19 juli. Op beide dagen hadden de deelnemers vier en half uur om aan drie problemen te werken. Na deze twee vermoeiende dagen was het tijd voor ontspanning. De deelnemers hadden keuze uit allerlei excursies in Nederland: naast een zeiltocht over het IJsselmeer en een bezoek aan Volendam konden deelnemers ook kiezen voor een bezoek aan Den Haag, een fietstocht of een sporttoernooi onder leiding van Nederlandse atleten. Voor de echte enthousiastelingen waren er in de avond nog lezingen door Nederlandse wiskundigen en een workshop 'speed cubing': het supersnel oplossen van een Rubiks kubus. Op vrijdag bezochten de deelnemers de Amsterdam Arena, waar spontaan een voetbaltoernooi ontstond.

Op vrijdagmiddag kwam dan de langverwachte uitslag. Het Nederlandse team is erin geslaagd om twee zilveren en drie bronzen medailles in de wacht te slepen. De beste deelnemer was de Duitse Lisa Sauermann: ze wist alle opgaven op te lossen. Samen met haar resultaten bij eerdere edities van de IMO zorgde dit ervoor dat ze de

toppositie in het klassement overnam van haar landgenoot en trainer Christian Reiher die in 2003 voor het laatst meedeed. De IMO werd op zaterdag 23 juli afgesloten met de officiële sluitingsceremonie in het RAI-theater in Amsterdam en een feest voor alle deelnemers, gasten en vrijwilligers.

www.imo2011.nl

Wiskundetournooi Nijmegen 2011 groot succes

Op 23 september vond dit jaar de twintigste editie van het Wiskundetournooi plaats in Nijmegen. Het Wiskundetournooi is een wedstrijd voor teams van vier of vijf middelbare scholieren uit de bovenbouw. 's Ochtends vindt een estafette van korte opgaven plaats en 's middags is er de Sum of Us, die ieder jaar over een toepassing van wiskunde gaat. Dit jaar was het onderwerp van de Sum of Us cryptografie en moesten de teams geheime informatie over de moordenaar Zodiac ontcijferen.

De twee winnende teams kwamen van het Barlaeus Gymnasium in Amsterdam en het Gomarus College in Groningen. Met deze fantastische prestatie hebben ze een reis naar Boston gewonnen. Het was ook dit jaar weer een erg leuke dag!

Bron: Saskia Chambille

Bollebozen te gast bij VU

De 86 beste wiskundeleerlingen uit 1, 2 en 3 havo en vwo hebben het op vrijdag 14 oktober tegen elkaar opgenomen tijdens de Junior Wiskunde Olympiade (JWO). Kwalificatie voor de JWO is een enorme prestatie op zich: circa 80.000 Nederlandse wiskundeleerlingen deden eerder mee aan de landelijke Kangoeroewedstrijd, waarvan slechts de beste 86 zijn overgebleven en hebben gestreden om de prijzen. De vierde editie van de JWO is, evenals de vorige edities, georganiseerd door de Vrije Universiteit Amsterdam.

Tijdens de JWO zijn door de deelnemers creatieve en uitdagende wiskundesommen opgelost. In het eerste wedstrijddeel hebben de deelnemers de tanden gezet in vijftien meerkeuzeopgaven. Tijdens het tweede wedstrijddeel zijn de deelnemers aan de slag gegaan met tien open opgaven. Vervolgens was het tijd voor de deelnemers om de zinnen wat te verzetten en hebben ze zich mogen uitleven in een, door de Stichting Vierkant voor Wiskunde georganiseerde, workshop.

Rond de klok van 16.15 uur was voor de deelnemers het langverwachte moment van de prijsuitreiking aangebroken. Wim Berkelmans (mede-organisator van de Internationale Wiskunde Olympiade 2011 in Amsterdam) had de eer om de prijzen te mogen uitreiken. De winnaar van klas 1 was Nick van Riet van de Goudse Scholengemeenschap, bij klas 2 heeft Marco Rietjens van de Scholengemeenschap St. Ursula in Horn gewonnen en in klas 3 won Bob Zwetsloot van het Teylingen College Leeuwenhorst in Noordwijkerhout.

www.wiskundeolympiade.nl/junior



Foto: Josse van Dobben de Bruyn

Henk Broer

Johan Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407
9700 AK Groningen
h.w.broer@rug.nl

Nieuws Koninklijk Wiskundig Genootschap

Indagationes Mathematicae

Het tijdschrift *Indagationes Mathematicae* is in 1939 opgericht door de KNAW. Rond 1990 ging een nieuwe serie van dit tijdschrift van start waarvan inmiddels volume 22 is bereikt. Onlangs is het tijdschrift overgegaan naar het KWG. Bij die overgang zijn de nodige veranderingen doorgevoerd. De nieuwe hoofdredacteur Henk Broer licht de wijzigingen toe.

Het wiskundetijdschrift *Indagationes Mathematicae* heeft een aantal ingrijpende veranderingen ondergaan. Het was decennialang eigendom van de KNAW, ooit gelieerd aan de inmiddels verdwenen *Proceedings van de KNAW*. Sinds dit jaar, Volume 21, is *Indagationes Mathematicae* in eigendom van het KWG, dat de sectie Wiskunde van de KNAW gemachtigd heeft de redactionele politiek te voeren. Naast mijzelf als hoofdredacteur zijn er inmiddels negentien redacteurs aangesteld via de KNAW: Erik van den Ban, Jan Bouwe van den Berg, Frits Beukers, Marius Crainic, Bas Edix-

hoven, Frank den Hollander, Rien Kaashoek, Jan Willem Klop, Tom Koornwinder, Ieke Moerdijk, Ben de Pagter, Bert Peletier, Robert Roussarie, Sebastian van Strien, Rob Tijdeman, Jaap Top, Aart van der Vaart, Robbert van der Vorst en Jan Wiegerinck. De opbrengsten van het tijdschrift komen ten goede aan de Nederlandse wiskunde, onder meer aan het Platform Wiskunde Nederland.

Indienen artikelen

Als vanouds verricht Elsevier de distributie en inmiddels wordt het tijdschrift elektronisch ondersteund door het Elsevier Editorial System (<http://ees.elsevier.com/indag>), waar geïnteresseerde auteurs ook hun artikelen kunnen indienen. Verder staat hier informatie over de beoordelingsprocedure en over de redactionele politiek; van dit laatste zijn de volgende twee zinnen vermeldenswaard:

- Although the journal aims at general mathematical subjects, there is some preference for articles with a focus on analysis in a broad sense, including areas like dynamical systems, differential geometry and stochastics.
- The journal welcomes the submission of review papers of high quality.

Ten slotte is nog op te merken dat *Indagationes Mathematicae* ook de mogelijkheid heeft langere artikelen van voldoende hoge kwaliteit op te nemen.

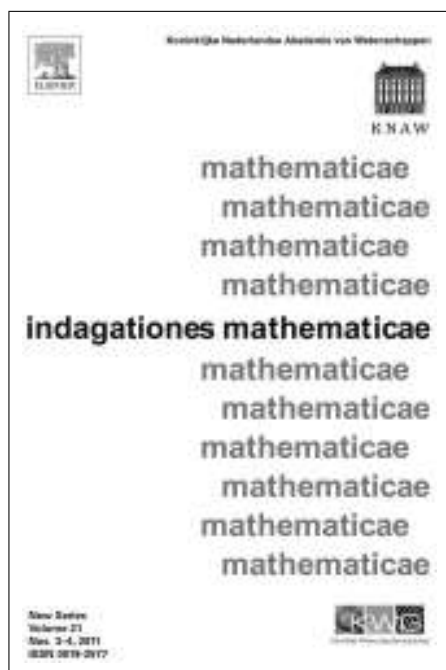
Special issues

Een van de nieuwe initiatieven is het opzetten van een reeks special issues. Op dit moment

is binnen volume 22 een issue beschikbaar ter gedachtenis aan Floris Takens, die in juni 2010 overleed; hiervan was Sebastian van Strien de guest editor. De inhoud bevat de volgende bijdragen:

- Henk Broer and Sebastian van Strien: Floris Takens (1940–2010)
- Jean-René Chazottes, Frank Redig, Florian Völlering: Poincaré inequality for Markov random fields via disagreement percolation
- Peter de Maesschalck, Freddy Dumortier and Robert Roussarie, Cyclicity of common slow-fast cycles
- Cees Diks and Florian Wagener: Phenomenological and ratio bifurcations of a class of discrete time stochastic
- Eusebius J. Doedel, Bernd Krauskopf and Hinke M. Osinga: Global invariant manifolds in the transition to preturbulence in the Lorenz system
- Heinz Hanssman: Non-degeneracy conditions in KAM theory
- Yulij Ilyashenko: Thick attractors of boundary preserving diffeomorphisms
- Jacob Palis: On Floris Takens and our joint mathematical work
- David Ruelle: Floris Takens
- Eveny Verbitskiy: On factors of g -measures

Dit special issue zal als hardcover-editie verkrijgbaar zijn bij de Elsevier webshop (<http://webshop.elsevier.com>). Ook voor Israel Gohberg (guest editor Rien Kaashoek) en Hans Duistermaat (guest editor Erik van den Ban) zijn zulke special issues in voorbereiding. Verder kunnen dergelijke issues gewijd worden aan bepaalde workshops, of bijvoorbeeld aan het feit dat Zaanen te gelegener tijd honderd jaar geleden geboren werd, enzovoorts.



Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com

Interview Jan Karel Lenstra

"Eer is niet meer waard dan een schep kerkhofzand"

Jan Karel Lenstra neemt op 4 november 2011 na acht jaar afscheid als directeur van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI). In dit interview kijkt Ionica Smeets met hem terug op zijn loopbaan en de ontwikkeling van het CWI. Over boodschappen doen, zuivere problemen en onbezorgd onderzoek.

Je werd geboren in 1947, wat voor kind was je?

"Ik was nummer twee in een groot gezin en ik was een braaf kereltje. Het was de tijd van de wederopbouw met rust, reinheid en regelmaat. Ik gedijde daar goed bij. Mijn vader was wiskundeleraar en we verhuisden van Zaandam naar Drachten toen mijn vader daar directeur van de hbs werd. Later werd hij rector aan een lyceum in Groningen en verhuisden we daarheen."

Deed je vader thuis ook aan wiskunde?

"Hij gaf altijd wiskundesommetjes bij het eten, hij was heel handig met rekentruks. Hij leerde ons bijvoorbeeld dat je 98^2 snel kunt berekenen door te gebruiken dat $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Dus je neemt 100 maal 96 en telt daar 4 bij op. Je ziet dan in één keer dat 98^2 gelijk is aan 9604.

Ik merkte dat mijn broers bij die sommen sneller waren dan ik. Ook hier op het CWI zit ik tussen mensen die Spinoza's en eredoctoraten hebben, die Veni's, Vidi's en Vici's binnenhalen. Ik denk niet dat mij dat ooit gelukt was."

Waar was jij dan goed in?

"Als kind deed ik de boodschappen voor mijn moeder. Mijn broers waren slim, maar ik zorgde voor structuur. Dat lijkt een rode draad in mijn leven. Als ik dingen regelde, dan had iedereen daar plezier van. Dat deed ik niet bewust, het ging vanzelf zo."

Wat wilde je worden in die tijd?

"Mijn vader vond dat ik accountant moest worden. Hij gaf me een brochure: 'Accountant, een beroep dat boeit'. (lacht hartelijk) Later dacht hij dat ik wel burgemeester van een middelgrote gemeente kon worden. Hij zag in mij geen wiskundige, dat was iets voor hemzelf en mijn broers. Hij dacht dat ik beter leiding kon geven en zorgen voor een goede context. Misschien zag hij dat wel goed.

Toen ik later hoogleraar in Tilburg werd, vroeg mijn vader in welk vak ik hoogleraar

werd. Hij was verontwaardigd toen ik 'in wiskunde' antwoordde. Hij zei eerst even niets en zat daarna te sputteren. Dit was tegen de orde der dingen, ik was helemaal geen wiskundige."

Hoe vond je dat?

"Ik lachte erom. De rest van de wereld ziet mij als wiskundige, maar thuis zien ze dat niet zo. En ik denk dat thuis gelijk heeft."

Koos je daarom bewust voor econometrie als studie?

"Ik had geen zin in wis- en natuurkunde. Ik dacht, achteraf gezien ten onrechte, dat dit voor slimmere mensen was. Ik koos voor econometrie aan de Universiteit van Amsterdam. Binnen mijn studie ging ik de kant op van operations research en daarbinnen de opti-



Foto: CWI, Jan Schipper



malisering. Toch wiskunde dus. Halverwege mijn doctoraalfase kwam ik binnen bij het Mathematisch Centrum [MC, de voorloper van het CWI]. Dat was een openbaring."

Wat was er anders dan op de universiteit?

"Op de universiteit was het chaotisch. Er werd onderwijs gegeven en je had niet door dat de hoogleraren achter de deur van hun kamer ook nog onderzoek deden. Het MC was een oase van rust en intellect, een kweekvijver van talent en ideeën. Er liepen uitvinders rond die computers en programmeertalen bedachten."

Waar werkte je zelf aan?

"Aan sequencing en scheduling, problemen waarbij taken aan machines moeten worden toegekend. Ik zocht naar relaties tussen die problemen. Ik liep eens tegen een artikel met een raar clusteringsprobleem aan en ik zag gelijk dat dit een handelsreizigersprobleem was. Dat soort dingen vond ik leuk. Een bezoeker suggereerde dat ik eens moest kijken naar het in 1972 verschenen artikel 'Reducibility among combinatorial problems' van Karp. Dat was een buitengewoon baanbrekend artikel waarin P en NP werden gedefinieerd met probleemreducties. Karp liet zien dat sommige problemen polynomiaal equivalent waren.

Het artikel ging er bij mij in als Gods woord in een ouderling. Dit was precies wat ik nodig had. Er waren problemen die makkelijk waren op te lossen voor twee machines, maar heel moeilijk voor drie machines. In de besliskunde was dat volstrekt normaal. Voor het ene probleem had je een truc, maar bij het andere moest je aanklooien en niemand vroeg zich af hoe dat kwam.

Met deze theorie kon je orde aanbrengen in de chaos. In 1971 werd Alexander Rinnooy Kan op me afgestuurd om iets nuttigs te doen met wiskunde. Samen hebben we een paar jaar besteed aan het trekken van de lijn tussen makkelijke en moeilijke problemen in sequencing en scheduling. Voor problemen die niet in polynomiale tijd waren op te lossen, keken we hoe dicht bij de optimale oplossing je dan wel kon komen.

In 1979 schreven we met Ron Graham en Gene Lawler een overzichtsartikel met de structuur van het vakgebied ('Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey'). Het was een dienstverlening aan anderen, wij boden als eersten een helder overzicht. Dit artikel is inmiddels meer dan duizend keer geciteerd, terwijl er geen origineel idee of eigen onderzoek in staat."

Hoe werkte je samen met anderen?

"Gene Lawler werkte bijvoorbeeld totaal anders dan ik: hij was brille en chaos. Hij werkte een nacht door, rookte twee dozen sigaren weg en kwam met een krankzinnig idee. Alexander Rinnooy Kan draaide soms in een middag een artikel in elkaar. Ik was meer de man van de saaie structuren, ik was maanden bezig om de zaak uit te werken en te polijsten. Uiteindelijk stond er geen letter meer op zijn plaats, waren alle schroefjes en bouten aangedraaid en zat het stevig in elkaar. Zonder een globale visie was het dat nooit geworden, maar zonder mijn gedetailleerd micromanagement ook niet."

Heb je ooit getwijfeld om naar het bedrijfsleven te gaan?

"Ik houd van zuivere problemen. Een handelsreizigersprobleem is heel zuiver, maar in de praktijk heb je vijf reizigers in plaats van één en ze moeten stoppen om te slapen. Je krijgt allemaal smerige randvoorwaarden. In de praktijk kom je allerlei dingen tegen waar andere mensen gewoon beter in zijn."

In 1983 werd je deeltijdhoogleraar in Tilburg. Hoe beviel het daar?

"Ik gaf alleen colleges en had geen aansluiting bij de economen die daar werkten. Na vier jaar haalde Rinnooy Kan me naar Rotterdam, maar daar zat ik weer tussen de economen. Collega's werkten voor de havens en zagen niet in waarom je artikelen in internationale wetenschappelijke tijdschriften zou publiceren.

Eind jaren tachtig werd ik onrustig, ik kende het CWI inmiddels van haver tot gort. Toen ik deeltijdhoogleraar in Tilburg werd, wilde directeur Cor Baayen me niet laten gaan en maakte me afdelingschef. In zijn plaats had ik dat nooit gedaan. Ik stuur veel meer aan op doorstroming, er zijn maar weinig mensen die op het CWI hun pensioen moeten halen.

Ik heb er zelf de eerste keer misschien wel te lang gezeten, twintig jaar. Ik wilde weg, maar wel naar een faculteit wiskunde en informatica, waar de waarheid op de eerste plaats staat en geld op de tweede. Daarom ging ik naar de Technische Universiteit Eindhoven. In Rotterdam snapten ze niet dat ik naar zo'n provinciale plaats ging, maar voor mij scheen in Eindhoven de zon."

In Eindhoven werd je uiteindelijk decaan, hoe kwam je in die functie terecht?

"Het was een klus die min of meer automatisch op me afkwam. Ik was al voorzitter van een wetenschappelijke vereniging geweest en vond het normaal dat ik moest gaan besturen. Zo kon ik anderen de kans geven hun wetenschap te beoefenen. Ik heb mijn carrière nooit gepland, ik liet me door toeval

leiden en rolde van het ene in het andere. Dat begon al op mijn middelbare school in Groningen toen de vereniging voor welsprekendheid een nieuwe voorzitter nodig had. Ik was helemaal niet welsprekend, ik was juist heel verlegen. Maar er was gedoe en niemand wilde voorzitter worden. Anderen toonden vertrouwen in mij en dus waagde ik de sprong in het diepe. En dat bleek goed te werken, ik vond het zelfs leuk."

In 2002 vertrok je naar Georgia Tech, heb je nooit eerder overwogen om naar het buitenland te gaan?

"Ik reis graag en bracht veel zomers door in Berkeley, op Cornell of MIT. Ik vond de combinatie met mijn baan op het CWI altijd ideaal. Daar kwam ook bij dat ik een dochtertje had. Ik was rond 1980 gescheiden en ze woonde gedeeltelijk bij mij. Ik had veel contact met haar en daarom wilde ik niet permanent weg.

In 2002 was die dochter inmiddels 25, en goed terechtgekomen, en ik was hertrouwd. Mijn vrouw wilde graag naar Georgia Tech. Hun besiskundeschool is de grootste en beste op zijn gebied. Voor mij was er een interessante vacature als *school chair*. Tot mijn stomme verbazing kreeg ik de baan niet. Bij mijn tweede sollicitatiegesprek had ik mijn dag niet en heb ik het verknald. Ik kreeg wel een aanbieding om hoogleraar te worden, een eervolle plek met veel geld. Maar ik kon er niets regelen en dat is wat ik het liefste doe. Ik mocht er niet de boodschappen doen.

Toen ik even terug was in Nederland omdat het Wiskundig Genootschap het predicaat 'Koninklijk' kreeg, werd ik gevraagd te solliciteren naar de baan van CWI-directeur. Dat was mijn droombaan, maar mijn vrouw had haar droombaan op Georgia Tech. Dat was lastig en mijn vrouw heeft een offer gebracht door mee terug te gaan naar Nederland. Het is gelukkig goed uitgekapt, ze is inmiddels hoogleraar in Delft. En achteraf gezien is het, ook voor onze

kinderen, beter dat we zijn teruggekomen."

Geef je je eigen kinderen net als jouw vader sommetjes?

"Af en toe leg ik iets eenvoudigs uit, liefst iets meetkundigs. Bijvoorbeeld dat het verschil tussen $(x+1)^2$ en x^2 gelijk is aan $2x+1$. Dat kun je eenvoudig zien door vierkanten neer te leggen. Zo kun je kinderen heel makkelijk bijbrengen wat een bewijs is.

Ik herinner me dat mijn oudste dochter mij een keer belde omdat haar wiskundeleeraar had beweerd dat iets waar was en zij niet wist waarom ze dat zou moeten geloven. Ik gaf haar het bewijs in één zin. Het was even stil en daarna zei ze dat ze haar vriendinnen ging bellen om het uit te leggen. Het is toch onzin dat zo'n bewijs op school uit de wiskunde is verdwenen, dat is juist het wezen van de wiskunde."

Is het CWI veranderd in de tijd dat je weg was?

"Nadat ik in 1989 naar Eindhoven vertrok, ging het CWI door een moeilijke periode. Het Informaticastimuleringsplan hield op en er liepen te veel mensen in vaste dienst rond. Het instituut is daar goed uitgekomen. In de jaren negentig was er de angst dat het instituut zou veranderen van onderzoek doen en toepassingen waar dat kan in een instituut dat toepassingen doet - en onderzoek als dat aan de orde is. Dat is nooit gebeurd, het onderzoek is altijd op de eerste plaats blijven staan.

In de jaren negentig legde directeur Gerard van Oortmerssen meer verantwoordelijkheid bij de onderzoekers zelf. Groepen moesten voortaan hun eigen broek ophouden. Zijn model gebruiken we nog steeds: als er twee euro van NWO komen gaat er een euro in de organisatie en een euro in het salaris van de vaste onderzoekers. De groep moet zelf voor die ene euro nog een euro genereren voor PhD-studenten en postdocs."



Als student (1968)

Wat heb jij als directeur toegevoegd aan het instituut?

"In 2009 kwam de nieuwe vleugel gereed. Dat was een belangrijke mijlpaal. In het hele gebouw is een open sfeer ontstaan, op ontmoetingsplekken wordt veel gediscussieerd. Dat is mooi om te zien.

Ik heb extra geld van NWO gebruikt voor interactie tussen groepen die elkaar nog niet goed genoeg kenden. Doorbraken gebeuren op grensvlakken. Als een bioloog met een probleem komt, heeft een wiskundige de neiging om die bioloog zijn wiskundige gereedschapskist te geven en hem dan zo snel mogelijk de deur uit te werken. Hij denkt dat hij niets leert van het toepassen van zijn methoden op andere problemen. Dat is misschien in eerste instantie zo, maar binnen een week komt die bioloog met een probleem dat de bestaande wiskundige gereedschapskist niet aankan. Dan moet je nieuwe gereedschappen gaan ontwikkelen. Zo gaat het altijd, ook in de ict. Er komen altijd nieuwe problemen die de ict veranderen.

Ik ben trots op de nieuwe groepen waarop je geen wiskunde- of informaticastempel kunt drukken, zoals cryptologie van Ronald Cramer en life sciences van Gunnar Klau. Ze zorgen met hun januskop van wiskunde en informatica voor een hechter instituut."

Wat is er niet gelukt tijdens je directeurschap?

"De organisatie van het CWI bestaat uit vier clusters met zestien groepen. Ik wilde dat versimpelen en probeerde de clusterlaag ineens te elimineren. Er waren grote voor- en tegenstanders en dat gaf spanningen in het



Drachten (1953)





College op Sloan School (1988)

instituut. Dus het was beter om het niet te doen."

Vond je het vervelend om je plan af te blazen?

"Ik vond het lastig in de tijd dat het niet lukte om het plan er doorheen te krijgen. De spanningen in het instituut zaten me dwars. Maar om het af te blazen, vond ik een uitstekend idee. Er zijn altijd dingen die niet lukken.

Ik heb gemerkt dat dit een instituut van kleine stapjes is, dus nu grijp ik steeds als het kan de kans om groepen samen te voegen. Er komt vast nog eens een moment dat de clusterlaag verdwenen is."

Hoe zie je de toekomst van het CWI?

"We zoeken nu geld via wetenschappelijke projecten, maar we zijn genereus naar universiteiten en bedrijfsleven. We zijn een open-source instituut, we geven dingen weg. De luxe van onbekommerd onderzoek van de 20ste eeuw is aan het verdampen en we moeten van contacten en generositeit naar contracten verdienen. De grote uitdaging is om ervoor te zorgen dat de autonome onderzoekers hier nog onbezorgd fundamenteel onderzoek kunnen doen.

We moeten verder meer samenwerken binnen Europa. Het CWI werkt nu samen met het Franse INRIA. Waarom zou er niet één Europees instituut kunnen zijn met vestigingen in verschillende landen? Dat is alleen maar goed voor de interactie en kwaliteit. In de Verenigde Staten werkt een heel continent samen. Het geld van conservatieve belastingbetalers

in het Midwesten wordt aan de kust door de democraten besteed. Als Europa mee wil doen in de wereld, dan moeten we naar Europa-brede samenwerking en competitie. Dan kunnen wij Pools belastinggeld besteden aan goed onderzoek."

Wat is het leukste aan je baan als directeur?

"Dit soort veranderingen, de dynamiek van het onderzoek. Dat je de gelegenheid krijgt om, naast alle dingen die goed gaan, veranderingen aan te brengen. Ik zit ook in allerlei commissies en organen om mee te praten over beleidsontwikkeling op het gebied van wiskunde en informatica, bijvoorbeeld de commissie rekenonderwijs van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW).

Die commissie kwam op een vreemde manier tot stand. Alexander Rinnooy Kan merkte in zijn omgeving dat mensen niet meer konden rekenen. Hij vond dat de discussie in de krant tussen traditionalisten en realisten nergens toe leidde. Toen mailde hij Robbert Dijkgraaf en mij dat wij er, namens de KNAW en het CWI, iets aan moesten doen.

In eerste instantie dacht ik dat dit wel erg ver van een instituut voor fundamenteel onderzoek afstond. Later bedacht ik dat het juist ook een taak van het CWI is om bij dit soort dingen te kijken wat er aan de hand is en orde op zaken te stellen. Ik wist er geen snars van, maar vond dat iemand dit moest aanpakken. Dus deed ik de boodschappen weer en werd voorzitter van die commissie. Het was hartstikke moeilijk, maar ook heel erg leuk. Uit ons rapport blijkt dat er qua effect geen verschil is aangetoond tussen de realistische en traditionele didactiek. Binnen één didactiek zijn er grotere verschillen dan tussen die didactieken. Eindelijk konden we het hebben over waar het wel over gaat: dat de leraar zelf niet meer kan rekenen. Dat ligt niet aan de leraar, maar aan zijn opleiding en het gereedschap dat hij meekrijgt. Op de pabo is er

te veel aandacht voor de tere kinderziel, ten koste van vakkennis. Terwijl je het allebei zou moeten doen. We zijn teveel doorgeschoten.

Op mijn basisschool in Drachten was er helemaal geen didactiek. Met pijn in mijn hart denk ik terug aan de rekencompetitie die mijn onderwijzer hield. Hij zette twee kinderen voor de klas en gaf ze een som als $87 + 15$. Wie het eerst het goede antwoord gaf had gewonnen en mocht blijven staan. Aan het eind had hij alle kinderen op het bord geordend in twee kolommen, 'dommen' en 'knappen'. De knapste van de dommen werd als beloning de domste van de knappen, ik zou zelf trouwens liever de knapste van de dommen zijn."

Wat voor mensen bewonder je?

"Iemand als Aldus Manutius uit Venetië rond 1500. Die man stelde zich ten doel, net na de uitvinding van de boekdrukkunst, om de klassieken uit te geven. Hij was een van de eerste uitgevers."

Maar zoiets klinkt als regelwerk, dat was ook wel iets voor jou geweest toch?

"Het werk wat hij deed had me wel gelezen, maar de gróótsheid van zijn visie is iets anders. Hij moest een enorm apparaat opzetten met auteurs, letterontwerpers, apparatuur en papier. Hij heeft de cursieve letter uitgevonden, want daarmee paste meer tekst op een bladzijde, zo kon hij pocketboekjes maken. Die man heeft invloed gehad.

Iets dat altijd is blijven hangen is wat mijn oudoom Jan tegen me zei in 1976. Alexander [Rinnooy Kan] en ik waren net gepromoveerd en gingen na een conferentie in Pittsburg op bezoek bij de kwekerij van mijn oudtante in Albany. Ik was genoemd naar haar broer en deze oom Jan was daar toen ook op bezoek. Hij moet tachtig geweest zijn. 's Avonds liepen we over de kwekerij. Hij schopte tegen de steentjes en zei toen: "Eer, mijn jongen, is niet meer waard dan een schep kerkhofzand". Dat vond ik zo'n ontzettend mooi citaat, het relativerende dat erin zat. Doe nou maar je werk."



Varøya, Noorwegen (1997)

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Wiskundige Verpoelingen' door Wieb Bosma uit het NAW-maartnummer van 2009.

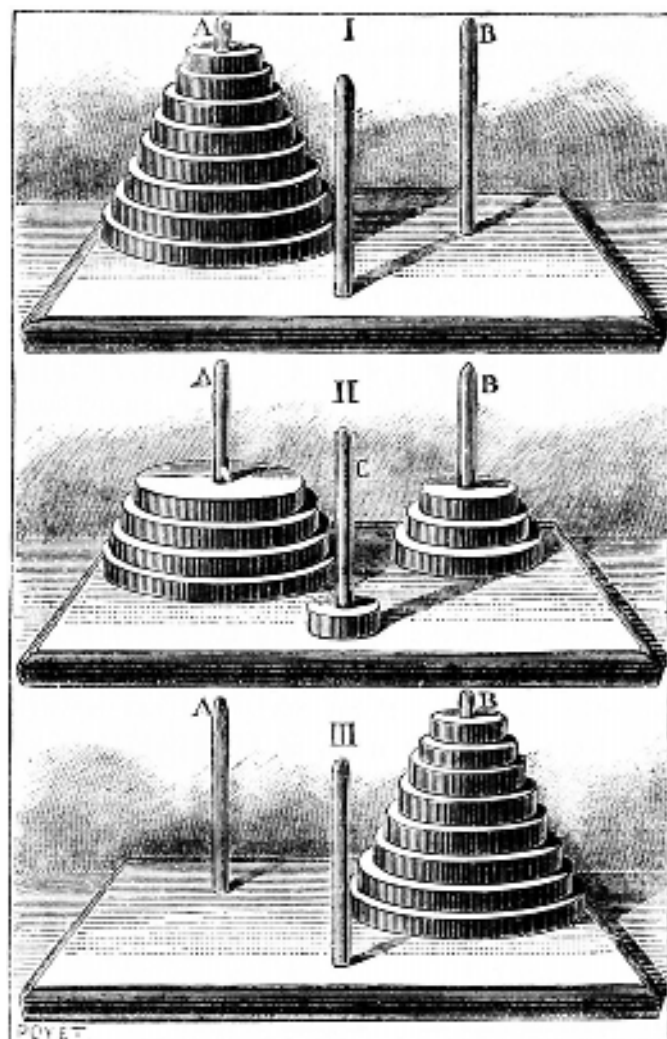
Tower of Hanoi

Wieb Bosma claims (in my interpretation of his Dutch) that a statement in my article [1] was 'nonsense'. It might be true that "generations of students of mathematics and computer science are nowadays taught algorithmic and recursive thinking" with the Tower of Hanoi, but obviously *not* mathematical thinking, "in particular for the question how many moves of discs are necessary" to transpose a complete tower. Although Schoute's mathematical analysis of the puzzle is one of the most valuable among the early papers on the subject, he, like almost all modern authors, fails to avoid in his 'bewijs' the unjustified use of an hypothesis, namely that the largest disc moves *directly* from the initial to the goal position in an optimal solution. This assumption, although provable for the classical task, is even false for the general problem to find a shortest solution when the initial and final states of the puzzle, i.e. legal distributions of the discs among the pegs, are prescribed arbitrarily. If Bosma had read further in my article, he would have found this discussion [1, p. 295] and a complete proof of minimality [1, p. 296] and thus could have avoided to write 'onzin'.

Andreas M. Hinz, Munich, Germany

Reference

- 1 Andreas M. Hinz, The Tower of Hanoi, *Enseign. Math.* (2) 35 (1989), 289–321.



The Popular science monthly (1884)

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

derdewet@nieuwarchief.nl

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Hydrodynamische limieten en de pijl van de tijd' door Frank Redig uit het NAW-juninummer van 2011.

Boltzmann

Het artikel van Frank Redig heeft betrekking op de aloude vraag: Hoe kunnen de bewegingsvergelijkingen van moleculen van een gas tot toename van de entropie leiden? De bewegingsvergelijkingen zijn invariant voor tijd omkering; om daaruit een niet-omkeerbaar verschijnsel af te leiden, moet er iets in gestopt worden. Dat heeft Boltzmann op de volgende manier gedaan.

Laat x staan voor de driedimensionale positie van een molecuul en p zijn snelheid. Laat $f_1(x, p; t)$ de verdeling van plaats en snelheid van de moleculen van een gas zijn ten tijde t . Laat de verdeling van de tweetallen moleculen $f_2(x, p; x', p'; t)$ zijn. Boltzmann stelde een vergelijking op die beschreef hoe f_1 met de tijd verandert ten gevolge van twee-deeltjes botsingen. Daarin treedt uiteraard f_2 op. Hij maakte de cruciale veronderstelling dat die vervangen kon worden door het product $f_1(x, p; t)f_1(x', p'; t)$.

Deze veronderstelling ('Stosszahlansatz') zegt dat twee botsende moleculen voor de botsing statistisch ongecorreleerd zijn. Na de botsing zijn ze uiteraard niet meer ongecorreleerd; dus de veronderstelling verbreekt de tijdsymmetrie. Dat opende de mogelijkheid om af te leiden dat de entropie in de tijd toeneemt.

Anderzijds is het duidelijk dat deze veronderstelling niet gelden kan als de deeltjes onderling een wisselwerking met lange afstand hebben. Inderdaad kan men met een eenvoudige berekening aantonen dat voor deeltjes met onderlinge zwaartekracht de uniforme verdeling niet stabiel is. Derhalve kan de entropiewet niet gelden voor deeltjes in de ruimte. De 'entropie van het heelal' is dus een zinloos begrip.

Het natuurkundige probleem is om deze cruciale Stosszahlansatz precies te formuleren en te begrijpen, zodat je weet wanneer en waarom die geldt. Dat is vereist als men de toename van de entropie als natuurkundig fenomeen wil verklaren. In het artikel van Redig wordt een stel voorbeelden van mathematisch vernuftig geconstrueerde stochastische processen gegeven, maar het is niet duidelijk wat daarmee aan het natuurkundige begrip bijgedragen wordt.

N.G. van Kampen, Utrecht

Reactie Frank Redig

De afleiding die Boltzmann zelf geeft van zijn vergelijking berust op de 'Stosszahlansatz'. Een wiskundig volledige afleiding van de Boltzmann-vergelijking zal dus ook het bewijs moeten geven van deze Stosszahlansatz. Helaas beschikken we slechts in beperkte mate over een dergelijke afleiding. De door Lanford gegeven afleiding is weliswaar rigoureus en bewijst de Stosszahlansatz, maar geldt enkel voor korte tijden of voor alle tijden in een lage dichtheidslimiet.

Een afleiding van de Boltzmann-vergelijking geeft bovendien nog niet noodzakelijk een afleiding van irreversibele hydrodynamische vergelijkingen zoals de diffusievergelijking. Hiervoor is een extra limiet nodig, of een aanname zoals lokaal evenwicht. Vervolgens is het niet meer duidelijk of men dan vertrekkend van de microdynamica *rechtstreeks* de diffusievergelijking kan afleiden.

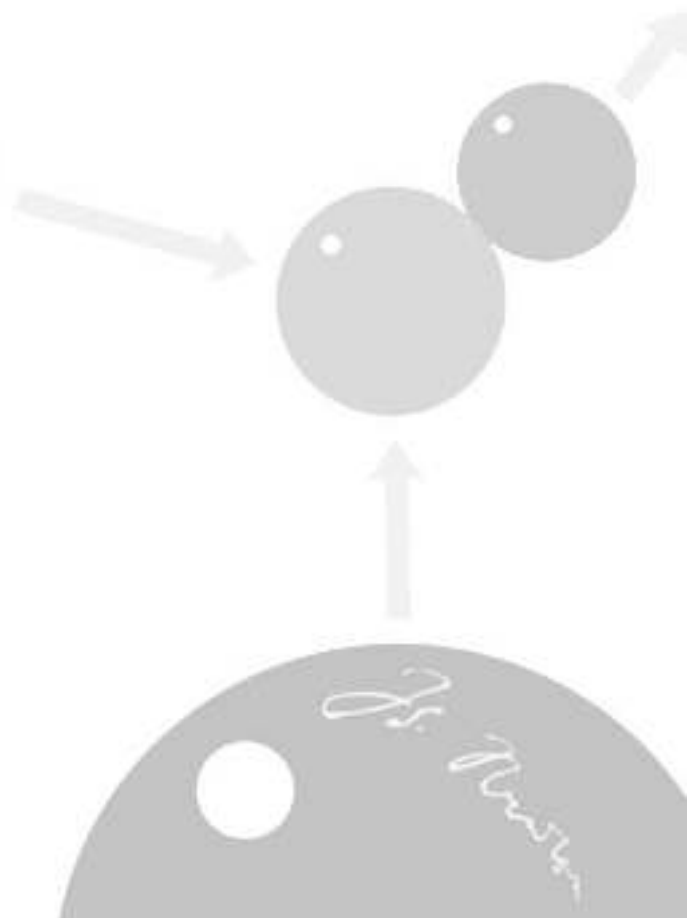
Op de vraag wat vereenvoudigde stochastische modellen bijdragen aan natuurkundig begrip kan ik het volgende antwoorden:

- In de context van deze modellen kunnen we *rigoureuze* afleidingen geven van irreversibele macroscopische vergelijkingen zoals de diffusievergelijking. In het bijzonder wordt daarmee aangetoond dat microscopische reversibiliteit verenigbaar is met macroscopische irreversibiliteit. Er is dus geen fundamentele paradox (inderdaad

wist Boltzmann dit reeds). Cruciaal hierbij is het nemen van een macroscopische limiet. Zolang deze limiet niet genomen is, blijven we de effecten van reversibele microdynamica (zoals Poincaré recurrences) zien.

- De afleiding van de macroscopische vergelijking is *controleerbaar*. Bijvoorbeeld kan men de kans uitrekenen van trajecten die afwijken van de oplossing van de macrovergelijking. De entropiefunctie van dit principe van grote afwijkingen kan vervolgens gebruikt worden in niet-evenwichts-statistische mechanica (van dergelijke modellen).
- Recente resultaten voor coupled map lattices laten zien dat het *stochastische karakter* van de (karikaturale) microdynamica niet *noodzakelijk* is en kan vervangen worden door 'ruimte-tijd chaos'.

De stochastische dynamica's of modellen van coupled map lattices geven dus een 'eenvoudigere context' of 'karikatuur' (van de fysische werkelijkheid) waarin het probleem van de afleiding van irreversibele macrovergelijkingen is opgelost. We mogen hopen dat de ontwikkelde technieken op dit 'oefenterrein' nuttig zijn voor afleidingen van macrovergelijkingen in een fysisch realistische context. De scepticus mag blijven opmerken dat dit nog te bezien valt.



Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248

1090 GE Amsterdam

J.vandeCraats@uva.nl

Recreatieve wiskunde

Symmetrie op de bol en in het vlak

In het dagelijkse leven komen we allerlei symmetrische voorwerpen tegen. Soms heeft zo'n symmetrisch voorwerp een speciaal patroon, denk bijvoorbeeld aan een voetbal. In dit artikel gaat Jan van de Craats dieper in op die patronen, waarbij hij een onderscheid maakt tussen bolpatronen, rozetpatronen, strookpatronen en behangpatronen. Hij gebruikt hierbij een nieuwe notatie om de verschillende symmetriegroepen te beschrijven.

In dit artikel beschrijf ik de discrete symmetriegroepen van bolpatronen en patronen in het vlak. In mijn behandeling, die steunt op ideeën van Coxeter [2] en Fejes Tóth [3], gebruik ik alleen eenvoudige resultaten uit de euclidische meetkunde en de groepentheorie. Ik presenteer daarbij ook een aangepaste versie van de 'signature notation' van John H. Conway. Als bonus verkrijg ik Conways 'magic theorems' voor bolpatronen en vlakke periodieke patronen.

Bolpatronen

Veel alledaagse voorwerpen zijn symmetrisch, vaak op meerdere manieren. Biljartballen, ronde schalen, schotels en bekens (zonder oor) hebben zelfs oneindig veel spiegelingen en rotaties als symmetrieën, althans als ze glad en effen gekleurd zijn. Andere voorwerpen hebben maar eindig veel symmetrieën, zoals een rechthoekige tafel, een stoel, een kast of, in meer wiskundige terminolo-

gie, een kubus, een prisma of een piramide. Of ballen met een speciaal patroon zoals een voetbal, een volleybal, een basketbal of een tennisbal.

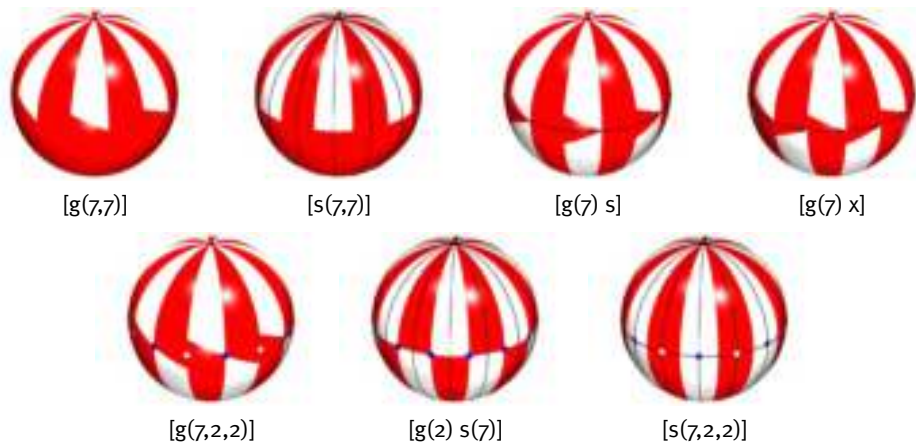
De symmetrieën van een voorwerp kunnen in wiskundige termen worden opgevat als *isometrieën* van de ruimte, dat wil zeggen transformaties die afstanden behouden. Na zo'n transformatie ziet het voorwerp er precies hetzelfde uit als ervoor. De symmetrieën vormen een groep, de *symmetriegroep* van het voorwerp. Het is interessant om alle mogelijke eindige symmetriegroepen van voorwerpen in de ruimte te beschrijven. Dat is in het verleden al door veel wiskundigen gedaan, op allerlei verschillende manieren. Het blijkt dat er precies veertien verschillende typen van eindige symmetriegroepen zijn (zie bijvoorbeeld [2, p.270] of [3, p.59]).

In de literatuur worden verschillende namen voor deze groepen gebruikt, maar een van de helderste is de 'signature notation',

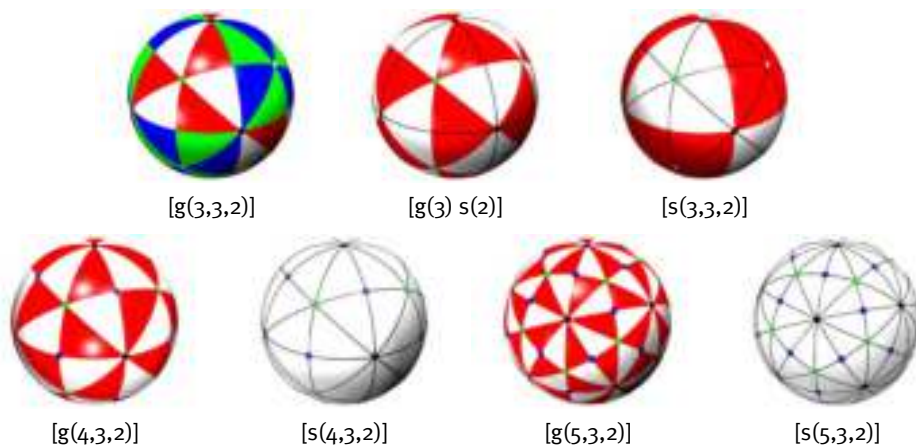
die ruim twintig jaar geleden bedacht is door John H. Conway. Ze wordt door Conway en zijn mede-auteurs Heidi Burgiel en Chaim Goodman-Strauss gebruikt in hun inspirerende en schitterend geïllustreerde boek *The Symmetries of Things* uit 2008 [1]. Deel I van dat boek gaat over de symmetrieën van bolpatronen en patronen in het vlak. Conways handtekeningnotatie, ook wel 'orbifold signature notation' genoemd, heeft het voordeel dat je er direct alle symmetrie-eigenschappen van een patroon uit kunt aflezen. Conway ontwikkelde die notatie met behulp van ideeën van William Thurston. In dit artikel gebruik ik deze notatie in een licht aangepaste vorm.

Symmetrische voorwerpen en bolpatronen

Elke eindige groep G van isometrieën heeft minstens één vast punt, een punt dat bij alle isometrieën van G op zijn plaats blijft. Neem om dit te bewijzen een willekeurig punt P samen met alle beelden van P onder de isometrieën van G . Dat is een eindige puntverzameling, de *baan* (Engels: *orbit*) van P . Elke isometrie uit G permuteert de punten van die baan, maar de baan als geheel blijft hetzelfde. Het *zwaartepunt* O ervan blijft dus bij elke isometrie van G op zijn plaats.



Figuur 1 Parametrische patronen



Figuur 2 Platonische patronen

Maar omdat $\mathcal{G}$ uit isometrieën bestaat, dat wil zeggen uit transformaties die afstanden behouden, gaat het oppervlak van elke bol met middelpunt O door alle isometrieën van $\mathcal{G}$ ook in zichzelf over. Het beschrijven van alle eindige isometriegroepen in de ruimte is dus hetzelfde als het beschrijven van alle eindige groepen van isometrieën op het oppervlak van een bol. Slordig gezegd kun je elk symmetrisch voorwerp identificeren met het symmetrische bolpatroon dat ontstaat als je het vanuit zo'n vast punt O op het oppervlak van een omvattende bol met middelpunt O projecteert. Het classificeren van symmetrische patronen op het boloppervlak (dat tweedimensionaal is) lijkt eenvoudiger te zijn dan het classificeren van driedimensionale voorwerpen in de ruimte. Bovendien verbindt deze benadering de studie van bolpatronen met

de studie van symmetrische patronen in het vlak.

Voorbeelden van bolpatronen

In deze paragraaf geef ik voorbeelden van bolpatronen, voor elk type één, elk voorzien van zijn handtekening. Nu is die handtekening alleen nog maar een naam, maar later zal ik uitleggen hoe die in elkaar zit en hoe je zelf gemakkelijk de handtekening van een symmetrisch bolpatroon kunt vinden.

In elk voorbeeldpatroon zijn de eventuele vlakspiegelingen aangegeven door de grote cirkels (zwart getekend) waarin het spiegelvlak de bol snijdt. Rotaties zijn aangegeven door stippen in verschillende kleuren die de punten aangeven waar de rotatieas het boloppervlak snijdt. Later geef ik meer uitleg, maar nu al merk ik op dat de kleuringen essentieel

zijn: symmetrieën van het patroon moeten de kleuren onveranderd laten.

De zeven patronen in Figuur 1 heten *parametrisch* omdat ze afhangen van een parameter, in dit geval een geheel getal $N \geq 1$. Elke keuze van N geeft een ander patroon. In de voorbeelden heb ik steeds $N = 7$ genomen, maar het is duidelijk hoe zo'n patroon er bij een andere keuze van N uitziet. De zeven patronen in Figuur 2 worden *platonisch* genoemd omdat ze horen bij bepaalde symmetriegroepen van de *platonische lichamen*: de tetraëder (regelmatig viervlak), de kubus, de octaëder (regelmatig achthoek), de dodecaëder (regelmatig twaalfvlak) en de icoosaëder (regelmatig twintigvlak), zie Figuur 3.

Eindige groepen van isometrieën op de bol

Elke isometrie op de bol is óf een *rotatie* rond een as door het middelpunt, óf een *spiegeling* in een vlak door het middelpunt, óf een *draaispiegeling*, dat wil zeggen een vlakspiegeling gevolgd door een rotatie om een as die loodrecht op het spiegelvlak staat (is de draaiingshoek nul, dan is de draaispiegeling dus een vlakspiegeling.) Rotaties zijn *directe* isometrieën, vlakspiegelingen en draaispiegelingen zijn *indirecte* isometrieën. Indirecte isometrieën draaien de oriëntatie om, directe isometrieën laten de oriëntatie intact.

Bij een vlakspiegeling snijdt het spiegelvlak de bol in een grote cirkel. Het is daarbij handig om te spreken van een spiegeling in die cirkel in plaats van een spiegeling in dat vlak. Ik noem die cirkel dan de *spiegelcirkel*.

Stel dat $\mathcal{G}$ een eindige groep van isometrieën op de bol is van orde n , dat wil zeggen dat $\mathcal{G}$ uit n isometrieën bestaat, inclusief de identiteit. Omdat het product van twee rotaties weer een rotatie is en het product van twee vlak- of draaispiegelingen ook, bestaat $\mathcal{G}$ óf uitsluitend uit rotaties (inclusief de identiteit) óf de rotaties in $\mathcal{G}$ vormen een ondergroep $\mathcal{H}$ van orde $n/2$.

De as van een niet-triviale rotatie snijdt het boloppervlak in twee diametrale punten, de *polen* van die rotatie. (Een niet-triviale rotatie is een rotatie waarbij de rotatiehoek niet 0 is.) De rotaties in $\mathcal{G}$ met een gemeenschappelijke as vormen een cyclische ondergroep van $\mathcal{G}$. Als p de orde is van die ondergroep, heten de twee polen p -voudige rotatiecentra of, kortweg, p -polen. De kleinste positieve rotatiehoek van een rotatie in die ondergroep is $2\pi/p$ radialen.

Twee polen heten *equivalent* in $\mathcal{G}$ als er een isometrie in $\mathcal{G}$ is die de een in de ander transformeert. In de voorbeelden in Figuur 1 en 2 hebben equivalente polen dezelf-



Figuur 3 De tetraëder, de kubus, de octaëder, de dodecaëder en de icoosaëder

de kleur. Merk op dat antipodale polen altijd dezelfde orde hebben, maar niet equivalent hoeven te zijn.

Chirale patronen

Een bolpatroon, of een voorwerp in de driedimensionale ruimte, heet *chiraal* als de enige symmetrieën ervan directe isometrieën zijn. In dat geval verschilt het patroon van zijn spiegelbeeld net zoals een linkerhand van een rechterhand verschilt (het Griekse woord 'cheir' betekent hand). Als de symmetriegroep minstens één indirecte isometrie bevat, is het spiegelbeeld niet van het origineel te onderscheiden. Het patroon heet dan *achiraal*. Met een spiegel kun je de chiraliteit van een patroon gemakkelijk vaststellen.

In deze paragraaf behandel ik de chirale bolpatronen. De symmetriegroep $\mathcal{G}$ van zo'n patroon bestaat dan uitsluitend uit rotaties, inclusief de identiteit. De volgende afleiding heb ik ontleend aan [2, pp. 274–275].

Laat n de orde van $\mathcal{G}$ zijn en laat P een p -voudige pool zijn op de bol. Dan is het aantal polen dat equivalent is met P (inclusief P zelf) gelijk aan n/p . Om dit te bewijzen neem ik een punt Q op de bol dat dichtbij P ligt. De rotaties met centrum P transformeren Q in een kleine regelmatige p -hoek op de bol met P als middelpunt. De andere isometrieën in $\mathcal{G}$ transformeren deze p -hoek in p -hoeken rond de polen die equivalent zijn met P . In totaal vormen de hoekpunten van deze p -hoeken een verzameling van precies n punten op de bol, verdeeld in congruente regelmatige p -hoeken. Dat zijn er dus n/p , en bijgevolg zijn er ook net zo veel equivalente p -polen.

Ik zal nu de $n - 1$ niet-triviale rotaties in $\mathcal{G}$ op een speciale manier tellen door ze samen te nemen in klassen van equivalente polen. Bij elke p -pool zijn er $p - 1$ niet-triviale rotaties dus bij een klasse van n/p equivalente p -polen zijn er $(p - 1)n/p$ niet-triviale rotaties. Dit geeft in totaal

$$\sum (p - 1)n/p$$

niet-triviale rotaties, waarbij gesommeerd wordt over alle klassen van equivalente polen, elk met zijn eigen waarde voor p . Maar bij antipodale polen horen dezelfde rotaties, dus elke rotatie wordt op deze manier tweemaal geteld. Daarom geldt de volgende vergelijking:

$$2(n - 1) = n \sum \frac{p - 1}{p},$$

die ook als volgt kan worden geschreven:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (1)$$

Als $n = 1$, dan is de groep $\mathcal{G}$ triviaal: ze bestaat alleen maar uit de identiteit. Er zijn dan geen polen en de som is leeg. Als $n \geq 2$, dan geldt

$$1 \leq 2 - \frac{2}{n} < 2.$$

Uit $p \geq 2$ volgt dat $\frac{1}{2} \leq 1 - 1/p < 1$, dus er kunnen alleen maar twee of drie equivalentieklassen van polen zijn.

Als het er twee zijn, geldt

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2},$$

dat wil zeggen

$$\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} = 2.$$

Maar de beide termen links zijn positieve gehele getallen, dus beide moeten 1 zijn, zodat

$$p_1 = p_2 = n.$$

Elk van de beide equivalentieklassen bestaat dan uit slechts één n -voudige pool en $\mathcal{G}$ is de cyclische groep met een n -pool aan elk uiteinde van zijn rotatieas. De handtekening van deze groep is $[g(n, n)]$. Zie Figuur 1 voor een voorbeeld met $n = 7$. Verderop wordt deze notatie tot in detail uitgelegd, maar nu al zeg ik er het volgende over. Om het lezen te vergemakkelijken zet ik handtekeningen altijd tussen rechte haken. De letter 'g' komt van de term 'gyration point' die Conway gebruikt om rotatiecentra aan te geven die *niet* op een spiegelcirkel liggen. (Het Griekse woord 'gyros' betekent rond of ronde, denk aan 'gyroscoop'.)

Als er drie equivalentieklassen van polen zijn, geldt

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{p_1} + 1 - \frac{1}{p_2} + 1 - \frac{1}{p_3},$$

zodat

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 + \frac{2}{n} > 1.$$

Daaruit volgt dat niet alle p_i groter dan of gelijk aan 3 kunnen zijn, en dus is er minstens

p_1	p_2	p_3	n	handtekening
p	p	–	p	$[g(p, p)]$
p	2	2	$2p$	$[g(p, 2, 2)]$
3	3	2	12	$[g(3, 3, 2)]$
4	3	2	24	$[g(4, 3, 2)]$
5	3	2	60	$[g(5, 3, 2)]$

Tabel 1 De mogelijkheden voor eindige rotatiegroepen op de bol

één, zeg p_3 , gelijk aan 2, dus

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > \frac{1}{2}.$$

Dit kan worden geschreven als $2p_1 + 2p_2 > p_1 p_2$, of ook als

$$(p_1 - 2)(p_2 - 2) < 4.$$

Stel, zonder beperking van de algemeenheid, dat $p_1 \geq p_2$, dan zijn de oplossingen $(p_1, p_2) = (p, 2)$ voor willekeurige $p \geq 2$, $(p_1, p_2) = (3, 3)$, $(p_1, p_2) = (4, 3)$ en $(p_1, p_2) = (5, 3)$.

In Tabel 1 vatten we samen welke mogelijkheden we voor eindige rotatiegroepen op de bol kunnen vinden. Elk van deze mogelijkheden kan gerealiseerd worden als symmetriegroep van een chiraal bolpatroon (zie de voorbeelden in Figuur 1 en 2), waarmee bewezen is dat er precies vijf typen chirale symmetriepatronen op de bol zijn: twee parametrische typen, met handtekening $[g(p, p)]$ en $[g(p, 2, 2)]$ voor willekeurige $p \geq 2$, en drie platonische patronen, met handtekening $[g(3, 3, 2)]$, $[g(4, 3, 2)]$ en $[g(5, 3, 2)]$. De laatste drie worden platonisch genoemd omdat hun symmetriegroepen de rotatiegroepen zijn van de platonische lichamen: de tetraëder ($[g(3, 3, 2)]$), de kubus en de octaëder ($[g(4, 3, 2)]$) en de dodecaëder en de icosaeider ($[g(5, 3, 2)]$).

Achirale patronen

Ik neem nu aan dat het bolpatroon achiraal is, dat wil zeggen dat de symmetriegroep $\mathcal{G}$ minstens één vlakspiegeling of draaispiegeling bevat. Stel dat $n > 1$ de orde van de $\mathcal{G}$ is. De rotaties in $\mathcal{G}$ vormen dan een ondergroep $\mathcal{H}$ van orde $n/2$.

Ik bekijk weer de niet-triviale rotaties in $\mathcal{G}$. Dat zijn er nu $n/2 - 1$. Er kunnen dan op de bol twee soorten rotatiecentra voorkomen: ze kunnen al dan niet op een spiegelcirkel liggen. Als een q -voudig rotatiecentrum Q op een spiegelcirkel ligt, gaan er in totaal q spiegelcirkels door Q die elkaar daar ondergelijke hoeken van π/q snijden.

Bij een willekeurig punt T dichtbij Q maar niet op een van die spiegelcirkels, voeren alle rotaties om Q en spiegelingen in cirkels door Q het punt T over in de hoekpunten van een $2q$ -hoek. De andere isometrieën van $\mathcal{G}$ voeren die $2q$ -hoek over in congruente $2q$ -hoeken rond de met Q equivalente rotatiecentra. In totaal hebben die $2q$ -hoeken precies n hoekpunten, en dus zijn er precies $n/(2q)$ van die veelhoeken, en net zoveel rotatiecentra die met Q equivalent zijn. Bij elke q -pool zijn er $q - 1$ niet-triviale rotaties, dus in totaal zijn er in de klasse van met Q equivalente polen $(q - 1)n/(2q)$ niet-triviale rotaties.

Net als in de vorige paragraaf tellen we voor elke p -pool P die niet op een spiegelcirkel ligt, in de klasse van met P equivalente polen in totaal $(p - 1)n/p$ niet-triviale rotaties.

Wanneer we op deze manier alle niet-triviale rotaties bij elkaar optellen, tellen we elke rotatie twee maal aangezien bij antipodale polen dezelfde rotaties horen. We krijgen nu dus de volgende vergelijking:

$$2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = n \sum \frac{q-1}{2q} + n \sum \frac{p-1}{p},$$

waarin de eerste sommatie gaat over alle equivalentieklassen van polen die op spiegelcirkels liggen, en de tweede over alle equivalentieklassen van polen die niet op spiegelcirkels liggen. Na delen door n ontstaat hieruit de vergelijking

$$1 - \frac{2}{n} = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) + \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (2)$$

Als $n = 2$ dan is het linkerlid 0 en dus zijn beide sommen rechts dan ook 0. Er zijn dan geen niet-triviale rotaties. De groep $\mathcal{G}$ bestaat dan uit de identiteit en hetzij één enkele vlakspiegeling, hetzij een draaispiegeling met een rotatiehoek van π . Die laatste is de *centrale inversie*, de puntspiegeling in het centrum van de bol waarbij elk punt overgaat in zijn antipode, het punt dat er diametraal tegenover ligt.

Het eerste geval, waarbij $\mathcal{G}$ dus naast de identiteit alleen maar één spiegeling bevat, krijgt als handtekening $[s]$, terwijl het tweede geval, waarin $\mathcal{G}$ de centrale inversie bevat, als handtekening $[x]$ krijgt. Conway gebruikt hiervoor respectievelijk een ster $(*)$ en een maaltteken $(\times)$, maar ik geef de voorkeur aan de letters 's' en 'x'. Zie ook mijn opmerking over notaties aan het einde.

q_1	q_2	q_3	n	handtekening
q	q	$-$	$2q$	$[s(q,q)]$
q	2	2	$4q$	$[s(q,2,2)]$
3	3	2	24	$[s(3,3,2)]$
4	3	2	48	$[s(4,3,2)]$
5	3	2	120	$[s(5,3,2)]$

Tabel 2 De vijf typen spiegelingsgroepen

Stel nu dat $n > 2$. Dan is

$$\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{n} < 1.$$

Voor $p > 1$ geldt $1 - 1/p \geq \frac{1}{2}$ en daarom bevat de tweede som hoogstens één term. Ik onderscheid nu twee gevallen.

Geval 1: alle rotatiecentra liggen op spiegelcirkels. Als alle rotatiecentra op spiegelcirkels liggen, heet $\mathcal{G}$ een *spiegelingsgroep*. De groep $\mathcal{G}$ wordt dan voortgebracht door cirkelspiegelingen. Als Q een q -voudig rotatiecentrum is, gaan er q spiegelcirkels door Q . Twee aangrenzende cirkels snijden elkaar in Q onder een hoek van π/q .

Vergelijking (2) luidt nu

$$1 - \frac{2}{n} = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right).$$

Maar als we $n' = n/2$ stellen (bedenk dat n even is!) kan dit geschreven worden als

$$2 - \frac{2}{n'} = \sum \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

en dat is precies dezelfde vergelijking als (1), de vergelijking die alle mogelijke eindige rotatiegroepen beschrijft. Hier beschrijft die vergelijking alle mogelijkheden voor de ondergroep $\mathcal{H}$ van orde $n' = n/2$ van alle rotaties in $\mathcal{G}$. In de vorige paragraaf hebben we gezien dat er precies vijf typen rotatiegroepen zijn, zie Tabel 1. De voorbeelden in Figuur 1 en 2 laten zien dat het in elk van deze gevallen mogelijk is om de rotatiecentra door spiegelcirkels te verbinden op zo'n manier dat er door elke q -pool precies q spiegelcirkels gaan. De aldus uitgebreide rotatiegroepen zijn de vijf typen spiegelingsgroepen. Tabel 2 geeft een overzicht van hun eigenschappen en hun handtekening.

Geval 2: niet alle rotatiecentra liggen op spiegelcirkels. Stel dat de tweede som in vergelijking (2) niet leeg is, met andere woorden, dat er minstens één p -pool is (met $p > 1$) die niet

p	q	n	handtekening
p	$-$	$2p$	$[g(p) x]$
p	1	$2p$	$[g(p) s]$
2	q	$4q$	$[g(2) s(q)]$
3	2	24	$[g(3) s(2)]$

Tabel 3 De gemengde groepen

op een spiegelcirkel ligt. De symmetriegroep heet dan een *gemengde groep*.

Zoals we gezien hebben bevat de tweede som in vergelijking (2) dan slechts één term, dus alle p -polen zijn equivalent en vergelijking (2) kan geschreven worden als

$$\frac{1}{p} - \frac{2}{n} = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right).$$

Als $n = 2p$, dan zijn het linkerlid en het rechterlid beide nul. Omdat n/p het aantal equivalente p -polen geeft, zijn er $n/p = 2$ van die polen. Ze zijn dus antipodaal en ze horen bij de $p = n/2$ rotaties in $\mathcal{G}$ (inclusief de identiteit).

Als er geen spiegelcirkels zijn, dan moet $\mathcal{G}$ ook nog p draaispiegelingen bevatten. Het kwadraat van een draaispiegeling is een rotatie, dus elk van die draaispiegelingen moet de beide p -polen verwisselen. Daarmee is de hele groep beschreven. De handtekening is $[g(p) x]$.

Als er wel een spiegelcirkel is, moet de spiegeling in die cirkel de beide p -polen verwisselen want die polen liggen niet op een spiegelcirkel. De groep $\mathcal{G}$ bestaat dus uit p rotaties (waaronder de identiteit), een spiegeling en $p - 1$ draaispiegelingen. Deze groep heeft handtekening $[g(p) s]$.

Stel nu dat $n > 2p$. Dan is er minstens één q -pool op een spiegelcirkel met $q \geq 2$. Dan geldt $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{4}$ en omdat $p \geq 2$, volgt hieruit dat

$$\sum \frac{1}{4} \leq \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}.$$

Dit betekent dat er maar één klasse van equivalente q -polen kan zijn en dat bovendien p alleen maar 2 of 3 kan zijn.

Als $p = 2$, dan geeft vergelijking (2)

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q},$$

en dus is $n = 4q$. Er zijn dan $n/(2q) = 2$ noodzakelijkerwijs antipodale q -polen, met q spiegelcirkels erdoorheen. Die cirkels begrenzen $2q$ 'maantjes' (tweehoeken op de bol) met hoeken π/q . De centra van die maantjes zijn

	Rotatiegroepen (chirale patronen)	Gemengde groepen (achirale patronen)	Spiegelingsgroepen (achirale patronen)
Parametrische groepen	$[g(p,p)]$ $[g(p,2,2)]$	$[g(p) s]$ $[g(p) x]$ $[g(2) s(q)]$	$[s(q,q)]$ $[s(q,2,2)]$
Platonische groepen	$[g(3,3,2)]$ $[g(4,3,2)]$ $[g(5,3,2)]$	$[g(3) s(2)]$	$[s(3,3,2)]$ $[s(4,3,2)]$ $[s(5,3,2)]$

Tabel 4 De veertien typen eindige symmetriegroepen op de bol

de 2-polen. Ze liggen op de evenaar. Het zijn er $2q$ en ze zijn allemaal equivalent. De handtekening is $[g(2) s(q)]$.

Als $p = 3$ is, dan geldt wegens $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n} < \frac{1}{p} = \frac{1}{3}$, dat alleen $q = 2$ mogelijk is. Vergelijking (2) geeft dan

$$1 - \frac{2}{n} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3},$$

dus $n = 24$. Hieruit volgt dat er dan $n/p = 8$ polen P van orde 3 zijn die niet op spiegelcirkels liggen, en $n/(2q) = 6$ polen Q van orde 2 die wél op spiegelcirkels liggen. Deze spiegelcirkels snijden elkaar onder rechte hoeken in de zes punten Q . Dat betekent dat er precies drie spiegelcirkels zijn. Ze verdelen de bol in acht octanten, dat wil zeggen boldriehoeken met drie rechte hoeken (in de punten Q). De acht 3-polen P zijn de centra van deze driehoeken. Deze groep heeft handtekening $[g(3) s(2)]$.

Merk op dat de groepen van orde 2 met de handtekeningen $[s]$ en $[x]$ kunnen worden opgevat als speciale gevallen van respectievelijk de groepen met handtekening $[g(p) s]$ en $[g(p) x]$ voor $p = 1$, want een 1-voudige rotatie (rotatiehoek $2\pi/1 = 2\pi$) is hetzelfde als de identiteit.

Ik vat de resultaten samen in Tabel 3. Daarmee is de lijst van alle eindige symmetriegroepen bij bolpatronen compleet. We hebben bewezen dat er precies 14 typen van eindige symmetriegroepen zijn. Hun handtekeningen staan in Tabel 4, waarbij $p \geq 1$ en $q \geq 1$ willekeurige parameters zijn. Merk op dat $[g(1,1)]$ de triviale groep is die uitsluitend uit de identiteit bestaat, dat de handtekeningen $[g(1) s]$ en $[s(1,1)]$ allebei kunnen worden vereenvoudigd tot $[s]$, dat $[g(1) x]$ vereenvoudigd kan worden tot $[x]$ en dat $[s(1,2,2)]$ dezelfde groep is als $[s(2,2)]$.

Voorbeelden en handtekeningen verklaard

Van elk type symmetriepatroon heb ik in Figuur 1 of 2 een voorbeeld gegeven. Bij de parametrische patronen heb ik $p = 7$ of $q = 7$

genomen. Bij elk patroon zijn de spiegelcirkels zwart getekend en de rotatiecentra met stippen in verschillende kleuren gemarkeerd. Equivalente centra hebben dezelfde kleur gekregen.

Op die manier is de opbouw van de handtekening bijna vanzelfsprekend geworden. Alle equivalentieklassen van rotatiecentra die niet op spiegelcirkels liggen worden opgesomd tussen de haakjes na de letter 'g', en alle rotatiecentra die wel op spiegelcirkels liggen na de letter 's'. Bij de rotatiecentra wordt elke kleur dus maar één keer in de handtekening vermeld. De volgorde van de getallen tussen de haakjes is daarbij niet van belang; als regel heb ik ze in dalende volgorde vermeld. Ik heb $g(\dots)$ steeds vóór $s(\dots)$ gezet. En, ten slotte, als er in het patroon een draaispiegeling voorkomt die *niet* kan worden samengesteld uit een spiegeling en een draaiing in de symmetriegroep, dan heb ik dat aangegeven door de letter 'x' toe te voegen.

Je kunt nu zelf alle spiegelcirkels en alle rotatiecentra in de gegeven voorbeelden controleren, en op die manier nagaan dat de vermelde handtekeningen inderdaad correct zijn. Ga daarbij ook na dat equivalente centra inderdaad dezelfde kleur hebben gekregen (maar niet alle centra zijn zichtbaar in de tekeningen). Let op: de kleuren zijn essentieel: symmetrieën van het patroon moeten de kleuren in stand houden.

Het is nu ook heel gemakkelijk om zelf de handtekening van een willekeurig bolpatroon te vinden: bepaal (met een spiegel) eerst of het chiraal is of niet. Teken dan alle spiegelcirkels. Markeer vervolgens de rotatiecentra en geef equivalente centra daarbij dezelfde kleur. De handtekening kan dan direct worden afgelezen, waarbij het enige subtiel punt is dat het patroon achiraal kan zijn terwijl er toch geen spiegelcirkels zijn. Dan moet er een draaispiegeling zijn, en het patroon heeft dan als handtekening $[g(p) x]$ voor een zekere waarde van p . Let op: p kan 1 zijn. Dat is het geval als er ook geen rotatiecentra zijn. De handtekening kan dan worden vereenvou-

digd tot $[x]$, en de enige niet-triviale symmetrie is de centrale inversie.

Merk op dat steeds aan de vergelijkingen (1) of (2) voldaan is. De orde n van de symmetriegroep volgt uit deze vergelijkingen. Bedenk ook dat het aantal equivalente p -polen gelijk is aan n/p terwijl het aantal equivalente q -polen gelijk is aan $n/(2q)$. Dat geeft extra controle mogelijkheden.

De vergelijkingen (1) en (2) maakten het mogelijk om de 14 typen symmetriepatronen op een vrij eenvoudige manier af te leiden en te bewijzen dat er geen andere mogelijkheden zijn. In feite zijn die twee vergelijkingen gelijkwaardig aan Conways 'Magic Theorem' voor bolpatronen [1, p. 53]. Onze afleiding, die voor chirale patronen gebaseerd was op [2, pp. 274–275], is echter meer elementair omdat die geen gebruik maakt van topologische hulpmiddelen.

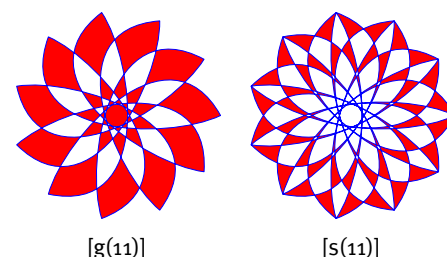
Rozetpatronen en strookpatronen

Ik stap nu over naar patronen in het euclidische vlak. Eerst bekijk ik patronen met een eindig aantal symmetrieën. Om redenen die zo dadelijk duidelijk zullen worden, heten zulke patronen *rozetpatronen*. Daarna bekijk ik *strookpatronen*, vlakke patronen waarin een motief telkens herhaald wordt in een rij.

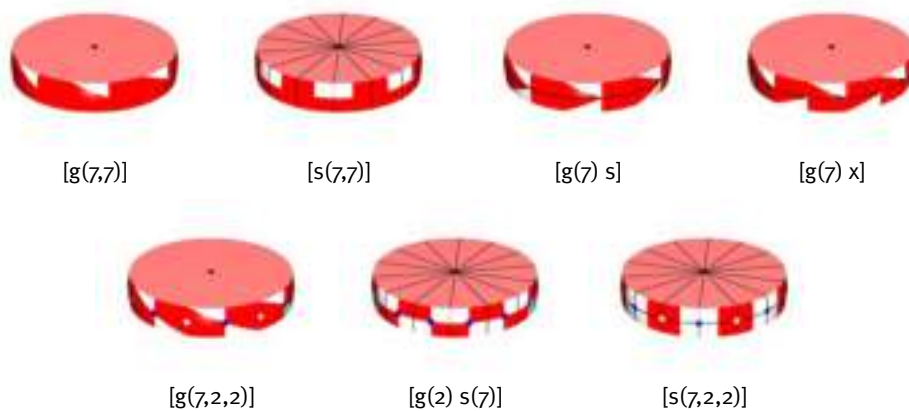
Rozetpatronen

Een rozetpatroon kan allerlei vormen van symmetrie hebben, maar er moet altijd minstens één vast punt zijn, een punt dat bij alle isometrieën uit de symmetriegroep $\mathcal{G}$ van het patroon op zijn plaats blijft. Immers, omdat de baan van elk punt P een eindige puntverzameling is, blijft het zwaartepunt O ervan bij alle isometrieën uit $\mathcal{G}$ op zijn plaats.

Als er twee verschillende vaste punten O_1 en O_2 zijn, moet de gehele lijn ℓ door O_1 en O_2 uit vaste punten bestaan want een isometrie die twee punten op hun plaats houdt, laat alle punten van de lijn door die twee punten op hun plaats. Als er daarnaast nog een vast punt O_3 is dat niet op ℓ ligt, dan blijft elk punt van het vlak onder alle isometrieën van $\mathcal{G}$ op zijn plaats, dus dan bestaat $\mathcal{G}$ alleen



Figuur 4 Twee rozetpatronen, links een chiraal patroon en rechts een achiraal patroon



Figuur 5 De parametrische bolpatronen uit Figuur 1 gereduceerd tot een schijf rond de evenaar

maar uit de identiteit. Het patroon heeft dan helemaal geen symmetrie. Als alleen de punten van een lijn ℓ vaste punten zijn, bestaat $\mathcal{G}$ slechts uit twee isometrieën: de identiteit en de spiegeling in ℓ . Het patroon heeft dan ℓ als symmetrieas, maar verder geen andere symmetrie.

In alle andere gevallen is er precies één punt O dat onder alle isometrieën van $\mathcal{G}$ op zijn plaats blijft. De symmetrieën kunnen dan alleen maar rotaties zijn met centrum O en spiegelingen in lijnen door O .

Als het patroon chiraal is, zijn er alleen maar rotaties. De groep $\mathcal{G}$ is dan cyclisch. Als p de orde van de groep is, dan is de kleinste positieve rotatiehoek $2\pi/p$ en dan zijn alle banen regelmatige p -hoeken met middelpunt O . Als handtekening neem ik dan $[g(p)]$.

Als het patroon achiraal is, moet er een eindig aantal, zeg q , spiegellijnen door O zijn. Elk tweetal naburige lijnen snijdt elkaar in Q onder een hoek van π/q . De groep $\mathcal{G}$ is dan de zogenaamde *dihedrale groep* die bestaat uit q lijnspiegelingen en q rotaties (waaronder

de identiteit). De orde van de groep is $2q$ en als handtekening neem ik $[s(q)]$. In Figuur 4 staan twee voorbeelden van rozetpatronen met hun handtekening, een chiraal patroon en een achiraal patroon.

Je kunt een rozetpatroon altijd op een grote bol plakken, zeg op de noordpool, waardoor er een parametrisch bolpatroon ontstaat met handtekening $[g(p, p)]$ bij de cyclische groep en $[s(p, p)]$ bij de dihedrale groep. Rozetpatronen kun je dus identificeren met bolpatronen met ‘dezelfde’ symmetriegroep. Als bolpatroon bestaan de symmetrieën dan uit rotaties om de poolas en spiegelingen in vlakken door de beide antipodale polen, en in het vlakke geval bestaan de symmetrieën uit rotaties rond het middelpunt en spiegelingen in lijnen door het middelpunt.

Strookpatronen

Strookpatronen (ze worden ook wel *friespatronen* genoemd) zijn vlakke patronen waarin een motief telkens herhaald wordt in een rij, zeg een horizontale rij. Hoewel strookpatro-

nen in werkelijkheid altijd eindig zijn, denken we ons in dat ze naar beide kanten onbeperkt voortgezet zijn, zodat er *translaties* onder de symmetrieën zijn. Als T de translatie is die elk motief in zijn rechterbuur overvoert, kan elke andere translatie in de symmetriegroep $\mathcal{G}$ van het patroon worden geschreven als T^n voor zekere gehele n . Maar er kunnen ook nog andere symmetrieën zijn.

Het is welbekend dat er precies zeven verschillende typen strookpatronen bestaan, en in feite kennen we ze al omdat ze kunnen worden opgevat als limietgevallen van de zeven parametrische bolpatronen. Zoals Conway al opmerkte: neem een eindig segment uit een strookpatroon dat bestaat uit N kopieën van het motief en wikkel dat om de evenaar van een bol met de juiste straal zodat het er goed aansluitend omheen past. Dan krijg je een parametrisch bolpatroon met een van de zeven handtekeningen $[g(N, N)]$, $[s(N, N)]$, $[g(N) s]$, $[g(N) x]$, $[g(N, 2, 2)]$, $[g(2) s(N)]$ en $[s(N, 2, 2)]$.

Omgekeerd kan elk parametrisch bolpatroon in het vlak worden afgewikkeld waardoor er een N -segment ontstaat van het bijbehorende strookpatroon. In Figuur 5 zijn voorbeelden van parametrische bolpatronen getekend met $N = 7$, waarbij de bol gereduceerd is tot een schijf rond de evenaar.

Als je die bolpatronen in het vlak afwikkelt, krijg je segmenten van lengte 7 van de bijbehorende oneindige strookpatronen. Het ligt voor de hand (laat N naar oneindig gaan) om als handtekening voor die strookpatronen respectievelijk $[g(\infty, \infty)]$, $[s(\infty, \infty)]$, $[g(\infty) s]$, $[g(\infty) x]$, $[g(\infty, 2, 2)]$, $[g(2) s(\infty)]$ en $[s(\infty, 2, 2)]$ te nemen. Zo krijg je de strookpatronen die in Figuur 6 getekend zijn.

Aangezien de symmetriegroep van elk strookpatroon oneindig is, geven de vergelijkingen (1) en (2) via $n \rightarrow \infty$,

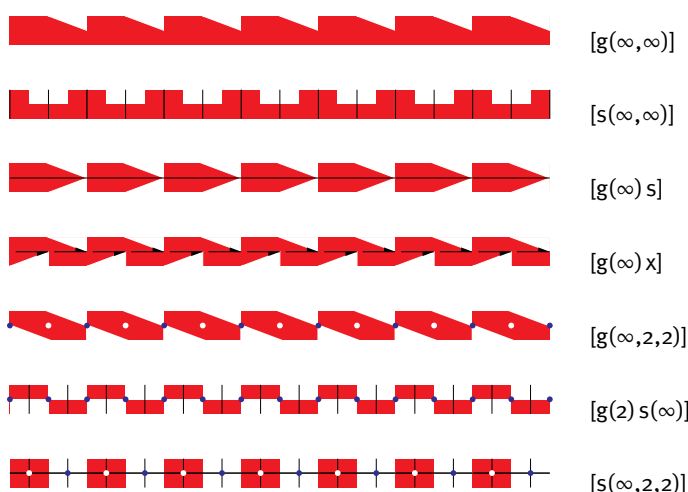
$$2 = \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (3)$$

voor chirale strookpatronen en

$$1 = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) + \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (4)$$

voor achirale strookpatronen, waarbij de p -sommaties in (3) en (4) zich uitstrekken over alle equivalentieklassen van rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen, terwijl de q -sommatie in (4) gaat over alle equivalentieklassen van rotatiecentra op spiegellijnen.

Merk op dat de ‘noordpool’ en de ‘zuidpool’ naar oneindig zijn verdwenen in de ver-



Figuur 6 De bolpatronen uit Figuur 5 afgewikkeld in het vlak

ticale richting en dat de rotaties rond de polen daarmee horizontale translaties zijn geworden met 'rotatiehoek' 0 en 'centrum' plus of min oneindig in de verticale richting. Voor deze centra 'op oneindig' moet je respectievelijk $p = \infty$ of $q = \infty$ nemen, zodat $1/p = 1/(2q) = 0$. Dit levert bijdragen van 1 of $\frac{1}{2}$ in de bovenstaande sommaties. Op die manier kun je de vergelijkingen (3) en (4) gemakkelijk verifiëren voor alle strookpatronen.

Draaispiegelingen op de bol worden *glijspiegelingen* van de strookpatronen in het vlak, waarbij een glijspiegeling de combinatie is van een lijnspiegeling en een translatie langs de spiegelas. Tweemaal achter elkaar toepassen van een glijspiegeling geeft een translatie langs de as. Zie hierboven strookpatroon $[g(\infty)x]$ voor een voorbeeld van een horizontale glijspiegeling die geen spiegellijn van het patroon is. In dit voorbeeld heb ik de glijspiegelas aangegeven door een onderbroken lijn met alternerende halve pijlen.

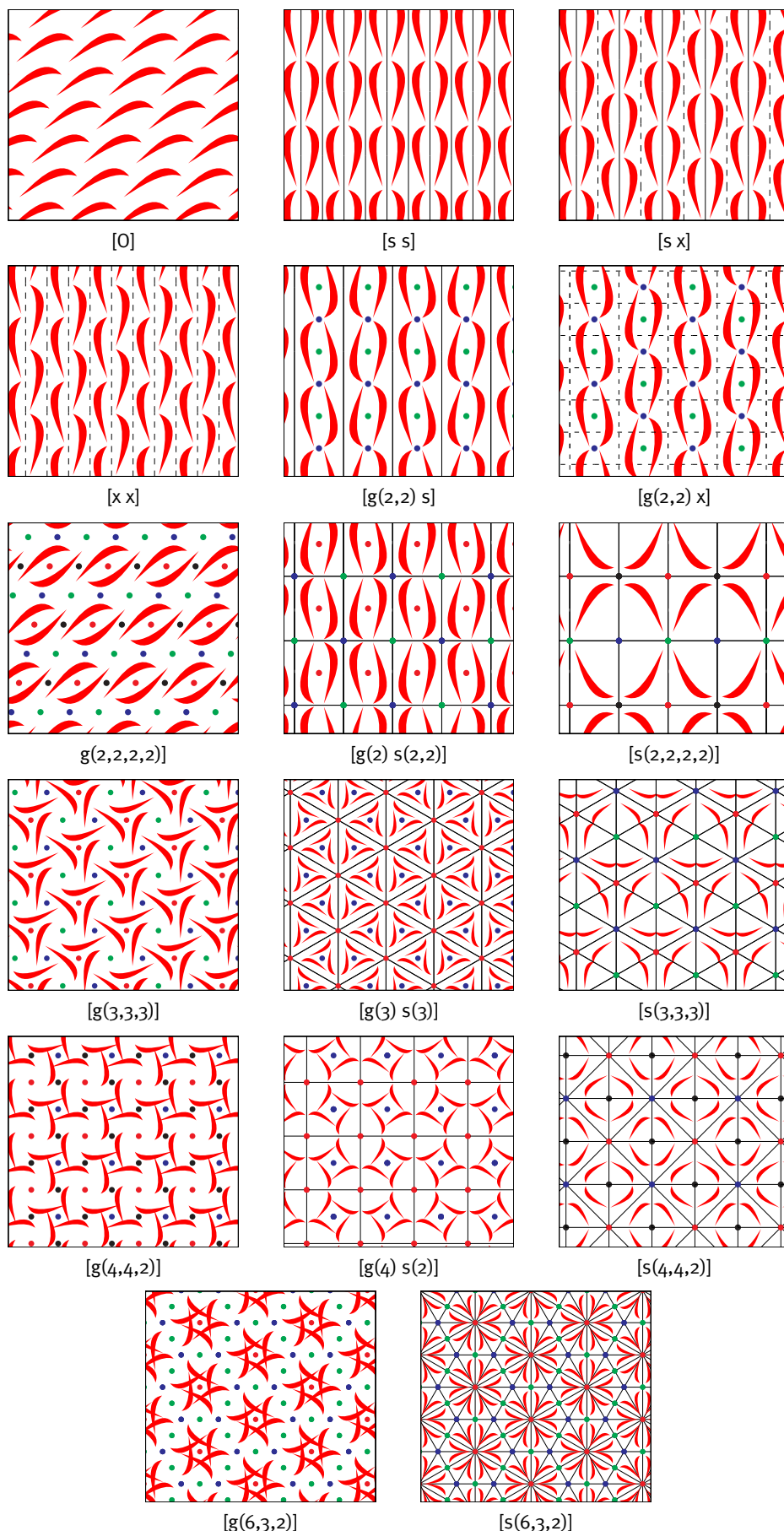
Patroon $[g(\infty)s]$ heeft ook horizontale glijspiegelingen, maar die zijn samengesteld uit lijnspiegelingen en translaties die al in de symmetriegroep van het patroon zitten. Daarom worden ze niet in de handtekening vermeld. Conways handtekening bevat nooit overbodige informatie. Dat is ook de reden waarom equivalente rotatiecentra slechts één vermelding krijgen.

Een horizontale glijspiegeling krijg je ook wanneer je een verticale lijnspiegeling combineert met een 2-voudige rotatie (een halve draai) rond een centrum dat niet op de verticale spiegelas ligt. De glijspiegelas is dan de horizontale lijn door het centrum van de halve draai. Omgekeerd geeft de combinatie van een horizontale glijspiegeling met een halve draai op de glijspiegelas een verticale lijnspiegeling. In de patronen $[g(2)s(\infty)]$ en $[s(\infty,2,2)]$ komen verticale lijnspiegelingen en halve draaiingen op een horizontale lijn voor. Maar omdat die symmetrieën zelf al in de symmetriegroep voorkomen, worden de bijbehorende glijspiegelingen niet in de handtekening vermeld.

Hiermee is de behandeling van de strookpatronen voltooid.

Behangpatronen

Terwijl er bij rozetpatronen geen translaties zijn en bij strookpatronen alleen translaties in één richting, treden bij de zogenaamde *behangpatronen* (Engels: *wallpaper patterns*) translaties op in meerdere richtingen. Ik zal aannemen dat de symmetriegroep $\mathcal{G}$ van zo'n patroon *discreet* is, dat wil zeggen dat er bij elk punt P een cirkeltje met middelpunt P is



Figuur 7 Zeventien typen van behangpatronen met hun handtekeningen

dat buiten P zelf geen andere punten van de baan van P bevat. Dat betekent dat er een begrensde motief is dat via de translaties in $\mathcal{G}$ over het gehele vlak onbepaald herhaald wordt.

Merk op dat ik bij bolpatronen, rozetpatronen en strookpatronen ook steeds stilzwijgend heb aangenomen dat de symmetriegroep discreet is. Bij bolpatronen en rozetpatronen was dat het geval omdat ik heb geëist dat de symmetriegroep eindig is. Dat sloot bijvoorbeeld het geval uit waarin het patroon alleen maar uit een (ongemarkeerde) cirkel bestaat. Die heeft immers oneindig veel rotaties en spiegelingen als symmetrieën.

Omdat de symmetriegroep $\mathcal{G}$ van een behangpatroon discreet is, is er een translatie T_1 met een minimale positieve translatieafstand d_1 en een tweede translatie T_2 , in een andere richting, met een minimale positieve translatieafstand $d_2 \geq d_1$. Door de richting van T_2 zo nodig om te keren, kun je ervoor zorgen dat de hoek α tussen T_1 en T_2 niet stomp is. Als $\alpha < \pi/3$ zou zijn, zou de translatieafstand van de translatie $T_1 - T_2$ kleiner zijn dan d_2 op grond van de sinusregel, in tegenspraak met de keuze van T_2 . Er geldt dus $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Het is eenvoudig om te bewijzen dat elke translatie T in $\mathcal{G}$ geschreven kan worden als $T = T_1^n T_2^m$ voor zekere gehele getallen n en m , met andere woorden, dat de ondergroep $\mathcal{T}$ van alle translaties in $\mathcal{G}$ voortgebracht wordt door T_1 en T_2 . Voor elk punt P geldt dat de baan van P onder $\mathcal{T}$ een rooster is dat wordt opgespannen door vectoren die bij de translaties T_1 en T_2 horen.

Maar behangpatronen kunnen ook nog andere symmetrieën hebben. In feite is welbekend (en ik zal het hier opnieuw bewijzen) dat er precies 17 verschillende typen van behangpatronen zijn. Elk type heeft zijn eigen handtekening, die in een notendop alle symmetrie-eigenschappen van het patroon samenvat. Net zoals dat bij bolpatronen, rozetpatronen en strookpatronen het geval was, is het heel gemakkelijk om de handtekening bij een gegeven behangpatroon te vinden als je eerst de chiraliteit ervan vaststelt, vervolgens alle eventuele spiegellijnen en rotatiecentra markeert, en ten slotte, als ze er zijn, de assen van de glijspiegelingen die niet ook al als spiegellijnen gemarkeerd zijn.

Zeventien typen van behangpatronen

In Figuur 7 geef ik bij elk van de 17 typen van behangpatronen een eenvoudig voorbeeld samen met de handtekening ervan. Bij elk voorbeeld heb ik de spiegellijnen zwart getekend en de rotatiecentra aangegeven met ge-

kleurde stippen, equivalente centra in dezelfde kleur. Glijspiegelingen die geen spiegellijnen zijn, heb ik aangegeven met gestreepte lijnen.

De lezer zal weinig moeite hebben om de gegeven handtekeningen te doorgronden en te verifiëren. In navolging van Conway gebruik ik $[O]$ als handtekening voor een patroon waarbij translaties de enige symmetrieën zijn.

Bij patroon $[s\ s]$ zijn er twee soorten spiegellijnen, allebei verticaal. Ze wisselen elkaar af op gelijke afstand. Bij patroon $[s\ x]$ wisselen verticale spiegellijnen en glijspiegelingen elkaar af met gelijke tussenruimten. De spiegellijnen zijn onderling allemaal equivalent, en hetzelfde geldt voor de glijspiegelingen. Patroon $[x\ x]$ heeft twee soorten glijspiegelingen, allebei verticaal, en allebei met dezelfde verticale translatieafstand.

Speciale aandacht verdient het patroon $[g(2,2)\ x]$, waarin twee niet-equivalente soorten 2-voudige rotatiecentra voorkomen, blauw en groen gekleurd, en twee soorten glijspiegelingen, horizontaal en verticaal. Merk op dat een horizontale glijspiegeling gevolgd door een halve draai om een centrum dat niet op de glijspiegeling ligt, een verticale glijspiegeling geeft. Daarom staat er in de handtekening van dit patroon maar één symbool 'x'.

In de volgende paragraaf geef ik meer details bij de verschillende patronen en daarna bewijs ik ook dat de opsomming volledig is: er zijn niet meer dan 17 verschillende typen van behangpatronen.

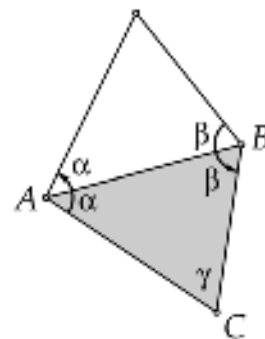
Isometrieën in het vlak

In deze en de volgende paragrafen gebruik ik ideeën van L. Fejes Tóth [3, p. 29].

Het is welbekend dat elke isometrie in het euclidische vlak een translatie, een rotatie, een lijnspiegeling of een glijspiegeling is. Translaties en rotaties zijn directe isometrieën, lijnspiegelingen en glijspiegelingen zijn indirecte isometrieën. Elke groep $\mathcal{G}$ van isometrieën bestaat uitsluitend uit directe isometrieën, of de directe isometrieën in $\mathcal{G}$ vormen een ondergroep $\mathcal{H}$ van index 2.

Een patroon in het vlak heet *chiraal* als de enige symmetrieën ervan directe isometrieën zijn, anders heet het patroon *achiraal*. Je kunt de chiraliteit van een patroon gemakkelijk vaststellen met behulp van een spiegel.

Een rotatie heeft een *centrum* en een *rotatiehoek*, die we altijd tegen de klok in meten in radialen modulo 2π . Het is soms handig om translaties op te vatten als rotaties met rotatiehoek 0 en een centrum dat oneindig ver weg ligt in een richting loodrecht op de translatierichting.



Figuur 8

In een discrete groep $\mathcal{G}$ vormen de rotaties met een gemeenschappelijk centrum een cyclische ondergroep van eindige orde p , voortgebracht door een rotatie met rotatiehoek $2\pi/p$. Evenzo vormen de translaties met een gemeenschappelijke translatierichting een oneindige cyclische ondergroep voortgebracht door een translatie met een translatieafstand $d > 0$.

Als R_1 en R_2 spiegelingen in respectievelijk spiegellijnen m_1 en m_2 zijn, dan is $R_2 R_1$ (R_1 gevolgd door R_2) een translatie met afstand $2d$ als m_1 en m_2 evenwijdig zijn met een afstand d , en een rotatie met centrum A en rotatiehoek 2α als m_1 en m_2 elkaar in A snijden onder een hoek α .

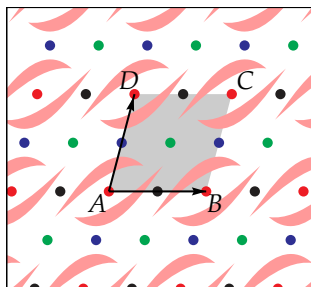
Als R_1 en R_2 rotaties met respectievelijk centra A_1 en A_2 en rotatiehoeken α_1 en α_2 zijn, dan is $R_2 R_1$ een rotatie met rotatiehoek $\alpha_1 + \alpha_2$, of een translatie als $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \pmod{2\pi}$. Als R_1 en R_2 beide halve draaien zijn, zodat de beide rotatiehoeken gelijk zijn aan π , dan is $R_2 R_1$ een translatie met afstand $2d(A_1, A_2)$ in de richting van A_1 naar A_2 .

Als ABC een driehoek is met hoeken van respectievelijk α , β en γ radialen die georiënteerd is met de klok mee (zie Figuur 8), dan geeft een rotatie met centrum A en hoek 2α gevolgd door een rotatie met centrum B en hoek 2β een rotatie die C terugbrengt op zijn plaats, en dus is het een rotatie met centrum C (en rotatiehoek $2\alpha + 2\beta = 2\pi - 2\gamma$).

Als A en B dus rotatiecentra van een behangpatroon van orde p respectievelijk q zijn, en p en q zijn niet beide 2, dan is C , geconstrueerd als boven met hoeken $\alpha = \pi/p$ en $\beta = \pi/q$, ook een rotatiecentrum van het patroon.

Chirale behangpatronen

Stel dat een chiraal behangpatroon gegeven is met een discrete symmetriegroep $\mathcal{G}$. Dan zijn alle isometrieën in $\mathcal{G}$ translaties of rotaties. Ik heb al laten zien dat de ondergroep $\mathcal{T}$ van alle translaties in $\mathcal{G}$ voortgebracht kan worden door twee translaties T_1 en T_2 met mi-



Figuur 9

nimale translatieafstanden $d_1 \leq d_2$ en hoek $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$. Als er geen rotaties zijn, valt $\mathcal{G}$ samen met $\mathcal{T}$ en dan is de handtekening [0].

Stel nu dat alle rotatiecentra in het patroon 2-centra zijn. Alle rotaties in $\mathcal{G}$ zijn dus halve draaien. Stel dat A een 2-centrum is en stel dat $ABCD$ het parallellogram is met $B = T_1 A$, $C = T_2 T_1 A$ en $D = T_2 A$ (zie Figuur 9). Dan zijn de hoekpunten van het parallellogram, de middens van de zijden en het middelpunt van het parallellogram ook allemaal 2-centra, negen stuks in totaal.

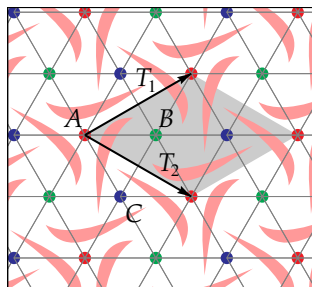
Maar centra die een translatie in $\mathcal{T}$ verschillen, zijn equivalent, dus er zijn maar vier niet-equivalente 2-centra onder deze negen centra. Je kunt daarvoor A en de middens van AB , AC en AD nemen.

Ik beweer nu dat alle 2-centra in het patroon equivalent zijn met een van deze vier. Inderdaad, bij elk ander 2-centrum is er een equivalent 2-centrum E in of op de rand van $ABCD$. Maar als E niet een van de bovengenoemde negen centra is, geeft de samenstelling van halve draaien rond A en E een translatie die niet door T_1 en T_2 voortgebracht is, en dat is onmogelijk. Er zijn dus precies vier niet-equivalente soorten 2-centra in dit patroon en de handtekening ervan is $[g(2,2,2,2)]$.

Als niet alle rotatiecentra 2-centra zijn, neem ik twee centra A en B van respectievelijk orde p en q , beide groter dan 2, met een minimale afstand d . Stel dat C het hoekpunt is van de driehoek ABC met hoeken π/p en π/q in respectievelijk A en B . Dan is C het centrum van een rotatie in $\mathcal{G}$ met een hoek $2\pi/p + 2\pi/q = 2\pi - 2\pi/r$ voor een zeker positief rationaal getal r , dus

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1. \quad (5)$$

Als $p = q = 3$ dan is ook $r = 3$, dus dan zijn A , B en C allemaal 3-centra. De combinatie van een rotatie met hoek $+2\pi/3$ rond A en een rotatie met hoek $-2\pi/3$ rond B geeft een translatie T_1 , en de combinatie van een rotatie met hoek $-2\pi/3$ rond A en $+2\pi/3$ rond B geeft een translatie T_2 (zie Figuur 10).



Figuur 10

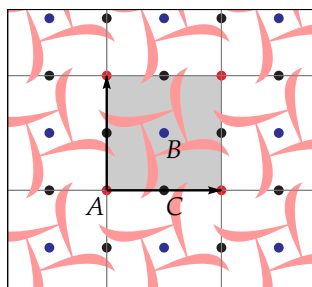
Door op B en C rotaties over $2\pi/3$ en $4\pi/3$ rond A toe te passen, gaan die over in de vier overige hoekpunten van een regelmatige zeshoek met middelpunt A . Met behulp van de translaties T_1 en T_2 kun je het gehele vlak betegelen met zulke zeshoeken. Omdat B op minimale afstand van A is genomen, kan er geen andere rotatiecentrum van orde groter dan 2 binnen de zeshoek met middelpunt A liggen, en dus evenmin elders in het patroon. Maar ook rotatiecentra van orde 2 kunnen niet voorkomen, want dan zouden er ook centra zijn van rotaties over een hoek $2\pi/2 - 2\pi/3 = 2\pi/6$, in tegenspraak met de bovenstaande opmerking. De 3-centra A , B en C zijn niet equivalent, dus deze groep heeft de handtekening $[g(3,3,3)]$.

Als in dezelfde notaties als boven p en q niet beide gelijk zijn aan 3 maar wel groter dan 2, ligt het punt C (dat een rotatiecentrum van het patroon is) dichterbij A dan B , en dus moet C een 2-centrum zijn. Hieruit volgt dat $r = 2$ en

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

hetgeen kan worden geschreven als $(p - 2)(q - 2) = 4$. De enige oplossingen met $p \geq q \geq 3$ zijn $(p, q) = (4, 4)$ en $(p, q) = (6, 3)$. Dat houdt in het bijzonder in dat in een behangpatroon alleen maar 2-centra, 3-centra, 4-centra en 6-centra voor kunnen komen. Dit is de beroemde *kristallografische beperking*.

Als $p = q = 4$ moeten A en B naburige 4-centra zijn en zoals we al weten is C een

Figuur 11 $[g(4,4,2)]$

2-centrum. Driehoek ABC is dan een gelijkbenige rechthoekige driehoek die je op kunt vatten als deel van een vierkant met A als een van de hoekpunten, B als middelpunt en C als het midden van een zijde die in A begint. Een combinatie van rotaties rond A en B met hoeken $\pm 2\pi/4$ en $\mp 2\pi/4$ geeft translaties langs twee van de zijden van dit vierkant. Deze translaties brengen $\mathcal{T}$ voort. Hieruit volgt dat A en B niet-equivalente 4-centra zijn, en dus is de handtekening van deze groep $[g(4,4,2)]$ (zie Figuur 11).

Op net zo'n manier leidt het geval $p = 6$, $q = 3$ tot een patroon van 6-centra, 3-centra en 2-centra die een rooster van gelijkzijdige driehoeken vormen met 6-centra in hun hoekpunten, 3-centra in hun middelpunten en 2-centra in de middens van de zijden. De handtekening van dit patroon is $[g(6,3,2)]$ (zie Figuur 12).

Merk op dat vergelijking (5) kan worden geschreven als

$$2 = \left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{1}{r}\right),$$

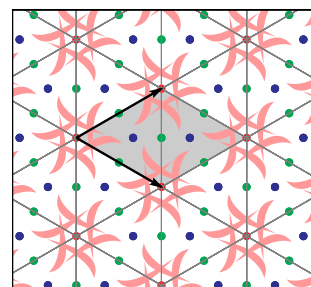
of, korter, als

$$2 = \sum \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (7)$$

Deze vergelijking heeft dezelfde vorm als vergelijking (3). Ook het patroon $[g(2,2,2,2)]$ voldoet hieraan (met vier 2-centra van 'gewicht' $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$). Zelfs een patroon met handtekening [0] voldoet aan deze vergelijking als je de twee voortbrengende translaties ziet als rotaties met rotatiehoek 0 en 'orde' ∞ . Elk geeft dan een bijdrage van 'gewicht' $1 - 1/\infty = 1$ aan het rechterlid.

Achirale behangpatronen

Nu de achirale patronen. Dan moet de symmetriegroep $\mathcal{G}$ minstens één lijnspiegeling of glijspiegeling bevatten. De directe isometrieën in $\mathcal{G}$ vormen dan een ondergroep $\mathcal{H}$ van index 2.

Figuur 12 $[g(6,3,2)]$

Rotatiegroepen (chirale patronen)	Gemengde groepen (achirale patronen)	Spiegelingsgroepen (achirale patronen)
[0]	[g(2,2) s] [g(2,2) x]	[s s] [s x] [x x]
[g(2,2,2,2)]	[g(2) s(2,2)]	[s(2,2,2,2)]
[g(3,3,3)]	[g(3) s(3)]	[s(3,3,3)]
[g(4,4,2)]	[g(4) s(2)]	[s(4,4,2)]
[g(6,3,2)]		[s(6,3,2)]

Tabel 5 De zeventien typen symmetriegroepen van behangpatronen

De translaties vormen een ondergroep $\mathcal{T}$ van $\mathcal{H}$. Ik onderscheid nu vier gevallen.

Geval 1: achirale patronen zonder rotaties.

Stel eerst dat $\mathcal{G}$ geen rotaties bevat. Dan is $\mathcal{H} = \mathcal{T}$. Spiegellijnen en glijspiegelingen kunnen dan maar in één richting voorkomen, want als ze elkaar snijden, zijn er ook niet-triviale rotaties. Ik neem aan dat alle eventuele spiegellijnen en glijspiegelingen verticaal zijn.

Als er een spiegellijn m is, zijn er ook oneindig veel, en ze liggen op gelijke afstanden van elkaar. Stel dat m' een spiegellijn is op minimale afstand van m . Als m en m' niet equivalent zijn, zijn er precies twee soorten spiegellijnen. Ze zijn equivalent met m of m' . De handtekening van de groep is dan $[s\ s]$.

Als m en m' equivalent zijn, moet er een glijspiegeling zijn die ze in elkaar overvoert. De glijspiegeling moet dan precies halverwege m en m' liggen. Spiegellijnen en glijspiegelingen wisselen elkaar dan op gelijke afstanden af. Alle spiegelingen zijn equivalent en alle glijspiegelingen ook. De groep heeft als handtekening $[s\ x]$.

Als er geen spiegellijnen zijn, dan zijn er glijspiegelingen, allemaal parallel. Als n en n' naburige assen zijn, kunnen ze niet equivalent zijn, maar alle andere assen zijn equivalent met hetzij n , hetzij n' . De handtekening is dan $[x\ x]$.

Geval 2: alle rotatiecentra liggen op spiegellijnen.

Als er in een achiraal patroon rotatiecentra voorkomen, kunnen ze al dan niet op spiegellijnen liggen. Ik bekijk eerst het geval dat ze allemaal op spiegellijnen liggen. De ondergroep $\mathcal{H}$ van alle directe isometrieën in $\mathcal{G}$ is dan een van de vier typen met handtekening $[g(2,2,2,2)]$, $[g(3,3,3)]$, $[g(4,4,2)]$ of $[g(6,3,2)]$, en de voorbeelden in Figuur 7 laten zien dat het in de laatste drie gevallen mogelijk is om de rotatiecentra zo door spiegellijnen te verbinden dat er door elk q -centrum precies q spiegellijnen gaan, waarbij aangrenzende lijnen elkaar snijden onder een hoek van π/q radialen. Op die manier krijg je de spiege-

lingsgroepen met handtekeningen $[s(3,3,3)]$, $[s(4,4,2)]$, $[s(6,3,2)]$.

Voor patronen met $[g(2,2,2,2)]$ als handtekening lukt dat alleen als de parallelogrammen van de 2-centra rechthoeken zijn. De spiegellijnen vormen dan een rechthoekig rooster en de handtekening is $[s(2,2,2,2)]$.

Merk op dat al deze spiegelingsgroepen voortgebracht worden door hun spiegelingen. Merk ook op dat vergelijking (7) in dit geval luidt $2 = \sum \left(1 - \frac{1}{q}\right)$ of, na delen door 2,

$$1 = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right), \quad (8)$$

hetgeen overeenkomt met vergelijking (4) voor achirale strookpatronen (er zijn in dit geval geen p -voudige rotatiecentra).

Geval 3: er zijn rotatiecentra maar geen spiegellijnen.

Stel nu dat er wel rotatiecentra zijn maar geen spiegellijnen. Ook in dit geval moet de ondergroep $\mathcal{H}$ van alle directe isometrieën een van de vier handtekeningen $[g(2,2,2,2)]$, $[g(3,3,3)]$, $[g(4,4,2)]$ of $[g(6,3,2)]$ hebben. En er moet dan een glijspiegeling G in $\mathcal{G}$ zijn. Net als alle isometrieën in $\mathcal{G}$ moet deze glijspiegeling p -centra in p -centra transformeren. Maar als G een p -centrum A in een p -centrum A' transformeert dat equivalent met A is in $\mathcal{H}$, dan is er een directe isometrie D die A' weer terugbrengt naar A . Dan heeft de indirecte isometrie DG het punt A als een vast punt, en dus moet die isometrie dan een spiegeling zijn in een lijn door A , in tegenspraak met de aanname dat het patroon geen spiegellijnen heeft.

Maar als G geen rotatiecentra in equivalente rotatiecentra kan transformeren (equivalent in $\mathcal{H}$) dan zijn de handtekeningen $[g(4,4,2)]$ en $[g(6,3,2)]$ voor $\mathcal{H}$ uitgesloten omdat bijvoorbeeld de 2-centra in 2-centra moeten overgaan, en die zijn allemaal equivalent in $\mathcal{H}$.

Ook $[g(3,3,3)]$ is niet mogelijk, want stel dat G een 3-centrum A transformeert in een 3-centrum B dat in $\mathcal{H}$ niet equivalent is met

A . Dan gaat B over in $GB = G^2A$ en omdat G^2 een translatie is, is $GB = G^2A$ in $\mathcal{H}$ equivalent met A . Alle 3-centra die in $\mathcal{H}$ met A equivalent zijn, worden dus door G getransformeerd in centra die in $\mathcal{H}$ met B equivalent zijn, en omgekeerd. Maar dan wordt elk 3-centrum C dat in $\mathcal{H}$ noch met A , noch met B equivalent is, door G in een 3-centrum getransformeerd dat in $\mathcal{H}$ equivalent is met C , hetgeen een tegenspraak is.

Als de handtekening van $\mathcal{H}$ gelijk is aan $[g(2,2,2,2)]$, kan het echter gebeuren dat er een glijspiegeling G is zonder dat er spiegellijnen zijn, namelijk als de 2-centra een rechthoekig rooster vormen. Als A , B , C en D 2-centra zijn die een rechthoek $ABCD$ vormen van minimale zijdelengten, dan is er een glijspiegeling G met $GA = C$ en $GB = D$. In feite zijn er zelfs twee van die glijspiegelingen met assen door het middelpunt van die rechthoek die evenwijdig aan de zijden zijn. Er zijn dan twee niet-equivalente soorten 2-centra en het patroon heeft handtekening $[g(2,2)\ x]$.

Geval 4: er zijn spiegellijnen en rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen.

Ten slotte bekijk ik het geval dat er spiegellijnen zijn en rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen. Het kan voorkomen dat alle spiegellijnen parallel zijn. Neem aan dat ze verticaal zijn. Rotatiecentra die niet op die spiegellijnen liggen, kunnen dan alleen maar 2-centra zijn en ze moeten precies midden tussen twee naburige spiegellijnen in liggen. Als A zo'n 2-centrum is, moeten er op de verticale lijn door A nog meer van die centra liggen. Laat B het 2-centrum zijn dat het dichtst boven A ligt. Dan zijn de 2-centra A en B niet equivalent, en elk ander 2-centrum is equivalent met A of B . De handtekening van dit patroon is $[g(2,2)\ s]$.

Als er spiegellijnen in meerdere richtingen zijn, kan het voorkomen dat alle rotatiecentra op spiegellijnen 2-centra zijn. De spiegellijnen vormen dan een rechthoekig rooster en de rotatiecentra die niet op een spiegellijn liggen moeten dan in de middelpunten van die rechthoeken liggen. Ze zijn dan allemaal equivalent via de spiegelingen in de lijnen van het rooster. Als het 2-centra zijn, zijn er twee soorten 2-centra op de snijpunten van de spiegellijnen, en de handtekening is dan $[g(2)\ s(2,2)]$. Als de middelpunten van de rechthoeken 4-centra zijn, moet het rooster van spiegellijnen een vierkantenrooster zijn. Alle snijpunten van roosterlijnen zijn dan equivalente 2-centra en de handtekening is $[g(4)\ s(2)]$.

Ten slotte, als er q -centra van orde $q \geq 3$ op spiegellijnen liggen, dan heeft de ondergroep van alle isometrieën in $\mathcal{G}$ die voortge-

bracht wordt door alle spiegelingen als handtekening $[s(3,3,3)]$, $[s(4,4,2)]$ of $[s(6,3,2)]$. Maar in de laatste twee gevallen zijn de ‘cellen’ die door de spiegellijnen worden begrensd rechthoekige driehoeken, en dan kunnen er geen rotatiecentra zijn die niet op spiegellijnen liggen. Dat kan wél in het geval $[s(3,3,3)]$. Dan zijn de cellen gelijkzijdige driehoeken, en in de centra daarvan kunnen 3-centra worden geplaatst. Dan worden alle 3-centra op de spiegellijnen equivalent, en de handtekening van dit patroon is $[g(3) s(3)]$.

Hiermee is de beschrijving van alle typen behangpatronen voltooid. Met het oog op Conways ‘magic theorems’ die nog ter sprake zullen komen, merk ik op dat je direct kunt controleren dat bij alle achirale patronen waarin rotatiecentra voorkomen, voldaan is aan de vergelijking

$$1 = \sum \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right) + \sum \left(1 - \frac{1}{p} \right), \quad (9)$$

die hetzelfde is als vergelijking (4) voor achirale strookpatronen. De p -sommatie strekt zich daarbij uit over alle equivalentieklassen van rotatiecentra die niet, en de q -sommatie over alle klassen van centra die wél op spiegellijnen liggen.

Samenvatting

In Tabel 5 vat ik de verkregen resultaten samen. De symmetriegroepen van de chirale patronen heten *rotatiegroepen* (bedenk dat translaties kunnen worden opgevat als rotaties met rotatiehoek 0 en centrum op oneindig). Groepen waarin alle rotatiecentra (voor zover aanwezig) op spiegellijnen liggen, heten *spiegelingsgroepen* en groepen van achirale patronen waarin rotatiecentra voorkomen die niet op spiegellijnen liggen, heten *gemengde groepen*.

Conways ‘Magic Theorems’

Een van de meest intrigerende zaken in de behandeling van de symmetriepatronen in [1] is het gebruik van ‘magic theorems’ om de opsomming van symmetriepatronen te vereenvoudigen. Deze stellingen worden al in het begin van het boek gebruikt, maar de bewijzen ervan worden steeds maar uitgesteld. Dat komt omdat de bewijzen die de auteurs uiteindelijk geven, gebruik maken van geavanceerde topologische hulpmiddelen zoals het begrip *orbifold*, de *Euler karakteristiek* en de classificatie van oppervlakken. In mijn meer elementaire behandeling van symmetrische patronen op de bol en in het vlak krijg ik ze

	JvdC	Con	orde
Rozetpatronen	$[g(N)]$	N•	N
	$[s(N)]$	*N•	$2N$
Bolpatronen (parametrisch)	$[g(N, N)]$	NN	N
	$[s(N, N)]$	*NN	$2N$
	$[g(N) s]$	N*	$2N$
	$[g(N) x]$	N×	$2N$
	$[g(N, 2, 2)]$	22N	$2N$
	$[s(N, 2, 2)]$	*22N	$4N$
	$[g(2) s(N)]$	2*N	$4N$
Bolpatronen (platonisch)	$[g(3, 3, 2)]$	332	12
	$[s(3, 3, 2)]$	*332	24
	$[g(3) s(2)]$	3*2	24
	$[g(4, 3, 2)]$	432	24
	$[s(4, 3, 2)]$	*432	48
	$[g(5, 3, 2)]$	532	60
	$[s(5, 3, 2)]$	*532	120

Tabel 6 Notaties voor eindige symmetriepatronen

	JvdC	Con	Int
Strookpatronen	$[g(\infty, \infty)]$	$\infty \infty$	p111
	$[s(\infty, \infty)]$	$* \infty \infty$	pm11
	$[g(\infty) s]$	$\infty *$	p1m1
	$[g(\infty) x]$	$\infty \times$	p1a1
	$[g(\infty, 2, 2)]$	22∞	p112
	$[s(\infty, 2, 2)]$	*22∞	pmm2
	$[g(2) s(\infty)]$	2*∞	pma2
Behangpatronen	$[0]$	0	p1
	$[s s]$	**	pm
	$[s x]$	*×	cm
	$[x x]$	×	pg
	$[g(2, 2) s]$	22*	pmg
	$[g(2, 2) x]$	22×	pgg
	$[g(2, 2, 2, 2)]$	2222	p2
	$[g(2) s(2, 2)]$	2*22	cmm
	$[s(2, 2, 2, 2)]$	*2222	pmm
	$[g(3, 3, 3)]$	333	p3
	$[g(3) s(3)]$	3*3	p31m
	$[s(3, 3, 3)]$	*333	p3m1
	$[g(4, 4, 2)]$	442	p4
	$[g(4) s(2)]$	4*2	p4g
	$[s(4, 4, 2)]$	*442	p4m
	$[g(6, 3, 2)]$	632	p6
	$[s(6, 3, 2)]$	*632	p6m

Tabel 7 Notaties voor strookpatronen en behangpatronen

als bijvangst cadeau. Ik wijs er echter op dat Conways bewijs dieper inzicht geeft en ook gebruikt kan worden bij algemenere symme-

trieproblemen, zoals blijkt uit de delen II en III van het boek.

Allereerst definiëren Conway, Burgiel en

Goodman–Strauss bij elke symmetrie-eigenschap van een patroon die in een handtekening voorkomt, op de volgende manier de ‘kosten’ ervan. In plaats van ‘kosten’ gebruik ik liever de term ‘gewicht’.

- Voor een equivalentieklasse van p -voudige rotatiecentra die niet op spiegellijnen liggen, is het gewicht $1 - \frac{1}{p}$.
- Voor een equivalentieklasse van q -voudige rotatiecentra die op spiegellijnen liggen, is het gewicht $\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}$.
- Voor een symbool ‘s’ (met of zonder haakjes erachter) is het gewicht 1.
- Voor een symbool ‘x’ is het gewicht 1.
- Voor het symbool ‘g’ is het gewicht 0.
- Voor het symbool ‘O’ is het gewicht 2.

Merk op dat voor equivalentieklassen van ∞ -voudige rotatiepunten (die voorkomen in strookpatronen) het gewicht gelijk is aan 1 als ze niet op spiegellijnen liggen, en $\frac{1}{2}$ als ze wel op spiegellijnen liggen (laat $p \rightarrow \infty$, respectievelijk $q \rightarrow \infty$). Ik geef nu Conways Magic Theorems.

Conways Magic Theorem voor bolpatronen.

Het totale gewicht van de handtekening van een bolpatroon met een symmetriegroep van orde n is $2 - \frac{2}{n}$.

Bewijs. Voor chirale patronen is dit vergelijking (1). Voor achirale patronen is dit vergelij-

king (2) als je bij de beide leden 1 optelt om het symbool ‘s’ of het symbool ‘x’ in rekening te brengen.

Conways Magic Theorem voor strookpatronen en behangpatronen. *Het totale gewicht van de handtekening van een strookpatroon of een behangpatroon is 2.*

Bewijs. Voor chirale strookpatronen is dit vergelijking (3). Voor achirale strookpatronen is dit vergelijking (4) als je bij de beide leden 1 optelt om het symbool ‘s’ of het symbool ‘x’ in rekening te brengen. Zie voor chirale behangpatronen vergelijking (7) en de opmerkingen erna. Voor achirale behangpatronen is het vergelijking (9) als je bij de beide leden 1 optelt om het symbool ‘s’ of het symbool ‘x’ in rekening te brengen. Ook bij de overblijvende gevallen [s s], [s x] en [x x] is het totale gewicht van de handtekening steeds gelijk aan 2.

Enige opmerkingen over notaties

Conways ‘signature notation’ is veel compacter dan die van mij. Hij laat alle haakjes en de letter ‘g’ weg. Voor mijn letters ‘s’ en ‘x’ gebruikt hij respectievelijk de symbolen * en $\times$. Hij zet zijn handtekening in vette letters en cijfers. Zo luiden bijvoorbeeld mijn handtekeningen [g(2) s(2,2)] en [s x] bij hem **2*22** en *** $\times$** .

Merk daarbij op dat Conway de ster (*) niet alleen gebruikt om rotatiecentra op spiegels aan te duiden, maar ook als scheidingsteken: elk getal *ervoor* heeft betrekking op rotatiecentra die *niet* op spiegels liggen terwijl elk getal *erna* rotatiecentra op spiegels aanduidt. Ik heb Conways notatie aangepast omdat ik denk dat beginners moeite hebben om alle subtiliteiten ervan op het eerste gezicht te doorgronden.

In Tabel 6 zet ik mijn notatie (JvdC) naast die van Conway (Con) en in Tabel 7, bij de strookpatronen en de behangpatronen, de notatie van de *International Tables for X-ray Crystallography* (Int). Voor eindige symmetriegroepen zet ik er ook de orde n van de symmetriegroep bij. Bij bolpatronen is het totale gewicht van een handtekening gelijk aan $2 - \frac{2}{n}$, en de lezer zal dit misschien nogmaals willen controleren.

Zie [1, p. 416] voor tabellen waarin Conways ‘signature notation’ voor de bolpatronen en de behangpatronen naast die van eerdere auteurs is gezet. 

Alle illustraties in dit artikel zijn van de hand van de auteur.

Referenties

- 1 John H. Conway, Heidi Burgiel en Chaim Goodman–Strauss, *The Symmetries of Things*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2008.
- 2 H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
- 3 L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.

Jan P. Hogendijk

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

j.p.hogendijk@uu.nl

Vakantiecursus

Middeleeuwse islamitische geometrische ornamentiek

Overall in de islamitische wereld zijn prachtige geometrische patronen te zien in middeleeuwse moskeeën en paleizen. Wat zijn de methoden van de middeleeuwse ontwerpers? Welke wiskundige kennis gebruiken ze? En heeft de islamitische geometrische ornamentiek een diepere betekenis? Tijdens de CWI-vakantiecursus 'Symmetrie' in augustus 2011 gaat Jan Hogendijk op deze vragen in.

Geometrische ornamenten kwamen al vroeg in de islamitische traditie voor, en werden in de loop van de tijd steeds ingewikkelder. In de West-Arabische kunst (Spanje, Marokko) zijn de patronen bij voorkeur gebaseerd op re-

gelmatige zeshoeken en achthoeken, en ook regelmatige veelhoeken met 12, 24, 16 en 32 zijden. Veel voorbeelden zijn te vinden in het Alhambra in Granada. In Iran en aangrenzende gebieden hadden de ontwerpers een voor-

liefde voor de vijfhoek en tienhoek. Patronen met regelmatige zevenhoeken, negenhoeken, elfhoeken en dertienhoeken zijn zeldzaam maar komen wel voor. De islamitische geometrische ornamentiek bereikte een hoogtepunt in de zeventiende eeuw in Iran.

Driedimensionale geometrische patronen zijn te vinden op de buitenkant van sommige koepels. Het bekendste voorbeeld is de koepel op het graf van de soefi-heilige Shah Nematollah Vali (1330–1431) in Mahan, Iran. Zie Figuur 2.

Een andere driedimensionale geometrische kunstvorm is de muqarnas, oorspronkelijk een soort stalactietengewelf. In het begin was de functie van muqarnas om in een vierkant gebouw met een ronde koepel een mooie overgang van de verticale muren naar de koepel te maken. De muqarnas ging al gauw een eigen leven leiden, en soms is de hele binnenkant van de koepel met een stalactietengewelf overdekt. Ook hiervan zijn prachtige voorbeelden in het Alhambra te vinden. In dit artikel gaan we niet verder op muqarnas in (om een indruk te krijgen zie [8], en op het internet staan prachtige platen).

De islamitische geometrische kunst heeft in de moderne tijd velen geïnspireerd. M.C. Escher (1898–1972) maakte een studie van de kunst in het Alhambra en ontwikkelde op basis daarvan een eigen manier om het vlak te vullen met figuren [2, pp. 24, 41, 50–55]. Islamitische geometrische ornamenten laten zich uitstekend gebruiken om wiskundige begrippen zoals 'symmetrie' en ook 'aperiodie-



Foto: J.P. Hogendijk

Figuur 1 Detail van mozaïek in de Darb-e Imam, Isfahan



Figuur 2 Graftombe van Shah Nematollah Vali in Mahan, Iran

Foto: J.P. Hogendijk

ke betegelingen' aan een breed publiek uit te leggen.

In dit artikel onderzoeken we enkele achtergronden van de middeleeuwse islamitische ornamentiek, en we zullen moderne theorieën over dit onderwerp vergelijken met het weinige dat bekend is uit middeleeuwse bronnen.

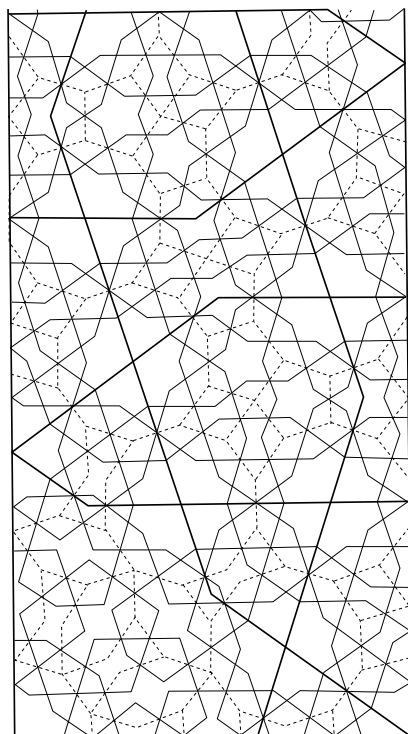
De methoden van de ontwerpers

Diverse moderne islamitische geleerden en handwerkers hebben tegen mij gezegd dat de islamitische geometrische kunst niet zozeer met bewuste methoden te maken had. De kunstenaars zouden door hun gevoel zijn geleid en God (of hun geloof in God) zou er voor gezorgd hebben dat de ornamenten perfect waren. Er zou dus geen wiskunde en geen methode nodig zijn.

Deze opvatting komt niet overeen met mijn eigen ervaring. Wie wel eens geprobeerd heeft, een ingewikkeld middeleeuws islamitisch patroon precies na te tekenen, weet dat dit een oefening in nederigheid is. En daarna is het weer een nieuwe opgave om zo'n patroon zo te construeren dat het precies in een gegeven ruimte past.

Laten we eens kijken naar wat de middeleeuwse islamitische bronnen zeggen over het construeren van (vlakke) geometrische ornamenten. Die bronnen zijn er in twee soorten. Allereerst zijn er de ornamenten zelf, op middeleeuwse gebouwen, en soms in ruïnes. De tweede soort bronnen bestaat uit manuscripten met tekeningen, met of zonder begeleidende tekst. Het bekendste voorbeeld is een boekrol die in de bibliotheek van het Topkapi-paleis in Istanbul wordt bewaard en die daarom de Topkapirol (Engels: Topkapi scroll) wordt genoemd. Hij is gepubliceerd in een facsimile editie [12] en ook voor een klein gedeelte op het internet beschikbaar. De Topkapirol is 29,5 m lang en 33 cm breed en bestaat uit stukken papier die aan elkaar zijn gelijmd. Op de rol staan tekeningen van tweedimensionale patronen en ook van horizontale projecties van (driedimensionale) muqarnas. De rol is vermoedelijk in de zestiende eeuw in de stad Tabriz in Noordwest-Iran vervaardigd. Er zijn maar weinig andere boekrollen en werktekeningen zoals de Topkapirol bekend. Mogelijk bestaan er veel meer van zulke tekeningen die op zolders van moskeeën of in kelders van bibliotheken op ontdekking liggen te wachten.

In de Topkapirol staan alleen figuren, zonder instructies over hoe deze moeten worden getekend. Figuur 3 is afgeleid van een tekening van een tweedimensionaal patroon uit de Topkapirol. In het origineel bestaat de tekening uit zwarte en rode lijnen en oranje stippellijnen, zie het artikel [15] dat via het internet toegankelijk is. Figuur 3 is ontstaan door het overtrekken van een tekening in de Topkapirol, en de figuur laat daardoor goed zien hoe nauwkeurig deze tekening is. De rode lijnen in de tekening, die in Figuur 3 vet zijn weergegeven, vormen een grof patroon. Dit patroon wordt in een veel fijner patroon onderverdeeld door de zwarte lijnen in de tekening, die in de figuur met doorgetrokken dunne lijnen worden weergegeven. Verder staan er in de tekening oranje stippellijnen, die in de figuur ook met stippellijnen zijn weergegeven. Deze stippellijnen zouden hulplijnen geweest kunnen zijn om het patroon te kunnen tekenen. De tekening is aan de bovenkant afgesneden en de lezer wordt uitgenodigd om het symmetriecentrum iets boven het midden te localiseren. Door een rotatie van 180° om dat centrum kan de rest van de oorspronkelijke tekening worden gereconstrueerd, en daar-

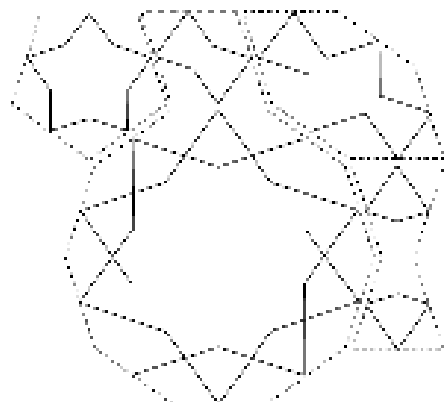


Illustratie: Steven Wepster

Figuur 3 Een patroon uit de Topkapirol [12, p. 300]

na kan het patroon worden voortgezet door herhaalde spiegeling van de tekening.

De stippellijnen in Figuur 3 vormen vijf verschillende figuren die in de moderne literatuur bekend staan als *girih*-tegels, van het Perzische woord *gīreh*, knoop. Deze tegels zijn apart getekend in Figuur 4. De zijden van deze vijf tegels zijn even lang, en de patronen waar het uiteindelijk om gaat zijn opgebouwd uit de doorgetrokken lijnen door de middelpunten van de zijden in Figuur 4. Door de vijf *girih*-tegels op de juiste manier aan elkaar te leggen vormen de doorgetrokken lijnen mooie patronen. Moderne onderzoekers nemen aan dat deze *girih*-tegels bij het ontwerpproces zijn gebruikt, en Figuur 3 zou het resultaat van zo'n ontwerp geweest kunnen zijn.



Illustratie: Steven Wepster

Figuur 4 De vijf *girih*-tegels uit Figuur 3

Het blijkt dat met deze *girih*-tegels aperiodelieke betegelingen kunnen worden gelegd [5,15]. Deze ontdekking is de afgelopen twintig jaar diverse keren gedaan en heeft geleid tot nieuwe belangstelling voor islamitische geometrische kunst, die nu ook gebruikt kan worden om aperiodelieke betegelingen uit te leggen [20]. Sommige moderne auteurs beweren dat de middeleeuwse ontwerpers, die vanaf de twaalfde eeuw met deze *girih*-tegels werkten, ook aperiodelieke betegelingen van het hele vlak met deze vijf tegelvormen kenden. Dit zou worden geïllustreerd door betegelingen in de Darb-e Imam in Figuur 1 en op enkele andere plaatsen in de islamitische wereld. Deze opvatting wordt niet door de bronnen gesteund. De patronen op de Darb-e Imam beslaan samen een zo klein gedeelte van het vlak dat niet kan worden uitgemaakt of de ontwerper een aperiodeliek patroon wilde maken. Nergens in de middeleeuwse islamitische teksten vinden we enig spoor van het begrip aperiodiciteit; ook niet van het begrip periodiciteit trouwens. Wel staat vast dat middeleeuwse Iraanse ontwerpers bekend geweest zijn met het volgende principe [5, p. 54–55]: In vele grote patronen die bestaan uit vijfhoeken en tienhoeken en andere figuren, kunnen de elementen op fraaie wijze met een soortgelijk patroon op kleinere schaal worden gevuld. Figuur 3 en 5 zijn hiervan voorbeelden. Om dit alles correct op schaal te tekenen zijn de *girih*-tegels nuttig. De monumenten van Isfahan laten een duizelingwekkende variatie zien van grotere patronen die in kleinere patronen zijn onderverdeeld.

We keren terug naar de bronnen. Er is één voorbeeld bekend van een set werktekeningen met begeleidende teksten waarin staat hoe de tekening moet worden vervaardigd. Deze set is gevonden in een zestiende-eeuws Perzisch manuscript van veertig bladzijden, dat nu in Parijs wordt bewaard in de Bibliothèque Nationale. Het manuscript is nog niet gepubliceerd. Voor een Russische vertaling zie [3, pp. 315–340], voor een modern Perzische vertaling zie [10, pp. 73–93]. Voor verdere gegevens en voorbeelden uit het handschrift zie [7; 12, pp. 146–150; 13]. Figuur 6 is een weergave van een tekening uit het handschrift. De bijbehorende tekst is receptachtig en geeft geen verdere uitleg van de noodzakelijke voorkennis, zoals de constructie van een hoek van $\frac{3}{7} \cdot 90^\circ$. De tekst in het handschrift is als volgt:

“Maak hoek BAG drie zevende van een rechte hoek. Deel lijn AG doormidden in punt D. Pas BE af gelijk aan AD. Markeer lijn EZ evenwijdig aan AG. Trek (een willekeurige)



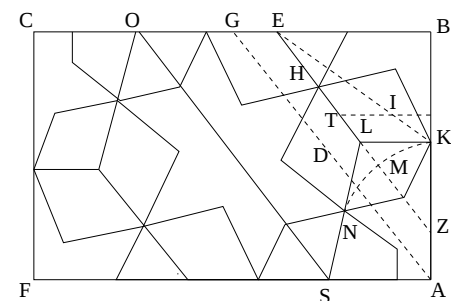
Figuur 5 Patroon in de Vrijdagmoskee in Isfahan

lijn TI evenwijdig aan BE, deel TE doormidden in punt H, en maak TI gelijk aan TH. Verleng EI tot hij lijn AB doorsnijdt in punt K. Markeer KL evenwijdig aan BE. Met middelpunt Z cirkelboog KMN zodat het stuk KM gelijk is aan MN. Op lijn AF neem punt S (hoe wordt niet gezegd) en dat is het middelpunt van een zevenhoek. Voltooi de constructie als God de Verhevene het wil.

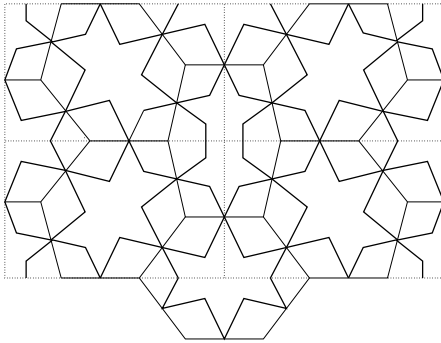
En anders construeer hoek ELN gelijk aan hoek ELK en met de lijn LN vind het middelpunt S.

En anders snijd EO af gelijk aan EL, zodat punt O het middelpunt van een zevenhoek is. En maak lijn OS evenwijdig aan GA en gelijk aan AG (in het handschrift staat AD). En dan is punt S het middelpunt van een tweede zevenhoek. En anders laat GO gelijk zijn aan AS. God weet het het beste.”

Dit voorbeeld is extra interessant omdat de tekening hoort bij een patroon dat echt op een gebouw voorkomt, namelijk in de Noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee in Isfahan [9]. We kunnen daaraan zien hoe de tekening werd gebruikt. Het patroon in de



Figuur 6 Moderne weergave van de tekening uit het Perzische handschrift Parijs, B.N. Ancien Fonds 169, f. 192a. Onderbroken lijnen zijn ook onderbroken in het handschrift.



Figuur 7 Het patroon uit het Parijse handschrift aan elkaar gelegd

rechthoek werd als een soort ‘fundamenteaalgebied’ beschouwd. Kopieën van het fundamenteaalgebied en het spiegelbeeld daarvan werden naast elkaar gelegd en het resultaat was dan een patroon als in Figuur 7. De situatie is dus net zo als met Figuur 3 uit de Topkapirol. In het Perzische handschrift wordt nergens uitgelegd hoe met zo’n fundamenteaalgebied moest worden omgegaan. Vermoedelijk hoorde bij de tekst in het handschrift een uitgebreide mondelinge uitleg.

De dunne lijnen in Figuur 7 vormen twee nieuwe zeshoekige *girih*-tegels die bij het ontwerp gebruikt zouden kunnen zijn. Als we $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$ noteren dan zijn de hoeken in deze *girih*-tegels $4\alpha, 5\alpha, 5\alpha, 4\alpha, 5\alpha, 5\alpha$ en $4\alpha, 4\alpha, 6\alpha, 4\alpha, 4\alpha, 6\alpha$. Het patroon heeft een leuke symmetrie doordat de eerste *girih*-tegels in twee schuine en een liggende positie voorkomt. Ook over deze symmetrie staat niets in het handschrift. In het mozaïek in de Vrijdagmoskee zijn de *girih*-tegels niet te zien, en het is duidelijk dat ze in het productieproces geen rol speelden (zie de kleurenfoto in [9]), dat wil zeggen dat het niet *girih*-tegels waren die in de praktijk werden gefabriceerd (uitgehakt of gebakken) en aan elkaar gemetseld om het patroon te maken. Ook bij de Darb-i Imam (Figuur 1) lijkt uit de foto te volgen dat de vijf *girih*-tegels van Figuur 4 niet in het productieproces werden gebruikt. Deze tegels hoorden dus bij het ontwerpstadium. We kunnen in elk geval concluderen dat de middeleeuwse islamitische kunstenaars methodes gebruikten voor het ontwerpen van geometrische ornamenten. Het is niet uitgesloten dat enkele genieën alles op het gevoel tekenden, maar voor de gewone ontwerper was dit een brug te ver.

De wiskundige kennis van de ontwerpers

We vragen ons nu af hoe de geometrische ornamentiek zich verhoudt tot wat bekend is over middeleeuwse islamitische wiskunde en wiskundigen.

In die tijd werd weinig wiskunde gebruikt

in de landmeetkunde en voor administratieve doeleinden. Wat kennis van het rekenen en een paar meetkundige vuistregels waren hiervoor voldoende. Er werd wel aan wiskunde van hoger niveau gedaan, namelijk algebra (kwadratische en kubische vergelijkingen), een beetje getallenleer, veel meetkunde in de stijl van de Grieken, en veel trigonometrie. Deze meetkunde en trigonometrie werd gebruikt door sterrenkundigen, die hun levensonderhoud meestal moesten verdienen als astroloog of als privéleraar. Er bestond zelfs een soort standaard leerplan meetkunde voor gebruik in de sterrenkunde, dat doorlopen werd onder leiding van een leraar. Men begon met Arabische vertalingen van Griekse wiskundige werken. Eerst de *Elementen* en de *Data* van Euclides, en dan *Over de Bol en de Cylinder* en de *Cirkelmeting* van Archimedes. Wanneer de student deze boeken had doorgewerkt, had hij (of in een enkel geval zij) in elk geval een goed idee van wat een meetkundig bewijs is. Daarna stonden een paar boeken over meetkunde op de bol op het programma, zoals de *Sphaerica* van Theodosius en de *Sphaerica* van Menelaus. Dit laatste boek ging over boldriehoeksmeetkunde en gebruikte de verouderde trigonometrische functie ‘koorde’. Daarom konden in plaats hiervan ook modernere Arabische boeken worden gelezen die gebruik maakten van sinus en cosinus. Vervolgens kon men beginnen aan de eigenlijke sterrenkunde. In het ideale geval las de student nu de hele *Almagest* van Ptolemaeus. Dit dikke boek was zwaar verteerbaar en ook verouderd en het was te veel voor de gemiddelde student. Gelukkig waren er ook veel boeken over sterrenkunde van middeleeuwse (islamitische en andere) auteurs die in het Arabisch schreven. In elk geval leerde iedere aankomende sterrenkundige of astroloog hoe om te gaan met minstens één Arabisch sterrenkundig handboek met circa honderd bladzijden tabellen, en met een astrolabium. Met deze hulpmiddelen kon de sterrenkundige de posities van hemellichamen op elk moment berekenen. Wie astroloog wilde worden moest vervolgens nog een hele literatuur doorwerken over astrologische interpretaties.

Een beroep ‘wiskundige’ bestond niet in de middeleeuwse islamitische wereld. De meeste wiskundig geschoolden werkten als sterrenkundige, astroloog, of privé-leraar, en sommigen hielden zich in leven met het kopiëren en verkopen van handschriften.

We keren nu terug naar de geometrische kunst. De ornamenten zijn duidelijk van een hoger wiskundig gehalte dan wat nodig is voor

landmeten en administratie. De vraag die nu rijst, is of de ontwerpers en makers van zulke ornamenten dezelfde wiskundigen waren die ook aan sterrenkunde deden, of dat het om een heel andere groep gaat. We krijgen enig inzicht in deze vraag dankzij de Iraanse meetkundige en sterrenkundige Abu’l-Wafa al-Buzjani (940–998). Deze man kwam uit de stad Buzjan (nu verlaten) nabij de tegenwoordige grens met Afghanistan, en hij werkte, zoals vele geleerden uit zijn tijd, in Irak. Hij schreef een speciaal boek *Over de meetkundige constructies die de handwerkslieden en bouwers nodig hebben*. (Van deze tekst is een Franse vertaling verschenen in [21], en een Duitse vertaling in [19]. Deze vertalingen zijn gebaseerd op onvolledige manuscripten, en ze bevatten niet het interessante deel over de contacten tussen wiskundigen en handwerkers. Dit gedeelte is gepubliceerd in het Arabisch met Engelse vertaling in [14].) Volgens Abu’l-Wafa bestonden er twee groepen: de wiskundig geschoolde meetkundigen die wel theoretische bewijzen konden geven maar weinig ervaring hadden in praktisch tekenen, en de makers van ornamenten die praktisch konden tekenen maar geen benul hadden van bewijzen, en die daardoor niet konden onderscheiden tussen exacte en benaderende constructies [14]. Abu’l-Wafa had geen hoge pet op van de meetkundekennis van deze laatste groep mensen en probeerde hen door middel van zijn eigen boekwerk op te voeden tot het gebruik van exacte wiskundige constructies van vijfhoeken en andere figuren. Hij beschreef ook een paar constructies met een passer met vaste opening. Hiermee vermeid hij onnauwkeurigheden die konden ontstaan door het steeds opnieuw instellen van een passer. Abu’l-Wafa gaf geen bewijzen in zijn boek omdat die toch niet aan zijn doelgroep besteed waren.

Dankzij Abu’l-Wafa begrijpen we waarom er in de meeste Arabische teksten over euclidische meetkunde niets over geometrische ornamenten wordt gezegd. Deze teksten zijn namelijk geschreven door theoretisch geschoolde wiskundigen, en niet door de makers van geometrische ornamenten. Er waren onder de wiskundigen echter uitzonderingen. In een klein tekstje over algebra construeert de wis- en sterrenkundige Omar Khayyām (1048–1131) een rechthoekige driehoek waarbij een van de rechthoekszijden plus de hoogtelijn gelijk is aan de basis [7, 13]. Dit probleem loopt algebraïsch uit op een derdegraads vergelijking en Khayyām gebruikt een hyperbool en een cirkel om de driehoek te construeren. Hetzelfde probleem wordt ook

in het Perzische manuscript genoemd, waar wordt vermeld dat een andere wis- en sterrenkundige Ibn al-Haytham (965–circa 1040) het probleem ook met kegelsneden had opgelost. Helaas is het patroon dat uit deze driehoek ontstaat niet erg mooi, en het is geen wonder dat het nooit aangetroffen is op een echt gebouw. Toch geven deze voorbeelden aan dat twee van de grootste islamitische wiskundigen zich met geometrische ornamentiek bezig hielden. Het is goed mogelijk dat Khayyām de ontwerper is van het patroon met de zevenhoeken van Figuur 7. Hij woonde in Isfahan toen de noordelijke koepel van de Vrijdagmoskee omstreeks 1080 gebouwd werd, en hij was bevriend met de opdrachtgever.

Het Perzische handschrift dat hierboven is genoemd (Figuur 6 en 7) is volgens de Turkse historicus Özdural [14] ook het werk van iemand die geschoold was in de Griekse wiskunde. Omdat in het handschrift geen onderscheid wordt gemaakt tussen exacte en benaderende constructies, denk ik dat de tekst in het handschrift grotendeels afkomstig is van makers van ornamenten die geen uitgebreide kennis hadden van de *Elementen* van Euclides. Het enige dat aan Euclides herinnert, is het feit dat punten in de figuren worden aangegeven met de Arabische equivalenten van de Griekse letters $A, B, \Gamma, \dots$. In het Perzische handschrift staan een paar verbazend slimme benaderingsconstructies, van een type dat in de 'normale' islamitische wiskunde in euclidische stijl niet voorkomt. Daarom denk ik dat het handschrift een tipje van de sluier oplicht over de praktische meetkundekennis van de islamitische ontwerpers. Deze kennis, en de bijbehorende tekeningen van patronen, kunnen van vader op zoon zijn doorgegeven in families van handwerkers, en misschien werden de constructiemethoden geheim gehouden uit concurrentieoverwegingen. Ook in de moderne tijd bestaan zulke handwerkers nog, al worden het er wel steeds minder. In het tegenwoordige Iran worden de ontwerpen meestal met de computer gemaakt.

Dit alles maakt het beantwoorden van de vraag "welke wiskunde gebruikten de middeleeuwse ontwerpers?" er niet eenvoudiger op. De ontwerpers waren niet geschoold in de *Elementen* van Euclides. Zij hadden een ander soort wiskundekennis die grotendeels niet op schrift is vastgelegd. Zulke schriftloze tradities bestaan ook in andere culturen en worden soms 'ethnomathematics' genoemd. In elk geval krijgen we uit andere stukken van het Perzische handschrift het idee dat de auteur of auteurs goed konden werken met congruente figuren en het opknippen van figu-

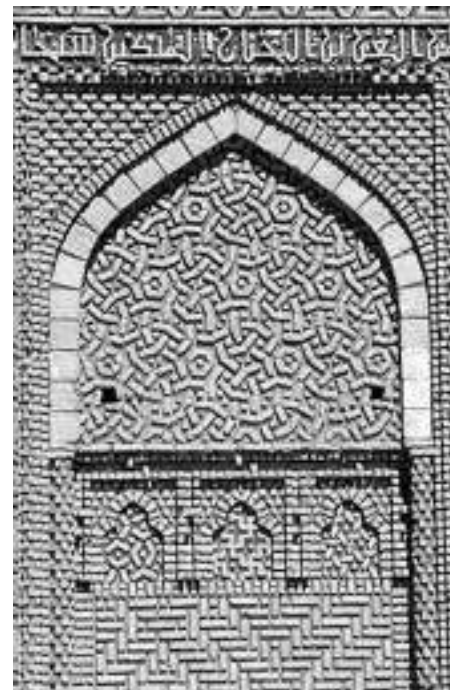
ren. Maar voor de rest is de vraag wat voor wiskundige begrippen de ontwerpers precies gebruikten, (nog) niet goed te beantwoorden wegens gebrek aan authentieke bronnen. Als er een antwoord is, ligt dat verborgen in bibliotheken in de islamitische wereld.

Men kan zich afvragen of de middeleeuwse islamitische kunstenaars beïnvloed kunnen zijn door de wiskunde van India. Dit is in principe best mogelijk omdat er op grote schaal kennis over wiskunde en sterrenkunde vanuit India in de islamitische cultuur is terechtgekomen. Omstreeks 775 werden zelfs delegaties Indiase wetenschappers aan het hof van de kalief in Bagdad uitgenodigd. Tussen 1970 en 1980 meenden moderne onderzoekers een verband te hebben gevonden tussen islamitische geometrische kunst en de oude Vedische wiskunde. Deze opvatting werd eind jaren 1970 breed geëtaleerd in een tentoonstelling *Islamathematica*, onder andere in Rotterdam in het Museum Boymans van Beuningen [16]. Het verband dat de onderzoekers hadden gelegd was helaas niet met authentieke Vedische wiskunde uit de periode rond 500 voor Christus, maar met het rekenstelsel dat was 'herontdekt' uit de Veda's door Goeroe Sri Bharati Krsna Tirthaji (1884–1960). Goeroe Tirthaji was een oplichter en een echt verband tussen islamitische geometrische kunst en oude Indiase wiskunde is tot nu toe niet gevonden.

Is er een diepere betekenis?

De islamitische geometrische ornamentiek was voor een groot deel sacrale kunst. Het geometrische karakter van deze sacrale kunst had te maken met het verbod op het afbeelden van levende wezens in de Hadieth (overlevering) over het leven van de profeet Mohammed. Men hield zich lang niet overal in de middeleeuwse islamitische samenleving aan dit verbod, maar wel in de moskee en in andere religieuze gebouwen zoals graftomben.

De handwerkers die de geometrische ornamenten vervaardigden behoren of behoorden soms tot mystieke islamitische ordes. Zo rijst de vraag of deze kunst een spirituele betekenis had. We bespreken eerst de opvattingen van de twee bekendste auteurs die over dit thema hebben gepubliceerd. De veel geciteerde Shiïtische filosoof Seyyed Hossein Nasr zegt over de betekenis van de islamitische geometrische kunst: "This art makes manifest, in the physical order directly perceivable by the senses, the archetypal realities and acts therefore as a ladder for the journey of the soul from the visible and the audible to the Invisible which is also Silence transcending



Figuur 8 Een van de acht kanten van een van de torens in Kharraqan, met boven de patronen de woorden uit de Koran: "...de machtige, de geweldige, de trotse. Geprezen zij God, verheven ..."

all sound" [11, p. 6]. De architectuurhistoricus Keith Critchlow werkt dit uit door een verband te leggen met magische vierkanten [4, pp. 42–56]. Een magisch vierkant van orde n is een vierkant waarin de getallen 1 tot en met n^2 opgesteld worden in n kolommen en rijen zodat de som van de getallen in elke kolom en rij en in de beide diagonalen gelijk is aan een vast getal $M = \frac{n}{2}(n^2 + 1)$. Critchlow presenteert een rij magische vierkanten van orde 3 tot en met 9 die in de middeleeuwse islamitische wereld en in middeleeuws Europa in verband werden gebracht met Saturnus, Jupiter, Mars, Zon, Venus, Mercurius en de Maan. Hij beschouwt elk vierkant als het archetype van het bijbehorende hemellichaam. De getallen in elk vierkant kunnen op allerlei manieren met elkaar vergeleken worden. Zo leidt hij uit elk magisch vierkant een aantal patronen af die volgens hem dan met deze hemellichamen te maken hebben. Over de rol van de bijbehorende archetypen zegt hij verder dat: "Islam's concentration on geometric patterns draws attention away from the representational world ... to one of pure forms, giving insight into the workings of the inner self and their reflection in the universe. Whereas the experienced world ... is of necessity in three dimensions, the paradisiac world, or world of motivating intelligences, exists two-dimensionally only, the principle being that as archetypes are released from the limitations of existentiality, so also is their confine-

ment within dimensions ...” [4, p. 8]. Uiteraard staat het ons vrij om de standaardopvattingen van Nasr en Critchlow naar het rijk der fabelen te verwijzen. Magische vierkanten werden uitgebreid onderzocht door de wiskundigen in de middeleeuwse islamitische traditie. Een grote hoeveelheid teksten over dit thema is gepubliceerd door Jacques Sesiano [17]. Een verband tussen magische vierkanten en geometrische ornamentiek wordt door de middeleeuwse auteurs nergens gelegd, ook niet in teksten over magie en talismans waarin magische vierkanten voorkomen.

Tot dusver zijn er heel weinig echte aanknopingspunten gevonden over de betekenis van de islamitische geometrische ornamentiek. We kunnen hier wel het werk van Carol Bier vermelden. Deze Amerikaanse onderzoekster is gespecialiseerd in de geschiedenis van textiel en zij heeft de islamitische geometrische ornamentiek in verband gebracht met patronen die (als het ware automatisch) ontstaan bij het knopen van tapijten en het weven van stoffen. Haar idee over de betekenis is dat de geometrische ornamenten vaak te vinden zijn op religieuze bouwwerken waarop ook Koranverzen staan afgebeeld. Als de ornamenten een betekenis hebben, zouden de Koranverzen hiervoor een sleutel kunnen zijn. Zij vindt hiervan een voorbeeld in twee elfde-eeuwse graftorens in Kharraqan, halverwege

tussen Qazwin en Hamadan in Noordwest-Iran [1]. De torens in Kharraqan zijn in 2002 beschadigd door een aardbeving. Voor 2002 waren het achthoekige gebouwen van 13 meter hoog die bedekt waren met een enorme hoeveelheid decoratieve patronen in baksteen. Zie Figuur 8. Rond elk van beide gebouwen liep boven de patronen een band waarin de volgende Koranverzen in steen waren afgebeeld (uit soera 59, verzen 21 tot 24):

“Als Wij [God] deze Koran tot een berg hadden neergezonden, dan had jij [de profeet Mohammad] hem zich zien verootmoedigen en uit vrees voor God zien barsten. Dit zijn de vergelijkingen (voorbeelden, patronen) die Wij voor de mensen maken; misschien zullen zij nadenken. Hij is God; er is geen god dan Hij, de kenner van het verborgene en het waarneembare, de erbarmende, de barmhartige. Hij is God; er is geen god dan Hij, de koning, de allerheiligste, de instandhouder, de veiligheidsgever, de bewaker, de machtige, de geweldige, de trotse. Geprezen zij God, verheven als Hij is boven wat zij aan Hem als metgezellen toevoegen. Hij is God, de schepper, de maker, de vormgever. Hem komen de mooiste namen toe. Hem prijst wat er in de hemelen is en wat er op de aarde is en Hij is de machtige, de wijze.”

Bier stelt dat de bouwers van deze torens het Arabische woord vergelijkingen (Arabisch: *amthāl*) letterlijk geïnterpreteerd kunnen heb-

ben als patronen. De ‘wereld van patronen’ was in de Perzische mystiek een wereld tussen de zintuiglijk waarneembare wereld en het Goddelijke. Onmiddellijk na de patronen noemt de Koran de ‘mooiste namen’ van God, ook een belangrijk thema in de islamitische mystiek. Dit alles zou kunnen betekenen dat de bedoeling van decoratieve patronen was om de aandacht van de toeschouwer te verleggen van de zichtbare driedimensionale wereld naar een hogere wereld. Ditzelfde is ook het doel van sommige rituelen in islamitische mystieke ordes. Natuurlijk zou meer bewijsmateriaal nodig zijn om de patronen in verband te brengen met Koranverzen, maar in ieder geval doet Bier een poging om een verband te leggen tussen de betekenis van de islamitische ornamentiek en authentiek bronnenmateriaal.

Aan elke lezer of lezeres die dit onderwerp verder wil exploreren zou ik aanraden om een reis naar Isfahan te maken, en de monumenten in alle rust te bekijken. Iedereen die het interieur van de Lotfollah moskee in Isfahan op zich laat inwerken, zal begrijpen waarom men islamitische geometrische ornamentiek in verband heeft gebracht met religieuze en spirituele ervaring.

Dankwoord

De auteur dankt Steven Wepster en Viktor Bläsö voor het geven van commentaar op eerdere versies van dit artikel.

Referenties

- 1 Carol Bier, *Art and Mithāl: Reading Geometry as Visual Commentary*, *Iranian Studies* 41 (2008), 491–509.
- 2 F.H. Bool et al., *Leven en Werk van M.C. Escher*, Amsterdam, Meulenhoff, 1981
- 3 M.S. Bulatov, *Geometricheskaya Garmonizatsiya v arkhitekture Srednei Azii IX - XV vv.* (Geometrische harmonisering in de architectuur van Centraal-Azië), Moskou: Nauka 1988. [Russisch.]
- 4 Keith Critchlow, *Islamic Patterns: An Analytical and Cosmological Approach*. Foreword by Seyyed Hossein Nasr. London: Thames and Hudson, 1976, vele herdrukken.
- 5 Peter R. Cromwell, The Search for Quasi-Periodicity in Islamic 5-fold Ornament. *Mathematical Intelligencer* 31 no. 1 (2009), 36–56.
- 6 www.jphogendijk.nl/publ.html
- 7 J.P. Hogendijk, Een workshop over Iraanse mozaïeken. *Nieuwe Wiskrant* 16 (1996) no. 2, 38–42, internet: zie [6].
- 8 J.P. Hogendijk, Wiskunde en islamitische kunst: werk in uitvoering. *Euclides* 79 (2004), 135–137, internet: zie [6].
- 9 J.P. Hogendijk, Ancient and modern secrets of Isfahan. *Nieuw Archief voor Wiskunde* fifth series, 9 (juni 2008), 121, internet: zie [6].
- 10 (Abū al-Wafā' al-Būzjānī) *Applied geometry, Abolvefa Mohammad ibn Mohammad Albuzjani, rewritten into modern Persian with appendices by Seyyed Alireza Jazbi*. Tehran: Soroush Press, 1991. [Perzisch.]
- 11 Seyyed Hussein Nasr, *Islamic Art and Spirituality*. New York: State University Press, 1987.
- 12 Gülrü Necipoğlu, *The Topkapı Scroll: Geometry and Ornament in Islamic Architecture*. Santa Monica, Ca., Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995.
- 13 Alpay Özdurol, On Interlocking Similar or Corresponding Figures and Ornamental Patterns of Cubic Equations. *Muqarnas* 13 (1996), 191–211.
- 14 Alpay Özdurol, Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World. *Historia Mathematica* 27 (2000), 171–201.
- 15 Sebastian R. Prange, The tiles of infinity. *Saudi Aramco World* 60, September/October 2009, 24–31, internet: www.saudiaramcoworld.com/issue/200905/the.tiles.of.infinity.htm
- 16 Fred Ros et al., *Islamathematica*. Rotterdam: Museum voor land- en volkenkunde, 1973.
- 17 Jacques Sesiano, *Les carrés magiques dans les pays Islamiques*. Lausanne 2004.
- 18 F. Sezgin, ed. *Abu'l-Wafā' al-Būzjānī. Texts and Studies, Collected and Reprinted*. Vol. 2. Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1998. Series: *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 61.
- 19 H. Suter, Das Buch der geometrischen Konstruktionen des Abu'l-Wefā'. *Beiträge zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern*, Hsg. J. Frank. *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin Heft IV*. Erlangen 1922. Herdruk in Heinrich Suter, *Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam*, ed. F. Sezgin. Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1986, vol. 2, 635–630 Ook herdrukt in [18, 280–295]
- 20 R. Tennant, Medieval Islamic Architecture, Quasicrystals and Penrose and Girih Tiles: Questions from the Classroom. *Symmetry, Culture and Science: Issue on Symmetry and Islamic Art*, 2008, pp. 113–125, internet: <http://home.earthlink.net/~mayathelma>, onderaan de pagina.
- 21 F. Woepcke, Recherches sur l'Histoire des Mathématiques chez les Orientaux. Deuxième Article: Analyse et Extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboul Wafā. *Journal Asiatique* 5 (1855), 218–255, 309–359. Herdruk in: Franz Woepcke, *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*, ed. F. Sezgin. Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 1986, vol. 1, 483–572. Ook herdrukt in [18, 84–174]. Digitale versie op <http://books.google.com/books?id=Z4gvAAAAAYAAJ>

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij

Lauwerkransen voor wiskundigen

In oktober zijn de winnaars van de Nobelprijzen voor 2011 bekendgemaakt, op 10 december worden de Nobelprijzen uitgereikt. De wiskunde moet het doen zonder een Nobelprijs, maar kent genoeg beloningen voor bedwingers van de Olympus, zoals wetenschapsjournalist Bennie Mols laat zien in dit artikel dat eerder verscheen in NRC Handelsblad van zaterdag 1 oktober 2011.

Alfred Nobel nam in zijn testament uit 1895 geen Nobelprijs voor de wiskunde op omdat zijn vrouw een affaire had met de invloedrijke Zweedse wiskundige Gösta Mittag-Leffler. Dat is de anekdote die al een eeuw wordt doorverteld, die sommige wiskundigen ook heden ten dage nog geloven, maar waarvan al lang bekend is dat het een broodjeaapverhaal is. Nobel is nooit getrouwd geweest. De enige vrouw van wie bekend is dat ze een relatie heeft gehad met Nobel was de Weense Sophie Hess. Maar er is geen enkele aanwijzing dat zij ook maar iets heeft gehad met de wiskundige Mittag-Leffler. Niet alleen de liefde maakt blind, onze hang naar liefdesroddels — waar of niet — net zozeer.

Nee, de werkelijke reden dat er geen Nobelprijs voor de wiskunde bestaat, heeft niets te maken met de liefde. Nobel wilde zijn geld nalaten voor 'belangrijke ontdekkingen en uitvindingen' in die vijf disciplines die het dichtst bij hem stonden. Daar zat de wiskunde niet bij. Nobel zag de wiskunde niet als een veld dat directe, praktische toepassingen

voor de mensheid zou opleveren.

Dat dat laatste niet klopt, blijkt alleen al uit de wiskundigen die een Nobelprijs in een van de andere disciplines hebben gewonnen, meestal de economie, en uit het vaak sterk wiskundig geïnspireerde werk dat werd beloond met de hoogste eer in de natuurkunde.

Wiskundige Nobelprijswinnaars

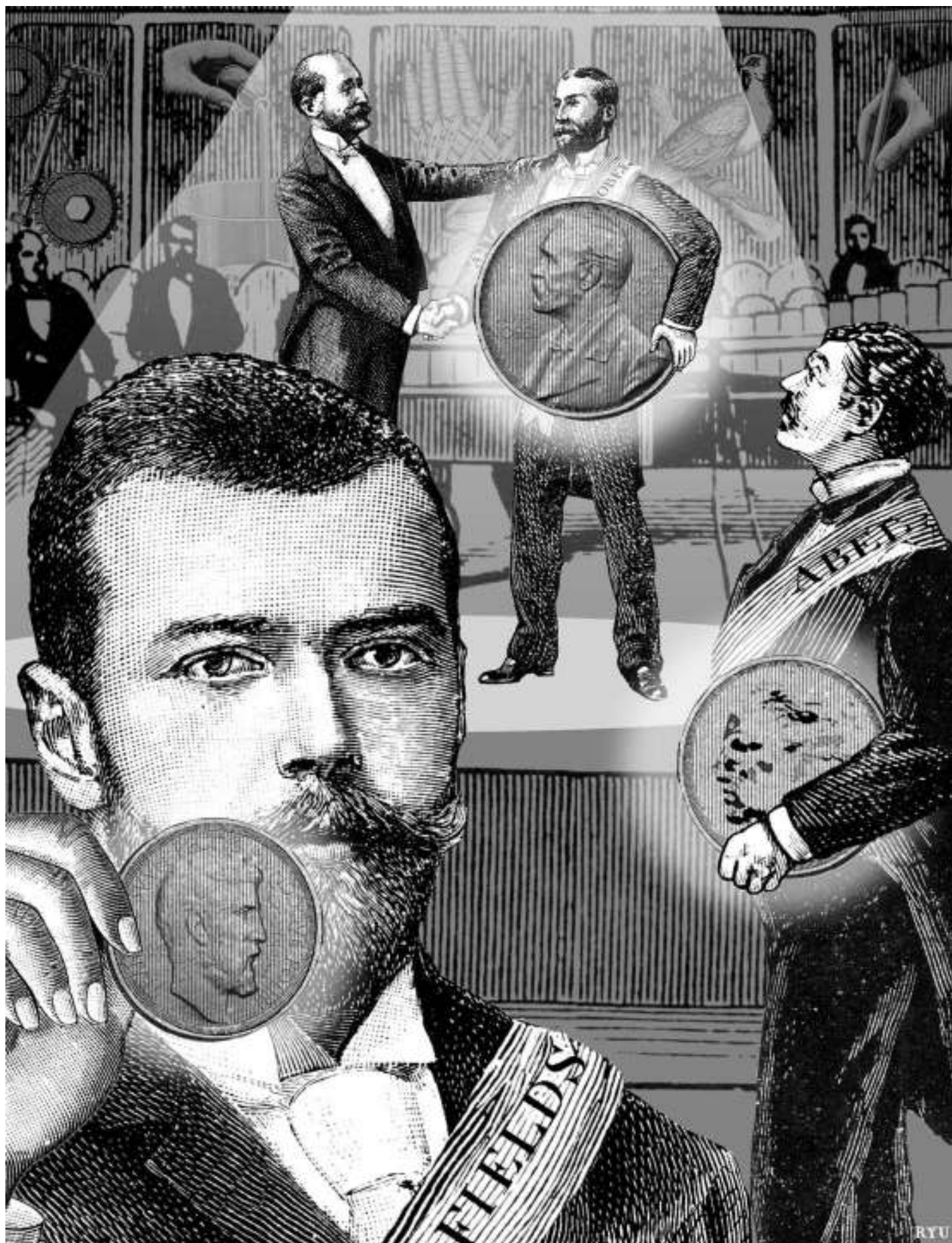
De bekendste wiskundige Nobelprijswinnaar is John Nash, het schizofreen geworden genie dat bij een breed publiek bekend werd door de bestseller *A beautiful mind* van Sylvia Nasar en de gelijknamige film. Nash verwierf faam met zijn speltheoretische werk dat draait om de vraag hoe twee rationele mensen met elkaar zullen onderhandelen. In 1994 ontving hij de Nobelprijs voor economie.

Een ander beroemd geval is wiskundige Kenneth Arrow. In 1950 bewees Arrow dat het ideale kiesstelsel niet bestaat. Elk kiesstelsel dat voldoet aan de ideale principes van een democratie blijkt winnaars op te kunnen leveren die tegenstrijdig zijn met die ideale

principes. Zo won in 1976 de democratische kandidaat Jimmy Carter de Amerikaanse presidentsverkiezingen van zijn republikeinse rivaal Gerald Ford. Ford had eerder de strijd voor de republikeinse presidentskandidatuur gewonnen van Ronald Reagan. Peilingen tijdens de presidentsverkiezingen tussen Carter en Ford gaven echter aan dat als de democraat Carter het direct had moeten opnemen tegen de republikein Reagan, Carter zou hebben verloren van Reagan. In een verkiezingssysteem met meerdere ronden, kan het kennelijk belangrijk zijn in welke volgorde de kiesronden plaatsvinden. Arrow ontving voor



John Nash (rechts) ontvangt de Nobelprijs in 1994





De Fieldsmedaille

zijn overkoepelende sociale keuzetheorie in 1972 de Nobelprijs economie.

De grote wiskundige en filosoof Bertrand Russell won in 1950 de Nobelprijs voor nota bene de literatuur voor "zijn uiteenlopen- de en invloedrijke geschriften waarin hij op de bres springt voor humanitaire idealen en het vrije denken". Verder ging een aantal Nobelprijzen in de natuurkunde naar sterk wiskundig geïnspireerd werk: onder andere de bijdragen aan de quantummechanica van Werner Heisenberg (Nobelprijs 1932) en Erwin Schrödinger (1933); de Nobelprijzen in de theoretische deeltjesfysica van Gell-Mann (1969) en Glashow, Weinberg en Salam (1979) waarin symmetrieën een belangrijke rol spelen; en niet te vergeten het Nobelprijs-winnende werk van de Nederlandse natuurkundigen 't Hooft en Veltman (1999) dat het wiskundige fundament legde onder de quantumstructuur van de elektrozwakke wisselwerking, een van de vier fundamentele natuurkrachten.

Fieldsmedaille

De wiskundeprijs die decennialang werd beschouwd als het equivalent van de Nobelprijs,

is de Fieldsmedaille, uitgereikt sinds 1936. Hoewel die vergelijking qua status terecht is, kent de Fieldsmedaille andere spelregels. Ten eerste wordt de prijs niet jaarlijks toegekend, maar alleen eens in de vier jaar. Ten tweede mogen de winnaars niet ouder zijn dan veertig jaar. Dat is de reden dat Andrew Wiles, de Brit die na acht jaar eenzaam werk in 1995 het eeuwenoude vermoeden van Fermat op spectaculaire wijze oploste, naast het net viste. Hij was toen met zijn 42 jaar al te oud voor een Fieldsmedaille. Ten slotte ontvangt de winnaar van de Fieldsmedaille 'slechts' tienduizend dollar in plaats van de ruim een miljoen bij een Nobelprijs.

De rijke kruisbestuiving tussen wis- en natuurkunde blijkt trouwens niet alleen uit de Nobelprijzen natuurkunde met een wiskundesmaak, maar ook uit een wiskundeprijs met een natuurkundesmaak. In 1990 won de natuurkundige Edward Witten de Fieldsmedaille voor zijn wiskundige werk in de snaartheorie, een natuurkundige theorie die elementaire deeltjes als trillende snaar-tjes opvat.

Abelprijs

Inmiddels is de wiskundeprijs die het meeste lijkt op de Nobelprijs, niet langer de Fieldsmedaille, maar de Abelprijs, sinds 2003 jaarlijks toegekend door de Noorse Academie van Wetenschappen en Letteren. Net als de Nobelprijs kent de Abelprijs geen leeftijds-grens en bedraagt de prijs ongeveer een miljoen dollar. Overigens heeft nog nooit een Nederlander de Fieldsmedaille of de Abelprijs gewonnen.

Halve wiskundigen

Wat wiskundigen betreft moet Nederland het op de Olympus vooralsnog doen met twee halve wiskundigen, Jan Tinbergen en Tjalling Koopmans, waarvan de laatste ook nog een



Jan Tinbergen (links) en Tjalling Koopmans (rechts)

tot Amerikaan genaturaliseerde Nederlander was. Koopmans had wis- en natuurkunde gestudeerd aan de universiteiten van Utrecht en Leiden. Onder invloed van Tinbergen, die ook wis- en natuurkunde had gestudeerd, verlegde Koopmans zijn interesse naar de wiskundige economie. In 1940 vluchtte hij naar de Verenigde Staten, waar hij tijdens de Tweede Wereldoorlog de routes van onder militaire bescherming varende scheepskonvooien bepaalde.

Koopmans ontwierp in 1942 een wiskundige methode die optimale routes berekende en generaliseerde deze voor een grotere klasse van economische problemen. In 1975 ontving hij voor zijn werk de Nobelprijs economie. Tinbergen was hem in 1969 voorgegaan met de allereerste Nobelprijs economie, voor zijn grondleggende werk op het terrein van de econometrie, de wiskundige tak van de economie.

Turingprijs

Het equivalent van de Nobelprijs voor de informatica, de Turingprijs, kent wel een Nederlandse winnaar met een wiskunde-tint: wiskundige, natuurkundige, maar toch vooral informaticus Edsger Dijkstra in 1972. Dijkstra ontwikkelde onder andere het kortste-pad-algoritme, een efficiënte rekenmethode om de snelste route tussen twee locaties te bepalen. Dit algoritme ligt aan de basis van alle autonavigatiesystemen.

Millenniumproblemen

Ten slotte heeft het Clay Mathematics Institute een miljoen dollar klaar liggen voor degene die een van de nog zes openstaande, in het jaar 2000 geformuleerde, wiskundige millenniumproblemen weet op te lossen. Lauwerkransen genoeg dus voor grote doorbraken in de wiskunde. Voor wie tenminste interesse heeft in meer dan eer alleen. De Rus Grigori Perelman, die het zevende millenniumprobleem oploste, weigerde in 2010 het miljoen, nadat hij in 2006 ook al de Fieldsmedaille had geweigerd.

Winnaars Abelprijs

2003	Jean-Pierre Serre (Collège de France, Parijs)
2004	Michael Atiyah (University of Edinburgh) Isadore Singer (MIT, Cambridge, MA)
2005	Peter Lax (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York)
2006	Lennart Carleson (Royal Institute of Technology, Sweden)
2007	Srinivasa S.R. Varadhan (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York)
2008	John Griggs Thompson (University of Florida) Jacques Tits (Collège de France, Parijs)
2009	Mikhail Gromov (Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette)
2010	John Tate (University of Texas, Austin)
2011	John Milnor (Stony Brook University, New York)

Klaas Pieter Hart

Faculteit EWI

TU Delft

Postbus 5031

2600 GA Delft

K.P.Hart@TUDelft.nl

Boekbespreking Matthew Foreman en Akihiro Kanamori: *Handbook of Set Theory*

Verzamelingenleer naar alle kanten uitgewaaid

De verzameling vervult al zeker een eeuw een centrale rol in de wiskunde. Het aanvankelijk gemak waarmee men zich van deze notie bediende liep forse deuken op door de paradox van Russell. Met de axiomatisering van Zermelo en Fraenkel werd het een zelfstandig vakgebied dat een eeuw later is uitgewaaid over alle delen van de wiskunde. Vorig jaar is het meer dan vuistdikke *Handbook of Set Theory* van Matthew Foreman en Akihiro Kanamori verschenen. Klaas Pieter Hart, topoloog aan de Universiteit van Delft, bespreekt het boek.

Het moge onderhand genoegzaam bekend zijn dat Georg Cantor tot de verzamelingenleer kwam door zijn werk aan de uniciteitstelling voor trigonometrische reeksen. En, als u het nog niet wist, dan weet u het nu: Cantor bewees dat indien voor alle $x \in [0, 2\pi]$ de som $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ gelijk aan 0 is, alle coëfficiënten a_n en b_n gelijk aan 0 moeten zijn. Hij ontdekte dat de som niet voor *alle* x gelijk aan 0 verondersteld hoefde te zijn. Laten we de verzameling van punten x waarvoor we niet weten dat de som gelijk is aan 0 even A noemen. Om het resultaat van Cantor te formuleren hebben we de notie van afgeleide verzameling nodig: X' is de verzameling van verdichtingspunten van X , en recursief schrijven we dan $X^{(0)} = X$ en $X^{(n+1)} = (X^{(n)})'$ voor alle n . Cantor bewees: als $A^{(n)} = \emptyset$ voor een natuurlijk getal n , dan volgt nog steeds dat alle a_n en b_n gelijk aan 0 zijn. Dus als A bijvoorbeeld bestaat uit een convergente rij met limiet (dan geldt $A^{(2)} = \emptyset$) of uit een rij convergente rijen waarvan de limieten ook weer convergeren, ..., dan geldt de conclusie nog steeds. Opmerkelijk is dat dit onderzoek Cantor op het

spoor van zowel kardinaal- als ordinaalgetallen zette.

Aan de ene kant bleken sommige oneindige verzamelingen wel en andere juist niet weggelaten te kunnen worden. Dat riep als vanzelf de vraag naar het verschil (zo dat er was) tussen die oneindigheden op. De weg te laten verzamelingen konden allemaal worden afgeteld met behulp van de natuurlijke getallen en dat leidde tot de vraag of dat voor elke deelverzameling van $[0, 2\pi]$ zo was. Het negatieve antwoord gaf ons de kardinaalgetallen $\aleph_0$ en $\aleph_1$.

Aan de andere kant bleken er verzamelingen te bestaan met oneindig veel verschillende afgeleiden en de verzameling der natuurlijke getallen bleek niet 'lang' genoeg om die afgeleiden te kunnen indiceren. Cantor had dus behoefte aan nieuwe indexverzamelingen en die groeiden ten slotte uit tot de ordinaalgetallen.

Keuzeaxioma

Cantors ruime opvatting van wat een verzameling was, leidde uiteindelijk tot paradoxen, waarvan met name die van Russell — de ver-

zameling $R = \{x : x \notin x\}$ is een element van zichzelf dan en slechts dan als deze dat niet is — aanleiding gaf tot een herbezinning op het begrip verzameling. Zermelo's axiomatisering van de verzamelingenleer uit 1908, met een toevoeging door Fraenkel uit 1922, doet met verzamelingen wat we tegenwoordig vaker doen: niet zeggen wat onze objecten zijn, maar vastleggen wat het gewenste gedrag is.

De axioma's van Zermelo en Fraenkel, kortweg ZF genoemd, zijn goed genoeg gebleken om de gangbare wiskunde te omvatten. Zermelo nam ook al het keuzeaxioma in zijn lijst op, maar tegenwoordig wordt dat apart vermeld: met ZFC duiden we ZF *plus* het keuzeaxioma aan. In 1940 liet Gödel zien dat dat niet problematisch was: als uit ZFC een tegenspraak af te leiden zou zijn, dan zou dat ook al uit ZF kunnen. Eigenlijk twijfelt niemand aan de consistentie van ZF, maar dankzij Gödel weten we wel dat een bewijs van die consistentie niet binnen ZF zelf te formaliseren is. In 1963 liet Cohen zien dat het keuzeaxioma niet uit ZF af te leiden is en dat het die theorie dus echt versterkt.

De methoden die Gödel en Cohen gebruikten vormen het eigenlijke startpunt van het onderhavige handboek; in een lange inleiding legt redacteur Kanamori uit wat vooraf ging aan het materiaal dat de lezer te wachten staat. Hij neemt ook de moeite de artikelen voor ons samen te vatten, zodat iemand die wil weten wat er in de verzamelingenleer

aan de hand is vooral die inleiding moet lezen; hoewel het diezelfde lezer op den duur wel kan gaan duizelen bij het aantal noties dat over haar uitgestort wordt. Want als dit boek iets duidelijk maakt, is het wel dat de verzamelingenleer naar alle kanten is uitgewaaierd.

Combinatorische zaken

Het boek opent met een aantal hoofdstukken van combinatorische aard. Deze zijn voor ‘de werkende wiskundige’ verreweg het interessantst, want hier vindt men gereedschappen die bij het werk aan overaftelbare structuren grote diensten kunnen bewijzen. Stationaire verzamelingen onderscheiden het overaftelbare van het aftelbare en helpen vaak bij het terugbrengen van een probleem tot een analoog probleem, maar dan voor een kleiner kardinaalgetal. Partitiestellingen laten zien dat wanorde in de regel binnen de perken blijft, in termen van grafen: als we de lijnen van een voldoende grote volledige graaf kleuren met een beperkt aantal kleuren, dan is er een grote deelgraaf waarin alle lijnen dezelfde kleur hebben. De stelling van Ramsey zegt dat indien we groot met ‘aftelbaar oneindig’ en beperkt met ‘eindig’ interpreteren dat ‘aftelbaar

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$(1) \quad M = \{m\}.$$

Cantors definitie van verzameling in ‘Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre’, *Mathematische Annalen*, 1895

oneindig’ ook voldoende groot is. De eenvoudigste vorm van de stelling van Erdős en Rado zegt dat bij één stap hoger — groot is ‘kardinaliteit $\aleph_1$ ’ en beperkt is ‘aftelbaar oneindig’ — de opvolger van $\aleph_1$ ‘voldoende groot’ is. Dat het niet beter kan, volgt met een oud voorbeeld van Sierpiński, maar in het artikel ‘Coherent Sequences’ wordt uitgelegd dat het nog erger kan; in dat artikel wordt de combinatorische kern van $\aleph_1$ blootgelegd en gebruikt voor diverse constructies, waaronder die van een kleuring van de lijnen in de volledige graaf op $\aleph_1$ punten met $\aleph_1$ kleuren, die zo chaotisch is dat elke deelgraaf met $\aleph_1$ punten lijnen van alle kleuren heeft.

Een kort artikel over Borel-equivalentierelaties laat zien dat een equivalentierelatie op $\mathbb{R}$ (of een andere volledige separabele metrische ruimte) die een Borelverzameling is of heel eenvoudig of heel ingewikkeld is: de quotiëntverzameling is (Borel-isomorf met) een deelverzameling van $\mathbb{R}$ of bevat een kopie van de quotiëntgroep $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; dat deze laatste ingewikkeld is, blijkt wel uit het feit dat elke volledige transversaal niet Lebesgue-meetbaar is (Vitali).

Na een artikel over ‘Proper Forcing’ keren we even terug naar combinatorische zaken die met $\mathbb{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ te maken hebben: families deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$ met extreme eigenschappen, maat nul, eerste categorie, bijna disjunct, onafhankelijk, ultrafilter, ..., geven aanleiding tot definities van wat nu kardinaalkarakteristieken van het continuüm worden genoemd. Deze karakteristieken zijn welgedefinieerde kardinaalgetallen met onbepaalde waarden; die onbepaaldheid is analoog aan die van $\aleph$: we weten dat $\aleph = \aleph_\alpha$ voor een α , maar ZFC is niet sterk genoeg om te beslissen welke α . Dit neemt niet weg dat zo’n karakteristiek vaak helpt bij het formuleren van een resultaat (of het maken van een tegenvoorbeeld) zonder dat men gevallen hoeft te onderscheiden.

Twee artikelen over forcing laten zien dat de lezer geacht wordt deze techniek eerder geleerd te hebben. ‘Proper Forcing’ is een goed geschreven overzicht over het gebruik

van partiële ordeningen die de eigenschap ‘proper’ hebben; deze is door Shelah geformuleerd en heeft de laatste decennia in de toepassingen van forcing de boventoon gevoerd. Het andere artikel, ‘Constructibility and Class Forcing’, gaat over de (mogelijke) relaties tussen Gödels construeerbare universum en het ‘echte’ universum van verzamelingen; het bevat een stuk zwaardere kost.

De fijne structuur van Gödels universum is daarna aan de beurt. Vanaf dit moment komt men niet meer weg met algemeen wiskundige kennis: het gebruik van mathematische logica neemt hand over hand toe bij het uiteenrafelen van de wijze waarop verzamelingen gemaakt worden als dat universum wordt opgebouwd.

Kardinaalgetallen

In deel 2 is het hek geheel van de dam: een groot deel van de moderne verzamelingenleer hangt van elementaire inbeddingen aan elkaar: bestudering van meetbare en andere ‘grote’ kardinaalgetallen kan niet zonder. Maar ook dit gebied is niet zonder toepassingen: werk aan composities van elementaire inbeddingen leidde tot beter inzicht in de structuur van braid-groepen van Artin; die omweg langs grote kardinaalgetallen bleek achteraf niet nodig, maar de vraag is wannéer men zonder die omweg op het juiste idee gekomen zou zijn.

Midden in deel 2 staat nog een aanrader: ‘Cardinal Arithmetic’. Hierin wordt de pcf-theorie van Shelah duidelijk uitgelegd; deze is ontwikkeld om meer vat op het machtsverheffen van kardinaalgetallen te krijgen. Die onderzoeken hebben weer veel combinatorisch moois opgeleverd, maar los van dat is het gewoon fraai om te zien hoe een ongrijpbaar geachte macht als $\aleph_{\omega}^{\aleph_0}$ getemd wordt:

$$\aleph_{\omega}^{\aleph_0} < \max\{(2^{\aleph_0})^+, \aleph_{\omega_4}\}.$$

De $\aleph_{\omega_4}$ is een strikte bovengrens voor de cofinaliteit van de familie van aftelbare deelverzamelingen van $\aleph_{\omega}$, geordend door inclusie — het harde (en mooie) werk zit in het bewijs van die ongelijkheid.



Paul Cohen



Georg Cantor

Daarna komen in deel 2 nog twee hoofdstukken over opvolgers van singuliere kardinaalgetallen en (forcing)methoden om de cofinaliteit van kardinaalgetallen te veranderen, het liefst zonder dat kardinaalgetallen verloren gaan.

Gedetermineerdheid

Deel 3 behandelt twee onderwerpen: inwendige modellen en het Axioma van gedetermineerdheid (AD, 'Axiom of Determinacy'). Gödels construeerbare universum is het standaardvoorbeeld van een inwendig model: je beschrijft een constructieproces en neemt alleen die verzamelingen die door het itereren van dat proces voortgebracht worden; als je proces sterk genoeg is vormen die verzamelingen een universum waarin alle axioma's van ZFC gelden en als dat universum niet het hele universum is, noemen we het een

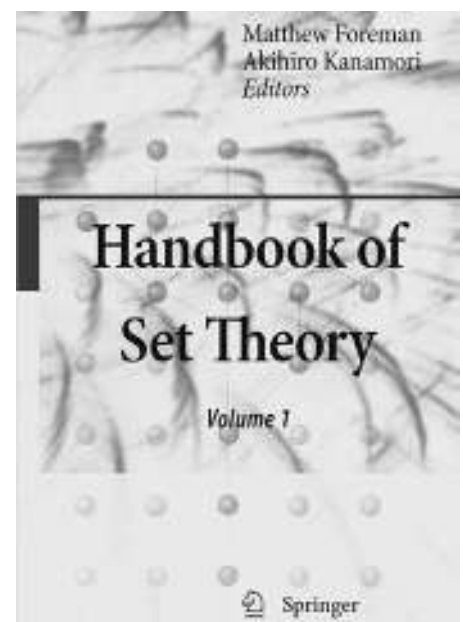
inwendig model. Die modellen hebben allerlei interessante eigenschappen, maar worden ook vaak gebruikt om grenzen aan bewijsbaarheid te stellen. Het komt vaak voor dat een onschuldig ogende aanname leidt tot de conclusie dat er een inwendig model met een groot kardinaalgetal (onbereikbaar, meetbaar, ...) moet zijn. Een mooi voorbeeld komt uit de theorie der bomen, partiële ordeningen waarin voorgangersverzamelingen welgeordend zijn. Het oneindigheidslemma van König zegt dat een oneindige boom met eindige niveaus een oneindige tak moet hebben; als we dit naar $\aleph_1$ proberen op te tillen loopt het mis: er is een boom van kardinaliteit $\aleph_1$ met aftelbare niveaus maar zonder tak ter lengte $\aleph_1$, een Aronszajn-boom (probeer er zelf maar een te maken, met gebruik van strikt stijgende rijen reële getallen, geordend door 'is beginstuk van'). Onder aanname van de Continuümhypothese laat zich zo'n boom ook voor $\aleph_2$ construeren, maar de uitspraak 'er zijn geen $\aleph_2$ -Aronszajn-bomen' impliceert dat $\aleph_2$ in een inwendig model zwak compact is. Nu is uit ZFC plus 'er is een zwak compact kardinaalgetal' de consistentie van ZFC af te leiden en dus ook uit ZFC plus 'er zijn geen $\aleph_2$ -Aronszajn-bomen'. Dit maakt dat de toevoeging van die 'onschuldige' aanname aan ZFC een echt sterkere theorie creëert.

Het axioma AD zegt dat alle spelletjes van de volgende vorm gedetermineerd zijn: twee spelers spreken een deelverzameling A van $[0, 1]$ af en kiezen om en om een 0 of een 1. Speler I wint als de rij zo een reëel getal representeert dat tot A behoort; anders wint speler II. Een resultaat van Martin zegt dat elke Borelverzameling een *gedetermineerd* spel oplevert: één van beide spelers heeft een winnende strategie; en AD poneert dit voor alle deelverzamelingen van $[0, 1]$. Dit is incompatibel met het keuzeaxioma; het is niet zo moeilijk met transfinitie recursie een A te maken waarvoor geen enkele strategie winnend is. Aan de andere kant, AD heeft allerlei fraaie

gevolgen voor de structuur van $\mathbb{R}$: alle deelverzamelingen zijn Lebesgue-meetbaar bijvoorbeeld. Er is een mooie wisselwerking tussen AD en inwendige modellen: de consistentie van AD met ZF is via inwendige modellen vastgesteld.

Lijvig boek

Ten slotte: er staat heel veel moois in dit handboek; het is alleen jammer dat het zo dik is. Sommige hoofdstukken zouden heel goed als aparte boekjes uitgegeven kunnen worden. In zekere zin zijn ze dat ook: U kunt de pdf-files op SpringerLink apart kopen — iets mooier zou een print-on-demand-faciliteit zijn waarmee men een paar artikelen tot één boekje kan laten bundelen. Intussen ga ik dat hoofdstuk over 'Cardinal Arithmetic' nog eens nauwkeurig doorlezen. ←



Matthew Foreman and Akihiro Kanamori, *Handbook of Set Theory*, Springer, 2010, 2197 p., ISBN 9781402048432 (gebonden, drie delen), prijs € 599,00.

Barbara Jaworski

*Mathematics Education Centre
Loughborough University
Loughborough, Leicestershire, LE11 3TU, UK
b.jaworski@lboro.ac.uk*

Stephanie Treffert-Thomas

*Mathematics Education Centre
Loughborough University
Loughborough, Leicestershire, LE11 3TU, UK
s.thomas@lboro.ac.uk*

Thomas Bartsch

*Department of Mathematical Sciences
Loughborough University
Loughborough, Leicestershire, LE11 3TU, UK
t.bartsch@lboro.ac.uk*

Education

Linear algebra with a didactical focus

How might you construct an introductory linear algebra course for first year mathematics students? What decisions would you have to make and what issues would you have to address? Barbara Jaworski, Stephanie Treffert-Thomas and Thomas Bartsch, as a small research team, set out to address these questions and others relating to a first year, first semester module in linear algebra. The authors are all members of the School of Science at Loughborough University, they all teach mathematics and do research into mathematics or mathematics education. Thomas Bartsch is a mathematician working in the Department of Mathematical Sciences; Barbara Jaworski and Stephanie Treffert-Thomas are mathematics educators working in the Mathematics Education Centre.

The Mathematics Education Centre (MEC) was opened in 2002 to provide university wide support for students engaging with mathematics in any disciplinary area of the university. It includes two drop-in Mathematics/Statistics Learning Support Centres which are staffed by a mathematician and/or statistician for six or seven hours each day. Members of the MEC do research into mathematics learning and teaching, primarily at university level. They contribute to mainstream teaching of mathematics and provide expertise in teaching mathematics to engineering students.

Background to the study

An aim in studying the teaching of linear algebra was to try to start to characterise math-

ematics teaching within the university and to gain access to the perspectives of mathematicians on their teaching of mathematics. A seminar series (entitled 'How we Teach') had been started to share aspects of mathematics teaching and initiate a mathematics teaching discourse through which we could learn from each other and develop our teaching. Seminars in the series were video recorded and a selection of them analysed in order to characterise this discourse [3]. Seminars form a part of the New Lecturer's Course for new mathematics lecturers at Loughborough.

The research study was agreed between Barbara Jaworski and Thomas Bartsch before the start of the academic year 2008/09. Stephanie Treffert-Thomas joined the team as a PhD student with this research the focus

of her PhD. Thomas Bartsch was in his second year of teaching this module. Barbara Jaworski had considerable experience of doing research into mathematics teaching at a variety of levels. Together the team formed a small community of inquiry. We had a common purpose in exploring the teaching of mathematics, trying to understand better the teaching process, recognising the issues which arise for teacher and students, and promoting development of teaching. We had differing roles with Thomas Bartsch as lecturer, having responsibility for design of the module and module materials, teaching and monitoring students, and Barbara Jaworski and Stephanie Treffert-Thomas as re-



A tutor helping a student



Two students working together

searchers, having responsibility for conducting research of a largely qualitative nature.

Our research methodology was ethnographic in style, that is producing qualitative data through conversations and interviews. It was important for the two researchers to gain in-depth access to the thinking and actions of the lecturer in order to develop well-grounded understandings of the lecturer's teaching and design of teaching. Thus the two researchers talked extensively with the lecturer before and after lectures, observed all lectures and tutorials, and collected relevant documents. In addition Stephanie Treffert-Thomas sought students' views with two questionnaires handed out in lecture time and by conducting focus group interviews with a small number of students when the first semester teaching had ceased. Research meetings of the team and all teaching by the lecturer were audio-recorded. Analysis of this data was qualitative, involving repeated listening, transcribing, coding and categorising. Atlas-ti software was used extensively to support analysis.

The first semester linear algebra module

Linear algebra is a mainstream topic for first year mathematics students. It is taught in a two-semester module with 72 hours of teaching and associated assignments and examination. Thomas Bartsch is the lecturer for the first semester (S1); there is a different lecturer in the second semester (S2). The two lecturers collaborate on the year-long design of the module and prepare a joint examination at the end of the year. The first semester offers an introduction to linear algebra and the second semester a more abstract treatment. In this study we focus on the first semester which consists of an introduction to linear algebra that tries to avoid the more formal aspects of the material. The second semester involves a repetition of the same material, but from a formal perspective. One purpose of such organisation is to recognise that students coming to university from school are not well prepared for mathematical formalism (see, for exam-

ple, [4]) and need some preparation for dealing with abstraction. The module is taught through two lectures and one tutorial each week (the standard allocation of time).

The module that we observed was taught to a cohort of 240 students of which approximately 180 (based on informal, periodic head counts) attended lectures regularly. The lecturer distributed weekly problem sheets on which students were asked to work in their own time. In addition, each student is a member of a Small Group Tutorial (SGT) in which seven or eight students meet once a week with a tutor who is a mathematics lecturer (not a graduate student). (In the UK, the academic hierarchy is Lecturer, Senior Lecturer, Reader, Professor. Most academics are at the levels of Lecturer or Senior Lecturer. The term 'lecturer' is used both as an academic title and as the role of the academic teaching a particular module.) In SGTs some of the tutorial problems could be discussed, at the discretion of the tutors and their students. For all problems the lecturer made detailed solutions available after two weeks. SGT tutors are also personal tutors for students in their group. Through the SGTs they have access to student progress and student experiences of learning and teaching.

The lecturer's design of the module included choosing, sequencing and writing the mathematical content, including the examples used in lectures and the examples/exercises used in the weekly tutorial, designing a weekly problem sheet, and preparing assessment tasks which included on-line tests and written coursework. In the first semester, the lecturer prepared notes-with-gaps which were placed on LEARN (a virtual learning environment) for students to access in advance of a lecture.

The lecturer's notes were structured to guide the course and were used for teaching; that is they were presented to students by the lecturer in each lecture. Students were asked to bring printed copies of the notes to the lecture. Tutorials differed from lectures by focusing only on examples with no progression of the material of the notes. The lecturer used a data projector to project the course notes, including the outline of examples, onto a big screen, and an overhead projector to work out the solutions to examples, which were missing from the printed notes. He would move physically between the two. Often he stood centrally in the lecture theatre to talk to the students offering his own comments about the mathematics and about ways in which students should approach the mathematics.



A tutor helping a student

One purpose of the gaps in the lecture notes was to encourage students to attend lectures and complete the notes *in the lecture*. This involved completing the *solutions* of key examples that were presented. Often, before presenting a solution, the lecturer gave students some minutes to work on the solution by themselves or with their neighbours, walking around the lecture theatre and talking with some students.

The design of the module gave students the option to engage with the content of the module in a variety of ways. They could download the lecture notes from LEARN. They could attend lectures and tutorials, fill in the gaps in the notes and make their own supplementary notes, attend their own SGT each week, and get access to the lecturer either face to face or by email. They could work on problem sheets and complete assignments marked by their SGT tutor. The SGT provides opportunity for discussion with fellow students, and the lecturer encouraged such discussions also outside of the formal teaching sessions. Students could also attend a support centre and get advice from a lecturer who was not otherwise involved in teaching the module.

The content of the first semester was presented in the course notes in four chapters as follows:

1. Linear Equation Systems
2. Matrices
3. Subspaces of $\mathbb{R}^n$
4. Eigenvalues and Eigenvectors

In Chapter 1 the focus was linear equation systems. The lecturer distinguished systems



A tutor helping a student



Students attending a lecture

of linear equations that have one, many or no solutions. He introduced the method of Gaussian elimination to determine the solution set of an arbitrary linear equation system. This method uses elementary row operations on a linear equation system, or its coefficient matrix, in order to produce an equivalent, but simpler system. Gaussian elimination is sometimes also referred to as the method of row-reduction of matrices. Chapter 2 consisted of an introduction to matrices as representing linear equation systems. The content in Chapter 2 included calculating with matrices (namely the addition, subtraction and multiplication of matrices), finding the inverse and the transpose of a given matrix, and the related rules of matrix algebra.

In the lecturer's own words Chapters 1 and 2 contained the more computational aspects of the module. These two chapters provided students with the necessary computational skills to advance to Chapters 3 and 4, which focused more strongly on concepts.

Chapter 3 dealt with the most important concepts in linear algebra, which are vector spaces, subspaces, span and spanning sets,

range, linear independence, basis and dimension, and the rank-nullity theorem. These concepts were all introduced in the setting of $\mathbb{R}^n$. The lecturer presented examples and deduced general observations from the examples. Theorems were often presented as 'Observations' and in general, no abstract proofs were given throughout the first semester. (There were one or two exceptions.) This was a deliberate strategy employed by the lecturer and one that we discuss further below.

The focus in Chapter 4 was eigenvalues and eigenvectors. Chapter 4 included the definition of an eigenvector/value, an introduction to the theory of determinants, the use of the characteristic polynomial in calculating eigenvalues (and hence for finding eigenvectors), and a detailed account of the process of diagonalisation.

The nature of research meetings

Research meetings focused on the lecturer's design, planning and intentions for teaching. The meetings provided an opportunity for the lecturer to talk about his design of the module, his current teaching and perceptions of

students' learning and issues arising thereof. The two observers asked questions and offered observations or perceptions. Meetings following a lecture or tutorial focused on what had taken place, and involved the lecturer's reflections interspersed with questions from the observers. Often our discussions in meetings focused on students' responses to the material and the lecturer's perception of students' understanding in relation to the material of the lecture. The nature of these discussions included the lecturer talking about his own conceptions of the material of the lecture, of his didactical thinking with regard to this material, of his perceptions of students' activity and of his decision-making in constructing notes, examples and assessment tasks. The example below, of the lecturer's talk, shows 'expository mode' (talking about his own conceptions of the material) in normal text and 'didactic mode' (talking about his construction of the teaching of the material) in italic text.

"Thursday is about defining the characteristic polynomial, understanding that its zeroes are the eigenvalues, and I'll show an

Example. 3.14. Consider an unknown 2×3 matrix A . We know that A satisfies $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ and $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, where

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Is $\mathbf{b}_1$ in the range of A ? Is $\mathbf{b}_2$ in the range of A ?
- Is $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ in the range of A ?
- Take the number $\lambda = 3$. Is $\lambda\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ in the range of A ?
- Is the zero vector $\mathbf{o}$ in the range of A ?

Figure 1 An example offered to students in the module

example of an eigenvalue that has algebraic and geometric multiplicity 2. Algebraic multiplicity, meaning this is the power with which the factor lambda minus eigenvalue appears in the characteristic polynomial, and geometric multiplicity is the number of linearly independent eigenvectors. *And these are the important concepts for determining if a matrix is diagonalisable because, for that, we need sufficiently many linearly independent eigenvectors.* Now if an eigenvalue has algebraic multiplicity larger than 1, that means there are correspondingly fewer eigenvalues. So, in principle, we can fail to find as many eigenvectors as we need in that case. On the other hand, if an eigenvector has algebraic multiplicity 3, the geometric multiplicity can be anywhere between 1 and 3. If it's 3, we are fine, if it's less than 3, we're missing out at least one linearly independent eigenvector. And in such a case the matrix would not be diagonalisable. *And that's the big observation that we need to get at next week, that a matrix is diagonalisable if and only if all the geometric multiplicities are equal to the algebraic multiplicities.*"

The distinction between expository mode and didactic mode is not clear cut. The sentence in italics in the middle of the quotation might also be characterised as expository mode. However, it seems here that the lecturer is *meta-commenting* on the material: i.e. expressing his value judgement regarding important concepts that need to be appreciated, rather than just articulating mathematical relationships. This seems to relate to didactic judgements in terms of what needs to be emphasised for students. We observe that such statements in meetings correspond to what we have called meta-comments, or meta-mathematical comments in lectures. Such comments address what students need to attend to, either in terms of their work on the

mathematical content (meta-comments – A) or of their understanding of the mathematical content (meta-mathematical-comments – B). Examples A and B follow.

A: "First of all, ... if I give you an equation system, this gives you a recipe to decide if that equation system is consistent or inconsistent. You transform it to echelon form and you check if there is such a special row that makes the system inconsistent."

B: "But it's important that you be able to understand the language that we're using and to use it properly. So please, pay attention to the new terms and the new ideas that we're going to introduce over this chapter."

We are emphasising this difference in modes of talk about the material of the module to contrast thinking about teaching (the didactic mode) with thinking about mathematics (expository mode). In meta-comment A, the lecturer draws students' attention to the nature of the mathematics and how they work with it. In meta-mathematical comment B, he draws their attention to the processes of working with the mathematics and strategies that can lead to understanding. Both of these are 'didactical' approaches on the part of the lecturer. In studying the *teaching* of linear algebra, we are interested fundamentally in the didactic nature of the lecturer's presentation of the mathematics.

The lecturer's approach to teaching

From analysing the audio-recordings of the meetings between the lecturer and the two researchers, we gained insight into the lecturer's motivations, intentions and strategies for teaching. Based on his experience of teaching undergraduate mathematics for one year prior to this research, the lecturer devised an examples-based approach to the teaching of linear algebra for this module. In a research meeting, the lecturer said:

"Yes. ... Generally speaking, I decided that I would focus on doing the development of the argument on examples, and then trying to abstract a general fact from the example, as I have done in most cases so far. And so then, what I am doing is go through the example, and then highlight the important facts on the example, and then condense them into a general observation. And I have several times mentioned to students that this is what we're doing, and that it's a good idea to see an example not as an isolated example but rather as a representative of a big class."

In taking this approach the lecturer 'avoided' the introduction of theorems although many of the 'observations' that he made were in fact equivalent to theorems. Few of the observations were proved in a formal sense.

We termed his approach EAG, where EAG stood for 'example-argument-generalisation'. The lecturer's approach could thus be summarised as:

- we introduce an **Example**,
- we make an **Argument** on the example, and then
- we **Generalise** to an observation, another example or set of examples.

The term 'observation' above agreed with the use of this term in the lecture notes, where the lecturer used the term 'observation' rather than 'theorem'.

This approach could be described as 'bottom-up'. The lecturer demonstrated a mathematical phenomenon on a 'typical' example that served as a representative for a class of similar cases. He explained the example in a manner that was intended to highlight the general features rather than the specific details of the particular example. Where necessary, he introduced definitions to provide relevant terminology. General statements could then be abstracted from the arguments that were applied in the example. Because these statements arose from the study of an example they were called 'observations' rather than 'theorems', as they would be in more formal presentations of linear algebra.

The course covered all the standard results of introductory linear algebra. Because most of them were presented as observations that were justified by reasoning about an (typical) example, the first semester included hardly any formal proofs. The proofs were provided in the second semester, in which the results were revisited in the abstract context of vector space theory. By proceeding in this manner, the lecturer hoped to offer his students a gentle introduction to mathematical reason-

ing about objects and their properties that is required at university level.

An example-based approach as outlined above can be viewed in contrast to the more traditional ('top-down') deductive style of teaching mathematics at university. The latter is often referred to as DTP (definition–theorem–proof) or DLPTPC (definition–lemma–proof–theorem–proof–corollary) style (see, for example, [1, 5]). In a traditional approach (DTP), the statement "The range of a matrix is a subspace", for example, is introduced as a theorem. The theorem is then proved by checking that the three properties of a subspace (the set is closed under addition and scalar multiplication and contains the zero vector) are satisfied.

In our study, however, using the EAG approach, the lecturer set up an (concrete) example and asked a series of questions as shown in Figure 1. Earlier in the course, the lecturer had introduced the null space of a matrix A , i.e., the solution set of the homogeneous equation system $Ax = 0$. He had shown that the null space has similar properties to the set of all n -component vectors: It is closed under addition and scalar multiplication and contains the zero vector. This observation had motivated the definition of a subspace. The four questions (a) to (d) in the present example were designed to lead the student to recognise the correspondence between the answers to the questions and the definition of a subspace. As a result the students were to arrive at, and recognise that the range of a matrix is a subspace. This was then summarised in what the lecturer called 'Observation 3.15'. This 'observation' is the theorem "The range of a matrix is a subspace". The lecturer chose the terminology of 'Observation' (rather than 'Theorem') because he did not give a formal proof at this point in the course.

This example is less abstract than a general proof because specific values are given for the various vectors. On the other hand, because the matrix A is unknown, the questions cannot be answered by direct calculation. The solutions make use of numerical values, but they are not essential for the argument. It is this observation that allows the specific example to serve as representative of a wider class: The same arguments that are used in the example could be used for arbitrary matrices and vectors. The lecturer emphasised this fact in lectures, to his students, on several occasions.

In Figure 2 we show the full solution to Example 3.14. The notes that were available

Example 3.14. Consider an unknown 2×3 matrix A . We know that A satisfies $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ and $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, where

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. Is $\mathbf{b}_1$ in the range of A ? Is $\mathbf{b}_2$ in the range of A ?

Solution:

$\mathbf{b}_1 \in \text{range } A$ because the equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ is solvable ($\mathbf{x}_1$ is a solution).

$\mathbf{b}_2 \in \text{range } A$ because the equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ is solvable ($\mathbf{x}_2$ is a solution).

b. Is $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ in the range of A ?

Solution: Yes. The equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ is solvable, and $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ is a solution because

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

c. Take the number $\lambda = 3$. Is $\lambda\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ in the range of A ?

Solution: Yes. The equation system $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{b}_1$ is solvable, and $\lambda\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -21 \end{pmatrix}$ is a solution because

$$A(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{b}_1.$$

d. Is the zero vector $\mathbf{o}$ in the range of A ?

Solution: Yes. The equation system $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ is solvable, and $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ is a solution because $A\mathbf{o} = \mathbf{o}$.

In this example, we have verified that the range of a matrix has the three properties of Observation 3.5. We can therefore conclude:

Observation 3.15. The range of a matrix is a subspace.

Figure 2 The solution of Example 3.14 of the module and the consequential Observation 3.15

to the students during the lecture contained blank spaces instead of the solutions. Observation 3.5 states that the null space of a matrix has the properties of a subspace.

Student feedback

Students' views were sought with two questionnaires which highlighted students' preferences and work habits. These were followed by focus group interviews in which Stephanie Treffert-Thomas probed students' views further. As a result the research team learned that students (a) liked the notes-with-gaps, (b) found linear algebra difficult, and (c) focused on learning computations and algorithms rather than engaging with the conceptual understanding as desired by the lecturer. We explain these responses.

(a) Students liked the way that the lecturer had designed the course with the use of notes-with-gaps since they felt it engaged them more. They generally printed the notes and brought them to lectures. One student compared the lecture notes to 'a workbook',

and the design of the course as providing a 'stepping stone' from A-level to university. Despite the positive attitude towards the 'gappy' notes this did not necessarily mean that students worked actively on the solution to the examples in lectures. As one student pointed out: "It depended... whether or not I could do it." Students in the focus groups generally acknowledged that many students waited for the solution to be presented by the lecturer, rather than working on it themselves.

(b) Students found linear algebra difficult and particularly challenging at the start. They said that they were unprepared for the conceptual nature of the topic. As one student said, she did not realise "that definitions were important", she was revising from the exercises and examples instead, and realised (too late) that understanding definitions was a requirement for the exams.

(c) Students frequently referred to computational aspects of linear algebra. The Gaussian elimination procedure was taught in the beginning of the module, in Chapter 2.

One student commented that you always had to use Gaussian elimination somewhere at some time, so if she didn't know what to do, she would always do a Gaussian elimination on the matrix. She expressed the view that this was likely to gain at least some marks (in an exam, say).

Synthesis of the teaching approach

We have drawn attention to the informal nature of the teaching approach and its EAG structure. We have also talked about the lecturer's observed levels of commenting. It is important to recall that what we have described is the first semester of the module in which the second semester offers a more formal treatment of the same material; so students are then introduced to vector spaces more generally in a more abstract DTP approach. The first semester is the students' introduction to university mathematics. Thus, the teaching seeks to bridge the school-university transition and prepare students to deal with abstraction.

The EAG approach describes the *structure* of the teaching. Examples are chosen carefully to lead to key concepts through the succeeding argument and generalisation, but without formal proof. The lecturer's commenting is central to this process, offering first a mathematical treatment of the topic in consideration, then a commentary on the relationships involved, emphasising key

ideas and ways in which these fit into the broader picture, and finally suggesting to students how they should think about and work on these concepts. Our data showed that students liked the course structure and the course notes. Nevertheless, many students found the transition to argumentation at this level a difficult one, seeking examples which they could follow and taking a more broadly computational approach. Anecdotal evidence from small group tutors suggests that students tackled problem sheets by looking for examples that demonstrated the required approach. Although such responses from students suggest a dependency on the lecturer, a desire for given procedures and a computational approach, towards the end of the year students seemed able to deal with the more abstract treatment, gaining confidence from recognising the material and their earlier struggles with it. They reported that the first semester approach had been valuable in enabling them to address the more abstract formulation in the second semester. A quotation from a focus group shows how two students thought about this.

S1: "I think my understanding of the subject got a bit better and I understand what a lot of the words mean a lot better now [i.e., in Semester 2], so many things like range, basis, then rank, rank-nullity, span, and there are so many of them and try and cram them all in . . . The way we've used them again and again this

term and my small group tutor . . . we've gone over it so many times that I'd be pretty stupid if I didn't get it by now . . . and we went through the class test afterwards in my tutorial and I kind of thought that's really silly, I should have done better."

S2: "Yeah, it did seem very easy afterwards and once we looked at the solutions for it."

In conclusion

Given that students find the transition to abstraction and formalism in university mathematics a difficult one, our research documents an approach which offers an alternative to the traditional DTP. We have shown briefly the key elements of this approach, but in the short space of this article have been able to present only little specific detail and almost no treatment of the ways in which the lecturer's thinking and intentions were realised in the teaching practice and in the responses of students. The latter (intentions and their realisation) is the focus of the PhD thesis of the second author which is forthcoming. In this, Stephanie Treffert-Thomas reports on an *activity theory* analysis of the observational data in order to relate teaching intentions with practical outcomes and link teaching with learning in the mathematical context of linear algebra. We welcome interest in these ideas and invite those interested to get in touch with us for discussion and debate. 

References

- 1 Dorier, J.-L., Robert, A. and Rogalski, M. (2002). Some comments on 'The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra' by F. Uhlig. *Educational Studies in Mathematics*, v. 51, p. 185-191
- 2 Jaworski, B., Treffert-Thomas, S. & Bartsch, T. (2009). Characterising the teaching of university mathematics: a case of linear algebra. 2009. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 249-256. Thessaloniki, Greece: PME.
- 3 Jaworski, B. and Matthews, J. (2011). How we teach mathematics: discourses on/in university teaching. Paper presented at CERME 7, the seventh conference of the European Society for Research in Mathematics Education, February, 2011, University of Rzeszów, Poland. (Copy available from the author).
- 4 Nardi, E. (1996). The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: tensions in concept-image construction and formalisation. Unpublished PhD thesis, University of Oxford, UK (available at <http://www.uea.ac.uk/~mo11>).
- 5 Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, v. 50, p. 335-346

Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com



Het keerpunt van Hans Zantema

Wiskundige in hart en nieren

Na zijn promotie in de algebraïsche getaltheorie wilde Hans Zantema (1956) iets heel anders doen. Het stoorde hem dat hij wiskundig zo gespecialiseerd was dat hooguit vijf mensen in Nederland konden begrijpen wat hij deed. Hij zocht werk dat meer betekenis had dan een wetenschappelijke publicatie. Hij vertrok naar Philips Data Systems in Apeldoorn. Al snel merkte hij dat zijn hart toch niet bij productontwikkeling lag. Hij keerde terug naar de universiteit. Niet bij wiskunde, maar bij informatica. “Elke keer als ik bij een bedrijf kom, ben ik blij dat ik daar niet werk.”

Het was eigenlijk vanzelfsprekend dat Hans Zantema wiskundige werd. Op school haalde hij tien voor wiskunde en als 17-jarige won hij de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De studie in Groningen beviel hem uitstekend, vooral abstracte algebra was een openbaring. “Je ving de essentie van een stuk wiskunde in een beperkt aantal regels en keek wat je daar allemaal mee kon bereiken. Veel studenten vonden dat saai en waren blij als ze een zes haalden en er vanaf waren. Ik vond dat abstracte juist heel erg leuk.” Na vierenhalf jaar was Zantema klaar met de studie waar zes jaar voor stond. Natuurlijk ging hij dus verder met wiskundig onderzoek.

Je was de eerste promovendus van Hendrik Lenstra, waarom koos je hem als promotor?

“Er waren andere opties. Maar mijn afstudeerbegeleider Marius van der Put zei: ‘Als je naar Hendrik Lenstra gaat, dan zit je bij de beste wiskundige van Nederland.’ Hendrik was toen nog geen dertig en al hoogleraar, een zeldzame combinatie.”

Was het niet gek dat je begeleider zo jong was?

“Nee, want hij was duidelijk volwassener en had ook al een indrukwekkende weten-

schappelijke staat van dienst. Bovendien had hij het voorkomen van een nette meneer. Zelfs bij het bergwandelen droeg hij een das en keurig gepoetste zwarte schoenen.”

Waar promoveerde je in?

“Hendriks vak was algebraïsche getaltheorie, dus dat ging ik doen. Het ging goed,

maar ik vond het steeds storender dat ik zo gespecialiseerd bezig was. Hooguit vijf mensen in Nederland hadden de voorkennis om te volgen wat ik deed. Maar die hadden allemaal hun eigen agenda en hun eigen dingen. Ik vroeg me af voor wie ik het deed. Het was mooi dat ik gepromoveerd was, maar ik wilde daarna iets doen waarbij mijn werk meer betekenis had dan een publicatie die bijna niemand las. Ik kon een baan krijgen bij Philips Data Systemen in Apeldoorn. Daar bouwden ze computers en dat leek me interessant, en ook uitdagend.”

Wat voor werk deed je bij Philips?

“Eerst werkte ik aan COBOL-compilers. Ik kreeg duizenden regels code zonder enige



Hans Zantema in zijn werkkamer vol planten aan de TU Eindhoven

documentatie. Ik moest aan die enorme brij code iets toevoegen en zag door de bomen het bos niet meer. Ik wist niet waar ik moest beginnen en raakte overspannen.

Toen ik weer beter was, ging ik naar een andere groep. Daar ontwikkelden we vierde-generatietalen om kantoortoeepassingen op een wat hoger niveau te beschrijven. Daar was meer waardering voor abstract denken, al moesten we toch vooral een product maken. Het uiteindelijke doel was geld verdienen, niet begrijpen hoe dingen werken. Dat vond ik onbevredigend. In principe lag vast wat je moest doen, je had alleen de vrijheid om de variabele *a* of *b* te noemen. Na een kleine vier jaar wilde ik weg.”

En verrassend genoeg werd je universitair docent bij informatica in Utrecht. Hoe kwam je daar terecht?

“Nog steeds wilde ik iets doen dat nuttig was. Informatica was in die tijd nog nieuw aan de universiteit, er was weinig staf en veel studenten. Nu solliciteren op een baan als universitair docent informatica zeventig mensen, waarvan er zeker vijftig geschikt zijn voor de baan. De markt is verzadigd, maar in 1987 lag de markt nog helemaal open. Utrecht zocht vooral mensen om onderwijs te geven en ik had dat als promovendus met veel enthousiasme gedaan. En natuurlijk had ik bij Philips ervaring opgedaan met software-engineering.”

Was er een groot verschil tussen wiskunde en informatica?

“Een hoop basisprincipes zijn hetzelfde, of het nou informatica, wiskunde of logica is. Als je van een bewering zeker wilt weten of hij waar is, dan schrijf je heel precies de eigenschappen op, je leidt hulpeigenschappen af en bewijst uiteindelijk een stelling. Die hele manier van werken, de zekerheid van de logische redenering, is zowel de bouwsteen van de wiskunde als de theoretische informatica. Voor mijn gevoel zit er helemaal geen verschil tussen die vakgebieden, al kiezen ze traditioneel voor verschillende problemen. Wel is voor mij een stuk theorie vaak niet een eindpunt, maar wil ik ook dingen daadwerkelijk kunnen uitrekenen, en daarin kom ik bij informatica prima aan mijn trekken.”

Hoe koos je een onderzoeksonderwerp bij informatica?

“Dat was een beetje zoeken. Algoritmen spraken me aan, maar dat deden veel mensen in Utrecht al. Er werd tegen me gezegd

dat het beter was als ik juist een aanvulling gaf op wat de groep al deed. Vanuit Philips had ik een achtergrond in software-engineering. Ik ging op zoek naar onderwerpen in de formele kant daarvan. Op een gegeven moment kwam ik terecht bij termherschrijfsystemen.”

Pardon?

“De kern van rekenen is dat je met een rekenstap springt van de ene naar de andere toestand. Om een rekensysteem te beschrijven, heb je een aantal toestanden en rekenregels die toegestane toestandsovergangen geven. Je wilt laten zien dat deze manier van werken hout snijdt: dat je altijd na een eindig aantal stappen een antwoord hebt, een toestand waarin je niet meer verder kunt. Daarnaast wil je dat het antwoord niet afhankelijk is van de keuzes die je maakt als er verschillende manieren zijn om rekenstappen te doen. Bij termherschrijven bestudeer je die twee eigenschappen: de eindigheid van de berekening en de onafhankelijkheid van de stappen. Je geeft een stel regels en wilt daaruit vaststellen of het systeem die wenselijke eigenschappen heeft. Het verrassende is dat je extreem simpele regels kunt opschrijven, waarvoor het heel erg lastig is om vast te stellen of die eigenschappen gelden.”

Na dertien jaar vertrok je naar Eindhoven, hoe kwam dat?

“In Utrecht kwam er een nieuwe hoogleraar en het was voor de indeling handig als ik naar zijn groep ging. Die man vond mijn onderzoek maar niets, ik was de enige die termherschrijven deed. Hij vond dat nergens goed voor en ik moest maar iets anders gaan doen. Dus gaf ik een college machine-learning en probeerde ook wat onderzoek in die richting te doen.”

Wat inschikkelijk van je.

“Nou, ik betwijfel of die hoogleraar mij inschikkelijk noemde. Ik kon me zijn visie als leider van de groep wel voorstellen, maar dat andere onderzoek lag me helemaal niet. Terwijl ik in termherschrijven inmiddels een zekere reputatie had opgebouwd. Voor mijn onderzoek werd ik in die tijd gedetacheerd bij het CWI in de groep van Jan Friso Groote. Daar hadden ze mij echt uitgekozen om mijn werk, dat was een waardering die ik in Utrecht erg miste. Even later werd Groote hoogleraar in Eindhoven en kon daar mensen aannemen. Zonder sollicitatiegesprek kreeg ik een vaste baan en kon ik ook snel

universitair hoofddocent worden. Termherschrijven is in Eindhoven geen hoofdthema. Maar als ik daar goed in ben en mooie publicaties oplever, dan krijg ik er de ruimte voor. Dat is een prettig uitgangspunt.”

Sinds 2007 ben je in Nijmegen een dag per week wel hoogleraar ‘Applications of term rewriting in theorem proving’.

“Dat is heel fijn. Ik heb wel de lusten van het hoogleraarschap, maar niet de lasten. Als je fulltime hoogleraar bent, krijg je allerlei bestuurlijke taken toegeschoven. Voor je het weet ben je opleidingsdirecteur of decaan. Ik ben te weinig in Nijmegen om dat soort klussen te doen en in Eindhoven speelt het niet omdat ik geen hoogleraar ben. Het geeft ook verbreding om aan twee instituten te werken.”

In welke vorm?

“Graag geef ik college over een voor mij geheel nieuw onderwerp. Een vak waarvan ik zelf het tentamen niet had kunnen halen voordat ik het gaf. Zo’n vak voorbereiden kost veel tijd, maar ik leer er veel van. Zo geef ik in Nijmegen college over algoritmen. Dan combineer ik onderwerpen waar ik meer van wil weten met dingen die ik leuk vind om aan studenten te vertellen. Dan stop ik er bij RSA-cryptosystemen wat getaltheorie in. Daarbij merk ik wel dat zoiets voor informaticastudenten heel lastig is. Ik ben een wiskundige in hart en nieren, met daarbij dan wel de behoefte om dingen uit te rekenen of te implementeren. Eigenlijk stond bij mijn geboorte al vast dat ik wiskundige zou worden, net zoals Wibi Soerjadi niets anders dan pianist kon worden. Mijn studenten zijn geen wiskundigen, zij kozen bewust voor informatica.”

Is het uiteindelijk gelukt wat je wilde aan het eind van je promotie? Om werk te doen dat een zekere betekenis heeft?

“Ja, ik heb nu publicaties met honderd of tweehonderd citaties. Dat is van een andere orde van grootte dan mijn wiskundige werk. Ik ben er trots op dat ik dingen ingebracht heb waar andere mensen weer mee verder zijn gegaan. Dat ik een rol heb gespeeld bij de ontwikkeling van een vakgebied.”

Kent u een (Nederlandse) wiskundige die in zijn carrière een opmerkelijke ommezwaai heeft gemaakt? Mail dan naar ionica.smeets@gmail.com.

In de verdediging

| In defence



Noncommutative and vector-valued Rosenthal inequalities

Sjoerd Dirksen

“Het ideaal van de Homo Universalis heeft plaatsgemaakt voor het ideaal van de Cycloop: een mens die zich volledig toelegt op het zo goed mogelijk uitoefenen van één taak.” Zo luidt de volgens hemzelf mooiste stelling bij het proefschrift van Sjoerd Dirksen, die op 18 oktober 2011 promoveerde aan de Technische Universiteit Delft. Hoewel deze stelling zeker ook op de meeste wetenschappers van toepassing is, hoopt Dirksen wel op een mooie carrière als wiskundige. Hij heeft als aio veel genoten van de grote mate van vrijheid en eigen verantwoordelijkheid die je als onderzoeker hebt en het als een groot genoegen ervaren om met zijn proefschrift een bescheiden bijdrage te kunnen leveren aan de wiskundige literatuur die hem aan het hart gaat. Hij heeft ook hele mooie herinneringen aan twee langdurige verblijven in het buitenland tijdens zijn promotie. Tijdens deze bezoeken heeft hij een frisse onderzoeksneus kunnen halen en veel nieuwe ideeën en inspiratie opgedaan. In Amerika heeft hij bovendien tijdens het voorbereiden van een voordracht voor het eerst echt een ‘eureka-moment’ in zijn onderzoek beleefd.

In Delft werd van wiskunde aio’s ook verwacht om hoorcolleges te geven aan eerstejaars studenten in het ‘serviceonderwijs’ aan andere faculteiten. De verantwoordelijkheid voor een ‘eigen’ groep studenten heeft hij als zeer uitdagend en stimulerend ervaren, en hij zet momenteel met veel plezier zijn werk in Delft voort als tijdelijk docent met een gemengde onderzoeks- en onderwijstaak.

Rosenthal-ongelijkheden

In het proefschrift *Noncommutative and vector-valued Rosenthal inequalities*, dat Dirksen schreef onder begeleiding van promotoren prof. dr. Jan van Neerven en prof. dr. Ben de Pagter, staat een klasse van ongelijkheden uit de kansrekening centraal, genaamd Rosenthal-ongelijkheden. De originele ongelijkheden die H.P. Rosenthal rond 1970 ontdekte, luiden als volgt: Als $2 \leq p < \infty$ en $(\xi_i)_{i \geq 1}$ een rij onafhankelijke, gecentreerde kansvariabelen is, dan geldt

$$\left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \simeq_p \max \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Hier staat $\mathbb{E}$ voor de verwachtingswaarde en is $a \simeq_p b$ een verkorte notatie voor de ongelijkheden $\alpha_p a \leq b \leq \beta_p a$, voor zekere constanten $\alpha_p, \beta_p > 0$ die alleen van p afhangen. In toepassingen staat doorgaans aan de linkerkant de grootte waarin men geïnteresseerd is en aan de rechterkant iets wat daadwerkelijk uitgerekend kan worden. Rosenthal ontwikkelde deze ongelijkheden oorspronkelijk voor zijn onderzoek in de meetkunde van Banachruimten. Tegenwoordig kunnen Rosenthals ongelijkheden gerekend worden tot het standaardgereedschap in de kansrekening.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

Niet-commutatieve kansrekening

In zijn proefschrift breidt Dirksen deze ongelijkheden uit in twee verschillende richtingen. In het eerste deel van zijn proefschrift bekijkt hij de situatie waar de ξ_i vectorwaardig zijn, dat wil zeggen ze nemen waarden aan in een Banachruimte. Hierbij kan men denken aan kansvariabelen met waarden in een L^p -ruimte of matrices waarvan de elementen kansvariabelen zijn ('random matrices'). In het tweede deel kijkt hij naar Rosenthal-ongelijkheden voor niet-commutatieve kansvariabelen. Niet-commutatieve kansrekening is een uitbreiding van het klassieke kansrekeningsmodel dat oorspronkelijk ontwikkeld is om experimenten in de kwantummechanica te kunnen modelleren waarvoor het klassieke kansrekeningsmodel niet toereikend is. In dit model worden kansvariabelen niet gegeven door Lebesgue-integreerbare functies, maar door operatoren op een Hilbertruimte. Dirksen heeft gekeken naar Rosenthal-ongelijkheden waarbij de niet-commutatieve kansvariabelen elementen zijn van een zogenaamde symmetrische ruimte behorend bij een von Neumann-algebra. Als voorwerk voor de uiteindelijke stelling heeft hij nieuwe resultaten voor andere kansrekeningsongelijkheden in niet-commutatieve symmetrische ruimten bewezen, met name voor Khintchine- en Burkholder–Gundy-ongelijkheden, alsmede nieuwe resultaten in interpolatietheorie.

In beide gevallen ontwikkelt hij de uitbreiding van Rosenthals originele ongelijkheden met het doel om zogenaamde Itô-isomorfismen te bewijzen. Dit zijn normafschattingen voor stochastische integralen in termen van de integrand. Itô-isomorfismen voor vectorwaardige stochastische integralen spelen een belangrijke rol in de analyse van partiële differentiaalvergelijkingen met een stochastische ruiscomponent. In de afgelopen paar jaar is door de Delftse onderzoeksgroep veel voortgang geboekt in de analyse van dit soort vergelijkingen waarbij de ruis Gaussisch is. Het uiteindelijke idee is dat de resultaten in Dirksens proefschrift gebruikt kunnen worden in de analyse van stochastische PDV's met Lévy-ruis (ruis die ook spronggedrag kan vertonen), maar dit is strikt genomen geen onderdeel meer van zijn proefschrift.

De mooiste stelling

Dirksen wil zich er niet aan wagen om een stelling als de 'belangrijkste' aan te merken, maar heeft wel een favoriete stelling in zijn proefschrift. Deze stelling geeft een uitbreiding van Rosenthal-ongelijkheden voor kansvariabelen met waarden in een L^p -ruimte en luidt als volgt: Als $1 < p, q < \infty$ en $(\xi_i)_{i \geq 1}$ een rij van onafhankelijke, gecentreerde stochasten is die waarden aannemen in $L^q(S)$, met S een σ -eindige maatruimte, dan gelden de tweezijdige ongelijkheden

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{L^q(S)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \simeq_{p,q} \left\| \left(\xi_i \right)_{i=1}^n \right\|_{p,q},$$

voor een geschikt gekozen norm $\|\cdot\|_{p,q}$. Deze norm neemt zes verschillende vormen aan, afhankelijk van de relatieve positie van de parameters p, q en 2. Als bijvoorbeeld $2 \leq q \leq p < \infty$, dan wordt $\left\| \left(\xi_i \right)_{i=1}^n \right\|_{p,q}$ gegeven door het maximum van de drie normen

$$\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|\xi_i\|_{L^q(S)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|\xi_i\|_{L^q(S)}^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ en } \left\| \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(S)}.$$

Bovenstaande afschattingen spelen een prominente rol in het bewijs van de eerder genoemde vectorwaardige Itô-isomorfismen.

Flink puzzelen

De stelling kent bovendien een verdere uitbreiding waarin $L^q(S)$ vervangen wordt door een niet-commutatieve L^p -ruimte behorend bij een

von Neumann-algebra. Dit resultaat kan vervolgens gebruikt worden om nieuwe afschattingen te vinden voor de grootste singuliere waarde van een matrix met onafhankelijke kansvariabelen als elementen.

Dirksen heeft flink moeten puzzelen om de 'juiste' normen in deze stelling te vinden. De stelling heeft, net als Rosenthals originele ongelijkheden, voor hem persoonlijk een esthetisch karakter en bovendien twee zeer verschillende toepassingen. Kortom, alles wat een mooie stelling in zich moet hebben!



Categorical properties of topological and differentiable stacks

David Carchedi

On September 13th, 2011, David Carchedi successfully defended his Ph.D. thesis *Categorical properties of topological and differentiable stacks*, which he wrote under the guidance of prof.dr. Ieke Moerdijk at Utrecht University.

Topological and differentiable stacks

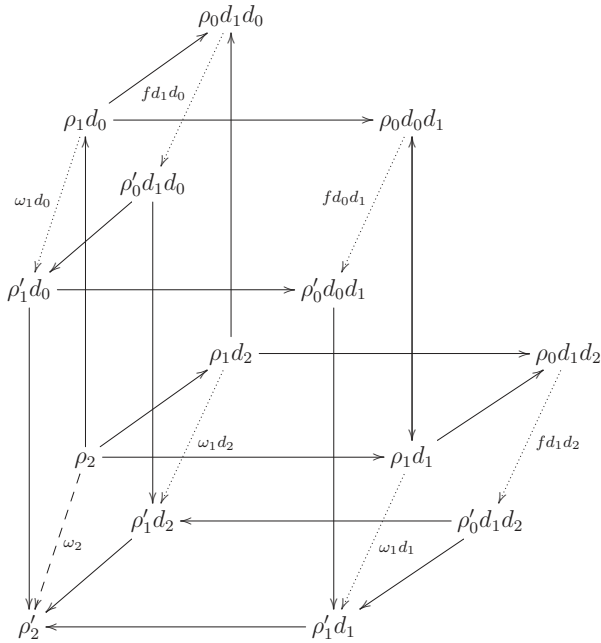
Carchedi's main research topic concerned foundational issues of the theory of topological and differentiable stacks. Such stacks are meant to model 'spaces' whose points themselves possess intrinsic symmetries. They are analogous to algebraic stacks, which play an important role in algebraic geometry.

All topological and differentiable stacks arise by 'identifying' points of a topological space or smooth manifold, that are related to one another by a symmetry. If these points were naively glued together, this could introduce singularities, and more importantly, most of the information about the symmetries would be lost. The naive quotient associated to a topological stack exists as a topological space; however it lacks important information about the different ways in which a point is related to itself, or to other isomorphic points. Therefore, instead of actually identifying points, a 'stacky quotient' is constructed: to every symmetry relating a point x to a point y in a space X one adds an arrow from x to y (and also an arrow in the opposite direction inverse to this arrow). In this way, one not only remembers *that* x and y are glued, but also *how* these points are glued.

Continuing in this way, a *category* is constructed, whose objects are just the points of the space X and in which every arrow is an isomorphism. A category in which every arrow is an isomorphism is known as a *groupoid*. So in this sense a groupoid is a special kind of category. However, a groupoid with only one object is the same as a group, and in this sense, groupoids are a generalisation of groups (and hence their name). The resulting groupoid (internal to spaces) encodes all the information about the local geometry of the 'stacky quotient'.

Compactly generated stacks and étale stacks

In his thesis, Carchedi introduces *compactly generated stacks*, which



This half of a commuting hypercube is part of a proof that maps out of a topological or differentiable stack can be expressed as certain cocycles.

play the same role for topological stacks as compactly generated Hausdorff spaces do for topological spaces. They all have *mapping stacks*, a key concept in his work, as well as infinite (fibered) products. It is his hope that his results will help topologists avoid the technical shortcomings of topological stacks.

The rest of the thesis concentrates on the development of an abstract framework to study sheaves and stacks over étale stacks. Étale stacks are stacks which are not very far away from being spaces, in that each point has only a discrete collection of symmetries. Carchedi uses his machinery to show a surprising connection between the way in which these symmetries act locally and gerbes. (Roughly, gerbes are to stacks what groups are to groupoids.)

Technical shortcomings

Recently, there have been many applications of topological and differentiable stacks in various areas of pure mathematics, such as equivariant geometry, twisted K-theory and foliation theory, and they also play an important role in quantum field theory, string theory and higher gauge theory. However, there are some technical shortcomings of the theory of topological stacks.

For example, many natural constructions may fail to exist for topological stacks, such as taking infinite products or mapping stacks. If $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are two topological stacks, the mapping stack $\mathbb{M}\text{ap}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (if it exists) is ‘the topological stack of maps from $\mathcal{X}$ to $\mathcal{Y}$ ’. The first main result in Carchedi’s thesis is the construction of a convenient theory of topological stacks, the above-mentioned compactly generated stacks, in which these natural constructions exist.

Frustrations and results

Carchedi had originally set out to prove that mapping stacks exist for all topological stacks and thought he had a proof. He had worked on this for about a year, and then presented the result at a conference, in his first conference talk ever. During the talk, some people in the audience did not believe the result, and as it turned out they were right. Carchedi was devastated, as he had not expected this at all. Until then,

even his advisor had been convinced that his original approach should work, and with him many experts were also surprised to hear that the construction did not yield a positive result. Indeed the reason that the original proof was incorrect is quite subtle.

Anyway, at that point he really had no idea of what to do next. He thought he had wasted all this time and was really frustrated. He turned his attention to other questions to clear his head. But luckily, about four months later, he decided to turn back to the problem with a completely different approach, and he then figured out a way to modify topological stacks so that the result was true. This led him to develop the theory of compactly generated stacks, which has become the most important result in his thesis. He was even invited to a workshop in Göttingen, Germany, to talk about it.

His theory of compactly generated stacks is a convenient one, as these stacks enjoy much nicer categorical properties than ordinary topological stacks. The story starts in ordinary topology, where it became clear, much to the embarrassment of topologists, that mapping spaces (with the correct universal property) did not always exist. To remedy this, in 1967, Normand Steenrod popularised compactly generated Hausdorff spaces, which *do* all have mapping spaces, and infinite (fibered) products. Carchedi’s result is a generalization of this to the setting of topological stacks.

Mapping stacks

The problem of mapping spaces (or in this case mapping stacks) persists for topological stacks, but the situation is much more technical. Stacks, unlike spaces, do not form a category, but form a bicategory. That is, given two such stacks $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ and two morphisms $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ and $f' : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, it is possible for f and f' to be related by a 2-morphism $\alpha : f \Rightarrow f'$. Any such 2-morphism must have an inverse, so for any two such stacks $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$, there exists a groupoid of maps between them, $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (a groupoid is a category consisting of only isomorphisms).

If $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are two topological stacks, their *mapping stack* $\mathbb{M}\text{ap}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ is a topological stack for which there is a natural equivalence of groupoids

$$\text{Hom}(\mathcal{Z}, \mathbb{M}\text{ap}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \simeq \text{Hom}(\mathcal{Z} \times \mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

for every other topological stack $\mathcal{Z}$. Unfortunately, unless $\mathcal{X}$ satisfies a rigid compactness condition, this mapping stack need not exist. However, mapping stacks *do* exist for all compactly generated stacks.

The Netherlands and beyond

Carchedi very much enjoyed being a student in the Netherlands. First and foremost because of the lack of separation between Ph.D. students and professors that he experienced in his research group in Utrecht. Being American, he was used to a certain hierarchy and distance. In Utrecht, he felt like being a peer, or a ‘researcher in training’ rather than a student. He was free to approach various postdocs and professors with mathematical questions and learnt very much from them. This all really helped him develop confidence as a mathematician, and he decided to continue his career in mathematics. Since October, he has been a postdoctoral researcher at the Max Planck Institute for Mathematics in Bonn.

Besides the difficulties after his first conference talk, he experienced the traditional hard last year, full of postdoc applications, writing up results and writing grant applications. But at the very end there was the reward: holding his doctoral degree in his hand was probably the best moment of the past four years.

Kees Roos

TU Delft

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Postbus 5031

2600 GA Delft

c.roos@tudelft.nl

Afscheidsrede

Komt onvermoeide ar

Sommige bekende wiskundige problemen wachten al enkele eeuwen op een oplossing. Vele beroemde wiskundigen hebben zich over de vraag gebogen of al deze problemen ooit opgelost kunnen worden. Kan de wiskunde elk wiskundig probleem in wezen behandelen? In deze discussie, over de grondslagen van de wiskunde, raakte de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer in een conflict. In mei 2006 ging Kees Roos, hoogleraar optimaliseringstechnologie te Delft, met emeritaat. In zijn afscheidsrede, uitgesproken op 10 december 2010, geeft hij behalve een terugblik op zijn Delftse tijd ook een nadere beschouwing van het conflict waarin Brouwer verzeild was geraakt.

Toen ik begon na te denken over een onderwerp voor mijn afscheidsrede las ik een biografie [7] van de Nederlandse wiskundige L.E.J. Brouwer (1881–1966). Ik raakte geboeid door zijn leven, zijn werk, en het conflict waarin hij verzeild raakte over de grondslagen van de wiskunde. Het werd mij duidelijk waarom Brouwer beschouwd wordt als één van de grootste wiskundigen die Nederland heeft voortgebracht. Ik besloot de bij een af-

scheidsrede passende terugblik op de eigen loopbaan te combineren met een meer beschouwend gedeelte naar aanleiding van genoemd conflict.^{1 2}

Ter inleiding op het genoemde conflict, daarmee tegelijk het vraagteken in de titel verklarend, dient het volgende. Het *Koninklijk Wiskundig Genootschap* (KWG) eert Brouwer elke drie jaar met de prestigieuze Brouwerlezing. Degene die deze lezing mag houden ont-

vangt een oorkonde en een gouden medaille. De medaille toont aan de ene kant het portret van Brouwer, en aan de andere zijde het motto van het KWG en de naam van de prijswinnaar. Zoals in Figuur 1 is te zien luidt het motto ‘Een onvermoeide arbeid komt alles te boven’.

In de genoemde biografie stelt de auteur, de Utrechtse emeritus prof. dr. D. van Dalen, dat dit motto uitstekend past bij de Duitse wiskundige D. Hilbert (1862–1943), maar niet, of veel minder, bij Brouwer. Van Dalen schrijft hierover [7, p.220]: “David Hilbert was [dus] niet zomaar een succesvol en groot wiskundige, hij had een uitgesproken filosofische, bijna religieus aandoende visie op de wiskunde. Zijn standpunt was dat de wiskunde in wezen elk wiskundig probleem zou kunnen behandelen. Hij was zich natuurlijk bewust van het feit dat sommige problemen erg moeilijk waren, en misschien een paar eeuwen moesten wachten op hun oplossing, maar uiteindelijk zou de wiskunde zegevieran. Men zou hem kunnen beschouwen als een belijder van de oude zinspreuk van het eerbiedwaardige Nederlandse Wiskundige Genootschap, ‘Een onvermoeide arbeid komt alles te boven’. Ieder wiskundig probleem zal op den duur opgelost worden of het zal weerlegd worden, zo sprak hij in 1900 [op het Parijse congres]. Brouwer had dit zogenoemde dogma van Hilbert in zijn proefschrift ongegrond verklaard.” Hilberts opvatting was dus dat ieder wiskundig probleem ofwel kan worden opgelost, of het kan worden aangetoond dat de oplossing niet bestaat. Brouwer nam in een



Figuur 1 Bronzen replica van de eerste Brouwermedaille



Kees Roos

beid alles te boven?

voetnoot van zijn dissertatie duidelijk afstand van 'Hilberts dogma'; volgens hem was er geen spoor van een bewijs voor het dogma te vinden [7, p. 93]. Het is dus zeer de vraag of Brouwer zich zou hebben herkend in het motto van het Nederlands Wiskundig Genootschap. Ik zal hier later op terug komen.

Met Brouwer heb ik een speciale relatie. Hij was de promotor van mijn promotor, professor dr. F. Loonstra. Ik mag hem dus mijn wiskundige grootvader noemen. Dit bracht mij er toe verder onderzoek te doen naar mijn wiskundige voorgelacht. Dankzij het *Mathematics Genealogy Project* is dit betrekkelijk eenvoudig te doen. Het leverde de stamboom op in Figuur 2.³ In eerste instantie was ik aangenaam verbaasd toen ik niet alleen namen aantrof van beroemde wiskundigen als Euler, Leibniz, en Bernoulli, maar ook van Erasmus en Thomas à Kempis, en bekende theologen als Voetius, Gomarus en Arminius. In tweede instantie realiseerde ik mij dat er weinig reden tot verbazing was. Immers de oorsprong van de universiteit gaat terug tot de middeleeuwen, en de toen beoefende wetenschap vond zijn oorsprong in de kloosters en kloosterscholen. De stamboom van vrijwel iedere (Westerse) wetenschapper, mits compleet, zal in een klooster beginnen.

Aan de oudste universiteit van Nederland, de Universiteit van Leiden, werd vanaf de oprichting in 1575 wiskunde gedoceerd. Drie personen in de stamboom in Figuur 2 behoorden tot de eerste wiskundige docenten in Leiden: Rudolph Snellius, Willebrord Snellius en Lu-

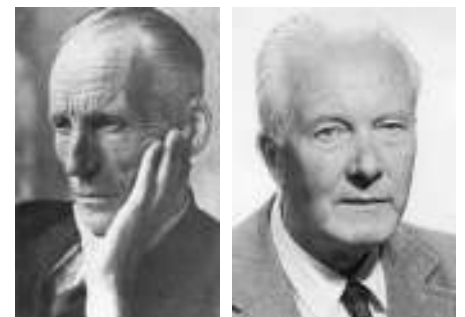
dolph van Ceulen. Willebrord werd bekend vanwege zijn wet over de breking van het licht. Zoals in Figuur 2 is te zien waren zijn vader Rudolph en Ludolph van Ceulen Willebrords promotoren. Rudolph werd in 1581 buitengewoon hoogleraar wiskunde; hij doceerde daarnaast ook Hebreeuws. In 1601 werd hij gewoon hoogleraar en dat bleef hij tot aan zijn dood in 1613, waarna Willibrord als zijn opvolger werd benoemd. Het is niet onwaarschijnlijk dat Simon Stevin (1548–1640) de colleges van Rudolph volgde. In 1600 verzocht prins Maurits aan Simon Stevin om een onderwijsprogramma op te stellen voor een Nederlandstalige opleiding tot militair ingenieur aan de Leidse Universiteit. De opleiding kreeg de naam 'Nederduytsche Mathematique' en was uniek in Europa. In mei 1600 werd Ludolph van Ceulen benoemd als één van de (twee) eerste docenten aan deze ingenieursopleiding. Over Ludolph van Ceulen is veel geschreven in het NAW. Hij heeft dit vooral te danken aan zijn berekening van de eerste 35 decimalen van π . Het heeft hem een monument in de Pieterskerk te Leiden opgeleverd dat op 5 juli 2000 door prins Willem-Alexander werd onthuld [14, 16]. Zijn boek *Van den Cirkel* [6] is een sprekend voorbeeld van 'onvermoeide arbeid' in de wiskunde. Zie voor meer over hem [5, 28], en over π [4].

Nu we hebben gezien hoe de ingenieurswiskunde in Nederland is geïntroduceerd lijkt het mij een goed moment om stil te staan bij mijn bijdrage aan de ingenieurswiskunde in Delft. Daarna hoop ik terug te komen op

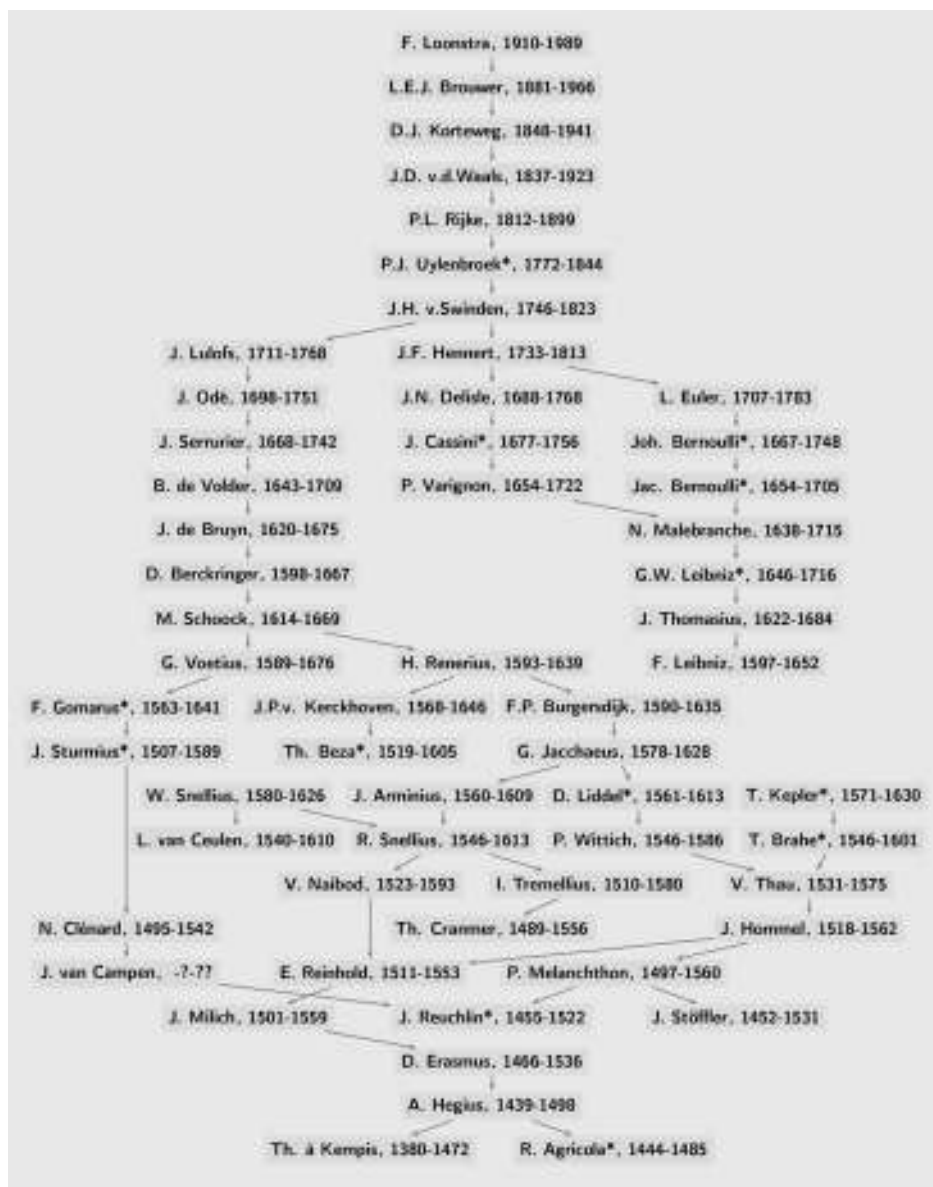
Brouwer en Hilbert, en *en passant* ook op Van Ceulen, om verder te verduidelijken waarom er alle aanleiding is om een vraagteken te zetten bij het motto van het Wiskundig Genootschap.

Wiskundige optimalisatie in Delft

Hoewel ik al in 1969 in dienst trad van de TU, wil ik mij hier beperken tot de periode vanaf 1982, toen ik op verzoek van prof. dr. F. Lootsma (1936–2003) toetrad tot zijn leerstoel 'Operationele Analyse'.⁴ In 1984 verscheen een preprint van een publicatie die achteraf bepalend is geweest voor de ontwikkelingen daarna. De Indiër Narendra Karmarkar, werkzaam bij AT&T in de Verenigde Staten, stelde daarin een nieuwe methode voor om lineaire optimalisatieproblemen op te lossen. Het manuscript trok mijn aandacht vanwege de bijzondere wiskundige benadering en vanwege de claim van de auteur dat zijn methode niet alleen in theoretisch opzicht ef-



Brouwer en F. Loonstra (1910–1989)



Figuur 2 Wiskundige stamboom (gedeeltelijk)

ficiënt was, maar in de praktijk veel efficiënter dan de tot dan toe gebruikelijke simplexmethode. Veel toenmalige experts in het gebied waren zeer argwanend en adviseerden om er niet te veel tijd aan te besteden. Zij konden zich niet voorstellen dat er op het gebied van lineair optimaliseren na bijna dertig jaar intensief onderzoek nog iets nieuws te bedenken viel, en beschouwden het gebied als 'dood'. Op buitenlandse conferenties merkte ik echter dat vooraanstaande wetenschappers in de Verenigde Staten en Japan daar anders over dachten. Het stimuleerde mij om door te gaan.

De Optimalisatie Groep in Delft

Het duurde tot 1989 voor mijn eerste artikel over de nieuwe aanpak verscheen [18]. Inmiddels had zich ook een afgestudeerder gemeld

die interesse toonde voor de nieuwe zogenaamde *inwendigepuntmethoden* (IPMn), namelijk Dick den Hertog. Zijn afstudeerwerk was de basis voor een tweede artikel [9]. Ook ontstond samenwerking met professor Jean-Philippe Vial van de Universiteit van Genève. Zijn lezing van het eerste artikel leidde tot een sterk vereenvoudigde versie daarvan [23]. Door de komst (op 2 september 1989) van dr. Tamás Terlaky als researchfellow bestond de Optimisatie Groep in Delft eind 1989 uit drie personen, want Dick den Hertog had besloten (per 1 september 1989) verder te gaan met een promotie-onderzoek. Het was het begin van een enerverende tijd met nieuwe promovendi en veel buitenlandse bezoekers. In veel gevallen werd financiële ondersteuning gezocht bij NWO, en verkregen. Ook de universiteit droeg bij uit fondsen voor research-

fellows en gasthoogleraren. Bovendien profiteerde de groep van een financiële injectie door het KLSA (Koninklijk Laboratorium Shell, Amsterdam). De samenwerking met promovendi en bezoekers leidde tot tientallen publicaties in gerenommeerde tijdschriften en twee standaardboeken over IPMn [22, 25]. Daarnaast werden veel afstudeerders agetrokken door de groep. Sommigen droegen bij aan het onderzoek van IPMn, anderen verichtten hun afstudeerwerk extern, bij bedrijven als Philips, Shell, Heineken, Schiphol, ORTEC en ook bij TNO. In totaal studeerden tot 2006 circa tachtig studenten af bij de groep.

In het voorjaar van 2000 kondigde Terlaky zijn vertrek aan naar McMaster University (Hamilton, Canada), waar hem een hoogleraarspositie was aangeboden. De lege plaats werd opgevuld door de benoeming van dr. Hans Melissen. Vanaf oktober 2000 maakte ook dr. Etienne de Klerk deel uit van de groep, maar deze vertrok in 2003 naar de universiteit van Waterloo, Canada. Doordat met ingang van mijn emeritaat, in mei 2006, dr. Melissen werd overgeplaatst naar de groep Systeemtheorie bleef ik achter met tien promovendi.

Op de foto in Figuur 3 staan, behalve mijzelf en professor Bai, negen van deze promovendi. De tiende promovendus is ir. H.N. Post die werkzaam is bij Connexxion en zijn promotie-onderzoek extern doet, sinds kort met collega Karen Aardal als medebegeleider. Inmiddels is het aantal promovendi geslonken doordat acht van hen met succes hun proefschrift verdedigden. Bij twee van hen, Ivan Ivanov en Gamal Elabwabi, trad dr. De Klerk (UvT) op als medebegeleider. Deze was weer teruggekeerd uit Canada om in Tilburg de plaats in te nemen van de helaas jong overleden dr. Jos Sturm (1971–2003).

De nadruk in het onderzoek in onze groep heeft vanaf 1984 gelegen op algoritmen voor het oplossen van eerst lineaire, en later vooral niet-lineaire optimalisatieproblemen. Het genoemde artikel van Karmarkar bleek ach-



Figuur 3 Op de jaarlijkse conferentie van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde



teraf het begin te zijn van wat wel een revolutie is genoemd in de wiskundige benadering van het optimaliseren. Daarin speelden IPMn een cruciale rol. Deze waren aanvankelijk bedoeld om lineaire problemen op te lossen. Maar rond de jaren '90 van de vorige eeuw bleken zij ook bruikbaar voor niet-lineaire problemen, met name zogenaamd convexe problemen. Dit had grote betekenis voor onder andere de systeemtheorie, waar tot dan toe onoplosbare problemen nu met standaard software konden worden opgelost. Het werd nog interessanter toen bleek dat voor heel moeilijk oplosbare combinatorische problemen (zogenaamd NP-complete problemen) met behulp van IPMn een oplossing kon worden gevonden met kwaliteitsgarantie: In polynomiale tijd kan een oplossing worden gevonden die niet meer dan een vooraf bekende percentage (bijvoorbeeld 13%) slechter is dan optimaal.

Het zou mij een plezier doen dieper in te gaan op de theorie die aan deze ontwikkelingen ten grondslag ligt. Maar ik denk velen van u een groter plezier te doen door in plaats daarvan een aantal voorbeelden van recente toepassingen van wiskunde te geven. Daarom volgt nu een aantal voorbeelden van projecten waarbij ik zelf betrokken was na mijn emeritaat.

Voorbeelden van ingenieurswiskunde

In mijn intreeredes [19–20] heb ik al enkele voorbeelden gegeven van min of meer alledaagse problemen die kunnen worden gemodelleerd als een wiskundig optimalisatiepro-

bleem. Het gebruik van deze modellen kan essentieel zijn voor het succesvol opereren van grote en kleinere bedrijven. We beginnen met een voorbeeld waarbij ons aller veiligheids in het geding is.

Optimale veiligheid dijken. De ouderen onder ons herinneren zich ongetwijfeld de watersnood van 1953 toen er bijna 2000 dodelijke slachtoffers vielen, en de jongeren zullen zich herinneren hoe in 1995 opnieuw een kritische situatie ontstond in het Rivierenland⁵ waardoor circa 200.000 mensen moesten worden geëvacueerd. Bescherming tegen overstromingen is van levensbelang in Nederland, omdat ongeveer 55% van het land overstroombaar is. Deze bescherming wordt geboden door de al dan niet versterkte duinen en de dijken. Het overstroombare deel van Nederland is verdeeld in 53 zogenaamde dijkkringen. Een dijkkring is een gebied dat is omringd door duinen en/of dijken. Figuur 4 toont deze dijkkringen.

Voor elke dijkkring is een veiligheidsnorm vastgesteld. Momenteel wordt hiervoor gebruikt de eis dat overstromingen gemiddeld niet vaker dan eens per 1250 tot 10.000 jaar plaatsvinden; het getal varieert per dijkkring. Op basis van meetgegevens uit het verleden wordt een voorspelling gedaan over de te verwachten stijging van de zeespiegel en de te verwachten daling van het grondniveau. Bij de berekeningen wordt ook rekening gehouden met klimaatverandering. Dit alles wordt verwerkt in een wiskundig model.

Het gebruikte wiskundige model is gebaseerd op een kosten-batenanalyse: het totaal van de toekomstige (verdisconteerde) kosten van verhogingen van een dijk plus de te verwachten schade tengevolge van mogelijke overstromingen wordt geminimaliseerd. Een eerste versie van dit model is gemaakt door de wiskundige D. van Dantzig. Deze deed dit in opdracht van de Delta Commissie die werd ingesteld na de ramp van 1953. In 2006 is dit model verfijnd door C. Eijgenraam van het Centraal Planbureau. Anders dan Van Dantzig, hield hij rekening met de economische groei in een dijkkring. Gedurende de periode 2007–2009 was ik betrokken bij een project dat onder leiding stond van professor Den Hertog (UvT) waarbij in opdracht van Deltares het model verder werd verfijnd en tevens voorstellen werden gedaan voor efficiënte methoden om het model op te lossen. De voorgestelde methoden zijn geïmplementeerd in *OptimaliseRing*, een door HKV-Lijn-in-Water ontwikkeld softwarepakket. Dit pakket zal worden gebruikt ter onderbouwing van een

(principe)besluit over nieuwe veiligheidsnormen in 2011. Twee artikelen op basis van ons onderzoek zullen binnenkort worden gepubliceerd in de tijdschriften *Operations Research* en *Management Science*.

Dynamisch positioneren. Ons tweede voorbeeld is ontleend aan de offshore-industrie. We beschouwen een groot schip dat wordt gebruikt voor oliewinning. Het is belangrijk dat het schip een vaste positie inneemt boven de oliebron. Als de zee ondiep is wordt het in positie gehouden met behulp van ankerkettingen. Bij grotere dieptes is dit niet langer mogelijk met kettingen omdat deze onder hun eigen gewicht zouden bezwijken. In plaats van kettingen kunnen dan lijnen van kunstvezels worden gebruikt, bijvoorbeeld van polyester, maar dat is nogal duur.

Een alternatief is het gebruik van Dynamisch Positioneren (DP). Bij gebruik van een DP-systeem worden de krachten die op het schip werken, door wind en golven, gecompenseerd door middel van propellers onder het schip. Deze propellers zijn roteerbaar.⁶ Het schip kan wel acht of zelfs meer van deze propellers hebben, bijvoorbeeld twee propellers voor, twee achter en vier of meer daartussen. Deze propellers worden in het algemeen aangedreven door elektromotoren; de benodigde energie wordt vaak opgewekt door generatoren die worden aangedreven door diesel- of gasturbines. Door de propellers te draaien en het geleverde vermogen per propeller te variëren kan het schip zeer nauwkeurig in de gewenste positie worden gehouden.

Een voordeel van schepen die met een DP-systeem zijn uitgerust is dat zij eenvoudig inzetbaar zijn. Er kunnen veel brandstofkosten worden bespaard door de propellers op een intelligente manier aan te sturen. Het ligt daarom voor de hand om te zoeken naar een aansturing die op ieder moment het door de gezamenlijke propellers geleverde vermogen minimaliseert. Daarmee wordt het een optimalisatieprobleem.

Het probleem is een niet-lineair probleem



en moet real-time, dus snel, worden opgelost. Er bestaat commerciële software voor dit probleem, maar het is niet bekend welke optimalisatiemethoden daarin worden gebruikt. Toen in 2006 een student van de afdeling Maritieme techniek, Arjen Tjallema, het probleem aan mij voorlegde realiseerde ik mij dat het als een kegelprobleem kon worden gemodelleerd. Voor het oplossen van het model bestaan sinds een jaar of vijftien zeer snelle IPM-algoritmen.⁷ Tjallema heeft het model gebruikt in een bestaand simulatiepakket om een vergelijking te maken met bestaande software. Uit deze vergelijking bleek al snel dat de nieuwe aanpak een veel stabielere gedrag oplevert. Dit is te danken aan de grotere nauwkeurigheid van de oplossing van het DP-probleem en de snelheid waarmee het wordt opgelost. Uit een praktijkgeval blijkt dat onder milde weersomstandigheden de gevraagde stuwkracht met ongeveer 6% wordt verminderd (en daarmee navenant het brandstofverbruik), en bovendien dat het systeem met de nieuwe methode ongeveer 5% zwaardere weersomstandigheden aan kan, wat de inzetbaarheid significant vergroot. Er ligt een manuscript [26] klaar voor publicatie, maar hiermee wordt gewacht omdat het bedrijf waar Tjallema zijn promotie-onderzoek uitvoert bezig is met een octrooi-aanvraag voor de nieuwe methode.

Webshop. Een derde voorbeeld is ontleend aan een probleem dat mij werd voorgelegd door de bevriende eigenaar van een fabriek die gespecialiseerd is in het op maat vervaardigen van kartonnen dozen. Eerder werd de mogelijkheid geboden om via de website van het bedrijf een offerte aan te vragen, na opgave van de afmetingen, de kartondikte en het aantal gewenste dozen. Nadat maandelijks een bescheiden bedrag aan Google werd

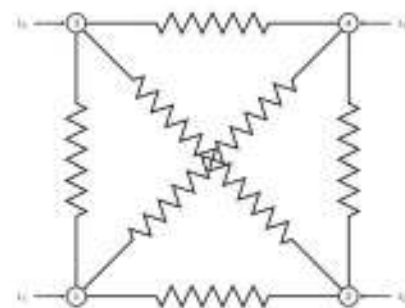
betaald bleek het aantal offerte-aanvragen significant toe te nemen. Ook herhaalde verhogingen van dit bedrag hadden hetzelfde effect. Het gevolg was dat veel tijd moest worden gestoken in het maken van offertes. Dat leidde tot de vraag of de offertes ook online konden worden gegenereerd. Een probleem daarbij was dat de gehanteerde doosprijzen niet alleen van de afmetingen, het karton en het aantal afhingen, maar dat ook rekening werd gehouden met de prijzen van concurrerende bedrijven. Hierdoor hadden de doosprijzen een nogal grillig karakter. Door middel van een niet-lineaire regressie-analyse lukte het om de handmatig berekende prijzen met grote nauwkeurigheid automatisch te berekenen. Hierdoor kon het gewenste doel worden gerealiseerd: op de site www.doosopmaat.nl kan de klant nu zelf de doosprijzen berekenen en direct bestellen. Inmiddels wordt het systeem ook gebruikt door PostNL (zie Figuur 6). De klant kan via de PostNL-site prijzen calculeren en dozen bestellen. Genoemd bedrijf vervaardigt de bestelde dozen, en PostNL levert ze af bij haar klant.

Robuuste elektrische weerstandsnetwerken.

Weerstandsnetwerken zijn elektrische netwerken die alleen weerstanden bevatten. Het gedrag ervan wordt volledig geregeerd door de wetten van Ohm (1787–1854) en Kirchhoff (1824–1887). Figuur 7 toont zo'n netwerk met vier knopen; de som van de in de knooppunten aangeboden stromen is gelijk aan nul.

Gegeven zo'n netwerk (zonder spanningsbronnen) en gegeven de in- en uitgaande elektrische stromen in de knooppunten, leggen de genoemde wetten de stroomwaarden in alle weerstanden eenduidig vast. In feite worden deze waarden eenduidig bepaald door een stelsel lineaire vergelijkingen. Onze bedoeling is om de weerstandswaarden zo te bepalen dat de warmteontwikkeling (of dissipatie) in het netwerk minimaal is. We maken de natuurlijke aanname dat alle weerstandswaarden positief (of oneindig) zijn en verder dat de som van de inverse weerstandswaarden begrensd wordt door een constante waarde. Onder deze voorwaarden kan het minimaliseren van de dissipatie worden geformuleerd als een niet-lineair optimalisatieprobleem. Verrassend genoeg kan dit probleem worden herleid tot een lineair optimalisatieprobleem. Dit maakt het probleem efficiënt oplosbaar.

De optimale oplossingen die we zo krijgen kunnen zeer instabiel zijn, in die zin dat een kleine verandering in één of meer van de in- of uitgaande stroomwaarden de dissipatie onevenredig veel groter maakt. In [21] geven we



Figuur 7 Een weerstandsnetwerk met vier knooppunten

een voorbeeld van een netwerk met vijf knopen waarbij de optimale oplossing een dissipatie heeft van 16,17, maar waarbij een verstoring van slechts 10% er toe leidt dat de dissipatie aangroeit tot 344,04, dus ruim 21 maal zo groot als de optimale waarde. In de praktijk kan dit desastreus zijn, omdat het netwerk door verhitting verbrandt.

Sinds het begin van deze eeuw zijn er nieuwe methoden om onzekerheid te modelleren. Voortrekkers op dit gebied, dat bekend staat onder de naam 'robuste optimalisatie', zijn professor A. Ben-Tal (Technion, Haifa, Israël) en professor A. Nemirovski (Georgia Tech, Atlanta, USA).⁸ De door hen voorgestelde methoden berusten op een geschikt gekozen convexe 'verstoringsverzameling' die alle mogelijke verstoringen van de inputgegevens bevat.

Voor elk weerstandsnetwerk kunnen we nu de dissipatie maximaliseren over de verzameling van alle mogelijke verstoorde inputstromen; dit zijn de inputstromen die men krijgt door bij de nominale inputstroom een stroom uit de verstoringsverzameling op te tellen. Indien de verstoringsverzameling een voldoende eenvoudige structuur heeft, bijvoorbeeld een ellipsoïde of een box, dan kan deze maximalisatie efficiënt worden uitgevoerd. Het weerstandsnetwerk dat de zo verkregen maximale dissipatie minimaliseert is het meest robuust tegen verstoringen in de verstoringsverzameling. Zo'n netwerk wordt verkregen door een 'semidefiniet' optimalisatieprobleem op te lossen; dit is een bijzonder geval van een kegelprobleem. Voor details verwijzen we naar de uitgebreide literatuur over robuuste optimalisatie. Standaardwerken zijn [2] en [3]. Wanneer we deze methode toepassen op het hiervoor genoemde instabiele probleem dan kunnen we de stabiliteit aanzienlijk verbeteren. Het levert een weerstandsnetwerk op waarvoor de nominale dissipatie 18,18 is, terwijl bij een willekeurige verstoring van niet meer dan 10% de dissipatie nooit groter wordt dan 23,98. De dissipatie



Figuur 6 Automatische offertes voor doosjes op maat



David Hilbert en zijn grafsteen

zal dus in de praktijk nooit groter zijn 23,98. De prijs voor deze stabiliteit is dat de nominale waarde van de dissipatie (nu 18,18) iets groter is dan de optimale waarde (16,17); maar het levert een netwerk op dat willekeurige verstoringen van ten hoogste 10% overleeft.

Nabeschouwing

Het heeft velen verbaasd welke mogelijkheden de wiskunde biedt om verschijnselen in de natuur en in het alledaagse leven te beschrijven. In een radiorede⁹ noemde Hilbert wiskunde de verbindende brug tussen theorie en praktijk, tussen denken en waarnemen. Hij verwees naar Galilei (1564–1642) die stelde dat de natuur slechts kan worden begrepen door hen die haar taal en tekens hebben leren kennen; deze taal is de wiskunde en de tekens zijn driehoeken, cirkels en andere wiskundige figuren. Ook citeerde hij Kant (1724–1804) die stelde dat in elke natuurwetenschap slechts zoveel echte wetenschap is als er wiskunde in is. Hilbert concludeerde dat hieraan, en aan talrijke toepassingen, de wiskunde het aanzien dankt dat zij bij het algemene publiek geniet.

Crisis in de wiskunde

Dit aanzien was in het begin van de vorige eeuw in gevaar doordat de wiskundige wereld rond het begin van de 20ste eeuw werd geplaagd door paradoxen. Algemeen aanvaarde grondbeginselen (axioma's) leidden via gebruikelijke logische redeneringen tot tegenspraken. De daardoor ontstane verwarring bezorgde slapeloze nachten aan menig wiskundige van grote naam.

Dit maakte een fundamentele bezinning noodzakelijk op de grondslagen van de wiskunde. In de genoemde paradoxen speelden oneindige verzamelingen een voorname rol. Het begrip verzameling is één van de meest primitieve begrippen in de moderne wiskunde. Precies bij dit begrip lag de moeilijkheid. Het werd onduidelijk wat een verzameling is en wat niet. Russell had een verzameling ge-

vonden die onvermijdelijk aanleiding gaf tot logische conflicten. Het betreft de verzameling van alle verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten, in wiskundige notatie: $\{x : x \notin x\}$. Met deze definitie lijkt niets mis te zijn. Vraagt men echter of deze verzameling tot zichzelf behoort of niet, dan leidt dit tot een conflict, de zogenaamde Russell-paradox [11, p. 37].

Hilbert beschouwde de wiskunde als een model van zekerheid en waarheid: "Als zelfs het wiskundige denken zou falen, waar anders zou dan zekerheid te vinden zijn?" Maar hij was er zeker van dat het allemaal goed zou komen. Anderen waren daar minder optimistisch over, of beweerden zelfs het tegendeel. Onder de laatsten nam Brouwer een prominente positie in. De aanvankelijk zeer goede relatie tussen Hilbert en Brouwer kwam door hun tegengestelde posities in deze grondslagenkwestie onder grote druk te staan, en leidde uiteindelijk tot een bitter conflict. Daarover gaat het in de volgende paragraaf.

Grondslagenstrijd

We zagen al eerder dat Ludolph van Ceulen zijn naam onsterfelijk heeft gemaakt door 35 decimalen van π te berekenen. Dankzij meer geraffineerde technieken voor het berekenen van π en de enorme rekenkracht die zelfs gewone PC's ons verschaffen, is het aantal bekende decimalen van π inmiddels 5.000.000.000.000. Hoewel dit als een enorme prestatie wordt gezien is de betekenis ervan toch betrekkelijk: het aantal ontbrekende decimalen is nog steeds oneindig groot. Ten opzichte van oneindig is vijf biljoen niet noemenswaardig groter dan 35.

Overigens is inmiddels wel een vraag beantwoord die Brouwer ooit stelde, namelijk



Brouwer tijdens een voordracht

of in de decimale ontwikkeling van π de rij 0123456789 voorkomt. Doordat zoveel meer decimalen bekend zijn dan in Brouwers tijd, kon worden vastgesteld dat de rij inderdaad voorkomt. Brouwer stelde de vraag om aan te geven dat er "altijd wel onopgeloste problemen" zijn, wiskundige vragen waarop we het antwoord niet weten. De genoemde vraag van Brouwer is nu achterhaald. Maar door het rijtje in Brouwers vraag langer te maken is eenvoudig een soortgelijke vraag te stellen waarop het antwoord nog steeds onbekend is. Er zijn dus fatsoenlijke wiskundige vragen waarop we noch bevestigend noch ontkennend kunnen antwoorden.

Dit bracht Brouwer er toe om een veelgebruikte bewijsmethode ter discussie te stellen, namelijk die van het bewijs uit het ongerijmde. Dit gaat als volgt: als je bewering A wilt bewijzen dan veronderstel je dat A niet geldt en toont vervolgens aan dat deze veronderstelling tot een tegenspraak leidt. Hieruit concludeer je dat A moet gelden. Deze methode berust op de aanname dat er slechts twee mogelijkheden zijn: A geldt of A geldt niet. Dit is de wet van de uitgesloten derde: een bewering is waar of niet waar, een derde mogelijkheid is er niet: *tertium non datur*. Met andere woorden: als de ontkenning van een bewering niet waar is, dan is de bewering waar. Hier maakte Brouwer bezwaar. Voor hem is het geloof aan de onbeperkte geldigheid van de wet van de uitgesloten derde in de wiskunde een dogmatisch bijgeloof. Ondanks het wegvallen van het beginsel van de uitgesloten derde kon Brouwer een substantieel stuk wiskunde opbouwen. Voor het behandelen van oneindige objecten en structuren, zoals bijvoorbeeld oneindige rijtjes gehele getallen (keuzenrijen) slaagde hij erin om eigenschappen vast te stellen door herleiding tot eindige beginstukken. Dit is de basis van de door hem geïntroduceerde in-



Bertrand Russell (1872–1970)

tuitionistische wiskunde. In termen van deze benadering waren veel bestaande bewijzen ondeugdelijk. Het hele gebouw van de wiskunde moest volgens Brouwer opnieuw worden gebouwd op een intuïtionistisch fundament.

Evenals Hilbert, waren veel deskundigen van mening dat de axiomatische aanpak kon worden gered. Zij vertrouwden erop dat de axiomatische aanpak een betrouwbare leidraad zou zijn voor de oplossing van veel open vragen. Hoewel op het gebied van de analyse “zelfs geen schaduw van een tegenspraak opgedoken was”, zoals Hilbert tijdens een voordracht in 1922 uitdrukte, voelden andere wetenschappers zich toch onbehagelijk. Feitelijk was er nog maar weinig of niets gepresteerd om te bewijzen dat de axiomasystemen van de verzamelingenleer, de analyse en de rekenkunde vrij waren van tegenspraak, en evenmin was er iets bekend over de bewijskracht van die systemen. Een gevolg was dat enkele wiskundigen meer en meer neigden tot de argumenten van het intuïtionisme. Onder hen was de beroemde Hermann Weyl, een oud-leerling van Hilbert. Maar, zo wierp Hilbert tegen, de analyse, ja de wiskunde in het algemeen, was een ‘symfonie van het oneindige’, en: “uit het paradijs dat Cantor voor ons geschapen heeft, zal niemand ons kunnen verdrijven.” [11, p. 50]

Terwijl Hilbert aan zijn bewijstheorie werkte en steeds voorspelde dat het succes om de hoek wachtte, werkte Brouwer aan zijn intuïtionistische programma. Brouwer had inmiddels een paar goede studenten gekregen. Maurits Belinfante promoveerde in 1923, Barend Loor en Arend Heyting deden dat in 1925, en Wilfrid Wilson in 1928. Daarnaast was Brouwer ook zelf productief. In 1927 gaf hij op uitnodiging een serie colleges in Berlijn die veel furore maakten. Zelfs de pers schonk er aandacht aan en uitgever De Gruyter drong er bij hem op aan zijn lezingen als boek uit te geven. Een andere belangrijke uitnodiging ontving hij uit Wenen. Karl Menger was betrokken bij de Wiener Kreis en organisator van het beroemde Mathematisches Kolloquium in Wenen. Op Mengers aanraden werd Brouwer uitgenodigd om in maart 1928 twee voordrachten te houden. De enthousiaste reacties in Berlijn en Wenen bleven niet onopgemerkt in Göttingen, toen nog het wiskundige centrum van de wereld, waar Hilbert de scepter zwaaide.

Hilbert leed inmiddels sinds 1925 aan een ernstige ziekte, pernicioze anemie. Toen hij na een moeilijke periode twee jaar later voor het eerst weer een congresvoordracht gaf, in

Hamburg, verviel hij in een emotionele uitbarsting die men niet zo gauw in een wetenschappelijke context verwachten zou. Het was een regelrechte aanval op Brouwer, overigens zonder dat zijn naam werd genoemd [7, p. 315]: “Ik sta [onder deze omstandigheden] verbaasd, dat een wiskundige aan de strenge geldigheid van het *tertium non datur* twijfelt. Ik sta er nog meer verbaasd over dat, naar het schijnt, een hele gemeente van wiskundigen zich thans gevormd heeft die hetzelfde doet. Maar ik sta het meest verbaasd over het feit dat zelfs ook in de kring van wiskundigen de suggestieve kracht van een enkele temperamentvolle en geestrijke man de onwaarschijnlijkste en meest excentrieke werking kan uitoefenen.” In augustus 1928 was er een terugslag in Hilberts gezondheid; hij leed aan pijn in handen, voeten, benen en ruggenwervels. Desondanks ondernam hij nog een reis naar Bologna voor een congres. Direct daarna stortte hij in. Hij werd na een hartaanval naar een sanatorium in Luzern vervoerd waar hij tot oktober verbleef. Beseffend dat hij onder de gegeven omstandigheden gemakkelijk het leven kon laten, kwam hij tot een radicale conclusie: “Brouwer is een gevaar voor de wiskunde, en hij moet onschadelijk gemaakt worden.” Tot dan toe was Brouwer een van de meest actieve leden van de redactie van de *Mathematische Annalen*, het belangrijkste wiskundige tijdschrift. Naast Hilbert, die hoofdredacteur was, zaten in de kernredactie drie andere leden: Blumenthal, die als een soort secretaris van Hilbert fungeerde, Carathéodory en Einstein. Hilbert voegde de daad bij het woord en stuurde Brouwer een ontslagbrief.

Het vermoeden ligt voor de hand dat Hilbert vreesde dat bij verdere verslechtering van zijn gezondheid Brouwer in de kernredactie zou worden opgenomen en, nog erger, wellicht het hoofdredacteurschap zou toevalen. Dit gevaar probeerde hij door deze brief af te wenden. Carathéodory wees Brouwer op de wankele gezondheidstoestand van Hilbert, en verzocht hem af te zien van tegenstand omdat dit in Hilberts toestand dodelijk zou kunnen zijn. Ondanks de verbijsterende vernedering die hem door Hilbert was aangedaan, wilde Brouwer niet verantwoordelijk gehouden worden voor diens dood. Na amper beraad besloot hij zich niet zonder meer te conformeren aan Carathéodory's verzoek. Op 2 november stuurde hij hem een brief, met afschrift naar Blumenthal [7, p. 336]: “Na een nauwgezette overweging en verregaande consultering moet ik het standpunt innemen, dat ik het door u aan mij gerichte

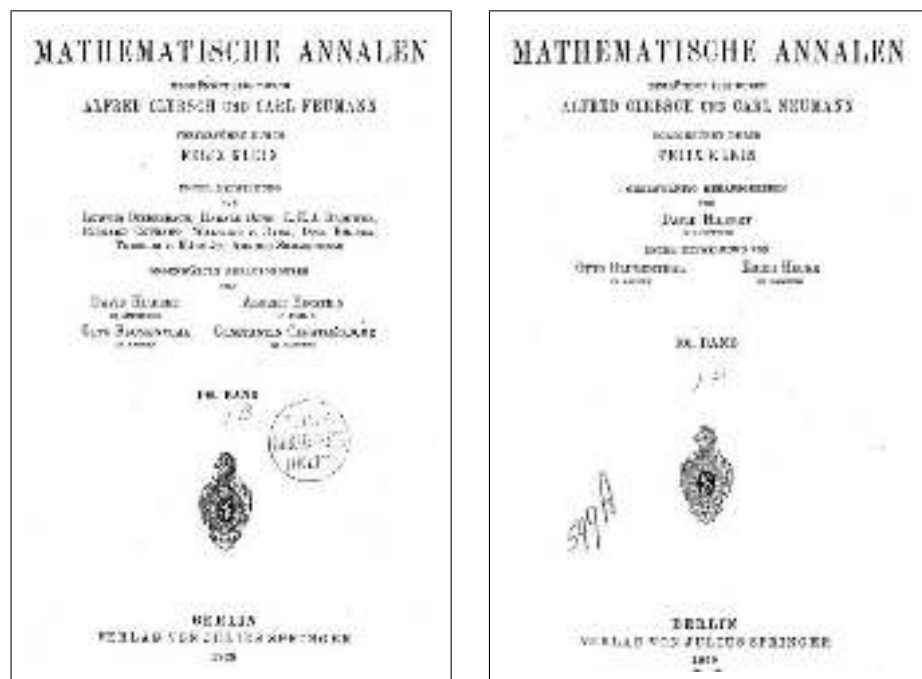


Constantin Carathéodory (1873–1950) en Otto Blumenthal (1876–1944)

verzoek, mij tegenover Hilbert als tegenover een ontoerekeningsvatbaar iemand te gedragen, slechts dan zou kunnen inwilligen als het [verzoek] mij schriftelijk en wel gemeenschappelijk van de zijde van Hilberts vrouw en zijn huisarts bereikt zou hebben.” De zaak kreeg hierdoor een heftig vervolg. Uiteindelijk werd er eind december voor gekozen om na de verschijning van het honderdste deel van de *Annalen* de hele redactie te ontslaan en een nieuwe te benoemen, aldus de schijn vermijdend dat de actie tegen Brouwer was gericht. Einstein en Carathéodory weigerden deel uit te maken van de nieuwe redactie, alleen Hilbert en Blumenthal werden opnieuw benoemd. Zie Figuur 8. Voor veel meer details verwijs ik naar [7], waaraan het meeste van het bovenstaande is ontleend. Hilbert had dus zijn zin gekregen. Brouwer was op een zijspoor gezet.¹⁰

Het jaar 1930 bracht een verrassende wending in de stand van zaken. Hilberts positie werd nog eens verwoord in de laatste drie zinnen van de eerder genoemde Königsbergse radiorede: “De eer van de menselijke geest, zo zegt de beroemde wiskundige Jacobi, is het enige doel van alle wetenschap. We moeten geen geloof hechten aan hen die tegenwoordig met een filosofische gezichtsuitdrukking en op verwaande toon de ondergang van de cultuur voorspellen en tot het Ignorabimus vervallen. Voor ons is er geen Ignorabimus, en volgens mij ook zeker voor de natuurwetenschap niet. In plaats van het dwaze Ignorabimus geldt daarentegen voor ons de leus: Wij moeten weten, wij zullen weten.”

De toespraak werd uitgezonden op 8 september 1930 en was gebaseerd op een lezing die Hilbert eerder op die dag had gehouden tijdens een congres in Königsberg van het genootschap van Duitse natuuronderzoekers en artsen, onder de titel ‘Naturerkennen und Logik’. Hij wist toen nog niet dat een dag eerder, tijdens een ander congres, ook in Königsberg, iets opmerkelijks was gebeurd. Op de laatste dag van dit andere congres,¹¹ tijdens een afsluitende discussiezitting, had de nog on-



Figuur 8 Het omslag van de *Mathematische Annalen* voor en na de redactiewisseling

bekende, jonge Kurt Gödel (1906–1978) het woord genomen. Met zijn zachte stem had deze meegedeeld dat men, “onder de veronderstelling dat de klassieke wiskunde vrij is van tegenspraken, voorbeelden van beweringen kan geven die weliswaar inhoudelijk juist zijn, maar in het formele systeem van de klassieke wiskunde niet te bewijzen zijn.” Hiermee was een van Hilberts hoofddoelen verworpen: er is geen formeel systeem dat precies alle ware wiskundige beweringen levert. Hilbert was er niet bij. Daarom kon hij een dag later zonder de minste twijfel zijn dogma herhalen: Wir werden wissen!

In feite was de situatie nog erger voor Hil-



Kurt Gödel (links) en Albert Einstein (1879–1955)

bert en zijn programma dan zich oorspronkelijk liet aanzien. Gödel had namelijk al snel in gezien dat zijn methoden ook aantoonde dat (zeg) de rekenkunde haar eigen consistentie niet kon bewijzen; hiermee was Hilberts dogma volledig weerlegd. De hoop op eenvoudige consistentiebewijzen voor ingewikkelde theorieën was vervlogen. Gödels resultaten kunnen ruwweg als volgt worden samengevat [27, p. 3]: “Een formeel wiskundig systeem is niet consistent of niet volledig.”¹² Hiermee had Brouwer dus toch gelijk gekregen. Toen hij Gödels resultaat leerde kennen reageerde hij nogal onderkoeld met de woorden: “Dat verbaast mij niet, ik had dit op inhoudelijke gronden al verwacht”. Hilbert is de slag niet meer te boven gekomen. Na 1930 speelde Hilbert dan ook vrijwel geen rol meer, ten dele omdat hij sterk aan geestkracht inboette [7, p. 358], ten dele ook omdat de door anderen voorspelde ‘ondergang van de cultuur’ zich aan zijn eigen wiskundige instituut in Göttingen manifesteerde. Daarover iets meer in de volgende paragraaf.

Leren van de tijd

In zijn radiorede suggereerde Hilbert dat zijn tegenstanders, die tot het Ignorabimus vervielen, dit deden omdat zij hun oor leenden aan hen die de ondergang van de cultuur voorspelden. We zagen al dat de tijd Hilbert in het ongelijk heeft gesteld voor wat betreft het Ignorabimus: de solide fundering voor de wiskunde die Hilbert zocht, en waarvan hij stellig meende dat die bestond, bestaat niet. Het

waarheidsgehalte van de spreuk ‘Wij weten het niet, en we zullen het nooit weten’ (zie noot ⁹) was gebleken groter te zijn dan dat van Hilberts dogma: ‘Wij moeten weten, en wij zullen weten’. Maar er is meer.

Waarom verweet Hilbert aanhangers van het Ignorabimus geloof te hechten aan hen die de ondergang van de cultuur voorspelden? Kan met recht gezegd worden van mensen die Hilberts dogma afwezen, zoals Brouwer, Gödel en Wittgenstein (1889–1951), dat zij dit deden vanwege een dreigende cultuurondergang? Ik meen van niet. Opmerkelijk is wel dat er bij de laatstgenoemden een aandacht was voor het hogere, die bij Hilbert volledig afwezig lijkt te zijn.

Hilberts formulering impliceert dat hij in de jaren '30 van de vorige eeuw geen enkele bedreiging voor de cultuur zag, dit in tegenstelling tot vooraanstaande historici en wetenschappers die zich grote zorgen maakten over het culturele klimaat in Europa en vreesden voor haar ondergang. De tijd heeft ons geleerd dat zijn optimistische cultuurvisie niet houdbaar is gebleken. Nog geen tien jaar later brak het onheil los in Europa. Het eeuwenoude christelijk-humanistische anti-semitisme, soms sluimerend maar altijd aanwezig in Europa, culmineerde in een verdrukking van de Joden die zonder weerga was. Wie de verslagen ervan leest (zie bijvoorbeeld [10] en [13]) moet erkennen dat de woorden ‘waanzin’ en ‘razernij’ van bijvoorbeeld onze landgenoot Huizinga [12, p. 1-2] profetisch waren.

Hilbert zelf heeft moeten ervaren hoe cultuurvernietigend deze razernij te werk ging.¹³ Al in 1933 verdween de ene na de andere medewerker, veelal door ontslag op basis van nieuwe anti-Joodse wetgeving. In Göttingen werden Felix Bernstein, Edmund Landau en Emmy Noether vanwege hun Jood-zijn ontslagen. Hermann Weyl (niet Joods) had ook een goede reden om te vertrekken — zijn vrouw was Joods, en dat betekende uiteindelijk dat hij van haar zou moeten scheiden; hij vertrok naar Princeton [7, p. 384]. Richard Courant (wel Joods) was directeur van het wiskundige instituut, maar in 1933 nog gevrijwaard van ontslag dankzij verrichte militaire dienst in de Eerste Wereldoorlog; vanwege het voor Joden ongunstige klimaat week hij uit naar de Verenigde Staten, alwaar hij de stichter werd van het beroemde Courant Institute aan de universiteit van New York. Hilbert was er aldus getuige van hoe degenen die ten tijde van zijn radiorede de ondergang van de cultuur vreesden dit met goede redenen hadden gedaan. Zijn instituut, dat tot 1933 wereldwijd toonaangevend was voor de



Bernstein (1878–1956), Landau (1877–1938), Noether (1882–1935), Weyl (1878–1956) en Courant (1888–1972)

wiskunde, werd geheel ontmanteld. Toen de minister van Onderwijs hem vroeg “En hoe gaat het met de wiskunde in Göttingen, nu ze van de Joodse invloed is bevrijd?”, zei Hilbert: “Wiskunde in Göttingen, die is er eigenlijk niet meer” [7, p. 388]. “Toen ik jong was”, zei hij, “besloot ik nooit te herhalen wat ik oude mensen hoorde zeggen — hoe goed het verleden was, en hoe slecht het heden. Ik zou dat op mijn oude dag nooit zeggen. Maar nu moet ik wel.” [17, p. 205]

Slotopmerkingen

Eén van de aantrekkelijke dingen van wiskunde is dat men zijn (of haar) gelijk niet haalt door bijvoorbeeld harder te gaan praten, of door middel van een democratische procedure, of eenvoudig door macht. Alleen een formeel bewijs volstaat. Soms is het vinden van zo'n bewijs verre van eenvoudig, en kan het veel tijd en ‘onvermoeide arbeid’ vergen. Ook in de afgelopen decades zijn bewijzen voor een aantal als moeilijk ervaren problemen gevonden, waaronder het vierkleurenprobleem (1977), de oplosbaarheid van lineaire optimalisatie in polynomiale tijd (1979), het vermoeden van Fermat (1995), het vermoeden van Kepler (2002) en onlangs ook de onjuistheid van het vermoeden van Hirsch (2010). Het feit dat moeilijke problemen werden opgelost — zij het soms pas na eeuwen — bracht mensen

als Hilbert er toe te denken dat dit uiteindelijk bij elk probleem het geval zou zijn. Anderen beseften dat dit niet waar kon zijn. Brouwer was zo iemand, maar ook bekende tijdgenoten van hem, zoals bijvoorbeeld Wittgenstein, Gödel, en ook Niels Bohr (1885–1962). Zij gebruikten uitdrukkingen als ‘onuitputtelijk’ en ‘onuitsprekelijk’ om aan te geven dat er dingen zijn die buiten het onderzoeksveld van de wiskunde en wetenschap liggen. Gödel bijvoorbeeld zei dat de wiskunde en wetenschap onuitputtelijk zijn, en Wittgenstein stelde in wezen hetzelfde door te zeggen dat er onuitsprekelijke dingen zijn die zich tonen in bijvoorbeeld de mystiek. Het hing voor hen samen met het bewustzijn dat de werkelijkheid meer omvat dan de voor ons zichtbare dingen. Dit besef, dat dominant was bij degenen die aan de wieg stonden van de Westerse wetenschap, is met name in de tweede helft van de vorige eeuw onder vuur komen te liggen.

Het christelijk geloof biedt een totale visie op de wereld en het leven, inclusief het sterven. Van de wetenschap werd dat ook verwacht. Het zoeken naar een allesomvattende theorie voor de natuurkunde is daarom lange tijd het ideaal geweest. Dit ideaal wordt door sommigen nog steeds aangehangen, door anderen betwijfeld. In feite is dit ideaal vergelijkbaar met Hilberts programma voor de wiskunde. Inmiddels zijn wij er wel achter gekomen

dat de wereld ingewikkelder in elkaar zit dan gedacht. Maar er is nog geen Gödel in de natuurkunde opgestaan. Wellicht daardoor leeft de hoop op een ‘volledige’ natuurkunde nog steeds. Wel zijn er geheimen in de driedimensionale wereld om ons heen die er blijk van geven dat onze wereld niet meer is dan een projectie van een hogerdimensionale werkelijkheid.¹⁴

Het mag opmerkelijk heten dat voor de verklaring van ‘onze’ werkelijkheid een theorie nodig blijkt te zijn die zich baseert op ‘zaken die niet gezien worden’.¹⁵ Is dit niet een bewijs dat het ‘gesloten wereldbeeld’ dat de wetenschap doorgaans hanteert onvoldoende is om onze werkelijkheid wetenschappelijk te verklaren? Dit brengt ons dicht bij wat Gödel bewees voor de wiskunde. Het brengt mij er toe meer in het algemeen te concluderen dat wanneer we proberen de werkelijkheid (of een deel daarvan) tot op de bodem te begrijpen, wat Hilbert voor de wiskunde wilde doen, we op een grens stuiten. Op deze grens, waar volledigheid of consistentie van het denken afwezig blijkt, doemt de verwarring op die een wetenschapper slapeloze nachten kan bezorgen.

Nu mijn antwoord op de vraag ‘Komt onvermoeide arbeid alles te boven?’. Het aan Vergilius ontleende motto van het Wiskundig Genootschap heeft velen gestimuleerd om prachtige dingen te ontdekken, inclusief mijzelf. Maar dat heeft ook geleid tot de vaststelling dat vanwege de ‘onuitputtelijkheid’ (of ‘onvolledigheid’) van de wiskunde onze arbeid niet ‘alles’ te boven kan komen. En dat geldt mijns inziens niet alleen de wiskunde, maar alle wetenschappen: alle wetenschappen lijden aan het euvel onvolledig te zijn.

Noten

- 1 Een meer uitgebreide versie van de rede, met veel details en voetnoten, is te downloaden van <http://www.st.ewi.tudelft.nl/~roos/Afscheidsrede.pdf>. Zolang de voorraad strekt wordt een gedrukte versie op aanvraag toegezonden (stuur daarvoor een e-mail naar C.Roos@tudelft.nl).
- 2 Met dank vermeld ik de namen van hen die mij hielpen tijdens het schrijven van deze rede en bij het samenstellen van de stamboom van wiskundigen in Delft, door commentaar te leveren op eerdere versies, het ter beschikking stellen van foto's, het aanreiken van interessante referenties, gegevens over namen in de stamboom, et cetera: prof. dr. Floris Cohen, prof. dr. Dirk van Dalen, prof. dr. Gerrit van Dijk, prof. dr. Jacques Dreze, dr. K.P. Hart, dr. Bert Hofman, prof. dr. Jan Hogendijk, Jos Knulst, drs.

- Jaap Kruidenier, Mw. W. Loonstra-Verdenius, ir. Dick Mensch, ir. Arjen Tjallema, prof. dr. Arie de Reuver, dr. Herman te Riele, prof. em.dr. Jan Roegiers, Gerda Roos, Carl Schneider ing., dr. Hans J. Visser en prof. dr. Herman van der Wee.
- 3 Afgebeeld is slechts een deel van de complete stamboom. Deze moet worden gelezen als volgt: Als er een pijl loopt van A naar B dan was B promotor van A. Een sterretje bij een naam betekent dat niet alle promotoren zijn opgenomen. Een stamboom van alle huidige (en sommige ex-)wiskunde hoogleraren en UHD's in Delft is te vinden op www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos/StamboomW.EWI.pdf of via de link ‘Wetenschappelijke stamboom’ op de site <http://ewi.tudelft.nl/nl/over-de-faculteit/afdelingen/toegepaste-wiskunde>.
- 4 Voor de voorafgaande periode verwijs ik naar

- mijn intreeredes in Leiden en Delft [19–20].
- 5 De Betuwe, de Bommelerwaard en het Land van Maas en Waal.
- 6 Ook ‘normale schroeven’ op een schroefas worden gebruikt, eventueel in combinatie met een roer, of ‘boegschroeven’ die alleen dwarskracht kunnen leveren.
- 7 Het model is een zogenaamd ‘second-order cone’ optimalisatieprobleem. Een zeer efficiënt en daarom veel gebruikt softwarepakket voor het oplossen van dergelijke problemen is MOSEK, dat onder andere draait onder Matlab.
- 8 Beiden verbleven tijdens een ‘sabbatical leave’ als gasthoogleraar in Delft.
- 9 Deze radiorede is in zijn geheel te lezen en te beluisteren op de site <http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio>.

- pdf. De laatste woorden waren 'Wir müssen wissen, Wir werden wissen'. Deze slogan werd in de wandeling *Hilberts dogma* genoemd en is op Hilberts grafsteen gebeiteld. Hilbert neemt hiermee afstand van hen die menen dat er grenzen zijn aan de wetenschappelijke kennis. Hun positie was verwoord door de Duitse fysicus Emil du Bois-Reymond (1818–1896). Deze had in 1880 in Berlijn een rede gehouden voor de Berlijnse Academie van Wetenschappen en daarin een aantal problemen genoemd waarvan hij meende dat noch de wetenschap noch de wijsbegeerte ooit de oplossing zou vinden. Van hem is de spreuk afkomstig waartegen Hilbert bezwaar maakt, namelijk *Ignoramus et Ignorabimus*, oftewel 'Wij weten het niet, en we zullen het nooit weten'.
- 10 Intussen had Heyting naam gemaakt door een prijsvraag van het Wiskundig Genootschap te winnen waarin gevraagd werd op de manier van de klassieke (aristotelische) logica een axiomatisering van Brouwers logica te maken. Hij ontwikkelde zich tot een nieuwe propagandist van het intuïtionisme. Zijn werk vond expliciete waardering bij Brouwer. Van punten die Brouwer zelf naar voren had willen brengen zei hij dat zij door Heyting "op een magistrale wijze [waren] verhelderd".
 - 11 Van 5 tot 7 september 1930 vond een symposium plaats in Königsberg in Pruisen over de grondslagen van de wiskunde. Er waren vier hoofdvoordrachten: Heyting voor de intuïtionisten, Von Neumann voor de formalisten, Carnap voor de logicisten, en Waisman vertolkte Wittgensteins ideeën. Gödel woonde dit congres bij, van Hilbert is dit niet zeker. Zeker is dat Hilbert er niet bij was toen Gödel zijn eerste zogenaamde onvolledigheidsstelling bekend maakte. Zijn volgelingen bespaarden hem aanvankelijk het desastreuze nieuws, waardoor Hilbert pas een half jaar later voor het eerst iets hoorde over Gödels opmerkelijke resultaten. Zie ook [7, p. 358; 11, p. 75; 1, p. 16; 8, p. 68–71].
 - 12 Onder de volledigheid van een axiomasysteem verstaat men dat uit het axiomasysteem alle correcte formules van een zeker inhoudelijk te karakteriseren vakgebied te verkrijgen zijn. Consistentie van het axiomasysteem betekent dat er geen incorrecte formules uit zijn af te leiden. Zie bijvoorbeeld [11, p. 59].
 - 13 145 wiskundigen ontvluchtten Duitsland, 17 werden vermoord, waaronder de eerder genoemde Blumenthal (1876–1944). Hij was een goede vriend van Hilbert. Vanwege zijn Joodse ras werd hij in 1933 in Aachen ontslagen als docent en in 1938 als redacteur van de *Mathematische Annalen*. Hij week uit naar Delft waar hij korte tijd als tutor werkzaam was aan de TU. Omdat hij slechts één student had was hij afhankelijk van liefdadigheid door het Protestantse Hulpcomité. Tijdens de Duitse bezetting vertrok hij naar Utrecht. In 1943 werden hij en zijn vrouw gearresteerd en naar Westerbork gezonden, waar zijn vrouw stierf. In 1944 werd hij verplaatst naar Theresienstadt; daar overleed hij zes maanden later aan longontsteking, dysenterie en tuberculose [24].
 - 14 In de moderne fysica zoekt men naar een unificerende theorie voor alle elementaire deeltjes. Er wordt daarbij gebruik gemaakt van het begrip supersymmetrie. Supersymmetrie kan echter alleen bestaan als de ruimte tiendimensionaal is [15]. Het is opvallend dat deze theorie gebruik maakt van objecten buiten de voor ons waarneembare werkelijkheid. Objecten dus die onzichtbaar zijn, niet omdat ze te klein zijn om gezien te worden onder de beste microscopen, maar die niet te zien zijn omdat ze buiten onze driedimensionale werkelijkheid liggen; zij zullen dus nooit door een mens gezien worden. Voor een wiskundige hoeft dit niet heel verrassend te zijn. Het betekent dat de werkelijkheid waarin wij leven een deelruimte (lineair of niet-lineair) is van een grotere, hogerdimensionale werkelijkheid; doordat onze zintuigen niet buiten onze eigen werkelijkheid kunnen waarnemen zijn alle 'dingen' daarbuiten onzichtbaar. Interessant is in dit verband het volgende citaat van Brouwer: "...dat de fysicus zich slechts met de projecties der verschijnselen bezighoudt, ...". [7, p. 89].
 - 15 Het is intrigerend om te filosoferen over de mogelijkheden die een vier- of hogerdimensionaal wezen heeft ten opzichte van wezens in een driedimensionale wereld. Het boekje *Flatland* van Edwin Abbott Abbott kan daarbij helpen; de auteur beschrijft daarin hoe iemand uit een denkbeeldige tweedimensionale wereld in contact komt met een driedimensionaal wezen, en daarbij uit zijn eigen wereld wordt gehaald. Het blijkt een ongelooflijk indrukwekkende ervaring te zijn; terug in zijn eigen wereld is hij er zo vol van dat het onmogelijk is om erover te zwijgen. Hij wordt echter niet begrepen, voor gek verklaard, en vervolgens opgesloten.
- ## Referenties
- 1 Jeremy Avigad, Gödel and the metamathematical tradition, 2007. See <http://www.andrew.cmu.edu/user/avigad/Papers/goedel.pdf>.
 - 2 A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, en A. Nemirovski, *Robust Optimization*, Princeton Series in Applied Optimization. Princeton University Press, Princeton, USA, 2009.
 - 3 A. Ben-Tal en A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, Engineering Applications*, MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, USA, 2001.
 - 4 Peter Borwein, The amazing number π , *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(3):254–258, 2000.
 - 5 Henk J.M. Bos, De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en π gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(3):259–262, 2000.
 - 6 Ludolph van Ceulen, *Van den Cirkel*, Jan Andrieszoon, Boeckvercooper, Delft, 1596. Ik citeer uit de transcriptie van Marloes Bazeliët et al., die te vinden is op <http://www.ludolphvan-ceulen.nl/site/vandencirkel.php>.
 - 7 D. van Dalen, L.E.J. Brouwer, 1881–1966. *Een biografie. Het heldere licht van de wiskunde*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 2001.
 - 8 John W. Dawson Jr., *Logical dilemmas: The life and work of Kurt Gödel*, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, USA, 2005.
 - 9 D. den Hertog en C. Roos, A survey of search directions in interior point methods for linear programming, *Mathematical Programming*, 52:481–510, 1991.
 - 10 Saul Friedlander, *Nazi-Duitsland en de Joden. Deel I: De jaren van vervolging 1933-1939; Deel II: De jaren van vernietiging 1929-1945*, Nieuw Amsterdam, Amsterdam, NL, 2007.
 - 11 Gianbruno Guerriero, *Gödel. Mathematische waarheid en logische paradoxen*, Natuur & Techniek, onderdeel van Veen Magazines, Amsterdam, 2004. Oorspronkelijke titel: Kurt Gödel - i grandi della scienza. Vertaling en bewerking: Jan Willem Nienhuys.
 - 12 J. Huizinga, *In de schaduwen van morgen. Een diagnose van het geestelijk lijden van onzen tijd*, H.D. Tjeenk Willink & Zoon N.V., Haarlem, 1935. Vierde herziene druk.
 - 13 Samuel D. Kassow, *Wie schrijft onze geschiedenis. Het dramatische verhaal van het verborgen archief uit het getto van Warschau*, Uitgeverij Balans, Amsterdam, NL, 2007.
 - 14 Cor Kraaikamp en Irene Driessen, π in de Pieterskerk, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(3):250–253, 2000.
 - 15 George Musser, Extra dimensions, *Scientific American*, 302(6):39, 2010.
 - 16 R.M.Th.E. Oomes, J.J.T.M. Tersteeg, en J. Top, Het grafschrift van Ludolph van Ceulen, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/1(2):156–161, 2000.
 - 17 Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
 - 18 C. Roos, A new trajectory following polynomial-time algorithm for the linear programming problem, *Journal of Optimization Theory and its Applications*, 63:433–458, 1989.
 - 19 C. Roos, *Modelleren en Optimaliseren met Wiskunde. Beoefening van Wiskunde in het Spoor van Newton*, Universiteit Leiden, Leiden, 1999. Intreerede.
 - 20 C. Roos, De tijd zal het leren (in Dutch), *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5,5(3):186–202, 2004.
 - 21 C. Roos, Y. Bai, en D. Chaerani, Robust electrical network topology design by conic optimization. Verschijnt binnenkort in *Sultan Qaboos University Journal for Science*.
 - 22 C. Roos, T. Terlaky, en J.-Ph. Vial, *Theory and algorithms for linear optimization*, Springer, Chichester, UK (1st Edition), *Theory and Algorithms for Linear Optimization. An Interior-Point Approach*. John Wiley & Sons, 1997), 2005.
 - 23 C. Roos en J.-Ph. Vial, A polynomial method of approximate centers for the linear programming problem, *Mathematical Programming*, 54:295–306, 1992.
 - 24 R. Siegmund-Schultze, *Mathematicians fleeing from Nazi Germany*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2009.
 - 25 Tamás Terlaky, editor, *Interior point methods of mathematical programming*, volume 5 of *Applied Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
 - 26 A. Tjallemma en C. Roos, A new method for thrust allocation in dynamic positioning systems, 2009. Manuscript.
 - 27 Hao Wang, *A logical journey. From Gödel to philosophy*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1997.
 - 28 Steven Wepster, Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/11(1):63–69, 2010.

Wil Schilders

Platform Wiskunde Nederland

Science Park 123

1098 XJ Amsterdam

bureau@platformwiskunde.nl

Nieuws Platform Wiskunde Nederland

Terugblik en plannen

In het najaar van 2010 werd het Platform Wiskunde Nederland opgericht door het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW), ondersteund door de wiskunde-instituten van de Nederlandse universiteiten (inclusief Eurandom en het Freudenthal Instituut), de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI), en de stichtingen Thomas Stieltjes en Compositio. PWN is opgericht als centrale plaats binnen de Nederlandse wiskunde van waaruit alle zaken die voor de wiskunde van belang zijn op efficiënte wijze behartigd kunnen worden. In het eerste jaar is PWN als landelijke organisatie neergezet, en zijn de commissies aan de slag gegaan. Hiermee is een solide basis gelegd voor het tweede jaar. Wil Schilders, directeur van het PWN, blikt terug op het eerste jaar en licht de plannen voor de toekomst toe.

Na uitvoerige studies en diepgaande discussies, welke in de afgelopen jaren onder andere geresulteerd hebben in de rapporten 'Het Bureau Wiskunde', 'Blauwdruk PWN' en 'Masterplan Toekomst Wiskunde', heeft op 20 oktober 2010 de oprichting plaatsgevonden van het Platform Wiskunde Nederland. Hiermee heeft de wiskunde een orgaan gekregen dat vergelijkbaar is met het ICT-onderzoek Platform Nederland, het Nationaal Comité voor Astronomie, het Regieorgaan Chemie, het NIBI voor bioscience en andere soortgelijke platformen. In feite is PWN zelfs breder van opzet, het verenigt alle aspecten van de beoefening van het vak hetgeen wordt gereflecteerd in de vijf commissies: onderzoek, onderwijs, innovatie, publicaties en publiciteit. In deze zin is PWN een unieke disciplinegerichte organisatie. Deze integrale visie sprak ook reeds uit het Masterplan Toekomst Wiskunde.

PWN is opgericht als centrale plaats binnen de Nederlandse wiskunde van waaruit alle zaken die voor de wiskunde van belang zijn op efficiënte wijze behartigd kunnen worden. Zodoende wordt de slagvaardigheid vergroot

tot profijt van alle Nederlandse wiskundigen en is er een krachtige pleitbezorger voor de discipline wiskunde naar buiten toe. De algemene doelstelling van PWN is om te komen tot de versterking van de financiële, bestuurlijke, wetenschappelijke en publicitaire positie van het wiskundeonderzoek en wiskundeonderwijs in Nederland. Tevens streeft PWN naar coherentie en een effectieve inzet van middelen ten behoeve van het wiskundeonderzoek en wiskundeonderwijs, zowel in wetenschappelijk als in maatschappelijk opzicht. Vertaald naar de praktijk betekent dit dat PWN zich inzet:

- voor een realistische beeldvorming over wiskunde en wiskundigen;
- voor een stabiele infrastructuur van wetenschappelijk onderwijs en onderzoek;
- voor een betere positie van wiskunde in primair en voortgezet onderwijs;
- voor een betere aansluiting tussen voortgezet en hoger onderwijs;
- voor een betere verbinding tussen wetenschappelijke wiskunde en (innovatieve toepassingen in) het bedrijfsleven.

Kortom: PWN behartigt de belangen van, en fungeert als spreekbuis voor, de gehele Nederlandse wiskunde.

De organisatorische structuur die is gekozen voor het verwezenlijken van bovenstaande doelstellingen, wordt gereflecteerd in de PWN-vijfhoek:



De genoemde commissies zijn de centrale actoren binnen PWN. Zij werken zowel initieënd als uitvoerend in hun domein, met eigen doelstellingen. Gezamenlijk werken zij aan dwarsverbanden tussen de verschillende commissies. Uitvoering van de door deze commissies en het bestuur uitgestippelde beleid geschiedt in nauwe samenwerking met het Bureau PWN. Op deze wijze is een krachtige structuur ontstaan. De commissies zijn met grote zorg en breed samengesteld zodat 'de achterban' goed wordt gerepresenteerd. Op deze manier zijn mogelijkheden geschapen om op vele fronten tegelijk slagvaardig te werk te gaan. Het verenigen van al deze aspecten binnen één enkele organisatie is uniek, en schept additionele mogelijkheden om tevens aan de vele dwarsverbanden te werken.

PWN-commissies en dwarsverbanden

De commissies bouwen voort op een aantal belangrijke ontwikkelingen die we de afgelopen jaren hebben gezien. Zo is het Masterplan Toekomst Wiskunde inmiddels wijdverbreid en ook bekend bij voor ons belangrijke organisaties (zoals OCW, ELI, NWO, KNAW en het rectorencollege), terwijl het KNAW rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool: analyse en sleutels tot verbetering' een hoog acceptatieniveau kent ondanks alle tegenstellingen die er de afgelopen jaren zijn geweest. Op Europees niveau is de afgelopen jaren veel bereikt op het uitermate belangrijke gebied 'wiskunde en industrie', waarbij het zogenaamde OECD-rapport (zie www.oecd.org/dataoecd/47/1/41019441.pdf) en het recente rapport van de ESF-EMS (zie www.ceremad.dauphine.fr/FLMI) op een zeer brede steun kunnen rekenen. Voor alle commissies geldt dan ook dat er reeds veel voorwerk heeft plaatsgevonden, en dit werk dient niet opnieuw te gebeuren. De commissievoorzitters, in nauwe samenwerking met bestuur en directeur, waken dan ook voor herhaling van zetten, en dragen zorg voor een implementatie van de bevindingen alsmede voor nieuwe ontwikkelingen.

Gedetailleerde plannen van de commissies voor het komende jaar worden in het 'Jaarplan 2011/2012' besproken, dat op verzoek kan worden toegezonden. Hier bespreken we slechts de algemene doelstellingen van deze commissies, de belangrijkste aandachtspunten voor het tweede jaar, en bezien tevens een aantal dwarsverbanden.

Onderwijs

Deze commissie heeft zich, ingegeven door de grootte van de commissie en de breedte van de taakstelling, gesplitst in drie subcommissies welke zich richten op de volgende deelaspecten:

- Realisatie van doorlopende, sectoroverstijgende *leerlijnen* wiskunde (verbrokkelde leerlijnen leiden tot onnodige efficiënties).
- Ontwikkelen van *nascholingstrajecten* voor alle typen docenten rekenen en wiskunde (blijvende professionalisering maakt het beroep aantrekkelijker).
- Advisering over bestaande *curricula* op een betekenisvolle wiskunde en rekenen (eigentijds onderwijs, ook in vergelijking met het buitenland).

De commissie ziet zich geconfronteerd met veel aandacht in de politiek en de media voor het wiskundeonderwijs, vooral ten aanzien van het eerste en derde subthema. Zo heeft

de huidige minister zich uitgesproken voor het verplicht stellen van wiskunde als eind-examenvak. De commissie blijft alert op deze ontwikkelingen, zal gevraagd en ongevraagd advies geven, onder andere middels publicaties in landelijke media en rechtstreekse contacten met het ministerie. Belangrijk in dit verband is het nemen van het voortouw in het opbouwen van adequate contacten met andere organisaties welke zich bewegen op het terrein van het wiskundeonderwijs, teneinde ook hier uniformiteit te bereiken. Daarnaast is een duidelijk aandachtspunt voor het tweede jaar de aansluiting tussen vo en ho. De commissie zal zich ook krachtig inzetten voor kwaliteitsborging en certificering.

Onderzoek

Deze commissie, samengesteld uit vertegenwoordigers van alle Nederlandse universiteiten, heeft als doelstellingen:

- Verhoging onderzoeksbudget voor de Nederlandse wiskunde, met name voortzetting van de vier wiskundeclusters (DIAMANT, GQT, NDNS+, STAR).
- Streven naar grotere slaagkans en verfijning van het subsidiestelsel van NWO in Vrije Competitie en Vernieuwingsimpuls.
- Ontwikkelen van strategie en beleid rond het wiskundeonderzoek in Nederland, inclusief nieuwe onderzoeksprogramma's.
- Gevraagd en ongevraagd adviseren van andere belanghebbenden in het veld.
- Blijvende inzet voor financiering van de doelstellingen van het Masterplan Toekomst Wiskunde (2008).

In het recente rapport 'Evaluation, conclusions and recommendations: Mathematics Clusters 2005–2010' worden de wiskundeclusters (DIAMANT, NDNS+, GQT, STAR) beoordeeld variërend van excellent tot exemplarisch. Voor NWO was dit aanleiding te besluiten tot voortzetting van de financiering van deze clusters, echter voor een beperktere periode (2 jaar) en met een kleiner budget. Dit laatste is mede veroorzaakt door de nieuwe plannen van het ministerie van Economische Zaken, Landbouw en Innovatie (ELI) om onderzoek vooral plaats te laten vinden in het kader van de tien 'topsectoren'. Meer dan voorheen is het daarom zaak voor de commissie Onderzoek om adequaat in te spelen op deze ontwikkelingen, en dit zal dan ook het belangrijkste aandachtspunt zijn voor deze commissie. Hiertoe zullen ook nauwe contacten onderhouden worden met de commissie Innovatie.

In 2011 is ook de nieuwe landelijke onderzoeksschool WONDER gestart met haar activi-

teiten. Er zal een bestendige relatie tussen deze onderzoeksschool en de commissie Onderzoek worden aangegaan, teneinde de groei van WONDER te begeleiden.

Innovatie

In de politiek zien we momenteel een duidelijke verschuiving naar een sterkere focus van wetenschappelijk onderzoek op maatschappelijk relevante problemen. De commissie Innovatie is hiervoor goed geoutilleerd, met een mix van academische en industriële leden. De aandacht gaat vooral uit naar:

- Innovatie in het bedrijfsleven helpen bevorderen, met speciale aandacht voor het MKB.
- Vragen rondom innovatie beantwoorden via het Transferpunt Wiskunde en Innovatie (TWI).
- Bekendheid geven aan toepassingen van wiskunde middels speciale wervende activiteiten zoals themadagen, business cases en publicaties.
- Aansluiten bij grootschalige innovatieprogramma's, zoals de door het ministerie van ELI gedefinieerde 'Topsectoren'.

Rode draad in deze thema's is het duidelijk maken van de rol welke wiskunde kan vervullen in de praktijk en wat zij concreet kan bijdragen aan het algemene nut. We observeren een verdere groei van de eisen van de industrie, maatschappij en andere wetenschappelijke disciplines aan toepasbare wiskundige methoden. De door het ministerie van ELI gepresenteerde topsectoren zullen voor een groot deel de agenda van de commissie Innovatie dicteren in het tweede jaar, en hierbij zal tevens ondersteuning gegeven worden aan de commissie Onderzoek. Daarnaast zal het TWI verder worden uitgebouwd en een actieve rol gaan spelen.

Publicaties

De kleinste commissie, maar wel met een belangrijke missie: het bundelen van de bestaande activiteiten rond publicaties in wiskundig Nederland. Voornaamste aandachtspunten zijn:

- Een efficiëntieslag maken met het uitgeven van tijdschriften die onder verantwoordelijkheid van KWG en NVvW vallen.
- Streven naar verdere professionalisering van de tijdschriften, inclusief het verhogen van de aantallen abonnees.

Gedurende het eerste jaar is een analyse gemaakt van de verschillende publicaties, dit zal in het tweede jaar gebruikt worden om te komen tot meer structuur, een betere integratie en een strikter financieel beleid. Met na-



De introductiebijeenkomst van PWN op 14 mei, met vooraan de PWN-bestuursleden Marian Kollenveld, Jan van Maanen, Gert Vegter en Rob Tijdeman

me voor *Pythagoras* zullen belangrijke beslissingen genomen dienen te worden, teneinde dit jongerentijdschrift een bestendige en financieel gezonde toekomst te kunnen garanderen. Een van de mogelijkheden welke momenteel wordt bekeken is het onderbrengen van *Pythagoras* bij PWN, om zodoende een betere balans te krijgen tussen het tijdschrift met zowel KWG als NVvW. In deze nieuwe opzet kan de commissie Publicaties de rol spelen van redactieraad, welke momenteel ontbreekt. Daarnaast zal gestreefd worden naar een meer structurele oplossing voor zowel de dienstverbanden als de fysieke locaties van de verschillende publicaties. In het verleden werden hiervoor vaak ad-hocconstructies bedacht, welke echter door PWN in meer permanente oplossingen kunnen worden omgezet.

Publiciteit

Rondom het thema publiciteit zagen we waarschijnlijk de grootste versnippering van activiteiten in het verleden. Dit werd mede gevoerd door de vele doelgroepen waarop men zich richtte. De commissie richt zich dan ook op:

- Structureren, coördineren en ondersteunen van publiciteit voor de wiskunde in brede zin: middelbare scholieren, het grote publiek, alsmede bedrijven en organisaties.
- Inventariseren van bestaande publicitaire activiteiten met betrekking tot de wiskunde in Nederland.
- Uitbouwen van goed lopende activiteiten, ontwikkelen van nieuwe initiatieven.
- Zorgdragen voor continuïteit in de organisatie en de financiering van publiciteit.
- Publicitair ondersteunen van de andere commissies van PWN.

De commissie heeft een breed scala van activiteiten gepland voor het tweede jaar. Er

zal onder andere een overzicht worden gemaakt van bestaande initiatieven, en een loket wiskunde worden ingericht voor het informeren van journalisten. De commissie streeft ernaar in het tweede jaar de wiskunde 'blits' te maken door het ontwikkelen van een grote landelijke activiteit met veel media-aandacht. Belangrijk aandachtspunt is ook uitbreiding van de commissie, teneinde alle geplande activiteiten adequaat op de rails te kunnen zetten.

Dwarsverbanden

De commissies zijn met grote zorg en breed samengesteld zodat 'de achterban' goed wordt gerepresenteerd. Op deze manier zijn mogelijkheden geschapen om op vele fronten tegelijk slagvaardig te werk te gaan. Het verenigen van al deze aspecten binnen één enkele organisatie is uniek, en schept additionele mogelijkheden om tevens aan de vele dwarsverbanden te werken.

In speciale bijeenkomsten met alle commissievoorzitters zijn dwarsverbanden geïdentificeerd. Dit heeft geleid tot bilateraal overleg tussen de verschillende commissies, welke in het tweede jaar zullen worden geïntensiveerd. Hierbij dient gedacht te worden aan onder andere:

- Publiciteit van de verschillende commissies.
- Samenwerking intensiveren tussen kennisinstellingen, bedrijven en maatschappelijke instellingen, ook op onderwijsgebied.
- Leerlingen al vroeg laten ervaren wat hen te wachten staat in een later beroep.
- Publicaties nadrukkelijk inzetten voor onderwijs, innovatie, publiciteit.
- Meer aandacht genereren voor didactiek van de wiskunde door samenwerking tus-

sen de commissies Onderzoek en Onderwijs.

- Gezamenlijk optrekken van Onderzoek en Innovatie richting de topsectoren van het ministerie van Economische Zaken, Landbouw en Innovatie.

Eerste resultaten

PWN profileert zich vanaf het allereerste begin als een krachtige pleitbezorger voor de discipline wiskunde. Het momentum van de in de afgelopen jaren bereikte consensus middels discussies, studies en rapporten is omgezet in verdere daadkracht. Voor de wiskundigen in Nederland betekent het ook een aanpassing, het leren omgaan met het hebben van één landelijke organisatie die hun belangen behartigt.

Voor alle vijf commissies was een initiële agenda opgesteld van taken en aandachtspunten, welke zeer complex en divers zijn. In het eerste jaar van het bestaan van PWN is een planning gemaakt voor het aanpakken van deze taken, zodat deze uitgevoerd kunnen worden: wat zijn de prioriteiten, wanneer wordt welk punt aangepakt, worden er kleinere werkgroepen geformeerd om deze punten te adresseren, wie krijgt de verantwoordelijkheid hieromtrent, hoe wordt uitvoering gegeven aan de bevindingen? Alle commissies hebben een dergelijke planning afgeleverd en afgestemd met het bestuur en de directeur. Vervolgens is begonnen met de uitvoering. Dit heeft onder andere geleid tot de volgende wapenfeiten:

- De introductiebijeenkomst op 14 mei werd druk bezocht, de resultaten van de discussies zijn verwerkt in de plannen van de commissies.
- Er is een professionele trailer geproduceerd die ingezet kan worden op middelbare scholen: 'wiskunde is overal' (beschikbaar op de website).
- Er zijn kansrijke ideeën ontwikkeld voor een efficiëntieslag binnen de wiskundige publicaties.
- Er is veel meer samenhang en overleg tussen verschillende publicitaire activiteiten (zo heeft de commissie Publiciteit nauwe contacten onderhouden met de organisatie van IMO 2011).
- PWN heeft de aanmoedigingsprijzen van de Koninklijke HMW voor haar rekening genomen vanaf dit jaar.
- De commissie Onderzoek heeft aanvragers in de Vernieuwingsimpuls (vooral Vici) begeleid middels oefensessies.
- Er zijn plannen gemaakt voor een geïntegreerde inspanning van 'de wiskun-

de' richting de ELI-topsectoren.

- Het Transferpunt Wiskunde en Innovatie is gestart met haar activiteiten.
- Er is door de commissie Onderwijs adequaat gereageerd op onderwijsnieuws in de media, onder andere op het in juni verschenen CPB rapport 'Slecht wiskundeonderwijs schaadt economie'.
- Er wordt veel gesproken en in breed (landelijk) verband gediscussieerd over onderwerpen die tot nog toe onbesproken bleven.

De webpagina www.platformwiskunde.nl neemt inmiddels een centrale plaats in bij het functioneren van PWN. Als men eenmaal zijn weg weet te vinden naar deze bron van informatie en uitwisseling van kennis, dan is communicatie met de achterban een stuk eenvoudiger. Maar ook voor anderen dan onze achterban is de website een belangrijke bron van informatie.

Volle kracht vooruit

Naast de organisatorische ontwikkeling, welke vooral van belang was gedurende het eerste jaar, is vooral ook de strategische ontwikkeling van het *Platform Wiskunde Nederland* van uitermate groot belang. Het platform is absoluut gebaat bij een continue strategische ontwikkeling, aangezien besluitvorming continu plaatsvindt en vaak directe actie vergt teneinde effectief te kunnen zijn. Strategische ontwikkeling genereert een agenda van belangrijke kwesties en mogelijkheden, en geeft de richting aan, zoals onder andere is gebeurd in het slotdocument van het oprichtingsbestuur. Dit zal op een continue wijze gebeuren, middels geregeld overleg tussen bestuur, di-

recteur en commissievoorzitters. Het formuleren van een strategie is een uitdaging voor het platform, het omzetten van de gemaakte plannen naar de realiteit des te meer. Veranderingen in de manier van werken binnen wiskundig Nederland kunnen moeizaam verlopen, mede omdat het door het platform bereikte resultaat direct afhangt van het succes van de individuele commissies en disciplines binnen de beroepsgroep. Voorbeelden van mogelijke strategische keuzes zijn wijzigingen in het model van het 'wiskundige bedrijf' (denk maar eens aan kennisvalorisatie als derde kerntaak van universiteiten, en de implicaties van het rapport over rekenonderwijs op de basisschool) en het betreden van nieuwe markten voor wiskundigen. Er zal gezocht worden naar andere manieren om de beroepsgroep te ondersteunen bij hun professionele ontwikkeling. Belangrijk hierbij is te weten waar wiskundigen tegenaan lopen, en welke veranderingen men zelf voor ogen heeft. Welke doelen zouden we willen bereiken? Deels zijn deze vragen beantwoord in de onderzoeken die de afgelopen jaren hebben plaatsgevonden, maar de wereld is dynamisch van aard (met als lichtend voorbeeld de recente verschuiving van aandacht naar de topsectoren van het ministerie van ELI), en we zullen ons deze vragen voortdurend blijven stellen, en de strategische ontwikkeling hierop baseren. In deze strategische ontwikkeling worden de wensen en doelen teruggevonden, samen met een visie en aanpak.

Ook de resultaten van het Deltaplan voor de bèta-studies, uitgevoerd door het Platform Bèta Techniek (PBT) in de afgelopen zes jaar, zijn van groot belang voor het *Platform Wiskunde Nederland*. PBT heeft vele initiatieven ontplooid in primair, voortgezet en hoger onderwijs, en de resultaten zijn zichtbaar in op allerlei punten verbeterde cijfers betreffende de participatie van bètastudies en oplopende studentenaantallen. Het rapport 'Zekeringsen voor de toekomst' van PBT (december 2010) geeft een overzicht van behaalde resultaten en formuleert acties voor de toekomst. De commissie Onderwijs kan hier bij aansluiten, en de aanbevelingen overnemen ten aanzien van het wiskundeonderwijs. Ook kan gedacht worden aan een nauwere samenwerking met het PBT.

Het is ook van groot belang voor zowel het platform als voor wiskundig Nederland dat er een grote mate van betrokkenheid van alle wiskundigen is bij de activiteiten van PWN. Nog meer dan voorheen zullen onderzoekers en leraren betrokken worden bij de plannen en initiatieven van PWN. Daartoe zal het plat-

form actief deelnemen aan de jaarlijkse bijeenkomsten NWD en NMC, en op deze manier de achterban informeren over ontwikkelingen binnen de commissies. Middels de website en nieuwe media zoals Twitter, Facebook en LinkedIn zal continue discussie en informatie mogelijk zijn. In dit verband fungeert Twitter meer als een bron van informatie, terwijl via speciale LinkedIn-groepen (op te zetten in het tweede jaar) de discussie uitgelokt zal worden.

In het tweede jaar zal ook meer aandacht besteed worden aan het ontwikkelen en uitwerken van nieuwe ideeën binnen alle commissies. In het afgelopen jaar is gebleken dat het lastig is om 'out-of-the-box' te denken, derhalve zullen hiervoor nieuwe stimulansen worden gegeven. Er zal veel ruimte en aandacht gegeven worden hieraan, iedere commissie zal nadrukkelijk worden gevraagd nieuwe ideeën aan te dragen. Zulke initiatieven zijn van groot belang voor het welslagen van de missie van PWN. Ook de blik naar buiten is een belangrijke kwestie voor PWN. In het eerste jaar is hier al een begin mee gemaakt, en dit zal in het tweede jaar alleen maar uitgebreid worden. Hierbij dient gedacht te worden aan het opzetten van contacten met andere platforms en beroepsorganisaties zoals IPN, Ngl, NIBI, zowel op het gebied van het uitwisselen van ervaringen als het samen optrekken om onze doelen te verwezenlijken. Ook kijken we nadrukkelijk naar ontwikkelingen in de ons omringende landen:

- Wiskunde-strategiediscussie in Duitsland (PWN-directeur is mede-auteur van het rapport 'Transfer der Mathematik in die Anwendung').
- Knowledge Transfer Networks in Engeland, met name het KTN 'Mathematics in Industry' geleid door het Smith Institute.
- Forward Look project 'Mathematics and Industry' van de ESF en EMS, hetgeen onder andere heeft geleid tot een eindrapport en het boek *Success stories Mathematics in Industry* verschenen bij Springer-Verlag (PWN-directeur is een van de editors).

Financiële uitdagingen

Naast de inhoudelijke uitdagingen zijn er ook financiële uitdagingen. Omdat PWN zich een permanente positie wil verwerven binnen de wiskundewereld, is het noodzakelijk dat er gezorgd wordt voor een blijvende stroom van financiële middelen, naast de bijdragen van de wiskunde-instituten, CWI en NWO. In het slotdocument werd al een aantal mogelijkheden aangegeven. In het tweede jaar zal hier extra aandacht aan worden besteed. ←



Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - HG 8.38
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Jan S. Hesthaven, Sigal Gottlieb, David Gottlieb

Spectral Methods for Time-Dependent Problems

Cambridge University Press, 2007

Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math. 21

273 p., prijs £47.00

ISBN 9780521792110

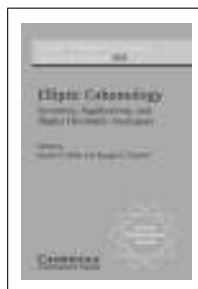
This graduate level text distinguishes itself from other books on spectral methods by the exclusive treatment of time dependent, in particular hyperbolic, problems and its focus on the stability analysis for both semi-discrete and fully discrete cases.

The first chapter introduces spectral methods as infinite order finite difference schemes. This viewpoint is based on the relation between the width of a finite difference stencil and its order of convergence. Chapter 2 summarizes results on the approximation by trigonometric polynomials of smooth functions, whereas in Chapter 3 these results are applied to analyse Fourier–Galerkin and Fourier-collocation methods and their stability: hyperbolic, parabolic, and non-linear problems are considered. Chapter 4 is on orthogonal polynomials. The Jacobi polynomials are introduced as eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem. The ultraspherical polynomials and the polynomials of Legendre and Chebyshev are treated in detail. In Chapter 5, truncated expansions in such polynomials of smooth functions and their derivatives are studied, also covering the discrete case, i.e., when quadrature is used to approximate the coefficients in the expansion. After a short chapter on polynomial approximation theory, the polynomials are used in the context of spectral methods in Chapter 7. As before, both in the Galerkin and the collocation setting, but also as so-called tau-methods. The discussion of their stability is postponed until Chapter 8.

These first eight chapters could be seen as a complete first course in spectral methods, covering motivation, derivation, approximation theory and stability analysis of both Fourier and polynomial spectral methods. As such, even though the material is, at times, technical of nature, the book is a pleasant read. The authors have obviously made an effort in presenting their material carefully. The final chapters of the book address advanced topics and could form an advanced course on the subject. Their contents, naturally, reflect the authors' personal preferences more than the first part, and are on nonsmooth problems, computational aspects, and spectral methods on general grids.

The bibliography covers around two hundred items, the index is sufficient for quick reference, and the many illustrations are clear and instructive. I recommend this book to anyone interested in a mathematical treatment of the subject.

Jan Brandts



Haynes R. Miller, Douglas C. Ravenel (eds.)

Elliptic Cohomology Geometry, Applications, and Higher Chromatic Analogues

Cambridge University Press, 2007

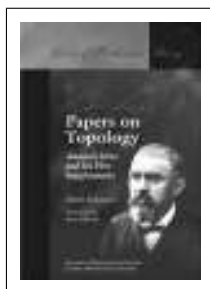
London Math. Society Lecture Note Ser. 342

364 p., prijs £53.00

ISBN 9780521700405

Dit zijn min of meer de proceedings van een grote, 13-daagse workshop 'Elliptic Cohomology and Chromatic Phenomena' die in decem-

ber 2002 werd gehouden aan het Isaac Newton Institute. Het betreft hier duidelijk een heel actief gebied van (meetkundig) onderzoek. Het boek bestaat uit zeventien artikelen, van schrijvende specialisten voor lezende specialisten. Gelukkig hebben de editors een heel aardig voorwoord (van vier bladzijden) geschreven, zodat ook de niet-specialist een beetje een idee kan krijgen van wat hier speelt. Laat mij binnen de beperkte opzet van deze boekbespreking ook een poging wagen. Midden vorige eeuw werden *karacteristieke klassen* (Chern, Pontryagin, Stiefel–Whitney, en dergelijke) ontdekt als efficiënte middelen voor cohomologische berekeningen in de meetkunde. Een hoogtepunt daarbij is de Stelling van Riemann–Roch in de formulering en algemeenheid die Hirzebruch en Grothendieck daaraan gegeven hebben. Efficiëntie wordt bereikt door de karakteristieke klassen van een cohomologietheorie onder te brengen in een voortbrengende reeks die men het *geslacht* (*genus*) noemt. Een beroemde fundamentele stelling van Quillen zegt dat de ingewikkeld ogende algebraïsche relaties tussen karakteristieke klassen via dat geslacht neerkomen op de structuur van een eendimensionale commutatieve formele groepwet (afgekort: 1-CFGL). Voor de *gewone cohomologie*, de *K-theorie* en de *cobordismentheorie* zijn dat respectievelijk de *additieve*, de *multiplicatieve* en de *universele 1-CFGL*. Tot zover de jaren '50 en '60, waarin dus aan een bekende cohomologietheorie een 1-CFGL werd gekoppeld. Daarna lag het voor de hand om te vragen naar een omkering: construeer uit een bekende 1-CFGL een cohomologietheorie. Het nieuwe succesnummer uit de jaren '80 was de *elliptische cohomologie* uitgaande van de 1-CFGL van Jacobi's familie van elliptische krommen $y^2 = 1 - 2\delta x^2 + \epsilon x^4$. Dat was een puur algebraïsche exercitie en men vraagt zich af welke meetkundige objecten voor elliptische cohomologie de rol vervullen van de vectorbundels in de K-theorie. Toen begonnen ook fysici (met name Witten) mee te spelen. In het boek zoekt Segal een antwoord op deze vraag (die overigens nog steeds niet bevredigend beantwoord schijnt) in de *Conformal Field Theory* en Mason in de *Rational Vertex Operator Algebras*. Greenlees zoekt naar generalisaties waarin de (infinitesimale) 1-CFGL vervangen wordt door een (globale) algebraïsche groep. Ravenel wil de elliptische krommen vervangen door factoren van grotere hoogte in Jacobianen van krommen (in karakteristiek p), terwijl Devoto K_3 -oppervlakken wil gebruiken. Morava droomt van de machtreeksontwikkeling van $\Gamma(1+z)^{-1}$ als een geslacht waarmee iets motivistisch te doen valt. De fysica wordt in dit boek vertegenwoordigd door het artikel 'The M -theory 3-form and E_8 gauge theory' van Diaconescu, Moore en Freed. Laat me tot slot ook nog de 'Brave New Algebraic Geometry' van Toën en Vezzosi noemen. Jan Stienstra



Henri Poincaré
Translated by John Stillwell
Papers on Topology
Analysis Situs and its Five Supplements
AMS en London Mathematical Society, 2010
History of Mathematics vol. 37
228 p., prijs \$59.00
ISBN 9780821852347

De schrijfstijl van Henri Poincaré roept soms weerstanden op, deze staat immers diametraal tegenover de definitie-stelling-bewijs-stijl. Wat critici soms vergeten is dat Poincaré zich niet bezig hield met de gebaande paden, de bekende museumwiskunde, maar totaal nieuwe terreinen bedacht en ontwikkelde. De *Analysis Situs* is daar een duidelijk voorbeeld van. Tot en met de negentiende eeuw was er in de

topologie het begrip Euler-karakteristiek voor veelvlakken en later de getallen die Betti invoerde voor gesloten oppervlakken in $\mathbb{R}^n$, bijvoorbeeld ter onderscheid van boloppervlak en torus. Daar hield het op. Toch had Leibniz in de achttiende eeuw al gevraagd om een 'analysis situs', een beschrijving van wat er aan algemene kenmerken bestaat van de vele meetkundige structuren die je kunt bedenken.

De artikelen van Poincaré, vertaald uit het Frans in het Engels door John Stillwell, bestaan uit een groot artikel (121 pagina's in de *Journal de l'École Polytechnique*), geschreven in 1895, en vijf supplementen, die in de jaren daarna volgden en waarin hij gedachten en correcties beschreef waar hij later opkwam. Het is eigenlijk een groot discours met de lezers, een hoeveelheid redeneringen waarbij gaandeweg een vakgebied wordt ontwikkeld. Niet voor niets is zijn meest gebruikte uitdrukking midden in een artikel 'ce n'est pas tout'. Typerend is dat hij het in zijn eerste artikelen vanzelfsprekend vond dat een enkelvoudig, samenhangend, compact oppervlak in willekeurige dimensie altijd continu kan worden gedeformeerd naar een boloppervlak. In de loop der jaren gaat hij dat als probleem zien. Pas in het laatste supplement wordt dit een vermoeden, in het bijzonder dat een driedimensionaal enkelvoudig, samenhangend, compact oppervlak continu kan worden gedeformeerd naar S^3 (het Poincaré-vermoeden). Pas in 2002–2003 zal Perelman bewijzen dat het vermoeden juist is, voor hogere dimensies was dat iets eerder gedaan.

Zoals in de analytische meetkunde, begon Poincaré eerst met het beschrijven van oppervlakken door middel van algebraïsche vergelijkingen. Een nieuwe constructie was het overdekken van een oppervlak door een verzameling simplices, dat gaf een verband met de Euler-karakteristiek zodat je deze ook aan een glad oppervlak kon toekennen. De eigenschappen van gesloten krommen en deeloppervlakken worden bij zo'n simplexbeschrijving behouden. Andere nieuwe concepten zijn geïnspireerd door de algebra, de begrippen fundamentealgroep en homologie.

Stillwell geeft een korte inleiding op Poincaré's werk en de topologie in het algemeen. Goed leesbaar, maar niet zo duidelijk, vooral niet bij de behandeling van de Betti-getallen. Het lijkt me dat een heldere inleiding plus commentaar nuttiger was geweest. Zijn vertaling lijkt een adequate weergave van Poincaré's teksten; het is goed dat de *Analysis Situs*-artikelen nu ook in het Engels beschikbaar zijn. Ferdinand Verhulst



David Mumford, Agnès Desolneux
Pattern Theory
The Stochastic Analysis of Real-World Signals
AK Peters/CRC Press, 2010
375 p., prijs £49.99
ISBN 9781568815794

Patroontheorie richt zich op het ontwikkelen van rijke, generatieve, statistische modellen voor realistische, vaak complexe signalen zoals beelden, teksten, video's en spraaksignalen. Dergelijke modellen kunnen bijvoorbeeld worden aangewend om zogenaamde classificatie- en detectietaken op een geautomatiseerde wijze uit te voeren. Denk daarbij aan de transcriptie van spraak naar tekst, de detectie van laesies in computertomografische beelden of het automatisch categoriseren van de verzameling krantenberichten van deze dag. *Patroonherkenning*, en aanverwante disciplines, richt zich op dezelfde soort problemen, maar waar deze takken der wetenschap methoden ontwikkelen en be-

studeren die direct tot een oplossing trachten te komen, daar focust de patroontheorie zich met name op een dieper begrip en een betere beschrijving van de signalen op zich. De complexiteit van de meest algemene generatieve modellen die de patroontheorie, in principe, probeert te verwezenlijken, is natuurlijk immens. Het is bijvoorbeeld moeilijk voor te stellen dat een computer in staat zou zijn alvast wat mogelijke kiekjes van uw aanstaande vakantie te genereren. Er is echter een geweldige vooruitgang geboekt in de afgelopen jaren en voor simpelere signalen, zoals geschreven teksten, simpele muzikale stukken en schetsmatige beelden, zijn al enkele modellen beschikbaar.

Het boek *Pattern Theory* van David Mumford en Agnès Desolneux bespreekt dergelijke signaalmodellen. Het richt zich daarbij met name op de modellering en de wiskundige theorieën en methoden die daar aan te pas komen. Het werk is daarmee uitermate geschikt voor de onderzoeker die zich de hoofdbestanddelen van de patroontheorie eigen wil maken en een indruk wil krijgen van wat het vakgebied te bieden heeft, zowel wat theorie als toepassingen betreft. Wat vooral zeer aanspreekt, zijn de secties waarin basistechnieken behandeld worden. Enkele onderwerpen die aan bod komen, zijn entropie en informatie, Fourier-analyse, Lie-groepen en -algebra's en Gaussische maten op functieruimten. Hoofdstuk 0 van het boek geeft een prima uiteenzetting van wat de patroontheorie behelst, maar in de overige tekst mis ik nogal eens de terugkoppeling hiernaar. Dit zou een duidelijke meerwaarde van het boek boven losse tijdschriftartikelen hebben opgeleverd en tevens de boodschap die de auteurs willen uitdragen ten goede zijn gekomen. De breedte aan onderwerpen zorgt er echter voor dat het boek sowieso interessant is voor wetenschappers uit aanpalende disciplines, zoals beeldverwerkers en patroonherkenners, die hierin wellicht de inspiratie vinden bepaalde problemen op mathematische wijze te benaderen. Maar het boek is natuurlijk voornamelijk verplicht leesvoer voor elke wiskundige die zich aan het modelleren van complexe en realistische signalen wil wagen, ontvanger van de Fieldsmedaille of niet.

Marco Loog



François Bergeron
Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces

AK Peters/CRC Press, 2009

230 p., prijs £37.99

ISBN 9781568812240

Een eerste blik op het boek maakt duidelijk dat het beoogt aantrekkelijk te zijn voor een breed publiek: een handzaam formaat, glanzend papier, volop illustraties in kleur en een luchtige opmaak met fraaie formules; op de omslag een selectie van illustraties waarvan één zelfs perspectivisch vervormd is.

De thematiek valt grotendeels uiteen volgens de twee delen van de titel, waarbij voor de algebraïsche combinatoriek zo'n tweederde van de ruim tweehonderd bladzijden is ingeruimd. Hoewel het verklaarde doel van het boek is een introductie te geven tot de theorie van co-invarianten, is de gelegenheid aangegrepen om een zeer ruime bloemlezing te geven van onderwerpen uit de algebraïsche combinatoriek. Zo treft men onder andere telproblemen (partities, q -binomiaal coëfficiënten), Young diagrammen en tableaux en operaties daarop, symmetrische functies en invariantentheorie voor Coxeter-groepen, plethysme, Schur-polynomen, quasisymmetrische functies, represen-

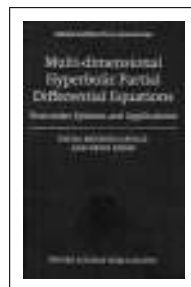
tatietheorie van symmetrische groepen, Joyals theorie van 'species', en elementaire theorie van Gröbner-bases. Deze onderwerpen zijn lang niet altijd noodzakelijk voor het vervolg, en de uiteenzetting is in het algemeen luchtig, al is bij het naderen van hoofdstuk 8 'Coinvariant Spaces' een duidelijke concentratie op nuttige resultaten, een rarefactie van illustraties en een scherpe versnelling van de pas merkbaar.

Jammer genoeg is de presentatie van het eerste deel ronduit slordig. Het stelselmatig verwarren van links- en rechts-actie in formules, wat al op de tweede bladzijde begint (permutatiematrices) is nog overkomelijk. Dat diagrammen en tableaux worden ingevoerd met een te grote algemeenheid voor de geldigheid van hun basiseigenschappen is storend voor wie weet hoe het wel moet, en bedrieglijk voor wie dat niet weet. De behandeling van onderwerpen als 'charge' en plethysme is door fouten en ontbreken van context volkomen ondoorgrondelijk. Voor meer dan een informele kennismaking met diverse onderwerpen is de tekst ongeschikt.

In de laatste vier hoofdstukken, over co-invarianten en Macdonald-functies, is de auteur merkbaar zeer thuis, maar neemt hij onvoldoende de moeite om deze onderwerpen begrijpelijk uiteen te zetten voor de lezer die dat niet is, zoals de beoogde 'graduate student'. Feitelijk durf ik de bewering aan dat door gebrek aan precisie en details de tekst zonder het raadplegen van andere bronnen onmogelijk te volgen is.

Samenvattend, ik kan dit boek niet anders dan als een teleurstellend resultaat beschouwen van een lofwaardige intentie om een aantal interessante onderwerpen aan een ruim publiek te presenteren.

Marc van Leeuwen



Sylvie Benzoni-Gavage, Denis Serre
Multi-dimensional Hyperbolic Partial Differential Equations First-order Systems and Applications

Oxford University Press, 2007

508 p., prijs £77.00

ISBN 9780199211234

Partiële differentiaalvergelijkingen en in het bijzonder meerdimensionale stelsels van eerste orde behoudswetten komen vaak voor als 'real life'-modellen. Daarom staat hun rigoureuze onderzoek centraal in het werk van vele wiskundigen in de voorbije eeuw. Toch zijn meerdimensionale stelsels nog steeds niet voldoende begrepen. Gefocust op bepaalde problemen waar analytische benaderingen met succes kunnen worden toegepast, stelt dit boek deze technieken in een brede en algemene manier voor, met een geleidelijk toenemend niveau van moeilijkheid.

Het boek bevat vier delen en een aanhangsel. Het eerste deel is gewijd aan lineaire Cauchyproblemen. Het begint met vergelijkingen met constante coëfficiënten, en stelt definities voor die later worden gebruikt. Daarna worden lineaire Cauchyproblemen met veranderlijke coëfficiënten beschouwd. Hier passen de auteurs de pseudo- en paradiifferentiaalcalculus toe om de 'symmetrizers'-techniek te behandelen. Het tweede deel gaat verder met begin- en randwaardeproblemen (IBVPn). Het begint met symmetrische dissipatieve IBVPn, evenals problemen met constante coëfficiënten in een half-oneindig gebied, gebruikmakend van de Kreiss-symmetrizers en de Lopatinski-conditie. Daarna wordt de welgesteldheid van IBVPn met veranderlijke coëfficiënten onderzocht met behulp van pseudo- en paradiifferentiaalcalculus.

In het derde deel wordt de welgesteldheid voor niet-lineaire problemen bestudeerd. De resultaten hier gelden voor korte tijd. Dit deel begint met een herziening voor Cauchyproblemen voor quasi-lineaire stelsels en de welgesteldheid wordt meestal voor Sobolev-ruimtes van hoge index gegeven, dus voor klassieke oplossingen. Dit hoofdstuk is ook voorbereidend voor het geval van stuksgewijs gladde oplossingen. Vervolgens worden IBVPn voor quasi-lineaire stelsels, gevolgd door meerdimensionale schokken en hun persistentie bestudeerd. Het vierde deel is gewijd aan gasdynamica, maar in de context van een algemene drukwet. Het bespreekt sommige grondbegrippen over hyperboliceit en symmetriseerbaarheid, als ook randvoorwaarden. Dit deel wordt beëindigd met schokgolven in reële vloeistoffen, waar de Kreiss–Lopatinski-conditie wordt toegepast.

Het aanhangsel is heel breed en bevat belangrijke resultaten op het gebied van calculus, Laplace- en Fourier-transformaties, en van pseudo- en paradiifferentiaalcalculus. Ten slotte volgen een uitgebreide bibliografie en een index.

Het boek is veelomvattend en op zichzelfstaand. Het is het resultaat van enkele colleges op graduate-niveau gegeven door de auteurs, die experts in het gebied zijn. Onderzoekers met belangstelling in hyperbolische vergelijkingen en samendrukbare vloeistoffen zullen dit boek heel interessant en leerzaam vinden.

Sorin Pop



Harold G. Diamond, H. Halberstam
**A Higher-Dimensional Sieve Method
With Procedures for Computing Sieve
Functions** (by William F. Galway)

Cambridge University Press, 2008
Cambridge Tracts in Mathematics 177
266 p., prijs £57.00
ISBN 9780521894876

Zij $\mathcal{P}$ een eindige verzameling van priemgetallen en $\mathcal{A}$ een eindige verzameling van natuurlijke getallen. Met $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ geven we de cardinaliteit aan van de verzameling van de elementen van $\mathcal{A}$ die niet deelbaar zijn door enig priemgetal uit $\mathcal{P}$. De centrale vraag bij de studie van zeefmethoden is om een zo goed mogelijke schatting voor $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ te vinden. Zij $P := \prod_{p \in \mathcal{P}} p$. Er geldt dan de *Eratosthenes–Legendre*-formule: $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \sum_{d|P} \mu(d) |\mathcal{A}_d|$, waarbij $\mu(\cdot)$ de Möbius-functie is en $\mathcal{A}_d = \{a \in \mathcal{A} : d \mid a\}$.

Kiezen we voor $\mathcal{P}$ de verzameling van priemgetallen $\leq x^{1/2}$ en $\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$, dan geldt $|\mathcal{A}_d| = \lfloor x/d \rfloor$ en $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \pi(x) - \pi(x^{1/2}) + 1 = \sum_{d|P} \mu(d) \lfloor x/d \rfloor$, de bekende formule voor het tellen van de priemgetallen, afgeleid uit de beroemde zeef van Eratosthenes. Helaas blijkt deze formule, voor zover we weten, niet geschikt om redelijke schattingen voor $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ mee te vinden. De studie van zeefmethoden is er op gericht om genoemde formule zo aan te passen dat wel redelijke (boven- en onder-) schattingen voor $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ kunnen worden afgeleid.

Na Eratosthenes zijn er talrijke betere zeefmethoden bedacht: Brun, Buchstab, Rosser, Selberg, Ankeni, Onishi, Iwaniec, Jurkat en Richert hebben hierin een belangrijke rol gespeeld. Dit boek is een research monograph waarin een nieuwe zeefmethode wordt gepresenteerd. Het begrip ‘dimensie’ in de titel van het boek heeft te maken met het gemiddelde aantal restklassen dat voor ieder priemgetal uit $\mathcal{P}$ wordt weggezeefd uit $\mathcal{A}$. Bij de Zeef van Eratosthenes is dat 1 omdat alle veelvouden van p worden geëlimineerd. Bij het zoeken naar priemteelingen kiest men voor $\mathcal{A}$ de verzameling van getallen van de vorm $n(n+2)$ en zeven

we die producten $n(n+2)$ uit waarvan minstens één van n en $n+2$ door p deelbaar is. We elimineren dus de restklassen 0 en $-2 \pmod{p}$, zodat de dimensie hier 2 is. Van zeefmethoden van dimensie 1 is veel meer bekend dan van hogerdimensionale zeefmethoden.

Het centrale resultaat van dit boek is een uitbreiding van een stelling van Jurkat en Richert naar dimensies hoger dan 1 en de introductie daarmee van een nieuwe zeefmethode. Zeefmethoden geven aanleiding tot gecompliceerde sommen waarvan een schatting moet worden gegeven en het blijkt dat deze sommen benaderd kunnen worden door de oplossingen van bepaalde differentie-differentiaalvergelijkingen. Het tweede deel van dit boek is gewijd aan een analytische studie van deze vergelijkingen. In een appendix wordt de numerieke oplossing van deze vergelijkingen met behulp van *Mathematica* behandeld. Het resulterende *Mathematica*-pakket kan worden gedownload vanaf de website van het boek: www.math.uiuc.edu/SieveTheoryBook. Herman te Riele



Jack Koolen, Jin Ho Kwak, Ming-Yao Xu
(eds.)

Applications of Group Theory to Combinatorics

CRC Press, 2008
188 p., prijs £99.00
ISBN 9780415471848

The book contains eleven survey papers which are based on invited lectures given at the 2007 ‘Com²MaC International Workshop on Applications of Group Theory to Combinatorics’, which was held at Pohang University of Science and Technology, July 9–12, 2007, under the sponsorship of the Combinatorial and Computational Mathematics Center. The aim of the meeting was to bring experts from combinatorics, group theory and combinatorial topology together to stimulate the research and interaction between these areas.

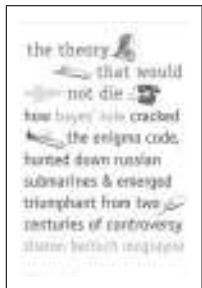
The papers cover topics from a large and diverse spectrum. Besides two purely group theoretic papers, on triangle groups and separability properties of groups, the topics of the papers can be grouped roughly into the following two categories:

- Applications to combinatorial topology: regular maps and embeddings, coverings, genus parameters, Belyi functions, Hurwitz problems.
- Applications to graph theory and design theory: Cayley digraphs, the coverings, decompositions and factorizations of graphs, transitive graphs and designs.

Each paper gives an overview of the current state-of-the-art of the given subject and is aimed at researchers and graduate students who use combinatorics and group theory.

John van Bon

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



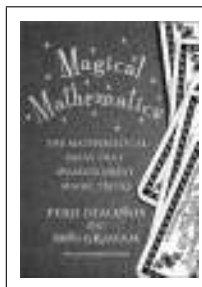
Sharon Bertsch McGrayne
**The Theory that Would Not Die
How Bayes' Rule Cracked the Enigma Code, Hunted Down Russian Submarines, and Emerged Triumphant from Two Centuries of Controversy**

Yale University Press, 2011
ISBN 9780300169690
yalepress.yale.edu/book.asp?isbn=9780300169690



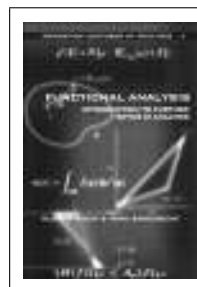
Gunter Malle, Donna Testerman
Linear Algebraic Groups and Finite Groups of Lie Type

Cambridge University Press, 2011
ISBN 9781107008540
www.cambridge.org/knowledge/isbn/item6432954



Persi Diaconis, Ron Graham
Magical Mathematics

Princeton University Press, 2011
ISBN 9780691151649
press.princeton.edu/titles/9510.html



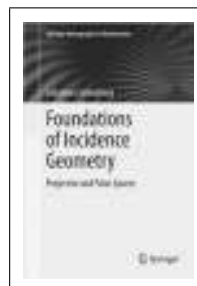
Elias M. Stein, Rami Shakarchi
**Functional Analysis
Introduction to Further Topics in Analysis**

Princeton University Press, 2011
ISBN 9780691113876
press.princeton.edu/titles/9627.html



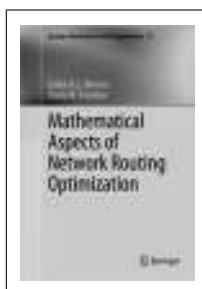
Michèle Audin
Remembering Sofya Kovalevskaya

Springer, 2011
ISBN 9780857299284
www.springer.com/978-1-4614-0310-4



Johannes Ueberberg
Foundations of Incidence Geometry

Springer, 2011
ISBN 9783642209710
www.springer.com/978-3-642-20971-0



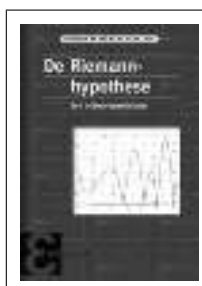
Carlos A.S. Oliveira, Panos M Pardalos
Mathematical Aspects of Network Routing Optimization

Springer, 2011
ISBN 9781461403104
www.springer.com/978-1-4614-0310-4



T. Lery et al. (eds.)
European Success Stories in Industrial Mathematics

Springer, 2011
ISBN 9783642238475
www.springer.com/978-3-642-23847-5



Roland van der Veen, Jan van de Craats
**De Riemann-hypothese
Een miljoenenprobleem**

Epsilon Uitgaven, 2011
ISBN 9789050411264
www.epsilon-uitgaven.nl/E69.php



Jeremy Kepner, John Gilbert (eds.)
Graph Algorithms in the Language of Linear Algebra

Siam, 2011
ISBN 9780898719901
www.ec-securehost.com/SIAM/SE22.html

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 Euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 Euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is March 1st, 2011.

Problem A (folklore)

Let Γ be a finite undirected graph (without loops or multiple edges). Denote the set of vertices by V . Assume that there are a function $f: V \rightarrow \mathbb{Z}$ and a positive integer n such that

$$\sum_v \left| \sum_w (f(v) - f(w)) \right| = 2n,$$

where v runs over all the vertices of Γ and w over all the neighbours of v . Show that there are an $m \leq n$ and a collection of m edges such that the graph obtained from Γ by removing those edges is not connected.

Problem B (folklore)

Let ϵ be a positive real number. Show that there is a finite group G that is not a 2-group, but in which the proportion of elements that have 2-power order is at least $1 - \epsilon$.

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let B be a commutative ring and A a subring of B . Assume that the additive group of A has finite index in B . Show that the unit group of A has finite index in the unit group of B .

Edition 2011-2 We have received correct solutions from Pieter de Groen (Brussel), Alex Heinis (Hoofddorp), Wim Hesselink (Groningen), Alexander van Hoorn (Abcoude), Thijmen Krebs (Nootdorp), Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), Michiel Smid (Ottawa), Rob van der Waall (Huizen) and Martijn Weterings (Wageningen).

Problem 2011-2/A Let S be an open subset of $\mathbb{R}_{>0}$ that contains arbitrarily small elements. Prove that every positive real number can be written as a sum of finitely many elements of S .

Solution We have received solutions from Pieter de Groen, Alex Heinis, Wim Hesselink, Alexander van Hoorn, Thijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu, Michiel Smid and Martijn Weterings. The book token goes to Wim Hesselink.

Let x be a positive real number. By assumption there exist $y < x$ and $0 < \epsilon < x - y$ such that the open interval $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ is contained in S . Also choose $z \in S$ with $z < 2\epsilon$. Then the interval $(x - y - \epsilon, x - y + \epsilon)$ contains a multiple nz of z , with $n \geq 0$ an integer. Now $w = x - nz$ lies in $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset S$ and $x = w + nz$ is a finite sum of elements of S .

Problem 2011-2/B Let n be a positive integer. Show that every sequence of n elements of $\{0, \dots, 9\}$ occurs as a sequence of consecutive digits in the last $2n$ digits of the decimal representation of some power of 2. Also, determine all $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ for which the statement still holds if we replace $2n$ by $\lceil \alpha n \rceil$.

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Jinbi Jin

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Oplossingen

| Solutions

Solution We have received solutions from Alex Heinis, Tijmen Krebs and Tejaswi Navilarekallu. The book token goes to Alex Heinis. The following is partly based on the solution of Tejaswi Navilarekallu.

Note that for every positive integer n , 2 is a primitive root mod 5^n . We will use this fact later on. We prove that the statement holds if and only if $\alpha \geq \frac{\log 10}{\log 5}$. First note that for $\alpha < 1$, the statement cannot hold, as $\lceil \alpha n \rceil < n$ for sufficiently large n .

So suppose $1 \leq \alpha < \frac{\log 10}{\log 5}$. Note that there are at most $4 \cdot 5^{\lceil \alpha n \rceil - 1}$ residue classes modulo $5^{\lceil \alpha n \rceil}$ that are residues of powers of 2. Also note that modulo $2^{\lceil \alpha n \rceil}$, there are $\lceil \alpha n \rceil$ residue classes that are residues of powers of 2, and that for $k \geq \lceil \alpha n \rceil$, we have $2^k \equiv 0 \pmod{2^{\lceil \alpha n \rceil}}$. Hence, by the Chinese remainder theorem, there are at most $A_n = 4 \cdot 5^{\lceil \alpha n \rceil - 1} + \lceil \alpha n \rceil$ residue classes modulo $10^{\lceil \alpha n \rceil}$ that are residues of powers of 2.

Each of these A_n residue classes gives rise to at most $\lceil \alpha n \rceil - n + 1$ sequences of n digits in the last $\lceil \alpha n \rceil$ digits of a power of 2. So if we can show that there exists an n with $(\lceil \alpha n \rceil - n + 1)A_n < 10^n$, then we are done. To this end, note that the left-hand side can be bounded from above by a constant multiple of $n5^{\alpha n}$. Since $5^\alpha < 10$, for any $c \in \mathbb{R}_{>0}$, we have for sufficiently large n that $cn5^{\alpha n} < 10^n$. Hence also $(\lceil \alpha n \rceil - n + 1)A_n < 10^n$ for sufficiently large n .

Now suppose $\alpha \geq \frac{\log 10}{\log 5}$. Let $n \geq 1$ be an integer. Suppose $a_0, \dots, a_{n-1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ and set $A = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k a_k$. Note that for $r = \lceil \alpha n \rceil - n$, we have $2^{n+r} < 10^r$. Therefore, there is a multiple Y of 2^{n+r} with $A \cdot 10^r < Y < (A+1) \cdot 10^r$. So let $s \leq r$ be the smallest positive integer for which there exists a multiple Y of 2^{n+s} with $A \cdot 10^s < Y < (A+1) \cdot 10^s$.

If Y were divisible by 10, then it would follow that $s \geq 2$, as there are no multiples of 10 between $10A$ and $10(A+1)$. Then $A \cdot 10^{s-1} < \frac{Y}{10} < (A+1) \cdot 10^{s-1}$, and $\frac{Y}{10}$ is divisible by 2^{n+s-1} , contradicting the minimality of s . Hence Y is coprime to 5. Since 2 is a primitive root mod 5^n , it follows that there exists a $t \geq n+s$ with $2^t \equiv Y \pmod{5^{n+s}}$. We also have $2^t \equiv 0 \equiv Y \pmod{2^{n+s}}$, so by the Chinese remainder theorem, it follows that $2^t \equiv Y \pmod{10^{n+s}}$. In other words, the last $n+s$ digits of 2^t are the same as those of Y . In particular, 2^t contains A as a sequence of digits in its last $\lceil \alpha n \rceil$ digits.

Problem 2011-2/C Let p be a prime number. Determine the smallest integer d for which there is a monic polynomial f of degree d with integer coefficients such that p^{p+1} divides $f(n)$ for all integers n .

Solution We have received solutions from Pieter de Groen, Alex Heinis, Tijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu, Michiel Smid, Rob van der Waall and Martijn Weterings. The book token goes to Tejaswi Navilarekallu, whose solution was as follows.

We claim that the smallest degree is p^2 .

For a polynomial $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ we denote by $f^{(1)}$ the polynomial $f(X+1) - f(X)$ and by $f^{(m)}$ the polynomial obtained by repeating this operation m times. Now assume that f is monic of degree d , and that p^{p+1} divides $f(n)$ for all n . Then also p^{p+1} divides $f^{(d)}(n)$ for all n . But we have $f^{(d)}(X) = d!$, so we conclude that p^{p+1} divides $d!$ and hence that d is at least p^2 .

To see that the minimal degree is exactly p^2 , it suffices to observe that the polynomial

$$f(X) = (X-1)(X-2) \cdots (X-p^2)$$

satisfies the required condition.

