

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- In Memoriam | Obituary**
- 91 Jan Verwer: “Een dag zonder fouten is een dag zonder wiskunde”
Jason Frank, Willem Hundsdorfer, Barry Koren
- Evenement | Event**
- 94 NMC 2011: Een nieuwe generatie wiskundigen neemt het roer over
Richard J. Boucherie, Gerard Jeurnink en Floris Olsthoorn
- Onderzoek | Research**
- 96 Een korte geschiedenis van het vermoeden van Weinstein
Federica Pasquotto
- Maatschappij | Society**
- 101 SWI 2009: Opties prijzen met storingsrekening
Bennie Mols
- Evenement | Event**
- 106 De IMO – over talent, plezier en wiskundekringen
Tom Verhoeff
- Evenement | Event**
- 111 Een schatkamer vol oude problemen *Wil Schilders*
- Boekbespreking | Book review**
- 112 Topologie als stripverhaal *Sander Kupers*
- Geschiedenis | History**
- 116 Schoute herschijnt *Jaap Top en Erik Weitenberg*
- Recreatieve Wiskunde | Recreational Maths**
- 121 Welke Wirrel Warrel is moeilijker?
Szilárd András, Kinga Sipos, Anna Soós
- Evenement | Event**
- 127 NWD: Tijdloos en cultuuroverstijgend *Rob van Oord*
- In Memoriam | Obituary**
- 129 Joop Sparenberg: Buiten de gangbare kaders
Paul Urbach
- Maatschappij | Society**
- 132 SWI 2009: Software optimaliseert pompstrategie drinkwater
Bennie Mols
- Onderzoek | Research**
- 134 Hydrodynamische limieten en de pijl van de tijd
Frank Redig

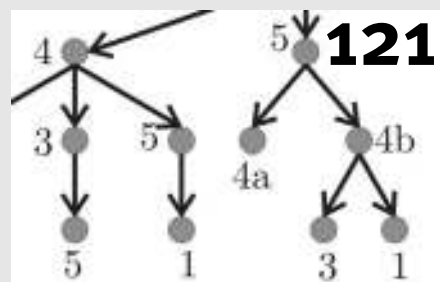
Rubrieken | Departments

- 82 Colofon
- 83 Redactioneel *Ferdinand Verhulst*
- 84 Agenda *Charlene Kalle*
- 86 Nieuws *Charlene Kalle*
- 103 In de verdediging *Geertje Hek*
- 109 Het keerpunt van Johan Grasman
Ionica Smeets
- 141 De derde wet *Ferdinand Verhulst*
- 145 Boekbesprekingen
- 150 Problemen

Uitgelicht



Draadmodellen van Pieter Hendrik Schoute in het artikel van Jaap Top en Erik Weitenberg op pagina 116.



De moeilijkheidsgraad van Wirrel Warrel-puzzels nader bekeken door Szilárd András, Kinga Sipos en Anna Soós op pagina 121.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (charlenekalle@gmail.com)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)
Steven Wepster (s.a.wepster@uu.nl)

Bureau redactie

Lætitia Diemer
Harm de Vries

Medewerkers

Gerard Alberts (UvA), Johan Bosman (IEM Essen),
Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL),
Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ronald van
Luijk (UL), Floris Olsthoorn (UL), Derk Pik (JSG Mai-
monides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL),
Wouter Zomervrucht (UL)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176
admin@wiskgenoot.nl

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)
Programmatuur (CONTEX)
Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)
Druk
Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €80 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €40. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €30 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60.

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €90 respectievelijk €105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176
admin@wiskgenoot.nl

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), André Ran (VU, ondervoorzitter), Joke Blom (CWI, secretaris), Onno van Gaans (UL, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Krüger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	05-09-2011	verstreken
4	05-12-2011	25-07-2011
1	05-03-2012	24-10-2011
2	04-06-2012	23-01-2012

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Flsme

Freudenthal Instituut

Op het omslag

Al vroeg werden de systemen die de bewegingen beschrijven van planeten en sterren onderzocht. Symplectische meetkunde speelt een grote rol in de zoektocht naar periodieke banen. Lees het artikel van Federica Pasquotto op pagina 96.
Foto: Planetarium Hartog van Laun, Rijksmuseum.

Kwaliteit en bestuur, een tegenstelling?

Een noodzakelijke voorwaarde voor het doen van grensverleggend wiskundig onderzoek is om er psychisch tegen te kunnen om ‘vast te zitten’, om gedurende lange perioden niet te weten hoe het onderzoek verder moet. Een van de knapste jonge onderzoekers die ik heb gekend kon dat niet verdragen, hij is met onderzoek opgehouden en industrieel *problem solver* geworden; jammer, maar ook een nuttige bezigheid. Er zijn gelukkig nog genoeg wiskundigen die wel tegen onzekerheid kunnen. Per jaar verschijnen er meer dan 60.000 wiskundeartikelen en ook het *Nieuw Archief voor Wiskunde* levert daar een kleine bijdrage aan. Natuurlijk is maar een klein deel van die vele artikelen grensverleggend. Wat inhoud en stijl betreft doet het NAW aan dat laatste niet mee; er geldt dat het NAW van alle leden van het KWG is, de lectruur ervan is bedoeld voor een algemeen publiek van wiskundedocenten en onderzoekers. Misschien niet grensverleggend, maar wel kwaliteit.

Zoals altijd is er in dit nummer allerlei nieuws, onder andere uit het *Platform Wiskunde Nederland*, vanwege de actualiteit los bijgevoegd. In de rubriek onderzoek laat Federica Pasquotto zien welke interessante aspecten het vermoeden van Alan Weinstein heeft. Frank Redig bespreekt, vooruitlopend op een symposium, de problematiek van het verkrijgen van hydrodynamische limieten. Dat betreft een van de klassieke onopgeloste problemen van de mathematische fysica: hoe leidt men uit de basisvergelijkingen van de veel-deeltjes mechanica de vergelijkingen van irreversibele processen af (die inktvlek die niet terug in de pen wil vloeien)? Het doet ons veel plezier dat het boek *Topologie door zien* van Jan Aarts in dit nummer wordt besproken. Het geeft plezier omdat in dit boek zo onconventioneel en met een frisse blik wordt gekeken (inderdaad veel kijken!) naar een prachtig stuk meetkunde. Het is een boek dat je bij elke wiskundige en theoretisch fysicus op de leestafel verwacht.

Soms heb je het idee dat wiskundigen zich niet realiseren dat ze in een maatschappelijke context opereren. En vaak kan dat niet anders. Je kunt je niet serieus met de kwaliteit van wiskunde, van didactiek of van historisch wiskundig onderzoek bezighouden en tegelijk oog hebben voor bestuursstrategieën en beleids-

plannen, wat dat ook betekenen moge. Docenten en onderzoekers doen wat ze doen, bestuurders en politici praten erover en daar is geen verband tussen. Net zo min als tussen de wereld van professor Prlwytszkofski en die van burgemeester Dickerdack; het is interessant en typerend dat in beider ogen de ander iets belachelijks heeft.

In een ten onrechte veel gesmade periode uit de westerse geschiedenis, in 1974, verscheen een briljant boek over kwaliteit: *Zen and the Art of Motorcycle Maintenance: An Inquiry into Values* van Robert M. Pirsig. De auteur trekt samen met zijn zoontje op de motorfiets door de Verenigde Staten, ondertussen filosoferend over ons kennen en begrijpen. Een van de dingen die hij opmerkt is dat ‘vastzitten’ niet moet worden vermeden, het is een essentieel voorstadium van begrijpen. Daarbij komt ook weer het beroemde verhaal ter sprake van Poincaré die wekenlang vruchteloos peinsde over bepaalde singulariteiten van complexe functies en toen bij een geologische excursie op de treeplank van een omnibus zich het verband realiseerde met de niet-euclidische meetkunde. Dat is kennelijk de ruimte die echt onderzoek nodig heeft. De treeplank van het plotselinge inzicht komt altijd onverwacht. Het primair stellen van kwaliteit in onderwijs en onderzoek is een bestaansvoorwaarde voor een ontwikkeld land. Helaas is dit slecht te rijmen met de bestuurlijke maatregelen van de laatste jaren in Nederland. Innovatie wordt op een wel heel originele manier bevorderd: onderzoeksbudgetten worden ingekrompen en met kwaliteitseisen in het onderwijs wordt de hand gelicht. Van de gedevalueerde exameneisen in het hbo hebben we via de pers genoeg gehoord. Een ander voorbeeld is dat sommige natuurwetenschappelijke faculteiten geld uitsparen door wiskundelessen te laten geven door onbevoegden. De Dickerdacks die Nederland besturen moeten een krachtig tegengeluid te horen krijgen. Het Platform Wiskunde Nederland biedt ons hiertoe een van de weinige mogelijkheden en verdient dan ook ondersteuning van alle wiskundigen. 

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur

Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Agenda

Upcoming Events

juni 2011

4 juni 2011

De nacht van kunst en wetenschap

Een festival vol muziek, theater, tentoonstellingen, debatten en wetenschappelijke experimenten

plaats Binnenstad Groningen

info www.denachtvankunstenwetenschap.nl

6 juni 2011

Bessensap

Dit evenement met als motto 'wetenschap ontmoet pers, pers ontmoet wetenschap' brengt journalisten, redacteurs, voorlichters en mediage-niekie wetenschappers dicht bij elkaar.

plaats Museon, Den Haag

info www.nwo.nl/bessensap

6 – 7 juni 2011

E-learning and Mathematics

Conferentie georganiseerd door de drie technische universiteiten in samenwerking met SURF academy, CLUSTER en AMI over diverse aspecten van e-learning in wiskunde

plaats Zwarte Doos, Eindhoven

info www.telmmme.tue.nl/ELAM2011

6 – 10 juni 2011

European Women in Mathematics Summer School 2011

Zomerschool voor promovendi in logica, meetkunde en geschiedenis van de wiskunde

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl/lc/web/2011/429/info.php3?wsid=429

8 juni 2011

Kunnen computers denken?

Afscheidscollege van Teun Koetsier

plaats Wiskunde en Natuurkundegebouw, VU Amsterdam

info www.wiskgenoot.nl/watbiedt/overzicht.php

10 juni 2011

Bèta onder de Dom

Workshops van een dag voor docenten. Voor wiskunde is het thema 'De Digitale Wiskunde Omgeving'

plaats Hogeschool Utrecht

info www.betasteunpunt-utrecht.nl/?pid=11

13 – 19 juni 2011

Advanced Topics in Numerical and Computational Bifurcation Analysis

Zomerschool over numerieke algoritmes voor bifurcatieanalyse in conservatieve, symmetrische en hybride dynamische systemen

plaats DTU Kopenhagen, Denemarken

info www2.mat.dtu.dk/people/F.Schilder/ANBA

15, 21 en 22 juni 2011

Mathematica 8 presentaties

Gratis presentaties over Mathematica 8 door Markus van Almsick van Wolfram Research.

plaats ING Bank, Brussel, TU Delft, Universiteit Twente

info www.can.nl/events/details.php?id=77

19 juni 2011

Waarom zijn er geen vierkante slakken?

Kinderlezing door wiskundige Dion Gijswijt over wiskundige patronen en vormen in de natuur

plaats NEMO, Amsterdam

info www.kinderlezingen.nl/kinderlezingen/agenda.cfm

20 juni 2011

Wetenschappelijke modellen, wat kunnen we ermee?

Themabijeenkomst van een dag over hoe in verschillende wetenschapsgebieden wordt gedacht over modellen als hulpmiddel

plaats KNAW, Amsterdam

info www.knaw.nl/Pages/DEF/29/354.html

20 – 24 juni 2011

Fronts and nonlinear PDE's

Conferentie ter ere van de 60ste verjaardag van Henri Berestycki

plaats École Normale Supérieure, Parijs

info www.math.univ-toulouse.fr/berestycki2011

juli 2011

1 juli 2011

IMAPP symposium: The Arrow of Time

Symposium met als sprekers Jean Bricmont, Misha Katsnelson, Robert Kirshner, John Willard Morgan en Jim Virdee

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info www.ru.nl/math/research/imapp-symposium

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Charlene Kalle

agenda@nieuwarchief.nl

1 juli 2011

3rd SDP day

Een dag met lezingen over toepassingen van semidefinitie programmeren

plaats CWI, Amsterdam

info homepages.cwi.nl/~vallenti/3rd.SDP.day

4 – 8 juli 2011

Extreme value statistics in mathematics, physics and beyond

Workshop georganiseerd door Y. Fyodorov, F. den Hollander, S. Nechaev, H. Rootzen, S. Shlosman

plaats Lorentz Centrum, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2011/450/info.php3?wsid=450

5 – 8 juli 2011

ICTMT10

10de internationale conferentie over technologie in het wiskundeonderwijs

plaats Portsmouth, UK

info www.ictmt10.org

13 – 24 juli 2011

IMO2011

52ste editie van de internationale wiskunde olympiade, die dit jaar in Nederland wordt gehouden

plaats Amsterdam

info www.imo2011.nl

17 – 23 juli 2011

SRTL-7

Zevende editie van deze internationale conferentie over statistiekonderwijs en de rol die het speelt in het ontwikkelen van statistische geletterdheid, statistisch denken en redeneren

plaats Texel

info srtl.stat.auckland.ac.nz

18 – 22 juli 2011

Discrete Integrable Systems

Deze workshop gaat over de state of the art van onderzoek op het gebied van discrete integreerbare systemen

plaats Lorentz Centrum, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2011/433/info.php3?wsid=433

27 – 31 juli 2011

Bridges 2011

14de editie van deze jaarlijks terugkerende conferentie over wiskunde in relatie tot kunst, muziek en wetenschap

plaats University of Coimbra, Portugal

info bridgesmathart.org/bridges-2011

augustus 2011

1 – 19 augustus 2011

Wiskundezomerkampen

Zomerkampen voor jongeren van 10 tot 18 jaar. De eerste week is voor klas 4 t/m 6, de tweede week voor groep 6 t/m 8 van de basisschool, en de derde week voor klas 1 t/m 3

plaats De Poelakker, Lunteren

info www.vierkantvoorwiskunde.nl/kampen

15 – 26 augustus 2011

Science and Mathematics Education

Zomerschool met lezingen, seminars en andere activiteiten op het gebied van curriculumontwikkeling en gerelateerd onderzoek

plaats Universiteit Utrecht

info www.utrechtsummerschool.nl/?type=courses&code=H7

26 – 27 augustus 2011

Vakantie cursus 2011

Informatieve en inspirerende bijeenkomst voor wiskundedocenten met dit jaar als thema 'symmetrie'

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/vc2011

september 2011

5 – 9 september 2011

European Women in Mathematics

15de editie van de tweejaarlijkse conferentie van de European Women in Mathematics met Karen Vogtmann als 2011 EWM lecturer

plaats CRM Barcelona, Spanje

info www.crm.cat/ewm

12 – 16 september 2011

ECCS'11

Brede Europese conferentie over complexe systemen

plaats Universiteit van Wenen, Oostenrijk

info www.eccs2011.eu

16 september 2011

Finale Nederlandse wiskundeolympiade

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats TU/e, Eindhoven

info www.wiskundeolympiade.nl

23 september 2011

Wiskundetoernooi

20ste editie van de jaarlijkse wiskundewedstrijd voor teams van vijf middelbare scholieren uit de bovenbouw

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info www.ru.nl/wiskundetoernooi/editie-2011

oktober – november 2011

5 – 7 oktober 2011

Woudschoten Conferentie

36ste Woudschoten Conferentie van de Nederlandse en Vlaamse Numerieke Wiskundige Gemeenschappen

plaats Woudschoten Conferentiecentrum, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

17 – 21 oktober 2011

Performance 2011

Het 29ste international symposium over 'computer performance, modeling, measurements and evaluation' wordt dit jaar in Amsterdam gehouden

plaats CWI, Amsterdam

info event.cwi.nl/performance2011

31 oktober – 4 november 2011

Tipping Points in Complex Flows

Workshop over methodes die toegepast kunnen worden bij bestudering van bifurcatieverschijnselen in verschillende soorten dynamische systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info lorentzcenter.nl/lc/web/2011/459/info.php3?wsid=459

14 – 16 november 2011

40ste Bijeenkomst Stochastici

Jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse stochastici en statistici

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren

info www.cwi.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle
 nieuws@nieuwarchief.nl

Wiskunde van de grond

De Noord-Amerikaanse wiskundeinstituten hebben 2013 uitgeroepen tot het jaar van 'Mathematics of Planet Earth', waarbij het thema in de breedst mogelijke zin opgevat moet worden. In het kader hiervan zullen veel verschillende activiteiten over de hele wereld georganiseerd worden, vaak in samenwerking met verschillende instituten.

Mathematics of Planet Earth 2013 zal zich voornamelijk richten op wiskundig onderzoek met betrekking tot problemen die de aarde aangaan, zoals het broeikaseffect, de controle van ziektes en epidemieën, resource management, duurzaamheid, et cetera. Activiteiten die zullen plaatsvinden zijn thematische programma's, workshops, samenwerkingen tussen verschillende onderzoeksgroepen, zomerscholen, activiteiten in de media en speciale uitgaven van wetenschappelijke tijdschriften.

Bron: www.mpe2013.org

Abelprijs 2011 voor John Milnor

Op 23 maart heeft de Noorse Academie van Wetenschappen bekend gemaakt dat de Amerikaan John Milnor de winnaar is van de Abelprijs 2011. Milnor is professor aan Stony Brook University in New York.

De jury van de Abelprijs roemt Milnor om zijn baanbrekende ontdekkingen in de topologie, meetkunde en algebra. Dat Milnor een belangrijke stempel heeft gedrukt op de moderne wiskunde blijkt wel uit alle begrippen die naar hem zijn vernoemd, zoals bijvoorbeeld het Milnor-getal, de Milnor-exotische sfeer, de Milnor-afbeelding en het Milnor-vermoeden.

Aan de Abelprijs is een bedrag van zes miljoen Noorse kronen verbonden, ongeveer 750.000 euro. De prijs werd op 24 mei persoonlijk door koning Harald V van Noorwegen uitgereikt tijdens een feestelijke ceremonie.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Brouwerprijs 2011 naar Kim Plofker

Wiskundige Kim Plofker heeft op 14 april tijdens het 47ste Nederlands Mathematisch Congres de Brouwerprijs 2011 uitgereikt gekregen voor haar excellente onderzoek naar de geschiedenis van de wiskunde. Ze is expert in wetenschapsgeschiedenis in de oudheid en middeleeuwen en in Sanskriet, en is momenteel verbonden aan het Department of Mathematics van het Union College in Schenectady, Verenigde Staten.

De Brouwerprijs is de meest prestigieuze Nederlandse wiskundeprijs die ook internationaal in hoog aanzien staat. Het Koninklijk Wiskundig Genootschap kent de prijs elke drie jaar toe in opdracht van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Bron: www.nwo.nl

25jaar.nl

Op 25 april 1986, 25 jaar geleden, heeft het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) de domeinnaam .nl laten registreren. Het was toen een van de eerste landendomeinen in de wereld. Zes dagen later registreerde Piet Beertema, de toenmalige systeembeheerder van het CWI, de eerste domeinnaam in Nederland, cwi.nl. Deze naam is nog steeds door het CWI in gebruik.

Bron: www.cwi.nl

Echte meisjes doen wiskunde

In april 2012 zal voor het eerst de European Girls' Mathematical Olympiad plaatsvinden. Deze zal gehouden worden in Cambridge, Engeland.

Het toernooi zal qua opzet erg lijken op de Internationale Wiskundeolympiade die ieder jaar in juli plaatsvindt. Het doel is om meer meisjes de mogelijkheid te bieden om op internationaal niveau mee te doen en uiteindelijk het aantal meisjes dat deelneemt aan wiskundecompetities te vergroten.

Nederland zal in april een team van vier meisjes naar Cambridge afvaardigen. Deze meisjes komen uit de trainingsgroep van de 25 beste deelnemers aan de finale van de Nederlandse Wiskundeolympiade 2011.

Bron: www.egmo2012.org.uk

Bloemenveiling

Op 22 juni wordt in New York een collectie van oude wiskundige werken geveild, waaronder belangrijke stukken van de *Liber Abaci* van Fibonacci. Met deze teksten heeft Fibonacci het Hindu-Arabische getallenstelsel in Europa geïntroduceerd. Hij bespreekt er onder andere de voordelen van het Arabische systeem en het belang van het getal 0. Het *Liber Abaci* werd in 1202 in Italië in het Latijn geschreven.

Een van de andere werken die tot de collectie behoort is een zeldzaam vijftiende-eeuws document waarin een belangrijk gedeelte van de *Liber Abaci* besproken wordt. Dit gedeelte heet Flos, oftewel Bloem, en gaat over calculus en meetkundige en algebraïsche methodes om kwadratische vergelijkingen mee op te lossen. Ook wordt een document van de filosoof Boethius geveild.

Tot op de dag van vandaag zijn er in Europese bibliotheken in totaal maar twaalf documenten gevonden die stammen uit de dertiende en vijftiende eeuw. Het overgrote merendeel hiervan bevindt zich in het Vaticaan. Dit soort documenten wordt maar zelden aan het algemene publiek aangeboden en men verwacht dat ze tussen de 120.000 en 180.000 Amerikaanse dollar op zullen gaan leveren.

Bron: www.gizmag.com



Waar is dat nou voor nodig?

In de Staatscourant van 15 maart werd bekend gemaakt dat een aantal opleidingen in het hoger onderwijs hun toelatingseisen ten aanzien van wiskunde hebben versoepeld.

De wo-bachelors Aardwetenschappen van de Universiteit Utrecht (UU), de Vrije Universiteit Amsterdam en de Universiteit van Amsterdam, Milieu- en Natuurwetenschappen (UU) en Natuurwetenschap en Innovatiemanagement (UU) eisen geen wiskunde B meer; wiskunde A is vanaf nu voldoende. Ook de Wageningen-studies Internationaal Land- en Waterbeheer, Milieuwetenschappen en Bodem, Water, Atmosfeer

eisen geen wiskunde B meer. In het hbo worden de opleidingen Bedrijfskundige Informatica en Informatica toegankelijk voor leerlingen met het profiel Cultuur en Maatschappij zonder wiskunde.

Voor havo-leerlingen is wiskunde B inmiddels al lang geen doorstroomrelevant vak meer. Wiskunde B is in het hbo alleen nog vereist voor de tweedegraadslerarenopleiding wiskunde (vanuit het vwo is wiskunde A overigens voldoende) en voor Advanced Sensor Applications, een kleine opleiding in Assen van de Hanzehogeschool Groningen. Alle andere hbo-studies (ook harde technische opleidingen als werktuigbouwkunde, elektrotechniek, bedrijfswiskunde, technische informatica, et cetera) vereisen geen wiskunde B.

Bron: www.wiskundebrief.nl

Van postdocs naar workshops

Eurandom, het Europese instituut voor statistiek, kansrekening, stochastische operationele research en toepassingen, gaat een nieuwe koers varen. De afgelopen twaalf jaar was het vooral een postdocinstituut, maar onder leiding van de nieuwe wetenschappelijke directeur zal het zich meer gaan richten op het organiseren van workshops.

Eurandom is van plan om minstens acht workshops te organiseren in de verschillende gebieden van de stochastiek. Er zal daarbij in ieder geval doorgedaan worden met de serie workshops YESP (Young European Stochastic Professionals). Verder zullen er vier keer per jaar thema-maanden georganiseerd gaan worden met workshops en lezingendagen rond een specifiek onderwerp. Tenminste één van deze maanden zal besteed gaan worden aan een multidisciplinair onderwerp.

Op 7 april werd de aftrap gegeven voor de eerste themamaand, gewijd aan stochastische netwerken. Dit was ook het moment dat het directeurschap van Eurandom officieel overgedragen werd van professor Onno Boxma naar professor Remco van der Hofstad. Boxma heeft de positie in totaal vijfentwintig jaar lang bekleed.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Wiskunde doen met een miljoen

Google heeft een miljoen euro geschonken aan de organisatie van de International Mathematical Olympiad (IMO). Deze donatie is bedoeld ter ondersteuning van de komende vijf edities van de jaarlijkse wiskundecompetitie voor middelbare scholieren.

De donatie van Google zal worden ingezet om het wereldwijde evenement te bekostigen en om scholieren uit de hele wereld de kans te bieden om mee te doen. Normaal gesproken worden de kosten gedragen door het gastland en door de schenking zal het tot 2015 makkelijker worden om nieuwe gastlanden te vinden.

Het kampioenschap wordt ieder jaar in juli georganiseerd, telkens op een andere locatie. Dit jaar treedt Nederland op als gastland. De IMO vindt plaats van 16 tot 24 juli in Amsterdam.

Bron: www.whizpr.nl

Apologie van een wiskundige

Dit voorjaar is bij Uitgeverij Nieuwezijds een Nederlandse vertaling van het boek *A mathematician's apology* van G. H. Hardy verschenen. Het boek, dat in 1940 uitkwam, is een klassieker en werd door Graham Greene geroemd als het "beste boek over wat het betekent om een scheppend kunstenaar te zijn". Hardy schreef deze 'apologie' toen zijn wiskundig talent tanende was. Het is een aangrijpend verhaal over de schoonheid en het nut van de wiskunde en geeft een treffend beeld van het leven en denken van een ware wetenschapper.

In zijn uitgebreide voorwoord beschrijft C.P. Snow Hardy's leven aan de hand van vele anekdotes over zijn academisch bestaan, het inmiddels beroemd geworden verhaal van Hardy's ontdekking van het Indiase wiskundige talent Srinivasa Ramanujan, en zijn voorliefde voor cricket.

Bron: www.nieuwezijds.nl/Boek/9789057123337

Wiskundige wegen leiden naar Berlijn

De internationale vereniging voor wiskundigen (IMU) heeft op 1 februari haar hoofdkwartier geopend in Berlijn. De organisatie ontvangt per jaar 1 miljoen euro van de Duitse regering en de federale regering van de staat Berlijn voor de exploitatie, het verder ontwikkelen van haar netwerk en prijzen voor excellent wiskundig onderzoek. De IMU is een non-profit organisatie met als doel internationale samenwerking binnen wiskunde te bevorderen.

Voorheen bevond het secretariaat van de IMU zich in het land waar de dan zittende president vandaan kwam. In de zomervan 2010 konden de leden, tijdens de jaarvergadering in India, hun voorkeur uitspreken voor een permanente lokatie. In de finale stemronde bleven Berlijn, Toronto en Rio de Janeiro over, waarbij de uiteindelijke keuze op Berlijn viel.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Indagationes Mathematicae in een nieuw jasje

Het tijdschrift *Indagationes Mathematicae* heeft een gedaanteverwisseling ondergaan. Het bestond al decennia als tijdschrift in eigendom en beheer van de KNAW, waarbij de sectie Wiskunde van de KNAW de redactionele verantwoordelijkheid droeg. Elsevier zorgde voor de distributie. Sedert maart 2011 is *Indagationes* in eigendom van het KWG, waarbij de sectie Wiskunde van de KNAW de redactionele politiek blijft bepalen en ook de Editorial Board benoemt. In het voorjaar van 2010 is ook overgegaan op het Elsevier Electronic Support systeem (EES), hetgeen websupport betekent voor het redactionele proces. Elsevier blijft de distributie verzorgen, waarbij de nadruk ligt op de elektronische versie van het tijdschrift.

Ten slotte is de redactie sinds 2010 aangepast om het blad beter te kunnen verankeren in de wiskundige gemeenschap; zie voor details <http://ees.elsevier.com/indag>. Op deze website is ook het mission statement van *Indagationes* te lezen. Geïnteresseerden worden hierbij uitgenodigd hun publicaties aan te bieden. Het tijdschrift mikt in het bijzonder op artikelen die leesbaar zijn voor een algemeen wiskundig gevormd publiek, inclusief artikelen vanuit de theoretische informaticahoek.

Bron: Henk Broer

Uitsterven bedreigt

Als twee verschillende diersoorten voor hun levensbehoeften afhankelijk zijn van dezelfde bronnen, dan zal volgens de klassieke ecologie de sterkste soort het overleven en de andere uitsterven. Er zijn echter plaatsen op aarde, zoals het Amazonegebied, waar duizenden diersoorten naast elkaar bestaan en voedsel, licht en water met elkaar delen. Onderzoekers Stefano Allesina van de University of Chicago en Jonathan Levine van de University of California, Santa Barbara, hebben een wiskundig model ontwikkeld waaruit nieuwe ecologische regels naar voren zijn gekomen. De resultaten verschenen onlangs in de *Proceedings of the National Academy of Science*.

Het model is gebaseerd op het kinderspelletje 'rock-paper-scissors'. De spelers kiezen daarbij tegelijkertijd één van de drie voorwerpen door ze met hun hand uit te beelden. Steen wint van schaar, schaar wint van

papier en papier wint van steen. Deze regels zijn een voorbeeld van een intransitieve competitie, waarbij de deelnemers niet zonder meer van goed naar slecht gerangschikt kunnen worden. Als de mogelijkheden in paren met elkaar vergeleken worden, dan is er steeds een winnaar en een verliezer, maar alle drie de mogelijkheden samen leveren een patstelling op.

Dit spelletje kan gebruikt worden om zekere ecologische systemen met drie diersoorten te omschrijven. Tot nu toe had nog niemand geprobeerd om het systeem uit te breiden van drie naar duizenden mogelijkheden, maar Allesina en Levine hebben een wiskundige structuur ontwikkeld waarmee ze kunnen uitvinden wat er gebeurt bij een willekeurig aantal diersoorten. Met methodes uit de speltheorie, grafentheorie en dynamische systemen kunnen ze laten zien dat de biodiversiteit snel toeneemt als er meer beperkende factoren in het model worden opgenomen. Een aantal zwakke spelers wordt snel uitgeschakeld en tussen de overige diersoorten treedt een soort evenwicht op. Daardoor is het in dit model wel mogelijk dat veel verschillende soorten in hetzelfde gebied naast elkaar bestaan.

Volgens Allesina laat het model zien dat bedreigde diersoorten wel eens een belangrijke rol zouden kunnen spelen voor de biodiversiteit. Als je de stenen weghaalt uit het steen-papier-schaar-spelletje, dan blijven er alleen scharen over. In een groter systeem kan het weghalen van een enkele diersoort op dezelfde manier grote gevolgen hebben voor veel van de andere soorten.

Bron: www.eurekalert.org

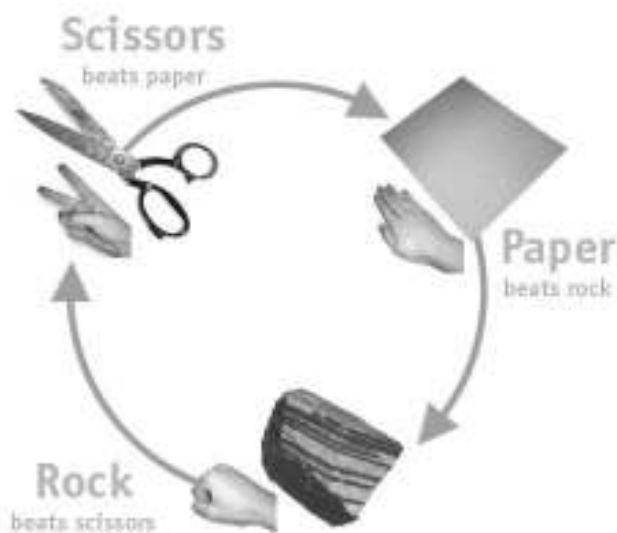


foto: Wikipedia.org

OngeLIMEteerd

LIME (Laboratory for Industrial Mathematics Eindhoven), onderzoeksinstituut van de TU/e-faculteit Wiskunde en Informatica, gaat zelfstandig verder binnen systeemontwikkelaar Sioux. Op vrijdag 18 februari ondertekenden het College van Bestuur van de TU/e en Hans Duisters, CEO van Sioux, de overeenkomst. LIME wordt gekocht door de nieuw opgerichte organisatie LIME B.V., welke grotendeels eigendom is van Sioux.

LIME helpt bij het oplossen van wiskundige problemen in het bedrijfsleven. Volgens LIME-oprichter Bob Mattheij is het instituut gestart om de ruimte tussen wetenschappelijk onderzoek en het bedrijfsleven op te vullen. Vanaf de oprichting streeft LIME al naar een hoge mate van zelfvoorziening en is daarmee meer een bedrijf dan een onderzoeksinstituut.

Volgens Mattheij was LIME op zoek naar een sterke partner om de vaak onzichtbare wiskunde meer zichtbaar te maken en is deze in Sioux gevonden. Duisters vult aan: "Sioux gelooft erin dat we de industrie enorm kunnen versterken door wiskunde toe te voegen aan het proces. We kunnen nu een veel completer pakket oplossingen bieden aan onze klanten. Het eerste industrieële wiskundehuis in Nederland is hiermee een feit."

Bron: w3.win.tue.nl/nl/nieuws

Oude tentamens

De Open Universiteit (OU) neemt sinds maart de verplichte voortentamens wiskunde T af onder bachelorstudenten die een masteropleiding aan de TU Delft willen volgen, maar onvoldoende wiskunde in hun vooropleiding hebben. Het voortentamen is nodig voor toelating tot een schakelprogramma. Er zijn jaarlijks tussen de driehonderd en vijfhonderd hbo-studenten die graag een schakelprogramma zouden willen volgen. Om zo'n schakelprogramma succesvol te kunnen doorlopen is voldoende voorkennis van wiskunde essentieel en daarom is het voortentamen verplicht. De TU Delft ziet inhoudelijk toe op het niveau van de voortentamens. De OU is verantwoordelijk voor de ontwikkeling, organisatie en certificering ervan.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Pythagoras ziet Abraham

Pythagoras, het wiskundetijdschrift voor jongeren, bestaat dit jaar vijftig jaar en viert dat met een aantal activiteiten. Zo staat er in elke aflevering van deze jaargang een jubileumprijsvraag, waarmee een geldprijs van 100 euro, een Irisbon van 20 euro of een boek of boekenbon te winnen valt.

Speciaal voor de gelegenheid is bij uitgeverij Bert Bakker het boek *De Pythagoras Code – Het beste uit een halve eeuw wiskunde voor liefhebbers* verschenen, waarin de leukste artikelen en puzzels uit de afgelopen vijftig jaargangen zijn opgenomen. Op 2 april vond de boekpresentatie plaats. Bruno Ernst, de drijvende kracht achter *Pythagoras* tijdens de eerste dertig jaargangen, kreeg daar het eerste exemplaar uitgereikt.

Bron: www.pythagoras.nu

π -tje precies

In januari heeft de Japanner Shigeru Kondo een nieuw wereldrecord decimalen van π berekenen gehaald. Kondo heeft vijf biljoen decimalen gevonden en komt daarmee in het Guinness Book of Records.

Kondo had zijn computer uitgerust met onder andere twintig externe harde schijven en meerdere processoren. Om de decimalen te achterhalen gebruikte hij software die speciaal hiervoor was ontwikkeld door de Amerikaanse informaticastudent Alexander Yee. Het record komt daarom ook op zijn naam te staan.

Ondertussen heeft Kondo gewoon verder gerekend en hij hoopt erop om in juli tien biljoen decimalen berekend te hebben.

Bron: www.nu.nl

Tot de kern van de meetkunde

Een team Engelse, Australische, Russische en Japanse onderzoekers gaat een 'periodiek systeem' van meetkundige vormen maken. Het project, dat drie jaar zal gaan duren, moet een naslagwerk op gaan leveren dat door wiskundigen, natuurkundigen en andere wetenschappers gebruikt zal gaan worden. Gedacht kan worden aan toepassingen in bijvoorbeeld getaltheorie, robotica en theoretische fysica.

De onderzoekers gaan een grote databank aanleggen van de bouwstenen waaruit alle mogelijke vormen die in drie, vier en vijf dimensies zijn opgebouwd. Ze willen de bouwstenen aan de hand van hun vergelijkingen in soortgelijke groepen indelen en hopen zo meer inzicht te krijgen in de meetkundige eigenschappen van de figuren. Het is nog niet duidelijk om hoeveel vormen het in totaal gaat. De onderzoekers schatten dat er ongeveer 500 miljoen vierdimensionale figuren met een algebraïsche definitie zijn en ze verwachten een paar duizend bouwstenen te vinden waaruit al deze vormen zijn opgebouwd.

Volgens Tom Coates, medewerker aan het project en verbonden aan Imperial College in Londen, zijn de bouwstenen waar ze naar zoeken vergelijkbaar met atomen in scheikunde: tot op zekere hoogte zullen de eigenschappen van samengestelde figuren afhangen van de meetkundige eigenschappen van de atomen. Coates heeft aan het begin van dit jaar de prestigieuze Philip Leverhulme Prijs gewonnen voor buitengewone onderzoekers onder de 36 jaar. Het project wordt deels gefinancierd door het geld dat aan deze prijs verbonden was.

Bron: www.gizmag.com

Vierkant verkeerd

Wiskundige en kunstenaar Rinus Roelofs heeft een fout ontdekt in een van de tekeningen van Leonardo da Vinci. Het gaat om een tekening van een romboëdrisch kuboctaëder, een veelvlak waarbij een gelijkzijdige driehoek steeds door vierkanten wordt omringd.

Op de tekening heeft Da Vinci ieder zijvlak van een piramide voorzien. Op de driehoekige zijvlakken staat een piramide met een driehoekig grondvlak en op de vierkanten eentje met een vierkante. Toen Roelofs de tekening na probeerde te tekenen kwam hij erachter dat een piramide aan de onderkant van de tekening een vierkante basis heeft, terwijl het eigenlijk een driehoekige zou moeten zijn.

Da Vinci maakte dergelijke tekeningen als illustraties bij het werk van Luca Pacioli, een wiskundige die net als Da Vinci aan het hof van de hertog van Milaan werkte. Voor zover bekend maakte Da Vinci voor zijn tekeningen geen gebruik van modellen en had hij alleen de instructies van Pacioli om zich een beeld te vormen van de figuren.

Bron: www.eosmagazine.eu, artikel Dirk Huylebrouck



Links de tekening van Leonardo da Vinci, rechts de gecorrigeerde versie van Rinus Roelofs

Van Wijngaarden Award 2011 voor Éva Tardos en John Butcher

Op 10 februari hebben de Hongaarse Éva Tardos en de Nieuw-Zeelandse John Butcher de Van Wijngaarden Award 2011 in ontvangst

genomen. De prijs werd ter ere van het 65-jarig bestaan van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) toegekend aan wetenschappers die een bijzondere betekenis hebben voor deze vakgebieden.

Éva Tardos, hoogleraar informatica aan de Cornell University in de Verenigde Staten, houdt zich bezig met algoritmen en algoritmische speltheorie. Een algoritme richt zich meestal op een probleem waarbij één doel voor ogen wordt gehouden, bijvoorbeeld: hoe kun je zo snel mogelijk iets opzoeken? Bij veel toepassingen zijn er echter meerdere personen die ieder doen wat voor henzelf het beste is. Tardos kijkt in hoeverre deze zelfzuchtigheid invloed heeft op de kwaliteit van de uitkomst in vergelijking met een situatie waarin hiervan geen sprake is. Tardos is lid van de National Academy of Engineering en de American Academy of Arts and Sciences.

De wiskundige John Butcher, emeritus hoogleraar aan de Universiteit van Auckland in Nieuw-Zeeland, houdt zich bezig met numerieke methoden voor gewone differentiaalvergelijkingen. Deze worden onder meer gebruikt bij het simuleren van golven. Daarnaast is Butcher een bekende bepleiter van het gebruik van afbeeldingen in wiskundige teksten. Normaal gesproken bestaan bijdragen aan de wiskunde uit een combinatie van woorden en formules, maar soms kunnen plaatjes enorm helpen om wiskunde duidelijk te maken. Op deze manier is er eenvoudig toegang tot wat normaliter ingewikkelde materie is. John Butcher is Fellow van de Royal Society of New Zealand, de New Zealand Mathematical Society en de Society for Industrial and Applied Mathematics.

De Van Wijngaarden Award is vernoemd naar Adriaan van Wijngaarden (1916–1987), een van de grondleggers van de informatica in Nederland. Het is voor de tweede keer dat de Van Wijngaarden Award wordt uitgereikt. De eerste prijzen werden in 2006 uitgereikt ter ere van het 60-jarig bestaan van het CWI en gingen toen naar Nancy Lynch (Massachusetts Institute of Technology) en Persi Diaconis (Stanford University).

Bron: www.cwi.nl/nieuws/all



Tegen een stoffig imago

Dit voorjaar is www.lovelymath.com van start gegaan. De website is een combinatie van een winkel voor wiskunde T-shirts en een nieuwsplein dat bericht over wiskundige ontwikkelingen binnen het onderwijs, de wetenschap, het bedrijfsleven en de maatschappij.

De drijfveren achter Lovelymath.com zijn de schoonheid, de kracht en de geschiedenis van de wiskunde, en deze drie aspecten komen tot uiting in de T-shirts. Er is bijvoorbeeld een T-shirt met de mooiste wiskundevergelijking ooit en een met de kleinste perfecte vierkantverdeling. De T-shirts zijn verkrijgbaar in de kleuren zwart en wit en op de website staat een heldere uitleg over de wiskunde op de shirts. Daarnaast is er een toegankelijke biografie van de wiskundige in kwestie te vinden.

Op de website bericht Lovelymath.com verder over de onderwijskundige, wetenschappelijke, bedrijfsmatige en maatschappelijke aspecten van de wiskunde. Lovelymath.com is daarmee niet alleen een ontmoetingsplaats voor wiskundigen, maar ook voor mensen die beseffen dat wiskunde onontbeerlijk is voor de samenleving. Lovelymath.com zet zich in voor een positieve beeldvorming van de wiskunde. Jaarlijks schenkt lovelymath.com aan een met wiskunde gelieerde instelling of persoon.

Bron: www.lovelymath.com



Wat doe je met wiskunde?

Dit voorjaar is op schooltv een nieuwe zesdelige serie uitgezonden, genaamd 'Wiskunde voor de brugklas'. De serie is bedoeld voor leerlingen uit klas 1 en 2 van het voortgezet onderwijs. Docenten wiskunde kunnen hun lessen zo meer diepgang geven en het belang van wiskunde beter naar voren laten komen.

In de brugklas maken leerlingen kennis met wiskunde. Ze komen in aanraking met algebra, meetkunde en informatieverwerking; leerlingen moeten los komen van het idee dat wiskunde alleen maar rekenen is. De thema's in deze serie zijn achtereenvolgens: Wat doe je met getallen? – Wat doe je met formules? – Wat doe je met meetkundige figuren? – Wat doe je met schaaltekeningen? – Wat doe je bij informatieverwerking? – Wat heb je nu aan wiskunde?

Bron: www.schooltv.nl/docent/project/3135099

Jason Frank
Willem Hundsdorfer
Barry Koren

Centrum Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
1090 GB
Amsterdam
jason@cwí.nl
willem.hundsdorfer@cwí.nl
barry.koren@cwí.nl



Jan Verwer

In Memoriam Jan Verwer (1946-2011)

"Een dag zonder fouten is een dag zonder wiskunde"

Johannes Gerardus (Jan) Verwer overleed op 16 februari 2011, geheel onverwachts, slechts vier weken na zijn pensionering bij het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI). Jan Verwer was een vooraanstaand onderzoeker op het gebied van de numerieke wiskunde voor gewone en partiële differentiaalvergelijkingen, en een succesvol en natuurlijk leider in de wereld van wiskunde en informatica, nationaal en internationaal. Jason Frank, Willem Hundsdorfer en Barry Koren waren CWI-collega's van Jan Verwer en blikken terug op leven en werk van hun gewaardeerde collega.

Jan Verwer werd kort voor zijn afscheid voor het CWI-personeelsblad geïnterviewd door Annette Kik [3]. Citaten uit dit interview zijn in dit artikel verwerkt (cursief gedrukt).

Onderzoek

Tijdsafhankelijke processen zijn alom aanwezig in wetenschap, techniek, industrie, economie, enzovoort. De bewegingen van sterren in het heelal en van atomen in complexe moleculen, de dynamica van biologische populaties, de stromingen van vloeistoffen en elektromagnetische velden, het weer en klimaat, al deze verschijnselen geven aanleiding tot beginwaardeproblemen voor gewone of partiële differentiaalvergelijkingen. In de praktijk is het exact oplossen van beginwaardeproblemen veelal onmogelijk, en vergt zij het gebruik van computers. De methodologie en de theorie voor het rekenkundig oplossen of benaderen van beginwaardeproblemen wordt bestudeerd in het wiskundige deelgebied numerieke analyse.

Aan het begin van zijn carrière heeft Jan Verwer belangrijke bijdragen geleverd aan het

oplossen van stijve beginwaardeproblemen. Oplossing van deze problemen vormde lange tijd een grote uitdaging. Een beginwaardeprobleem wordt 'stijf' genoemd als de oplossing mede bepaald wordt door één of meer zeer kleine tijdschalen, terwijl de interesse vooral uitgaat naar de veel grotere tijdschalen. Een belangrijk voorbeeld is de chemische samenstelling van de atmosfeer, die bepaald wordt door enerzijds chemische reacties op een tijdschaal van een fractie van een seconde, en anderzijds atmosferische stromingen op een tijdschaal van dagen, weken, of nog langer. Om de chemische samenstelling van de atmosfeer bijvoorbeeld een week vooruit in de tijd te berekenen, moet rekening worden gehouden met de reacties op de sub-seconde-tijdschaal. Met zogenaamde expliciete methoden leidt dit over de gehele termijn van één week tot zeer kleine tijdstappen — ook als nauwkeurigheid dit niet vereist — en dus tot zeer lange rekentijden. Als alternatief kan gebruik worden gemaakt van impliciete methoden, waarbij veel grotere tijdstappen genomen kunnen worden zodra nauwkeurigheds-

eisen dit toelaten, zij het met meer rekenwerk per tijdstap. Het onderwerp van stijve beginwaardeproblemen kan worden gezien als de voorloper van de huidige wetenschappelijke interesse in multischaal-modellering en -simulatie.

Het vroege werk van Jan Verwer heeft bijgedragen aan de theorie van de stabiliteit van numerieke methoden voor stijve problemen, en resulteerde in de publicatie van een boek [1] met Kees Dekker als co-auteur, thans een klassiek werk in de numerieke analyse. Het boek was het eerste boek dat de bekende resultaten over methoden voor stijve beginwaardeproblemen verzamelde. Het belang van dit boek wordt bevestigd door het feit dat er nog steeds veel naar wordt verwezen door de meest vooraanstaande wetenschappers in het veld, terwijl er inmiddels meer omvangrijke boeken zijn verschenen. Het boek is ook in het Russisch vertaald en uitgegeven.

Vervolgens wendde Jan zich tot de vergelijkingen die de evolutie beschrijven van tijdsafhankelijke processen met meerdere onafhankelijk variabelen: partiële differentiaalvergelijkingen. Hier is hij één van de pioniers geweest van de methoden-der-lijnen-aanpak, waarbij de ruimtelijke afgeleiden eerst door differentieschema's worden vervangen om zodoende een beginwaardeprobleem te verkrijgen. De methoden-der-lijnen-aanpak is heel natuurlijk, omdat de tijd- en

ruimte-aspecten van evolutievergelijkingen in het algemeen een zeer verschillend karakter hebben. Samen met de Spaanse wiskundige J.M. Sanz-Serna bestudeerde Jan de analytische convergentie van methoden-der-lijnen-discretisaties. Een bijzonder belangrijk resultaat hierbij was de identificatie van het mechanisme van convergentieverlies ten gevolge van de numerieke behandeling van randvoorwaarden. Een ander resultaat van de samenwerking met Sanz-Serna, en ook Joke Blom, was de verdere ontwikkeling van bewegende-rooster-methoden, een techniek voor het verkrijgen van de meest nauwkeurige oplossing voor vaste rekenkosten, door het rekenrooster zich automatisch te laten aanpassen aan de structuur van de oplossing. Onderzoek aan dit onderwerp wordt tot op de dag van vandaag voortgezet door Jans promovendus Paul Zegeling (aan de Universiteit Utrecht) en door meerdere onderzoeksgroepen in het buitenland.

De sterke toename in vereiste nauwkeurigheid bij veel numerieke simulaties stelt hoge eisen aan de efficiëntie van tijdsintegratiemethoden. Jan ontwikkelde een aantal methoden om de efficiëntie van impliciete methoden te verbeteren: richtingsafhankelijke splitsingsmethoden op basis van herhaalde oplossing van eendimensionale problemen; operator-splitsingsmethoden gebaseerd op herhaalde oplossing van problemen met verschillende ruimte- of tijdschalen; Runge–Kutta–Rosenbrock methoden die gebruik maken van lokale linearisatie om de hoge kosten van het iteratief oplossen van niet-lineaire problemen te vermijden; en Runge–Kutta–Chebychev methoden, aangepaste expliciete methoden met verbeterde stabiliteit voor specifieke vormen van stijfheid. Dit werk resulteerde in een tweede boek [2], geschreven samen met Willem Hundsdorfer.

Jan Verwers werk had vaak betrekking op belangrijke praktische problemen. In een aantal gevallen heeft hij nauw samengewerkt met wetenschappers uit andere vakgebieden. Als voorbeeld is te noemen de ontwikkeling van numerieke programmatuur voor de simulatie van atmosferische chemie, samen met het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieuhygiëne en het Instituut voor Marien en Atmosferisch Onderzoek aan de Universiteit Utrecht. Een meer recente toepassing betreft de Maxwell-vergelijkingen, die de dynamica van elektromagnetische velden beschrijven, een samenwerking met Mike Botchev van de Universiteit Twente.

In totaal heeft Jan Verwer 91 artikelen in wetenschappelijke tijdschriften gepubli-

ceerd, plus de twee genoemde boeken. Van de 91 artikelen heeft hij er 18 geschreven zonder co-auteurs. De overigen zijn het resultaat van samenwerkingen met maar liefst 43 mede-auteurs.

Jans houding ten opzichte van zijn werk is door hemzelf [3] als volgt verwoord: *"Wat mij inspireert? Mijn eigen wiskundige belangstelling kunnen volgen. Vrijheid is voor mij het allerbelangrijkste, naast voldoening. Als een artikel geplaatst wordt, dan is dat nog steeds een cadeau. Ik heb honderd artikelen gepubliceerd en twee boeken, maar toch geeft het dezelfde emotie als de eerste keer: ik ben dan hartstikke blij!"*

Loopbaan

Jan Verwer werd geboren op 6 februari 1946 en groeide op als middelste van elf kinderen in een tuindersgezin in Heerhugowaard-Noord. *"Mijn ouders hadden een landbouwbedrijf in Heerhugowaard; daar heb ik hard leren werken. Er waren vaak moeilijke tijden, je moest vooruitkijken, financiële afwegingen maken en risico's inschatten. Met zo'n achtergrond kun je tegen een stootje."* Studeren na de middelbare school zat er niet in. Zijn ouders verwachtten van Jan dat hij net als zijn broers met zijn handen zou gaan werken, en stuurden hem daarom naar de ambachtsschool. Maar kleine Jan hield het er na drie weken al voor gezien (*"Als kind was ik betrokken bij eigenwijs"*). Door een enthousiaste leraar aan de mulo raakte hij geïnteresseerd in wiskunde. Vervolgens ging hij naar de hbs en daarna vervulde hij de militaire dienstplicht, in plaats van een oudere broer, die samen met hun vader het landbouwbedrijf leidde. *"Eigenlijk wilde ik geodeet worden, maar ik moest na een half jaar studie in Delft in militaire dienst, waar ik in m'n vrije tijd cursussen wiskunde bij de LOI volgde met tentamen in Delft."* Daarna werd Jan toegelaten tot de studie wis- en natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam (UvA). Na zijn afstuderen werd hij in 1973 aangenomen bij het Mathematisch Centrum (MC) in Amsterdam, het huidige CWI.

"Op het Mathematisch Centrum kreeg ik een stageplaats bij Piet van der Houwen. Op 1 april 1973 kwam ik in dienst als student-assistent en later werd ik promovendus. Ik vond de sfeer heel inspirerend. Je voelde dat er heel veel deskundige mensen rondliepen. In 1977 promoveerde ik en werd ik postdoc, ook hier. Ik voelde me erg prettig bij het MC en al heel snel werd me gevraagd: wil je blijven? Het MC heeft mij altijd heel goed behandeld."

Sinds 2000 bezette Jan de leerstoel van de



Jan Verwer tijdens zijn lezing op het 14de Nederlands Mathematisch Congres, Amsterdam, 1978

Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde aan de UvA. Deze leerstoel, na de Tweede Wereldoorlog opgericht voor B.L. van der Waerden, was daarvoor bezet door onder anderen A. van Wijngaarden en Piet van der Houwen [4]. Op 7 december 2001 aanvaardde Jan het ambt van hoogleraar door het uitspreken van de oratie 'Een dag zonder fouten is een dag zonder wiskunde'. Jan Verwer was als begeleider of promotor betrokken bij dertien promoties aan de UvA.

Leiding geven

Wetenschappers worden gekenmerkt door een grote passie voor hun vak, een hoog concentratievermogen en vaak enige koppigheid. Deze eigenschappen strijden enigszins met de eigenschappen nodig voor een goede manager, eigenschappen zoals flexibiliteit, bescheidenheid en het vermogen om een groot aantal activiteiten tegelijk te kunnen overzien en coördineren. Om deze reden zijn goede wetenschappers in de regel minder goede managers. Jan Verwer was een opmerkelijke uitzondering op deze regel. Hij had buitengewone kwaliteiten die hem maakten tot een natuurlijk leider en ervoor zorgden dat hij regelmatig gevraagd werd om een leiderschapsrol op zich te nemen, altijd met veel verantwoordelijkheid, en vaak op kritieke momenten. Jan is gevraagd voor bijna elke wetenschappelijk-leidende rol in het CWI en heeft nooit enige verantwoordelijkheid geschuwd, ook niet als dat ten koste ging van zijn eigen wetenschappelijke werk. Bij het CWI heeft Jan de functies vervuld van leider van een eigen onderzoeksgroep, themaleider

en clusterleider. In het laatste geval maakte hij deel uit van het managementteam van het CWI. Hij stelde het instituutbelang boven eigen belang.

"Wat ik belangrijk vind is verantwoorde-lijkheid nemen. Als je bij het CWI werkt, dan sta je met je ene been in je eigen werk en je andere been: dat is het CWI-been. Dat moet ervoor zorgen dat het CWI gedragen wordt en overeind blijft. Daar ben ik altijd consequent in geweest. Iedereen doet zijn best aan het collectief bij te dragen. Zo ben ik ook in BRICKS gestapt. Ik ben bovendien van mening dat een onderzoeksbaan bij het CWI zeer riant is. Daar mag iets tegenover staan."

Hij is dagelijks leider en trekker geweest van het grote interdisciplinaire en interuniversitaire onderzoeksproject BRICKS (www.bsik-bricks.nl). Met het BRICKS-project, een miljoenenproject, heeft Jan het CWI en andere instituten een kurk bezorgd waarop zij gedurende ongeveer zes jaar financieel goed hebben kunnen drijven.

"Ik ben ook zes en half jaar clusterleider geweest. Ik heb er veel tijd in gestoken en ik zat er bovenop. In mijn cluster zaten ook heel goede mensen. Dat is handig bij onderzoeksvisities. Wij scoorden in 2005 onder mijn leiding als enige cluster op alle punten een 5 (excellent). Prachtig vond ik dat."

Jan was ook een zeer goed spreker; als wetenschapsleider benutte hij deze kwaliteit volop. Zijn welbespraakte en zorgvuldig voorbereide openbare toespraken, bij zowel feestelijke als droevige gebeurtenissen, werden algemeen hoog gewaardeerd.

Als erkenning voor zijn grote wetenschappelijke statuur en verdiensten is Jan in 2007 benoemd tot CWI-Fellow, een eervolle functie, voorbehouden aan een select aantal top-onderzoekers van het CWI, met als belangrijk aspect: vrijheid in de keuze van onderzoeksonderwerpen en vrijstelling van CWI-beheerstaken. Jan vervulde ook zijn CWI-Fellowship met volle inzet; hij was zeer actief in onderzoek en, op verzoek, stond hij het CWI-management nog graag met raad en daad bij. *"Ik ben vier jaar geleden gestopt en CWI-Fellow geworden. Daardoor kon ik nog vier jaar op bijzonder prettige wijze onderzoek doen. Het enige dat ik niet bereikt heb is het directeurschap (lacht)."*

Werkgemeenschap Scientific Computing

Jan Verwer behartigde met volle inzet de belangen van de scientific computing gemeenschap in Nederland. Hij riep de verschillende groepen aan de Nederlandse universiteiten op tot het indienen van gezamenlijke programmavoorstellen ter verdere ontwikkeling van dit vak. Tot zijn pensionering op 31 januari 2011 is hij voorzitter geweest van de Werkgemeenschap Scientific Computing (WSC, wsc.project.cwi.nl), de Nederlands-Vlaamse werkgemeenschap van numeriek wiskundigen.

Als voorzitter van de WSC heeft hij de activiteiten van deze organisatie uitgebreid en gewerkt aan het vergroten van de zichtbaarheid van het vakgebied. In benoemingsadviescommissies en andere wetenschappelijke functies, in binnen- en buitenland, pleitte hij voor een toename van personeel in de numerieke wiskunde en scientific computing.

De WSC is verantwoordelijk voor de jaarlijkse conferentie, te Woudschoten, van de Nederlands-Vlaamse numerieke wiskundegemeenschap. Als voorzitter heeft Jan modernisering doorgevoerd in de conferentie, en het WSC-concept uitgebreid met een tweede jaarlijkse bijeenkomst: een voorjaarssymposium waar Nederlandse en Vlaamse promovendi hun onderzoek kunnen presenteren. Door deze bijeenkomsten is de numerieke wiskundegemeenschap in Nederland en Vlaanderen nog sterker geworden dan zij al was.

"Vanuit Woudschoten is ook PhDays ontstaan, mede een initiatief van Debby Lanser, één van mijn oio's. PhDays organiseert een jaarlijks weekend voor jonge onderzoekers uit Nederland en Vlaanderen."

Afscheid

Jan Verwer werd geboren vijf dagen voor de oprichting van het CWI (11 februari 1946), het instituut waaraan hij zijn gehele wetenschappelijke carrière verbonden is geweest. Na een dienstverband van bijna 38 jaar, waarin hij alle wetenschappelijke functies in het instituut vervulde, ging hij op 31 januari 2011 met pensioen. Het CWI heeft Jan, ter gelegenheid hiervan, eer betuigd met onder andere een driedaagse internationale workshop, gehouden van 17 tot en met 19 januari 2011, met tal

van coryfeeën uit de numerieke wiskunde als spreker. Op 19 januari werd hem 's middags een afscheidssymposium aangeboden, met toespraken van meer persoonlijke aard door Willem Hundsdorfer, Debby Lanser, Hans van Duijn en Jans zoon Reijer Verwer, alles afgesloten met een drukbezochte receptie.

Tijdens de receptie werd Jan benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. De burgemeester van Jans woonplaats Heiloo citeerde uit de adhesiebetuigingsbrieven, waarin onder andere stond dat Jan door collega's in het buitenland werd gezien als een ware ambassadeur van Nederland. Zij zagen Jan als het schoolvoorbeeld van het goede in Nederlanders: nuchter en hardwerkend, bescheiden, oprecht en eerlijk, beleefd en vriendelijk.

Jan Verwer was sinds 1971 getrouwd met Tineke Kraakman. Onlangs nog vierden zij hun 40-jarig huwelijk. Zij kregen drie kinderen en in november 2010 werd hun eerste kleinkind geboren. Volgens zijn vrouw en kinderen was wiskunde voor Jan niet alleen zijn vak, maar ook zijn passie en kunst. Volgens Tineke bleven onopgeloste problemen altijd door zijn hoofd spelen. *"Hij moest het snappen,"* zegt Tineke, *"hij noemde wiskunde niet voor niets de hoogste vorm van denken"*.

"Wat ik na mijn pensioen ga doen? Een deel van de tijd onderzoek, en ik heb een sterk vermoeden dat Tineke, mijn vrouw, me meer zal betrekken bij kunst en cultuur, wat voor haar de spil van het bestaan vormt. Verder hebben we sinds kort een kleinkind, een meisje, Eiske, en is me in deeltijd al een baan als oio aangeboden: opa in opleiding. Ik lees wel graag maar ben geen verzamelaar. Mijn werk heb ik altijd als hobby beschouwd. Een groot voorrecht."

Op 16 februari 2011 overleed Jan Verwer aan een hartstilstand, in zijn woonplaats Heiloo. Op 22 februari is hij daar onder grote belangstelling begraven.

Jan zal zeer worden gemist, het meest door zijn vrouw Tineke en kinderen Sophie, Reijer en Barbara. Jans wiskundige vrienden en collega's zullen zich hem blijven herinneren als een uitstekend wiskundige en inspirerend leidinggevende, als een warme persoonlijkheid ook.

Referenties

- 1 K. Dekker and J.G. Verwer, *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, North-Holland (1984). Russian translation in 1988, published by the Russian publishing company MIR.
- 2 W. Hundsdorfer and J.G. Verwer, *Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. **33**, Springer Verlag, 2003. Reprinted April 2007.
- 3 A. Kik en J.G. Verwer, Terugblik op een afwisselend wetenschappelijk CWI-leven, *Personeelsblad Centrum Wiskunde & Informatica*, december 2010.
- 4 Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde, staff.science.uva.nl/~thk/SHOTW

Richard J. Boucherie

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
r.j.boucherie@utwente.nl

Gerard Jeurnink

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
g.a.m.jeurnink@utwente.nl

Floris Olsthoorn

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
florispro@gmail.com

Evenement 47ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2011)

Een nieuwe generatie wiskundigen neemt het roer over

Het 47ste Nederlands Mathematisch Congres vond plaats op de campus van de Universiteit Twente. In het programma was de balans gezocht tussen wiskunde voor de schoonheid van de wiskunde en wiskunde voor de schoonheid van de toepassingen. Richard Boucherie, en Gerard Jeurnink doen verslag, aangevuld met een kritische noot van Floris Olsthoorn.

Het congres werd geopend door de rector van de UT, professor Ed Brinksmā, die onder andere het 16de NMC in Nijmegen memoreerde dat hij als student bijwoonde. Dat congres had op hem een onvergetelijke indruk gemaakt mede door de schitterende, maar voor hem op dat moment totaal onbegrijpelijke lezingen van de hoogleraren Looijenga en De Jongh.

In haar openingsvoordracht laat Sara van de Geer zien hoe we met Lasso en Colt een wiskundig orakel kunnen vangen. Zij onderstreepte verder dat ze het niet erg vond dat het publiek haar presentatie niet tot het einde toe zou begrijpen en citeerde Ed Brinksmā die naar aanleiding van zijn eerste NMC had

aangegeven dat je daarmee prima rector kunt worden. Het congres ontrolde zich verder in een goede sfeer en een verscheidenheid aan presentaties binnen minisymposia, semiplenaire en plenaire lezingen. Arjen Doelman liet zien hoe de woestijn zich in een Hopfdans ontwikkelt aan de rand van de Busse Balloon. Klaas Landsman onderzocht of vrije wil bestaat. Leen Stougie legde zeer helder uit hoe het ook alweer zit met *scheduling*. In een wervelend betoog liet Ionica Smeets zien dat zelfs schijnbare goocheltrucs met een lucifer in de rook van een uitgeblazen kaars de schoonheid van de wetenschap kan vangen. Het vuurwerk van de moderne algorit-

mische getaltheorie werd door Peter Steinhagen in een klassieke lezing op het bord getoetst. Hoe geluk en risico gedeeld kan worden op basis van wiskundige technieken werd mooi geïllustreerd door Hans Schumacher. Rolf Möhring liet zien hoe wiskunde naar de praktijk kan worden gebracht. We moeten dan wel de juiste taal spreken. Voor de praktijk is een probleem geen probleem maar een taak. Pas bij gebruik van de juiste taal luisteren probleem eigenaren naar onze oplossingen. In de slotvoordracht gaf Odo Diekmann een persoonlijk verslag van de ontwikkeling van mathematische biologie in Nederland in de laatste dertig jaar.

Wiskunde uit de Lage Landen

De Brouwerlezing door Kim Plofker werd voorafgegaan door een lezing met animaties van kunstenaar-wiskundige Rinus Roelofs, die zijn publiek boeide met zijn verbluffende schuifstructuren en een optreden van Il Cocodrillo Cante dat afsloot met de Hoofdstellingcantate: een eerbetoon aan de integraalrekening en een daverend applaus ontving van het publiek. Plofker vergeleek in haar lezing de wiskunde van Newton met die van de 14de-eeuwse Indiër Madhava. Newton leidde in een publicatie uit 1669 de oneindige reeks voor de sinusfunctie af op de voor ons bekende manier: met diagrammen en formules. Madhava had die reeks al veel eerder afgeleid, in de 14de eeuw. Maar hij schreef zijn wiskunde op in versvorm, inclusief rijm. Zo wordt het een lastige puzzel om te bepalen wat de tekst nou zegt. Plofker kreeg haar prijs onder andere omdat ze de wiskunde weet te integreren in haar culturele context. Over de



Het koor Il Cocodrillo Cante zingt de Hoofdstelling van de integraalrekening en Kim Plofker ontvangt de Brouwermedaille

toekomst van het vak is Plofker duidelijk: “Het volgende ‘big thing’ zal de Nederlandse wiskunde zijn.” Veel 16de- en 17de-eeuwse wiskunde uit de Lage Landen is in het Nederlands geschreven, onder meer onder invloed van de Vlaamse wiskundige Simon Stevin. Dat werk is daarom buiten het blikveld van buitenlandse onderzoekers gevallen. Plofker verwacht dat die schade de komende tijd zal worden ingehaald.

Ontmoetingsplaats voor nieuwe generatie

Zoals de traditie wil werd een serie minisymposia verzorgd door de wiskundecusters en andere wiskundegemeenschappen. Het was helaas niet mogelijk om alle lezingen bij te wonen. Druk bezocht waren de *elevator-pitches* behorende bij de posters. De jury bestaande uit Ionica Smeets, Peter Steenhagen en Odo Diekmann hebben de best poster awards toegekend aan Jesse Dorrestijn (CWI), Theresia van Essen (UT) en Jan Rozendaal (UL). Ook het in deze editie voor het eerst gehouden MSc-studentensymposium werd goed bezocht. Met acht korte voordrachten lieten de studenten zien welke onderwerpen op verschillende universiteiten aan de orde komen. De Philips Wiskundeprijs voor Promovendi is dit jaar door de jury bestaande uit Ferdinand Verhulst, Chris Klaassen en Jaap Top toegekend aan Julia Mikhal (UT) voor haar voordracht ‘Immersed boundary method for pulsatile flow in cerebral aneurysms’. Het aantal promovendi en studenten onder de ruim 250 deelnemers was groot, mede door het grote aantal programmaonderdelen voor deze groep. Hiermee werd duidelijk dat een nieuwe generatie wiskundigen het NMC ziet als haar ontmoetingsplaats.

Een kritische noot

Voor het eerst was ik als journalist op het NMC, voor het tijdschrift *NWT Magazine*. Zeker voor dat blad, dat in de afgelopen tijd aandacht besteedde aan exotische onderwerpen als Bayesiaanse statistiek, donkere materie en verzamelingenleer, moet het eenvoudig zijn enkele artikelen te schrijven naar aanleiding van het congres. De praktijk viel helaas tegen. Natuurlijk ligt dat deels aan mijn gebrek aan journalistieke ervaring, maar het ligt ook aan de lezingen op het congres die vaak twee essentiële eigenschappen misten: actualiteit en een goed verhaal. Bij een nationaal congres moeten de deelnemers het gevoel krijgen dat het daar gebeurt: daar kom je op de hoogte van de nieuwste, spannende ontwikkelingen in de moderne wiskunde. Zeker bij de eerste plenaire lezing betwijfel ik of het publiek dat gevoel kreeg. Een kwaliteitscontrole van lezingen door de organisatie zou al een hoop helpen. Toch is er genoeg reden om positief te zijn over het NMC. Een deelnemer aan het onderwijsdebat klaagde over het gebrek aan maatschappelijke interesse voor de wiskunde. “Hoeveel van dit congres komt op het achtuurjournaal of in de *NRC*?”, vroeg hij zich retorisch af. Het achtuurjournaal is een beetje teveel gevraagd — hoeveel tijd besteedt het journaal überhaupt aan wetenschap? — maar toch kwam er een stuk over de Brouwerlezing in *NRC Handelsblad*, en voor de website van *NWT Magazine* heb ik een reportage geschreven. Er is genoeg interessants te vertellen over de wiskunde, zoveel maakt het NMC wel duidelijk. Rest alleen nog dat overbrengen op een breed publiek, op zijn minst collega-wiskundigen. *Floris Olsthoorn*

Wiskundeonderwijs

In een dagprogramma voor leraren stonden het beroep van leraar wiskunde en de aansluiting wiskunde van vo naar ho centraal. Een overzicht van zaken waar een vo-docent zoal mee te maken krijgt, de uit Japan overgenomen ‘lesson study’, een kijkje in het zeer geëgeen eerstegraadswiskundetraject bij Fontys Hogescholen, een blik in de keuken van de Belgische wiskundeleraar, waar het ook niet allemaal rozengeur en maneschijn is, en de vernieuwingen in het Nederlandse wiskundeonderwijs in de komende jaren passeerden de revue. Instaptoetsen die in de aansluiting van vo naar ho de afgelopen jaren een belangrijke rol speelden en de vraag of deze toetsen de komende jaren be-

houden moeten blijven was onderwerp van verhitte discussie. Het verhaal van Dirk Tempelaar (Maastricht) stemde niet echt vrolijk omdat hij zelfs stof uit 2-vwo bij moet spijkere ten behoeve van de overstap van vo naar wo. De dag werd afgesloten met een forumdiscussie over de aansluitingsthematiek, die, mede door de deskundige leiding van moderator professor Henk Procee levendig en zinvol was.

Tot slot

NMC 2011 was een goed bezocht congres. Om af te sluiten een vrij citaat van Kim Plofker: “Wiskunde herbergt haar eigen geschiedenis.”



Federica Pasquotto

Afdeling Wiskunde
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
pasquott@few.vu.nl

Onderzoek

Een korte geschiedenis van het vermoeden van Weinstein

Een heel natuurlijke en fundamentele vraag (vanuit historisch en wiskundig perspectief) is die van het bestaan van periodieke banen van Hamiltoniaanse stromingen op bepaalde energieoppervlakken. In 1978 vermoedde Alan Weinstein dat een meetkundige eigenschap van het desbetreffende energieniveau een voldoende voorwaarde zou zijn om het bestaan van zulke banen te bewijzen. Hij noemde oppervlakken met deze eigenschap contacttypeoppervlakken. Federica Pasquotto beschrijft in dit artikel in het kort de geschiedenis van het vermoeden van Weinstein, dat een van de belangrijkste krachten achter de ontwikkeling van de symplectische meetkunde aan het eind van de twintigste eeuw is en de achtergrond oplevert voor enkele van de meest vruchtbare interacties tussen analyse, meetkunde en topologie. Het vermoeden van Weinstein is in een aantal belangrijke gevallen bewezen, maar blijft, in zijn algemene formulering, een buitengewoon interessant en uitdagend openstaand probleem.

Veel belangrijke fysische fenomenen worden beschreven door de oplossingen van een systeem van Hamiltoniaanse differentiaalvergelijkingen. In hun bekendste vorm zien de Hamiltonvergelijkingen er als volgt uit:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Hierin is H de energiefunctie en zijn p en q vectoren van dezelfde dimensie: in het geval van de beweging van een planeet of een deeltje stellen deze vectoren respectievelijk snelheid en positie van het bewegende object voor. Dankzij het principe van behoud van energie liggen oplossingen op een bepaald energieniveau, dat wil zeggen een niveauverzameling van de energiefunctie.

Onder de eerste conservatieve systemen waarnaar in de loop der geschiedenis veel belangstelling is uitgegaan en die uitgebreid zijn

onderzocht, zijn de systemen die de bewegingen beschrijven van planeten, sterren en andere astronomische objecten. Het is daarom niet verrassend dat de vraag of er periodieke oplossingen (of banen) van zulke systemen bestaan op een natuurlijke manier ontstond en heel snel een centrale rol ging spelen in de Hamiltoniaanse mechanica. Vanuit een mathematisch perspectief zijn oplossingen die periodiek gedrag vertonen heel belangrijk, want juist deze oplossingen komen overeen met de stationaire punten van een bepaalde functionaal, de *actie*.

Symplectische meetkunde biedt ons het geschikte wiskundige formalisme om deze systemen te bestuderen en speelt daarom een grote rol in de zoektocht naar periodieke banen. Symplectische structuren verschenen voor het eerst in verband met klassiek mechanische systemen, maar zij maken het ook mogelijk om de studie van Hamiltoniaanse sys-

temen voorbij de grenzen van de standaard euclidische ruimte uit te breiden, naar ruimtes met niet-triviale meetkunde en topologie (bijvoorbeeld met kromming en gaten). Het vermoeden van Weinstein introduceert een voldoende voorwaarde die leidt tot existentie van periodieke banen op een bepaald energieoppervlak: deze voorwaarde wordt uitgedrukt in termen van de meetkunde van het energieoppervlak en door middel van de symplectische structuur waarmee de omliggende faseruimte is uitgerust. Dit vermoeden heeft de relatie tussen Hamiltoniaanse dynamica en symplectische meetkunde nogmaals versterkt en het heeft, in de laatste dertig jaar, veel bijgedragen aan de ontwikkeling van de symplectische meetkunde. (Alan Weinstein is hoogleraar aan de University of California, Berkeley. Hij heeft in 2003 een eredoctoraat van de Universiteit Utrecht ontvangen.)

De technieken en resultaten waarover we tegenwoordig beschikken (en die ik hieronder zal bespreken) hebben betrekking op energieniveaus die begrensd zijn (*compact*). In de praktijk ontstaan onbegrensde energieoppervlakken op heel natuurlijke wijze. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de volgende vergelijking (de Fisher–Kolmogorov vergelijking):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(u).$$

Deze vergelijking kan voor verschillende keu-

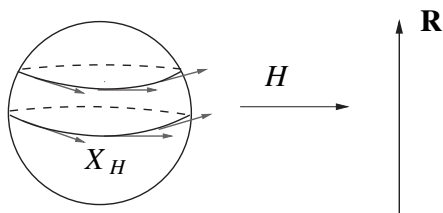
zes van α en F onder andere de volgende fysische fenomenen beschrijven: watergolven in ondiep water, pulsgoedgave in optische vezels, geologische plooing van steenlagen. Tijdsafhankelijke oplossingen van deze vergelijking voldoen aan

$$u'''' - \alpha u'' + F(u) = 0.$$

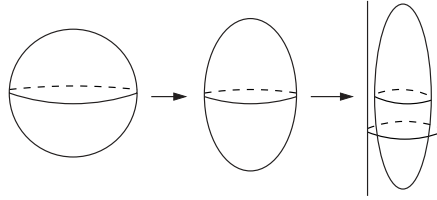
Deze vergelijking kan vervolgens als Hamiltonvergelijking worden geformuleerd en leidt tot een systeem met onbegrensde energieniveaus. Het vermoeden van Weinstein voor onbegrensde energieniveaus is tot nu toe vrijwel ononderzocht gebleven. Samen met collega's van de Vrije Universiteit probeer ik meer licht te werpen op dit aspect van het probleem, met behulp van een meetkundig-topologische aanpak. Met ons onderzoek hopen we ook de interesse voor deze variant van het vermoeden van Weinstein binnen de wiskundige gemeenschap te vergroten.

Symplectische meetkunde

Laten we een variëteit beschouwen: denk aan een bol of een hyperoppervlak. Om te beginnen zijn we geïnteresseerd in de *topologie* van de variëteit ('rubbermeetkunde'). Op een gegeven moment zullen we ook wat aanvullende structuur willen invoeren: een Riemannstructuur (of metriek) g , bijvoorbeeld, schrijft voor elk punt een manier voor om twee raakvectoren met elkaar te vermenigvuldigen en een getal hieruit te krijgen (een *in-product*). Deze bewerking is symmetrisch en geeft ons de begrippen afstand, lengte en hoeken. Als we een systeem van Hamilton-differentiaalvergelijkingen beschouwen, zoals hierboven, kunnen we met de energiefunctie H een vectorveld associëren, dat richting en snelheid van de oplossingen van het systeem in elk punt aangeeft. In dimensie 2 is een volumevorm hiervoor voldoende, in hogere dimensies hebben we een 2-vorm nodig, waarvan het n -voudige uitproduct een volumevorm oplevert: de 2-vorm wordt dan een *symplectische vorm* genoemd en de integraal van de desbetreffende volumevorm heet



Figuur 1 De tweedimensionale bolschijl met het snelheidsveld X_H geassocieerd met de 'hoogte'-functie door de standaard volumevorm. De energieniveaus zijn de meridianen op de bol



Figuur 2 Een $2n$ -dimensionale bol kan op volumebehoudende wijze in een cilinder met kleinere straal worden samengeperst, maar niet op symplectische wijze

symplectisch volume. Een dergelijke *symplectische structuur* (of vorm) ω definieert een antisymmetrisch product van vectoren: dit wordt noodzakelijkerwijs nul op alle 1-dimensionale deelruimtes, zodat we in plaats van 1-dimensionale juist 2-dimensionale afmetingen hebben. Als er aan geschikte voorwaarden is voldaan (zoals convexiteit), heeft het energieoppervlak ook een speciale structuur, die een *contactstructuur* heet. Zie Figuur 1.

Terwijl elk compact en oriënteerbaar oppervlak een volumevorm toelaat, is in hogere dimensie niet elke variëteit symplectisch. De dimensie van de variëteit moet even zijn, maar deze voorwaarde is lang niet voldoende: sferen van een dimensie groter dan twee zijn niet symplectisch. Een symplectische vorm is in het algemeen een veel rijker object dan een volumevorm. Gromov maakte dit punt duidelijk met zijn Non-Squeezing Theorem (ook bekend als de *Stelling van de Symplectische Kameel*) [2]; zie ook Figuur 2. Basisvoorbeelden van symplectische variëteiten zijn:

- De euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$, met coördinaten $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ en de standaard symplectische vorm

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Dit voorbeeld is ook *universeel*: na een geschikte keuze van lokale coördinaten geeft het een model voor de omgeving van een willekeurige punt in een symplectische variëteit van dimensie $2n$.

- De coraakbundel van een Riemann variëteit heeft een symplectische structuur: deze ruimte kunnen we ons voorstellen als de *faseruimte* van een Hamiltoniaans dynamisch systeem; de Riemannse variëteit speelt dan de rol van de *configuratiaruimte*.

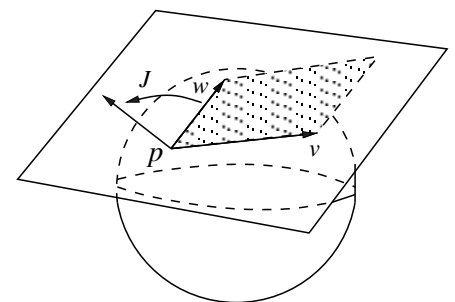
Symplectische meetkunde kunnen wij ook beschouwen als een meer flexibele versie van complexe meetkunde. (Volgens Taubes is het woord *symplectisch* voor het eerst door Weyl gebruikt, die in *complex* de Griekse door de

Latijnse stam verving. Gedurende een reis naar Azië heeft mijn collega Klaus Niederkrüger ontdekt dat het Chinese karakter voor symplectisch ook 'scherp, pittig' betekent, zodat symplectische meetkunde, ten minste in China, 'pittige meetkunde' is!) Om een aantal begrippen verder te verklaren, kunnen we naar oppervlakken kijken, die altijd én een metriek én een symplectische structuur toelaten: gegeven twee raakvectoren v en w meet de metriek g de lengte van de vectoren en de tussenliggende hoek. De symplectische vorm ω meet de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de twee vectoren. We kunnen een andere operatie op vectoren invoeren en met J aangeven, die raakvectoren met $\pi/2$ tegen de klok in laat draaien en hiermee het begrip van complexe vermenigvuldiging voor vectoren definieert (zie Figuur 3). Omdat deze rotatie alle hoeken, lengtes en oppervlakken invariant laat, wordt J *compatibel* genoemd met de metriek en de symplectische vorm. Het verband tussen g , ω en J is

$$\omega(v, Jw) = g(v, w).$$

In hogere dimensies vinden we op de raakbundel van elke symplectische variëteit nog steeds een complexe structuur (deze heet een *bijna-complexe* structuur op de variëteit), die complexe vermenigvuldiging voor raakvectoren definieert. In het bijzonder kunnen wij zo een structuur vinden die *compatibel* is met de symplectische structuur, in de zin dat wij de twee structuren kunnen combineren, zoals hierboven, om een Riemann-metriek te krijgen.

Een complexe structuur op de variëteit zelf, dat wil zeggen een systeem van lokale complexe coördinaten met holomorfe transitieafbeeldingen, induceert op canonieke wijze een bijna-complexe structuur: een symplectische variëteit die een compatibele bijna-complexe structuur van deze vorm toestaat



Figuur 3 De raakruimte in het punt p bestaat uit snelheidsvectoren van krommen die op het oppervlak liggen en door p gaan. Dankzij g , ω en J kunnen we zinvol spreken van lengtes, hoeken, oppervlakten en complexe vermenigvuldiging

wordt een *Kähler-variëteit* genoemd. Lang niet elke bijna-complexe structuur ontstaat op deze manier: Kähler-variëteiten vormen dus een strikte deelverzameling van alle symplectische variëteiten en zijn belangrijke objecten in de algebraïsche meetkunde (alle gladde projectieve variëteiten, bijvoorbeeld, zijn Kähler-variëteiten).

Een echte revolutie in de symplectische meetkunde werd voortgebracht door het besef dat krommen in een symplectische variëteit, waarvan de differentiaal complex lineair is ten opzichte van een compatibele bijna-complexe structuur (*pseudoholomorfe* of *J-holomorfe krommen*), bijna zo goed zijn als echte holomorfe krommen in een algebraïsche variëteit. De basis voor deze revolutie werd gelegd door Gromov in zijn beroemde artikel uit 1985 [2], en Floer zette de revolutie door: hij gebruikte *J-holomorfe krommen* technieken in zijn veelgeprezen bewijs van het *vermoeden van Arnold* [1].

Periodieke banen

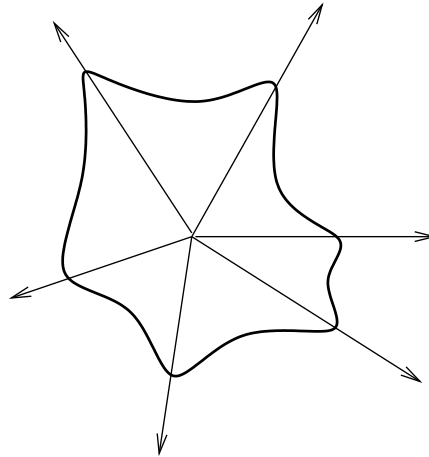
Gegeven een symplectische variëteit (M, ω) kunnen we door middel van de symplectische vorm een isomorfisme definiëren tussen vectorvelden en 1-vormen. Onder dit isomorfisme corresponderen exacte 1-vormen met Hamiltoniaanse vectorvelden: voor een gladde functie $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ wordt het Hamiltoniaanse vectorveld X_H bepaald door de identiteit $\omega(X_H, -) = -dH$. Men is geïnteresseerd in het bestaan van oplossingen van het systeem van geassocieerde differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x}(t) = X_H(x(t)),$$

waarbij $x : I \rightarrow M$ een pad in M is. In de klassieke mechanica wordt de standaard symplectische euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$ beschouwd, waardoor $x(t)$ als $(p(t), q(t))$ kan worden geschreven en het Hamiltoniaan vectorveld de bekende vorm

$$X_H(p, q) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)$$

heeft. De allerbelangrijkste opmerking hierbij is dat het bestaan van oplossingen van deze vergelijkingen op een regulier energieniveau volledig bepaald wordt door het onderliggende oppervlak en de symplectische structuur, en onafhankelijk is van de functie H . Met andere woorden: als H en G twee verschillende energiefuncties zijn die S als regulier niveau hebben, dan komen X_H en X_G op een repa-



Figuur 4 Een stervormig hyperoppervlak is in elke punt transversaal op een radiale stroming

rametrisatie na overeen en hebben daarom dezelfde integraalkrommen (=banen). (In de taal van de differentiaalmeetkunde zijn deze twee vectorvelden secties van de zogenoemde *karakteristieke lijnbundel*, die gedefinieerd wordt als kern van de beperking van de symplectische vorm tot S .)

De vraag die enkele van de meest interessante recente ontwikkelingen in de Hamiltoniaanse dynamica in gang heeft gezet, is die van het bestaan van *periodieke* oplossingen van $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$ op een bepaald energieniveau S . Onafhankelijkheid van de specifieke keuze van Hamiltoniaan H betekent dat het zinvol is om de vraag als volgt te stellen: gegeven (M, ω) en S , heeft S periodieke banen?

Naar existentie van periodieke banen is veel onderzoek verricht, door bijvoorbeeld Poincaré, Lyapunov, Moser, Weinstein en vele andere. Deze resultaten zijn echter lokaal van karakter, terwijl ons doel is om globale periodieke banen te vinden: daarom noemen wij hier alleen het pionierswerk van Lyapunov over de continuering van normal modes [4].

De eerste belangrijke globale existentiële resultaten werden bewezen door Rabinowitz en Weinstein voor het geval van stervormige, respectievelijk convexe hyperoppervlakken in de standaard symplectische euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$. De stelling van Rabinowitz ([5]) luidde: elk stervormig hyperoppervlak in de standaard symplectische euclidische ruimte $\mathbb{R}^{2n}$ heeft een periodieke baan.

Omdat stervormig een heel beperkende voorwaarde is, probeerde men natuurlijk de essentiële meetkundige eigenschappen van deze klasse van hyperoppervlakken op te sporen. De volgende opmerking wijst al in de juiste richting: als $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ stervormig is, dan is S in alle punten transversaal op de

stroming van het vectorveld

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial}{\partial q_i} \right).$$

Zie ook Figuur 4. Transversaliteit betekent dat in elk punt x van het oppervlak de vector $Y(x)$ niet in de raakruimte aan het oppervlak in dat punt ligt. Bovendien wordt ω_0 door de stroming van Y bewaard op een exponentiële term na (in andere woorden, het symplectische volume is stijgend langs de stroming).

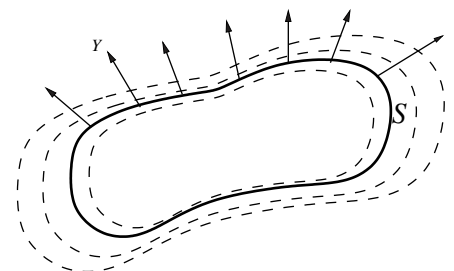
Het vermoeden van Weinstein

Een dergelijke opmerking heeft Weinstein waarschijnlijk geïnspireerd om het concept *contacttype* hyperoppervlak in te voeren. Dit is een generalisatie van convex en stervormig tegelijk, die invariant is onder transformaties die de symplectische structuur behouden (*symplectische transformaties*). Een compact hyperoppervlak S in een symplectische variëteit (M, ω) wordt *contacttype* genoemd als er een vectorveld Y bestaat, gedefinieerd in een omgeving van S en in alle punten van S transversaal op S , met de eigenschap dat $\mathcal{L}_Y \omega = \omega$. Hierin is $\mathcal{L}_Y$ de Lie-afgeleide in de richting van Y en voor de stroming ϕ_t van Y volgt er dat $\phi_t^* \omega = e^t \omega$. Een vectorveld met deze eigenschap heet een *Liouville-vectorveld*. Zie Figuur 5.

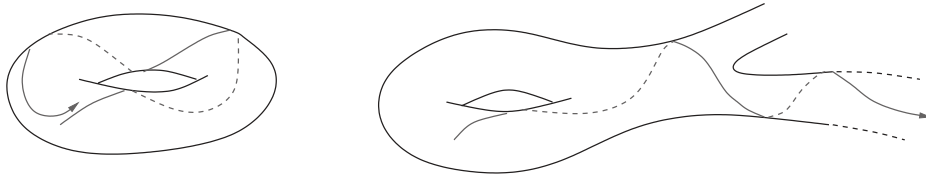
Op basis van dit inzicht kon Weinstein in [9] ook zijn beroemde vermoeden formuleren:

Vermoeden van Weinstein (1978). *Elk contacttype hyperoppervlak heeft een periodieke baan.*

Kenmerkend voor contacttype oppervlakken — en een goede indicatie dat contacttype een geschikte voorwaarde is om het bestaan van periodieke banen aan te tonen — is het feit dat er altijd een 1-parameter-familie van zulke hyperoppervlakken bestaat die dezelf-



Figuur 5 De stroming van het Liouville-vectorveld geeft een *foliatie*, dat wil zeggen een opdeling van een omgeving van S in 'bladeren' die gladde hyperoppervlakken zijn, alle diffeomorf met S : de dynamica is dezelfde op elk hyperoppervlak (bijna-bestaan $\Rightarrow$ bestaan)



Figuur 6 Op begrensde energieoppervlakken is bijna elke baan recurrent, terwijl op onbegrensde niveaus de recurrentie stelling van Poincaré niet meer van toepassing is en banen 'naar oneindig' kunnen wegllopen

de dynamica delen. Dus als S een contacttype hyperoppervlak is en we kunnen aantonen dat er een periodieke baan bestaat die voldoende dicht bij S ligt, dan volgt automatisch dat S zelf een periodieke baan heeft. Merk op dat, dankzij de onafhankelijkheid van dit probleem van de keuze van Hamiltonfunctie, wat we hier verstaan onder 'dynamica' de ontwikkeling in tijd is van het systeem geassocieerd met een willekeurige functie H die S als reguliere niveauverzameling heeft.

In 1986 bewees Viterbo het vermoeden van Weinstein voor compacte hyperoppervlakken in $\mathbb{R}^{2n}$ [8]. In zijn bewijs gebruikt hij de vrijheid om een geschikte Hamiltonfunctie te kiezen en identificeert hij periodieke oplossingen van het desbetreffende systeem van vergelijkingen met kritieke punten van een functionaal (de 'actie') gedefinieerd op de vrije lusruimte van de variëteit. Ondanks dat *niet-compacte* hyperoppervlakken heel natuurlijk ontstaan als energieoppervlakken (problemen met een hogere orde Lagrangiaan, singulaire potentialen, geodeten in een ruimte met Lorentzmetriek...), is het resultaat van Viterbo niet meer geldig als we de aanname van compactheid laten vallen. Het is hoogstwaarschijnlijk intuïtief duidelijk dat het bestaan van periodieke banen op niet-compacte hyperoppervlakken een moeilijker probleem is dan op compacte energieniveaus. *Poincaré's recurrentie stelling* geeft deze intuïtie een nauwkeurige wiskundige uitdrukking, door te beweren dat bijna elke baan op een compact energieoppervlak uiteindelijk willekeurig dicht bij zijn beginpunt terugkomt. Zie Figuur 6.

In [7] lukte het ons om een aantal geometrische en topologische voorwaarden te formuleren die leiden tot een bewijs van het vermoeden van Weinstein voor het geval van niet-compacte *mechanische hyperoppervlakken* in $\mathbb{R}^{2n}$, dat wil zeggen hyperoppervlakken die als energieniveau ontstaan van Hamiltonianen die bestaan uit kinetische en potentiële energie. Deze voorwaarden impliceren in het bijzonder dat de oppervlakken van contacttype moeten zijn. Ons resultaat geldt bijvoorbeeld in het geval van asymptotisch kwadratische potentiële energie.

Contactvariëteiten en Reeb-dynamica

Als eerstvolgende stap in de richting van verdergaande generalisatie van de resultaten voor periodieke banen, begon men aandacht te schenken aan de eigenschappen van hyperoppervlakken van contacttype die onafhankelijk kunnen worden beschouwd van een bepaalde inbedding in een symplectische variëteit. Als S een hyperoppervlak is van contacttype en Y een Liouville-vectorveld voor S , dan heet de kern van de 1-vorm λ gedefinieerd door $\lambda(-) = \omega(Y, -)$ een *contactstructuur* op S . De kern van $d\lambda$ is 1-dimensionaal en daarom kan op een eenduidige manier een vectorveld X_λ worden gedefinieerd (het *Reeb-vectorveld*) als voortbrenger van deze kern, genormaliseerd zodat $\lambda(X_\lambda) = 1$. De periodieke banen van het Hamiltoniaanse vectorveld op S komen overeen met de periodieke banen van het Reeb-vectorveld en het vermoeden van Weinstein voor hyperoppervlakken van contacttype kan daarom worden geherformuleerd als een vermoeden over het bestaan van periodieke banen van de Reeb-stroming op een *contactvariëteit*.

Intrinsieke versie van het vermoeden van Weinstein. *Voor elke gesloten variëteit van oneven dimensie N met contactvorm λ heeft het Reeb-vectorveld een periodieke baan.*

In deze (meer algemene) vorm is het vermoeden tot nu toe alleen voor gesloten,

3-dimensionale variëteiten bewezen, een indrukwekkend resultaat van Taubes [6].

Stelling (Taubes, 2007). *Het vermoeden van Weinstein geldt voor alle gesloten 3-dimensionale variëteiten.*

Eerdere belangrijke resultaten zijn te danken aan Hofer, die in [3] het vermoeden voor de 3-dimensionale sfeer bewees (en in feite voor elke *overtwisted* contact 3-variëteit).

Stelling (Hofer, 1993). *Het vermoeden van Weinstein geldt voor de 3-sfeer S^3 .*

Het bewijs van Hofer is gebaseerd op zogenaamde *J-holomorfe krommen* (of pseudo holomorfe krommen).

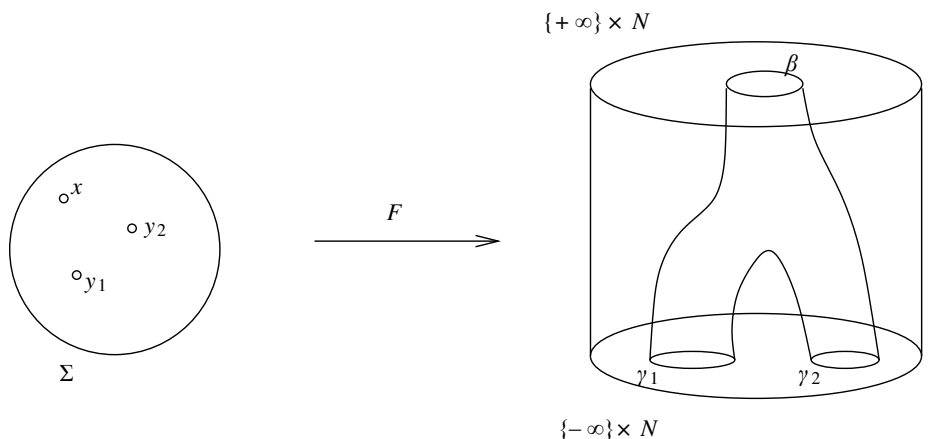
J-holomorfe krommen

Als J een bijna-complexe structuur is op een variëteit M , dan geeft dit ons het begrip van complexe vermenigvuldiging voor raakvectoren: $J^2v = -v$ voor elke raakvector v aan M . Lokaal ziet zo'n structuur eruit als de standaard bijna-complexe structuur $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ op $\mathbb{R}^{2n}$ (als wij $\mathbb{R}^{2n}$ met $\mathbb{C}^n$ identificeren, is dit gewoon het product met de imaginaire eenheid i).

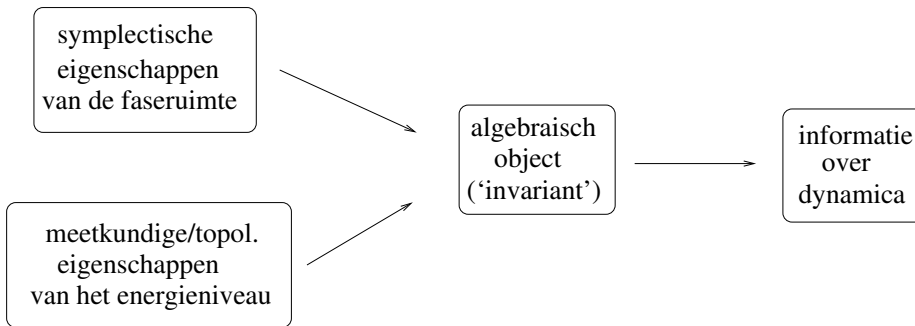
Als Σ een Riemann-oppervlak met holomorfe structuur j is, dan heet een afbeelding $u : \Sigma \rightarrow M$ een *J-holomorfe kromme* als zijn differentiaal complex lineair is: $du \circ j = J \circ du$. Op het niveau van raakruimtes betekent dit dat voor elke $x \in \Sigma$ het diagram hieronder commutatief is:

$$\begin{array}{ccc} T_x \Sigma & \xrightarrow{j_x} & T_x \Sigma \\ \downarrow du(x) & & \downarrow du(x) \\ T_{u(x)} M & \xrightarrow{J_{u(x)}} & T_{u(x)} M \end{array}$$

Als we du ontleden in zijn complex-lineaire



Figuur 7 Een *J*-holomorfe sfeer met 3 'punctures' in de symplectisatie van de contact-variëteit N



Figuur 8 Schematische weergave van de werking van homologietheorieën

en anti-lineaire delen, dan zien we dat u J -holomorf is dan en slechts dan als het anti-lineaire deel nul is:

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \cdot du \cdot j) = 0.$$

Door holomorfe lokale coördinaten $z = s + it$ voor Σ te kiezen, kunnen wij dit uitdrukken als

$$\partial_s u + J(u)\partial_t u = 0$$

en op deze manier, voor $\mathbb{C}^n$ met bijna-complexe structuur gegeven door vermenigvuldiging met i , vinden we de standaard Cauchy–Riemann vergelijkingen terug, voor afbeeldingen $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Dit verklaart waarom de vergelijkingen van J -holomorfe krommen vaak ook *verstoorde Cauchy–Riemann vergelijkingen* worden genoemd.

Gegeven een contactvariëteit (N, λ) is de *symplectisatie* van N de variëteit $M = \mathbb{R} \times N$ met symplectische vorm $\omega = d(e^t \lambda)$, waarbij t de $\mathbb{R}$ -coördinaat is. Het bovengenoemde resultaat van Hofer, het bewijs van het vermoeden van Weinstein voor de 3-sfeer, is op het volgende idee gebaseerd: voor een geschikte compatibele bijna-complexe structuur J kij-

ken wij naar J -holomorfe krommen in $\mathbb{R} \times N$; dat wil zeggen, wij beschouwen J -holomorfe afbeeldingen

$$F : (\Sigma, j) \longrightarrow (\mathbb{R} \times N, J)$$

waarbij Σ nu een gesloten Riemann-oppervlak is, met een eindig aantal gaten ('punctures'). Figuur 7 geeft een indruk van hoe een dergelijke afbeelding eruit zou kunnen zien.

Onder bepaalde geschikte aannames, bijvoorbeeld *eindige energie*, convergeert het beeld van F rond elk gat asymptotisch (voor $t \rightarrow +\infty$ of $-\infty$) naar een cilinder over een periodieke Reeb-baan van N . Op deze manier kunnen we uit een existentieresultaat voor oplossingen van de Cauchy–Riemann vergelijkingen met storingsterm (een systeem dus van partiële differentiaalvergelijkingen) een existentieresultaat afleiden voor periodieke oplossingen van een gewone differentiaalvergelijking. Op het eerste gezicht lijkt dit misschien niet de meest natuurlijke manier om het probleem te benaderen (een partiële in plaats van een gewone differentiaalvergelijking onderzoeken maakt het leven meestal niet makkelijker!). Toch heeft het zich bewezen als een heel efficiënte methode, die in

staat is bepaalde moeilijkheden te overwinnen die andere methodes onbruikbaar maken.

Terwijl in het werk van Hofer oplossingen voor de verstoorde Cauchy–Riemann vergelijkingen worden geconstrueerd met directe, ad-hocmethodes, is op de achtergrond de laatste jaren een homologietheorie verschenen. Met oneindig-dimensionale Morse-theorie als model kunnen we aan elke contactvariëteit een algebraïsch object associëren (een ring of een algebra) dat de periodieke Reeb-banen als voortbrengers heeft, modulo een aantal relaties die kunnen worden bepaald door te kijken naar J -holomorfe krommen die deze banen in de symplectisatie van N verbinden (in feite kunnen wij deze krommen 'tellen'). Als dit algebraïsche object niet identiek aan nul is, dan moet S een periodieke baan hebben. Heel schematisch kunnen we deze homologietheorieën beschouwen als uitkomst van een grote 'gereedschapskist' (met veel harde analyse en meetkunde als inhoud), dat de geometrische en topologische informatie over een bepaald energieniveau S en zijn contactstructuur verandert in een algebraïsch object, dat ons vervolgens iets kan vertellen over de dynamica op S . Zie Figuur 8.

Deze methode heeft zich in de afgelopen jaren enorm ontwikkeld en begint nu ook heel goed te werken in het geval van compacte contactvariëteiten. Het blijft echter een uitdaging om de methode te laten werken voor niet-compacte energieoppervlakken: dit onderwerp heeft tot nu toe weinig tot geen aandacht gekregen. Desondanks is het ontzettend interessant, zowel vanuit het oogpunt van de wiskunde als vanuit het oogpunt van de dynamica en de toepassingen in de dynamica. ←

Referenties

- 1 A. Floer, *Symplectic fixed points and holomorphic spheres*, Comm. Math. Phys. **120** (1989), no. 4, 575–611. MRMR987770 (90e:58047)
- 2 M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- 3 H. Hofer, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. **114** (1993), no. 3, 515–563. MRMR1244912 (94j:58064)
- 4 A.M. Lyapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Ann. Sc. Fac. Toulouse **2** (1907), 203–474.
- 5 P.H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 2, 157–184. MR0467823 (57 #7674)
- 6 C.H. Taubes, *The seiberg-witten equations and the weinstein conjecture*, Geom. Topol. **11** (2007), 2117–2202.
- 7 J.B. van den Berg, F. Pasquotto, en R.C. Vanderhorst, *Closed characteristics on non-compact hypersurfaces in $\mathbb{R}^{2n}$* , Math. Ann. **343** (2009), no. 2, 247–284. MRMR2461255
- 8 C. Viterbo, *A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbb{R}^{2n}$* , Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **4** (1987), no. 4, 337–356.
- 9 A. Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems*, J. Differential Equations **33** (1979), no. 3, 353–358. MRMR543704 (81a:58030b)

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009

Opties prijzen met storingsrekening

De formules waarmee banken de prijs van een optie berekenen, zijn lastig zo niet onmogelijk om exact en snel op te lossen. Sinds kort wordt storingsrekening, bekend uit de toegepaste wiskunde en natuurkunde, gebruikt om snel benaderende oplossingen te vinden. De Rabobank vroeg de Studiegroep Wiskunde met de Industrie om te onderzoeken of met storingsrekening een hybride model voor optieprijsen opgelost kan worden.

Deelnemers van de studiegroep

Tasnim Fatima (TU/e)

Lech Grzelak (TUD)

Harrie Hendriks (RU)

Simone Munao (VU)

Adrian Muntean (TU/e)

Martin van der Schans (UL)

Wie een aandeel van een bedrijf koopt, koopt eigenlijk een klein stukje van dat bedrijf. De koper hoopt dat de waarde van het bedrijf gaat toenemen, waardoor ook zijn eigen aandeel in waarde gaat stijgen. Zo maakt de koper winst op zijn investering, en hopelijk meer dan hetzelfde geld op de bank aan spaarrente zou hebben opgeleverd. Een optie is een iets ingewikkelder financieel product dan een aandeel. Wie een optie koopt, koopt het recht om tegen een vooraf bepaalde prijs, en aan het einde van een vooraf afgesproken periode (variërend van maanden tot jaren), een

bepaald aandeel op de financiële markt te kopen (call-optie) of te verkopen (put-optie). Voor dit recht betaalt de optie koper een bedrag aan degene die het recht verleent.

Stel dat een bepaald aandeel vandaag 40 euro kost en dat je een call-optie koopt die je het recht geeft om over een jaar hetzelfde aandeel voor 45 euro te kopen. Stel, dat de koers over een jaar 50 euro is, dan kun je het aandeel zoals afgesproken voor 45 euro kopen. Als je het dan meteen verkoopt, heb je een winst van 5 euro behaald, minus de kosten voor het kopen van de call-optie. De waarde van de optie voor het einde van de looptijd hangt dus af van de verwachte ontwikkeling van de aandelenprijs.

Banken zoeken naar rekentechnieken om optieprijsen te berekenen. De verwachte ontwikkeling van de aandelenprijs hangt zelf weer op een stochastische wijze af van drie belangrijke parameters: de huidige prijs van het aandeel, de rente en de volatiliteit, ofwel de beweeglijkheid van een bepaald aandeel.

Hoe meer de waarde van een aandeel in de loop van de tijd schommelt, hoe groter de volatiliteit. En hoe groter de volatiliteit, hoe groter het risico van een investering in dat aandeel. Stabiele beursfondsen hebben een vrij lage volatiliteit. Instabiele beursfondsen hebben een hoge volatiliteit. De optieprijs is verder ook nog afhankelijk van de rente. Immers: hoe hoger de rente, hoe aantrekkelijker het is om je geld op een spaarrekening te zetten in plaats van te beleggen in aandelen of opties.

Zowel de ontwikkeling van de rentestand als die van de volatiliteit is niet van tevoren bekend, en moeten dus geschat worden. In de afgelopen decennia zijn oplossingen gevonden voor verschillende eenvoudige versies van het oorspronkelijke probleem om de waarde van opties te berekenen. In het veel toegepaste Black-Scholes-model uit 1973, worden zowel de rente als de volatiliteit constant in de tijd verondersteld. Dat heeft als grote voordeel dat de optieprijs uitgedrukt kan worden in een formule die snel en relatief eenvoudig kan worden opgelost. Het realistischere Heston-model uit 1993 gaat een stap verder dan het Black-Scholes-model door aan te nemen dat de volatiliteit willekeurig in de tijd varieert. De rentestand wordt wel nog steeds constant verondersteld.

Hybride model

“De volgende logische stap is om ook de rente te laten variëren”, vertelt wiskundige Lech Grzelak. Grzelak is bezig aan een promotieonderzoek in de financiële wiskunde. Vier dagen per week werkt hij bij de Rabobank, die zijn promotieonderzoek financiert, en een dag per week bij de TU Delft. “De waarde van een optie wordt dan afhankelijk van drie stochastische processen, namelijk die voor het aandeel, de volatiliteit en de rente”, vertelt Grzelak. “Een extra complicatie is dat de rente en de volatiliteit van elkaar afhankelijk zijn. Zo’n model heet een hybride model.”

Sinds een aantal jaren wordt storingsrekening gebruikt in de financiële wiskunde om problemen op te lossen die met andere methoden te moeilijk te kraken zijn. Storingsrekening, of *perturbation method* in het Engels, wordt veel toegepast in de natuurkunde en de scheikunde. Deze methode wordt gebruikt om benaderende oplossingen te vinden van differentiaalvergelijkingen. Zo’n benaderende oplossing wordt wiskundig opgeschreven als een som van opeenvolgende termen, waarbij elke volgende term minder belangrijk is dan de vorige. De eerste term is de oplossing van een eenvoudiger probleem dat wel een exacte oplossing heeft. De volgende termen worden uitgedrukt in een of meer kleine parameters die in het gegeven probleem een belangrijke rol spelen. Hoe gedetailleerder je de oplossing wilt weten, hoe meer termen je moet meenemen en hoe langer de berekening duurt.

“Onze vraag aan de studiegroep was om te onderzoeken of storingsrekening gebruikt kan worden om een hybride model voor optieprijzen op te lossen”, zegt Grzelak.

Limietgevallen

Wiskundige Martin van der Schans werkte samen met vier collega’s aan het Rabobankprobleem. “We realiseerden ons dat het om een veel bestudeerd probleem gaat dat we onmogelijk in een week konden oplossen. We moesten dus zorgen dat we niet te veel hooi op onze vork zouden nemen.”

De wiskundigen bestudeerden eerst het werk van een andere groep wiskundigen, die in 2007 tijdens de Studieweek Wiskunde met de Industrie in opdracht van ING een oplossing hadden gezocht van het Heston-model. “Dat is een eenvoudiger probleem,” aldus Van der Schans, “omdat van de drie stochastische processen — aandeelprijs, volatiliteit en rente — alleen de afhankelijkheid tussen aandeelprijs en volatiliteit wordt meegenomen. De andere twee van de drie correlaties veron-

derstel je 0. In ons hybride model nemen we twee van de drie correlaties mee, die tussen aandeel en volatiliteit en die tussen rente en volatiliteit.”

De wiskundigen vonden vervolgens in de wetenschappelijke literatuur verschillende manieren om dit hybride probleem aan te pakken. Uiteindelijk vonden ze een aanknopingspunt in een model dat het gedrag van de volatiliteit splitst in een langzaam en een snel proces. Van der Schans: “Het model dat wij wilden oplossen, leek op hun model. Deels konden we hun resultaten gebruiken, en deels hebben we daar onze eigen aanpak aan toegevoegd. De drie gekoppelde vergelijkingen voor de aandeelprijs, de volatiliteit en de rente konden we formuleren als een partiële differentiaalvergelijking, waarin twee kleine parameters voorkomen: ε en δ .”

De optieprijs kan dan worden uitgedrukt als een som van termen. De eerste term is de exact bekende oplossing van de Black-Scholes-vergelijking. De tweede term wordt uitgedrukt in de kleine parameter δ en de oplossing van het in de literatuur gevonden model. De derde term wordt uitgedrukt in de kleine parameter ε en een term die de wiskundigen zelf moesten uitrekenen.

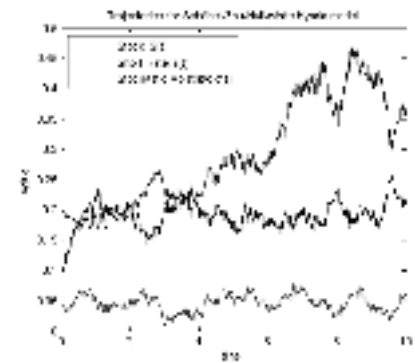
“Om die termen uit te rekenen”, vertelt Van der Schans, “hebben we de limietgevallen bekeken waarin of ε of δ naar 0 gaan. Elk van die limietgevallen levert een partiële differentiaalvergelijking waarvoor we de algemene oplossing hebben bepaald. In de praktijk zal de bank die oplossingen numeriek moeten uitrekenen. Maar onze cruciale toevoeging is dat we de formules die wij hebben afgeleid sneller kunnen oplossen dan wanneer we zouden proberen de oorspronkelijke partiële differentiaalvergelijking numeriek op te lossen. De winst van het gebruiken van verstoringstheorie zit dus in de snelheid waarmee je een vrij goede, maar benaderende oplossing vindt.”

Hiermee heeft de studiegroep een eerste stap gedaan in het toepassen van verstoringstheorie op het hybride model. “Maar er moet nog wel wat extra werk worden gedaan wil Rabobank deze aanpak kunnen toepassen”, zegt Van der Schans. “Zo moet de benaderende oplossing worden gekalibreerd aan de marktdata. Stel dat de benadering niet nauwkeurig genoeg blijkt te zijn, dan is het nodig om hogere-orde termen te berekenen.”

Nieuwe wegen

“We gaan met de resultaten van de studiegroep verder”, geeft Lech Grzelak van Rabobank als commentaar op het werk van de

studiegroep. “Wij hebben bij de bank geen experts op het terrein van storingsrekening, en dat was ook een belangrijke reden om het hybride model voor te leggen aan de studiegroep, met de vraag om het met storingsrekening aan te pakken. Onderzoekers proberen dit soort problemen uit de financiële wiskunde met steeds andere technieken op te



Figuur 1 Tijdafhankelijkheid van het aandeel, de rente en de volatiliteit

lossen, om te kijken welke in de praktijk het beste werkt. En verstoringstheorie is een relatief nieuwe techniek waarmee het probleem kan worden benaderd. Om die reden heeft een aantal mensen van Rabobank in 2008 een cursus storingsrekening aan de TU Delft gevolgd. De Studieweek Wiskunde met de Industrie zien we als een vervolgstap daarop.”

“Wij wisten ook wel dat een week onvolledige is om het hele probleem op te lossen, maar de wiskundigen hebben ons een aantal nieuwe wegen laten zien die we zelf verder gaan bewandelen. En dat zijn wegen die nog maar door weinig anderen worden verkend, zo hebben we gezien. Ook hebben ze ons op een aantal interessante eerdere studies uit de literatuur gewezen, die we ook verder gaan bestuderen.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009, van 26-30 januari in Wageningen. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.swi2009.wur.nl.

In de verdediging

| In defence



Tidal embayments

Miriam ter Brake

Ruim tien jaar geleden had niemand verwacht dat Miriam ter Brake ooit zou gaan promoveren in de wiskunde, zij zelf misschien nog wel het minst. Op de middelbare school wist ze namelijk zeker dat ze later stedenbouwkundige wilde worden. Na haar havo eindexamens ging ze dan ook naar Amsterdam om bouwkunde te studeren. Toen ze na een paar maanden de wiskunde begon te missen, is ze zelf een vwo-cursus wiskunde B gaan doen bij het LOI. De wiskunde vond ze zo veel leuker dan al die bouwdetails dat ze na het behalen van haar propedeuse en wiskunde-B-certificaat is overgestapt naar Technische Wiskunde aan de TU Delft. Aan diezelfde universiteit verdedigde ze op 15 maart 2011 haar proefschrift *Tidal embayments: Modelling and understanding their morphodynamics*, dat ze schreef onder begeleiding van Henk Schuttelaars en Arnold Heemink.

Getijdebekkens

Het doel van Ter Brakes onderzoek was het modelleren en begrijpen van getijdebekkens. Getijdebekkens komen veel voor in kustgebieden over de hele wereld. Deze bekkens bestaan altijd uit een bassin en een zeegat dat het bassin verbindt met de zee. Het Friese Zeegat is zo'n getijdebekken, gelegen in de Waddenzee tussen de eilanden Ameland en Schiermonnikoog. Dit specifieke bassin is verbonden met de zee door twee inhammen die gescheiden worden door een zandplaat, de Engelsmanplaat.

Getijdebekkens zijn zeer dynamisch. Bij sterke eb- en vloedstromen worden grote hoeveelheden sediment van de bodem opgewoeld. Eenmaal 'zwevend' in het water wordt dit sediment getransporteerd door middel van diffusieve processen (verplaatsing veroorzaakt door verschillen in de sedimentconcentraties) of advectieve processen (verplaatsing van het sediment door stromingen). Onder invloed van de zwaartekracht kan dit sediment weer naar de bodem zakken en dit levert veranderingen in het bodemprofiel op. Veranderingen in de bodem beïnvloeden vervolgens de waterbeweging. Deze interactie tussen de bodemtopografie en de waterbeweging vindt plaats op verschillende tijd- en ruimteschalen en resulteert vaak in complexe bodemvormen met ingewikkelde geulen en platen.

Complexe versus geïdealiseerde modellen

Voorspellingen over bodemtopografie worden veelal gedaan op basis van complexe numerieke modellen, die zo volledig mogelijk zijn. Ter Brake werkte daarentegen met een geïdealiseerd model, waarin alleen die processen werden meegenomen waarvan ze verwachtte dat deze van groot belang zouden zijn voor kanaalvorming in de bodem. Zo'n geïdealiseerd model heeft als grootste voordeel dat het wiskundig gezien veel doorzichtiger op te lossen is.

Eind jaren negentig hadden Huib de Swart en Henk Schuttelaars al laten zien dat met een dergelijk model erg veel inzicht kan worden ver

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

kregen in de fysica die kan leiden tot de geobserveerde bodempatronen. Met het huidige onderzoek hoopten Ter Brake en Schuttelaars inzicht te krijgen in de fysische processen die ten grondslag liggen aan de splitsing van kanalen en eventueel cyclisch gedrag van de geulen. Daarvoor hebben ze het model uitgebreid en tevens een andere methode dan voorheen gebruikt om de gekoppelde niet-lineaire systemen op te lossen.

Naast de fysica is ook de geometrie van een bekken sterk vereenvoudigd in het model: het wordt rechthoekig verondersteld, met drie 'muren' als zijanten en een geopende zijde richting zee. Alleen de bodem verandert door erosie en depositie. Het model in het bekken bestaat uit de dieptegemiddelde ondiepwatervergelijkingen voor de waterbeweging, een advectie-diffusievergelijking voor het sedimenttransport en een bodemevolutievergelijking die gebaseerd is op erosie en depositie van sediment.

Aan de zeezijde van het bassin wordt een vereenvoudigde getijdenbeweging voorgeschreven, bestaande uit een hoofdcomponent, met twee keer per dag hoog water, en het eerste nevengetijde, met vier keer per dag hoog water. Niet-lineaire verschijnselen veroorzaken ook nevengetijden in de getijdebekkens, die asymmetrie in de waterbeweging kunnen veroorzaken en het netto sedimenttransport sterk kunnen beïnvloeden.

Binnen het onderzoek was Ter Brake met name geïnteresseerd in evenwichtsbodemprofielen. Bassins in de Waddenzee fungeerden als casus voor haar model. Een belangrijk resultaat was het volgende: als ze de waterbeweging forceerde met zowel geobserveerde hoofd- als nevengetijcomponenten, vond ze morfodynamische evenwichten met bekkenlengtes die overeenkomen met de observaties. Deze bekkenlengtes kon ze echter alleen maar vinden als ze de topografisch geïnduceerde sedimentfluxen meenam in haar model. Hoewel deze sedimentfluxen niet zijn opgenomen in de meeste modellen in de literatuur, vond Ter Brake dus dat ze van groot belang zijn. Zonder deze fluxen vond ze slechts morfodynamische evenwichten voor bekkens met een lengte die ongeveer 1/3 is van de lengte van de waargenomen getijdebekkens in de Waddenzee.

Fractale patronen

In veel getijdebekkens worden geul-plaatsystemen waargenomen met fractale patronen. Het aantal kanalen neemt toe richting de kust, waarbij hun diepte afneemt. Geulen en platen kunnen migreren en deze migratie kan cyclisch gedrag vertonen. Ook in het Friese Zeegat worden zulke complexe geul-plaatsystemen aangetroffen.

In het laatste jaar heeft Ter Brake oplossingen gevonden voor haar niet-lineaire tweedimensionale model, waarbij ze fractale geul-plaatsystemen zag ontstaan. Dat is wat ze had gehoopt te bereiken, en dit was dus echt de kroon op haar werk. "Wel is er natuurlijk nog verschrikkelijk veel te doen en begint het eigenlijk pas echt interessant te worden als je geen tijd meer hebt"

Eenzaam ploeteren achter je bureau

Ter Brake was dus tevreden met haar resultaten, maar bewaart ook om andere redenen goede herinneringen aan haar aio-tijd. Het was een supertijd. Ze wilde graag nog veel leren en zag zichzelf direct na haar studie nog niet naar een bedrijf gaan. De zelfstandigheid en het feit dat je als aio je eigen wegen in kunt slaan, spraken haar erg aan. Het begin was uitdagend, vooral omdat ze het fysisch inzicht ontbeerde dat voor dit onderzoek hard nodig was. Dit maakte vooral de discussies tijdens conferenties erg moeilijk; ze sprak simpelweg niet dezelfde taal als veel van de andere onderzoekers.

Ter Brake had graag onderdeel uitgemaakt van een onderzoeksgroep. Hoewel ze gigantisch veel geleerd heeft van haar begeleider en de samenwerking met hem erg prettig was, miste ze wel iets: "Het is al erg eenzaam werk, en als je dan ook niemand hebt om ideeën mee uit te wisselen of te praten over je onderzoek, is dat wel jammer."

Het is dan ook niet verrassend dat de conferenties voor Ter Brake hoogtepunten vormden. "Met name omdat je dan toch wat socialer bezig bent dan wanneer je achter je bureau weken in je eentje aan het ploeteren bent." Conferenties waren natuurlijk ook leuk om nieuwe ideeën op te doen. En door vragen te moeten beantwoorden waar ze zelf niet aan had gedacht, kreeg ze bovendien nieuw inzicht in haar eigen werk.

Aan het einde van haar eerste jaar ging Ter Brake naar een zomerschool. Deze ging over de morfologie en hydrologie in getijdebekkens en estuaria en vond plaats in Motril, in Zuid-Spanje. Lezingen door belangrijke mensen uit haar vakgebied werden afgewisseld door groepswork aan een project. De deelnemers hadden heel diverse achtergronden, waardoor denkbeelden sterk verschilden en veel interessante discussies ontstonden. En alsof dat al niet leuk genoeg was, vond de zomerschool ook nog eens plaats in een super sjiek resort aan de Spaanse kust. Daarnaast vond ze ook nog tijd om met enkele anderen te mountainbiken in de Sierra Nevada; in een woord geweldig!

Een nieuwe uitdaging

Het fysische inzicht dat Ter Brake in de afgelopen jaren heeft ontwikkeld, komt goed van pas in haar nieuwe baan. Sinds afgelopen januari werkt ze voor BMT ARGOS. Dit bedrijf voorziet klanten uit bijvoorbeeld de offshore industrie of de scheepvaart van voorspellingen of statistieken over de oceaan en het weer op elke gewenste locatie op zee. De geleverde informatie wordt zo betrouwbaar mogelijk door gebruik te maken van verschillende databronnen, afkomstig van onder andere numerieke modellen en satellietwaarnemingen. Tot haar verdediging werkte ze bij een Nederlandse vestiging, maar eind maart is ze naar Schotland verhuisd om in Aberdeen een nieuwe uitdaging aan te gaan.



Empirical dynamics of neuronal rhythms

Rikkert Hindriks

Op 11 april 2011 promoveerde Rikkert Hindriks aan de Vrije Universiteit Amsterdam op het proefschrift *Empirical dynamics of neuronal rhythms*. Onder begeleiding van Aad van der Vaart en Fetsje Moné-Bijma heeft hij zich beziggehouden met de wiskundige analyse van hersengolven. Deze golven weerspiegelen de lokale elektrische activiteit van hersenweefsel en worden gemeten met een techniek genaamd elektro-encefalografie (EEG) of magneto-encefalografie (MEG). Met EEG en MEG kan de elektrische activiteit over de gehele hersenschors (de buitenste

laag van de hersenen) worden gemeten. In de neurowetenschappen wordt met behulp van statistische analyses van deze golven een link gelegd tussen hersenactiviteit en cognitieve processen. Dit soort analyses bestaan veelal uit het kwantificeren van eenvoudige kenmerken van de gemeten hersengolven, zoals het vermogen in verschillende frequentiebanden of de correlatiecoëfficiënt tussen golven die zijn gemeten in verschillende delen van de hersenschors.

Modelmatige aanpak

In zijn proefschrift gebruikte Hindriks een meer modelmatige aanpak, die bestaat uit het fitten van een dynamisch model (een differentiaalvergelijking) aan de data, om vervolgens (nieuwe) kenmerken te definiëren in termen van de geschatte parameters uit het model. De data kreeg hij van neurowetenschappers of mensen uit de klinische neurofysiologie met wie hij samenwerkte.

Het grote voordeel van deze aanpak is dat meer inzicht wordt verkregen in het temporele gedrag van de gemeten golven. Modellen die hij heeft gebruikt zijn gekoppelde oscillatoren en stochastische differentiaalvergelijkingen. Het gekoppelde-oscillatormodel stelt je in staat om te karakteriseren hóé hersengolven die zijn gemeten in verschillende delen van de hersenschors elkaar beïnvloeden. In het bijzonder informeert het model over de richting van de beïnvloeding. Die richting is belangrijk, omdat die iets zegt over welke hersengebieden op welke wijze met elkaar communiceren. Hindriks vond aanwijzingen dat frontale (voor) en occipitale (achter) gebieden van de hersenschors in verschillende frequentiebanden op verschillende wijze communiceren.

Modelleren van spontane hersengolven

Er is door veel onderzoekers geprobeerd spontane EEG-hersengolven te beschrijven met deterministische dynamische systemen. Men maakte daarbij gebruik van de bekende inbeddingsstelling van Takens: als je een eendimensionale projectie (in deze context een EEG-sigitaal) van een hoogdimensionaal (deterministisch) dynamisch systeem observeert, kun je daaruit (via een zogenaamde delay-inbedding) de attractor van het systeem reconstrueren. Met behulp van deze stelling probeerde men zo'n twintig jaar geleden aan te tonen dat EEG-golven een laagdimensionale chaotische dynamica bezitten. Echter, toen zogenaamde surrogaattechnieken uit de statistiek hun opmars deden in het EEG-onderzoek, bleek al snel dat de resultaten (de geclaimde laagdimensionale chaos) statistisch niet deugden. Het is realistischer (en vruchtbaarder) om in dynamische modellen van spontane EEG-signalen een stochastische component toe te voegen. Deze modelleert dan een zeer hoogdimensionaal onderliggend fysiologisch proces.

Al sinds lange tijd worden stochastische discrete-tijdmodellen (lineaire stochastische processen) gebruikt om EEG-signalen te modelleren. Een van de nadelen van deze modellen is echter dat de geschatte parameters afhangen van de frequentie waarmee de signalen gesampled zijn. Dit in tegenstelling tot parameters van continue-tijdmodellen, die inherent zijn aan het onderliggende proces. Bovendien is het wiskundig eleganter en fysisch realistischer om met continue-tijdmodellen te werken. Als je dat doet, kom je tot een beschrijving van de dynamica van spontane EEG-signalen in termen van stochastische differentiaalvergelijkingen.

Zijn alfa-golven een resonantieverschijnsel of niet?

Hindriks bestudeerde onder andere zogenaamde alfa-golven. Dit zijn golven met een frequentie tussen de 7 en 13 Hz. Voor dergelijke golven die gemeten werden in menselijke proefpersonen tijdens rust, was zijn belangrijkste bevinding dat de dynamica wordt beschreven door

lineair gedempte oscillatoren. Zulke oscillatoren bezitten een vastepuntattractor en geen attractor in de vorm van een limietcykel. Hindriks noemt dit zijn meest interessante bevinding, omdat deze suggereert dat alfa-golven kunnen worden opgevat als een (passief) resonantieverschijnsel en niet als een (actief) oscillerend systeem.

Op het moment van het interview is het nog te vroeg om te weten hoe neurowetenschappers hierover denken, aangezien zijn artikel nog in revisie is. Hindriks verwacht echter dat het positief ontvangen zal worden door tenminste een deelgroep van hen. De kwestie van vastepunt dynamica versus limietcykel dynamica van spontane EEG-signalen houdt namelijk velen bezig en zorgt voor levendige discussies.

Een andere wereld

Een conferentie in Japan vormde een hoogtepunt van zijn aio-tijd, vooral omdat hij daardoor kennis kon maken met de andere wereld die Japan is. Hindriks vertelt: "Het openbare leven is heel anders ingericht, veel gestructureerder, serener en meer gericht op vorm. Zo staat iedereen netjes in de rij bij het instappen in de trein en geeft de conducteur je een buiging nadat hij je kaartje heeft gecontroleerd."

De jongeren vond hij ook interessant, veel modebewuster dan in Europa, maar wel op een geheel eigen wijze. Ook in het uitgaansleven hing een geheel andere sfeer dan hij gewend was. Heel ingetogen, en zonder de agressiviteit die het Nederlandse uitgaansleven zo vaak kenmerkt. Na terugkeer was het nogal wennen om Amsterdam CS uit te komen en meteen weer uit te worden gescholden door ongeduldige automobilisten!

Gemengde gevoelens

Het leven als aio beviel Hindriks goed. Hij kreeg de vrijheid om te onderzoeken wat hij wilde en heeft daaraan veel plezier beleefd. Al met al vond hij het vier boeiende jaren. Toch heeft hij gemengde gevoelens over het uiteindelijke resultaat. Omdat er geen onderzoeksplan was, heeft het hem veel tijd gekost om zijn richting te bepalen. Achteraf denkt hij dat hij meer zou hebben geproduceerd als hij vanaf het begin met een concrete vraagstelling was begonnen. Aan de andere kant was het misschien wel goed dat hij direct in het diepe werd gegooid. Het hoort volgens hem bij je ontwikkeling als academicus dat je een eigen richting kunt uitstippelen en daaraan vast kunt houden.

Zijn eerste artikel was een zware bevalling en de acceptatie ervan was dan ook een ander hoogtepunt van zijn promotietijd. Er zaten drie herzieningen en meer dan een jaar tussen indiening en acceptatie van het artikel, wat erg lang is voor neurowetenschappelijke tijdschriften. Hij heeft er wel heel veel van geleerd, bijvoorbeeld dat je zeer goed op de hoogte moet zijn van de bestaande literatuur, zodat je precies weet wat er al gedaan is in het relevante vakgebied.

Ook de laatste schrijfkus vond hij best lastig. De afronding van zijn proefschrift, en dan met name het schrijven van de algemene introductie, vereiste dat hij afstand nam van de inhoud van zijn onderzoek en een perspectief creëerde. Afstand nemen van het werk waar hij net drieënhalve jaar druk mee bezig was geweest, was niet makkelijk. Bovendien wilde hij eigenlijk liever aan iets nieuws beginnen. Zijn postdocpositie bij de vakgroep Klinische Neurofysiologie aan de TU Twente lonkte al!



Tom Verhoeff

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
T.Verhoeff@tue.nl

Evenement Internationale Wiskunde Olympiade 2011

De IMO – over talent, plezier en wiskundekringen

Dat de letters IMO voor International Mathematical Olympiad staan, weten wiskundigen in Nederland, gastland van IMO 2011, ondertussen wel. Dat er achter die olympiade meer zit dan een wiskundewedstrijd is niet zo bekend. In dit artikel belicht Tom Verhoeff, penningmeester van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en organisator bij IMO 2011, een andere kant van de IMO.

Ruim acht jaar geleden beschreef ik in [32–33] de Internationale Wiskunde Olympiade (hier afgekort met IMO) gezien vanuit de jury bestaande uit alle teamleiders, die de opgaven selecteren, vertalen en nakijken, en de resultaten vaststellen. Dat NAW-artikel eindigde met de woorden: “Ik denk dat het een uitstekende uitdaging zou zijn om de IMO eens naar Nederland te halen. ... Wie doet mee?” Wel, het is zo ver. Nederland is deze zomer gastland van IMO 2011 [3, 5], een wiskundewedstrijd zonder weerga, met deelnemers uit meer dan honderd landen. Het zou echter kortzichtig zijn de IMO alleen als (grootse en moeilijke) wiskundewedstrijd te zien. Wat is er dan nog meer?

Doelstellingen en geschiedenis

In de reglementen van IMO 2011 [11] lezen we het volgende over de doelstellingen: “The aims of the IMO 2011 are:

- to discover, encourage and challenge mathematically gifted young people in all countries;
- to foster friendly international relationships among mathematicians of all countries;
- to create an opportunity for the exchange of information on school syllabuses and practices throughout the world;
- to promote mathematics generally.”

Hoewel elke aflevering van de IMO eigen reglementen heeft, zijn deze doelstellingen al jaren hetzelfde. Een wedstrijd wordt niet genoemd. Die wedstrijd is ‘slechts’ het gekozen

middel om te werken aan deze doelen. Om die keuze voor een wedstrijd beter te begrijpen, is het nodig het verleden te verkennen.

De ontstaansgeschiedenis van de IMO is slechts fragmentarisch beschreven [2, 7, 12, 15–17, 23, 30], al is er sinds het 50-jarig jubileum [8] meer aandacht aan besteed. De IMO werd voor het eerst in 1959 in Roemenië georganiseerd, met deelnemers uit de zeven Oost-bloklanden. Dat evenement ontstond evenwel niet uit het niets, maar was het gevolg van de aandacht die wiskunde in die regio al langere tijd genoot (zie kader).

Door de ruime ervaring met wiskundewedstrijden in Roemenië was de eerste IMO in 1959 meteen een prima georganiseerd evenement. Afgezien van een paar kleine wijzigingen verloopt de IMO nog steeds hetzelfde als bij het begin. Ter illustratie vermeld ik een middelzware opgave uit die eerste IMO [10]:

Voor welke reële waarden van x geldt

$$\sqrt{(x + \sqrt{2x + 1})} + \sqrt{(x - \sqrt{2x + 1})} = A,$$

gegeven (a) $A = \sqrt{2}$, (b) $A = 1$, (c) $A = 2$, waarbij alleen niet-negatieve getallen zijn toegelaten bij de wortels.

Vergelijk dit eens met de middelzware opgave van IMO 2010 besproken in de vorige NAW [36], rakend aan modern onderzoek.

Uit de voorgeschiedenis (zie kader) blijkt duidelijk dat de wiskundeolympiade niet zomaar een recreatief evenement is, maar een systematische activiteit, gedragen door een brede visie, om interesse voor wiskunde te sti-

muleren en te ontwikkelen. Toch blijft het lastig de wiskundeolympiade een plaats te geven, vanwege de banden met zowel onderwijs als onderzoek en ook public relations. Ken-derov, voormalig voorzitter van de wereldfederatie voor landelijke wiskundewedstrijden (WFNMC [37]), stipt dit probleem expliciet aan in [16]. Dit is een mooie uitdaging voor het nieuwe *Platform Wiskunde Nederland*.



Links het logo van IMO 1959, rechts het logo van IMO 2011

Talent en plezier

Terug naar de doelstellingen van de IMO. Hoe ontdek je wiskundetalent? En hoe kun je dat talent stimuleren en ontwikkelen? Gelukkig is voor deze problematiek tegenwoordig meer aandacht, gezien publicaties als [1, 4]. (In de vorige NAW staat een recensie van de eerste druk van [1]; de tweede druk verscheen kort nadat de recensie geschreven was.) Een van de misvattingen die daar bestreden worden, is dat talent er toch wel komt en dat extra aandacht niet nodig zou zijn. Hieraan ligt een andere misvatting ten grondslag, namelijk dat talent puur aangeboren zou zijn. Je zou het hebben of niet. En als je het hebt, dan zou het vanzelf wel goed komen. Uit onderzoek is gebleken [26] dat talent een veel breder fenomeen is, en dat het voor een aanzienlijk

deel ook via de opvoeding tot stand komt, van heel jong af. Talent houdt niet alleen in dat je ergens (meteen) goed in bent, maar ook dat je ergens bovengemiddeld in geïnteresseerd bent en gemotiveerd bent om er tijd in te steken.

De reguliere schoolstof is niet specifiek gericht op ontdekken van talent. Goede leerlingen zonder talent kunnen ook mooie cijfers halen (door braaf te leren en oefenen), en getalenteerde maar vervelde leerlingen doen het soms slecht. Verder is het zo dat talent voor wiskunde niet altijd samengaat met uitblinken in andere vakken. Kinderen met talent voor wiskunde vallen daardoor in het gewone schoolgebeuren niet altijd op en komen dus veelal niet in aanmerking voor verrijkingslessen of iets dergelijks. En tot slot, met algemene verrijkingslessen ontwikkel je geen (wiskunde)talent; je houdt ze alleen bezig.

In de muziek en de sport, en ook met betrekking tot taal, is al langer onderkend dat je jong moet beginnen, en dat gaat vaak niet via school. Op die gebieden zijn veel mogelijkheden voor extra aandacht. Talent in X , daar word je niet alleen mee geboren, maar dat wordt voor een significant deel ook gevormd. Die vorming omvat het ontwikkelen van interesse in X , wat weer vereist dat je met plezier bezig kan zijn met X . Plezier en talent lijken op de kip-ei-paradox. Om ergens goed in te worden, helpt het als je het plezierig vindt, en om ergens plezier in te hebben, helpt het als je er al wat van kunt. Plezier en talent evolueren daarom het beste samen in kleine stapjes.

Om wiskundetalent te ontdekken moet je dus wat anders doen dan kijken naar het cijfer voor het schoolvak wiskunde. De Kangeroe wiskundewedstrijd en de Nederlandse Wiskunde Olympiade (inclusief de Junior Wiskunde Olympiade) proberen te helpen met het ontdekken van talent voor wiskunde door aantrekkelijke en uitdagende opgaven aan te bieden, waarvoor je nauwelijks voorkennis nodig hebt, maar waarvoor je wel creatief moet nadenken. Het is onbegrijpelijk dat er nog scholen zijn die hun leerlingen de kans ontnemen hieraan te proeven. Wie talent heeft, blijkt slecht te voorspellen (door kinderen zelf, hun ouders en docenten), maar het meedoen aan zo'n wedstrijd kan wel een, soms verrassende, indicatie geven.

En als talent voor wiskunde is ontdekt (wat ook kan inhouden dat er grote interesse en motivatie is opgewekt, zonder het al meteen goed te kunnen), dan is het zaak er wat mee te doen. Iemand met talent leert sneller, en om talent verder te ontwikkelen dient de leerstof sneller dan in het reguliere tempo te wor-

Voorgeschiedenis

Terwijl de Franse baron Pierre de Coubertin druk doende was om de Olympische Spelen nieuw leven in te blazen, werd — waarschijnlijk geïnspireerd door diens inspanningen — in 1894 de eerste nationale wiskundewedstrijd ooit georganiseerd en wel in Hongarije. (Merk op dat de moderne Olympische Spelen 'pas' in 1896 begonnen.) De Hongaarse fysicus baron Loránd Eötvös werd in 1894 minister van onderwijs. Om dit te memoreren startte de Hongaarse sociëteit voor wis- en natuurkunde een landelijke wiskundewedstrijd voor recent geslaagde middelbare scholieren. De nadruk werd gelegd op het testen van wiskundige creativiteit en niet van wiskundige kennis. Deze wedstrijd werd de *Eötvös Competitie* genoemd (in 1938 omgedoopt tot *Kürschák Wiskunde Competitie*). De deelnemers krijgen vier uur om drie opgaven op te lossen. De eerste opgave van de Eötvös Competitie uit 1894 [19] geeft een aardige indruk van de ondergrens aan het niveau:

Bewijs dat de uitdrukkingen

$$2x + 3y \text{ en } 9x + 5y$$

deelbaar zijn door 17 voor precies dezelfde verzameling paren geheeltallige waarden van x en y .

Het grote belang van deze wedstrijd blijkt wel uit het feit dat de top tien niet het zware toelatingsexamen tot de universiteit hoefde te doen, maar zonder meer werd toegelaten. In datzelfde jaar 1894 verscheen ook

het eerste nummer van het Hongaarse wiskunde tijdschrift voor middelbare scholieren, meestal aangeduid met de korte titel *KöMaL* [18]. Dit maandblad bestaat voor een groot deel uit problemen, in verschillende categorieën, en oplossingen van leerlingen. Hongaarse wiskundigen zijn het unaniem eens over de doorslaggevende betekenis van de Eötvös–Kürschák competitie en het tijdschrift *KöMaL* voor hun persoonlijke ontwikkeling [9, 22].

In Roemenië gebeurde iets dergelijks [2, 12]. Aan het eind van de negentiende eeuw had Roemenië een wiskundige, Spiru Haret, als minister van onderwijs. Haret hervormde in 1897 het (wiskunde)onderwijs naar Frans voorbeeld. In 1895 werd het jongerentijdschrift *Gazeta Matematică* gelanceerd, alweer vol met problemen. Niet veel later werd er ook een competitie aan gekoppeld. Na de Tweede Wereldoorlog vonden grondige onderwijsherzieningen plaats, nu naar Russisch voorbeeld, met wiskunde als centraal vak. De competitie kreeg staatssteun, werd geïntegreerd in het onderwijs en sindsdien aangeduid met *Nationale Wiskunde Olympiade*. Op het belangrijke internationale wiskundecongres van 1956 in Roemenië werd voor het eerst het idee van een internationale wiskundeolympiade geopperd.

Ook in andere landen, met name Rusland [14], maar ook de VS [30], China en andere Aziatische landen [35] ontstonden al vroeg wiskundewedstrijden. Nederland begon in 1962 met de wiskundeolympiade.

den aangeboden. De Nederlandse Wiskunde Olympiade biedt voor het ontwikkelen van wiskundetalent, op grotere schaal dan voorheen, trainingen, zowel centraal als via tien regionale steunpunten op universiteiten [21]. Maar ook de zomerkampen van *Vierkant voor Wiskunde* [34] en wiskundeclubs, al dan niet op school, kunnen hieraan bijdragen.

In deze context is het aardig op te merken dat de Nederlandse deelnemers aan de IMO's vóór 1977 niet getraind werden en ze vaak ergens onderaan eindigden. Jan van de Craats begon daarom in 1976 met systematische trainingen. Niet alleen schoten de resultaten bij de IMO omhoog, de leerlingen gaven ook aan veel plezier te hebben in de trainingen zelf [30, p.807]. Volledige statistieken zijn te vinden op [10].

De IMO zelf besteedt ook aandacht aan

het element plezier. Naast plezierige wiskunde zijn er bij elke IMO enkele sociaal-culturele excursies en is er een recreatief programma. Daarmee wordt tevens tegemoetgekomen aan de doelstelling van het kweken van vriendschappelijke banden.

Wiskundekringen

Een van mijn leermeesters beschreef het wiskundebedrijf als een piramide, met aan de top de toppers met bewezen toptalent, en aan de basis harde werkers met interesse en talent in ontwikkeling. Die basis moet gevoed worden om de top hoger te kunnen opstuwten. Het beeld van een Egyptische piramide is hier misleidend, want daarvan heeft elke laag een inhoud die slechts kwadratisch groeit met de afstand tot de top. In sociale piramides daarentegen groeit de omvang van de lagen ex-

ponentieel met de afstand tot de top. Of, om dit om te keren, in een sociale piramide is de hoogte de logaritme van de omvang van de basis. Je moet dus een flinke basis hebben om wat hoogte te bereiken. Op dat vlak kunnen we nog wat leren van muziek en sport, want daar is de basis heel breed en ligt de top navenant hoger. Niet iedereen kan die top van de piramide bereiken, maar ook op andere niveaus kun je leren om veel plezier te beleven.

De IMO is niet de oplossing voor alles, maar ze dient in vele landen als goed voorbeeld en laat zien hoe hoog de top kan liggen. Dit is recent nog eens beschreven in [25]. De IMO heeft ook veel nationale en regionale wedstrijden doen ontstaan, en de belangstelling voor het onderwerp van wiskundetalent op de agenda gezet. Zo is de IMO dus inderdaad veel meer dan een wiskundewedstrijd, namelijk een aanleiding om bij jongeren aandacht voor wiskunde(talent) te stimuleren.

Een kleine waarschuwing is wel op zijn plaats. Niet iedereen met talent voor wiskunde is competitief ingesteld en gebaat bij een

wedstrijd [24, 28]. Als het niveau van de wedstrijd niet goed is afgestemd op de deelnemers, kan het averechts werken. De IMO probeert voor een deel deze pijn te verzachten door aan ruwweg de helft van de deelnemers medailles (brons, zilver, goud) toe te kennen. Daarmee wordt ook onderstreept dat het niet in eerste instantie een wedstrijd tegen elkaar is, maar tegen de opgavenbundel. De IMO is ook geen landenwedstrijd, al wordt er wel een officieus landenklassement opgesteld.

Naast de wedstrijden en tijdschriften is er in Centraal en Oost-Europa, met name in de jaren '60, nog een derde pijler ontstaan voor het omgaan met wiskundetalent: wiskundeklubs, ook wel wiskundekringen genoemd. Zo'n wiskundekring kan op vele manieren werken, maar over het algemeen gaat het om regelmatige, niet-competitieve bijeenkomsten om plezier te beleven aan wiskunde. In de loop der jaren is hierover het nodige geschreven [6, 13, 27, 29, 31]. In de VS zijn de vele wiskundekringen tegenwoordig zelfs nationaal georganiseerd in de NAMC [20].

Dadelijk is IMO 2011 in Nederland voor-



Groepentheorie bij wiskundekring aan de VU

bij, maar het ontdekken en stimuleren van talent en het creëren van plezier in wiskunde blijft een punt van aandacht. Het zou mooi zijn als in het kielzog van IMO 2011 ook hier op meer plaatsen, scholen en universiteiten, wiskundekringen tot bloei komen om in plezierige sfeer wiskundetalent te ontwikkelen. Momenteel heeft alleen de Vrije Universiteit een wiskundekring [38]. De regionale trainingen van de Nederlandse Wiskunde Olympiade worden enthousiast georganiseerd en bezocht, en bieden een mooi uitgangspunt. Doet u ook mee?

Referenties

- 1 S. Assouline en A. Lupkowski-Shoplik. *Developing Math Talent: A Comprehensive Guide to Math Education for Gifted Students in Elementary and Middle School* (Second Edition). Prufrock Press, 2011.
- 2 Vasile Berinde, Mădălina Păcurar. "The measure of a great idea: 50 years on from the creation of the International Mathematical Olympiad", *European Mathematical Society Newsletter*, 74:15–18 (dec. 2009).
- 3 Wim Berkelmans. "2011: IMO in Nederland". *NAW* 5/8(3):222–224 (sep. 2007).
- 4 Michael J. Bosse, Jennifer V. Rotigel. *Encouraging Your Child's Math Talent: The Involved Parents' Guide*, Prufrock Press, 2006.
- 5 Birgit van Dalen en Quintijn Puite. "De Wiskunde Olympiade in zeven vragen", *NAW* 5/11(4):283–286 (dec. 2010).
- 6 Dmitry Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg. *Mathematical Circles: Russian Experience*. American Mathematical Society, 1996.
- 7 Hans Freudenthal (editor). "ICMI Report on Mathematical Contests in Secondary Education (Olympiads) I", *Educational Studies in Mathematics* 2(1):80–114 (juli 1969).
- 8 Hans-Dietrich Gronau, Hanns-Heinrich Langmann, Dierk Schleicher (editors). *50th IMO – 50 Years of International Mathematical Olympiads*. Springer, 2011.
- 9 Reuben Hersh, Vera John-Steiner. "A Visit to Hungarian Mathematics", *Mathematical Intelligencer*, 15(2):13–26 (1993).
- 10 *International Mathematical Olympiad*. www.imo-official.org
- 11 www.imo2011.nl
- 12 Paul Jainta. "Problem Corner: Competitions in Romania", *European Mathematical Society Newsletter*, 35:20–21 (maart 2000).
- 13 Robert Kaplan and Ellen Kaplan. *Out of the Labyrinth: Setting Mathematics Free*. Oxford University Press, 2007.
- 14 Alexander Karp, Bruce R. Vogeli (editors). *Russian Mathematics Education: History and World Significance*. World Scientific Publishing, 2010.
- 15 Petar S. Kenderov. "Competitions and Mathematics Education", *Proceedings of the ICM 2006*, Volume III:1583–1598.
- 16 Petar S. Kenderov. "World Federation of National Mathematics Competitions: Why, How and Where to?", Presidential Address, *5th Conference of WFNMC*, Cambridge, July 22nd, 2006. www.pueron.org/pueron/intervuta/psk2.pdf
- 17 Petar S. Kenderov. "A Short History of the World Federation of National Mathematics Competitions", *Mathematics Competitions*, 22(2):14–31 (2009).
- 18 KöMaL – Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (Wis- en natuurkunde tijdschrift voor middelbare scholieren), www.komal.hu
- 19 József Kürschák. *Hungarian Problem Book I: based on the Eötvös Competitions 1894–1905*. Mathematical Association of America, 1963.
- 20 *National Assoc. of Math Circles*. www.namc.org.
- 21 Nederlandse Wiskunde Olympiade, wiskundeolympiade.nl
- 22 Tibor Radó. "On Mathematical Life in Hungary", *American Mathematical Monthly*, 39(2):85–90 (feb. 1932).
- 23 T. Roman. "Les olympiades mathématiques en Roumanie", *Educational Studies in Mathematics*, 5:425–440 (1974).
- 24 Richard Rusczyk. *Pros and Cons of Math Contests*. www.artofproblemsolving.com (2005).
- 25 Mark Saul. "More Than a System: What We Can Learn from the International Mathematical Olympiad". *Notices of the AMS* 58(3):410–416 (maart 2011).
- 26 David A. Sousa. *How the Gifted Brain Learns* (2nd Ed.). Corwin Press, 2009.
- 27 Zvezdelina Stankova, Tom Rike. *A Decade of the Berkeley Math Circle: The American Experience, Volume I*. American Mathematical Society, 2008.
- 28 János Surányi. "The Influence of Mathematics Competitions on Teaching: Benefits and Dangers", *Mathematics Competitions*, 14(1):23–29 (2001).
- 29 James Tanton. *Solve This: Math Activities for Students and Clubs*. Mathematical Association of America, 2001.
- 30 Nura D. Turner. "A Historical Sketch of the Olympiads, National and International", *The American Mathematical Monthly*, 85(10):802–807 (dec. 1978).
- 31 Sam Vandervelde. *Circle in a Box*. American Mathematical Society, 2009.
- 32 Tom Verhoeff. *The 43rd International Mathematical Olympiad: A Reflective Report on IMO 2002*. Computer Science Report 02/11 (0310), Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- 33 Tom Verhoeff. "De Internationale Wiskunde Olympiade", *NAW* 5/4(1):60–63 (maart 2003).
- 34 *Vierkant voor Wiskunde*, www.vierkantvoorwiskunde.nl
- 35 Bin Xiong, Yee Lee Peng. *Mathematical Olympiad in China: Problems and Solutions*. World Scientific Publishing, 2007.
- 36 Hans Zantema. "A problem from IMO 2010", *NAW* 5/12(1):60–63 (maart 2011).
- 37 *World Federation of National Mathematics Competitions*, www.wfnmc.org
- 38 *Wiskundekring aan de VU*. www.math.vu.nl/wiskundekring

Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com



Het keerpunt van Johan Grasman

Uiteindelijk kun je vaak het onderzoek doen dat je het liefste wilt

Johan Grasman (1944) herkende veel in het Keerpunt van Jan van de Craats (NAW, september 2010). Bij een grote reorganisatie in 1998 besloot Wageningen Universiteit zijn leerstoel bij wiskunde op te heffen. "Eerst reageerde ik verslagen, maar al snel werd ik strijdbaar." Grasman gooide het roer om en werd hoogleraar wiskundige en statistische methoden. Uiteindelijk kwamen zowel hijzelf als de vakgroep sterker uit de reorganisatie.

U ging na de middelbare school natuurkunde studeren in Delft. Waarom?

"Eigenlijk vond ik biologie het mooiste vak, maar het kostte me op school moeite om daar goede cijfers voor te halen. Het leek me daarom niet verstandig om biologie te gaan studeren. Natuurkunde was toen heel erg in de mode, het was de periode van de eerste kunstmanen. Dus koos ik voor natuurkunde. Maar vakken als kwantummechanica vond ik maar lastig, terwijl wiskunde me goed afging. Vrij snel stapte ik over naar wiskunde, dat lag me toch het beste. Ik studeerde af op differentiaalvergelijkingen voor grenslaagstromingen en ben ook op dat onderwerp gepromoveerd."

U deed uw promotie-onderzoek aan het Mathematisch Centrum in Amsterdam (het huidige CWI), wilde u niet in Delft blijven?

"Ik vond dat het tijd was voor iets anders, in Delft woonde ik nog bij mijn ouders. Ik werd medewerker bij het Mathematisch Centrum, in die tijd werd je geen aio, je kreeg gelijk een aanstelling. Ik moest tijdens mijn promotiestudie trouwens ook nog in militaire dienst. Ik werkte aan radars, maar omdat de computers het vaak niet deden, had ik

tijd om aan mijn eigen onderzoek te werken. Uiteindelijk heb ik twintig jaar aan het Mathematisch Centrum gewerkt. Leuk aan het instituut was dat je er veel internationale contacten had en dat je ook zelf veel naar het buitenland kon gaan. Na mijn promotie ben ik bijvoorbeeld een jaar naar het Rensselaer Polytechnisch Instituut in de Verenigde Staten gegaan."

Wat deed u daar?

"Ik zou met Bernie Matkowsky aan de buiging van platen werken, een probleem waarvoor dezelfde wiskundige technieken als in de stromingsleer gebruikt kunnen worden. Maar het lukte helemaal niet, na elf maanden waren we nog niets opgeschoten. Ik kreeg het daar behoorlijk benauwd van. De laatste maand besloten we om dan maar een ander probleem op het gebied van de singuliere storingen aan te pakken. Het gaat bij deze klasse problemen om differentiaalvergelijkingen waarin voor de term van de hoogste orde een kleine parameter staat. Als die parameter naar nul gaat, dan raakt de vergelijking gedegeneerd en bestaat er geen oplossing die aan alle randvoorwaarden voldoet. Om een oplossing voor

dit soort vergelijkingen te vinden moeten twee lokale oplossingen worden gecombineerd met een geschikt te kiezen aansluitingsconstante.

Voor het probleem waar wij naar keken, lukte het maar niet om die constante te vinden. Dit was een groot probleem, het



Johan Grasman

werk in die richting lag daardoor jaren stil. Terwijl ik thuis uit het raam staaarde, kreeg ik ineens een ingeving: de oplossing was om dit te zien als een variationeel probleem.

Achteraf gezien was dat moment voor het raam ook een keerpunt in mijn carrière. De methode die ik ontdekte bleek namelijk veel toepassingen te hebben in stochastische differentiaalvergelijkingen. Bijvoorbeeld in populatiemodellen waarbij geboorte en sterfte stochastische processen zijn. Vanaf toen ben ik steeds meer in de richting van biologisch onderzoek gegroeid. Dat was wat ik als jongen al wilde. Ik geloof dat je uiteindelijk vaak het onderzoek kunt doen dat je zelf het liefste wilt.”

Waarom besloot u na twintig jaar weg te gaan bij het Mathematisch Centrum?

“Ik miste het lesgeven, op een onderzoeksinstituut zijn geen studenten. Ik ging naar Utrecht en moest daar massale colleges geven voor zo’n tweehonderd studenten.”

Lukte dat een beetje?

“Nou, het was wel even wennen. Ik moest bijvoorbeeld uitleggen wat uniforme convergentie was. Ik was zo vertrouwd met dat begrip, dat ik het helemaal niet goed kon overbrengen. Ik vergat alle kleine tussenstappen die studenten nodig hebben. Maar na de eerste reeks colleges had ik wel door hoe het moest.”

Al vrij snel ging u vanuit Utrecht naar Wageningen.

“Ik zag een vacature voor hoogleraar wiskunde, dat leek me een uitdaging. Ook paste het biologische onderzoek dat ik deed inhoudelijk goed in Wageningen. In die tijd, 1989, werd er bij wiskunde in Wageningen vrijwel alleen onderwijs gegeven. Tijdens mijn sollicitatie gaf ik aan dat ik graag het onderzoek weer op gang zou willen helpen. Ik werd met open armen ontvangen en ben echt verwelkomd in de groep. En het lukte ook om het onderzoek weer op te starten. Medewerkers die al jaren alleen met onderwijs bezig waren, promoveerden alsnog. De methode die ik in Amerika ontdekte, leverde nog jarenlang werk op en allerlei mensen konden aan de slag met de toepassingen.”

Kortom: het ging dus allemaal prima in Wageningen.

“Het ging niet zo goed met de universiteit zelf, de instroom van studenten liep sterk terug. We hoorden wel eens over vage plannen voor reorganisaties, maar wij hadden

bij wiskunde een enorm grote onderwijslast, we gaven service-onderwijs aan alle opleidingen. Wageningen kon helemaal niet zonder ons. We dachten dat het allemaal wel zou overwaaien.

Tot we in 1998 ineens met de hele groep bij elkaar werden geroepen in een collegezaal. Daar werd medegedeeld dat de hoogleraarposten bij wiskunde en statistiek werden opgeheven. We gingen voortaan alleen maar onderwijs geven, verder niets. Er zouden onderwijsteams komen en verder managers om roosters te maken en dergelijke. Hoogleraren waren niet meer nodig bij wiskunde. De universiteit zocht naar maatregelen om te bezuinigen en dit was in mijn ogen een zeer merkwuurige oplossing. Ik ging naar huis met het idee dat ik mijn baan kwijt was.”

Hoe reageerde u daarop?

“In eerste instantie kreeg ik het benauwd. Ik bezocht een jobcoach en bij de eerste bijeenkomst was ik verslagen en zat ik met de vraag wat me allemaal werd aangedaan. De tweede keer ging ik al weg met het gevoel dat ik er tegenaan wilde gaan. Er kwam ook een oplossing. Wiskunde en statistiek gingen samen en één hoogleraarpost bleef behouden. Toevallig ging de hoogleraar statistiek toen net met pensioen. Zo werd ik hoogleraar wiskundige en statistische methoden. Ik leerde net genoeg statistiek om er onderwijs over te kunnen geven. Ik heb daarnaast een deel van mijn leerstoel vrijgemaakt voor statisticus Alfred Stein. Hij werkte bij Bodemkunde en Geologie en ook die groep werd met bezuinigingen geconfronteerd.

Er veranderde nóg meer, onze groep fuseerde met de groep Landbouwwiskunde van de Dienst Landbouwkundig Onderzoek (een soort TNO) en we gingen verder onder de naam Biometris. Dus niet alleen verdubbelde onze groep doordat we samengingen met statistiek, we kregen er ook nog eens zoveel collega’s uit de consultancyhoek erbij.”

Merkte u veel verschillen tussen de universitaire medewerkers en de commerciële jongens?

“De mensen van DLO zijn vaardiger met software, zij gebruiken allerlei pakketten bij hun adviezen aan instellingen en bedrijven. Maar verder zijn er maar weinig verschillen. De samenwerking verloopt uitstekend, iedereen werkt hier nu door elkaar. Opmerkelijk genoeg pakte de reorganisatie alleen maar goed uit. Het consultancywerk geeft

ons onderzoek vaak een mooie stimulans. In 2004 stond onze groep bij de landelijke onderzoeksvisitatie wiskunde op een gedeelde eerste plaats.”

Is uw werk erg veranderd na de reorganisatie?

“Vooral het onderwijs dat ik geef is anders. Ik geef nu statistiek en dat is eigenlijk leuker om te geven dan analyse. Bij een calculusvak kun je voor het bord alleen maar rekenfouten maken, terwijl je bij statistiek kunt uitleggen wat de juiste blik is om naar een probleem te kijken. Het allerleukste vind ik het om eerstejaars te overtuigen van het nut van wiskunde met allerlei toepassingen. Je kunt ze daarmee echt enthousiast maken.”

Bent u ook ander soort onderzoek gaan doen?

“Nee, mijn onderzoek is al jaren heel erg breed. Mijn promovendi hebben aan de meest uiteenlopende onderwerpen gewerkt: van economische modellen voor natuurlijke hulpbronnen tot modellen voor aaltjes die aardappelmoeheid veroorzaken en van grondwaterstromingen tot weersvoorspellingen.”

Hoe komt u aan al die onderzoeksvragen?

“Die komen overal vandaan. Mijn buurman werkte bijvoorbeeld bij het KNMI. Regelmatig maakte ik met hem een praatje over de heg, dan hadden we het over weersvoorspellingen. Het leek ons wel aardig om samen een promovendus te zoeken. Uiteindelijk hebben er vier aio’s na elkaar gewerkt aan weersvoorspellingen en hoe je iets over de kwaliteit van die voorspelling kunt zeggen. Eén van hen kreeg een grote meteorologische prijs voor zijn werk.

Ik doe nu ook vaak projecten met vriende biologen. Een van hen heeft twintig jaar lang visjes in de Gelderse Vallei-beken gevangen en ik help hem met wiskundige modellen voor de lengten van die visjes. Maar ik sta ook in het water om die visjes te meten. Nu ik met pensioen ben, kan ik helemaal vrij mijn onderwerpen kiezen.”

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar ionica.smeets@gmail.com.

Wil Schilders

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

w.h.a.schilders@tue.nl

Evenement Boekpresentatie: De Pythagoras Code

Een schatkamer vol oude problemen

Op 2 april werd tijdens een feestelijke bijeenkomst in museum NEMO het boek *De Pythagoras Code* officieel gepresenteerd. Het boek bevat een bloemlezing uit 50 jaargangen *Pythagoras*, met de bekende 'Denkertjes' alsmede puzzels en dionigma's. Het rakelt oude problemen op, zoals het $3n+1$ vermoeden, bevat een selectie van prijsvragen en een leuk hoofdstukje 'Geschiedenis' over een aantal bekende wiskundigen. Wil Schilders doet verslag.

Zaterdagmiddag 2 april, een prachtige zonnige middag, eigenlijk te mooi om naar een museum te gaan. Maar het is museumweek-end, gratis entree, en dus komt je bij binnenkomst in NEMO een oorverdovend lawaai tegemoet van kinderen die met allerlei spannende technische zaken bezig zijn. En je weet ook meteen dat je hier goed bent, en dat het museum in het teken van wiskunde staat, want het eerste dat je ziet is een kraampje met wiskundige T-shirts!

Om kwart voor vier is het tijd om naar de Lumièrezaal te gaan, alwaar de boekpresentatie zal plaatsvinden. Wat meteen opvalt, is dat de zaal vol zit met mensen die ouder zijn dan Pythagoras zelf..., terwijl het toch een blad voor jongeren is! Maar dit is natuurlijk vanwege de nostalgie, velen zijn in hun jeugd abonnee geweest en bewaren er mooie herinneringen aan. Willen graag als eerste het boek te pakken krijgen en zien of de herinneringen naar boven komen.

De bijeenkomst wordt geopend door de huidige hoofdredacteur, Arnout Jaspers. Hij begint met een plaatje van hoe het begon, de voorkant van de allereerste editie uit 1961. Een eenvoudig boekje, zonder echt omslag, meteen beginnend met tekst. Het oorspronkelijke idee was afkomstig van Hans Freudenthal, maar de drijvende kracht achter het geheel was een andere Hans: Hans de Rijk, beter bekend onder zijn pseudoniem Bruno Ernst. Hij is 30 jaar lang hoofdredacteur geweest, en is er vandaag ook bij. Zijn mede hoofdredacteur van toen, Gerrit Krooshof, is er helaas niet bij.

Jaspers vertelt over die beginjaren, en over de succesvolle jaren waarin *Pythagoras* meer

dan twintig duizend abonnees had. Dat is helaas tegenwoordig niet meer zo, nieuwe media drijven jongeren weg van tijdschriften, en ook de leerboeken van nu zijn veel mooier uitgevoerd dan vroeger, zodat wiskunde aantrekkelijker wordt gepresenteerd. Het momenteel bescheiden aantal abonnees van *Pythagoras* is wel een zorg. In dat verband wordt Bruno Ernst nog eens aangehaald, die vroeger betoogde dat wiskunde een weelderige tuin is. Hoog in de boom zitten de professionele wiskundigen die jaren hebben geploeterd om daar te komen. Maar beneden groeit van alles, waar iedereen kan komen om allerlei moois te plukken tussen het groene gras. Tegenwoordig betoogt de redactie dat zij "wiskunde presenteert zonder misbruik van voorkennis". Enigszins cynisch zegt Jaspers: "Nou kunnen wij zelf wel vinden dat dat goed lukt...." De 'maar' wordt niet uitgesproken, maar je voelt toch dat hier een zorg is. Ook al wordt er een mooi blad gemaakt, er is geen reden voor zelfgenoegzaamheid, en een van de vragen is of ook de onderbouw aangesproken kan worden.

Over *De Pythagoras Code*, onder redactieleden genoegzaam bekend als 'de P.C.' (niet te verwarren met die bekende straat waar ook allerlei moois te koop is), zegt Jaspers dat je het niet in een weekendje uitleest. "Het is een schatkamer waarin je eindeloos kunt blijven grasduinen en die steeds weer inspireert tot denken." Dit maakt natuurlijk nieuwsgierig naar het boek, maar alvorens de eerste exemplaren worden uitgereikt, volgt nog een lezing van Matthijs Coster over de prijsvragen die in de loop der tijd in *Pythagoras* hebben gestaan. Na het KWG bedankt te heb-

ben, evenals een aantal organisaties welke al in de voorverkoop een flink aantal boeken hebben afgenomen, reikt Jaspers het 'nulde exemplaar' uit aan Bruno Ernst. Hij is zichtbaar onder de indruk, en heeft er helaas geen woorden voor. Het officiële eerste exemplaar gaat vervolgens naar Robert Dijkgraaf, die onder andere vertelt nogal nerveus te zijn geweest in de verwachting dat hij eerst een oud probleem voorgeschoteld zou krijgen. Gerustgesteld dat dit niet gebeurt, houdt hij een mooi betoog, waarna de afsluiting volgt en eenieder het boek bij de uitgang kan aanschaffen. Al met al een mooie middag, en in de trein op weg naar huis verveel ik me geen minuut: 'de P.C.' is echt een leuk boek! En de dagen erna kan ik het niet laten om me nog eens opnieuw met het $3n+1$ probleem bezig te houden.... Tot nog toe tevergeefs! ←

De Pythagoras Code verkoopt inmiddels prima, en is al aan de tweede druk toe!



Eerste nummer van *Pythagoras* uit 1961

Sander Kupers

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

a.p.m.kupers@students.uu.nl

Boekbespreking Jan Aarts: Topologie door zien

Topologie als stripverhaal

Dat in topologieboeken veel afbeeldingen worden gebruikt, is begrijpelijk. Immers, de menselijke intuïtie laat ons boven drie dimensies ernstig in de steek en kan wel wat ondersteuning gebruiken. Sander Kupers legt uit hoe Jan Aarts hier nog een stap verder in gaat door afbeeldingen als basis te nemen om topologie uit te leggen. Met deze visuele aanpak kan een groter publiek bereikt worden, waarbij je ook aan het middelbaar onderwijs kunt denken. De auteur wordt dan ook aangemoedigd om zijn boek te bewerken tot een module voor wiskunde D.

Eén van de krachtigste hulpmiddelen van een wiskundige is zijn of haar eigen visueel vermogen. Voor veel bewijzen komt inspiratie uit een visueel inzicht. Daarna is het geven van een bewijs niet meer dan het rigoreus maken van dat inzicht. Dit ligt voor de hand in vakgebieden als grafentheorie en klassieke meetkunde, maar een ander goed voorbeeld is de topologie. Daar bestuderen we een algemener concept van ruimte: een topologische ruimte is simpelweg een verzameling punten met een notie van omgeving, waarmee we bijhouden welke punten dicht bij elkaar liggen. Omdat deze ruimtes algemener zijn dan degenen die we gewend zijn, moeten we veel voorzichtiger zijn om niet een van de vele pathologische voorbeelden over het hoofd te zien. (Een mooie collectie voorbeelden is te vinden in *Counterexamples in Topology* [7].) Vanzelfsprekend wordt dan het vinden van goede definities ook subtieler. Toch valt veel van de topologie op zijn plaats als we weten wat we ons bij stellingen en hun bewijzen voor moet stellen.

Topologie ondersteund door illustraties

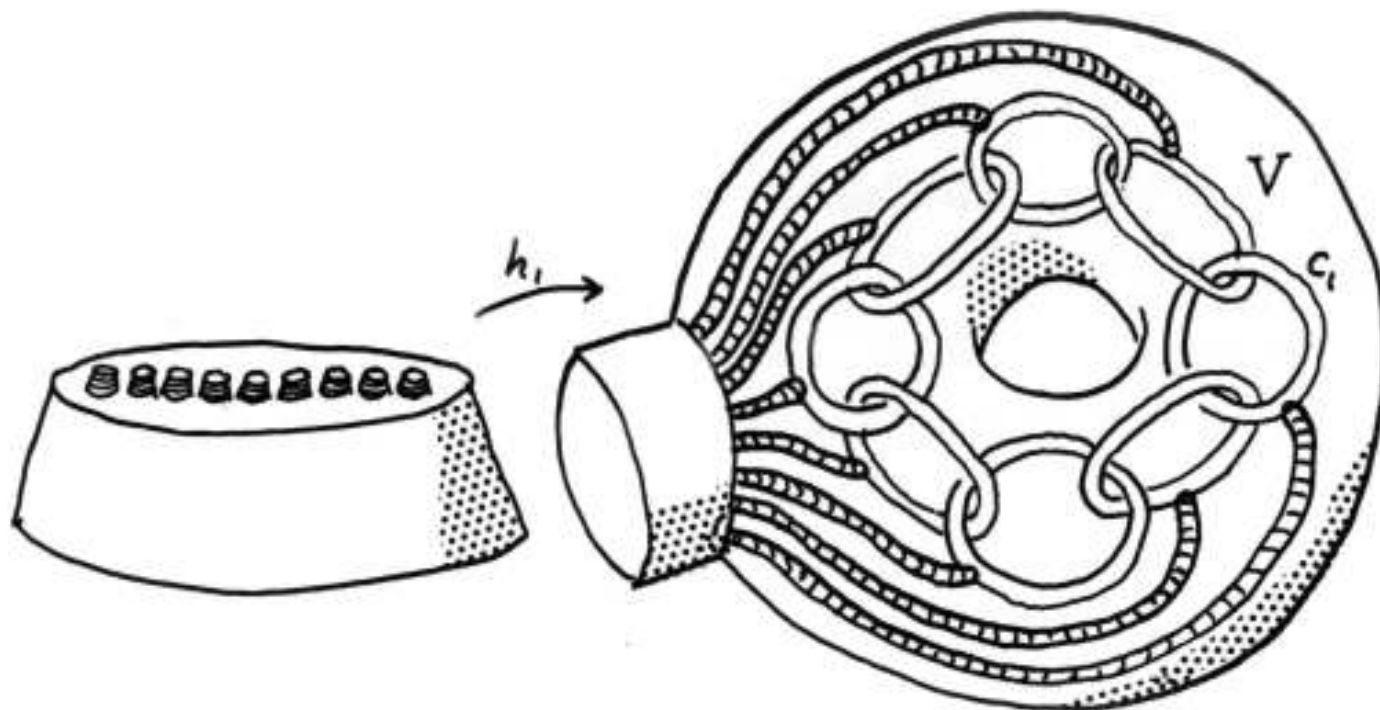
Het is niet ongewoon om bij het uitleggen van topologie veel afbeeldingen te gebruiken, maar er zijn verschillende manieren om met deze afbeeldingen om te gaan. De grootste groep boeken gebruikt de afbeelding slechts als ondersteuning. Boeken van dit type zijn bijvoorbeeld Munkres' standaard lesboek over topologie [5] en Rolfsens *Knots and Links* [6]. In deze boeken geven de afbeeldingen voorbeelden voor de 'echte wiskunde' in de tekst. Deze keuze is begrijpelijk: de menselijke intuïtie over de ruimte werkt goed tot en met drie dimensies, maar faalt daarna vreselijk. Hierdoor zien we vaak opties over het hoofd of lopen we in de val om een pathologisch tegenvoorbeeld te vergeten. Zo had waarschijnlijk niemand intuïtief ingezien dat de zeven-dimensionale sfeer S^7 maar liefst 28 gladde structuren bezit [4] of dat er vlakvullende krommen bestonden.

Dat wil niet zeggen dat de afbeeldingen niet de moeite waard zijn. De tekeningen van knopen in het boek van Rolfsen en de te-

keningen van figuren gekromd in hogere dimensies in George K. Francis' *A topological picturebook* [2] maken de definities en bewijzen inzichtelijker en zijn soms ware kunstwerken. Zie Figuur 1.

Topologie door middel van illustraties

Een tweede, kleinere, groep boeken gebruikt afbeeldingen als leidraad voor de uitleg. De 'bewijzen' zijn visueel: de lezer ziet waarom de uitspraken waar moeten zijn. Een mooi voorbeeld hiervan is J. Scott Carters *How Surfaces Intersect in Space* [1] over laag-dimensionale topologie. Het voorwoord van dat boek legt de beweegredenen van de auteur uit om een dergelijk boek te schrijven. Ten eerste geeft het de mogelijkheid aan de lezer om snel intuïtie voor het vakgebied te ontwikkelen. Daarnaast moet de auteur, aangezien er toch een voorbeeld op het papier getekend moet worden, vanaf het begin met goede instructieve voorbeelden komen. Maar het belangrijkste is dat het de tekst toegankelijker maakt voor een veel groter publiek, omdat veel technische details verborgen kunnen blijven zonder aan inhoud te verliezen. Hierdoor kunnen veel meer mensen delen in het gevoel van schoonheid dat wiskunde biedt, maar dat normaliter verborgen blijft achter een muur van definities en lemma's.



Illustratie: Dale Rolfsen

Figuur 1 Rolfsens tekening van een stap in de constructie van Antoinettes gehoornde sfeer

Jan Aarts schreef — of beter gezegd, tekende — een boek over topologie, met precies deze inslag: visueel topologie uitleggen. Dit boek, *Topologie door zien* getiteld, is vorig jaar uitgegeven door Epsilon Uitgaven. Het boek is opgebouwd als stripverhaal: in een serie gekleurde potloodtekeningen met tekst legt de schrijver allerlei topologische ideeën uit. Net zoals bij striptijdschriften kun je de verhalen los van elkaar lezen, hoewel er een rode draad in zit van concreet naar abstract.

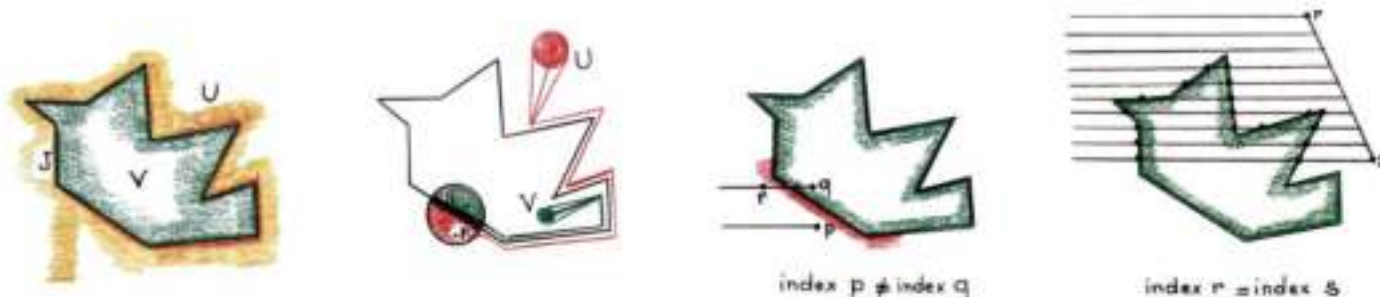
Het eerste deel van het boek begint met het schetsen van een beeld van topologische ruimten: rubberen oppervlakken waarmee je alles mag doen, behalve scheuren en plakken. Wat volgt is een uitleg over oriënteerbaarheid en een mooie schets van

het bewijs van het vierkleurenprobleem. Ten minste, het boek beschrijft dat deel van het bewijs dat de vraag reduceert naar een eindig, maar groot, aantal irreducibele kaarten. Als laatste komt de stelling van Jordan aan bod. De schrijver legt hier mooi voor polygoonen de stelling van Jordan uit: het complement van het beeld van een continue injectieve afbeelding $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ scheidt het vlak in twee samenhangende componenten. (Over Jordans bewijs is nogal wat discussie geweest. Een overzicht is te vinden in het artikel van Thomas Hales [3], waarin de wiskundige die een oplossing gaf voor het Keplerprobleem het oorspronkelijke bewijs van Jordan verdedigt.)

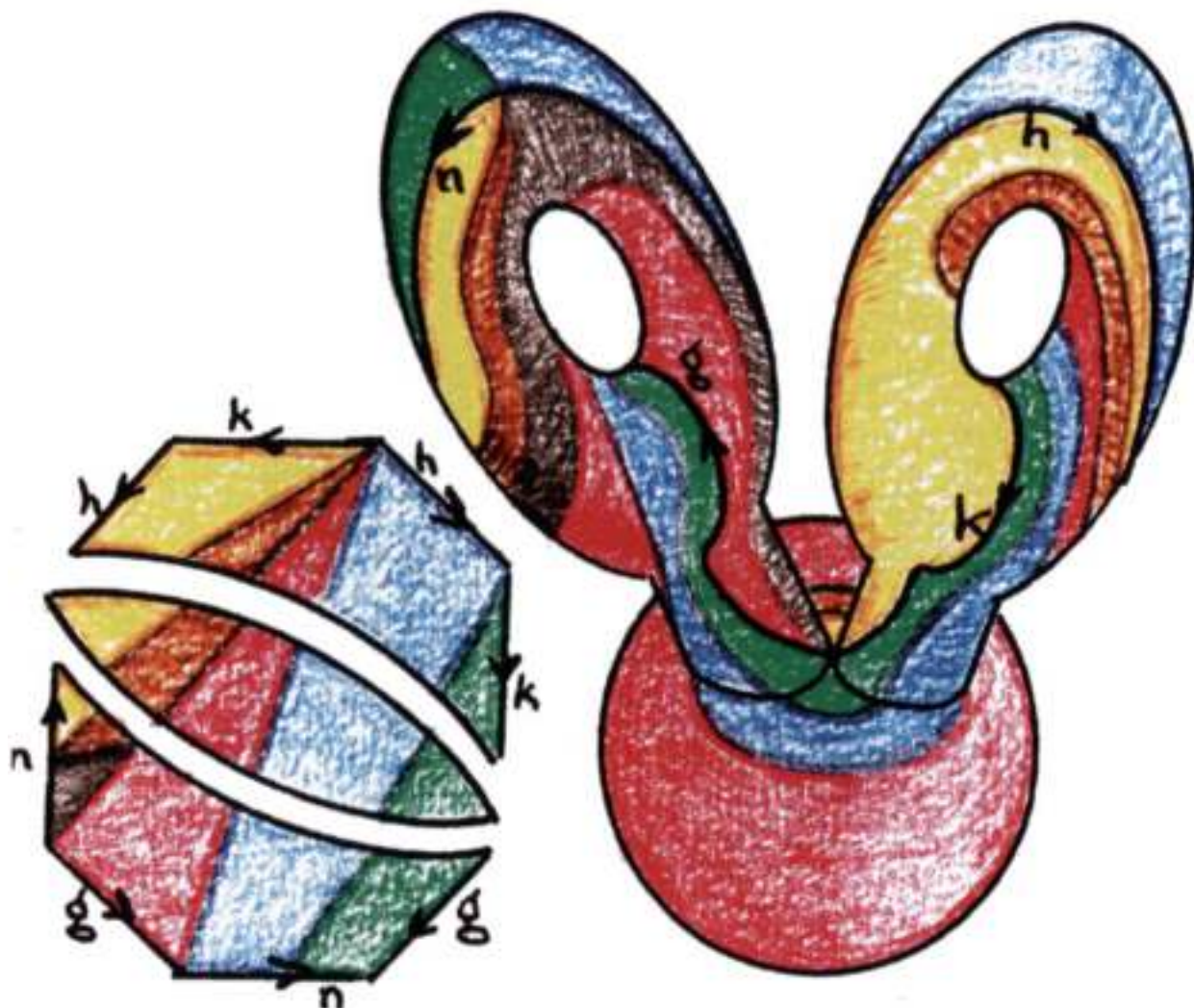
Het bewijs van de stelling van Jordan voor

polygoonen bestaat uit twee delen. Eerst maak je twee deelverzamelingen U, V van het complement X van het beeld J van f . Dit werkt als volgt: op het midden van een zijde van de polygoon plaats je een klein schijfje. In dit schijfje kies je een punt p aan de ene kant van de zijde en een punt q aan de andere kant. U is de verzameling van alle punten in X die je met p kan verbinden door een gebroken lijnstuk dat niet J snijdt en V is de verzameling van alle punten X die je op deze wijze met q kan verbinden. Per definitie zijn U en V samenhangend. De vraag is of er inderdaad geldt dat $U \cup V = X$ en $U \cap V = \emptyset$.

Voor de eerste uitspraak laat je zien dat elk punt van X in U of V zit. Van elk punt X kun je een pad naar de schijf maken: trek



Figuur 2 Het bewijs van Jordans stelling in stripvorm



Figuur 3 In deze tekening wordt duidelijk hoe je een oppervlak van genus 2 kunt krijgen door zijden van een polygoon aan elkaar te plakken

een lijnstuk naar een nabijgelegen zijde van de polygoon, natuurlijk zonder J te snijden, en volg deze tot je in de schijf komt. Verbind deze lijn met p of q , afhankelijk van de helft van de schijf waarin je pad terecht komt.

Voor de tweede uitspraak bekijk je de index van een punt: dit is het aantal keer dat de lijn naar links getrokken vanuit het punt de polygoon snijdt (als je een hoekpunt van de polygoon raakt, moet je de lijn een klein beetje verschuiven). Het is dan voldoende om te laten zien dat de index hetzelfde is voor twee punten die verbonden worden door een gebroken lijn die J niet snijdt en dat $\text{index}(p) \neq \text{index}(q)$. Het bewijs voor de stelling van Jordan voor alle krommen kan dan gegeven worden door deze met polygonen te benaderen [3]. Zie Figuur 2.

Het tweede deel van het boek gaat uit het vlak, naar knopen en gekromde oppervlakken. Zo leert de lezer over de drie

Reidemeisterbewegingen: twee tekeningen van knopen in het vlak stellen dezelfde knoop voor dan en slechts dan als de tekeningen in elkaar over te voeren zijn door een samenstelling van isotopieën van het vlak en Reidemeisterbewegingen. Met behulp van de formule van Euler worden de regelmatige veelvlakken geclassificeerd, gevolgd door een uitleg over de fundamenteelgroep en een classificatie van tweedimensionale oppervlakken. Vooral in die laatste sectie staan mooie tekeningen, zie Figuur 3.

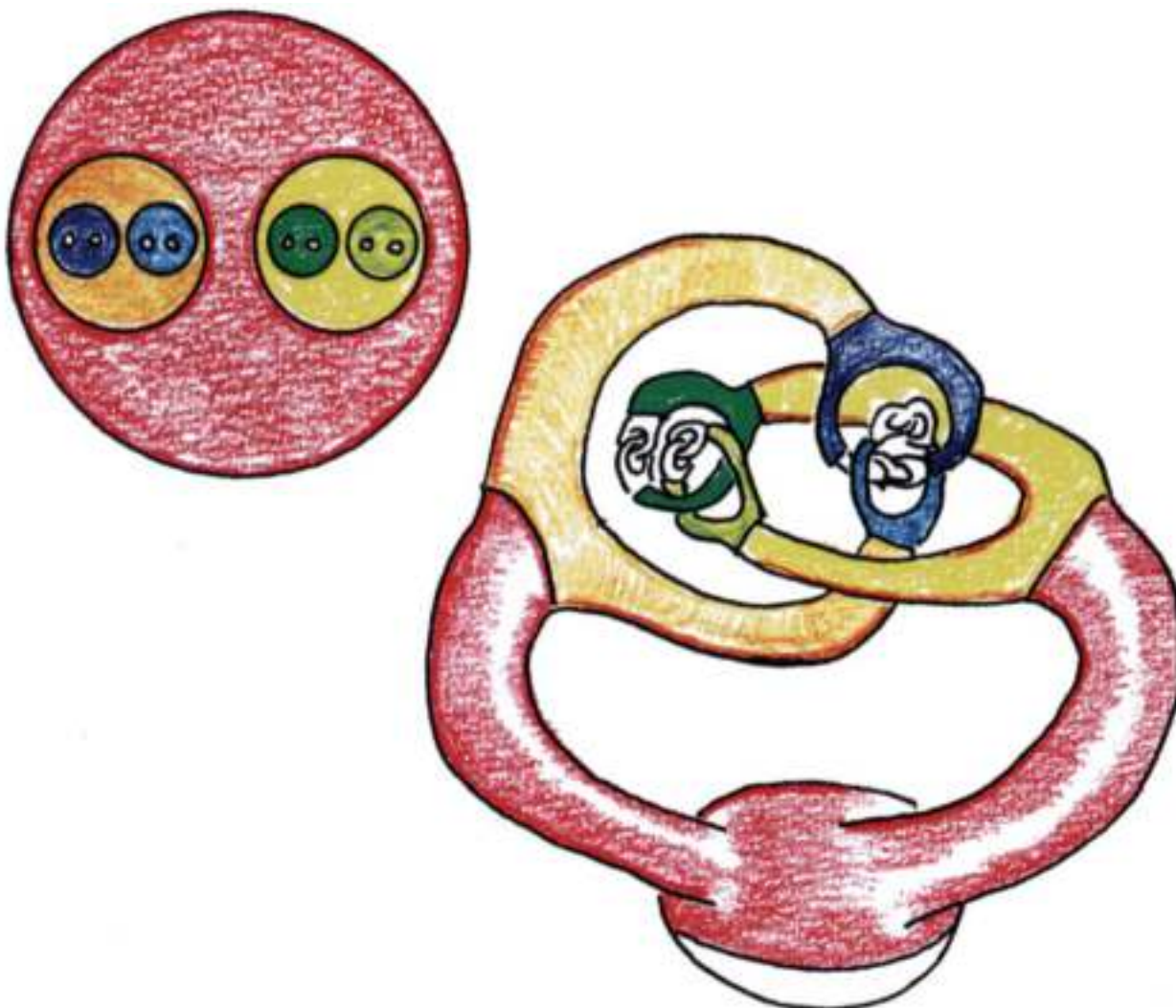
In het boek moeten natuurlijk technische details weggelaten worden om het leesbaar te houden. Toch heeft de schrijver er duidelijk werk van gemaakt waar nodig rigoureus te zijn. Zo noemt de begeleidende tekst vaak kort de voorwaarden. Nuttiger voor de leek dan het lezen over technische voorwaarden is het derde deel. Dit deel gaat, na een precieze uitleg over continuïteit in (metrische) ruimten,

juist over de pathologische gevallen. Allerlei tegenvoorbeelden worden met duidelijke tekeningen geïntroduceerd: de Cantorverzameling, vlakvullende krommen, Antoinettes ketting en de gehoorde sfeer van Antoine. Zie Figuur 4.

Al met al komen er dus veel onderwerpen aan bod, allemaal een introductie tot een deelgebied van de topologie. Het is voor leken of wiskundigen met weinig kennis van topologie een mooi overzicht. Daarnaast staan er enkele parels van bewijzen in het boek, zoals het combinatorisch bewijs van de dekpuntstelling van Brouwer met behulp van het lemma van Sperner.

Topologie op de middelbare school

Omdat de visuele aanpak het mogelijk maakt om diepe ideeën aan een groot publiek over te brengen, zou het boek ook in het onderwijs van nut kunnen zijn. In het huidi-



Figuur 4 Jan Aarts zijn tekening van Antoinettes gehoornde sfeer

ge middelbaar onderwijs is wiskunde uit elkaar gevallen in vier vakken: wiskunde A tot en met D. Wiskunde D is een keuzevak in de bovenbouw van de vernieuwde tweede fase en biedt geïnteresseerde leerlingen de mogelijkheid om de onderwerpen die in wiskunde B geleerd worden te verdiepen en hun kennis te verbreden met andere wiskundige onderwerpen. Het vak werkt met een systeem van modules, die elk voor een bepaald onderwerp enkele maanden aan lesmateriaal bieden. Zo zijn er modules over cryptografie, grafentheorie en financiële wiskunde.

Wat er nog mist, is een module over topologie. Ik denk dat het boek van Jan Aarts een prima basis zou zijn voor een module voor wiskunde D over topologie. Naast het feit dat de onderwerpen als vlakvullende krommen tot de verbeelding spreken en dus kunnen inspireren, geeft het ook een goed beeld van de diversiteit van de wiskunde. Het is veel meer dan vergelijkingen oplossen en klassieke meetkunde, en wat je op school leert is pas het begin van een hele wereld vol interessante ideeën. Ik zou de auteur dan ook willen uitnodigen

om het boek, of een deel daarvan, te bewerken tot een module voor wiskunde D. ←



Jan M. Aarts, *Topologie door zien*, Epsilon Uitgaven, 2010, 212 p., ISBN: 9789050411219, prijs € 28,00.

Referenties

- 1 J. Scott Carter, *How surfaces intersect in space*, volume 2 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific, 2nd edition, 1995.
- 2 George K. Francis, *A topological picturebook*. Springer-Verlag, 1897.
- 3 Thomas C. Hales, Jordan's proof of the Jordan curve theorem. *Studies in logic, grammar and rhetoric*, 23(10):45–60, 2007.
- 4 Michel A. Kervaire en John W. Milnor, Groups of homotopy spheres: I. *The Annals of Mathematics*, 77(3):504–537, 1963.
- 5 James R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.
- 6 Dale Rolfsen, *Knots and Links*. Publish or Perish, 1976. Herdrukt door de American Mathematical Society.
- 7 Lynn Arthur Steen en J. Arthur Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1978.

Jaap Top

Johann Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407
9700 AK Groningen
j.top@rug.nl

Erik Weitenberg

Johann Bernoulli Instituut
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407,
9700 AK Groningen
e.r.a.weitenberg@gmail.com

Geschiedenis

Schoute herschijnt

in 1893 publiceerde Pieter Hendrik Schoute een gedetailleerde beschrijving van drie draadmodellen van discriminantoppervlakken. Nadien hebben anderen soortgelijke modellen gebouwd, maar zelden werd daarbij gerefereerd naar Schoute. Jaap Top en Erik Weitenberg laten Schoutes bijdrage aan dit onderwerp herleven, onder andere aan de hand van verslagen van vergaderingen van de wis- en natuurkundige afdeling van de KNAW.

Hoogleraar Pieter Hendrik Schoute (1846–1913) was vanaf 1881 als meetkundige werkzaam in Groningen. In 1886 werd hij gekozen tot lid van de KNAW, in het cursusjaar 1892–1893 was hij rector van de Rijksuniversiteit Groningen en vanaf 1898 was hij redacteur bij het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.



Pieter Hendrik Schoute (1846–1913)

Als meetkundige werd hij vooral bekend door zijn werk aan regelmatige polytopen in de vierdimensionale ruimte. Hoofdstuk 5 van het proefschrift uit 2007 van Irene Polo [4] geeft hiervan een goede indruk, met name wat betreft Schoutes samenwerking met Alicia Boole Stott. Een recent prachtig artikel van Wieb Bosma [1] laat zien dat Schoute zich ook met heel andere onderwerpen, namelijk het populariseren van wiskunde, bezighield. In dit artikel zien we nog een (vergeten) onderwerp uit Schoutes oeuvre: het visualiseren van discriminanten.

Schoutes oppervlakken

In het *Verslag der Zitting van de Wis- en Natuurkundige Afdeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* van zaterdag 27 mei 1893 lezen we [6, pp. 8–12]:

Wiskunde. – De Heer SCHOUTE vertoont drie draadmodellen van ontwikkelbare oppervlakken, die met hogere-machtsvergelijkingen in verband staan, en voegt daaraan de volgende verklaring toe. ...

Waarschijnlijk was Schoute eerder op diezelfde zaterdag te vinden in de trein ergens tussen Groningen en Amsterdam. De genoemde

draadmodellen worden elk begrensd door een metalen frame van $21,5 \times 21,5 \times 21,5$ cm, dus Schoute had heel wat mee te sjouwen. Na zijn beschrijving, zo meldt het verslag, “volgt eene korte discussie met de Heeren Grinwis en Korteweg”. Cornelius Hubertus Carolus Grinwis (1831–1899) werkte als toegepast wiskundige in Utrecht; Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) is de bekende Amsterdamse wiskundige.

De gedetailleerde beschrijving van de modellen is niet alleen in bovengenoemd verslag [6] te vinden. Een Duitse bewerking [7] van zijn tekst met nog wat extra gegevens publiceert Schoute in hetzelfde jaar 1893 op de pagina's 25–28 van de appendix (Nachtrag) die Walther Dyck uitgeeft bij zijn *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente* [2].

Dankzij deze nauwkeurige beschrijvingen is het niet moeilijk de drie oorspronkelijke modellen terug te vinden in de omvangrijke collectie meetkundige modellen die het Groningse Johann Bernoulli Instituut nog altijd bezit. Zie Figuur 1, 2 en 3.

Door een gelukkig toeval kunnen we ons een goede indruk verschaffen, hoe het toeging tijdens zo'n maandelijks gewone zitting van de wis- en natuurkundige afdeling van de KNAW. De enorme diversiteit aan onderwerpen zoals deze iedere laatste zaterdag van de maand in het Trippenhuis te Amsterdam werden besproken, is al snel met wat bladeren in de verslagen te zien. Maar minstens zo aardig is het dat de Amsterdamse



Figuur 1 Schoutes eerste model

kunstenaar Martin Monnickendam zo'n vergadering bezocht en er een tekening van maakte. Deze is gedateerd op 28 april 1900. Zie Figuur 4. De datum 28 april 1900 betreft inderdaad een laatste zaterdag van een maand, maar zoals in het verslag van de zitting van 31 maart 1900 is te lezen, moest vanwege een 'Vereenigde Vergadering der beide Afdelingen' de gewone vergadering van april 1900 uitwijken naar de 21ste. De beschrijving van Monnickendams prent op de Beeldbank van het Stadsarchief van Amsterdam (te vinden via <http://beeldbank.amsterdam.nl>) bevat een aantal fouten, mogelijk omdat Monnickendam de namen van de personen die hij portretteerde eerst ergens noteerde en dat dan later hij of anderen moeite hadden om alles te ontcijferen. Op de prent zouden dan te vinden zijn: J.M. van Bemmelen, J. Cardinaal, G. van Diesen, H. Haga, J.C. Kluyver, D.J. Korteweg, H.A. Lorentz, Th.H. MacGillavry, T. Place, N.W.P. Rauwenhoff, H.G. van de Sande Bakhuyzen, P.H. Schoute, J.D. van der Waals, F.A.F.C. Went. Zo komen we tot 14 namen terwijl op de tekening 15 personen te onderscheiden zijn. Wie de resterende persoon is, en ook wie precies waar zit, is ons onbekend. Wel zijn duidelijk centraal op de tekening (met voorzittershamer in zijn hand) de voorzitter H.G. van de Sande Bakhuyzen, met aan zijn linkerhand de secretaris J.D. van der Waals te herkennen.

Het verslag van de vergadering van 21 april 1900 meldt: "De Heer Lorentz heeft bericht gezonden, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen." Kennelijk toont de prent dus niet deze bijeenkomst, maar een eerdere. In januari 1900 was Schoute afwezig, en in februari van dat jaar vergaderde men zonder J.D. van der Waals. Hoogstwaarschijnlijk toont de prent dan ook de vergadering van 31 maart 1900. Als wiskundige was daarbij naast Cardinaal, Kluyver, Korteweg en Schoute ook Jan de Vries uit Utrecht aanwezig; mogelijk is hij dus de resterende persoon op de tekening.

Op 24 juni 1893, de zitting volgend op die



Figuur 2 Schoutes tweede model

waarop Schoute zijn modellen toonde, komt hij kort op het onderwerp terug. De letterlijke tekst zoals opgeschreven in het verslag [6, p. 44] is:

Wiskunde. – De Heer SCHOUTE deelt, ter aanvulling van zijn in de vorige vergadering gehouden voordracht mede, dat Dr. KERSCHENSTEINER te Schweinfurt wel modellen gemaakt heeft van discriminantoppervlakken, doch geen draadmodellen. In stede van zich derhalve met het maken van teekeningen alleen tevreden te stellen, heeft Dr. KERSCHENSTEINER uit blik dwarsdoorsneden vervaardigd, en deze, na ze aan elkaar gesoldeerd te hebben, met een kneedbare stof: het *plastellin*, dat niet hard wordt maar altijd kneedbaar blijft, bedekt.

Discriminanten en meetkunde

In het KNAW-verslag uit 1893 staat, dat Schoute zijn onderzoek doet "in het voetspoor van SYLVESTER." Dit slaat op Sylvesters artikel [8] uit 1864, waarin deze op een meetkundige manier het aantal reële nulpunten van een (reële) veeltermvergelijking bepaalt. Overigens schrijft Schoute aan het begin van zijn tekst [7] in de Appendix van Dycks catalogus: "Betrachtet man nach Sylvester und Kronecker..."

Het door Sylvester beschreven idee is verrassend simpel. Beschouw een (reële) familie van polynomen

$$p(t) := f(t) + xg(t) + y,$$

waarin f en g vastgekozen polynomen zijn, met $\text{graad}(f) > \text{graad}(g) > 0$. Elk polynoom in de gegeven familie correspondeert dan met een uniek punt (x, y) in het vlak. De polynomen die een gegeven nulpunt $t = s$ hebben, corresponderen zo precies met de lijn gegeven door $f(s) + xg(s) + y = 0$ in het vlak. En zo'n polynoom in de familie heeft ergens een dubbel nulpunt, precies dan als er een s bestaat zodat (x, y) oplossing is van het stelsel



Figuur 3 Schoutes derde model

$$\begin{cases} f(s) + xg(s) + y = 0 \\ f'(s) + xg'(s) = 0. \end{cases}$$

Is $g'(s) \neq 0$, dan heeft dit stelsel een unieke oplossing. Omgekeerd, nemen we voor s een variabele, dan definieert het bovenstaande stelsel twee rationale functies $x = x(s)$ en $y = y(s)$. Deze hebben de eigenschap dat

$$f(t) + x(s)g(t) + y(s) = (t - s)^2 h(t),$$

voor een zeker polynoom $h(t)$ met als coëfficiënten rationale functies in s . In deze gelijkheid de afgeleide nemen naar s levert dan een nieuw polynoom dat ook $t = s$ als nulpunt heeft. Een veelvoud van dat nieuwe polynoom bij de eerste optellen geeft

$$f(t) + (x(s) + \lambda x'(s))g(t) + y(s) + \lambda y'(s),$$

en die heeft voor elke λ een nulpunt $t = s$. Dus $(x(s), y(s)) + \lambda(x'(s), y'(s))$ ligt op de lijn in het vlak horend bij alle polynomen met nulpunt $t = s$.

Samenvattend: $s \mapsto (x(s), y(s))$ definieert de kromme in het vlak corresponderend met de polynomen met een dubbel nulpunt, en de raaklijn (bij gegeven, algemene, s) aan deze kromme is precies de lijn corresponderend met alle polynomen die $t = s$ als nulpunt hebben.

Een voorbeeld is dat van de overbekende kwadratische polynomen $t^2 + xt + y$. Hier geldt $x(s) = -2s$ en $y(s) = s^2$. Deze twee functies parametriseren een parabool P in het vlak. Uit het bovenstaande maken we op dat het aantal oplossingen van de vergelijking $t^2 + at + b = 0$ gelijk is aan het aantal lijnen door (a, b) die raken aan P . Dit voorbeeld is ook te vinden in een collegedictaat van Felix Klein uit 1908 [3].

Merk op, dat de methode ook werkt voor veeltermen van een veel hogere graad. In zijn voorwoord van de catalogus [2], legt Klein al in 1892 bovenstaande methode uit. Ook hij verwijst naar het artikel van Sylvester uit 1864 en



Illustratie: Stadsarchief Amsterdam

Figuur 4 Martin Monnickendam: Vergadering afdeling Wis- en Natuurkunde KNAW, 1900

daarnaast naar colleges van Kronecker. Aan het eind van zijn verhaal zegt Klein dat een analoge meetkundige behandeling van families $f(t) + xg(t) + yh(t) + z$ zonder nauwkeurige modellen vrijwel ondoenlijk is.

Dit is precies de taak die Schoute op zich neemt. Schoute kiest families van graad 3, 4 en 6 en wel zo, dat in elke familie alle mogelijkheden voor het totaal aantal reële nulpunten van een willekeurig polynoom van die graad, ook werkelijk voorkomen. Zijn modellen geven de punten (x, y, z) weer met de eigenschap dat het bijbehorende polynoom een dubbel nulpunt heeft. Deze vormen een oppervlak dat Schoute het *discriminantenoppervlak* van de gegeven familie veeltermen noemt. Verder beschrijft hij nauwkeurig de singulariteiten van de door hem bestudeerde discriminantenoppervlakken. In zijn KNAW-tekst merkt Schoute overigens op dat ook al in Dycks catalogus een tekst voorkomt waarin tekeningen van zulke oppervlakken worden gepresenteerd. Echter, uit niets blijkt dat de auteur ook echte modellen heeft gemaakt, en

bovendien bevat de tekst minder uitleg dan Schoute wenselijk acht. Bijvoorbeeld: omdat voor algemene, vaste s het stelsel

$$\begin{cases} f(s) + xg(s) + yh(s) + z = 0 \\ f'(s) + xg'(s) + yh'(s) = 0 \end{cases}$$

een lijn definieert, bestaat een discriminantenoppervlak vrijwel geheel uit een vereniging van allemaal rechte lijnen. Dat maakt ze heel geschikt om als draadmodel te worden weergegeven. Uit niets in de door Schoute genoemde tekst blijkt dat de auteur zich daarvan bewust was.

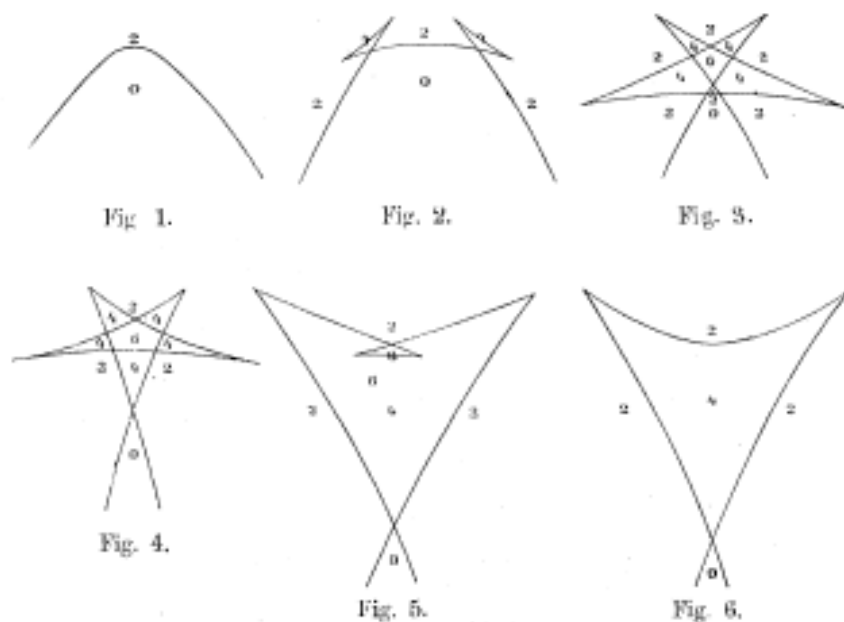
Deze auteur is Georg Kerschensteiner (1854–1932) die later als pedagoog beroemd zou worden, en die net als Schoute als reactie op Kleins inleiding ingaat op de vraag hoe zo'n discriminantenoppervlak er uit ziet. In Dycks catalogus [2, pp. 168–173] geeft Kerschensteiner gedetailleerde schetsen. Met name zijn tekening van de punten (x, y, z) met de eigenschap dat $t^4 + xt^2 + yt + z$ een

dubbel nulpunt heeft, is later door diverse anderen zonder veel veranderingen overgenomen. Bijvoorbeeld in Webers *Lehrbuch der Algebra* (1895) en ook in Kleins *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Engelse vertaling uit 1932; de Duitse versie [3] stamt uit 1908).

Schoute probeert met Kerschensteiner in contact te komen, en zoals we eerder in deze tekst zagen is dat gelukt. Dit stimuleert Kerschensteiner om, net als Schoute, ook een draadmodel te maken. Schoute had al discriminanten van polynomen van graad 3, 4, en 6 gedaan, dus Kerschensteiner besluit om naar graad 5 te kijken. Hij kiest daartoe de familie

$$t^5 + xt^2 + yt + z,$$

en in de Appendix van Dycks catalogus [2, pp. 23–25] publiceert hij een verslag hierover. Daarin staat onder meer dat het resulterende oppervlak er net zo uit ziet als het oppervlak verkregen bij de veeltermen



Figuur 5 Schoutes dwarsdoorsneden van een discriminantenoppervlak. De getallen zijn het aantal reële nulpunten van de bijbehorende veeltermen.

$t^3 + xt^2 + yt + z$. Dat komt omdat de gebruikte familie geen veeltermen bevat die 5 reële nulpunten hebben. De door Schoute gekozen voorbeelden zijn in deze zin algemener: hij gebruikte $t^3 + xt^2 + yt + z$ waarin zowel gevallen met precies één reëel nulpunt, als gevallen met drie reële nulpunten voorkomen. En in zijn voorbeeld $t^4 + xt^2 + yt + z$ kan het totaal aantal reële nulpunten elk van de mogelijkheden 0, 2 en 4 zijn. In Schoutes laatste voorbeeld,

$$t^6 - 15t^4 + xt^2 + yt + z,$$

komen 0, 2, 4 en 6 voor voor dit aantal.

Schoute blijkt vooral geboeid door de optredende singulariteiten van de discriminantenoppervlakken. Hij bepaalt deze singulariteiten, en hij beschrijft en schetst niveaukrommen van de oppervlakken waardoor een goede indruk van hun aard wordt verkregen. Bijvoorbeeld voor de familie van zesdegraads veeltermen komt dit neer op, voor vaste $x = x_0$, de punten (y, z) in het vlak te tekenen waarvoor geldt dat

$$t^6 - 15t^4 + x_0t^2 + yt + z$$

een dubbel nulpunt heeft. Deze punten worden geparametriseerd door

$$\begin{aligned} y &= -6t^5 + 60t^3 - 2x_0, \\ z &= -yt - t^6 + 15t^4 - x_0t^2 \\ &= 5t^6 - 45t^4 - x_0t^2 + 2x_0t \end{aligned}$$

en Schoute tekent dit opvallend precies, voor

zes verschillende waarden $x = x_0$, zie Figuur 5.

Precies 50 jaar na dit werk van Schoute verscheen het artikel van Hassler Whitney waarover recent in het *Nieuw Archief voor Wiskunde* een artikel [9] verscheen. Schoutes voorbeelden passen hier naadloos in, maar helaas waren ze inmiddels vergeten.

Geen Schoute in Schilling

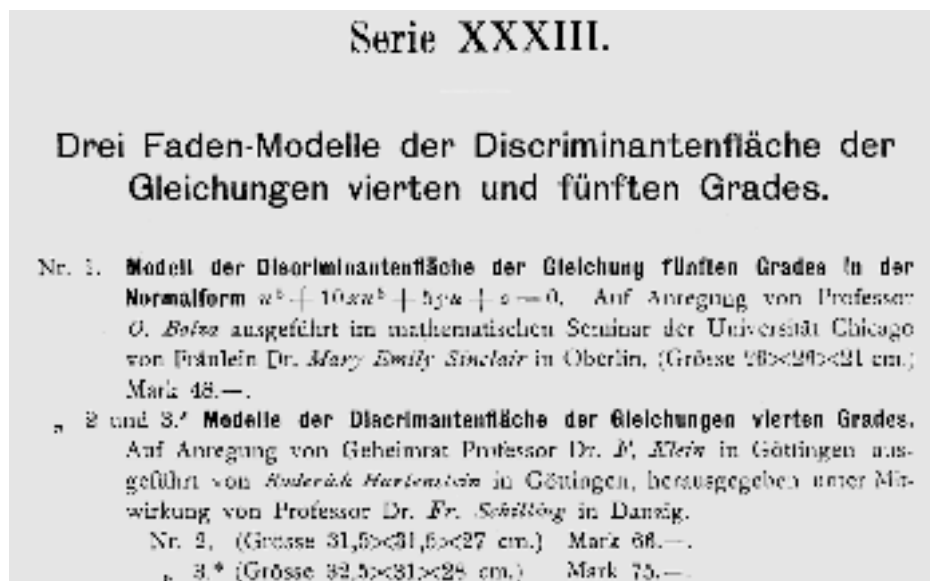
In navolging van L. Brill in de 19de eeuw, leverde de firma M. Schilling vanaf 1899 vele modellen van meetkundige figuren aan Europese en Amerikaanse universiteiten. In 1911 publiceerde Schilling de zevende editie van

zijn catalogus waarin alle tot dusver door hem gefabriceerde modellen staan opgesomd [5]. De nieuwe catalogus geeft een onderverdeling van de modellen in 40 series waarvan een aantal nieuw is. Een van de nieuwe is Serie XXXIII, bestaande uit drie draadmodellen van discriminantenoppervlakken.

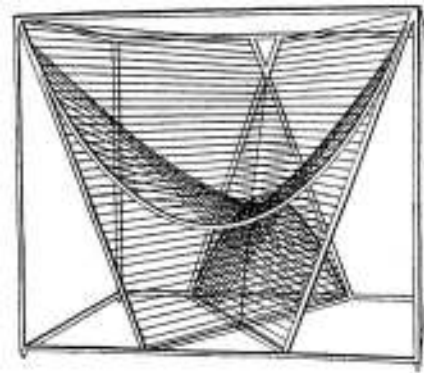
Ook Schoute maakte (19 jaar eerder) drie zulke modellen, dus het ligt een beetje voor de hand om te veronderstellen dat in Serie XXXIII de modellen van Schoute gereproduceerd zijn. Maar dat is niet het geval! Zie namelijk in Figuur 6 wat we hierover in de catalogus kunnen lezen. Geen Schoute dus, en ook al geen Kerschensteiner. Sterker nog, hun naam komt nergens in de nieuwe catalogus voor. De genoemde Roderich Hartenstein deed in het studiejaar 1905/06 staatsexamen onder begeleiding van Klein, en als onderwerp daarvoor koos hij de discriminantenoppervlakken. De twee modellen in Serie XXXIII die hij maakte, tonen beide het oppervlak bij de familie

$$t^4 + xt^2 + yt + z.$$

Er is een klein verschil met Schoutes model van hetzelfde voorbeeld: voor een willekeurige $b > 0$ is $(t^2 + b)^2$ een veelterm in de gegeven familie, en bovendien hebben deze veeltermen twee (niet-reële) dubbele nulpunten. Dit betekent dat de punten $(2b, 0, b^2)$ deel uitmaken van het discriminantenoppervlak, maar (voor $b > 0$) terwijl door elk ander punt van het oppervlak een (reële) rechte lijn gaat die onderdeel van het oppervlak uitmaakt, is dat bij deze punten niet het geval. Dus in een draadmodel zijn ze niet zichtbaar.



Figuur 6 Beschrijving van Serie XXXIII in de zevende editie van de catalogus van Schilling [5]



Figuur 7 Hartensteins tweede model: oppervlak plus twee vlakken

Schoute beschrijft in zijn teksten deze punten wel, maar ze zijn niet te zien in zijn model. Hartenstein (en de firma Schilling) bevestigden een stukje koperdraad aan hun model zodat ook deze punten erin te vinden zijn. Het tweede model in Serie XXXIII van hetzelfde oppervlak illustreert een antwoord op de vraag hoe je bij gegeven getallen $a < b$, met behulp van het discriminantenoppervlak alle reële veeltermen $t^4 + xt^2 + yt + z$ kan vinden met een gegeven aantal nulpunten in het interval $[a, b]$. Daarvoor zijn, behalve het oppervlak, de vlakken met vergelijking $a^4 + a^2x + ay + z = 0$ en ook met $b^4 + b^2x + by + z = 0$ nodig. Schillings catalogus bevat een tekening van het resultaat, zie Figuur 7.

Bij het resterende model in de Schilling serie staat de naam Oskar Bolza. Hij promoveerde in 1886 bij Klein, vertrok drie jaar later naar de Verenigde Staten, en werd in 1892 hoogleraar in Chicago. Als onderwerp voor haar masterscriptie gaf hij in 1902 aan Mary Emily Sinclair de vraag om het discriminantenoppervlak bij de familie

$$t^5 + xt^3 + yt + z$$

te beschrijven. Dit lijkt sterk op de familie die

Kerschensteiner behandelde, maar er is een belangrijk verschil: in dit nieuwe voorbeeld komen *wel* alle gevallen 1, 3, 5 voor het totale aantal reële nulpunten voor. Na haar promotie (ook bij Bolza) is Sinclair aan Oberlin College gaan werken. De bibliotheek van deze instelling bezit een origineel van haar masterscriptie, inclusief met kleurpotlood ingekleurde pentekeningen van haar oppervlak. Hoewel de scriptie naadloos past bij de artikelen van Schoute en van Kerschensteiner over hetzelfde onderwerp, refereert Sinclair niet naar hun werk.

In Schillings catalogus lezen we zowel bij de beschrijving van Hartensteins modellen als bij die van Sinclair: “Eine ausführliche Abhandlung wird beigelegt.” Een zoektocht langs Nederlandse en Duitse universiteitsbibliotheken naar deze ‘Abhandlung’ bleef zonder succes, maar via een bekende Duitse antiquair in Albstadt is het gelukt de tekst van Hartenstein in ons bezit te krijgen. Het is een drukwerkje uit 1909 bestaande uit 19 pagina’s. Op p. 15 staat de voetnoot: “Über frühere Darstellungen dieser Fläche vgl. G. Kerschensteiner, Geometrische Darstellung der Discriminanten der Gleichungen dritten und vierten Grades, Dyckscher Katalog, S. 168 ff.; P.H. Schoute, Drei Fadenmodelle von entwickelbaren Flächen, die mit algebraischen Gleichungen höheren Grades in Verbindung stehen, Dyckscher Katalog, Nachtrag (München 1893), S. 25 f.”

De ‘Abhandlung’ van Sinclair bleek, evenals haar scriptie, aanwezig in Oberlin College, die ons bereidwillig een digitale kopie ervan toezond. De tekst bestaat uit 8 pagina’s en is gedateerd mei 1908. Het werk van Kerschensteiner en van Schoute wordt ook hierin niet genoemd. De modellen uit Serie XXXIII zijn onder meer nog aanwezig in het Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg: hun prachtige collectie is ook on-



Figuur 8 Serie XXXIII Nr. 1: Sinclairs discriminantenoppervlak

line te vinden via <http://did.mathematik.uni-halle.de/modell>. Zie Figuur 8.

De vraag waarom Serie XXXIII niet uit Schoutes modellen bestaat, heeft waarschijnlijk vooral als antwoord dat Schoute verder afstond van de hoofdrolspelers in Schillings series. Klein kende ongetwijfeld Schoutes artikel in Dycks catalogus, want zijn staatsexamenstudent Hartenstein verwijst ernaar. Ook Bolza wist waarschijnlijk van het werk van zowel Schoute als van Kerschensteiner, want het onderwerp dat hij Sinclair gaf voor haar masterscriptie sluit daar naadloos bij aan. Het zal Schoute, die als hoogleraar in Groningen honderden modellen uit de Schilling collectie heeft aangeschaft, zeker zijn opgevallen dat de tussen 1908 en 1911 gemaakte serie XXXIII dunnetjes overdeed wat hij al in 1893 had. De Groningse verzameling modellen bevat dan ook geen serie XXXIII. Met de drie modellen van Schoute zelf, was dat overbodig. ←

Referenties

- 1 Wieb Bosma, *Wiskundige verpoelingen*, NAW 5/10 nr. 1 maart 2009, 42–47.
- 2 Walther von Dyck, *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. München: C. Wolf & Sohn, 1892 and 1893. (De oorspronkelijke catalogus uit 1892 bestaat uit 430 bladzijden; het supplement (Nachtrag) uit 1893 voegt hier 135 bladzijden aan toe.)
- 3 Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08, ausgearbeitet von E. Hellinger. Leipzig: B.G. Teubner, 1908.
- 4 Irene Polo-Blanco, *Theory and History of Geometric Models*. Proefschrift, Groningen: 2007.
- 5 *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. Siebente Auflage. Leipzig: Martin Schilling, 1911.
- 6 P.H. Schoute, *Drie draadmodellen van ontwikkelbare oppervlakken, die met hoogere-machtsvergelijkingen in verband staan*, pp. 8–12 in: *Verslagen der Zittingen van de Wetenschappelijke Afdeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, van 27 mei 1893 tot 21 april 1894. Amsterdam: Johannes Müller, 1894.
- 7 P.H. Schoute, *Drie Fadenmodelle von entwickelbaren Flächen, die mit algebraischen Gleichungen höheren Grades in Verbindung stehen*, pp. 25–28 in de ‘Nachtrag’ van [2].
- 8 J.J. Sylvester, *Algebraical Researches, Containing a Disquisition on Newton’s Rule for the Discovery of Imaginary Roots, and an Allied Rule Applicable to a Particular Class of Equations, Together with a Complete Invariantive Determination of the Character of the Roots of the General Equation of the Fifth Degree, et cetera*, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **154** (1864), 579–666.
- 9 Ferdinand Verhulst en Oleg Kirillov, *Bottema opende Whitney’s paraplu*, NAW 5/10 nr. 4 december 2009, 250–254.

Szilárd András

Department of Applied Mathematics
Babeş-Bolyai University
M. Kogalniceanu 1
Cluj Napoca, Romania
andraszk@yahoo.com

Kinga Sipos

Department of Applied Mathematics
Babeş-Bolyai University
M. Kogalniceanu 1
Cluj Napoca, Romania
kinga.sipos@yahoo.com

Anna Soós

Department of Applied Mathematics
Babeş-Bolyai University
M. Kogalniceanu 1
Cluj Napoca, Romania
asoos@math.ubbcluj.ro

Recreatieve wiskunde

Welke Wirrel Warrel is moeilijker?

Met de van schuimplastic vervaardigde Wirrel Warrel-puzzels kun je kubussen en andere objecten maken. Ze zijn er in verschillende kleuren en elke kleur heeft een andere moeilijkheidsgraad. Szilárd András, Kinga Sipos en Anna Soós gebruikten de puzzels als onderwijsmateriaal. Daarbij ontdekten ze dat er iets mis is met de moeilijkheidsaanduidingen van de fabrikant. In dit artikel gaan zij op zoek naar een beter classificatiesysteem voor de Wirrel Warrel-puzzels.

Wirrel Warrel-puzzels [1] zijn constructiepuzzels die in 1986 zijn bedacht door Dirk Laureyssens, een Belgische uitvinder van speelgoed [2]. Ze zijn in de Verenigde Staten ook bekend onder de namen *Happy Cube* of *Snafooz* en in Spanje als *Cococrash*. Een Wirrel Warrel-puzzel bestaat uit zes stukken schuimplastic waarin telkens zes delen zijn uitgestanst (zie Figuur 1). Je kunt er op drie manieren mee puzzelen. De 2D-opdracht is het terugplaatsen van de zes stukken in het frame, in de 3D-opdracht moet je met de zes stukken een kubus maken en de '∞D' taak is om 3D-objecten te bouwen met de onderdelen van alle zes de puzzels. De 2D-taak is eenvoudig en de '∞D' taak hangt van

teveel parameters af (bijvoorbeeld welke onderdelen gebruikt worden en welk object wordt gemaakt). We beperken ons daarom tot de 3D-opdrachten.

Vaak kun je de eerste twee of drie (en zelfs vier of vijf) stukken op een aantal manieren samenvoegen, maar in veel gevallen zal het laatste stuk niet blijken te passen.

De Wirrel Warrel-familie is verdeeld in vier verschillende verzamelingen: *Little Genius*, *Happy Cube*, *Profi Cube* en *Marble Cube*. Volgens de fabrikant [2] neemt de moeilijkheid in deze sets toe (aangegeven met respectievelijk één, twee, drie of vier sterren). Elke set bestaat weer uit zes modellen waarvan de moeilijkheidsgraad ook met sterren is aangegeven. In Tabel 1 is te zien uit welke kubussen de *Profi Cube* en de *Marble Cube* bestaan.

De *Profi Cube* wordt aanbevolen voor de leeftijdsgroep 7 tot 125 jaar en wordt als 'moeilijk' getypeerd, en de *Marble Cube* is voor leeftijden van 9 tot 125 en worden geclassificeerd als 'het moeilijkst'. Wij hebben deze puzzels verscheidene jaren gebruikt, niet alleen als educatief speelgoed, maar ook als onderwijsmateriaal ter illustratie van



Figuur 1 Van links naar rechts: Een Wirrel Warrel-puzzel in de originele verpakking (2D-opdracht volbracht); De onderdelen van een Wirrel Warrel-puzzel; Drie zijvlakken in elkaar; Het moment van de waarheid. Past ie of past ie niet?; Een Wirrel Warrel-puzzel in elkaar gezet (3D-opdracht volbracht)

Moeilijkheid	Profi Cube	Marble Cube
*	Confucius	Martin L. King
**	Da Vinci	Omar Khayyam
***	Marco Polo	Marie Curie
****	Rubens	Buckminster Fuller
*****	Watt	Mahatma Gandhi
*****	Newton	Albert Einstein

Tabel 1 De verschillende modellen van Profi Cube en Marble Cube

wiskundige modellering. Deze activiteiten waren bedoeld voor jongeren van 14–18 jaar en richtten zich voornamelijk op het ontwikkelen van het begrip ‘graaf’, de ‘herontdekking’ van het *backtracking* algoritme en optimalisering hiervan met snedes. Tijdens deze activiteiten ontdekten zowel wijzelf als onze studenten dat er iets mis is met de moeilijkheidsaanduiding van de fabrikant. Onze indruk was dat de *Marble*-set niet moeilijker maar juist makkelijker is dan de *Profi*-set en dat ook de sterren binnen een set weinig relatie hebben met de moeilijkheidsgraad. Dit bracht ons op de volgende vragen:

1. Hoe kun je uit gemeten oplostijden een goede volgorde maken van kubussen?
2. Hoe kun je theoretisch de moeilijkheid van de kubussen definiëren zo dat de bijbehorende classificatie klopt met de voorgaande?

Een beetje wiskunde en analyse van algoritmes

We stellen elk zijvlak van de kubus voor als een 5×5 matrix met elementen 0 en 1. Het getal in de i -de rij en de j -de kolom is 1 precies dan als het bijbehorende vierkantje in het vlak van de kubus aanwezig is (zie Figuur 2).

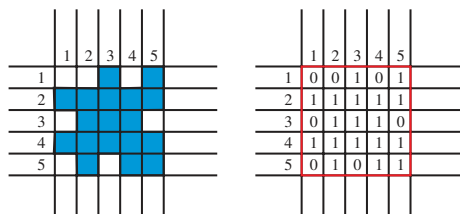
Om alle mogelijke posities van elk van de zes zijvlakken te kunnen beschrijven, gebruiken we per zijvlak acht van dergelijke matrices, namelijk vier rotaties en hun gespiegelden waarbij de voorkant van het vlakje achter komt. We noteren deze matrices als $M_1, M_2, \dots, M_{48}$. Afhankelijk van de symmetrie van het zijvlak kan een aantal van deze matrices samenvallen, maar dat is geen probleem. We definiëren een relatie $\sim$ op de verzameling van deze matrices als volgt: $A \sim B$ dan en slechts dan als A en B corresponderen met verschillende vlakken en als deze vlakken precies in elkaar passen met de zijde die overeenkomt met de eerste rij van de matrices. In formules betekent dit:

$$a_{1i} + b_{1i} = 1 \text{ voor alle } i = 2, 3, 4;$$

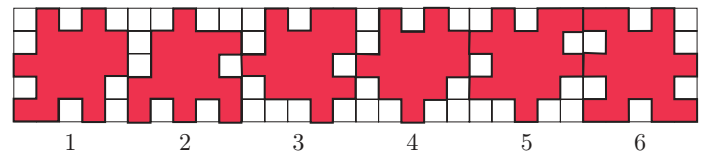
$$a_{11} + b_{11} \leq 1 \text{ en als } a_{11} = b_{11} = 0 \text{ dan moet } a_{21} = 0 \text{ of } b_{21} = 0;$$

$$a_{15} + b_{15} \leq 1 \text{ en als } a_{15} = b_{15} = 0 \text{ dan moet } a_{25} = 0 \text{ of } b_{25} = 0.$$

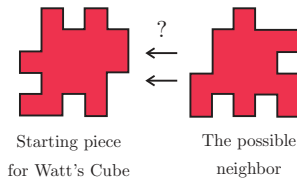
De laatste twee voorwaarden zorgen ervoor dat als een hoekelement niet wordt opgevuld door deze twee vlakken, het wel kan worden bereikt door het derde vlak dat de hoek compleet maakt. Verder volgt hieruit automatisch dat elk hoekkubusje opgevuld wordt omdat het



Figuur 2 Voorstelling van een zijvlak als matrix



Figuur 3 De zijvlakken van de Watt-kubus



Figuur 4 Een unieke start voor de Watt-kubus

totale aantal hoekkubusjes van de puzzel klopt. Een oplossing van de kubus kan dus op deze manier worden beschreven als een verzameling van 12 corresponderende paren matrices, voor elke ribbe één. We stellen nu een 48×48 incidentiematrix F op, waarbij een element f_{ij} gelijk is aan 1 als de corresponderende stukken aan elkaar passen ($M_i \sim M_j$) en 0 anders. De som van de elementen in de j -de kolom van F geeft dus het aantal stukken aan dat aan één zijde van een bepaald stuk past. Omdat elk zijvlak in de oplossing voorkomt, kunnen we bij het construeren van een oplossing bij elk zijvlak beginnen. We kiezen daarvoor het georiënteerde zijvlak dat wordt voorgesteld door de matrix M_j waarvoor $\sum_{i=1}^{48} f_{ij}$ minimaal is. Dit is een handige keuze omdat daardoor het aantal vervolgmogelijkheden wordt beperkt. Als we geluk hebben dan past er maar één stukje. Dit treedt op bij de Watt-kubus (zie Figuur 3 en 4).

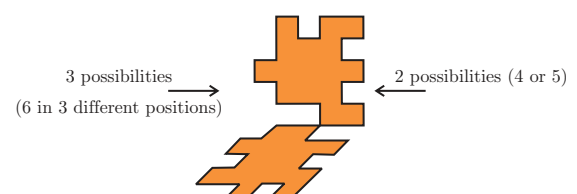
We definiëren dit kleinste aantal als de eerste complexiteitsindicator c_1 :

$$c_1 = \min_{1 \leq j \leq 48} \sum_{i=1}^{48} f_{ij}. \quad (1)$$

Tabel 2 geeft een overzicht van deze indicator. Sommige kubussen hebben echter symmetrische zijvlakken en dat moet worden meegenomen als we aantallen tellen. Dit kan in de incidentiematrix F worden gedaan door breuken te introduceren. Als een zijvlak L (gecodeerd door de matrices $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_8}$) symmetrie vertoont, dan tellen we voor elke matrix het aantal keren s_k dat deze matrix voorkomt in $\{M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_8}\}$. We gebruiken dan $\frac{1}{s_k}$ in plaats van 1 in de kolommen en rijen van M_{i_k} . Deze matrix duiden we aan met FS en de bijbehorende complexiteitsindicator is

$$cs_1 = \min_{1 \leq j \leq 48} \sum_{i=1}^{48} fs_{ij}. \quad (2)$$

Dit noemen we de eerste gecorrigeerde complexiteitsindicator. Tabel 3 laat de waarden hiervan zien. We gaan nu recursief drie nieuwe com-



Figuur 5 De tweede stap bij het in elkaar zetten van de Watt-kubus

<i>Profi Cube</i>	c_1	<i>Marble Cube</i>	c_1
Confucius	8	King	2
Da Vinci	8	Khayyam	8
Marco Polo	7	Curie	3
Rubens	6	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

Tabel 2 De complexiteitsindicator c_1 voor de modellen van *Profi Cube* en *Marble Cube*

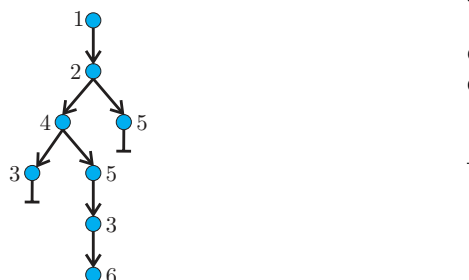
<i>Profi Cube</i>	cs_1	<i>Marble Cube</i>	cs_1
Confucius	4	King	2
Da Vinci	4	Khayyam	3
Marco Polo	4	Curie	3
Rubens	5	Fuller	2
Watt	1	Gandhi	2
Newton	2	Einstein	3

Tabel 3 De eerste gecorrigeerde complexiteitsindicator cs_1 voor de modellen van *Profi Cube* en *Marble Cube*

plexiteitsindicatoren definiëren door een graaf te construeren die de mogelijkheden in het oplosproces laat zien. We doen dit aan de hand van de Watt-kubus. Als we beginnen met vlak 1 en 2 aan elkaar te zetten, dan hebben we aan de ene kant twee en aan de andere kant drie mogelijkheden om een derde stuk te plaatsen (zie Figuur 5). We kiezen de kant met de minste mogelijkheden en voor elke mogelijkheid analyseren we de ontstane situatie. Als we in elke stap een zijkant plaatsen op de plek met de minste mogelijkheden krijgen we voor de Watt-kubus de graaf in Figuur 6. Elke knoop stelt een plaatsing van een zijde voor met het aantal mogelijkheden.

Als we met een ander stuk starten krijgen we een boom met meer knopen, dus het is mogelijk (als je pech hebt) om meer tijd te besteden aan het in elkaar zetten van de kubus. Voor de keuze van de zijvlakken hebben we nu een *greedy* aanpak gekozen. Het is duidelijk dat we daarmee niet altijd de kleinste graaf zullen krijgen, maar we kunnen het algoritme zonder moeite uitvoeren omdat we geen configuraties hoeven te onthouden. Figuur 9 en 10 in de Appendix laten voor de kubussen uit de *Profi*- en de *Marble*-groepen de grafen zien die je zo krijgt.

We gaan nu de moeilijkheid van een kubus relateren aan de complexiteit van deze graaf. De eerste gecorrigeerde complexiteitsindicator cs_1 is het aantal knopen op het eerste niveau, dus het ligt voor de hand om een k -de gecorrigeerde complexiteitsindicator cs_k in te voeren als het aantal knopen op niveau k , voor $1 \leq k \leq 5$. Het is duidelijk dan cs_5 het aantal niet-equivalente oplossingen van de kubus is. Alle



Figuur 6 De mogelijkheden bij het oplossen van de Watt-kubus

kubussen die we bekeken, hebben een unieke oplossing ($cs_5 = 1$), behalve de Omar Khayyam-kubus die drie oplossingen heeft. Verder kunnen we nog voor iedere kubus tellen hoe vaak een poging niet succesvol is, dat is het aantal takken waarvan de lengte kleiner dan 5 is. We noemen dit getal cs_6 . Voor de Watt-kubus (Figuur 6) is $cs_6 = 2$. We hebben nu voor elke kubus zes complexiteitsvectoren $r_j = (cs_j^i)_{1 \leq i \leq 12}$ voor $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Om tot een geschiktere maatstaf voor de complexiteit te komen definiëren we nog drie complexiteitsgetallen als volgt:

1. De kans dat je zonder backtracken tot een oplossing komt in de graaf die we gedefinieerd hebben.
2. Het gemiddelde aantal stappen met backtracking dat nodig is om een oplossing te vinden.
3. De verhouding tussen het aantal eindknopen op het laagste niveau en het totale aantal eindknopen.

Met betrekking tot deze indicatoren vinden we de volgende ordeningen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r_7	8	5	6	7	9	12	10	11	1	3	4	2
r_8	6	8	12	5	7	11	9	10	1	3	4	2
r_9	8	5	6	7	12	11	9	10	1	3	4	2

Ten slotte voeren we een *principal component* analyse uit op de variabelen $(r_j)_{1 \leq j \leq 9}$ en de doelvector v die werd verkregen uit tijden die werden gemeten bij 120 middelbare scholieren. Om de vector v samen te stellen uit de tijdmetingen hebben we verschillende methoden gebruikt: gemiddelde tijden, medianen en hiërarchische clustertechnieken.

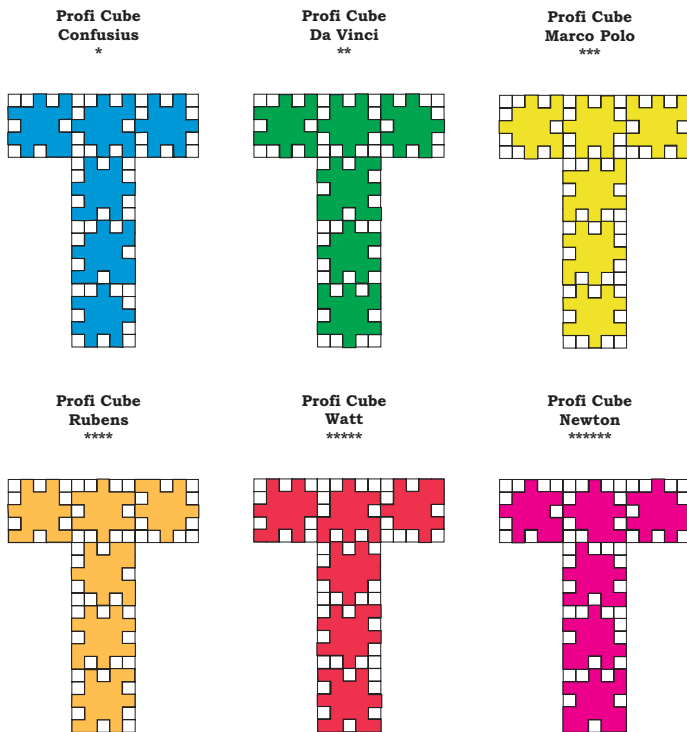
Leerlingen sorteren de kubussen door ze op te lossen

We hebben diverse puzzelactiviteiten georganiseerd voor middelbare scholieren en universiteitsstudenten en we hebben daarbij telkens de tijd gemeten die nodig was om elke puzzel op te lossen. De kubussen werden in willekeurige volgorde aangeboden en elke deelnemer moest, voordat we met de metingen begonnen, eerst twee kubussen oplossen die niet uit de bestudeerde verzameling kwamen. Deze trainingsfase zorgde ervoor dat ze vertrouwd raakten met de kubussen en een oplosstrategie konden ontwikkelen. Verder was het nodig om het effect van het leerproces op de metingen uit te schakelen. Op deze manier kregen we een verzameling van gemeten tijden m_{ij} , $1 \leq i \leq 12$, $1 \leq j \leq n$, waarbij i het nummer van de kubus is, j het nummer van de leerling en $n = 120$ het totale aantal deelnemers. Uit deze metingen bepaalden we de volgende indicatoren:

1. de gemiddelde tijd a_i voor elke kubus.
2. De gemiddelde tijd b_j voor elke kubus, waarbij de grootste 10% en de kleinste 10% van de oplostijden werden weggelaten.
3. De mediaan c_i voor elke kubus.

Op grond van elke indicator werd een mogelijke rangschikking van de kubussen gevonden. Ten slotte bepaalden we nog een ordening d_i op grond van hiërarchisch clustering [3]:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	8	12	7	11	10	1	6	4	5	3	9	2
b_i	8	12	7	11	6	10	4	1	5	9	3	2
c_i	8	12	7	11	5	6	9	10	1	3	4	2
d_i	7	12	8	5	11	6	1	14	10	9	3	2



Figuur 7 Oplossingen voor de Profi-kubus

De verschillen tussen de eerste twee rangschikkingen kunnen worden verklaard door uitbijters. Een derde van de leerlingen had wel ergens een dip waardoor het oplossen van een kubus soms wel een uur duurde. Het feit dat de gemiddelde tijd voor de Watt-kubus aanzienlijk groter was dan voor de Confucius- of Rubens-kubus laat zien dat de meeste leerlingen niet met de slimste startoplossing begonnen en daardoor veel meer mogelijkheden moesten onderzoeken. Als we de gemeten tijden van de Watt-kubus beter bekijken dan blijkt de verdeling twee toppen te vertonen, dus het gemiddelde is voor deze kubus eigenlijk geen goede indicator. Deze observatie en de bovenstaande tabel wijzen erop dat de meest natuurlijke indeling in twee verzamelingen de volgende is:

- I. De gemakkelijke kubussen: 8, 12, 7, 11, 5, 6
- II. De moeilijke kubussen: 1, 4, 10, 9, 3, 2

Correlatie tussen theorie en praktijk

Op de theoretische en de gemeten rangschikkingen hebben we een rang correlatie analyse (met de Kendalle- en Spearman- coëfficiënt) en een *principal component analyse* [4] uitgevoerd. Het volgende bleek:

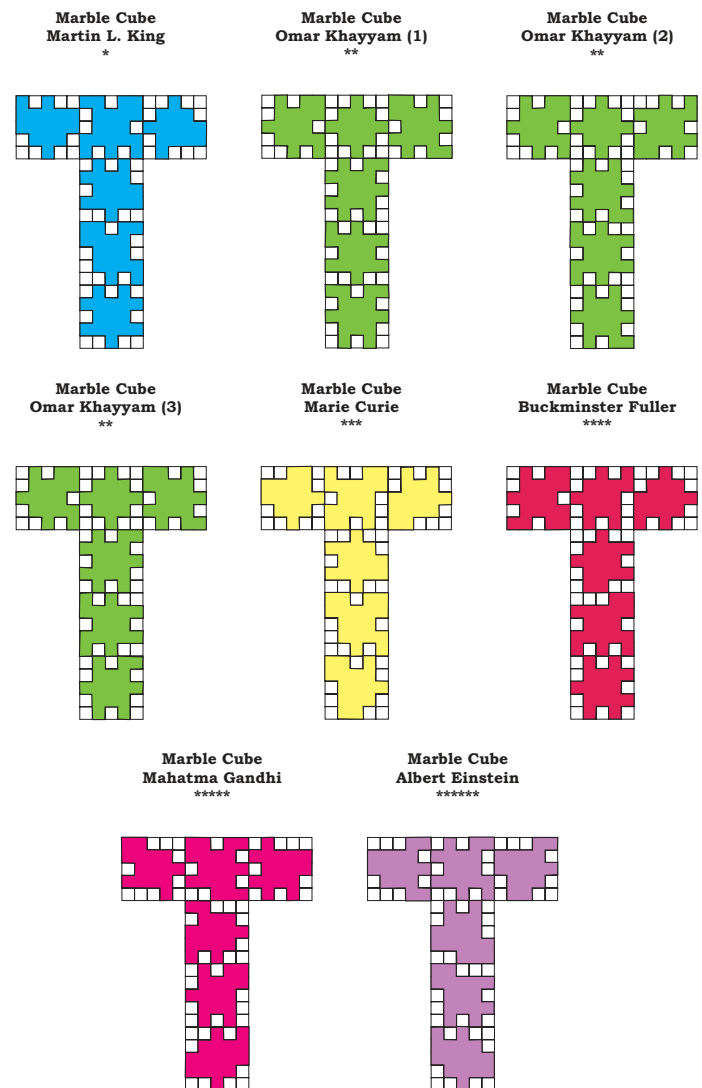
- De rangschikking op grond van gemiddelden correleert het beste met het aantal knopen in de *greedy* graaf.
- Zonder de uitbijters correleert de rangschikking met gemiddelden het beste met de rangschikking op grond van de som van de eerste twee complexiteitsindicatoren.
- De rangschikking uit de mediaan correleert het best met die van het eerste gecorrigeerde complexiteitsgetal (en de som van de eerste twee complexiteitsindicatoren).
- De rangschikking verkregen uit de clustering past het beste bij ordening op grond van het gemiddelde aantal oplosstappen.

In alle gevallen kan ongeveer de helft van de variantie verklaard

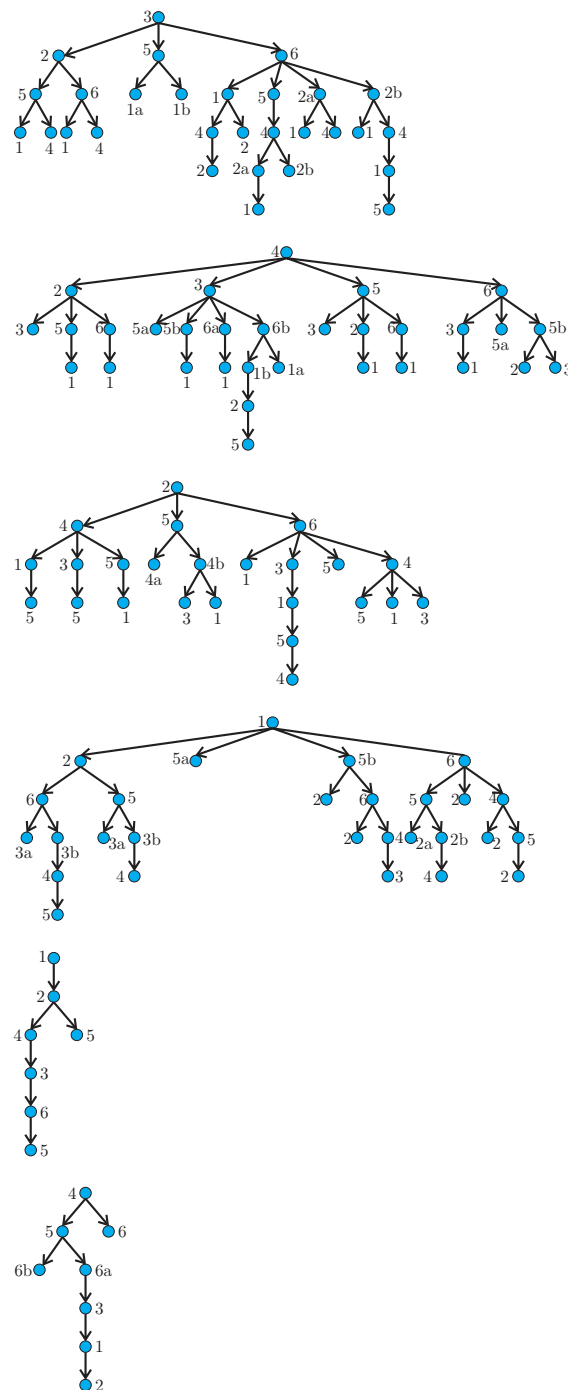
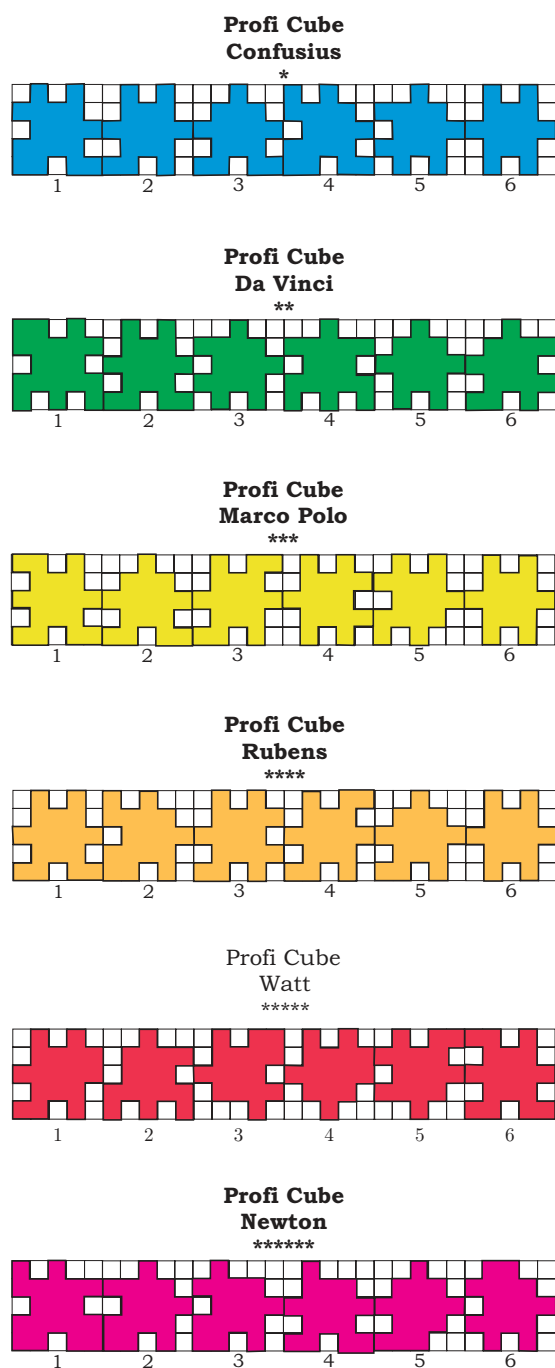
worden door een enkele theoretische rangschikking en de andere theoretische rangschikkingen verklaren 75–85% van de variantie van elk van de empirische rangschikkingen.

Conclusies

- De rangschikkingen uit de gemeten tijden kloppen met de ordeningen die werden bepaald door analyse van het *greedy* algoritme. De meeste leerlingen beaamden dat hun oplostechniek inderdaad was gebaseerd op proberen, backtracken en een greedy aanpak.
- De indeling van de fabrikant is helemaal verkeerd. De *Marble*-verzameling is niet de moeilijkste en rangschikking in de *Profi*- en de *Marble*-sets heeft geen relatie met de complexiteit van het oplosproces.
- Ons voorstel voor een nieuwe indeling is, geordend naar toenemende moeilijkheid:
- Omar Khayyam, Mahatma Gandhi, Albert Einstein, Watt, Newton, Martin Luther King.
- Marie Curie, Buckminster Fuller, Confucius, Marco Polo, Da Vinci, Rubens.



Figuur 8 Oplossingen voor de Marble-kubus



Figuur 9 Het pad naar de oplossing voor de Profi-verzameling

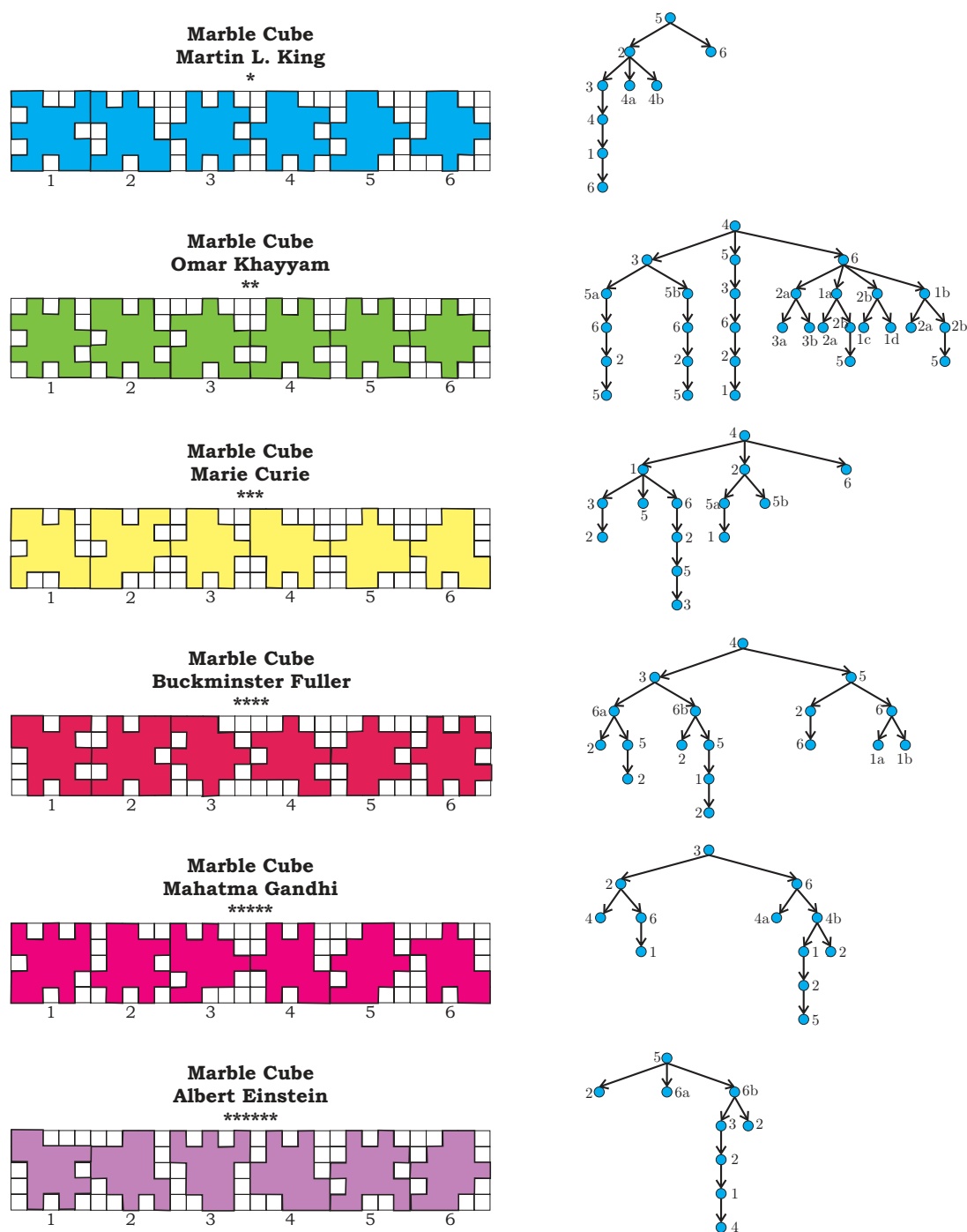
Dankwoord

Dit artikel is gebaseerd op werk in het project Primas, gecoördineerd door de Universiteit Freiburg met als partners het Freudenthal Instituut en de universiteiten van Genève, Nottingham, Jaen, Nitra, Szeged, Cyprus, Malta, Roskilde, Manchester, Babeş-Bolyai, Sør-Trøndelag. Onze activiteiten waren onderdeel van het FP7 project Primas (Grant No. 244380), de modellering die leidde tot het classificatieprobleem waren onderdeel van het Comenius project DQME II. We bedanken onze collegas Örs Nagy (Babeş-Bolyai Universiteit), Hajnalka Csapó (Márton Áron school, Miercurea Ciuc), Jutka Szilágyi (Báthory Istvan school, Cluj Napoca), Emőke Szilágyi, István Mátéfi (Bolyai Farkas school, Târgu Mureş) en Andrea Bartos-Kocsis voor hulp bij de puzzelactiviteiten en constructieve opmerkingen. De eerste auteur is gedeeltelijk financieel ondersteund door de Hungarian University Federation of Cluj Napoca, de tweede auteur werd financieel ondersteund door programma's gefinancierd door het Sectoral operational programme Human Resources Development, contract Posdru 6/1.5/S/3 — "Doctoral studies: through science towards society".

Appendix

In Figuur 7 en 8 laten we alle mogelijke niet-equivalente oplossingen van de Profi- en de Marble-kubussen zien. Omar Khayyam is de enige kubus met verschillende niet-equivalente oplossingen. Figuur 9 en 10 tonen de oplossingsgraaf voor elke kubus.

Vertaling: Hans Melissen



Figuur 10 Het pad naar de oplossing voor de Marble-verzameling

Referenties

- 1 http://en.wikipedia.org/wiki/Happy_Cube
- 2 De officiële site van Happy Cube: <http://www.happycube.com>
- 3 B.S. Everitt, S. Landau, M. Leese, *Cluster Analysis*, Wiley, 4th ed., 2009.
- 4 I.T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*, Springer, 2nd ed., 2002.

Rob van Oord

Coenecoopcollege
Dreef 2, 2741 SR
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 17de Nationale Wiskunde Dagen

Tijdloos en cultuuroverstijgend

Eind januari vonden in Noordwijkerhout voor de zeventiende keer de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) plaats. Dit door het Freudenthal Instituut georganiseerde evenement is bedoeld voor wiskundeleraars uit het voortgezet onderwijs. Zij kunnen hier ideeën opdoen en creatief en actief met hun vak bezig zijn. Docent Rob van Oord doet verslag van hoe hij met de wiskunde de wereld rond ging.

Ook dit jaar was er op de NWD een rijk aanbod van lezingen en workshops. Over toepassingen van wiskunde bij stromingen, bij energie en in de fabriek. Ook veel over meetkunde, zowel over grote syntheses, waaronder de elementen van Euclides, als over gebruik in Islamitische mozaïeken, moirékunst en 3D-tv. Verrassend is een serie workshops over hoe wiskunde in verschillende landen wordt onderwezen. En dan zijn er de workshops met onderwerpen die direct toepasbaar zijn in de les: analytische meetkunde voor vwo wiskunde B, een module speltheorie voor wiskunde D en een uitje naar het Museum Boerhaave. Verder lezingen over coryfeeën uit de wiskunde en het wiskundeonderwijs die vorig jaar zijn overleden, Benoit Mandelbrot en Pierre van Hiele. Op de website www.fi.uu.nl/nwd zijn van de meeste workshops de handouts en presentaties te vinden. Echt de moeite waard om daar eens wat van te bekijken. Ook al was je niet zelf op de NWD.

Professor Fokkema van de TU Delft opende de NWD met het motto 'door meten tot weten'. Wat kun je anders verwachten van iemand uit Delft. Fokkema gaf ons een kijkje in zijn specialiteit, het opsporen van aardolie en aardgas in lagen diep onder de zeebodem, door seismografie. Een valkuil is een a priori model te hanteren, waardoor je alleen de informatie krijgt die je zoekt, en misschien net niet wat je zou willen krijgen. Fokkema vat het kort samen: wetenschap is het stellen van de

juiste vraag. Daar kun je niet vroeg genoeg mee beginnen. Hij sprak dan ook vol lof over de LEGO-dag in Delft waar bij jonge onderzoekertjes al de fascinatie voor de wetenschap begint.

Origami

Op de startlezing door Philippe Cara over origami verheugde ik mij het meest. Veelbelovend lagen er enkele vierkante vouwblaadjes

op onze stoelen. Verrassend was zijn betoog. Op een van de eerste dia's stond een getekende kraanvogel. Die tekening deed me denken aan mijn eerste Chinese vouwboek, gekregen van mijn moeder toen ik op 11-jarige leeftijd met een hersenschudding 14 dagen op bed moest blijven. Ik heb het boek nog steeds en origami heeft me nooit meer losgelaten. Philippe liet enkele belangrijke toepassingen van vouwen zien, waaronder airbags en ingenieus opgevouwen buisjes die in opgevouwen toestand in aderen worden gebracht om ze daar, eenmaal op hun plek, te kunnen uitvouwen. Na de inleiding werden we aan het werk gezet. Cara liet ons ontdekken hoe we breuken kunnen vouwen.



Philippe Cara

Eerst werd er uitgelegd hoe je met zo min mogelijk vouwen een strook van een breukdeel van een vouwblaadje met als noemereen macht van 2 kan vouwen. Een voorbeeld: de binaire 'decimale' schrijfwijze van $\frac{5}{8}$ is 0,101. Dit kun je begrijpen als je bedenkt dat

$$\frac{5}{8} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

Zo is

$$\begin{aligned} \frac{25}{32} &= 0,11001 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Om een strook van $\frac{25}{32}$ van een blaadje te vouwen moet je de enen en nullen van rechts naar links lezen, dus in volgorde 1-0-0-1-1. Voor elke 1 vouw je de onderrand van het vouwblaadje naar de laatst gemaakte vouw, voor elke 0 vouw je de bovenrand naar de laatst gemaakte vouw. De eerste vouw is altijd gewoon dubbelvouwen. Het deel van de bovenrand tot de laatste vouw is dan de gevraagde breuk. Zo kun je elke breuk met noemer 2^n in precies n keer vouwen krijgen. Je had natuurlijk ook het blaadje eerst net zo vaak kunnen vouwen tot je allemaal strookjes van $\frac{1}{32}$ hebt, eerst dubbel (= $1 \times$ vouwen), dan de beide helften dubbel (= $2 \times$ vouwen) tot 4 kwarten, dan elke kwart halveren (= $4 \times$ vouwen), en zo door tot 32-sten. Dat vraagt in totaal $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \times$ vouwen. Dan tel je 25 strookjes, en je hebt $\frac{25}{32}$ deel van het blaadje. De binaire 'decimale' manier levert een besparing van $\frac{26}{31} = 84\%$ op. Zonder die truc van de enen en nullen kun je zelf ook die 5 keer vouwen uitvoeren als je bedenkt dat $\frac{25}{32} = (16 + 8 + 1)/32 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}$. Dus 1 keer dubbelvouwen (voor de $\frac{1}{2}$), de ene helft nog eens dubbelvouwen (voor die $\frac{1}{4}$), dan de vierde kwart 3 keer naar zijn vouwlijn halveren (voor die $\frac{1}{32}$). Ook met 5 keer vouwen. Maar het leuke is dat je in een les het binaire stelsel kunt toepassen in vouwen en meteen rekenen met breuken kunt oefenen. Spectaculair vond ik het volgende deel van de lezing. Daar in werd aangetoond dat klassieke problemen, zoals trisectie van een hoek en verdubbeling van een kubus, die niet kunnen worden opgelost met passer en liniaal, wel eenvoudig te hanteren zijn met vouwen. Je voegt dan een zesde origami-axioma toe aan de bestaande. Je kunt door schuiven twee willekeurige punten naar twee willekeurige lijnen vouwen. Als toepassing hiervan demonstreerde Cara een origami-trisectie van een (scherpe) hoek.

Kaminski

De eerste workshop die ik bezocht ging over het (ontzenuwen van het) onderzoek van Kaminski. In hun lezing kwam de opzienbarende uitkomst van het onderzoek in een heel ander daglicht te staan. Kinderen zouden beter wiskunde leren via generieke, abstracte voorbeelden dan met contextrijke. In hun betoog lieten Dirk De Bock en Johan Deprez zien dat er te lichtvoetig is omgesprongen met de resultaten van het onderzoek van Kaminski. Ook zijn in het bewuste artikel enkele onderzoeksresultaten verzwegen, dan wel wegge laten. Juist enkele onderdelen waar geen significant verschil zat tussen beide manieren van aanbieden: alleen abstract of met context. Ze deden zelf bij 130 van hun studenten een vergelijkbaar onderzoek. De deelnemers werd middels voorbeelden de theorie van commutatieve groepen van orde 3 aan geleerd = rekenen modulo 3. Daarna moest in de testfase een aantal vragen beantwoord worden om te zien of ze de theorie hadden gesnapt. Bij de transferfase waarin het geleerde in een nieuwe situatie moest worden toegepast, deden de studenten die met concrete voorbeelden geleerd hadden het beter. Waarom kwam Kaminski tot een andere conclusie? De contextvoorbeelden waren zo gemakkelijk dat je de antwoorden op de vragen ook direct zag. Die voorbeelden vertroebelden eerder het modulo rekenen dan dat het daarmee duidelijker werd.

Nuna5

Een volgende sessie betrof het Nuna5 Solar Team binnen het thema Wiskunde en Energie. De Nuna5 stond in de zaal. Student Thomas van Alsenoy van de TU Delft vertelde over zijn belevenissen van 2009. Ruim 3000 km door Australië alleen op zonne-energie. De wiskunde die gebruikt is, werd aangewend om een zo glad mogelijke romp te ontwerpen. Maar de keiharde cijfers die na testen in de windtunnel vrijkomen geven pas echt aan of de luchtweerstand werkelijk zo laag is als berekend. Er moest ook voortdurend gerekend worden (in de volgauto) hoe groot de reservevoorraad energie in de accu is, om ook als er geen zon is nog te kunnen doorrijden. Verder komt het vooral op tactiek en communicatie aan. Waar zitten de wolkenvelden? Waar rijden de andere deelnemers? Kortom, het is vooral een avontuur, een jongensdroom.

Nspire

De eerste ochtendlezing die ik bijwoonde was van Monica Neagoy. Ze liet zien welke apps ze allemaal heeft gemaakt voor TI-Nspire. Omdat

ik sinds 3 januari na 37 jaar lessen met een krijtje op het bord eindelijk een digibord heb, leek het me interessant om daar mijn licht eens op te steken. Grappig vond ik de Franse en Engelse woorden voor boxplot: *boîte à moustaches* en *box-and-whiskers plot*.

Wiskunde de wereld rond

Door naar de laatste workshop in het thema 'De wereld rond'. Vriend en professor Rainer Kaenders gaf een heldere uiteenzetting over wat met wiskundeonderwijs aan besef bij leerlingen moet worden bijgebracht. Naast *number sense* en *symbol sense* passeerden nog een tiental 'senses' de revue. De nieuwe inzichten van Pierre van Hiele en Hans Freudenthal over de didactiek van wiskunde die ons huidige onderwijs bepalen, dringen ook door in de Grundkurs en Leistungskurs in het Duitse Noordrijn-Westfalen. Dat we daarbij de leerlingen eigenlijk net niet vertellen hoe het zit, bijvoorbeeld met limieten bij differenttiëren, draagt in feite bij aan het experimenteel en instrumenteel besef. Je hoeft nog niet alles exact te kunnen bewijzen om te snappen waarover het gaat. Rainer eindigde met de oproep tot het bieden aan variatie van besef zonder afbreuk te doen aan de begrippen. Zo kun je met het differentiequotient de afgeleide van $y = x^2$ wel aannemelijk maken: wordt $2x$ als h tot 0 nadert, hoewel het eigenlijk geen exact bewijs is.

Mantra

Dan de slotlezing van professor Jan Hogendijk. Jan zong een soort boeddhistische mantra die leerlingen in India moesten leren om de sinus van een boog van een gegeven aantal boogminuten te berekenen. De gezongen benaderingsmethode van Madhava uit Kerala (Zuid-India) is rond 1400 ontwikkeld en klopt op een factor na met onze moderne Taylorformule van een hoek in radialen. Je kunt $\sin \alpha$ benaderen met $\alpha - c^3(t - c^2(s - c^2(r - c^2(q - c^2p))))$ met $c = \frac{\alpha}{5400}$. En zo zijn we weer terug bij de geneste binaire schrijfwijze van de eerste lezing. De getallen p, q, r, s, t in deze formule zitten in de mantra. Ze vormen de tellers van breuken met resp. noemers $60^3, 60^2$ en 60. En zo kwam er een mooi slot aan deze 17de conferentie waarin wordt aangetoond dat wiskunde in zekere zin tijdloos en cultuuroverstijgend is. Zeker als je bedenkt dat de Internationale Wiskunde Olympiade dit jaar in Nederland is, en dat Pythagoras al 50 jaar verschijnt.



Paul Urbach

Faculteit Technische Natuurwetenschappen

TU Delft

Postbus 6

2600 AA Delft

h.p.urbach@tudelft.nl



Joop Sparenberg

In Memoriam Johan Adolf Sparenberg (1924–2010)

Buiten de gangbare kaders

op 7 september 2010 is Johan Adolf (Joop) Sparenberg, emeritus hoogleraar Technische Mechanica aan de Rijksuniversiteit Groningen, thuis in zijn woonplaats Paterswolde overleden, in de leeftijd van 85 jaar. In dit artikel blikt Paul Urbach terug op het leven van deze bijzonder markante en creatieve wiskundige.

Johan Adolf Sparenberg was van 1961 tot zijn emeritaat in 1989 hoogleraar aan het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Groningen. Hij heeft daar op zijn eigen individuele manier bijgedragen aan de bloeitijd van de Nederlandse wiskunde. Er waren toen in Groningen herhaaldelijk jaren met meer dan honderd eerstejaars wiskunde.

Joop Sparenberg werd op 14 december 1924 te Amsterdam geboren. Zijn vader stierf toen hij 6 jaar was. Zijn moeder verdiende daarna de kost als directrice van een bejaardentehuis. Sparenberg had grote bewondering voor zijn moeder. Zij had alleen lagere school gehad, maar overhoorde hem toch toen hij op de HBS zat en leerde zo en passant de voor haar nieuwe stof.

Kenmerkend voor Joop Sparenberg was dat hij vaak niet in gangbare kaders paste. Zijn leerweg was daar een voorbeeld van. Hoewel al vroeg duidelijk werd dat hij een creatieve geest had, moest hij van de HBS af omdat hij te vaak bleef zitten. Hij ging toen vliegtuigbouw studeren, eerst op de MTS en aansluitend op de HTS in Haarlem, waar hij afstudeerde toen hij 21 jaar was. Tijdens zijn HTS-opleiding werd Sparenberg gefascineerd door de wiskunde. In die tijd was een HTS-diploma niet voldoende om als eerstejaars tot de universiteit toegelaten te worden. Hij moest daarom eerst het staatsexamen HBS doen. Dat examen heeft hij na één jaar gehaald en toen stond niets een wiskundestudie aan de Universiteit van Amsterdam meer in de weg. Na vijf jaar studeren haalde Sparen-

berg het doctoraal wiskunde met mechanica en natuurkunde als bijvakken.

Het Hilbert-probleem

Van 1952 tot 1956 was Sparenberg assistent en promovendus van de vermaarde professor Koiter, hoogleraar Technische Mechanica aan de Technische Universiteit Delft. Sparenbergs weleens wat ondeugende aard botste soms met de nogal vormelijke Koiter. Toen Koiter eens tijdens een college waar Sparenberg bij aanwezig was, zei dat hij een snaar in twee gelijke helften deelde, vroeg Sparenberg welk van de twee helften een gesloten en welk een open verzameling was. In goed overleg werd besloten dat Sparenberg beter bij professor Reinier Timman paste, die toen de opleiding tot wiskundig ingenieur aan de Technische Universiteit Delft aan het opbouwen was. Timman heeft school gemaakt met een heel herkenbaar soort toegepaste wiskunde, waarin asymptotische en andere analytische benaderingsmethoden een grote rol speelden.

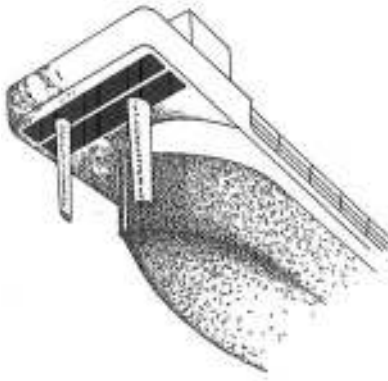
In 1958 promoveerde Sparenberg op het proefschrift 'Applications of the Hilbert Problem to Problems of Mathematical Physics'. Dit werk past goed in die tijd waarin men, door de beperktheid van de rekenmachines gedwongen, op zoek was naar expliciete analytische oplossingen van belangrijke problemen uit de continuümmechanica en het elektromagnetisme. Het Hilbert-probleem waarover Sparenbergs proefschrift gaat heet ook wel het Riemann–Hilbert randwaardeprobleem voor analytische functies. Dit probleem

is nauw verwant met een klasse van singuliere integraalvergelijkingen waarvan een elegante behandeling staat in het boek 'Singular integral equations' van N.I. Muskhelishvili [1]. De singuliere integraalvergelijkingen treden op in de voor de vliegtuigbouw ontwikkelde theorie van dragende vlakken.

Wrikvoortstuwing

Na zijn promotie werkte Sparenberg van 1958 tot 1961 als toegepast wiskundige op het Scheepsbouwkundig Proefstation in Wageningen. Daar begon hij aan de problemen te werken die tijdens zijn verdere leven als een rode draad door zijn onderzoek zouden blijven lopen, namelijk het toepassen van de dragende vlaktheorie op de analyse en optimalisatie van scheepsschroeven en andere manieren van hydrodynamische voortstuwing. Die andere methoden waren bijvoorbeeld de wrikvoortstuwing, bekend van de gondels in Venetië, en de voortstuwing door golfbewegingen zoals bij vissen. Sparenberg trok de aandacht met zijn originele en sterk wiskundige aanpak van mechanische problemen en werd in 1961 benoemd tot hoogleraar Technische Mechanica aan de Rijksuniversiteit Groningen.

Samen met professor A.I. van de Vooren heeft hij er zich met succes voor ingezet dat er in Groningen naast ingenieursopleidingen in de Technische Natuurkunde en de Technische Scheikunde ook een ingenieursopleiding in de Technische Mechanica kwam. De ingenieursopleiding Technische Mechanica viel onder de verantwoordelijkheid van het Mathematisch Instituut, dat hierdoor een zeer brede opleiding kon bieden van zeer zuivere tot toegepaste wiskunde. Er waren wel eens spanningen tussen zuivere en toege-



Illustratie: Springer/Martine Nijhoff

Figuur 1 Schip met voortstuwingsplaten [2]

paste wiskundigen in Groningen. Sparenberg had veel respect voor de zuivere wiskunde, maar de soms wat onbeholpen houding van de beoefenaren daarvan als ze met een niet zo goed gedefinieerd toegepast probleem geconfronteerd werden, deed hem eens opmerken: “Zuiver wiskundigen hebben enorme kanonnen, maar ze weten niet hoe ze er mee moeten schieten.”

Boemerang

Wat kenmerkte Sparenbergs onderzoek? Hij was een meester in het drastisch vereenvoudigen van heel gecompliceerde mechanische problemen, waarbij de essentie van het te bestuderen verschijnsel intact bleef. Het resulterende wiskundig model werd vaak met zelf ontwikkelde methoden geanalyseerd en dat leidde tot nieuw inzicht en nieuwe oplossingsmethoden. Voorbeelden zijn het toepassen van de dragende vlaktheorie op de boemerang en het mechanisch model van de pijl en boog. Die onderwerpen werden in het promotieonderzoek van respectievelijk Felix Hess en Bob Kooi bestudeerd.

Felix Hess had als natuurkundig student in Groningen in 1968 een artikel in *Scientific American* gepubliceerd over de boemerang. Sparenberg bood daarop Hess een promotieplaats aan. Het proefschrift van Hess trok veel belangstelling en is een standaardwerk geworden. Hess vergeleek berekende terugkeerbanen met banen die hij 's nachts met twee camera's had gefotografeerd. Hij had daartoe een lampje op de boemerang geplakt. Het proefschrift bevat telkens twee plaatjes van dezelfde baan naast elkaar en een brilletje waarmee de banen driedimensionaal kunnen worden bekeken. Hess deed zeven jaar over zijn promotie. Het eerste deel van het 555 bladzijden dikke werk bestaat uit een etnografische studie die hij tijdens een verblijf van drie jaar in Australië deed. Tijdens de promotieplechtigheid heeft Hess de boemerang op

verzoek van een commissielid in de imposante Groningse promotiezaal rondgegooid (en weer opgevangen).

Bob Kooi proefschrift ‘On the Mechanics of the Bow and Arrow’ trok ook veel belangstelling. De pijl en boog is in verschillende culturen onafhankelijk van elkaar in ongeveer dezelfde periode ontdekt. Kooi bedacht een classificatiemethode gebaseerd op zijn mechanische model en paste die toe op bestaande en historische bogen. Dit trok de aandacht van onderzoekers in vooral Engeland die bezig waren om de vondsten in het ruim van het wrak van de *Mary Rose* te onderzoeken. De *Mary Rose* was een oorlogsschip van Hendrik VIII dat in 1545 voor de kust van Portsmouth door toedoen van de Franse vloot gezonken was. Toen het schip in 1982 werd gelicht, bleken er 350 Engelse longbows en 3500 pijlen aan boord te zijn. De Society of Archery-Antiquaries was heel benieuwd naar de effectiviteit van deze pijl en bogen en Bob Kooi kon ze helpen bij dit onderzoek.

Twaalf promovendi

Sparenberg heeft twaalf promovendi gehad. Naast de twee al besproken proefschriften, zijn er twee die over het piezo-elektrisch effect gaan, één over de afscherming van geluid onder water door een luchtbel en één over *control theory* door de latere Delftse hoogleraar G.J. Olsder. De overige zes proefschriften gaan over de optimalisatie van de scheepsvorstuwing. In het proefschrift van Adriaan Wiersma wordt de stuwkracht van een zeilschip geoptimaliseerd. Hierbij worden zowel de invloed van de zeilen als ook de kiel beschouwd. Dit onderwerp stamt uit de tijd dat Sparenberg een zeilboot had gekocht, waarmee hij vervolgens jaren achtereens zomers naar Engeland, Noord-Duitsland en Scandinavië voer. De andere vijf proefschriften gaan over de kernzaak van Sparenbergs onderzoek: de optimalisatie van de hydrodynamische voortstuwing door scheepsschroeven en stijve of flexibele platen. Een flexibele plaat kan als model voor een vis dienen. De toepassing van de optimalisatietheorie leidde tot schroefbladen met aan de tippen extra vleugels (‘eindplaten’). Promovendus Willem Potze bestudeerde enkele en dubbele wrikplaten die ofwel naast elkaar of achter elkaar onder het schip waren aangebracht. Zijn model en berekeningen toonden aan dat het optimale wrikpatroon, waarbij zo min mogelijk wervels achter gelaten worden, een rendement van maar liefst 93% kon halen als rekening gehouden wordt met de viscositeit van het water (98% zonder!).

Functionaalanalyse

In aan aantal belangrijke gevallen was het optimalisatieprobleem oneindig dimensionaal. Bij de optimalisatie van een bewegende starre plaat was het de bedoeling om voor een gegeven periode die periodieke beweging te vinden die een vereiste gemiddelde stuwkracht levert bij zo min mogelijk verstoring van de vloeistof. De onbekenden zijn dan twee periodieke functies van de tijd, namelijk de rotatie rond een bepaalde as van de plaat en de translatie van die as. Dit leidt tot een optimalisatieprobleem voor de Fouriercoëfficiënten van deze functies. Die functies moeten een bepaalde Hölder-continuïteit hebben om aan alle mechanische grootheden betekenis te kunnen toekennen. De vraag die dan rijst, is of het optimalisatieprobleem in een dergelijke functieruimte wel een oplossing heeft en zo ja of die uniek is. Men kan natuurlijk wel proberen de optimale oplossingen te benaderen door maar een eindig aantal Fouriercoëfficiënten mee te nemen en het optimalisatieprobleem vervolgens numeriek op te lossen, maar dan is de vraag of de zo verkregen rij van benaderende oplossingen convergeert en zo ja in welke zin. Het kan zijn dat de functieruimte verkleind moet worden of dat extra beperkingen aan de toegelaten functies moeten worden opgelegd om een goed gesteld optimalisatieprobleem te krijgen. Om deze vragen te kunnen beantwoorden is functionaalanalyse nodig en daarom kwam er een vruchtbare samenwerking op gang tussen Sparenberg en de hoogleraar Functionaalanalyse in Groningen, professor G.E.F. Thomas. Sparenberg

Figuur 2 Schets van Sparenberg uit het boek *De toverspiegel* van M.C. Escher van Bruno Ernst

heeft twee boeken geschreven over de theorie van de optimalisatie van de hydrodynamische voortstuwing, namelijk: *Elements of Hydrodynamic Propulsion* [2] en *Hydrodynamic Propulsion and Its Optimization* [3].

Onderwijs

Sparenberg gaf onder andere colleges over vloeistofmechanica, elasticiteitstheorie, partiële differentiaalvergelijkingen, integraalvergelijkingen en variatierekening. Toen de functionaalanalyse belangrijker werd in Sparenbergs onderzoek, drong dit vak ook sterker door in de colleges die hij gaf. Zijn dictaten over vloeistofmechanica waren zeer origineel. Zonder in een brij van formules verstrikt te raken, werden moeilijke problemen op relatief eenvoudige manier behandeld en interessante mechanische resultaten afgeleid. Sparenberg hield niet van gewichtig doen en dat bleek ook uit zijn colleges en dictaten. Terugkijkend is het jammer dat hij het dictaat stromingsleer niet als boek heeft gepubliceerd.

Speurwerkprijs

In 1983 verleende het Koninklijk Instituut van Ingenieurs (KIVI) de Speurwerkprijs aan Sparenberg. Het was voor de eerste en tot nu toe enige keer dat een vertegenwoordiger van de wiskunde deze prijs kreeg. Ik citeer uit de overwegingen van de commissie die de prijs verleende: "1. Dat zij (de commissie HPU) bij het zoeken van geschikte kandidaten zich beperkt heeft tot die uitmuntende wiskundigen uit wier werk blijkt dat zij de habitus van de ingenieur bezitten en aan de technisch-wetenschappelijke wereld bij voortduring belangrijke bijdragen hebben geleverd. 2. Hoewel de continuümmechanica een solide theoretische basis heeft, is het merendeel van de daarop gebaseerde technische problemen weinig toegankelijk voor wiskundige analyse. Men gebruikt hier op grote schaal numerieke technieken. Deze geven echter slechts in beperkte mate inzicht. De verdienste van Sparenberg is dat hij (...) bij herhaling kans gezien heeft, op welhaast artistieke wijze, in de continuümmechanica belangwekkende problemen die zich nog wel wiskundig laten analyseren, te formuleren en diepgaand te onderzoeken, alleen of, veelal, met anderen. Hij weet ingewikkelde zaken in eenvoudige modellen te vangen. Hij maakt daarbij gebruik van een scala aan hulpmiddelen: van experi-

ment, via numerieke berekeningen en klassieke analyse naar moderne onderwerpen zoals distributietheorie. (...) Hij weet leuke problemen te vinden en wat zelden voorkomt, benadert zijn problemen bijna met het gevoel van een creatief kunstenaar."

Escher

De kunstzinnige interesse van Sparenberg bleek uit één van zijn hobby's: het boetseren van uilen, dat hij tot op hoge leeftijd bleef doen. Die belangstelling bleek ook uit zijn contacten met de graficus M.C. Escher. Hij suggereerde in 1963 aan Escher om een gravure te maken met de titel 'De Toverpoort' waarin het Riemann-oppervlak dat optreedt bij meerwaardige analytische functies verbeeld wordt. Sparenberg maakte een schets voor Escher van een landschap met een figuur die door een gat naar een andere wereld klimt (zie Figuur 2). Escher dacht lang over dit idee na en kwam toen met prehistorische vogels die door het gat vliegen en in jumbojets veranderen. In het dagblad Trouw van 9 september 1995 wordt Sparenberg geciteerd over zijn correspondentie met Escher: "Hij (Escher) haalde het verleden en heden erbij, dat was niet de bedoeling. Het zijn simultane werelden." De correspondentie met Escher en de schets van Sparenberg staan in Hoofdstuk 12 van het boek *De toverspiegel van M.C. Escher* van Bruno Ernst onder het kopje 'De prent die Escher nooit maakte'. Sparenberg nomineerde Escher in 1964 voor een eredoctoraat aan de Groningse universiteit. Tot Sparenbergs verontwaardiging werd het eredoctoraat niet verleend.

Met emeritaat

Na zijn emeritaat bleef Sparenberg onderzoek doen. Hij werd daarbij gehinderd door het feit dat hij nooit een computer gebruikte. Maar voormalige promovendi en andere vrienden waren vaak graag bereid te helpen bij een computerberekening. Sparenberg heeft nog verschillende keren gepubliceerd in deze periode, onder andere in 1994 een lang overzichtsverhaal getiteld 'Survey of the mathematical theory of fish locomotion' in het *Journal of Engineering Mathematics* en een artikel met professor E.M. de Jager, emeritus hoogleraar van de Universiteit van Amsterdam, getiteld 'New approach to the suction force and the leading edge of a profile with zero thick-



Sparenberg met zijn vrouw Paula

ness' dat in 2004 verscheen in het *Journal of Ship Research*. Zijn laatste artikel 'On the glide of a bird close to the ground or water surface with wings bent downwards', schreef hij samen met Willem Potze in het laatste jaar van zijn leven. Zijn vrouw Paula was in 2008 overleden en Sparenbergs levenslust verdween. Hij moest een zware operatie ondergaan waarvan hij slechts tijdelijk opknapt. Toch bleef hij geboeid door de wereld om hem heen. Toen hij zag dat een reiger die over het Paterswoldsemeer vloog, zijn vleugels gekromd hield, maakte hij daar een wiskundig model van. De berekeningen van Willem Potze toonden aan dat het krommen van de vleugels bij lage vlucht inderdaad energetisch voordelig is.

Markant en bijzonder creatief

Sparenberg heeft een grote rol gespeeld in het in 1967 in Nederland ontstane tijdschrift *Journal of Engineering Mathematics*. Hij is verder bestuurslid geweest van het Wiskundig Genootschap, lid van de wiskunde sectie van de Academische Raad en lid van het bestuur van STW.

Sparenberg was een markant en bijzonder creatief mens, die een heel goede band had met zijn promovendi. Die waren bijna allemaal aanwezig bij zijn afscheid als hoogleraar in 1989 en recent opnieuw bij het laatste afscheid dat we van hem hebben genomen. ◀

Referenties

1 N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Springer, Berlijn, 1977.

2 J.A. Sparenberg, *Elements of Hydrodynamic Propulsion*, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1983

3 J.A. Sparenberg, *Hydrodynamic Propulsion and Its Optimization*, Kluwer, Dordrecht, 1994.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009

Software optimaliseert pompstrategie drinkwater

Hoe kan een drinkwaterbedrijf de kosten van haar elektrische pompen zo laag mogelijk houden als de elektriciteitsprijs gedurende een etmaal varieert? Het ingenieursbureau DHV ontwikkelde een softwarepakket dat de pompstrategie voor de drinkwatervoorziening regelt, en vroeg aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie om te onderzoeken wat de optimale pompstrategie is.

Deelnemers van de studiegroep

Simon van Mourik (WUR)

Joris Bierkens (UL)

Hans Stigter (WUR)

Martijn Dirkse (Ecofys)

Karel Keesman (WUR)

Vivi Rottschäfer (UL)

Het Nederlandse ingenieursbureau DHV ontwikkelde ruim tien jaar geleden het softwarepakket OPIR: *Optimale Productie door Intelligente Regeling*. OPIR regelt de pompstrategie voor de drinkwatervoorziening in een bepaald gebied. Drinkwater wordt via een systeem van elektrische pompen bij centrale pompstations naar de afnemers geleid. De elektriciteitsprijs varieert echter gedurende een etmaal, in sommige landen meer dan in andere. Een drinkwaterbedrijf vraagt zich daarom af hoe het de pompen zo kostenefficiënt mogelijk kan bedienen, terwijl ze tegelijkertijd in de drinkwaterbehoefte van het gebied voorzien. Wanneer kunnen de pompen het beste aan staan om de waterreservoirs bij te vullen? En wanneer kunnen ze het beste uit staan, zodat de reservoirs langzaam leeglopen?

Zo'n vijf miljoen Nederlanders krijgen hun drinkwater via een pompregeling die wordt geregeld door dit softwarepakket. Een Canadees dochterbedrijf van DHV heeft het softwarepakket verkocht aan de Grimsby-regio in Canada, dat iets ten westen van de Niagara Watervallen ligt, dichtbij de grens met de Ver-

enigde Staten. Waar in Nederland de elektriciteitsprijs alleen maar verschilt tussen dag en nacht, varieert de elektriciteitsprijs in de Grimsby-regio veel dynamischer dan in Nederland. Dat maakt het voor een drinkwaterbedrijf moeilijker om de beste pompstrategie uit te rekenen.

Ingenieur Olivier Hartel van DHV is medeontwikkelaar van het softwarepakket. Hij vertelt over de Grimsby-regio: "De software stuurt hier vijftien pompen aan die drie stadjes van drinkwater voorzien: Smithville, Beamsville en Grimsby. Die liggen alle drie op een andere hoogte. Voor elke dag van het jaar is een gemiddeld drinkwaterverbruik voor elk stadje bekend. Verder kan elke pomp ieder kwartier aan- of uitgeschakeld worden. Ons Canadees dochterbedrijf heeft bij ons aangeklopt met de vraag of het drinkwaterbedrijf verder kan besparen op de kosten door een slimmere pompstrategie te kiezen. Die zouden wij dan in de software moeten implementeren."

Het liefst zou DHV het softwarepakket 48 uur van tevoren de beste pompstrategie laten berekenen. Dat levert echter $2^{(4 \times 48 \times 15)}$ schakelmogelijkheden op: een getal met meer dan achthonderd nullen. Dat zijn veel te veel mogelijkheden om ze allemaal door te rekenen en de beste uit te kiezen. In de huidige software kunnen operators bij een pompstation instellen wanneer de waterreservoirs minder vullen, of zelfs leeglopen, tijdens de uren waarin de elektriciteitsprijs hoog is, en meer vullen tijdens de goedkope periode. De opera-

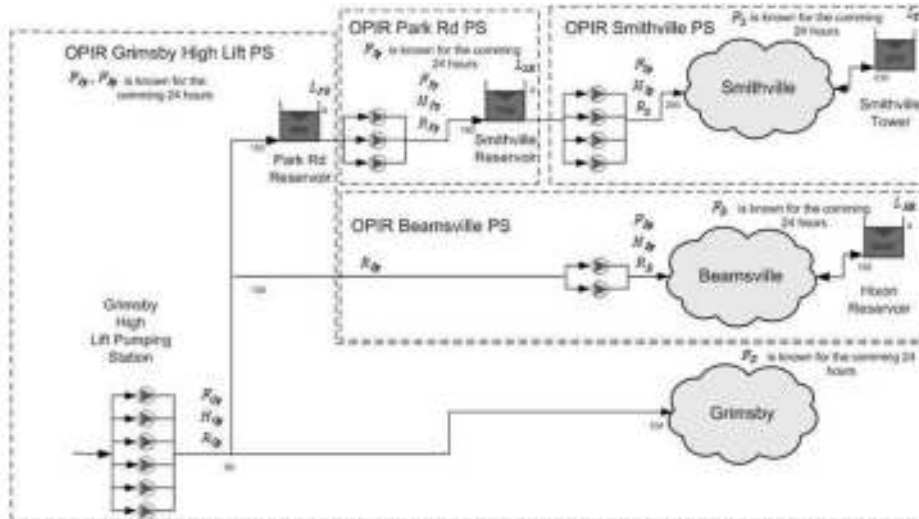
tors doen dat op grond van hun ervaring. Maar dat is een ad-hocoplossing, die waarschijnlijk niet de optimale pompstrategie levert.

"Onze vraag aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie", vertelt Hartel, "was om te onderzoeken wat dan wel de optimale pompstrategie is. Daarbij moeten de kosten van het elektriciteitsverbruik minimaal zijn, onder de aanname dat de mensen genoeg water krijgen, en dat de waterreservoirs te allen tijde minimaal voor 75% gevuld zijn en maximaal voor 95%. Verder is de pompcapaciteit voor elke pomp gegeven. Dat geeft de fysieke beperking van het systeem."

Eén pompstation

"Wiskundig gezien gaat het om een dynamisch optimalisatieprobleem", zegt universitair hoofddocent meet-, regel- en systeemtechniek Karel Keesman van de Wageningen Universiteit. Hij maakte deel uit van een groep van zes wiskundigen die zich een week lang over het DHV-probleem heeft gebogen. "We hebben eerst een analytische oplossing bepaald voor een vereenvoudigde versie van het optimalisatieprobleem. Vervolgens hebben we een numerieke oplossing bepaald voor een realistischere versie."

De Grimsby-regio kent vier pompstations (met twee, drie, vier en zes pompen) en drie waterreservoirs. Om een analytische oplossing voor de optimale pompstrategie te berekenen, beperkte de studiegroep het probleem tot één pompstation, één waterreservoir en de vraagcurve van één stadje naar drinkwater. Bovendien werd verondersteld dat de pompen continu kunnen schakelen naar elk gewenst debiet. Keesman: "Dan heb je het oorspronkelijke probleem genoeg uitgekleeft om een analytische oplossing te vinden. Als je het probleem voor één pompstation hebt opge-



Figuur 1 Schema van de drinkwatervoorziening in de Grimsby-regio in Canada, met de pompstations en de reservoirs die de drie stadjes Smithville, Beamsville en Grimsby van drinkwater voorzien

lost, kun je daarna hetzelfde voor de andere drie doen.”

Het probleem voor één pompstation heeft de studiegroep geformuleerd als een Lagrangeaans probleem. Hierin wordt een functie voor het energieverbruik van dit ene pompstation geformuleerd. Dat levert een integraal over een tijdperiode van twee etmalen. Deze energiefunctie moet worden geminimaliseerd onder de door DHV gegeven randvoorwaarden voor het schakelen van de pompen, de vulgraad van de reservoirs en de pompcapaciteiten. “Maar”, zegt Keesman, “we hebben de randvoorwaarde van de vulgraad van de reservoirs moeten loslaten om een analytische oplossing te vinden.”

Het grote voordeel van de analytische oplossing is dat hij meteen inzicht geeft in de manier waarop de pompstrategie afhangt van de elektriciteitsprijs. Tussen middernacht en zeven uur in de ochtend is het waterverbruik het laagste en zijn ook de energiekosten het laagste. De analytische oplossing laat zien dat het pompstation zijn pompen in deze periode vol aan moet zetten om het waterreservoir te vullen. Tussen zeven uur 's ochtends en negen uur 's avonds zijn de energiekosten hoger. En hoewel ze ook in deze periode enigszins in de tijd variëren, laat de analytische oplossing zien dat dit de tijdperiode is waarin de pompen het beste uit kunnen staan. En dus loopt het waterreservoir in deze periode weer geleidelijk leeg. Later in de avond gaan de pompen weer aan en wordt het reservoir langzaam bijgevuld.

Algemeen recept

Voor een meer realistische situatie, waarin alle vier de pompstations van de Grimsby-regio

worden gemodelleerd, en ook de drinkwaterbehoefte voor de drie stadjes, is een numerieke aanpak nodig. Hierin namen de wiskundigen ook de randvoorwaarde mee die de vulgraad van de reservoirs voorschrijft. De vraag op welk moment welk pompstation aan of uit wordt geschakeld, wordt in de analyse in eerste instantie niet meegenomen. Het idee is dat aan de hand van de numerieke oplossingen achteraf wordt bekeken welke pompen precies op welk tijdstip aan of uit moeten staan om de berekende optimale strategie te realiseren.

“We hebben dit probleem in Matlab geprogrammeerd”, zegt Keesman. “Daarin kunnen we de randvoorwaarden handig meenemen. Voor alle vier de pompstations hebben we uitgerekend hoeveel water ze als functie van de tijd moeten verpompen in een etmaal. Dat zijn de pompdebieten. Globaal gesproken hebben die eenzelfde vorm als in de analytische oplossing. In de details zitten echter verschillen. We zien dat in de numerieke oplossing het maximale pompdebiet in de nacht langer doorloopt. In de analytische oplossing staan de pompen tot zeven uur vol aan, en in de numerieke oplossing tot negen uur. Verder zien we in de numerieke oplossing de energieprijzen op een wat ingewikkelder manier terugkeren in het pompgedrag. De grafieken die het pompgedrag als functie van de tijd weergeven, worden iets ingewikkelder dan bij de analytische oplossing.”

Ten slotte hebben de wiskundigen onderzocht hoe de uitgerekende pompdebieten in de praktijk gerealiseerd moeten worden. De vraag is dan om te bepalen welke van de vijftien pompen op elk kwartier aan of uit moeten staan. “Hiervoor hebben we op basis van

netwerktheorie een methode voor een oplossing geschetst”, zegt Keesman. “We hadden niet genoeg tijd om deze methode voor een praktijkgeval uit te werken. Wel hebben we nog een recept geformuleerd voor hoe je een algemener model, met meer steden en meer pompen, kunt oplossen. Ik denk dat de uitkomst van het numerieke model en het recept voor een algemene oplossing voor DHV het meest interessant is. Beide gaan een stap verder dan wat DHV zelf al aan dit probleem had gedaan.”

Extra module

Olivier Hartel van DHV vindt dat de studiegroep een aantal goede aanwijzingen heeft gegeven om de software aan te passen. De kans is daardoor groot dat het bedrijf tegemoet kan komen aan de vraag van de Grimsby-regio. “De studiegroep heeft aangegeven dat je voor het gehele systeem één enkele optimalisatie kunt berekenen”, zegt Hartel. “De algoritmes die we daarvoor moeten gebruiken, kunnen we ook implementeren in onze software. Dat is voor ons natuurlijk belangrijk. Met één praktische software-eis heeft de studiegroep echter nog geen rekening gehouden. Ons softwarepakket bestaat uit losse modules. Elke module stuurt een subgebied van de drinkwatervoorziening aan, en kijkt met een schuin oog naar wat er in andere subgebieden gebeurt. In principe willen we dat elke module de optimale oplossing voor zijn eigen subgebied berekent. Omdat het softwarepakket al jarenlang een beproefd product is, willen we de structuur ervan niet in een keer omgooien.”

De volgende vraag is dan hoe dicht de combinatie van die optimale oplossingen voor de subgebieden ligt bij de optimale oplossing voor het gebied als geheel. “Dat is een moeilijk probleem, waarvan we wel wisten dat het niet in een week valt op te lossen”, zegt Hartel. “We gaan nu eerst één afstudeerstudent verder aan dat probleem laten werken, en als vervolg daarop nog een tweede. Idealiter willen we zo lang mogelijk van tevoren bepalen wat de optimale pompstrategie is. Dat is waarvoor klanten onze software kopen.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009, van 26–30 januari in Wageningen. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.swi2009.wur.nl.

Frank Redig

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Heyendaalseweg 135

6525 AJ Nijmegen

f.redig@math.ru.nl

Onderzoek

Hydrodynamische limieten en de pijl van de tijd

Op 1 juli 2011 organiseert het IMAPP, het onderzoeksinstituut voor wiskunde, sterrenkunde en deeltjesfysica van de Radboud Universiteit, het symposium 'The Arrow of Time'. In aanloop naar dat symposium beschrijft Frans Redig van het IMAPP in dit artikel een aantal aspecten van het 'Boltzmann-programma'.

In dit artikel geef ik een persoonlijke selectie van een aantal aspecten van het 'Boltzmann-programma'. Ik spits mij toe op het afleiden van hydrodynamische vergelijkingen vanuit een microscopische dynamica en beperk me tot de context van klassieke of stochastische microdynamica's. Op het IMAPP-symposium 'The Arrow of Time' zal Jean Bricmont aspecten van dit thema nader toelichten, in het bijzonder voor deterministische dynamica's, waar belangrijke recente ontwikkelingen zijn.

De pijl van de tijd

Vele alledaagse verschijnselen zijn irreversibel. Suiker lost op in onze koffie, en wordt (gelukkig) niet weer een klontje, een glas valt van de tafel in scherven die zich (spijtig genoeg) niet terug verzamelen tot een glas. Irreversibiliteit manifesteert zich ook in de levensloop van organismen, en in het proces van evolutie door natuurlijke selectie. Nooit zien we een organisme opstaan uit de dood, jonger worden, om uiteindelijk één enkele cel te worden die splitst in twee voortplantingscellen. Evenmin zien we dat uitgestorven soorten opnieuw ontstaan uit bestaande soorten.

De tijd heeft dus in vele alledaagse verschijnselen blijkbaar een voorkeursrichting: 'de pijl van de tijd'. Deze pijl van de tijd manifesteert zich ook in een *ruimtelijke* voorkeurs-

richting van stromingen: warmte stroomt van warm naar koud, deeltjes stromen van hoge naar lage chemische potentiaal.

In deze uiteenlopende irreversibele verschijnselen is de verklaring van de irreversibiliteit niet noodzakelijk steeds dezelfde. De irreversibiliteit geassocieerd aan organismen en evolutie is wellicht verschillend van de irreversibiliteit van het oplossen van suiker in koffie. We zullen ons voor dit stukje echter toespitsen op de 'pijl van de tijd' zoals ingevoerd door Arthur Eddington in het bekende boek *The Nature of the Physical World* uit 1928.

In de thermodynamica correspondeert deze pijl van de tijd met de tweede hoofdwet: de richting waarin de entropie toeneemt. De tweede hoofdwet is echter een *statistische* wet, analoog aan de wet van de grote aantallen in de kansrekening, en verschillend van (klassiek) *absolute* natuurwetten zoals de wetten van Kepler of de wet van Coulomb.

Onderliggend aan irreversibele macroscopische verschijnselen is een microwereld van chaotisch door elkaar bewegende deeltjes. Reeds in de eerste eeuw voor onze jaartelling gebruikte Lucretius de chaotische beweging van stofdeeltjes, zichtbaar in het zonlicht, als een metafoor voor deze microwereld. Hij was zo een voorloper van Robert Brown die

de grillige trajecten van kleine deeltjes waarnam onder zijn microscoop. Richard Feynman geeft zijn bekende samenvatting over de microwereld aan als een van de fundamenteelste inzichten van de moderne wetenschap: "All things are made of atoms, little particles that move around in perpetual motion, attracting each other when they are a little distance apart, but repelling upon being squeezed into one another."

In de beweging van deze deeltjes valt geen 'pijl van de tijd' te bespeuren, ofwel de microdynamica is reversibel. Stellen we ons bijvoorbeeld voor dat we een druppel inkt in water laten oplossen en vervolgens van alle individuele inktdeeltjes een film maken die we omgekeerd in de tijd en in slow motion afspelen. Het publiek zal dit wellicht een lange en saaie vertoning vinden, maar zal verder niets bijzonders opmerken. Als aan het einde van de voorstelling echter het globale resultaat van alle trajecten wordt geprojecteerd, ziet men hoe uit een homogeen mengsel van inkt en water spontaan een inktdruppel gevormd wordt. Het (niet-ingewijde) publiek zal zich dan bij de neus genomen voelen door een spitsvondige goocheltruc. Als enkele aanwezigen een toevallig aanwezige natuurkunde-professor wakker maken en zijn mening vragen over dit ongewone verschijnsel, mompelt deze iets over 'uitzonderlijke beginvoorwaarden'.

Het omkeren van de tijd en de beginsnelheden in een traject dat voldoet aan de bewegingsvergelijkingen, geeft immers opnieuw





Ludwig Boltzmann door de jaren heen

een traject dat voldoet aan de bewegingsvergelijkingen. Deze reversibiliteit van de microdynamica impliceert echter niet dat de macroverschijnselen ook reversibel zijn.

Voor deze schijnbare ‘irreversibiliteitsparadox’ gaven Thomson, Maxwell en Boltzmann in de negentiende eeuw reeds een verklaring, die in de woorden van Lebowitz [16] “de tand des tijds doorstaan heeft”, zie bijvoorbeeld [1].

Voor een gegeven macrotoestand zijn er veel hiermee consistente microtoestanden: de Boltzmann-entropie is hiervoor een maat. Indien we enkel de macrotoestand specificeren, dan correspondeert dit met een beginvoorwaarde die uniform is op de verzameling van alle microtoestanden die consistent zijn met de gegeven macrotoestand: deze onzekerheid over de begintoestand introduceert toeval in de (verder deterministische) dynamica. Met overweldigende waarschijnlijkheid zal de macrotoestand evolueren, zodanig dat het aantal corresponderende microtoestanden (of de maat van de verzameling microtoestanden) toeneemt: dit is precies de toename van de Boltzmann-entropie in de loop van de tijd.

De wiskundige details van dit ‘Boltzmann-programma’ zijn echter verre van triviaal in concrete systemen. Ten eerste ligt de probleemstelling zelf hier al niet voor de hand, namelijk hoe we macrotoestanden goed kunnen definiëren. Vervolgens moet nog de stap gezet worden om een *autonome* irreversibele evolutie voor de macrovariabelen af te leiden in de limiet van grote systemen. In [3] en [16] wordt een goed overzicht gegeven van de moeilijkheden en verwarringen rond deze problematiek, in het bijzonder rond de rol van ‘chaos’ in de microdynamica voor het afleiden van irreversibele macrodynamica.

Irreversibele macroscopische vergelijkingen

Lang voor het bestaan van atomen experimenteel werd aangetoond, gebruikte men reeds vergelijkingen die verschijnselen zoals het oplossen van inkt in water (wet van Fick), of het verspreiden van warm-

te (wet van Fourier) goed beschrijven. Hierbij gaat men meestal uit van een continuïmbeschrijving van de vloeistof of gas (zodat men kan spreken van bijvoorbeeld ‘infinitesimale vloeistofelementjes’). Gebruikmakend van behoud van massa en het (intuïtief voor de hand liggende) feit dat (voor niet al te grote gradiënten) de stroom evenredig is met de gradiënt van de dichtheid, komt men via een standaard afleiding tot de (mogelijk niet lineaire) diffusievergelijking.

Die diffusievergelijking beschrijft een irreversibele evolutie: ze bevat een eerste tijdsafgeleide versus een tweede afgeleide in de ruimtelijke coördinaten: ze blijkt dus de tweede hoofdwet van de thermodynamica automatisch te volgen.

Hoewel de korte afleiding van de diffusievergelijking een (niet al te ingewijde) lezer misschien kan overtuigen, voelt iedereen aan dat het beschouwen van een vloeistof of gas als een continuüm een benadering is die in deze afleiding niet kwantitatief wordt verantwoord. De diffusievergelijking kan bijvoorbeeld niet gebruikt worden voor één inktmolecule bewegend tussen vier watermoleculen. Indien we echt beschikten over een wiskundig rigoureuze afleiding vertrekkend van de microscopische beweging van atomen, dan zouden we ook weten waarom de afleiding niet werkt voor vijf deeltjes, en hoeveel deeltjes we ongeveer nodig hebben om een redelijke benadering te hebben, of op z’n minst wat de rol is van ‘veel deeltjes’ (bijvoorbeeld komen we tot de vergelijking na het nemen van een limiet).

Dat voor het afleiden van macroscopische vergelijkingen een *schalingslimiet* in ruimte en tijd moet worden genomen, werd voor het eerst (wiskundig) duidelijk gesteld in een artikel van Morrey [15] uit 1955. Eerder hadden Boltzmann en Chapman-Enskog vanuit een theoretisch-fysisch standpunt het belang van schaling in de afleiding van hydrodynamische vergelijkingen, en meer in het algemeen het wiskundig onderbouwen van het ‘Boltzmann-programma’ is een belangrijk on-

derdeel van Hilberts zesde probleem en is voor een groot deel nog open.

Flippende spins

Een karikaturaal eenvoudige dynamica die goed illustreert hoe irreversibel gedrag kan ontstaan uit een microscopisch reversibele dynamica is onafhankelijke spinflip dynamica. We bekijken hierbij N ‘spins’ die de waarde ± 1 kunnen aannemen. Gegeven een beginconfiguratie flippen we iedere spin onafhankelijk van alle andere spins op random tijden die onafhankelijk en exponentieel verdeeld zijn met parameter 1. De evolutie van de individuele spins is dan duidelijk reversibel: zowel voorwaarts als achterwaarts in de tijd zien we enkel random flips van spins op random tijden. Een natuurlijke macrogrootte in deze context is de magnetisatie:

$$m_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i(t)$$

met $\sigma_i(t)$ de waarde van de i -de spin op tijdstip t .

Indien op tijdstip $t = 0$ de limiet $\lim_N m_N(0) = m(0)$ bestaat, dan volgt uit de wet van de grote aantallen dat op een later tijdstip

$$m_N(t) \rightarrow m(t) = m(0)e^{-2t} \quad (1)$$

als $N \rightarrow \infty$, met kans 1. Dit geeft dus een irreversibele relaxatie naar de toestand met maximale Boltzmann-entropie $m = 0$.

Omdat de dynamica zeer eenvoudig is, kan echter veel meer gezegd worden. Voor eindige (grote) N kunnen we de kans op een afwijkend traject in leidende orde berekenen met stellingen uit de theorie van de grote afwijkingen (stelling van Mogulskii). Noemen we $m_N = \{m_N(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ het traject van de magnetisatie, dan geldt voor de kans op een traject $y : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$,

$$\mathbb{P}(m_N \approx y) \approx \exp(-NI(y)). \quad (2)$$

Hierbij moeten we $\approx$ interpreteren in de zin van ‘het large deviation principle’, ingevoerd door Varadhan (zie bijvoorbeeld [19] voor een uitstekend overzichtsartikel over large deviations, zie ook de bijdrage in NAW, september 2008, van Frank den Hollander over het werk van Varadhan, [9]), ofwel,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}(m_N \in F) \leq - \inf_{y \in F} I(y) \quad (3)$$

voor F een gesloten verzameling trajecten, en

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{P}(m_N \in G) \geq - \inf_{y \in G} \mathcal{I}(y) \quad (4)$$

voor G een open verzameling trajecten.

Hierbij wordt $\mathcal{I}$, de entropiefunctie van het grote-afwijkingenprincipe, gegeven door

$$\mathcal{I}(y) = \int_0^1 \mathcal{L}(y_s, \dot{y}_s) ds \quad (5)$$

met $\mathcal{L}$ de ‘macro-Lagrangiaan’ gelijk aan de Legendre getransformeerde van een ‘macro-Hamiltoniaan’

$$\mathcal{L}(m, v) = \sup_p (pv - H(m, p)) \quad (6)$$

met

$$H(m, p) = \frac{1+m}{2} (e^{-2p} - 1) + \frac{1-m}{2} (e^{2p} - 1).$$

We vermelden deze functies hier enkel om aan te geven dat ze expliciet bekend zijn, en we dus de leidende orde van de kans op een afwijkend (van de macrodynamica) traject ook expliciet kunnen berekenen. In het bijzonder is $\mathcal{I}(y) = 0$ voor y een typisch macrotraject $y_t = y_0 e^{-2t}$. Verder, indien de tijdsafgeleide $\dot{y}$ (in L^1 -zin) niet bestaat dan is $\mathcal{I}(y) = \infty$, en gaat de kans op het traject sneller dan exponentieel in N naar nul. Samenvattend:

- De irreversibele macrodynamica volgt uit de reversibele microdynamica door het nemen van de limiet $N \rightarrow \infty$. Dit is een manifestatie van de wet van de grote aantallen. De macrodynamica is consistent met het stijgen van de Boltzmann-entropie (tweede hoofdwet).
- Voor eindige (grote) N kunnen we in leidende orde berekenen dat de kans op een afwijkend traject (bijvoorbeeld een traject waar de Boltzmann-entropie afneemt) exponentieel klein is in N .

Het feit dat de dynamica stochastisch is, maakt de afleiding van de irreversibele macrodynamica technisch *makkelijker*, maar is geen *vereiste*.

We kunnen de spins ook laten flippen op discrete tijden, via een deterministisch mechanisme. Hier is een mogelijk voorbeeld. Voor iedere $i = 1, \dots, N$ kiezen we een getal $x_i \in [0, 1]$. Deze getallen evolueren vol-

gens een ‘chaotische afbeelding’: $x_i(n+1) = (2x_i(n)) \pmod{1}$, en de geassocieerde spin is $\sigma_i(n) = 1$ indien $x_i(n) \in [0, 1/2)$, $\sigma_i(n) = -1$ indien $x_i(n) \in [1/2, 1]$. Voor (Lebesgue) bijna alle keuzes van x_i zullen deze deterministisch evoluerende spins ook aanleiding geven tot een macrodynamica die vanuit een beginmagnetisatie naar magnetisatie nul relaxeert. De formules, in het bijzonder het analogon van (2), (5) en (6), worden iets gecompliceerder, maar kwalitatief verandert er niets aan de macro-evolutie.

Hydrodynamische limieten

In de jaren 70 van de vorige eeuw ontstond het vakgebied ‘interacting particle systems’ (IPS), onder meer geïnspireerd door een belangrijk artikel van Spitzer [17] en werk van Dobrushin, Vasilyev en Toom over probabilistische cellulaire automaten [5]. In 1985 verscheen de eerste samenvatting van dit gebied [14], die tot op heden nog steeds een standaard referentie is voor IPS.

Een belangrijk onderdeel van dit gebied is het onderwerp ‘hydrodynamische limieten’: het rigoreus afleiden van macroscopische vergelijkingen vanuit een microscopische dynamica van het type IPS. Dobrushin noemde voor deze doeleinden IPS dan ook ‘caricatures of hydrodynamics’ en gaf zelf één van de eerste afleidingen van de Euler-vergelijkingen voor onafhankelijke deeltjes [6]. Uitstekende referenties op dit gebied zijn [4, 10, 18]. De IPS die gebruikt worden voor hydrodynamische limieten zijn stochastische dynamica’s waar (mogelijk oneindig) veel deeltjes op toevallige wijze bewegen op een (mogelijk oneindig) rooster en met elkaar interageren. Een veel bestudeerd voorbeeld is het symmetrische exclusie proces, waarbij de deeltjes random en symmetrisch naar links of naar rechts kunnen springen en met elkaar interageren doordat ze niet op dezelfde roosterplaats mogen zitten (exclusie). Complexere interacties tussen de deeltjes zijn mogelijk in bijvoorbeeld Kawasaki-dynamica, of in zero-range processen.

Voor de context van hydrodynamische limieten is het van cruciaal belang dat er een behouden grootheid is. Voor het vervolg van dit verhaal is dit de deeltjesdichtheid.

Het stochastische karakter van de dynamica in IPS is een technische *vereenvoudiging* (ten opzichte van bijvoorbeeld Hamiltoniaanse dynamica’s van oneindig veel deeltjes). Dit toevallige karakter van de microscopische dynamica is met name niet de *oorzaak* van de irreversibiliteit in de macrovergelijking. In een deterministische dynamica is de enige bron

van toeval de onzekerheid over de begintoestand, en dit is technisch een veel moeilijker situatie; conceptueel verandert er echter niets.

Omdat de dichtheid behouden is, heeft de IPS-dynamica een familie extreem invariante of ergodische kansmaten, geparametriseerd door de mogelijke waarden van de dichtheid.

Hydrodynamische limiet: probleemstelling

De natuurlijke macrogrootheid in deze context is het *empirische dichtheidsprofiel*, voor de eenvoud hier gedefinieerd in het geval waar de deeltje op een ééndimensionaal rooster $\{0, \dots, N\}$ bewegen,

$$\mu_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i(tN^2) \delta_{i/N}. \quad (7)$$

Hierbij is $\eta_i(N^2t)$ het aantal deeltjes op roosterplaats i op tijdstip N^2t .

$\mu_N(t)$, een random kansmaat op het interval $[0, 1]$, kunnen we bekijken als het ‘oneindig-dimensionale’ analogon van de macrogrootheid ‘magnetisatie’ $m_N(t)$ uit de vorige sectie. Omdat de deeltjes stochastisch bewegen is het traject van het dichtheidsprofiel, $\{\mu_N(t) : 0 \leq t \leq 1\}$, een random traject met waarden in de ruimte van kansmaten op het interval $[0, 1]$.

In de overgang van de microscopische configuratie η (die de volledige informatie bevat hoeveel deeltjes op elke roosterplaats zitten) naar het macroscopische dichtheidsprofiel (die veel globalere informatie geeft) worden ruimte en tijd *herschaald*. Elk deeltje op ‘micropositie’ $i \in \{0, \dots, N\}$ geeft een bijdrage $1/N$ op ‘macropositie’ $i/N \in [0, 1]$, en de tijd wordt *herschaald* met een factor N^2 . De *herschaling* in de tijd is noodzakelijk als we bedenken dat om het profiel te veranderen orde N deeltjes verplaatst moeten worden, en dit duurt gemiddeld een tijd van orde N^2 (omdat de sprongen symmetrisch naar links en naar rechts zijn). Merk op dat we in de karikaturale dynamica van de vorige sectie de tijd niet hoefden te herschalen, omdat er voor deze dynamica geen behouden grootheid is.

Met verschillende schalingen in ruimte en tijd — hier de zogenaamde diffusieve *herschaling* — anticiperen we reeds op de vergelijking die we willen verkrijgen in de limiet $N \rightarrow \infty$: een parabolische vergelijking met een eerste afgeleide naar de tijd en tweede afgeleiden naar de ruimtelijke variabelen.

De bewering “het deeltjessysteem heeft de diffusievergelijking als *hydrodynamische limiet*” kan dan precies geformuleerd worden



Het graf van Ludwig Boltzmann in Wenen met bovenaan de entropieformule

als volgt: Indien

$$\mu_N(0) \rightarrow \rho(x)dx \quad (8)$$

als $N \rightarrow \infty$, ofwel, op tijdstip $t = 0$ is er een welgedefinieerd dichtheidsprofiel, ρ , dan

$$\mu_N(t) \rightarrow \rho_t(x)dx,$$

ofwel, op macrotijd t is er opnieuw een welgedefinieerd dichtheidsprofiel. Hierbij is dan $\rho_t(x)$ de oplossing van de diffusievergelijking met beginvoorwaarde $\rho_0 = \rho$.

Deze uitspraak kan dan meestal makkelijk worden uitgebreid naar de padenruimte, ofwel, indien (8) geldt, dan convergeert het hele

random traject $(\mu_N(t))_{0 \leq t \leq 1}$ naar het *deterministische* traject $\{\rho(t, x)dx : 0 \leq t \leq 1\}$ met $\rho(t, x)$ de oplossing van de macroscopische vergelijking (convergentie is hierbij zwakke convergentie in de ruimte van trajecten, uitgerust met de Skorohod-topologie). Deze uitbreiding is analoog aan de uitbreiding van de centrale limietstelling naar het invariantieprincipe.

Hiermee beschikken we dus nu over een *welgedefinieerde* bewering die men in concrete vrij algemene IPS-dynamica's ook rigoureus kan bewijzen.

Verschillende vergelijkingen (met mogelijk andere herschalingen van ruimte en tijd) kunnen voorkomen als hydrodynamische limiet. We hebben ons hier toegespitst op

de diffusievergelijking. Op kortere tijdschalen — tijd herschaald als Nt , de zogenaamde Euler-herschaling — verkrijgt men vergelijkingen van het type hyperbolische behoudswetten zoals de Euler-vergelijking, de Burgers-vergelijking. De vergelijkingen die via Euler-herschaling gevonden worden zijn typisch nog reversibel (bijvoorbeeld de Euler-vergelijking). Het irreversibele dissipatieve gedrag manifesteert zich pas op langere tijdschalen (diffusieve tijdschaal N^2t versus Nt) of in correcties op de Euler-vergelijkingen (zogenaamde Navier–Stokes correcties).

Replacementlemma

Om een idee te krijgen van de moeilijkheden die men tegenkomt in het bewijs van zo'n hydrodynamische limiet, volstaat het in te zien dat er een fenomenale reductie van variabelen optreedt. Indien we de tijdsevolutie bekijken van de grootheid $\mu_N(t)$ dan zullen hierin behalve het dichtheidsprofiel ook allerlei 'andere velden' (empirische gemiddelden van andere functies) een rol spelen (tenzij in zeer uitzonderlijke gevallen van zogenaamde zelf-duale modellen). Er zullen bijvoorbeeld termen verschijnen van de vorm

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i(N^2t) \eta_{i+1}(N^2t), \quad (9)$$

wat niet kan uitgedrukt worden in termen van het dichtheidsprofiel $\mu_N(t)$.

De cruciale stap bestaat erin om aan te tonen dat dergelijke empirische gemiddelden in de limiet $N \rightarrow \infty$ kunnen worden benaderd door functies van het *dichtheidsprofiel*. Intuïtief kunnen we dit aanvoelen omdat het dichtheidsveld het traagst fluctuerende veld is, geassocieerd aan de behouden grootheid.

Het cruciale idee hierbij is dat de kansverdeling van de configuratie op *macro-tijdschalen* N^2t effectief kan worden benaderd (in de zin van relatieve entropie) door een *lokale* evenwichtstoestand. Dit is een kansverdeling op configuraties gekarakteriseerd door een traag (in microscopische ruimte) variërend dichtheidsprofiel en op natuurlijke wijze afgeleid uit de ergodische maten die geparametriseerd worden door de dichtheid. Hieruit volgt dan dat de empirische gemiddelden zoals (9) kunnen worden vervangen worden door *gemiddelden* in deze lokale evenwichtstoestand, geparametriseerd door het dichtheidsprofiel.

Deze cruciale stap wordt in de literatuur over hydrodynamische limieten het 'replacementlemma' genoemd. Via dit replacement

lemma wordt de ‘hiërarchie van velden’ die optreedt in de evolutie van het dichtheidsprofiel na het nemen van de macroscopische limiet ‘gesloten’ en is het dichtheidsprofiel de enige relevante parameter die nog een rol speelt.

Het replacementlemma werd voor het eerst bewezen in werk van Guo, Papanicolaou en Varadhan [12] in de context van interagerende diffusies, en de daar ontwikkelde methode heet sindsdien de GPV-methode. De GPV-methode werkt goed voor het afleiden van parabolische vergelijkingen in vrij algemene IPS-setting. Later werden allerlei alternatieve methoden ontwikkeld voor het afleiden van hyperbolische vergelijkingen (conservation laws), door onder meer Yau, Rezakhanlou, Fritz en Tóth. Deze methoden dienen steeds om een versie van lokaal evenwicht en het ‘replacementlemma’ te bewijzen.

Grote afwijkingen

In 2007 werd aan Varadhan de Abelprijs uitgereikt “voor zijn fundamentele bijdragen aan de kansrekening en in het bijzonder voor het scheppen van een geünificeerde theorie van de grote afwijkingen” (zie [9] voor de NAW bijdrage hierover).

Hierin speelde zijn werk over grote afwijkingen in de context van hydrodynamische limieten voor IPS een belangrijke rol. Varadhan ging in werk met Donsker [8], Guo en Papanicolaou, en later in werk met Kipnis en Olla, nog een stapje verder dan enkel het afleiden van de hydrodynamische limiet. Zijn doel was om een principe van grote afwijkingen aan te tonen voor het traject van het empirische dichtheidsprofiel $\mu_N = \{\mu_N(t) : 0 \leq t \leq 1\}$. Dit betekent

$$\mathbb{P}(\mu_N \approx \gamma) \approx \exp(-N\mathcal{I}(\gamma)), \quad (10)$$

formeel te interpreteren in de zin van het grote-afwijkingenprincipe (3), (4). Hierbij is γ nu een traject van kansmaten: een dichtheidsprofiel als functie van de tijd, mogelijk afwijkend van een traject dat de macroscopische vergelijking volgt. Kort door de bocht willen we te weten komen wat de leidende orde is van de exponentieel kleine kans dat het empirische dichtheidsprofiel een “verkeerd traject volgt”, in plaats van zich te gedragen “zoals het hoort”, oftewel, volgens de macroscopische vergelijking. We kunnen (10) dus beschouwen als het oneindig-dimensionale analogon van (2), in plaats van de magnetisatie hebben we nu een dichtheidsprofiel. Het probleem, hoewel technisch veel gecompliceerder, is conceptueel echter van dezelfde aard als het bepalen van de kleine kans dat bij een groot aantal muntworpen de fractie worpen ‘kop’ afwijkt van $\frac{1}{2}$.

Indien γ de oplossing is van de diffusievergelijking met beginvoorwaarde γ_0 dan is het traject ‘typisch’ en is dus $\mathcal{I}(\gamma) = 0$. Buiten een omgeving van de oplossing van de macroscopische vergelijking is $\mathcal{I}(\gamma) > 0$ en de kans op een dergelijke afwijking is dus exponentieel klein.

In de afleiding van (10) en in het verkrijgen van een uitdrukking voor $\mathcal{I}(\gamma)$ wordt een ‘superexponentiële versie’ van het replacementlemma gebruikt, oftewel, de kans dat een empirisch gemiddelde van de vorm (9) afwijkt van de benaderende functie van het empirische dichtheidsveld gaat sneller naar nul dan e^{-aN} voor elke $a > 0$. Daarom kan in de berekening van de functie $\mathcal{I}$ in (10) het replacementlemma nog steeds gebruikt worden, de afwijkingen hiervan spelen geen rol zelfs in de grote-afwijkingenkansen. Meer concreet betekent dit dat bijvoorbeeld zelfs in *exponentiële uitdrukkingen* zoals

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N \eta_i(N^2 t) \eta_{i+1}(N^2 t)\right)$$

het empirische gemiddelde

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \eta_i(N^2 t) \eta_{i+1}(N^2 t)$$

kan worden vervangen door de benaderende functie van het dichtheidsprofiel. Verrassend genoeg is het bewijs van deze sterkere versie van het replacementlemma nauwelijks moeilijker dan dat van de zwakkere vorm.

Oneindig dimensionale Cramer-tilting

Gebruikmakend van de superexponentiële versie van het replacementlemma kan een *expliciete* uitdrukking verkregen worden voor $\mathcal{I}(\gamma)$, en dus voor de kans dat het traject van het empirische dichtheidsprofiel afwijkt van de oplossing van de macroscopische vergelijking. Het idee hierbij is dat de leidende orde van de kans op een afwijkend traject wordt gevonden door deze afwijking op een zo ‘waarschijnlijk mogelijke’ manier (in de entropische zin) te laten gebeuren. Dit is een zeer gebruikelijke strategie in de theorie van de grote afwijkingen, en staat bekend onder de naam ‘Cramer-tilting’. We lichten deze strategie kort toe in de context van het symmetrische exclusieproces.

Om het empirische dichtheidsprofiel een gegeven traject γ te laten volgen, hebben we een langzaam (in microscopische lengte-eenheden) variërend veld nodig. Dat wil zeggen, in plaats van de deeltjes met gelijke kans naar links en naar rechts te laten bewegen, laten we ze een stap naar links (rechts) zetten met kans evenredig met $e^{H((i\pm 1)/N, t) - H(i/N, t)}$, waarbij H een nader te vinden functie is, bepaald door γ (het traject waarvan we de kans willen bepalen). De hydrodynamische limiet van dit ‘zwak-asymmetrische’ exclusieproces (‘zwak’ omdat de asymmetrie van orde $1/N$ is) kan bepaald worden en geeft de macroscopische vergelijking

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x, t)(1 - \rho(x, t)) \frac{\partial H(x, t)}{\partial x} \right).$$

We vatten dit nu op als een vergelijking voor H bij gegeven afwijkend traject $\gamma = \{\rho(x, t) dx : 0 \leq t \leq 1\}$. Ofwel, gegeven γ , lossen we deze vergelijking op naar H . De functie $\mathcal{I}(\gamma)$ wordt dan (op randtermen na) gegeven door

$$\mathcal{I}(\gamma) = \int_0^1 \int_0^1 \rho(x, t)(1 - \rho(x, t)) \left(\frac{\partial H(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx dt. \quad (11)$$

In woorden samengevat: om de kans op een gegeven afwijkend traject γ van het dichtheidsprofiel te berekenen, zoekt men eerst naar het ‘veld’ $E(x, t) = \frac{\partial H(x, t)}{\partial x}$ dat het traject γ genereert als *typisch* traject. Vervolgens moet de ‘prijs voor dit veld betaald worden’ (‘prijs’ is hier dan in de zin van ‘relatieve entropie’). Deze ‘prijs’ kan bepaald worden via de berekening van de Radon–Nikodym afgeleide van de symmetrische dynamica naar de asymmetrische dynamica. Deze wordt na toepassing van de superexponentiële versie van het replacementlemma gegeven door

$$\exp\left(-N \int_0^1 \int_0^1 \rho(x, t)(1 - \rho(x, t)) \cdot E(x, t)^2 dx dt\right)$$

wat precies (10) en (11) geeft.

De factor $\rho(1 - \rho)$ is de ‘mobiliteit’ voor het symmetrische exclusieproces, oftewel, indien we een veld E aanleggen dan is de ‘drift’ van de deeltjes gemiddeld $\rho(1 - \rho)E$. In meer algemene IPS moet deze factor vervangen worden door een modelafhankelijke functie van de dichtheid.

Deterministische dynamica's

De toevaligheid in de beweging van de deeltjes in IPS is belangrijk in de *technische details* van de afleiding van de hydrodynamische limiet. Irreversibele macrovergelijkingen zoals de diffusievergelijkingen moeten echter ook rigoreus kunnen worden afgeleid uit zuiver deterministische dynamica's zoals Hamiltoniaanse dynamica. Een voorbeeld van (relatief) succes in dit programma is de afleiding van de Boltzmann-vergelijking uit Hamiltoniaanse dynamica door Lanford [13]. De Boltzmann-vergelijking wordt echter verkregen als een 'kinetische limiet' (de interacties worden mee herschaald) en is enkel geldig voor (zeer) korte tijden ($1/5$ van de typische tijd tussen twee botsingen). Het is dus niet mogelijk om hieruit hydrodynamische vergelijkingen af te leiden die spelen op langere tijdschalen.

Voor deterministische dynamica's is de enige bron van toeval de onzekerheid over de microtoestand bij gegeven macrotoestand, bijvoorbeeld bij gegeven dichtheidsprofiel. In de eenvoudige speelgoeddynamica hebben we reeds laten zien dat deze bron van toeval voldoende is: we kunnen het random flippen van spins vervangen door een deterministische imitatie hiervan.

In de context van hydrodynamische limieten zou hetzelfde moeten gelden. Voor

een gegeven macrotoestand (dichtheidsprofiel) hebben we een kansmaat op de verzameling van microscopische beginconfiguraties die hiermee consistent zijn, en voor bijna alle consistente beginconfiguraties zal een macroscopische tijd later het dichtheidsprofiel gegeven worden door een oplossing van de hydrodynamische vergelijking.

Wiskundig is dit probleem dus welgedefinieerd, de vraag is nu voor welke deterministische dynamica's een bewijs kan worden gegeven en of er een analogon is voor het geassocieerde principe van grote afwijkingen zoals we dit kennen in IPS. Recente resultaten zijn afgeleid door Bricmont en Kupiainen [2], en door Dolgopyat en Liverani [7], voor onder meer 'coupled map lattices' (voor eerdere resultaten voor deterministische dynamica's zie bijvoorbeeld [7]). Coupled map lattices (CML) zijn chaotische dynamica's in oneindige dimensie die we verkrijgen via een samenstelling van chaotische dynamica's (zoals uniform expanderende afbeeldingen van het interval $[0, 1]$) op individuele coördinaten met een 'koppeling' tussen verschillende coördinaten, bijvoorbeeld van de 'diffusieve' vorm

$$(C(\eta))_i = \eta_i(1 - 2\epsilon) + \eta_{i-1}\epsilon + \eta_{i+1}\epsilon,$$

waarbij massa wordt uitgewisseld met de bu-

ren. CML zijn dus natuurlijke deterministische analoga van IPS.

Voor de afleiding van de diffusievergelijking heeft de CML-dynamica bovendien een behouden grootheid.

Hoewel er dus resultaten zijn, zoals de afleiding van de diffusievergelijking, zijn we voor dergelijke deterministische dynamica's zoals CML nog ver verwijderd van een rijk en volledig beeld zoals we dat hebben voor IPS. Voor realistische Hamiltoniaanse dynamica's is het probleem zelfs nagenoeg volledig open. $\leftarrow$



Illustratie: Bernhard Reischl

Dankwoord

Met dank aan Aernout Van Enter, Klaas Landsman en Christian Maes voor nuttige opmerkingen en aanvullingen.

Referenties

- 1 L. Boltzmann, 'On Zermelo's paper "On the mechanical explanation of irreversible processes"', *Ann. Phys.* **60**, pp. 392–398, 1897.
- 2 J. Bricmont en A. Kupiainen, 'Diffusion in energy conserving coupled maps', preprint available at <http://arxiv.org/abs/1102.3831>, 2011.
- 3 J. Bricmont, 'Science of chaos or chaos in science?' (English summary) 'The flight from science and reason', New York, 1995, pp. 131–175, *Ann. New York Acad. Sci.*, **775**, New York Acad. Sci., New York, 1996.
- 4 A. de Masi, E. Presutti, *Mathematical methods for hydrodynamic limits*, Lecture Notes in Mathematics **1501**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- 5 R.L. Dobrushin, V.I. Krioukov en A.L. Toom (eds.), *Stochastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis*, Manchester University Press, 1990.
- 6 R.L. Dobrushin, Ra. Siegmund-Schultze, 'The hydrodynamic limit for systems of particles with independent evolution', *Math. Nachr.* **105**, pp. 199–224, 1982.
- 7 D. Dolgopyat en C. Liverani, 'Energy transfer in a fast-slow Hamiltonian system', preprint available at <http://arxiv.org/abs/1010.3972>, 2010.
- 8 M.D. Donsker, S.R.S. Varadhan, 'Large deviations from a hydrodynamic scaling limit', *Comm. Pure Appl. Math.* **42**, pp. 243–270, 1989.
- 9 F. den Hollander, 'Abelprijs 2007, S.R. Srinivasa Varadhan', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, september 2008, pp. 192–196, 2008.
- 10 C. Kipnis en C. Landim, 'Scaling limits of interacting particle systems', *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* **320**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- 11 C. Kipnis, S. Olla en S.R.S. Varadhan, 'Hydrodynamics and large deviation for simple exclusion processes', *Comm. Pure Appl. Math.* **42**, pp. 115–137, 1989.
- 12 M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou en S.R.S. Varadhan, 'Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions', *Comm. Math. Phys.* **118**, pp. 31–59, 1989.
- 13 O.E. Lanford, 'A derivation of the Boltzmann equation from classical mechanics', *Probability Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. XXXI, Univ. Illinois, Urbana, Ill., 1976, pp. 87–89. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.
- 14 T. Liggett, *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- 15 C.B. Morrey Jr., 'On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics', *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **40**, pp. 317–322, 1954.
- 16 J.L. Lebowitz, 'Microscopic origins of irreversible macroscopic behavior', *Physica A* **263**, pp. 516–527, 1999.
- 17 F. Spitzer, 'Interaction of Markov processes', *Advances in Math.* **5**, pp. 246–290, 1970.
- 18 H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, Heidelberg, 1991.
- 19 S.R.S. Varadhan, 'Large deviations', *Ann. Prob.* **36**, pp. 397–419, 2008.

De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst
derdewet@nieuwarchief.nl

Het onderstaande is een reactie op het redactioneel 'Wiskundigen in de politieke arena' door Ferdinand Verhulst uit het NAW-decembernummer van 2010.

Specialisatie van wiskunde bij de universiteiten

Van oudsher vormt de wiskunde een discipline die zichzelf ontwikkelt in onderlinge harmonie en in gezonde interactie met andere wetenschapsgebieden, waarvan de natuurwetenschappen en economie de belangrijkste zijn. Deze interactie weerspiegelt zich in de curricula van de bijbehorende opleidingen: wiskundigen besteden een belangrijk deel van hun tijd aan onderwijsdienstverlening. De behoefte aan wiskunde voor modelvorming is het laatste decennium alleen maar toegenomen, ook in recente ontwikkelingen binnen de biologie en meteorologie.

Wiskunde is als discipline verankerd in een viertal subdisciplines: analyse, algebra en meetkunde, kansrekening en statistiek, en numerieke wiskunde, die her en der vruchtbare overlap kunnen vertonen en in bepaalde richtingen ingevuld of uitgebreid zijn met toepassingen. Idealiter opereert binnen elke subdiscipline minimaal een tweetal onderzoeksgroepen van zes onderzoekers met daarbij promovendi en postdocs. Gezegd moet dat de meeste instituten binnen de Nederlandse universiteiten in dit opzicht, vooral door de krimp van het afgelopen decennium, een te lage bezetting hebben. Met te weinig mensen wordt niettemin internationaal zeer goed onderzoek neergezet, zoals ook blijkt uit de recente onderzoeksvisitatie. Dit laatste komt zonder meer in gevaar bij eventuele verdere krimp en de toenemende studentaantallen moeten nu zonder meer weer aanleiding geven tot groei. De betrokken onderzoekers zijn in principe allen op een of andere wijze betrokken bij het onderwijs, inclusief de onderwijsdienstverlening. De wiskundeafdelingen van de universiteiten zijn sinds jaar en dag verantwoordelijk voor al dit onderwijs en dat moet ook zo blijven.

Voor elke subdiscipline kunnen velerlei deelgebieden of specialisatierichtingen onderscheiden worden, die nergens ter wereld allemaal tegelijk vertegenwoordigd zijn en dat ook niet eens kunnen of moeten zijn. Op dit punt kunnen de internationale ontwikkelingen in en rond de wiskunde een bepaalde rol spelen. Echter, teveel specialisatie van een instituut in één bepaalde richting verlaagt naar mijn ervaring de levensvatbaarheid op enige termijn grotelijks: voor de onderlinge harmonie is nu eenmaal een zeker evenwicht nodig. Henk Broer

Hierover volgen reacties op het artikel 'Een veelkleurig palet in het onderwijs van wiskunde' van Nellie Verhoef uit het maartnummer.

Onderzoeksverslag of opiniestuk?

De artikelen in het NAW over onderwijs laten meestal zien dat het KWG serieus aandacht besteedt aan voortgezet onderwijs. Helaas gaat dit mijns inziens niet op voor dit artikel van Nellie Verhoef, hoewel ik de auteur heb leren kennen als zeer betrokken bij docenten en wiskunde-onderwijs.

Is het artikel bedoeld als gepopulariseerd onderzoeksverslag of als opiniestuk? In het intro staat twee keer het woord 'onderzoek': de Universiteit Twente onderzocht en Nellie Verhoef (de onderzoeker?) beschrijft de resultaten van dit onderzoek. De lezer mag aannemen dat dit een (gepopulariseerd) onderzoeksverslag is. Bij lezing heeft het echter het karakter van een opiniestuk: onderzoeksgegevens ontbreken, de toonzetting is veelal opiniërend.

De methode voor en wijze van rapporteren van onderzoek verschillen per discipline, maar één basiseis geldt voor elke rapportage: verificerbaarheid. De lezer moet kunnen nagaan welke methode gebruikt

is, op welke manier de data zijn verkregen, wat die data zijn, et cetera. Eventueel via verwijzing naar een website of publicatie waar de belangstellende lezer de onderzoekdetails kan vinden. Zo'n verwijzing ontbreekt hier, we moeten het dus doen met de gegevens in het artikel. Nu kun je in twee pagina's van het NAW best een en ander aan feitelijke informatie opnemen. Helaas blijven na lezing wel erg veel onduidelijkheden bestaan over de data, echter niet over de meningen van de auteur. Ik noem enkele voorbeelden. Cursief de titels van de kopjes in het artikel.

Beschrijving van de uitgangssituatie (Welke is de normale gang van zaken vandaag de dag?):

Dit is een karikaturale beschrijving waarvoor de data ontbreken. Op hoeveel scholen geven alle wiskundeleraars standaard niet meer dan tien minuten klassikaal les? Op hoeveel scholen geeft minstens één docent geïnspireerd les? Is er onderzoek aan deze beschrijving vooraf gegaan of zijn het subjectieve indrukken van de onderzoeker(s)? Om welk schooltype gaat het: vmbo, mbo, havo, vwo, onderbouw? In de inleiding noemt de auteur alfa- en bètaleerlingen, we mogen misschien aannemen dat het hier om bovenbouw vwo en mogelijk ook havo gaat.

Methode (Wat beweegt docenten?):

1. Samenstelling van de proefgroep: De bedoeling was een schriftelijke vragenlijst te sturen naar een groep docenten die aselect getrokken werd uit een databestand van docenten, een 'algemene groslijst'. Gaat het om een landelijk bestand? Een bestand van docenten uit de regio? Aangezien de respons te laag was, is deze vraag wellicht niet van belang. Uiteindelijk waren 20 docenten na een telefonische belactie bereid mee te werken. Wie zijn er gebeld? De docenten uit het oorspronkelijke grote databestand of docenten die tot de contacten van de onderzoeker(s) behoren? Hoeveel zijn er gebeld? Hoe was de samenstelling van de groep van 20? Heterogeen wat betreft leeftijd, geslacht, opleidingsniveau, gebruikte boeken, havo/vwo onderwijs, et cetera? Voor interpretatie van gegevens zijn dit belangrijke karakteristieken die in het artikel geheel ontbreken.
2. De dataverzameling: Deze "bestond uit een schriftelijke vragenlijst", bedoeld wordt waarschijnlijk de antwoorden op die vragenlijst. Uiteindelijk werd het een semi-gestructureerd interview. Dat lijkt iets anders dan een vragenlijst. Is die vragenlijst nu wel of niet gebruikt, waren het open of gesloten vragen, of beide?

Resultaten:

1. De doelen (*Waar kiezen docenten voor?*): "Bij de vraag naar doelen [...] trad een verschil op tussen docenten die [...] bijbrengen van kennis (inzicht), of [...] beheersen van vaardigheden." Er is kennelijk een tegenstelling tussen enerzijds bijbrengen van kennis en anderzijds beheersen van vaardigheden. Is dat onderscheid vooraf door de onderzoeker(s) gemaakt of maakten de docenten dat uit zichzelf? Dit wordt uit het artikel niet duidelijk. Is kennis hetzelfde als inzicht? Voor de onderzoeker en/of voor de docenten? Zonder gegevens over wat en in welke vorm er bevraagd is, kan uit de constatering dat binnen een groep van 20 docenten verschillende antwoorden gegeven worden geen conclusie getrokken worden door de lezer.
2. De onderwijsmethoden (*Hoe denken docenten hun doelen te gaan bereiken?*): Docenten blijken verschillende onderwijsmethoden te gebruiken. Dat lijkt mij verheugend (liever geen landelijke eenheidsworst), maar de auteur is een andere mening toegedaan, de reden daarvoor is niet duidelijk. De indruk bestaat dat alle docenten dezelfde lesboeken gebruiken, maar dat wordt niet geëxpliciteerd. Overigens is het verheugend dat men kennelijk toch niet zo slaafs

de boeken volgt als in de beschrijving van de uitgangssituatie (zie boven) gesuggereerd wordt. De auteur komt hier echter in het artikel niet op terug.

3. Het onderscheid tussen alfa- en bètaleerlingen (*Waarom een verschil tussen alfa- en bètaleerlingen?*): Hier wordt een verschil in doelen voor leerlingen met wiskunde A dan wel wiskunde B geconstateerd. Het probleem lijkt te zijn dat binnen de groep bevroegde docenten geen overeenstemming is over de aard van algemeen wiskundige doelstellingen voor leerlingen met wiskunde A dan wel B en ook niet over de gewenste vakinhoud om die doelstellingen te bereiken. Ook hier wrekt zich dat de lezer geen idee heeft wat de formulering van de vragen was. Er is een scala aan mogelijkheden denkbaar waarom docenten verschillende antwoorden geven op een vraag over wat ze als doel hebben voor leerlingen in wiskunde A dan wel wiskunde B. Dat betekent niet noodzakelijk dat ze het uiteindelijk met elkaar oneens zijn over die doelen of dat ze geheel verschillende doelen in de praktijk nastreven.
4. Beweegredenen voor keuzes (*Resultaten van onderzoek*): De constatering dat er binnen de groep van 20 docenten grote verschillen bestaan wat betreft beweegredenen voor keuzes zegt niet zo veel. Het vinden van verschillende beweegredenen bij verschillende mensen is geen opzienbarende constatering.

Conclusie (Resultaten van onderzoek):

Het is duidelijk dat de conclusie van de auteur, vervat in de laatste alinea, in het artikel niet is onderbouwd. Niet duidelijk is in welke mate en om welke redenen onderwijspraktijken eensluidend dienen te zijn. Bovendien is deze conclusie een generalisatie op basis van interviews met 20 docenten. De samenstelling van de proefgroep is onbekend, de interviewvragen en transcripts zijn onbekend, de onderwijspraktijken zelf zijn kennelijk niet geobserveerd.

Van reflectie op onderzoeksmethode en resultaten is niets te lezen. Waarom was de respons bij de eerste poging een steekproef te trekken zo laag? Is de uiteindelijk samengestelde steekproef representatief? Hoe heeft het format van de vragen de antwoorden beïnvloed? Enige discussie is hier op zijn plaats lijkt me.

Ik zou willen voorstellen dat de auteur de onderzoeksgegevens beschikbaar stelt via een website, dat moet voor de TU Twente niet moeilijk zijn. Uiteraard inclusief een overzicht van de gestelde vragen, liefst met een geanonimiseerd overzicht van de interviews en met een discussie over de representativiteit van de steekproef. Dit zou dan best een interessante verkenning kunnen zijn als basis voor een uitgebreider onderzoek en/of een professionaliseringscursus.

Ik blijf er op vertrouwen dat de redactie van NAW aan artikelen over wiskundeonderwijs even hoge kwaliteitseisen stelt als aan de artikelen over wiskunde.

Jenneke Krüger, SLO, Zwolle

Reactie Nellie Verhoef

Om met de deur in huis te vallen: mijn artikel is geen wetenschappelijk artikel maar een opiniërend artikel, een artikel om lezers van het NAW een kijkje te geven in de keuken van bovenbouwdocenten die wiskunde onderwijzen. Dat betekent dat er wat gepeperde uitspraken in voorkomen die niet direct een onderzoeksresultaat weergeven.

In de interviewgesprekken (variërend van aan half uur tot een uur) gaven docenten aan dat de schoolcultuur hen vaak dwong in een keurslijf van tien minuten plenair lesgeven en daarna "zelfstandig aan het werk gaan". De docenten maakten zelf onderscheid in alfa- dan wel bètaleerlingen. De onderliggende motivatie hiervoor verschilde sterk. De interviewgesprekken eindigden in de meeste gevallen met opmer-

Goal of math education	Choice of method at the start of instruction	
	Abstraction	Situated worked examples
Understanding	H, I, K, R	D, F, M, Q
Procedures to solve problems	B, E, O, P, S	A, G, J, L, N

Tabel 1 Categorization of teachers, based on teachers' goals and their instructional statements

kingen van docenten dat zij het prettig vonden om eens uitgebreid over hun onderwijs na te denken. Over het algemeen nemen zij daar geen tijd voor. In het gesprek deden zij weer nieuwe inspiratie op, naar eigen zeggen.

Ad 1) Samenstelling van de proefgroep aselect: De deelnemers bestonden uit 20 onbekende bovenbouwdocenten wiskunde uit alle delen van het land. Zij waren op de wijze zoals beschreven in het artikel systematisch uit het databestand van de NVvW gehaald. Van de wiskundedocenten zijn geslacht, leeftijd, vooropleiding, werkervaring, leservaring, nevenfuncties, schooltype, klassen, lesmethode, wiskundesectie en het streven van de sectie in kaart gebracht. Er waren vier vrouwen, de gemiddelde leeftijd was 52, 16 respondenten hadden een doctoraal wiskunde met een lesbevoegdheid, het gemiddeld aantal jaren leservaring was 21,2. Drie docenten gebruikten *Getal en Ruimte* niet. Halverwege overleed één van de docenten (31 jaar oud). Dit had effect op de gemiddelde leeftijd.

Ad 2) De dataverzameling: Het semi-gestructureerde interview had dezelfde intentie als de schriftelijke vragenlijst: het in kaart brengen van doelen van het wiskundeonderwijs en instructie om die doelen te bereiken. De vragen werden open gesteld. Alle interviews zijn opgenomen en uitgeschreven. De uitgeschreven interviews zijn naar de respondenten teruggestuurd met de vraag of dit verslag overeenkwam met de intentie, en of er eventueel iets toegevoegd (of weggehaald) zou moeten worden.

Op theoretische gronden is gekozen voor een analyse van de antwoorden van de docenten in enerzijds de nadruk op het begrijpen (wiskundige begrippen, structuren en logisch redeneren) en anderzijds het beheersen van procedures om problemen op te lossen (probleemoplosvaardigheden, wiskundige technieken en realistische situaties) [2–3]. Wat betreft de keuze voor instructie werd onderscheid gemaakt tussen de nadruk op abstractie dan wel gesitueerde (uitgewerkte) voorbeelden [1, 4]. De resultaten werden in een matrix weergegeven, in de rijen beide vormen van doelen en in de kolommen beide vormen van instructie. In de cellen stonden de docenten, in hoofdletters A tot en met S, zie Tabel 1. Docent C kon niet worden gecategoriseerd. De docenten stemden met de categorisatie in 'Understanding' respectievelijk 'Procedures to solve problems' en 'Abstraction' dan wel 'Situated worked examples' (Tabel 1) in. De tabel laat zien dat er geen overeenstemming was.

Documenten zijn te vinden op www.utwente.nl/elan/onderzoek/ontwikkelingontwerpenonderwijs

Referenties

- 1 T. Gardiner, *Improving problem solving, mathematical literacy and independent learning*, NCETM, University of Birmingham, UK, 2004.
- 2 A. Jaffe en F. Quinn, 'Theoretical Mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics', *Bulletin of the American Mathematical Society* 29 (1) (1993), pp. 1–13.
- 3 W.P. Thurston, 'On proof and progress in mathematics', *Bulletin of the American Mathematical Society* 30 (2) (1990), pp. 161–177.
- 4 S. Vinner, 'Mathematics education: Procedures, rituals and man's search for meaning', *Journal of Mathematical Behavior* 26 (1) (2007), pp. 1–10.

Leve de uitdagende docent!

Nellie Verhoef beschrijft een onderzoek naar de opinies van wiskundeleraren in het voortgezet onderwijs over hun vak. Welke doelen streven zij na in hun onderwijs en hoe denken zij die te bereiken? De conclusie van het onderzoek is dat er geen consensus te ontdekken valt, noch in de doelen, noch in de middelen, noch in de argumentatie. Verhoef vindt dit verrassend en ongewenst. Verder blijkt dat docenten zich in hun opinievorming vooral baseren op hun ervaringen als leerling en docent, maar niet op wetenschappelijk onderzoek.

Ik vind deze uitkomsten in het geheel niet verrassend. Zelfs onder professionele wiskundigen hebben altijd al enorme verschillen van mening en smaak bestaan over wiskunde en onderwijs: zuiver of toegepast; wiskunde vanwege haar klassieke schoonheid (zoals beschreven door G.H. Hardy in zijn *Mathematician's apology*) of rauwe praktische problemen oplossen; probleemoplossen à la Erdős of grootse theorieën à la Grothendieck; leren denken, redeneren, probleemoplossen of kan men zich in het voortgezet onderwijs beter concentreren op de 'algebraïsche basisvaardigheden'? Ook over de didactiek bestaat geen overeenstemming: inductief of deductief; van algemeen naar speciaal of omgekeerd; meester-gezel of zelfontdekkend leren; eerst contextloos basisvaardigheden aanleren of het totale wiskundeonderwijs opbouwen aan de hand van open modelleeropdrachten? De laatste discussie leeft wellicht meer onder wiskundendidactici dan onderzoekswiskundigen, maar zelfs bij hen bestaat geen consensus. Over dergelijke thema's is de afgelopen jaren in Nederland fel gediscussieerd, niet alleen door zeer- en hooggeleerden in commissies zoals de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO) en de Resonansgroep, maar ook op scholen door leraren en bestuurders.

Als universitair wiskundigen al zo sterk verdeeld zijn, dan kan het geen verbazing wekken dat ook leraren onderling sterk van mening verschillen. Wiskundeleraren vormen een zeer heterogene groep. De meesten zijn geen wiskundigen, maar bèta in een brede zin van het woord. Zij kozen voor wiskunde omdat dat nu eenmaal het 'generieke bètavak' is, waar niet al te veel specialistische kennis voor nodig lijkt te zijn. De een is begonnen als ingenieur of ict'er en is pas op latere leeftijd omgeschoold tot wiskundeleraar, de ander is begonnen met een opleiding aan een hbo-lerarenopleiding tot tweedegraadsdocent. Sommigen zijn eerst wiskundige en dan pas leraar, maar de meesten zijn allereerst leraar en het vak dat ze onderwijzen is min of meer bijzaak.

Anders dan Verhoef vind ik de beschreven variatie niet ongewenst. Volgens onderwijskundigen moeten docenten rekening houden met verschillende leerstijlen en intelligenties van leerlingen. Zou het onderwijs dan niet kunnen profiteren van variatie in doceerstijlen en talenten van leraren? Verder zie ik niet in hoe je het zou kunnen veranderen. Met voorgeschreven staatsdidactiek en hermetisch dichtgetimmerde lesprogramma's zonder ruimte voor creatieve inbreng van de docent? Dat lijkt me niet de manier om de talenten van docenten en leerlingen tot bloei te brengen. Zouden de resultaten van onderwijskundig en didactisch onderzoek dan meer eenheid kunnen brengen? Ook dit betwijfel ik: in het debat over basisvaardigheden en inzicht onderbouwen beide zijden hun positie met passende onderzoeksresultaten.

Wél ongewenst in mijn ogen is de door Verhoef gesignaleerde verveling. Sommigen wijten deze verveling aan de kloof tussen school en het dagelijks leven van leerlingen. Deze opinie kan mijns inziens doorslaan in een ongewenst dogmatisme waarin eeuwig en altijd moet worden uitgegaan van 'de beleavingswereld van de leerling'. Wat niet binnen dat stramien past wordt geschrapt. Een ander punt is volgens mij het gebrek aan uitdaging. Ik vermoed dat veel leerlingen

veel meer kunnen dan nu van hen wordt verlangd. Uitdaging, zo concludeert John Hattie in *Visible learning*, een meta-meta-analyse van meer dan 800 meta-analyses over 'achievement', is essentieel voor effectief onderwijs, samen met feedback, waarbij vooral de feedback van de leerling aan de docent niet over het hoofd moet worden gezien. Dat vergt ander onderwijs dan de gebruikelijke minimale instructie gevolgd door 'zelfstandig werken', hetgeen meestal neerkomt op het afwerken van opgaven van de studiewijzer zonder enige reflectie of verdieping.

Wellicht heb ik een en ander te zwart-wit opgeschreven. In mijn eigen opinies vertoon ik evenveel variatie als de door Verhoef beschreven docenten. Bijvoorbeeld vind ik zelf abstracte wiskunde het mooist, maar ik vind ook dat we leerlingen veel te weinig laten zien waar wiskunde goed voor is. Omgekeerd is juist een zekere abstractie nodig om leerlingen te laten inzien dat je met dezelfde wiskunde problemen in verschillende contexten kunt oplossen (transfer). Als ik in- en uitproduct uitleg aan ingenieurs, gebruik ik de natuurkundige begrippen arbeid en moment; maar ik heb een broertje dood aan 'tomatenwiskunde' (gewichtsklassen van tomaten als context om open en gesloten intervallen uit te leggen). Ik vind dat er veel meer met ict moet worden gedaan in het wiskundeonderwijs, meer moet worden geëxperimenteerd door leerlingen en dat er meer vakoverstijgend moet worden gewerkt, maar ik vind ook dat juist op deze terreinen de wiskundige reflectie achteraf vaak ernstig te kort schiet, waardoor dergelijke veelbelovende activiteiten veel van hun waarde verliezen. Voor sommige doelen is *direct instruction* een zeer effectieve didactiek (zie Hattie), maar aan de andere kant moet het onderwijs ook weer niet ontaarden in een 4-, 5- of 6-jarige examentraining. Kortom, het is meestal niet of-of, maar en-en.

Uit Hatties meta-meta-analyse blijkt dat de docent een van de belangrijkste factoren is voor succesvol onderwijs. We moeten die docenten goed opleiden: pedagogisch, didactisch én vakinhoudelijk. Alleen zo'n docent is in staat inspirerend onderwijs te geven. De leerling moet voor de docent centraal staan, maar hij of zij moet ook over een gedegen vakken kennis beschikken en liefde voor het vak uitdragen. Dat gaat niet in een keurslijf, daarvoor zijn goed opgeleide docenten nodig die de ruimte, tijd en middelen (zoals ict) krijgen om in vrijheid uitdagend onderwijs te verzorgen.

Jeroen Spandaw, TU Delft

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'De overval: Het Freudenthal Instituut' door Floris Olsthoorn, Derk Pik en Nellie Verhoef uit het NAW-decembernummer van 2010.

Prachtig vak heeft slechte reputatie gekregen

Graag wil ik reageren op de uitlatingen van de heer Paul Drijvers over het kapotmaken van een grafische rekenmachine tijdens mijn oratie. In *de overval* staat hierover: "Twee jaar geleden heeft de Utrechtse bijzonder hoogleraar kwantitatief watermanagement Ruud Schotting een oratie gehouden, waar hij een exemplaar van de TI-83 kapot heeft gemaakt, vergezeld van de uitspraak dat de rekenmachine een ramp is voor het onderwijs. [...] Drijvers heeft de hoogleraar gevraagd of hij dit kan aantonen. De desbetreffende oratie is onlangs, twee jaar na dato, op schrift gezet. Volgens Drijvers geeft deze tekst geen enkele onderbouwing voor de bewering."

Ik geef sinds 2005 alle eerstejaars studenten aardwetenschappen het vak wiskunde. Mijn collega geeft in de eerste tien weken een herhaling van de middelbare school wiskunde, waarna ik start met de meer, laten we zeggen, universitaire wiskunde. Toen ik er aan begon schrok ik me dood. Ik heb letterlijk staartdelingen staan uitleggen omdat de

helft van de studenten geen idee had wat dat zijn. Of moet ik zeggen 'waren'? De meest elementaire algebraïsche bewerkingen komen de meeste studenten volslagen onbekend voor. En dat terwijl ze wel zes jaar (!) wiskunde op de middelbare school gevolgd hebben, en er ook nog, met goed gevolg, examen in hebben gedaan. Bij mij gingen de alarmbellen rinkelen. Ik kon het bijna niet geloven.

Daarom heb ik tijdens mijn inaugurele rede een grafische rekenmachine (GR) kapot geslagen. Dat leidde tot een staande ovatie van de ongeveer 350 aanwezigen. Ik ben en blij van mening dat de GR het symbool is van de teloorgang van het wiskundeonderwijs in Nederland. Hoe is het mogelijk dat bij een groot aantal opgaven in de wiskundeboeken een symbool staat dat de leerling de GR móét gebruiken? Hoe is het mogelijk dat we de handleiding van een elektronisch apparaat tot eindexamenstof verheven hebben? Ik bedoel dit uiteraard figuurlijk.

Toen ik mijn rede aan het voorbereiden was had ik echt nog nooit van het Freudenthal Instituut gehoord. Ik heb me de vrijheid gepermiteerd om mijn ongenoegen te ventileren over de gang van zaken in het middelbaar wiskundeonderwijs. Ik dacht dat ik dat mocht/kon doen omdat ik er rechtstreeks mee te maken heb. Dat ik me niet in de literatuur over dit soort zaken verdiept heb, is me wellicht te verwijten. Maar ik heb met deze praktijk te maken. En dan mag ik daar, als 'terzijde', wel iets van/over zeggen tijdens mijn oratie. Daar hoeft ik de goedkeuring van het FI niet voor te hebben. Het doet me oprecht pijn dat dit prachtige vak zo'n slechte reputatie heeft gekregen.

Wat ik ook niet wist, en je kan ook niet alles weten, is dat er een enorme kloof bestaat tussen de academische wiskundigen en het FI. Dat begrijp ik als buitenstaander al helemaal niet! Hoe kan het nu toch zijn dat het FI, laten we zeggen 'nauw' betrokken is bij het bepalen van de vorm en inhoud van het wiskundeonderwijs op lagere en middelbare scholen, en vele wiskundigen in Nederland daar niks in zien?

Dr. Paul Drijvers is een heel aardige collega. Hij bedoelt het goed. Maar ik ben het dus niet altijd helemaal met hem eens. Wel jammer dat hij zo'n nare toon aansloeg over mij in het artikel in NAW. Maar dat blijkt nu eenmaal de 'toon' te moeten zijn als het gaat om de discussie over reken- en wiskundeonderwijs in Nederland. Hard en vals! En daar heeft dus helemaal niemand baat bij. Prof. dr. Ruud Schotting, Hoogleraar Kwantitatief Watermanagement, UU

Reactie Paul Drijvers

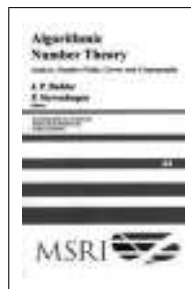
Natuurlijk heeft Ruud Schotting mijn goedkeuring niet nodig voor de inhoud van zijn oratie. Op mijn beurt mag ik daarover wel een mening hebben. Die is dat de kwaliteit van de discussie over de onderwerpen die ons beiden aan het hart gaan niet wordt bevorderd door een dramatische act met een hamer of door een onjuiste onliner over hoe "we de handleiding van een elektronisch apparaat tot eindexamenstof verheven hebben". Ik begrijp Ruuds zorg voor het niveau van de eerstejaars studenten en waardeer zijn betrokkenheid bij het wiskundeonderwijs; zorg en betrokkenheid die ik deel. Ik ben het met hem eens dat de discussie niet hard en vals moet zijn en ik neem dit ook persoonlijk ter harte. Laten we dus de kwaliteit van het wiskundeonderwijs bevorderen door een genuanceerde en op feitenkennis gebaseerde discussie!

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - HG 8.38
Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



J.P. Buhler, P. Stevenhagen (eds.)

Algorithmic Number Theory Lattices, Number Fields, Curves and Cryptography

Cambridge: Cambridge University Press, 2008

MSRI Publications 44

652 p., prijs £55.00

ISBN 9780521808545

De oorsprong van dit boek ligt in 2000, toen het Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley een semester over 'algorithmische getaltheorie' organiseerde, met als opening een workshop met overzichtsvoordrachten. Het boek telt 20 hoofdstukken, variërend van 12 tot 60 pagina's, geschreven door leiders in het vakgebied. Ieder hoofdstuk geeft een overzicht over een deelgebied. Het boek verscheen acht jaar na de workshop, zodat ook recentere ontwikkelingen konden worden meegenomen en een completer beeld is ontstaan.

Een scala aan onderwerpen komt langs. Een greep: Buhler en Wagon behandelen basis-algoritmen. Pomerance en Granville schrijven over 'smooth numbers' (getallen met uitsluitend kleine priemfactoren), terwijl Bernstein dieper ingaat op snel vermenigvuldigen. Priemtests, factorisatie en discrete logaritmen zijn onderwerpen waar naast getaltheoretici ook cryptologen zeer in geïnteresseerd zijn, ze komen aan de orde in verschillende hoofdstukken van onder anderen Stevenhagen, Schoof, Pomerance en Schirokauer. Roosterbasisreductie wordt beschreven aan de hand van 'vlaggen' door Lenstra (Hendrik), terwijl Bernstein schrijft over toepassingen daarvan op het vinden van kleine polynoomwaarden. Ook zijn er hoofdstukken, allemaal met een primair algorithmische insteek, over onderwerpen als elliptische krommen, klassengroepen, klassenlichamen, Arakelov-theorie, zeta-functies over eindige lichamen, punten tellen op variëteiten over eindige lichamen, en modulaire vormen, en dan heb ik nog niet alles genoemd.

Het doel van dit boek is overzicht te geven zonder encyclopedisch te worden. Ik denk dat het heel goed educatieve doelen kan dienen. Ik denk dan bijvoorbeeld aan afstudeerders of promovendi die behoefte hebben aan een leesbare, inleidende, coherente, niet-opervlakkige tekst op een deelgebied van de algorithmische getaltheorie. Zij zullen in dit boek ongetwijfeld vinden wat ze zoeken. Maar ook docenten die een cursus algorithmische getaltheorie willen geven vinden hier overzicht, veel materiaal, originele gezichtspunten, en uiteraard uitgebreide literatuurlijsten. Kortom, dit is een zeer nuttig boek. *Benne de Weger*



René Descartes

Meetskunde

Inleiding en vertaling van Wim W. Wilhelm

Eburon, 2009

200 p., prijs €27,50

ISBN 9789059723207

De *Géométrie* van Descartes is van groot belang in de geschiedenis van de wiskunde, omdat in dit werk voor het eerst algebraïsche vergelijkingen in twee onbekenden en meetkundige krommen in het platte vlak met elkaar in verband worden gebracht.

Er bestond reeds een moderne Engelse uitgave van Smith en Latham

(Dover, 1954), maar nu is er ook een Nederlandse. Deze bestaat uit twee delen: een inleiding met achtergrondinformatie over de *Géométrie* en de eigenlijke vertaling.

De inleiding van de vertaler bevat een korte levensschets van Descartes, enkele opmerkingen aangaande de notatie en opmerkingen over de inhoud van de *Géométrie*. Dit is niet het sterkste deel van het boek en dat ligt met name aan het gebrek aan structuur en vele onzorgvuldige formuleringen, waardoor sommige zinsneden voor meerderlei uitleg vatbaar zijn. De vertaler schuwt (gelukkig) de wiskunde niet, maar in zijn enthousiasme gaat hij voorbij aan kwesties als de motivatie van Descartes en het doel en de structuur van het werk. Dit is jammer, want bij het lezen van zo'n ingewikkeld boek als de *Géométrie* is enige achtergrond over het werk haast onontbeerlijk voor een beter begrip van de tekst. Daarnaast is de wiskunde in de inleiding niet altijd correct. Zo komt de vertaler tot de conclusie dat de vergelijking $y^2 = 2y - xy + 5x - x^2$ in een scheefhoekig assenstelsel maar liefst twee cirkels representeert (p. 64–65).

De vertaling is geschikt voor een eerste kennismaking met de wiskunde van Descartes. De vormgeving ziet er verzorgd uit en is geïnspireerd op de originele tekst uit 1637. De vertaler legt geen verantwoording af over de keuzen die hij gemaakt heeft bij het vertalen, maar het blijkt dat de vertaling een tamelijk vrije weergave van het origineel is. Niet alle subtiliteiten uit de Franse taal zijn door de auteur opgemerkt en de vertaling van wiskundige termen is niet altijd even gelukkig. Zo wordt het woord 'quantité' soms adequaat vertaald als 'grootheid' en soms ongelukkig als 'waarde'.

Alhoewel de vertaling van de *Géométrie* niet geheel voldoet aan wetenschappelijke eisen, biedt het wel een aantrekkelijke kennismaking in het Nederlands met dit belangrijke maar moeilijke werk. Wie daarnaast nog enige toelichting wenst, kan beter een andere tekst raadplegen dan de bijgeleverde inleiding. Een kandidaat hiervoor — alhoewel Engelstalig — is *The structure of Descartes's Géométrie*, verschenen in *Lectures in the history of mathematics* (AMS, 1993) van Henk Bos, dat via Google books toegankelijk is.

Jantien Dopper



Vallende Kwartjes
Een slimme selectie van leesbare wetenschap

Amsterdam: Nijgh & Van Ditmar, 2010

224 p., prijs €14,95

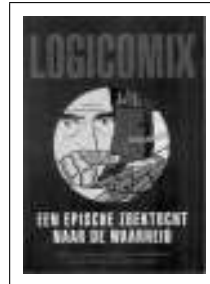
ISBN 9789038893853

Hoe kun je wetenschap aan een groot publiek uitleggen? Wiskundemeisje Ionica Smeets en succesauteur Bas Haring kennen de geheimen. Maar in *Vallende kwartjes* laten ze anderen aan het woord. Ze verzamelden ruim tachtig korte stukjes waarin volgens hen het kwartje valt. Dat je als lezer plotseling snapt hoe iets in elkaar zit. Het boek is geordend in tien vlot aan elkaar geschreven hoofdstukken met titels als 'Analogieën', 'Proefjes' en 'Denkprocessen'. De natuur- en levenswetenschappen zijn prominent aanwezig. Vreemd dat Ionica niet meer wiskunde gekozen heeft. Is er gewoon haast niks? Ik kan het nauwelijks geloven. Grappig is wel dat ze *De Telduivel* van Enzensberger ervanlangs geeft door een stukje te citeren met een kapitale fout erin. De lezer mag zelf uitzoeken waar die zit!

Vielen bij mij alle kwartjes? Eerlijk gezegd: lang niet altijd. Maar misschien ben ik als wiskundige niet zo erg gevoelig voor *proofs by*

intimidation. En denk ik te vaak: ja, ja, maar hoe zit het nou echt? Of: klinkt aardig, maar ik snap het toch niet helemaal. Het inspireerde me wel opnieuw om de mooie stukjes wiskunde die ik zelf goed denk te begrijpen, aan anderen uit te leggen. Niet in een half A-viertje, maar in een mooi boek. Met de geheime trucs van Bas en Ionica in het achterhoofd, dat wel.

Jan van de Craats



Apostolos Doxiadis, Christos H. Papadimitriou, Alecos Papadatos, Annie Di Donna, vertaald door Mat Schifferstein

Logicomix
Een epische zoektocht naar de waarheid

De Vliegende Hollander, 2009

396 p., prijs €19,95

ISBN 9789049500405

Het stripverhaal (Engels: *comics*) is een geslaagde dialectische synthese tussen woord en beeld — beide kunnen niet zonder elkaar: zonder de tekstballonnetjes is het verhaal onbegrijpelijk en zonder de plaatjes raakt de tekst kant noch wal. Wanneer we aan de klassieke stripverhalen denken, dan zijn dat figuren met avonturen. Voor een louter geestelijk avontuur als de filosofie van de wiskunde lijkt het stripverhaal echter bij uitstek ongeschikt. Want wat zou men moeten *tekenen*? Denkers zittend achter bureaus of lopend door park en straat? Praten-de en peinzende hoofden? Dat gaat heel snel vervelen. Daarom is het zonder meer een prestatie van formaat van de Griek Apostolos Doxiadis dat hij erin is geslaagd een heus stripboek voort te brengen over dit onderwerp, met hulp van bevriend computerwetenschapsbeoefenaar Christos Papadimitriou, tekenaar Alecos Papadatos en inkleurster Annie Di Donna.

De insteek die Doxiadis heeft gekozen lijkt de enig mogelijke: het leven van de 20ste-eeuwse filosoof die qua invloed in de filosofie alleen Martin Heidegger naast zich hoeft te dulden, en die benevens filosoof ook wiskundige en logicus was, en die zou uitgroeien tot de Voltaire van de 20ste eeuw. Met het leven van graaf Bertrand Arthus William Russell (1872–1970) is een reeks stripboeken te vullen. Een figuur met avonturen! Voor een enkel stripboek was een keus uit zijn avonturen noodzakelijk.

Logicomix begint in 1939, het jaar waarin de Tweede Wereldoorlog uitbreekt, en Russell in Amerika een lezing houdt over de rol van logica in internationale verhoudingen. Isolationisten houden Russell aan voor de ingang en herinneren hem aan zijn pacifisme tijdens de Eerste Wereldoorlog. Russell nodigt de demonstranten uit naar hem te komen luisteren. Hij begint zijn lezing met de opmerking dat gezien het onderwerp dit zijn kortste lezing ooit zal zijn. Soepel verbindt hij de internationale politiek aan zijn autobiografie, waarvan de zoektocht naar *zekerheid* de leidraad is — en niet naar *waarheid*, zoals de ondertitel van *Logicomix* vermeldt. Hij doet verslag van zijn zoektocht naar zekerheid; uiteindelijk bereikt hij de conclusie dat er geen zeker antwoord te geven is op de vraag of de Verenigde Staten van Amerika zich wel of niet moet scharen aan de zijde van het Britse Koninkrijk. Russell vindt zelf van wel, omdat voor hem de gedachte dat Stalin en Hitler heersen over Europa nog ondraaglijker is dan de gedachte aan oorlog. Voorschrijven wil Russell niemand iets. Zijn mislukte zoektocht naar zekerheid daar waar men het zeker verwacht te vinden, in de wiskunde, brengt hem tot deze conclusie.

Het stripverhaal wandelt met Russell zijn zoektocht mee. Zijn jeugd in Pembroke, waar hij leeft onder het strenge, christelijke regime van

zijn grootmoeder, vormen qua stripverhaal een hoogtepunt van het boek. Zijn kennismaking met de Euclidische meetkunde door zijn broer Frank leert hem zekere kennis te verwerven. De jonge Russell (Bertie) is euforisch. Zijn diepe teleurstelling wanneer Frank hem uitlegt dat men axioma's moet aanvaarden zonder enig bewijs omdat men *ergens moet beginnen*, zorgt voor een epifanie die zijn leven goeddeels zal bepalen. We maken kennis met A.N. Whitehead en *Principia Mathematica* (1910–1913, drie delen, vierde deel is nooit geschreven). De uitvoering van deze herleiding van alle wiskundige kennis tot logische kennis door Russell en Whitehead ten einde de wiskunde de zekerheid van de logica te schenken, blijft een onderwerp van knagende twijfel bij Russell.

De tekeningen staan in de traditie van de Klare Lijn, die we kennen van Hergé (Kuifje) en Joost Swarte. Ze zijn stemmig en met schaduw ingekleurd, veelal met bruine en grijze tinten. Wanneer felle kleuren verschijnen, bevinden we ons meestal in het heden. Want de auteur en zijn drie medewerkers lopen regelmatig zelf getekend op de bladzijden rond, al delibererend over het onderwerp, over de moeilijkheid keuzen te maken aangaande *Logicomix*, of om nog een keer uit te leggen wat reeds in het verhaal is verteld. Deze overbodige tussenwerpselen hadden achterwege moeten blijven. Ze vormen de enige smet op dit fraaie stripboek, dat uiteraard verplichte kost is voor iedereen die de 'kunde van het gewisse' ernstig neemt en lief heeft.

Fred Muller



A.A. Ivanov
The Monster group and Majorana involutions
 Cambridge: Cambridge University Press, 2009
 Cambridge Tracts in Mathematics 176
 252 p., prijs £53.00
 ISBN 9780521889940

This book gives a rigorous existence and uniqueness proof for the largest sporadic simple group, the Monster. This group, of order $2^{64} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$, has been of interest to both mathematicians and physicists due to its connections to various areas in mathematics like reflection groups, modular forms and conformal field theory.

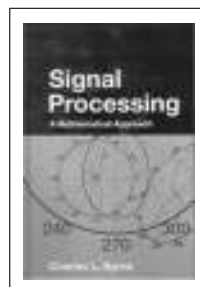
The construction of the Monster group is given via an amalgam of three groups, much in the flavor of the author's previous book on the sporadic simple group J_4 . The amalgam is used to construct an (irreducible) action of the universal completion G of the amalgam on an 196,883-dimensional real vector space which also preserves an algebra structure, the Griess algebra. Then the Monster graph, a regular graph of valency 27,143,910,000 on 97,239,461,142,009,186,000 vertices, is constructed. This graph, which is actually the graph on the so-called 2A-involutions of the Monster, is then used to construct the associated tilde geometry whose simply connectedness finishes the proof and allows the identification of the group G with the Monster as we know it.

It has been known for a long time that the product of two 2A-involutions is an element of order at most 6 and in one of nine different conjugacy classes. The Griess algebra multiplication can be extended to a 196,884-dimensional algebra. The action of 2A-involutions on this 196,884-dimensional algebra can be described by simple axiomatic rules. These rules lead to the definition of a Majorana involution together with a family of so-called axial vectors. Recently S. Sakamura classified, in the framework of Vertex Operator Algebras, the subal-

gebras generated by axial vectors of two Majorana involutions. They are exactly the nine possibilities occurring in the 196,884-dimensional algebra. The author states that by developing the theory of Majorana involutions one might expect a significant simplification of the construction of the Monster group, and conjectures that the Monster is the largest group generated by Majorana involutions.

The last chapter contains Bernd Fisher's account of the early days of Monster theory.

John van Bon



Charles L. Byrne
**Signal Processing
 A Mathematical Approach**
 Wellesley, MA: A.K. Peters Ltd., 2005
 385 p., prijs \$ 109.00
 ISBN 9781568812427

Een professionele zuivere wiskundige raakt via zijn vrienden betrokken bij een SONAR project van het Naval Research Laboratory. Hij ziet dat zijn kennis van de wiskunde en die van zijn collega's vrijwel een lege doorsnede hebben. Wiskundige methoden op het gebied van de signaalverwerking waren hem destijds volledig onbekend. Daarna is hij 25 jaar in het gebied aan de slag geweest en zijn deficiëntie is geheel verholpen. Deze wiskundige is de auteur van dit boek. Zijn opgedane kennis heeft hij in dit boek neergelegd met een bedoeling die zo treffend door hem zelf in het voorwoord wordt uitgesproken: "In writing this book I have tried to gather together in one place the mathematics I wish I had known in 1979 but did not, in the hope that it will be helpful to others undertaking a similar journey." Het resultaat is dan ook een soort vademecum van de wiskundige methoden in de signaalverwerking met vele onderwerpen, waaraan wisselende aandacht wordt besteed (soms wel erg kort). Als leerboek voor studenten is het daarom niet zo geschikt, ook al bevat het boek vraagstukken van het soort dat je in leerboeken vaak aantreft.

Bij het lezen kreeg ik de indruk dat een verhandeling stopt op het moment dat het interessant wordt, maar dat past bij het karakter van het boek. Gelukkig is er aan het einde van het boek een redelijke literatuurlijst opgenomen. Om enige indruk te krijgen van de inhoud zet ik hier de tien hoofdstukken op een rijtje: Complex Exponential Function methods, Matching and Filtering, Fourier Analysis, Analysis and Synthesis, Fourier Transforms and Estimation, Matrix methods, Prediction and Estimation, Nonlinear Models, Probabilistic Methods, Iterative Algorithms.

Deze hoofdstukken zijn allemaal weer verdeeld in hoofdstukken (totaal 63) en alsof het nog niet genoeg is, is er aan het einde nog een hoofdstuk met 'More Applications' toegevoegd. Het caleidoscopisch karakter wordt hier ook weer duidelijk geëtaleerd. Dit laatste hoofdstuk kan men lezen zonder kennis van de voorafgaande hoofdstukken. Overigens, de toepassingen die in dit hoofdstuk aangestipt worden, zoals Transmission Tomography en Array Processing, zijn erg interessant, met name voor de experts op het gebied van de Scientific Computing. Jammer dat er niet meer stof aan gewijd is.

De volgorde en de wijze waarop de auteur de verschillende onderwerpen aansnijdt zal een wiskundige met een toegepaste inslag goed bevallen. In het eerste deel wordt de lezer geconfronteerd met de praktische probleemstelling van het opsporen van verborgen periodiciteiten als inleiding op de Fourier-analyse. Omdat gemeten data vaak discreet

en eindig zijn, wordt in het eerste deel al de discrete Fourier transformatie (DFT) geïntroduceerd, nog voordat de Fourier transformatie van tijdcontinue signalen is behandeld. In leerboeken is dat meestal andersom. Er is een apart hoofdstuk over wavelets opgenomen. De wavelets worden beknopt, even na de Wigner distributie en in het kader van de tijd-frequentie analyse, behandeld op een wijze die inmiddels klassiek genoemd mag worden. De behandeling is kort en bondig en blijft in feite beperkt tot de orthogonale wavelets (Haar wavelet, Daubechies wavelets), ondanks dat in een aparte sectie (in het hoofdstuk over Analysis and Synthesis) Riesz-bases en -frames worden behandeld. Riesz-bases en -frames spelen pas een rol bij de niet orthogonale wavelets.

Kort samengevat: het is een plezierig boek voor degene die wiskundig al redelijk onderlegd is en voor wie het niet nodig is om een compleet leerboek door te werken om de finesses te begrijpen. Als vademecum is het fijn om te hebben.

Hennie ter Morsche



Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, Alain Valette

Kazhdan's Property (T)

Cambridge: Cambridge University Press, 2008

New Mathematical Monographs 11

472 p., prijs £58.00

ISBN 9780521887205

Een Lie-groep heeft eigenschap (T) van Kazhdan als elke unitaire voorstelling met een vector van lengte 1 erin die 'nauwelijks' wordt bewogen, ook zo'n vector bevat die niet wordt bewogen. Als de groep compact is, krijg je zo'n vaste vector door te middelen over de baan van een bijna-vaste vector (en het resultaat op lengte 1 te normeren).

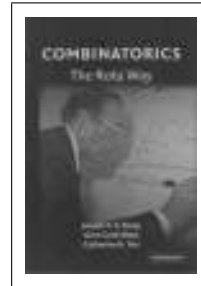
Eigenschap (T) leek aanvankelijk slechts een technisch hulpmiddel in een bewijs dat bepaalde discrete ondergroepen van zekere Lie-groepen eindig voortgebracht zijn. (Het gaat om zogenaamde roosters, met eindig covolume dus, in bijna simpele groepen van rang ten minste twee.) Maar in de loop van de tijd is gebleken dat eigenschap (T) en zijn verwanten met van alles en nog wat te maken hebben. Inclusief oude bekenden van me. Daar gaat het boek over. Er zijn ook nog 160 pagina's aanhangsel over unitaire voorstellingen. Een zo'n oude bekende is het feit dat voor $n \geq 3$ elk element van de groep $SL_n(\mathbb{Z})$ product is van ten hoogste $(3n^2 - n + 72)/2$ elementaire matrices, terwijl er voor $SL_n(\mathbb{C}[X])$ niet zo'n grens is. Of zo'n grens er is voor zeg $\Psi_m = SL_{m+3}(\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m])$ is niet bekend voor $m \geq 1$, maar wel weten we nu dat deze discrete eindig voortgebrachte groep Ψ_m eigenschap (T) heeft. De groep Ψ_m is overigens zelfs van eindige presentatie, wat niet uit eigenschap (T) volgt. Wel volgt altijd uit eigenschap (T) voor een discrete groep dat er een eindig gepresenteerde groep is waar de gegeven groep een quotiënt van is.

Als de groep σ -compact lokaal compact is, dan is eigenschap (T) equivalent met eigenschap (FH) die zegt dat elke affiene actie op een reële Hilbert-ruimte een vast punt heeft. (Bij een affiene actie gebruik je naast rotaties ook translaties.) En dat impliceert dan weer dat als de groep op een graaf werkt (continu natuurlijk) er een vaste knoop of een vaste boog is. (De vaste boog mag omgeflipt worden.) Je kunt ook continue isometrische acties bekijken op een reële of complexe hyperbolische ruimte. Weer garandeert (FH) een vast punt.

En zo is er veel meer: wie van maattheorie houdt, of van het spec-

trum van de Laplace-operator op een eindige graaf, komt in het boek ook aan zijn trekken (maar hier niet). Tot slot noemen we nog toepassingen op de constructie van 'expander graphs' (families van ijle maar zeer samenhangende grafen).

Wilberd van der Kallen



Joseph P.S. Kung, Gian-Carlo Rota, Catherine H. Yan

Combinatorics: The Rota Way

Cambridge: Cambridge University Press, 2009

396 p., prijs €24.99

ISBN 9780521737944

Gian-Carlo Rota (1932-1999) was één van de meest vooraanstaande onderzoekers op het gebied van de discrete wiskunde van de twintigste eeuw. Volgens velen zorgde diens reeks van tien artikelen *On the foundations of combinatorial theory* er voor dat discrete wiskunde een gerespecteerd onderdeel van wiskunde werd. Door zijn zeer brede kennis van de wiskunde was hij bij uitstek in staat delen van de wiskunde te verbinden. Zijn interesse ging vooral uit naar de achterliggende structuren van wiskundige theorieën en hun samenhang en veel minder naar nieuwe, technische resultaten.

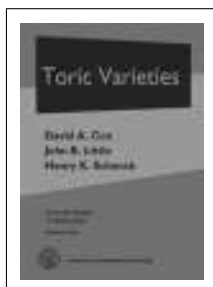
Het onderhavige boek is geschreven door twee voormalige promovendi van Rota. Zij hebben geprobeerd het geavanceerde MIT college 'Combinatorics 18.315' zoals het door Rota werd gegeven, vast te leggen. Uit het voorwoord blijkt dat de auteurs zich ervan bewust zijn dat het eigenlijk niet mogelijk is de sfeer van de colleges van Rota in boekvorm volledig tot zijn recht te laten komen. Uit persoonlijke ervaring weet ik hoe inspirerend het was om met Rota te werken of naar zijn voordrachten te luisteren. Rota kon als geen ander de elegantie van wiskunde overbrengen en het gevoel geven dat alles met alles verbonden is.

De vraag is nu in hoeverre de auteurs er in geslaagd zijn dit in hun boek te vangen. Positief is dat het boek zorgvuldig is geschreven met volledige bewijzen van de basisresultaten van Rota's favoriete onderwerpen zoals onder andere Möbiusfuncties, partieel geordende verzamelingen, Baxter-algebra's, umbrale calculus en symmetrische functies. Elk hoofdstuk bevat tevens een uitgebreide verzameling opgaven, waarvan enkele als onderzoeksprobleem worden aangeduid. Er zijn korte uitwerkingen van geselecteerde opgaven en er is een uitgebreide lijst met referenties en suggesties voor boeken indien men zich in bepaalde onderwerpen verder wil verdiepen.

Toch ben ik niet onverdeeld positief over dit boek. Elk hoofdstuk is een opzichzelfstaand geheel gewijd aan een enkel onderwerp. Na een zeer beknopte inleiding volgt een eindeloze rij van definities, stellingen en bewijzen. Verbindingen met andere onderwerpen worden kort aangeduid via een literatuurverwijzing of via een enkele opgave. Er ontbreekt een rode draad of het gemotiveerd toewerken naar een hoofdresultaat. Verder zijn er maar weinig verwijzingen naar recente ontwikkelingen die de aanpak van Rota in een groter kader zetten. Het boek schiet dus tekort waarin Rota nu juist excelleerde: het enthousiasmeren voor wiskunde met al haar dwarsverbanden. Mijn eindconclusie is dat dit een zorgvuldig geschreven boek is waarin men op een gestructureerde manier de favoriete onderwerpen van Rota bij elkaar kan vinden, maar dat het boek tekort schiet in het schetsen van de context en samenhang van deze onderwerpen.

Alessandro Di Bucchianico

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



David Cox, John B. Little, Henry K. Schenck

Toric varieties

AMS, 2011

ISBN 9780821848197,

www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=whatsnew&ikey=GSM-124



Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip A. Griffiths

Geometry of Algebraic Curves

Springer, 2011

ISBN 9783540426882

www.springer.com/mathematics/algebra/book/978-3-540-42688-2



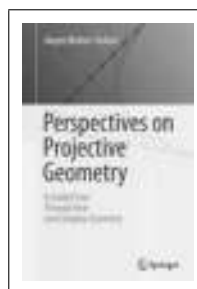
Tobias Holck Colding, William P. Minicozzi II

A course in minimal surfaces

AMS, 2011

ISBN 9780821853238

www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=whatsnew&ikey=GSM-121



Jürgen Richter-Gebert

Perspectives on Projective Geometry

Springer, 2011

ISBN 9783642172854

www.springer.com/mathematics/geometry/book/978-3-642-17285-4



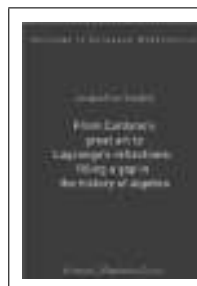
Margaret B. Cozzens, Fred S. Roberts

BioMath in the schools

AMS/DIMACS, 2011

ISBN 9780821842959

www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=whatsnew&ikey=DIMACS-76



Jacqueline Stedall

From Cardano's great art to Lagrange's reflections: filling a gap in the history of algebra

European Mathematical Society, 2011

ISBN 9783037190920

www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=127



Maïtine Bergounioux (Ed.)

Mathematical Image Processing

Springer, 2011

ISBN 9783642196034

www.springer.com/mathematics/book/978-3-642-19603-4



Simon Donaldson

Riemann surfaces

Oxford University Press, 2011

ISBN 9780199606740

ukcatalogue.oup.com/product/9780199606740.do



Mircea Pitici (ed.)

The best writing on mathematics 2010

Princeton University Press, 2011

ISBN 9780691148410

press.princeton.edu/titles/9284.html



Eleanor Robson, Jacqueline Stedall (eds.)

The Oxford Handbook of the History of Mathematics

Oxford University Press, 2011

ISBN 9780199603190

ukcatalogue.oup.com/product/9780199603190.do

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is September 1st, 2011.

Problem A (folklore)

Let S be an open subset of $\mathbb{R}_{>0}$ that contains arbitrarily small elements. Prove that every positive real number can be written as a sum of finitely many elements of S .

Problem B (proposed by Gabriele Dalla Torre)

Let n be a positive integer. Show that every sequence of n elements of $\{0, \dots, 9\}$ occurs as a sequence of consecutive digits in the last $2n$ digits of the decimal representation of some power of 2. Also, determine all $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ for which the statement still holds if we replace $2n$ by $\lceil \alpha n \rceil$.

Problem C (proposed by Pietro Vertechi)

Let p be a prime number. Determine the smallest integer d for which there is a monic polynomial f of degree d with integer coefficients such that p^{p+1} divides $f(n)$ for all integers n .

Edition 2010-4 We have received correct solutions from R. Kortram, Charles Delorme, Alex Heinis, Rik Bos, Rob van der Waall, Thijmen Krebs, Shai Como, José Nieto, Anton Schep, Paolo Perfetti, and Moubinool Omarjee.

Problem 2010-4/A Show that there are infinitely many prime numbers p for which there is a positive integer n with

$$2^{n^2+1} \equiv 3^n \pmod{p}.$$

Also, show that there are infinitely many prime numbers p for which there is no such n .

Solution We received a correct solution from R. Kortram, Charles Delorme, Alex Heinis, Rik Bos, Rob van der Waall and Thijmen Krebs. The book token goes to Rik Bos.

Let P be the set of primes that divide at least an element of the form $2^{n^2+1} - 3^n$ with n a positive integer. The set P is nonempty, because it contains 23, and we will prove that it has infinitely many elements.

Suppose, by contradiction, that P is a nonempty finite set of primes containing 23 and let n be $\prod_{p \in P} (p-1)$. Since n is greater than 1, the integer $2^{n^2+1} - 3^n$ has at least one prime factor q different from 2 and 3. Then, by Fermat's little theorem we get

$$2^{n^2+1} - 3^n \equiv 1 \pmod{q},$$

contradicting the fact that q divides $2^{n^2+1} - 3^n$. Therefore, the set P contains infinitely many elements.

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Wouter Zomervrucht

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Oplösungen

| Solutions

Let p be a prime such that $p \equiv 19 \pmod{24}$. By quadratic reciprocity neither 2 nor 3 is a square modulo p . Since $n^2 + 1$ and n have different parity for every positive integer n , the congruence $2n^2 + 1 \equiv 3^n \pmod{p}$ has a square on one side and a non-square on the other one. Hence, it cannot hold and p is not contained in P . By Dirichlet's theorem on arithmetic progressions there are infinitely many primes congruent to 19 modulo 24. This proves the second part of the problem.

Problem 2010-4/B Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function that has a local minimum or maximum at every point of $\mathbb{R}$. Show that f is constant.

Solution We received a correct solution or reference from R. Kortram, Charles Delorme, Shai Como, José Nieto, Anton Schep, Alex Heinis, Paolo Perfetti, and Thijmen Krebs. The book token goes to Alex Heinis.

Indeed, the following result can be found in several places in the literature.

Proposition. *For any function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, there are at most countably many $s \in \mathbb{R}$ for which f has a local extreme value s at some point in $\mathbb{R}$.*

Proof. Let S be the set of values $s \in \mathbb{R}$ for which f has a local maximum s at some point in $\mathbb{R}$. For each $s \in S$ we can choose rational numbers $a < b$ such that the absolute maximum of f on the interval (a, b) equals s . This yields an injective map $S \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sending s to (a, b) , so S is countable. The same holds for the set of values of f at local minima.

Now let f be as given in the problem. If f is not constant, then by the intermediate value theorem f takes uncountably many values, contradicting the proposition.

Problem 2010-4/C Let $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ be a function such that for all $a \in \mathbb{Q}$ the functions $x \mapsto f(a, x)$ and $x \mapsto f(x, a)$ are polynomial functions from $\mathbb{Q}$ to $\mathbb{Q}$. Is it true that f is given by a polynomial in two variables? What if we replace $\mathbb{Q}$ by $\mathbb{R}$?

Solution This problem was solved by Alex Heinis, R.A. Kortram, José Nieto, Moubinool Omarjee, and Anton Schep. This solution is based on the one by José Nieto, who wins the book token. For the case $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ the answer is no. The following is a counterexample. Since $\mathbb{Q}$ is countable, there exists an enumeration $a_1, a_2, a_3, \dots$ of $\mathbb{Q}$. Now define

$$f_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$$

for $n \geq 1$, and

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) f_n(y).$$

This is well-defined on $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, since $f_n(a_i)$ equals 0 for $n \geq i$. Furthermore, the specialisation

$$f(x, a_k) = f(a_k, x) = \sum_{n=1}^{k-1} \prod_{i=1}^n (a_k - a_i)(x - a_i)$$

is a polynomial in x of degree $k - 1$, so f satisfies the conditions. If f were a polynomial in x and y , of a certain total degree d , then $f(x, a_{d+2})$ would be of degree at most d . Yet we have seen that $f(x, a_{d+2})$ has degree $d + 1$. We conclude that f is not a polynomial.

Now suppose $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is as stated. We will prove that in this case f is indeed given by a polynomial. The elements

$$p_n = x(x - 1) \cdots (x - n + 1), \quad n \geq 0$$

form a linear basis of the polynomial ring $\mathbb{R}[x]$, so for all $a \in \mathbb{R}$ we can write $f(x, a)$ as a finite

Oplossingen

| Solutions

linear combination of the polynomials p_n . Hence there are functions $c_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that the equality

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(y) p_n(x) \quad (1)$$

holds for all $x, y \in \mathbb{R}$, while for each $a \in \mathbb{R}$, we have $c_n(a) = 0$ for all but finitely many n . The assumption that for each $r \geq 0$, the function

$$f(r, y) = \sum_{n=0}^r \frac{r!}{(r-n)!} c_n(y)$$

is a polynomial in y , shows by induction on n that $c_n(y)$ is a polynomial for each $n \geq 0$. We now claim that c_n is identically zero for almost all $n \geq 0$. Assume that there are infinitely many $n \geq 0$ such that the polynomial c_n is non-zero. Each of these polynomials has finitely many zeros, so together they have at most countably many. On the other hand, for all $a \in \mathbb{R}$ at least one (in fact infinitely many) of these non-zero polynomials has a zero at a , giving uncountably many zeros. This contradiction proves the claim, so (1) shows that f is itself a polynomial.

R.A. Kortram and Anton Schep refer to the article 'Some Analogues of Hartog's Theorem in an Algebraic Setting' by R.S. Palais, *American Journal of Mathematics*, Vol. 100. It contains a proof of the following, slightly more general fact: the statement of this problem holds for a field k if and only if k is finite or uncountable.

