

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

In Memoriam | Obituary

Hans Duistermaat

235 Grasping the essence *Erik van den Ban, Johan Kolk*

238 Working single-mindedly on a project
Victor Guillemin

240 Recollections of a godsend talent *Gert Heckman*

242 Classical mechanics *Richard Cushman*

Onderzoek | Research

244 Hoe springen de priemgetallen? *Jaap Korevaar*

Interview | Interview

250 Alain Connes: The flashes of insight never came for free
Gunther Cornelissen, Klaas Landsman, Walter van Suijlekom

Maatschappij | Society

257 Wiskunde mengt moleculen *Bennie Mols*

Maatschappij | Society

261 De overval: Het Freudenthal Instituut
Floris Olsthoorn, Derk Pik, Nellie Verhoef

Maatschappij | Society

274 Gevaarlijk slingeren op zee *Bennie Mols*

Maatschappij | Society

276 Aan de speeltafels van NWO *Eduard Looijenga*

Onderzoek | Research

278 Matroïden en hun representaties *Stefan van Zwam*

Maatschappij | Society

283 De Wiskunde Olympiade in zeven vragen
Birgit van Dalen, Quintijn Puite

Rubrieken | Departments

226 Colofon

227 Redactioneel *Ferdinand Verhulst*

228 Agenda *Charlene Kalle*

230 Nieuws *Charlene Kalle*

259 Het keerpunt van Alexander Rinnooy Kan
Ionica Smeets

271 De derde wet *Ferdinand Verhulst*

287 In de verdediging *Geertje Hek*

290 Boekbesprekingen

294 Problemen

Uitgelicht



Alain Connes was in juni in Nederland voor de eindconferentie van het GQT cluster. Lees een interview met hem op pagina 250.



In 2011 wordt de Internationale Wiskunde Olympiade in Nederland gehouden. Lees zeven vragen en antwoorden over IMO 2011 op pagina 283.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie/Bladmanager

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (charlenekalle@gmail.com)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureauredactie

Laetitia Diemer, Floris Olsthoorn, Harm de Vries

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuyper (TU/e),
Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Teun
Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van
Luijk (UL), Hans Melissen (TUD), Floris Olsthoorn
(UL), Derk Pik (JSG Maimonides), Hans Sterk
(TU/e), Lenny Taelman (UL),

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Advertenties

advertenties@nieuwarchief.nl

Abonnementen/Subscriptions

Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176
admin@wiskgenoot.nl

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Drukkerij Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €80 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €40. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €30 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €90 respectievelijk €105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176
admin@wiskgenoot.nl

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), Rob van der Mei (CWI, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Kruger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	07-03-2011	verstreken
2	06-06-2011	24-01-2011
3	05-09-2011	25-04-2011
4	05-12-2011	27-07-2011

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Aldine Aaten van het Freudenthal Instituut spreekt de wens uit dat de wiskundewereld en de wiskundeonderwijs wereld zich bewust worden van elkaars bestaan en zich openen voor elkaars kennis en ideeën. Lees de overval van Floris Olsthoorn, Derk Pik en Nellie Verhoef op pagina 261.

Wiskundigen in de politieke arena

In het nummer dat voor u ligt valt weer op hoe veelzijdig en interessant de wiskunde is. Het interview met de uitzonderlijke mathematisch-fysicus Alain Connes laat zien hoe hij in zijn werk voortsnelt en gedreven bezig is in ons vak. Kunnen we zulke wiskundigen ook in Nederland vinden? Ik denk het wel, zowel bij oudere als bij jonge, nog niet zo bekende onderzoekers. Hans Duistermaat was ook zo iemand, in dit nummer wordt uitvoerig aandacht besteed aan zijn werk. Ik heb twee promovendi met hem 'gedeeld' en we hebben talloze levendige discussies gehad; het is tragisch dat zijn leven zo vroeg beëindigd is.

Het is verrassend te zien hoe professioneel en enthousiast het toegaat bij de Internationale Wiskunde Olympiade. U kunt lezen hoe de deelnemers uitgezocht, getraind en verder begeleid worden. Over veelzijdigheid in dit nummer gesproken: de sprongen tussen priemgetallen worden uitgelegd door coryfee Jaap Korevaar, de nieuwe rubriek *Het keerpunt* is er weer, *De overval* op het Freudenthal Instituut en nog veel andere zaken die stof tot nadenken geven.

Karel van het Reve heeft eens gezegd: "Hoger onderwijs, dat is valse parels voor echte zwijnen." Het verbaast dan ook niet dat oud-minister Plasterk een voormalig landbouwminister, Cees Veerman, heeft gevraagd om rapport en advies uit te brengen over het hoger onderwijs. Dat rapport, 'Differentiëren in drievoud' geheten, gaat dan tegelijk over hbo en universiteit, en mijn eerste reactie was om meteen een bureaula ter beschikking te stellen om het rapport in te laten verdwijnen. Het is immers voor een belangrijk deel weer echt bestuurderswerk, dat wil zeggen ideeën en voorstellen van mensen die de werkvloer niet kennen. Hoe kun je het onderwijs van pabo-docenten, waarvan sommige de tafel van zes niet kunnen opzeggen, vergelijken met dat van universitaire wiskundigen die op internationaal niveau meedraaien. Om van de onderzoekscomponent maar te zwijgen. Het rapport zal echter toch een belangrijke rol spelen in de politieke besluitvorming. We zullen moeten nagaan wat de gevolgen kunnen zijn voor de Nederlandse wiskunde. Een zeer voorlopige opsomming uit het rapport is:

1. De vaststelling dat de uitval van studenten onaanvaardbaar hoog is.

2. Het advies aan universiteiten en hogescholen om zich te specialiseren.

3. De aanbeveling om talent meer uit te dagen en te stimuleren.

Er staat nog veel meer in het rapport (zie www.rijksoverheid.nl/documenten-en-publicaties), maar de internationalisering van onderwijs en onderzoek komt er weer bekaaid af; een beetje provinciaal is dat wel. De bovengenoemde drie punten raken ons echter onmiddellijk en zouden een reactie van ons behoeven. Dat is een mooie taak voor de juist opgerichte Stichting Platform Wiskunde Nederland, maar ook voor de lezers van het NAW.

Punt 2 van het rapport Veerman is voor vakgebieden als de wiskunde minder eenvoudig. Theorievorming door creatief denken is tamelijk onvoorspelbaar en vereist grote flexibiliteit van de mathematische instituten. Een beetje specialisatie is er al in de praktijk, maar het echte vastleggen van een profiel zou wel eens een knellend uniform kunnen worden.

Over punt 1 was er in NRC Handelsblad van 4 september jongstleden een bijdrage van Hans Adriaansens, de bedenker en ontwikkelaar van de University Colleges in Utrecht en Middelburg, die opmerkt dat de universitaire opleidingen bachelor en master gewoon de oude opleidingen zijn, maar dan in tweeën geknipt. Hij beschrijft hoe een meer algemene bachelor (science, social sciences of humanities) de studenten helpt om te ontdekken wat hen interesseert en waar ze goed in zijn. In de Angelsaksische landen functioneert dat vaak op die manier en de uitval van studenten is veel minder. Natuurlijk kan daarbij door facultatieve honours courses de uitdaging van talent ook tot zijn recht komen. Ik denk dat het voor ons wiskundigen niet mee zou vallen om in zo'n algemene bacheloropleiding een aantrekkelijk profiel te scheppen, maar het is wel een uitdaging.

Zo worden we dan uit onze mooie wiskundewereld gehaald en gedwongen om ons met de tastbare werkelijkheid bezig te houden. Het is niet anders. Denkt u vooral mee en aarzelt niet om notities en ideeën over deze onderwerpen ter publicatie in het NAW aan te bieden.

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur

Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Agenda

Upcoming Events

december 2010

6 december 2010

□ CWI lezingendag

Een dag met zes lezingen over het thema 'Probabilistic and Algebraic Methods in Discrete Mathematics, Optimization and Computer Science'

plaats CWI, Amsterdam

info homepages.cwi.nl/~mueller/workshop.html

6 – 10 december 2010

□ Mathematical Life in the Dutch Republic

Een workshop over de culturele geschiedenis van wiskunde in de Republiek der Nederlanden aan het einde van de 16de en begin van de 17de eeuw

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2010/426/info.php3?wsid=426

7 december 2010

□ NWO-Talent Classes

Een masterclass voor jonge onderzoekers over een specifiek aspect uit het leven van een wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA.6KJD5L

12 – 17 december 2010

□ Combinatorics and Analysis in Spatial Probability

Conferentie over combinatorische en (complex) analytische methodes in ruimtelijke kansprocessen

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.esf.org/conferences/10348

januari 2011

8 januari 2011

□ Wintersymposium KWG

Het jaarlijkse symposium staat dit jaar in het teken van logica, bij stemmen, communiceren en liegen, met sprekers Jan van Eyck (UU), Eric Pacuit (UvT) en Hans van Ditmarsch (universiteit van Sevilla)

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

17 – 19 januari 2011

□ Verwer65

Workshop ter gelegenheid van de 65ste verjaardag van Prof. Jan Verwer met als titel 'Time Integration for Ordinary and Partial Differential Equations'

plaats CWI, Amsterdam

info homepages.cwi.nl/~jason/Verwer65

19 – 21 januari 2011

□ 29ste Panama Conferentie

Conferentie over reken-wiskundeonderwijs met als thema 'Aanpassen, inpassen, toepassen'

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama

24 – 26 januari 2011

□ 10th Winter School on Mathematical Finance

10de editie van deze winterschool met dit jaar als speciaal onderwerp 'Energy Markets and Malliavin Calculus in Finance'

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool.html

28 – 29 januari 2011

□ Nationale Wiskunde Dagen

Twee dagen met lezingen en werkgroepen voor leraren in het voortgezet onderwijs

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

31 januari – 4 maart 2011

□ Complex and Riemannian Geometry

Thematische maand met lezingen en workshops over complexe en Riemanniaanse meetkunde

plaats CIRM, Marseille

info www.lntp.univ-provence.fr/geom2011

februari 2011

4 februari 2011

□ Nederlandse Wiskunde Olympiade 2011

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

Suggesties voor deze agenda zijn welkom.

Redacteur: Charlene Kalle

agenda@nieuwarchief.nl

10 februari 2011

Mastercourse Dynamische Systemen

Mastercourse voor vwo-docenten wiskunde over complexe wiskundige dynamische systemen

plaats UvA, Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

maart 2011

2 maart 2011

World Maths Day

Dag waarop geprobeerd wordt het wereldrecord goed beantwoorde wiskundevragen te breken. Dit jaar gaat de World Maths Day voor het eerst deel uitmaken van de World Educational Games

plaats Overal ter wereld

info www.worldmathsday.com

3 maart 2011

Mastercourse Deeltjesfysica in de Nieuwe Natuurkunde

Mastercourse voor vwo-docenten wiskunde, natuurkunde, nlt en anw over de LHC op CERN en de vragen die spelen in de deeltjesfysica

plaats UvA, Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

4 maart 2011

Conferentie Wiskunde C 2011

Conferentie georganiseerd door cTWO over het vak Wiskunde C en het vernieuwde examenprogramma dat vanaf 2014 wordt ingevoerd

plaats Utrecht

info www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeC/ProgrammaC-dag2011.html

9 maart 2011

Wetenschap en Techniek Academie

Studiedag voor leerkrachten basisonderwijs en pabostudenten waarop handvatten worden aangereikt om de onderzoekende houding van de leerling in natuur- en techniekonderwijs te bevorderen

plaats Buys Ballot Laboratorium, Utrecht

info www.wtacademie.nl

14–16 maart 2011

All models are wrong...

Workshop die statistici, filosofen en kwantitatieve wetenschappers samenbrengt om te discussiëren over de complexiteit van onzekerheid in en het kiezen van modellen.

plaats Het Kasteel, Groningen

info www.math.rug.nl/stat/models

14–17 maart 2011

YEPVIII

8ste editie van de workshop voor jonge Europese kansrekenaars met dit jaar als titel 'Stochastic Models for Population Dynamics'

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/events/#2011

17 maart 2011

Kangoeroewedstrijd

Reken- en wiskundewedstrijd voor iedereen vanaf groep 5

plaats Deelnemende scholen

info w4kangoeroe.nl

17 – 18 maart 2011

Nationale Rekendagen

Ontmoetingsplaats voor leerkrachten basisonderwijs met als thema 'Kijken en Zien'

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.rekenweb.nl/rekendagen

26 maart 2011

375 jaar Universiteit Utrecht

75ste lustrum van de Universiteit Utrecht

plaats Universiteit Utrecht

info www.uu.nl/university/utrecht/nl/uu375

April 2011

13 april 2010

Grote Rekendag 2011

Landelijk georganiseerde dag voor alle basisscholen waarop alles in het teken staat van rekenen. Dit jaar is het thema 'Weet je het zeker?'

plaats Deelnemende scholen

info www.rekenweb.nl/groterekendag

15 april 2010

Leve de Wiskunde!

Congres waarop vooraanstaande wetenschappers over hun bevindingen in en rondom de wiskunde vertellen

plaats Science Park Amsterdam

info www.science.uva.nl/levedewiskunde

juni 2011

6 – 10 juni 2011

European Women in Mathematics Summer School 2011

Zomerschool voor promovendi over logica, meetkunde en geschiedenis van de wiskunde.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2011/429/info.php3?wsid=429

juli 2011

5 – 8 juli 2011

ICTMT10

10de internationale conferentie over technologie in het wiskundeonderwijs

plaats Portsmouth, UK

info www.ictmt9.org

13 – 24 juli 2011

IMO2011

52ste editie van de internationale wiskunde olympiade, die dit jaar in Nederland wordt gehouden

plaats Nederland

info www.imo2011.nl

Nieuws

| News

Zes vragen voor vrouwen

Het Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences in Cambridge is in juli een nieuw initiatief gestart om vrouwelijke wiskundigen meer onder de aandacht te brengen. Op de website van het instituut zullen interviews geplaatst worden met vrouwelijke wiskundigen die een tijd bij het instituut te gast zijn geweest. In de interviews worden zes vragen gesteld. In hun antwoorden hierop omschrijven de vrouwen hun vakgebied en belangrijkste resultaten, maar ook waarom ze geïnteresseerd zijn in wiskunde en hoe ze een juiste balans vinden tussen werk en privéleven.

Het Newton Institute hoopt ook dat de interviews helpen vrouwelijke wiskundigen aan te moedigen om een carrière in de wiskunde te blijven nastreven.

Bron: www.newton.ac.uk/women/sixquestionswith

Geldproblemen

Paul Erdős, de beroemde Hongaarse wiskundige, heeft nog geld op een bankrekening in Canada staan. Een vrouw kwam zijn naam toevallig tegen, toen ze op het internet een lijst bekeek met bankrekeningen die niet langer actief zijn, maar waar nog wel geld op staat. Het gaat om een bedrag van \$2080,15 bij een kantoor van de Bank of Montreal, dichtbij de University of Calgary.

Erdős overleed in 1996 op 83-jarige leeftijd tijdens een wiskundeconferentie in Polen aan een hartaanval. Hij had geen vaste woonplaats en volgens een vriend van hem, Richard Guy, had hij kleine geldbedragen verspreid over bankrekeningen in verschillende plaatsen die hij regelmatig bezocht.

Er is geopperd om het geld te besteden aan de 'prijzen' die Erdős regelmatig uitloofde voor het oplossen van een wiskundig probleem. Deze prijzen liepen uiteen van een paar dollar tot \$10.000, afhankelijk van de moeilijkheidsgraad. Guy won zo bijvoorbeeld een keer \$5. Ronald Graham, informaticaprofessor aan de University of California San Diego, schrijft al lange tijd de cheques uit als een probleem is opgelost. Hij heeft uitgezocht of het mogelijk was het geld in Canada hiervoor te gebruiken, maar omdat Erdős geen erfenamen had en geen testament heeft nagelaten, is het vrijwel onmogelijk voor Graham om het geld te bemachtigen. Waarschijnlijk zal het geld nog vele jaren gewoon op de bankrekening blijven staan.

Bron: www.edmontonjournal.com

Niet nadenken is vermoeiend

Volgens wiskundigen Rossana Occhipinti, Erkki Somersalo en Daniela Calvetti van de Case Western Reserve University in de Verenigde Staten is niet nadenken ontzettend vermoeiend. Ze ontwikkelden een nieuwe methodologie, gebaseerd op Bayesiaanse statistiek, om de stofwisseling in de hersenen te onderzoeken. Ze keken vooral naar de chemische processen die plaatsvinden als de overdracht van signalen tussen zenuwcellen geblokkeerd wordt. Voor hun computersimulaties maakten ze gebruik van het softwarepakket Metabolica dat Calvetti en Somersalo ontwierpen om complexe stofwisselingssystemen te kunnen bestuderen.

Uit hun onderzoek bleek dat het energie kost om impulsoverdracht tussen zenuwcellen te stoppen. De twee belangrijke stoffen voor de impulsoverdracht in de hersenen zijn glutamaat en GABA. Glutamaat zorgt ervoor dat een signaal doorgegeven kan worden. GABA gaat dit effect juist tegen en na het blokkeren van een signaal kost het veel zuurstof om de glutamaat en GABA af te breken en te hergebruiken. Het is daarom bijzonder energierovend om een gedachte te stoppen.

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan. Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur ons dan uw bijdrage van ± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

nieuws@nieuwarchief.nl

De onderzoekers hopen dat hun onderzoek bij zal dragen aan de ontwikkeling van kennis omtrent hersenziektes. Hersenziektes zijn moeilijk op te sporen en worden daardoor vaak pas in een laat stadium ontdekt. Veel van deze ziektes zijn het gevolg van problemen met de energiestofwisseling en door beter te begrijpen hoe deze in een gezond lichaam in zijn werk gaat, zal artsen helpen om een abnormale situatie eerder te signaleren.

Bron: www.eurekalert.com

Onder de rechterknie

Een groep onderzoekers van Northumbria University en de Georg-August-Universität Göttingen hebben onderzocht welke mannelijke dansbewegingen het meeste succes hebben bij vrouwen. Een mannelijke dans is bij veel diersoorten een belangrijk onderdeel van het paringsritueel en men vermoedt daarom dat deze bewegingen informatie geven over hoe sterk en gezond het mannetje is. De onderzoekers wilden nagaan of er bij mensen ook zo iets aan de hand is.

Met zeer geavanceerde bewegingsdetectieapparatuur namen ze de dansbewegingen van 30 mannen op. Dit leverde van 19 mannen bruikbare data op. Vervolgens werden de bewegingen omgezet in computeranimaties en werd aan 37 heteroseksuele vrouwen gevraagd om de dansbewegingen te beoordelen. De beoordeling werd op deze manier gedaan om factoren als uiterlijke aantrekkingskracht uit te schakelen.

Uit het onderzoek bleek dat, naast veel variatie in de bewegingen, vooral de snelheid en beweeglijkheid van de nek, de borst en de rechterknie van belang zijn. De onderzoekers vermoeden dat mannen die op deze manier dansen ook daadwerkelijk vaak sterk en gezond zijn, maar of dit echt zo is, zal verder onderzoek uit moeten wijzen. Voor wie wil oefenen is het filmpje met de juiste dansbewegingen online te vinden.

Bron: <http://www.bbc.co.uk/news/science-environment-11212939>



In goed gecelschap

Andre Khalil, onderzoeker in wiskunde en natuurkunde aan de University of Maine, heeft een nieuwe algoritmische methode ontwikkeld voor het genereren van driedimensionale beelden van celkernen. Hij gebruikte hiervoor de WTMM (Wavelet Transform Modulus Maxima)-methode.

Met zijn methode kan Khalil zeer gedetailleerde informatie krijgen over de grootte, vorm en plaats van chromosomen in celkernen en dit omzetten in driedimensionale afbeeldingen. Khalil is samen met kankerspecialist Kevin Mills van het Jackson Laboratory in Maine begonnen met de aanleg van een databank van dit soort afbeeldingen. Met de plaatjes in deze databank kunnen afwijkende cellen met gezonde cellen vergeleken worden. Zo kunnen abnormale cellen, die zich zouden kunnen ontwikkelen tot een tumor, eerder opgespoord worden. Een dergelijke databank is daarom een belangrijk hulpmiddel bij de bestrijding van kanker.

De uiteindelijke vraag is natuurlijk of het mechanisme dat aan het

veranderen van een cel ten grondslag ligt, gecontroleerd, behandeld of afgeremd kan worden. Het vroegtijdig identificeren van dergelijke cellen speelt daarbij een belangrijke rol.

Bron: www.physorg.com

Jeugdjournaal op wiskundekamp

Tijdens de zomervakantie is het Jeugdjournaal op bezoek geweest bij een wiskundekamp van de stichting Vierkant voor Wiskunde. Het Jeugdjournaal trok vier weken lang met een busje door het land op zoek naar leuke zomeractiviteiten. Kinderen konden zelf een e-mail sturen met suggesties. Het wiskundekamp werd op de negende dag bezocht en het filmpje hiervan kan nog op de website van het Jeugdjournaal bekeken worden.

Vierkant voor Wiskunde organiseert ieder jaar drie verschillende wiskundekampen. Op de kampen worden wiskundige puzzels en raadsels opgelost en wordt dieper ingegaan op een aantal specifieke onderwerpen. Er worden natuurlijk ook andere kampactiviteiten gedaan, zoals een speurtocht, een bezoek aan het zwembad of een bonte avond.

Bron: static.nos.nl/jeugdjournaal/uitleg/Jeugdjournaalbus2010/Filmpjes.html

Jong geleerd

In september is aan Cambridge University de jongste student sinds 1773 begonnen. De vijftienjarige Arran Fernandez is daar wiskunde gaan studeren. De vader van Fernandez verhuist met zijn zoon mee naar Cambridge en zal hem van en naar de colleges begeleiden. De moeder van Fernandez verhuist niet mee en zal haar man en zoon in de weekenden zien.

Fernandez is nooit naar school geweest en heeft al zijn onderwijs thuis gekregen. Naar eigen zeggen zal hij niet snel in de verleiding komen om met zijn studiegenoten te gaan stappen. Hij probeert liever de Riemann-hypothese op te lossen. Ter ontspanning gaat hij zich aansluiten bij een groep vogelaars en lijkt het hem leuk om te punteren op de rivier de Cam.

In 1773 begon in Cambridge de toen veertienjarige William Pitt de Jongere aan zijn studie politieke filosofie. Pitt werd later op vierentwintigjarige leeftijd de jongste Britse premier ooit.

Bron: www.independent.co.uk

Wetenschap als voertaal

In het voorjaar van 2011 zullen jonge, vooraanstaande wetenschappers er acht keer met een bus op uittrekken om leerlingen uit de onderbouw vmbo, havo en vwo enthousiast te maken voor wetenschap. Op de scholen waar een bus naartoe gaat, zullen zo'n honderd onderbouwleerlingen het een dag lang tegen elkaar opnemen in workshops, activiteiten, quizen en experimenten over het thema voedsel.

Vanaf begin december kunnen scholen meedingen naar een bezoek van De Jonge Akademie on Wheels. Dit kan door via de onderstaande website mee te doen aan een prijsvraag. Ter voorbereiding op deze prijsvraag kan op dezelfde website een spel gedownload worden, waarmee leerlingen door middel van een kaart- en rollenspel in één lesuur kennis kunnen maken met de essentie van wetenschap.

Bron: www.dejongeakademieonwheels.nl

Vier Fields medailles

Tijdens het International Congress of Mathematicians (ICM), dat afge-

lopen zomer werd gehouden, werden vier Fields medailles uitgereikt. De gelukkige winnaars waren Elon Lindenstrauss, Ngô Bảo Châu, Stanislav Smirnov en Cédric Villani. Kandidaten voor een Fields medaille moeten voldoen aan drie criteria. Ten eerste moeten ze in het jaar waarin ze de prijs krijgen niet ouder zijn dan veertig. Verder moeten ze een moeilijk probleem hebben opgelost en een nieuwe theorie hebben ontwikkeld die bijdraagt aan de vergroting van het toepassingsgebied van wiskunde.

Lindenstrauss, verbonden aan de Hebrew University in Jerusalem, kreeg de Fields medaille voor zijn resultaten over de rigiditeit van maten in ergodentheorie en de toepassingen hiervan in getaltheorie. Châu is verbonden aan de Université Paris-Sud in Orsay. Hij werd beloond voor zijn bewijs van het Fundamentele Lemma, waarvoor hij nieuwe methoden introduceerde op het grensvlak van algebra en meetkunde. Smirnov is sinds 2003 professor aan de Université de Genève en kreeg de medaille voor zijn resultaten binnen de statistische fysica, en preciezer, voor zijn bewijs van de conforme invariantie van percolatie en het Isingmodel. Villani is werkzaam aan het Institut Henri Poincaré in Parijs. Hij kreeg de medaille voor zijn werk over niet-lineaire Landau damping en de convergentie naar een evenwicht van de Boltzmann vergelijking.

Sinds 1936 worden er iedere vier jaar tijdens de ICM twee tot vier medailles uitgereikt. In totaal zijn op dit moment 52 mannen de trotse bezitter van een Fields medaille.

Bron: www.eurekalert.org



Foto: Stefan Zachow

Achterzijde van de Fields-medaille

Verslag van de eindconferentie van GQT

Eind juni 2010 gebeurde er flink wat in Nederland. De temperaturen waren tropisch, nagenoeg iedereen keek naar elf mannen in Oranje shirts die tegen een bal (of een tegenstander) schopten, en een groot gedeelte van wiskundig Nederland trok zich terug in een goed gekoelde zaal in Nijmegen.

Van 26 juni tot en met 1 juli was de eindconferentie van GQT. Na vier jaar (opening in oktober 2006) kwam er een eind aan het succesvolle cluster Geometry and Quantum Theory, het samenwerkingsverband tussen de verschillende wiskundedepartementen op het gebied van meetkunde, kwantumtheorie en alles daartussenin. Om het succes te demonstreren en te vieren was er een conferentie met verscheidene bekende wiskundigen uit binnen- en buitenland.

De eerste voordracht werd gegeven door sir Michael Atiyah, die met recht een van de grondleggers van de wiskunde van GQT mag worden genoemd. Hij sprak niet over zijn wiskunde uit voorgaande jaren, maar verraste met een (naar eigen zeggen) speculatief idee over hoe elementaire deeltjes in de natuurkunde op een nieuwe meetkundige manier beschreven zou kunnen worden. "Without trying you won't get anywhere."

Daarna volgden nog vele voordrachten over uiteenlopende onderwerpen, zoals 'Meetkundige Analyse op Minimale Representaties' van Toshiyuki Kobayashi en 'Twee moeilijk te bevatten ruimtes: Spec($\mathbb{Z}$) en ruimte-tijd' van Alain Connes, over zijn programma om de Riemann hypothese te bewijzen via het lichaam met karakteristiek 1. Ook Robbert Dijkgraaf, tegenwoordig ook bij breed publiek bekend na TV optredens in 'De wereld draait door' en Zomergasten, hield de voordracht 'Ijk-theorie, matrix modellen en Toda systemen', een goed voorbeeld van hoe natuurkundige theorieën wiskunde kunnen inspireren, een van de uitgangspunten van GQT. Van bijna alle voordrachten zijn video's te bekijken op de website van de conferentie, <http://www.ru.nl/math/conferences/gqt2010>.

Naast wetenschap was er ook ruimte voor cultuur, en hoewel bij de startconferentie van GQT (zie NAW december 2006) de hoop werd uitgesproken dat dit ook binnen GQT zou kunnen gebeuren, moest er dit keer nog worden uitgeweken naar het Kröller-Müller museum op de Hoge Veluwe, waar genoten kon worden van het mooie weer en kunst.

Na het officiële einde van de conferentie op donderdag 1 juli, was er voor de mensen die er geen genoeg van konden krijgen, op 2 juli een serie voordrachten vanwege de uitreiking van de Compositioprijs voor het beste artikel in Compositio Mathematica over de periode 2005-2007. Het winnende artikel, 'Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory. II' had goed gepast binnen het GQT cluster. Ondanks de al eerder genoemde hitte en voetbalwedstrijden, kwamen er behoorlijk wat mensen op af.

Al met al een prachtige conclusie van een succesvol cluster. Of er een vervolg komt is nog onbekend, dit is afhankelijk van de evaluatie, en natuurlijk de financiële middelen bij geldschieter NWO. De GQT colloquia gaan in ieder geval nog eventjes door. Meer informatie valt te vinden op www.gqt.nl.

Bron: Jan Jitse Venselaar, Universiteit Utrecht

Lovende woorden bij onderzoeksvisitaties

Eens per zes jaar wordt al het publiek gefinancierde onderzoek in Nederland geëvalueerd. De rapporten over de periode 2003-2008 werden in juli dit jaar bekend gemaakt. Voor wiskunde waren er twee aparte beoordelingscommissies, één voor de technische universiteiten en één voor de algemene universiteiten. Beide commissies stonden onder leiding van Henk van der Vorst, emeritus hoogleraar van de Universiteit Utrecht.

Het technische wiskundeonderzoek werd beoordeeld op vier criteria: kwaliteit, productiviteit, relevantie en levensvatbaarheid. De commissie was over het algemeen lovend over alle drie de technische universiteiten. Ze vonden sterk bewijs voor excellent onderzoek. Bovendien waren de groepen succesvol in het aantrekken van toptalent uit zowel binnen- als buitenland en bevonden vrijwel alle betrokken onderzoekers zich in de internationale voorhoede. Ook worden bijna alle belangrijke onderzoeksgebieden door de universiteiten samen vertegenwoordigd.

Ook aan de zes andere universiteiten was het wiskundeonderzoek van hoog niveau. Volgens de commissie wordt het Nederlandse onderzoek internationaal hoog gewaardeerd, wordt er goed samengewerkt tussen de verschillende onderzoeksgroepen en is de betrokkenheid bij toepassingen de laatste jaren sterk gegroeid. De individuele onderzoeksgroepen kregen goede tot excellente beoordelingen en er werd geconstateerd dat een aantal groepen tot de wereldtop behoort.

Beide commissies spraken verder wel hun ongerustheid uit over het gebrek aan financiële middelen voor wiskundig onderzoek. De directe financiering van wiskundeonderzoek is de laatste twintig

jaar steeds verder verminderd en steeds meer financiering gaat via projectmatige toekenningen. Hierdoor ontstaat een gebrek aan massa bij veel programma's, wat de levensvatbaarheid in gevaar brengt.

Bron: www.qanu.nl en www.vu.nl

Nog meer prijzen

De Fields medailles waren niet de enige prijzen die tijdens de ICM werden uitgereikt. Andere prijzen waren de Rolf Nevanlinnaprijs, de Gaussprijs, en de Chernmedaille.

De Rolf Nevanlinnaprijs is bedoeld voor mensen die zich bezig houden met wiskundige aspecten van informatiewetenschappen, en werd deze keer uitgereikt aan Daniel Spielman van Yale University in de Verenigde Staten. Hij kreeg deze prijs voor zijn werk aan lineair programmeren, algoritmes voor codes gebaseerd op grafen en toepassingen van grafentheorie in numerieke wiskunde.

De Gaussprijs is een oeuvreprijs voor wiskundigen werkzaam binnen toegepaste wiskunde en ging dit jaar naar Yves Meyer, professor emeritus aan de École Normale Supérieure in Cachan. Hij kreeg de prijs voor zijn fundamentele bijdragen in getaltheorie, operatortheorie en harmonische analyse en voor de belangrijke rol die hij speelde bij de ontwikkeling van wavelets en de analyse van multiresolutie.

De Chernmedaille werd dit jaar voor het eerst uitgereikt en is bedoeld voor personen die uitzonderlijke wiskundige prestaties hebben geleverd. De prijs ging naar Louis Nirenberg van het Courant Institute of Mathematical Sciences van New York University voor zijn rol in de ontwikkeling van de moderne theorie van niet-lineaire elliptische partiële differentiaalvergelijkingen en voor de begeleiding van tal van studenten en post-docs in dit gebied.

Bron: www.eurekalert.org

De P erin

In augustus kondigde Vinay Deolalikar, onderzoeker bij Hewlett-Packard in Californië, aan dat hij een bewijs had dat $P \neq NP$ en liet een eerste versie van zijn bewijs op het internet circuleren. Dit zou zeer schokkend nieuws geweest zijn, omdat het P versus NP probleem een bekend en belangrijk open probleem is. Het staat ook op de lijst van zeven millenniumproblemen van het Clay Mathematics Institute waarmee een miljoen dollar te verdienen valt.

Voor P-problemen bestaat een algoritme dat het probleem in polynomiale tijd op kan lossen. Dat wil zeggen, als n de lengte van de inputlijst weergeeft, dan is de rekentijd van het algoritme evenredig met een polynomiale functie $n \mapsto a \cdot n^c$, met a en c positieve constanten. Een voorbeeld is het berekenen van de grootste gemene deler. Op NP-problemen is het antwoord 'ja' of 'nee' en als het antwoord 'ja' is, dan bestaat er een polynomiaal algoritme om dit te verifiëren. Het handelsreizigersprobleem is een beroemd NP-probleem. $P = NP$ zou betekenen dat er voor alle problemen waarvoor we snel kunnen nagaan of een oplossing correct is, ook een snel algoritme bestaat dat deze oplossing geeft. Het bewijzen dat $P = NP$ zou daarom grote gevolgen hebben, zowel binnen wiskunde als daarbuiten.

De algemene overtuiging is echter dat $P \neq NP$ en Deolalikar dacht een bewijs hiervoor gevonden te hebben. Zodra dit bewijs op het internet verscheen, zijn de experts er massaal opgedoken en na uitvoerige discussies op het internet is de uiteindelijke conclusie dat het bewijs serieuze gaten bevat en het probleem nog steeds onopgelost is.

Op zich was het verschijnen van een bewijs voor $P \neq NP$ niets nieuws. Er bestaan websites vol met bewijzen voor deze bewering en

voor het tegenovergestelde. Wat wel nieuw was, was de ongelooflijke hoeveelheid aandacht en reacties die het bewijs van Deolalikar op het internet genereerde. Het bewijs werd spontaan gerefereerd in een open en op het internet toegankelijke discussie waaraan iedereen kon bijdragen. Ook bekende wiskundigen als Terence Tao en Timothy Gowers gaven hun mening. Er werden zo niet alleen mogelijke problemen gevonden, maar tegelijkertijd werden ook mogelijke oplossingen aangedragen.

Bron: www.newscientist.com

Wiskundemeisjes stoppen met weblog

Op 10-10-2010 om 10 over 10 's ochtends maakten de wiskundemeisjes, Jeanine Daems en Ionica Smeets, bekend dat ze stopten met hun weblog. De wiskundemeisjes hebben het de komende tijd beiden te druk met andere belangrijke zaken om de weblog in de huidige vorm bij te houden.

De wiskundemeisjes startten de weblog in april 2006 en het werd vrijwel meteen een groot succes. Ze plaatsten meer dan duizend berichtjes en kregen heel veel reacties. Ze werden bovendien gevraagd voor allerlei radio- en televisieprogramma's en wonnen verschillende prijzen.

Sinds het begin van 2009 schrijven de wiskundemeisjes ook elke twee weken een column in de wetenschapsbijlage van de Volkskrant en ze zullen deze column op de weblog blijven plaatsen.

Bron: www.wiskundemeisjes.nl

Lenstra op het witte doek

Tijdens het Nederlandse Filmfestival is de film 'De dingen die je niet begrijpt' in première gegaan. Het is één van de zes documentaires die is gemaakt in de reeks 'Magie van de wetenschap', waarin zes Nederlandse wetenschappers worden gevolgd tijdens hun werk en privéleven.

In 'De dingen die je niet begrijpt' volgen filmmakers Peter en Petra Lataster Hendrik Lenstra. Ze laten zien hoe Lenstra studenten begeleidt en een voordracht geeft in Berlijn, maar ook hoe hij zijn bejaarde moeder verzorgt en hoe wiskunde zich vermengt met zijn alledaagse bezigheden.

Bron: www.filmfestival.nl

Doorgedraaid

Er is weer nieuws aan het rubikskubusfront. In augustus hebben Morley Davidson, John Dethridge, Herbert Kociemba en Tomas Rokicki bewezen dat de kubus vanuit iedere startpositie in ten hoogste twintig draaiingen opgelost kan worden. Omdat er ook startposities bestaan van waaruit er tenminste twintig stappen nodig zijn, staat dit getal bekend als 'Gods nummer': iemand die vanuit iedere startpositie weet wat de optimale draaiingsstrategie is, heeft nooit meer dan twintig stappen nodig om de kubus op te lossen, maar soms ook niet minder.

Pas vijftien jaar na de introductie van de kubus werd bewezen dat er een beginpositie bestaat, van waaruit minimaal twintig draaiingen nodig zijn. Nu, weer vijftien jaar later, is met behulp van heel wat computerkracht bewezen dat twintig voor iedere positie ook het maximum kan zijn. De bewijstrategie van Davidson en zijn collega's bestond in principe uit het doorrekenen van alle 43.252.003.274.489.856.000 mogelijke posities van de kubus, maar omdat ze het rekenwerk wilden laten doen door gewone PC's, moest dit aantal op één of andere manier naar beneden. Met symmetrieargumenten en andere methodes wisten ze dit aantal terug te brengen tot 55.882.296 deelverzamelingen, die

wel op gewone PC's doorgerekend konden worden. Uiteindelijk was 35 CPU-jaar nodig om alle strategieën te vinden. Bron: www.cubezo.org



Foto: Wikipedia.org, creative commons license

Jong talent op ICM

De twaalfjarige Kaavya Jayram was de jongste deelnemster aan het International Congress of Women Mathematicians, dat voorafging aan de International Congress of Mathematicians (ICM) in India afgelopen zomer. Ze presenteerde haar resultaten over het uitdrukken van getallen als de som van andere getallen. Het artikel dat ze over dit onderwerp schreef zal in het *International Journal of Number Theory* verschijnen.

Jayram werd thuis door haar moeder onderwezen, omdat de school haar vanwege haar intelligentie een probleemkind vond. Toen ze acht jaar oud was, besloot ze dat ze wiskundige wilde worden en begon met het volgen van vakken aan de San José State University en Stanford University. Ze is vooral erg geïnteresseerd in getaltheorie, omdat daarin zoveel eenvoudig ogende open vragen zijn. Jayram woont met haar familie in Californië en is op dit moment voor een jaar in India. Als ze daarvan terug komt, gaat ze voltijd studeren aan de universiteit.

De veertienjarige Vicky Nanjappa was de jongste spreker op het ICM. Hij presenteerde resultaten binnen differentiaalmeetkunde. Bron: www.siliconindia.com

Goed resultaat voor Nederland op IMO 2010

Op de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) dit jaar in Kazachstan heeft Nederland vijf bronzen medailles en een eervolle vermelding behaald. Dit is de beste prestatie die Nederland op de IMO heeft neergezet sinds 1987 en het is ook de eerste keer dat alle teamleden in de prijzen vielen.

Het Nederlandse team bestond dit jaar uit Guus Berkelmans (16 jaar, uit Amstelveen), Harm Campmans (18 jaar, uit Borne), Madelon de Kemp (17 jaar, uit Nijmegen), David Kok (17 jaar, uit Delft), Daniël Kroes (16 jaar, uit Woerden) en Merlijn Staps (15 jaar, uit Leusden). Berkelmans, Campmans, De Kemp, Kok en Staps wonnen een bronzen medaille en Kroes kreeg een eervolle vermelding.

Tijdens de officiële sluitingsceremonie kreeg Nederland de olympische vlag uitgereikt, omdat de IMO in 2011 in Nederland zal worden gehouden. De voorbereidingen zijn al in volle gang en op de website www.imo2011.nl is al allerlei informatie te vinden. Bron: www.imo-official.org

Een golf van citaties

Op de website van Sciencewatch is een lijst te vinden met daarop per vakgebied één artikel uit de laatste zes jaar dat ten grondslag ligt

aan een nieuw en belangrijk onderzoeksgebied. Voor wiskunde werd het artikel 'A novel multigrid based preconditioner for heterogeneous Helmholtz problems' van Yogi Ahmad Erlangga, Kees Oosterlee en Kees Vuik genoemd. Het artikel verscheen in 2006, toen alle onderzoekers nog werkzaam waren aan de Technische Universiteit Delft.

Om de lijst samen te stellen, wordt gekeken naar de manier waarop onderzoekers elkaars werk citeren. Patronen hierin geven een beeld van hoe onderzoekers op elkaars werk voortbouwen en in wat voor toestand zich een specifiek vakgebied op dat moment bevindt. De lijst wordt iedere twee maanden ververs.

Sciencewatch stelde Erlangga een paar vragen over het artikel en plaatste het interview op de website. Op de vraag waarom het artikel volgens hem zo veel geciteerd wordt, antwoordde Erlangga dat hij nooit verwacht had dat het artikel zo invloedrijk zou zijn. Een expert had hem ooit verteld dat het probleem dat hij in het artikel oplost, door anderen vaak juist uit de weg wordt gegaan, omdat het zoveel moeilijkheden met zich meebrengt.

Erlangga legt ook in lektentaal uit waar het artikel over gaat. Om een indruk te krijgen van de structuur van een bepaald oppervlak, kun je er een golf heen sturen en de terugkerende echo analyseren. Dit is bijvoorbeeld hoe een vleermuis zich zonder problemen door een ruimte beweegt. In de praktijk wordt eerst een voorspelling gemaakt van het oppervlak en wordt aan de hand van een golfvergelijking berekend hoe de terugkerende echo eruit zou horen te zien. Deze voorspelling wordt vergeleken met de echte echo en op basis daarvan wordt de voorspelling over de structuur van het oppervlak bijgesteld. Er wordt een nieuwe golf gestuurd, enzovoort. Hoe meer golven er verstuurd worden, hoe meer informatie je krijgt, maar de hoeveelheid rekenwerk die verzet moet worden, groeit ook. Om zo snel mogelijk een goed beeld te krijgen van het oppervlak, is het nodig de golfvergelijking zo snel en efficiënt mogelijk op te lossen. Hierin ligt de bijdrage van het artikel.

In de toekomst gaan de resultaten misschien door een groot Amerikaans bedrijf ingezet worden om grote oliebronnen mee te vinden, maar Erlangga is er niet van overtuigd dat dit binnen afzienbare tijd gaat gebeuren. Bron: sciencewatch.com

Pierre van Hiele overleden

Op 1 november is op 101-jarige leeftijd Pierre van Hiele overleden. Van Hiele was wiskundeleraar, wiskundendidacticus, leerboekauteur en (vakdidactisch) onderzoeker.

Van Hiele werd geboren en groeide op in Amsterdam en werkte later als leraar in Overveen, Bilthoven en Voorburg. Hij gaf ruim veertig jaar les aan twaalf- tot achttienjarigen en bleef de daarbij opgedane ervaringen benutten bij het denken over en het werken aan een verdere theorievorming. Dit leidde tot vele publicaties waarin hij zijn ideeën over 'nivo's' verder ontwikkelde. Hij hanteerde nadrukkelijk het principe dat het leerproces dient aan te sluiten bij de intuïtieve, informele wiskunde die lerenden hebben geleerd door eigen experimenten. Motivatie speelde daarbij een belangrijke rol.

In de jaren '90 gaf Van Hiele nog steeds voordrachten in Australië, Nieuw Zeeland en Zuid Afrika, waar hij nog geëerd werd met een eredoctoraat. Op het vorig jaar door de Universiteit Twente georganiseerde Symposium ter ere van zijn honderdste verjaardag bleek dat er ook in Nederland een hernieuwde belangstelling is voor zijn werk. Bron: Harrie Broekman

Erik van den Ban

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
e.p.vandenban@uu.nl

Johan Kolk

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
j.a.c.kolk@uu.nl



Hans Duistermaat

In Memoriam Hans Duistermaat (1942–2010)

Grasping the essence

On March 19, 2010, mathematics lost one of its leading geometric analysts, Johannes Jisse Duistermaat. At age 67 he passed away, after a short illness following a renewed bout of lymphoma the doctors thought they had controlled. ‘Hans’, as Duistermaat was universally known among friends and colleagues, was not only a brilliant research mathematician and inspiring teacher, but also an accomplished chess player, very fond of several physical sports, and a devoted husband and (grand)father. Erik van den Ban and Johan Kolk look back on Duistermaat’s life and work in this contribution; it is followed by remembrances and surveys by some of his friends, students, and colleagues.

Hans Duistermaat was born December 20, 1942, in The Hague. After the end of World War II his parents moved to the Dutch East Indies (Indonesia nowadays), where he spent a happy youth. Hans was a student at Utrecht University, where he continued to write his PhD thesis on mathematical structures in thermodynamics. The famous geometer Hans Freudenthal is listed as his advisor, but the topic was suggested and the thesis directed by Günther K. Braun, professor in applied mathematics, who tragically died one year before the defense of the thesis, in 1968.

Since the thesis had led to dissent between mathematicians and physicists at Utrecht, Hans dropped the subject of thermodynamics. Nevertheless, this topic exerted a decisive influence on his further development: in its study Hans had encountered contact transformations. These he studied thoroughly by reading S. Lie, who had initiated their theory. In 1969–70 he spent one year in Lund, where L. Hörmander was developing the theory of Fourier integral operators (FIO’s); these are far-reaching generalizations of par-

tial differential operators. Hans’s knowledge of the work of Lie turned out to be an important factor in the formulation of this theory. The mathematical reputation of Hans was firmly established by a long joint article with Hörmander concerning applications of the theory to linear partial differential equations. In 1972 Duistermaat was appointed full professor at the Catholic University of Nijmegen, and in 1974 at Utrecht University, as the successor to Freudenthal.

Geometric analysis

In these years, he continued to work on FIO’s. At the Courant Institute in New York he wrote a paper on *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, a survey of the subjects in the title that sets the agenda for the study of singularities of smooth functions and their applications to distribution theory. In some sense it is complementary to FIO’s and parallel to work of V.I. Arnol’d. Furthermore, together with V.W. Guillemin he composed an article about application of FIO’s to the asymptotic

behavior of spectra of elliptic operators, and its relation to periodic bicharacteristics; see the article by Guillemin on pp. 238–239 in this issue. In these works one clearly discerns the thread connecting most of Hans’s achievements: on the basis of a complete clarification of the underlying geometry deep and powerful results are obtained in the area of geometric analysis.

Moving into new terrain

It is characteristic for the work of Hans that after a period of intense concentration on a particular topic, he would move to a different area of mathematics, bringing thereby acquired insights quite often to new fruition. Usually, this change was triggered by a question of a colleague, but more frequently so, of one of his PhD students. Hans went to great efforts to accommodate the special needs of his students and help them develop in their own way, not in his way. In particular, in several cases Hans has been willing and also able to guide students working on topics initiated by themselves. Examples are the theses of P.H.M. van Mouche and M.V. Ruzhansky.

It was by questions of J.A.C. Kolk and

The Duistermaat–Heckman formula

$$\int_M e^{J_X} e^\sigma = \sum_j \int_{N_j} \frac{e^{i_j^* J_X} e^{i_j^* \sigma}}{\det \frac{LX + \Omega}{2\pi i}}$$



Hans Duistermaat in 1977

G.J. Heckman that Hans became interested in the theory of semisimple Lie groups. With Kolk and V.S. Varadarajan he published basic papers on harmonic analysis and the geometry of flag manifolds, with the method of stationary phase as the underlying theme. This work also provided an impetus for the groundbreaking work with Heckman that culminated in the Duistermaat–Heckman formula, which will be discussed on pp.240–241 in this issue by Heckman.

In the thesis of E.P. van den Ban one finds the novel idea, suggested by Hans, of taking the integrals representing the spherical eigenfunctions on a semisimple Lie group, which are integrals over a real flag manifold, into integrals on real cycles inside the complex flag manifold. This allowed application of the method of steepest descent in order to study their asymptotics, generalizing the approach known in the theory of hypergeometric functions.

One of the basic mathematical interests of Hans, to which he returned throughout his life, was classical mechanics and its relations with differential equations. In this case too, it was often through the work of his students

S.J. van Strien, H.E. Nusse, J.C. van der Meer, J. Hermans, B.W. Rink, and A.A.M. Manders, that this topic was taken up again. His activities in this area will be discussed on pp. 242–243 in this issue by his colleague and co-author R.H. Cushman.

F.A. Grünbaum posed a problem that led to the joint article *Differential equations in the spectral parameter*. It classifies second-order ordinary differential operators of which the eigenfunctions also satisfy a differential equation in the spectral parameter. The classification is in terms of rational solutions of the Korteweg–De Vries equation.

Writing a review about the book *Lie's Structural Approach to PDE Systems* by O. Sturmfels led Hans to further study of that circle of ideas. The result was a paper on the contact geometry of minimal surfaces as well as the thesis of P.T. Eendebak.

Together with A. Pelayo he wrote several papers about symplectic differential geometry; furthermore he directed the thesis of R. Sjamaar. In this part of mathematics Hans was a very influential figure, witness his frequent contacts with other leading investigators, like Guillemin and A. Weinstein.

Mathematics in society

In the later part of his life, Hans had an intense interest in application of mathematics elsewhere in society. For instance, he was a consultant to Royal Dutch Shell, which led to the thesis of C.C. Stolk on the inversion of seismic data. Interaction with mathematical economists during a conference at Erasmus University in Rotterdam, where Hans had been invited to give an introduction to Riemannian geometry, sparked his interest in barrier functions, used in convex programming. He also collaborated with the geophysicist P. Hoyng modeling the polarity reversals of the earth magnetic field. The lengths of the time intervals between the subsequent reversals form an irregular sequence with a large variation, which make the reversals look like a (Poisson) stochastic process. Within a short period of time he mastered the nontrivial stochastics needed in this problem.

Books

The bibliography of Hans contains eleven books. *Fourier Integral Operators* gives an exposition of seminal results in the area of microlocal analysis. *The Heat Kernel Lefschetz Fixed Point Formula for the Spin-c Dirac Operator* is concerned with a direct analytic proof of the index theorem of Atiyah–Singer in a special case of interest for symplectic differ-

ential geometry. *Lie Groups*, jointly with Kolk, contains a new proof of Lie's third theorem on the existence of a Lie group associated to any Lie algebra. The construction of the group as the quotient of a path space in the Lie algebra was the model for many important generalizations, including the integration of Lie groupoids by M. Crainic and R.L. Fernandes.

Analysis of Ordinary Differential Equations (in Dutch), jointly with W. Eckhaus, grew out of a set of lecture notes. Similarly, together with Kolk he authored *Multidimensional Real Analysis I: Differentiation* and *II: Integration* (also published in a China edition), and *Distributions: Theory and Applications*. The last book contains a novel proof of the kernel theorem of L. Schwartz, which in turn is used to efficiently derive numerous important results, and a treatment of theories of integration and of distributions from a unified point of view. The last four books together form a veritable 'cours d'analyse mathématique'.

In the book *Discrete Integrable Systems: QRT Maps and Elliptic Surfaces*, QRT (Quispel, Roberts, and Thompson) maps are analyzed using the full strength of Kodaira's theory of elliptic surfaces. A complete and self-contained exposition is given of the latter theory, including all the proofs. Many examples of QRT maps from the literature are analyzed in detail, with explicit formulas and computer pictures. The interest in QRT maps was triggered by interaction with J.M. Tuwankotita. Hans had the idea to use the technique of blowing up, which he had previously encountered in the article *Constant terms in powers of a Laurent polynomial* jointly with Wilberd van der Kallen.

Writing

The mode of writing preferred by Hans was top-down exposition: starting from the general, coming down to the more concrete. Yet, hidden under the façade of a polished and sometimes quite abstract exposition, there usually was a detailed knowledge of explicit and representative examples. Many of the notebooks he left are filled with intricate calculations, which he performed with great precision and unflagging concentration. Not surprisingly, he greeted the advent of formula manipulation programs like *Mathematica* with great enthusiasm. Furthermore, Hans put a high value on correct illustrations; in private, he could express annoyance about misleading or ugly pictures. In the days of the programming language Pascal and matrix printers, he spent a substantial amount of time in order to put a dot exactly at the

position he wanted: one of his favorite techniques for creating complicated illustrations was by printing just a huge amount of dots.

In addition to his patience and powers of concentration, he was capable of grasping the essence of a problem and its solution with lightning speed. When this happened during someone's lecture, he usually mentioned this not critically, but kindly and supportively.

While Hans had clearly exerted a substantial influence on mathematics through his own research and that of his many PhD students, the books written by him alone or jointly traverse a wide spectrum of mathematical exposition, both in topic or level of sophistication. But in this case, again, there is a common characteristic: every result, how hackneyed it may be, had to be fully understood and explained in its proper context. In addition to this, when writing, he insisted that the original works of the masters be studied. Frequently he expressed his admiration for the depth of their treatment, but he could also be quite upset about incomplete proofs that had survived decades of careless inspection. The last project that he was involved in exemplifies this: in joint work with Nalini Joshi reliable proofs are provided of old but also many new results concerning Painlevé functions.

Teaching and administration

As a teacher, Hans was quite aware that not every student was as gifted as he. Despite the fact that he could ignore all restrictions of time and demanded serious work from the students, he was very popular among them. Repeatedly he gave non-scheduled courses on their request. He was an honorary member of A-Eskwadraat, the Utrecht Science Students Society. He shared this honor with Nobel laureate G. 't Hooft and with J.C. Terlouw, a nuclear physicist who pursued a successful career in Dutch politics.

As an administrator, however, he was less successful. Although he served our institute, the mathematical community, and the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences in many different qualities, he was at his best with concrete issues that could be solved rationally, not with situations that required intricate political maneuvering. For instance, he was very actively involved with the Scientific Programme Indonesia–Netherlands, which was an initiative of the Academy, aimed at the selection and training of new researchers, the improvement of the supervising infrastructure at Indonesian institutes, and the conduct of joint research activities. In addition, the task of refereeing manuscripts was taken very se-



Hans Duistermaat (right) and Alan Weinstein at a thesis defense in Utrecht in July 2009

riously by Hans: many authors greatly benefited from his long e-mails. He was a member of a substantial number of selection committees, devoting a lot of energy to evaluating the candidates' achievements and potential.

Honored by the Royal Academy

In 2004, Hans was honored with a special professorship at Utrecht University endowed by the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. This position allowed him to exclusively focus on his research, without being distracted by administrative obligations. The five years that followed were a happy period in which his mathematics blossomed. Hans demonstrated by the breadth and depth of his accomplishments that his chair was aptly named 'pure and applied mathematics'.

Persistence, power and success

His mood was almost invariably one of equanimity; even in difficult situations, he always tended to look for positive aspects. Immense concentration on a topic of momentary interest was natural for him. In fact, at several occasions he confessed he had a 'one-track mind', which made it necessary to mentally exclude disturbances. At times, however, this trait of character could be infuriating for his colleagues.

Very remarkably, Hans had no personal vanity, neither in human nor in professional relations. About his own work he once expressed to consider himself lucky for having become well-known for results he considered

to be relatively simple. Most of his more difficult work, which had been far more difficult to achieve, had not received similar recognition. Honors did not mean much to Hans, although he was at first surprised and then gratified by them. He gave himself without any reservation to his friends and colleagues, always illuminating whatever was under discussion with characteristic insights based on his wide knowledge of mathematical and other topics.

In mathematics, Hans's life was a search for exhaustive solutions to important problems. This quest he pursued with impressive single-mindedness, persistence, power and success. We know this is a very sketchy attempt to bring him to life. In our minds, however, he is very vivid, one of the most striking among the mathematicians we have met. We deeply mourn his loss; yet we can take comfort in memories of many years of true and inspiring friendship.



Victor Guillemin

Department of Mathematics, MIT

Cambridge, MA 02139

USA

vwg@math.mit.edu

In Memoriam Hans Duistermaat (1942–2010)

Working single-mindedly on a project

In 1975 Hans Duistermaat and Victor Guillemin published the article ‘The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics’ in *Inventiones Mathematicae*. Victor Guillemin describes his reminiscences of the period that he and Duistermaat worked together on this article.

These are a few brief recollections of mine from the period 1973–1974, the two years in which Hans Duistermaat and I worked together on our article ‘The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics’. For me the two most memorable and exciting years of that decade. In the summer of 1973, Hans and I met for the first time at an AMS sponsored conference on differential geometry at Stanford and began to formulate the ideas that became the wave trace part of our paper. Then in the fall of 1974 he made a long visit to MIT during which we firmed up these ideas and also proved the periodic bicharacteristic results that became the second main part of our paper.

The wave trace part

A little pre-history: In the early 1970’s, Bob Seeley, David Schaeffer, Shlomo Sternberg and I ran a seminar at Harvard which was largely devoted to Hörmander’s papers [1] and [2] and Duistermaat and Hörmander [3]. In particular we spent a lot of time going through [3], which was the first systematic application of microlocal techniques to the problem of propagation of singularities. (Like analysts the world over, we were amazed at how simple this subject becomes when viewed from the perspective of the cotangent bundle.) Therefore, when I met Hans that summer I was well

primed to discuss with him the contents of these papers. However, what initiated our collaboration was another memorable event from that conference: the announcement by Marcel Berger of Yves Colin de Verdière’s result on the spectral determinability of the period spectrum of a Riemannian manifold. I vividly remember sitting next to Hans at Berger’s lecture and our exchanging whispered comments as it became more and more evident that what Yves had done was intimately related to the things the two of us were currently thinking about. By the time the conference ended we had formulated a trace theorem for Fourier integral operators which asserted that the singularities of the wave trace are supported on the period spectrum of P (and hence that the wave trace gave one a simple means of accessing these data). As I mentioned above, this result became the first part of our paper.

The periodic bicharacteristic results

The second part of our paper was based on an observation that Hans and I had made (each independently) that spring apropos of a result of Hörmander in [1]. One of the most quoted results of Hörmander’s paper is a generalization of a theorem of Avakumovic in which he obtains an ‘optimal’ error term in the Weyl law for an elliptic pseudodifferential opera-

tor, P , and shows that this error term is optimal by showing that this is the case if P is the Laplace operator on the standard round sphere. I noticed that this can be related to the fact that for the n -sphere the bicharacteristic flow associated with P is periodic. (More explicitly, I noticed that if the bicharacteristic flow of an elliptic operator P is periodic (i.e., P is Zoll) there has to be a clustering of eigenvalues about a lattice which prevents a sharpening of the Weyl law and vice versa.) In proving this result I made essential use of techniques developed in [3], so it was not surprising that when I described it to Hans at Stanford, I found that he had been thinking along similar lines. Moreover, it slowly began to dawn on us that the Hörmander example was just the tip of the iceberg. Among other things we noticed that his optimal error term could be replaced by a slightly better optimal error term (a big ‘ O ’ could be converted into a little ‘ o ’) if P was not Zoll, and also noticed that in this case the Weyl law could be differentiated to give an equidistribution result for eigenvalues. We also obtained a much sharper version of my clustering result: we showed that the clusters are clearly demarcated eigenbands of fixed width. Subsequently, Alan Weinstein and Yves Colin de Verdière added a further dimension to this story by discovering that when Zoll phenomena are present, these clusters satisfy their own beautiful distribution law. Furthermore, Bill Helton discovered an extremely clean and economical version of our result: Let A be the set of numbers obtained by taking all differences of



Hans Duistermaat in 1976

Foto: Archives of the MFO

pairs of eigenvalues, and let B be the cluster set of A . Then, if the bicharacteristic flow is periodic, B is an integer lattice, and if not, it is the whole real line.

Finishing the paper

To conclude these reminiscences: by the spring of 1974, most of the conjectures we had made at the Stanford meeting had been supplied with rigorous proofs, although Hans continued, as was his wont, to tinker with

them for the next several months just to make sure that they were ‘best possible’. (No one was going to be able to achieve instant immortality by slightly improving them.) When Hans visited me in the fall, the only unfinished piece of business was the Zoll part of the paper, and that consumed all our energy for four intense weeks. One typical ‘Hans’ memory from that time: One evening I return home late, exhausted in mind and spirit following a frustrating day in which the two

of us struggled without success to settle a delicate point about how large sets of periodic bicharacteristics have to be for clustering to occur. At 2 o’clock in the morning I get jarred awake by a phone call from Hans letting me know that he had settled it. I remember the aftermath of Hans’s visit as a period of a slow, painful decompression. Never before had I worked so intensely and so single-mindedly on a project (and, for better or for worse, was destined never to do so again). ↩

References

- 1 L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, *Acta Mathematica* **121**, 193–218 (1968).
- 2 L. Hörmander, Fourier integral operators I, *Acta Mathematica* **127**, 79–183 (1971).
- 3 J.J. Duistermaat and L. Hörmander, Fourier integral operators II, *Acta Mathematica* **128**, 184–269 (1972).

Gert Heckman

Department of Mathematics

Radboud University

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

G.Heckman@math.ru.nl

In Memoriam Hans Duistermaat (1942–2010)

Recollections of a godsend talent

In 1982 Hans Duistermaat and Gert Heckman wrote the article ‘On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space’, introducing the well-known Duistermaat–Heckman formula. Gert Heckman describes the becoming of this article, and the important role that Duistermaat played in the early days of his career.

I would like to share with you some recollections of Hans Duistermaat from the period 1978–1981, during which he played a crucial role in my mathematical development. In 1976 I had started my dissertation work under the guidance of Gerrit van Dijk. In his thesis of 1962, the Russian mathematician Alexander Kirillov had developed a very elegant geometric method, the so-called orbit method, for understanding the representation theory of connected nilpotent Lie groups. In this method the branching rule for understanding how an irreducible representation decomposes under restriction to a subgroup has a very simple and elegant answer.

Gerrit suggested to me that I try to understand to what extent this orbit method could shed new light on the representation theory of semisimple Lie groups, in particular for the discrete series representations. In my first short paper from the summer of 1978 I worked out a particular example for compact Lie groups. According to the customs of those days I sent it around to several potentially-interested people, and in return quickly received a reaction of Hans. My main result turned out to be already in the literature, and in addition Hans sketched an alternative and more elegant geometric proof. Aware of the fact that his letter might be intimidating for me he wrote at the end: “It is maybe superfluous to emphasize that I do not write you this proof out of pedantry, but rather as a sign of interest for your work and hopefully also leading to a still better understanding of the whole situation.” So my first little paper went into the wastebasket, but I was to receive something more

valuable in return. I visited Hans regularly in Utrecht, and in June 1980 I defended my dissertation in Leiden with both Gerrit and Hans as thesis advisors. I realize now how lucky I was to have these two complementary teachers: Gerrit with his extensive knowledge of the work of Harish-Chandra, and Hans as the eminent analyst and geometer.

Symplectic Geometry

In August 1980 I went to Boston, to spend two years as a postdoc at MIT, and in September I lectured in the Lie groups seminar about my thesis work: how the orbit method for com-

pact Lie groups describes the branching rules in an asymptotic way, and how this leads to a convex polytope in which the multiplicities of the branching rule had their support. The talk was received well, most notably by Victor Guillemin. Victor knew Hans well, and had great admiration for him. In 1975 they had written a beautiful article on the spectrum of elliptic operators on compact manifolds. Looking back at my time at MIT I realize again how lucky I was to be there during that period with Victor around.

That fall a number of new insights were unveiled regarding continuous symmetry reduction in symplectic geometry through the work of Guillemin–Sternberg, Atiyah–Bott and Mumford. In these at first sight rather different contexts, namely quantum mechanics, quantum field theory and algebraic



Hans Duistermaat in 1981

Photograph: Archives of the MFO

geometry there was a single fundamental underlying concept for the description of symmetry, namely that of the geometry of the moment map (or momentum map as Hans preferred to call it). I quote from a survey article of Bott from 1988: “In fact, it is quite depressing to see how long it is taking us collectively to truly sort out symplectic geometry. I became aware of this especially when one fine afternoon in 1980, Michael Atiyah and I were trying to work in my office at Harvard. I say trying, because the noise in the neighboring office made by Sternberg and Guillemin made it difficult. So we went next door to arrange a truce and in the process discovered that we were *grosso modo* doing the same thing. Later Mumford joined us, and before the afternoon was over we saw how Mumford’s stability theory fitted with the Morse theory. The important link here is the concept of a moment map, which in turn is the mathematical expression of the relation between symmetries of Lagrangians and conserved quantities; in short, what the physicists call Noether’s theorem and which is one of their great paradigms.” In this quote Bott refers to the results of fundamental publications by Guillemin–Sternberg, Mumford, Ness, Atiyah–Bott and Kirwan. Since then, symplectic geometry has become a truly independent field in its own right.

The becoming of our joint paper

In the spring of 1981 Victor gave a course on symplectic geometry, with special emphasis

In 1982 Hans Duistermaat and Gert Heckman published the article ‘On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space’. The following theorem is the main result of this article.

Theorem. Let a torus T act effectively on a symplectic manifold (M, σ) in a Hamiltonian way with a proper momentum map $J : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Let (M_ζ, σ_ζ) be the reduced phase space over a general point ζ in a connected component C of the set of regular values of J . Then

$$[\sigma_\zeta] = [\sigma_{\xi_0}] + \langle c, \xi - \xi_0 \rangle$$

varies linearly with ξ for $\xi, \xi_0 \in C$, with $c \in H^2(M_\zeta, \mathfrak{t})$ the (common) Chern class of the principal T -fibration $J^{-1}(\zeta) \rightarrow M_\zeta$.

on the geometry of the moment map, and I learned the subject well. During the month of August I went back to the Netherlands to visit family and friends. The day before my return I was doing some last-minute work at MIT, when it occurred to me that the rather complicated locally-polynomial formulas for the multiplicities could be explained by a linear variation of the symplectic form in the cohomology of the reduced phase space, at least over the generic fiber. A nice idea, but I had no clue how to prove it. A few days after my return I visited Hans, and we spent a whole afternoon talking about symplectic geometry. I told him about my question, and he listened attentively. That same evening he called me up at my parents’ house, and with a piece of scratch paper on my lap I got an exposition of what later would become our joint paper.

An important role in my career

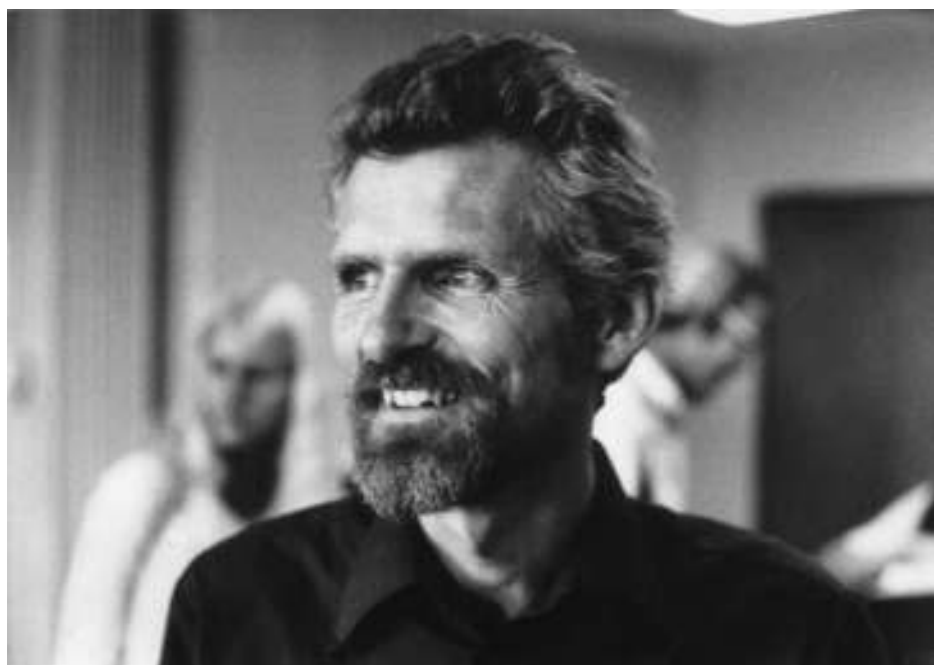
Our work was well-received. Independently

of one another, Berline–Vergne and Atiyah–Bott placed it in the more general framework of equivariant cohomology. Our article was later used by Ed Witten in his work on two dimensional Yang–Mills theory. More recently our theorem was used again by Mariyam Mirzakhani in her computation of the Weil–Petersson volumes of the moduli space of curves. In September 1982 I got a permanent position in Leiden as assistant to Gerrit van Dijk: a solid base from which to pursue mathematical work professionally. I now appreciate very well the important role played by Hans during the early stages of my career. It is not inconceivable that without him I would have become a high school teacher rather than a university professor of mathematics.

A great emptiness

After this period of intensive contact from 1978 to 1981 our mathematical roads diverged. Our personal relationship remained however, and I cherish the memories of the parties held for his 60th birthday and on the occasion of his royal decoration.

The sudden passing of Hans leaves behind a great emptiness, in the first place for his wife Saskia, his daughters Kim and Maaïke and his relatives, but also for the many mathematicians with whom he worked together. During the cremation ceremony many affectionate words were spoken about Hans. His sister Dineke told the story of how, when she asked him as a student why he had chosen for mathematics, Hans replied that he had no other option, because his talent for mathematics was such a godsend. I realize how very lucky I am that Hans shared this talent with me so generously.



Photograph: Archives of the IMFO

Hans Duistermaat in 1981

Richard Cushman

*P.O. Box 209**Livelong, SK**Canada, S0M 1J0**r.h.cushman@gmail.com*

In Memoriam Hans Duistermaat (1942–2010)

Classical mechanics

One of Hans Duistermaat's favorite subjects was classical mechanics. His interest in this area was wide ranging. In this article Richard Cushman gives an overview of the papers that Duistermaat published on classical mechanics.

In order to describe what Hans did in classical mechanics, I will organize his papers in this area, somewhat arbitrarily, into three classes: periodic solutions near an equilibrium point, monodromy in integrable systems, and other topics.

Periodic solutions near an equilibrium point

In [1] Hans studied the persistence of periodic solutions near an equilibrium point of a two degree of freedom Hamiltonian system which is in $1 : 2$ resonance. This is the simplest situation where a well-known theorem of Lyapunov on the persistence of periodic solutions fails. Years later Hans returned to this subject in the almost forgotten paper [4]. Here, using the theory of singularities of mappings which are invariant under a circle action that fixes the origin, he proved a stability result for the set of short period periodic orbits near an equilibrium point of a resonant Hamiltonian system of two degrees of freedom. In particular, he showed that this set of periodic orbits is diffeomorphic to the set of critical points of rank one of the energy momentum mapping. Here the energy is the Hamiltonian of the Birkhoff normal form of the original resonant Hamiltonian truncated at some finite order. The momentum of the circle action is the quadratic term of this normal form. As far

as I am concerned, this result is the definitive generalization of Lyapunov's theorem.

Monodromy in integrable systems

Hans's most important contribution to the geometric study of Hamiltonian systems is his discovery of the phenomenon of monodromy in [3]. To describe what monodromy is we look at a two degree of freedom Hamiltonian system on a four-dimensional phase space, which we assume is a Euclidean space. We suppose that this Hamiltonian system has another function, which is an integral, that is, it is constant on the motions of the original Hamiltonian system. Such a Hamiltonian system is said to be completely integrable with integral map given by assigning to each point in phase space the value of the Hamiltonian and the extra integral. If we assume that the integral map is proper and each preimage of a point is connected, then the action-angle theorem shows that the preimage of a suitably small open 2-disk in the set of regular values of the integral map is symplectically diffeomorphic to a product of a 2-torus and 2-disk. Hans showed that this local theorem need not hold globally. In particular, if we have a smooth closed, nonintersecting curve in the set of regular values of the integral map, then the preimage of this curve in

phase space under the integral map is the total space of a 2-torus bundle, which need not be diffeomorphic to a product of the closed curve and a 2-torus. To understand what this global twisting is, we note that a 2-torus bundle over a circle may be looked at as a product bundle over a closed interval with a typical fiber of a 2-torus. Here each of its two end 2-tori, which are Euclidean 2-space modulo the lattice of points with integer coordinates, are glued together by an integer 2×2 matrix with determinant 1. The monodromy of this 2-torus bundle is just this integer matrix. If the monodromy is not the identity matrix, then the 2-torus bundle is not a product bundle. In [3] Hans gave a list of geometric and analytic obstructions for local action angle coordinates to be global. Monodromy is just the simplest obstruction. Monodromy would not be interesting if there were no two degree of freedom integrable Hamiltonian systems having it. When Hans was starting to write [3], he asked me to find an example of such a system. The next day I told him that the spherical pendulum, which was studied by Christiaan Huygens in 1612, has monodromy and gave him a proof. When writing up the paper Hans found a much simpler geometric argument to show that the spherical pendulum had monodromy. In the early days, showing that a particular integrable system had monodromy was not easy. In [8] Hans did this for the Hamiltonian Hopf bifurcation. In [6] Hans and I discovered that monodromy appears in

the joint spectrum of the energy and angular momentum operators of the quantized spherical pendulum. This discovery has now been recognized as fundamental by chemists who study the spectra of molecules and has led to a very active area of scientific research.

Nonholonomically constrained systems

In the middle 1990's Hans became interested in nonholonomically constrained systems such as the disk or a dynamically symmetric sphere with its center of mass not at its geometric center. Both are assumed to be rolling without slipping on a horizontal plane under the influence of a constant vertical gravitational force. This interest gave rise to [9]. In this paper Hans gave a simple geometric criteria for a not necessarily Hamiltonian system to have monodromy. He showed that an oblate ellipsoid of revolution rolling without slipping on a horizontal plane under the influence of a constant vertical gravitational force had a cycle of heteroclinic hyperbolic equilibria whose local monodromies added up to the identity. This shows that it cannot be made into a Hamiltonian system. The book [11] clearly indicates Hans's contributions to the geometric study of nonholonomically constrained systems. Especially, it contains a complete qualitative study of the motion of the rolling disk, some of which was published in [10].

Other topics

His remaining publications range from removing the incompleteness of the flow of the



Hans Duistermaat in 1994

Foto: Archives of the MFO

Kepler problem for all negative energies at the same time, see [7], to showing that the $1 : 1 : 2$ resonance is nonintegrable by looking at its fourth-order normal form. In two degrees of freedom, integrability cannot be decided by any finite-order normal form. In the remaining paper on periodic linear Hamiltonian systems [2] Hans answered an old question of Bott about the Morse index of iterates of a periodic geodesic. Bott showed that this index is the sum of the index of the periodic geodesic and invariants of the real symplectic conjugacy class of the linear Poincaré map. Hans gave

an explicit formula for the Morse index.

My memories

Working with Hans and collaborating on our joint publications is at the core of my mathematical career. It is hard for me to realize that he cannot answer my questions any more.

References

- 1 On periodic solutions near an equilibrium point of conservative systems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **38** (1972), 143–160.
- 2 (with R.H. Cushman) The behavior of the index of a periodic linear Hamiltonian system under iteration, *Adv. in Math.* **23** (1977), 1–21.
- 3 On global action-angle coordinates, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980) 687–706.
- 4 Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems, In: *Bifurcation Theory and Applications (Montecatini, 1983)*. Lecture Notes in Mathematics 1057, Springer Verlag, Berlin, 1984, 57–105.
- 5 Nonintegrability of the $1:1:2$ resonance, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **4** (1984) 553–568.
- 6 (with R.H. Cushman) The quantum mechanical spherical pendulum, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **19** (1988) 475–479.
- 7 (with R.H. Cushman) A characterization of the Ligon-Schaaf regularization map, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997) 773–787.
- 8 The monodromy in the Hamiltonian Hopf bifurcation, *Z. Angew. Math. Phys.* **49** (1998) 156–161.
- 9 (with R.H. Cushman) Non-Hamiltonian monodromy, *J. Diff. Eqns.* **172** (2001) 42–58.
- 10 (with R.H. Cushman) Nearly flat falling motions of the rolling disk, *Reg. Chaotic Dyn.* **11** (2006) 31–60.
- 11 (with R.H. Cushman and J. Śniatycki) “Geometry of Nonholonomically Constrained Systems”, *Advanced Series in Nonlinear Dynamics* **26**, World Scientific, Singapore, 2009. ISBN 13 978-981-4289-48-1.

Jaap Korevaar

Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248

1090 GE Amsterdam

J.Korevaar@uva.nl

Onderzoek

Hoe springen de priemgetallen?

Over de precieze verdeling van de priemgetallen is nog heel veel onbekend. Over de sprongen tussen twee opeenvolgende priemgetallen is maar weinig echt bewezen. Men weet bijvoorbeeld niet of alle even getallen als sprong voorkomen, laat staan of ze oneindig vaak als sprong voorkomen. Er zijn plausibele vermoedens die numeriek goed kloppen voor zo ver als men kan rekenen. En er zijn interessante vermoedens over de sprong die het meest voorkomt en over patronen van sprongen. Jaap Korevaar hield op 23 april 2010 een voordracht aan de Universiteit van Amsterdam in de serie 'Leve de wiskunde!', waarop dit artikel gebaseerd is.

Dit artikel gaat over de rij *priemgetallen*

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < p_4 = 7 < p_5 = 11 < \dots$$

Dus over de gehele getallen groter dan 1, die alleen deelbaar zijn door 1 en zichzelf. Meer in het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de *sprongen*

$$p_{n+1} - p_n$$

tussen opeenvolgende priemgetallen.

Voor een eerste oriëntatie is het goed om naar een tabel van priemgetallen te kijken. Op het Internet kan men heel wat van zulke tabellen vinden; zie bijvoorbeeld [29–30]. De priemgetallen zijn tamelijk onregelmatig verdeeld onder de gehele getallen, maar ze komen geleidelijk minder dicht te liggen. In Tabel 1 staan de 168 priemgetallen tot 1000.

We tellen de sprongen $p_{n+1} - p_n$ in de tabel. Er is één sprong gelijk aan 1. De sprong 2 komt 35 keer voor, de sprong 4 komt 40 keer voor, en de sprong 6 komt met 44 keer

het meest voor. Verder zijn er 15 sprongen 8, 16 sprongen 10, 7 sprongen 12, 7 sprongen 14, één sprong 18 en één grootste sprong van 20.

De gemiddelde sprong tot 1000 is gelijk aan de totale sprong, $997 - 2 = 995$, gedeeld door het aantal sprongen, $168 - 1 = 167$. Het quotiënt 5.958... ligt dicht bij 6, de sprong die het meest voorkomt tot 1000.

Over de *gemiddelde sprong* onder de priemgetallen tot grote x geeft de *priemgetalstelling* informatie.

Priemgetalstelling en gemiddelde sprong

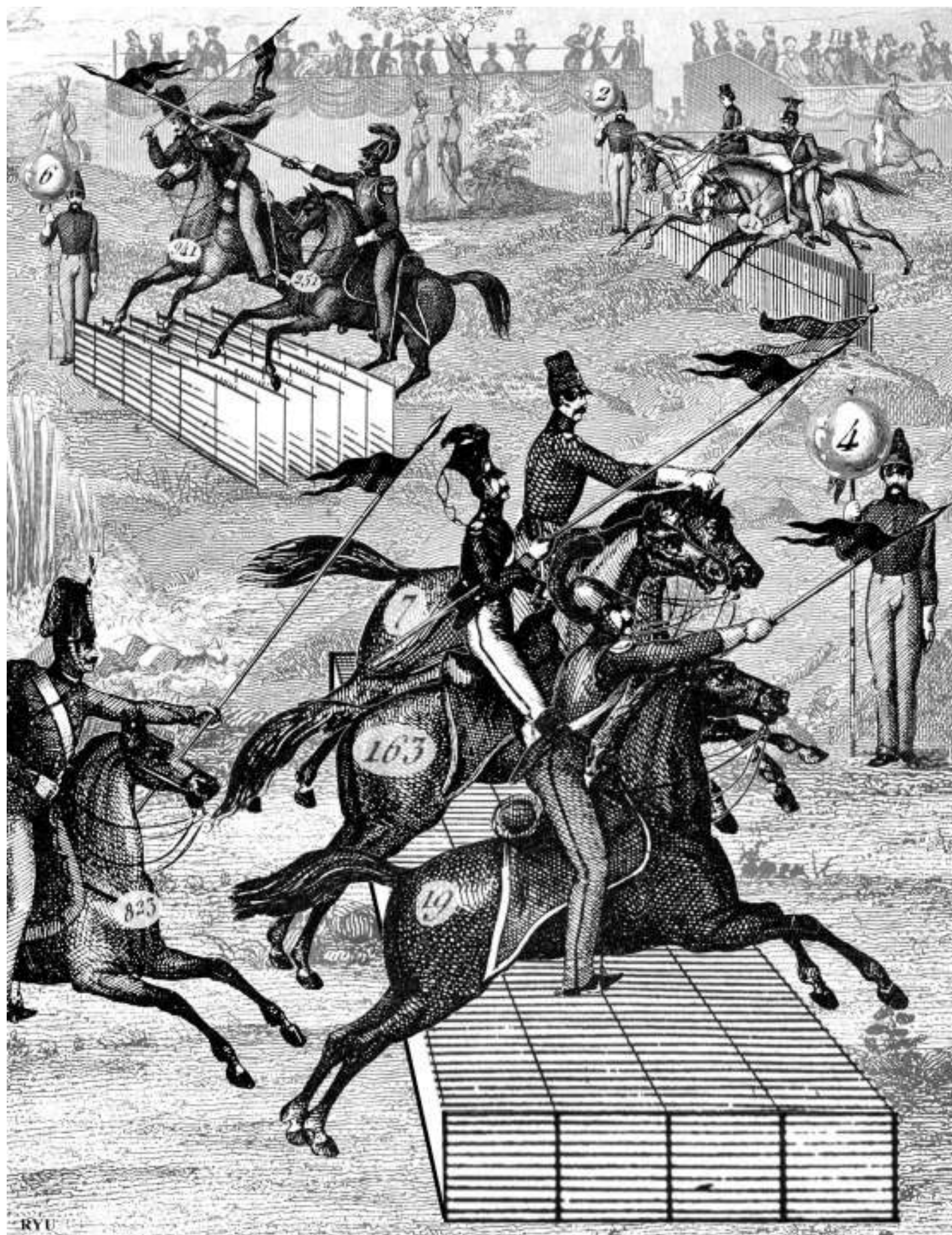
Op grond van tabellen kwamen Gauss en Legendre omstreeks 1800 tot het volgende vermoeden. Het aantal $\pi(x)$ van de priemgetallen $p \leq x$ is *asymptotisch gelijk* aan x , gedeeld door de natuurlijke logaritme $\log x$. Notatie: $\pi(x) \sim x / \log x$, en dit betekent dat het quotiënt van beide grootheden limiet 1 heeft:

$$\frac{\pi(x)}{x / \log x} \rightarrow 1 \quad \text{als } x \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Het vermoeden van Gauss en Legendre heeft

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	.	.

Tabel 1 De priemgetallen tot 1000



veel belangrijk onderzoek geïnspireerd, met name van Riemann, zie sectie 'Opmerkingen over de priemgetalstelling'. De eerste volledige bewijzen van (1) werden in 1896 gegeven door Hadamard en De la Vallée Poussin, min of meer onafhankelijk van elkaar:

Stelling 1 [Priemgetalstelling]. *Relatie (1) is juist.*

Gevolg 2. *Zij p_n het grootste priemgetal $\leq x$. Dan geldt $p_n \sim x$ als $x \rightarrow \infty$.*

Inderdaad, voor elk getal $\varepsilon \in (0, 1)$ ligt er een priemgetal tussen $(1 - \varepsilon)x$ en x wanneer x voldoende groot is. Immers,

$$\begin{aligned}\pi\{(1 - \varepsilon)x\} &\sim \frac{(1 - \varepsilon)x}{\log\{(1 - \varepsilon)x\}} \\ &\sim (1 - \varepsilon) \frac{x}{\log x} \quad \text{als } x \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Stelling 3. *Voor grote x is de gemiddelde sprong onder de priemgetallen $\leq x$ ruwweg (preciezer: asymptotisch) gelijk aan $\log x$.*

Inderdaad, als p_n het laatste priemgetal is $\leq x$, dan is de som van de sprongen tot en met x gelijk aan

$$p_n - p_1 \sim x.$$

Het aantal sprongen is gelijk aan $n - 1 = \pi(x) - 1 \sim x/\log x$, dus de gemiddelde sprong tot x is gelijk aan

$$\frac{p_n - p_1}{\pi(x) - 1} \sim \frac{x}{x/\log x} \sim \log x \quad \text{als } x \rightarrow \infty.$$

Men kan de priemgetalstelling ook formuleren in termen van het n -de priemgetal:

$$p_n \sim n \log n \quad \text{als } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Dit zegt echter heel weinig over de sprongen $p_{n+1} - p_n$.

Relatie (2) kan uit (1) afgeleid worden door $x = p_n$ te nemen.

Opmerkingen over de priemgetalstelling

Gauss had al opgemerkt, dat de logaritmische integraal

$$\text{li}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \dots$$

waarschijnlijk een betere benadering geeft voor $\pi(x)$ dan $x/\log x$. Riemanns baanbrekende werk ondersteunde dit vermoeden. Hij

gaf een expliciete formule voor $\pi(x) - \text{li}(x)$ in termen van de nulpunten van de zogenaamde zetafunctie $\zeta(s)$, die voor alle complexe waarden van s gedefinieerd kan worden; zie bijvoorbeeld Ingham [15] of Edwards [5]. Riemann sprak het vermoeden uit dat de complexe nulpunten van $\zeta(s)$ allemaal reëel deel $\frac{1}{2}$ hebben. Uit dit nog altijd niet bewezen 'Riemann vermoeden' zou volgen dat voor grote x :

$$\begin{aligned}\text{de afwijking } |\pi(x) - \text{li}(x)| \\ \text{is niet veel groter dan } \sqrt{x}\end{aligned} \quad (3)$$

(en omgekeerd).

Tabellen ondersteunen zo'n resultaat. Zij leidden lang geleden ook tot het vermoeden dat altijd $\pi(x) < \text{li}(x)$, maar dit is onjuist. In 1914 liet Littlewood [20] zien, dat het verschil $\pi(x) - \text{li}(x)$ oneindig vaak van teken moet wisselen; vergelijk Ingham [15]. Sinds kort weet men met vrij grote zekerheid, dat de eerste tekenwisseling optreedt tussen $x = 10^{316}$ en $x = 10^{317}$; zie Bays en Hudson [1]. Die getallen zijn nog altijd veel te groot om met computers de eerste tekenwisseling precies te lokaliseren. De moraal van Littlewoods resultaat is, dat men voorzichtig moet zijn met vermoedens, die alleen gebaseerd zijn op numeriek werk!

De eerste volledige bewijzen van de priemgetalstelling (uit 1896) waren tamelijk ingewikkeld. Later kwamen er aanzienlijk eenvoudigere bewijzen, de meeste gebaseerd op zogenaamde Tauberstellingen; zie bijvoorbeeld [16–17].

Grote sprongen; grootste sprong tot x

Het is eenvoudig te bewijzen dat er *willekeurige grote* sprongen zijn in de rij priemgetallen. Preciezer gezegd, voor elk gegeven getal k komt er een sprong $\geq k$ voor. Voor $k \geq 2$ volgt dit uit het rijtje

$$k! + 2, k! + 3, \dots, k! + k. \quad (4)$$

Al deze $k - 1$ opeenvolgende getallen zijn samengesteld. Als nu p_n het grootste priemgetal is $\leq k! + 1$, dan is $p_{n+1} \geq k! + k + 1$, en dus

$$p_{n+1} - p_n \geq k.$$

Kan men hieruit iets afleiden over de orde van de grootste sprong tot x ? Zij

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{p_{n+1} \leq x} (p_{n+1} - p_n).$$

Bepaalde kansbeschouwingen door Cramér [4] hebben tot het vermoeden geleid, dat $G(x)$

van de orde $\log^2 x$ is; vergelijk Tenenbaum en Mendès France [31], en Heath-Brown [14]. Het rijtje (4) geeft voor $k! + k \leq x$ alleen maar een sprong tot x van de orde $(\log x)/\log \log x$, dus kleiner dan de gemiddelde sprong $\log x$! Door slimmere rijtjes te gebruiken konden Erdős [7] en Rankin [27] betere resultaten verkrijgen. Rankin bepaalde een constante $c > 0$ zodanig, dat voor $x \rightarrow \infty$,

$$G(x) \geq \{c + o(1)\} \log x \cdot \frac{(\log \log x) \log \log \log x}{(\log \log x)^2}.$$

Zie ook Maier en Pomerance [21].

De orde van deze ondergrens is veel kleiner dan $\log^2 x$! Het zou natuurlijk kunnen dat $G(x)$ die (of een andere) bijzondere orde van grootte alleen bereikt voor *speciale* $x \rightarrow \infty$.

Er is veel numeriek werk gedaan over grote sprongen. Nicely [23] vermeldt een sprong van 906 na het priemgetal

$$218.209.405.436.543.$$

Hij citeert ook een persoonlijke mededeling van H. Dubner, dat deze een sprong van 12.540 heeft gevonden na een priemgetal van 385 cijfers. De referee herinnerde me eraan, dat het numerieke werk van Nicely geleid heeft tot de ontdekking van een ondeugdelijk type processor in computers.

Open probleem. Men verwacht, dat *alle* even getallen $2r$ als sprong voorkomen in de rij priemgetallen. Maar onvoorwaardelijk *bewezen* is het niet; zie sectie 'Sprongen van de algemene vorm $2r$ '.

Is er een sprong die oneindig vaak voorkomt?

Komt de sprong 2 oneindig vaak voor? Waarschijnlijk wel, maar het is niet bewezen. Met een sprong 2 correspondeert een zogenaamde *priemtweeling*, een paar $(p, p + 2)$ met p en $p + 2$ beiden priem. Er zijn enorm grote priemtweelingen bekend. Op het Internet (zie: Twin prime [32], augustus 2009) vindt men de tweeling

$$65.516.468.355 \times 2^{333.333} \pm 1.$$

Het gaat hier om getallen van 100.355 cijfers!

Er is van geen enkele sprong bewezen dat hij oneindig vaak voorkomt. Wel hebben Goldston, Pintz en Yildirim [11] onder een zeer *sterke hypothese* aangetoond, dat oneindig vaak

$$p_{n+1} - p_n \leq 16.$$

(Voor een schets van het lange bewijs, zie Soundararajan [28].) Uit het resultaat volgt, dat er tenminste één sprong ≤ 16 oneindig vaak moet voorkomen.

De sterke hypothese van [11] gaat terug op Elliott en Halberstam [6]. Hij houdt in, dat alle rekenkundige rijen die daarvoor in aanmerking komen, in een bepaalde zin evenveel priemgetallen bevatten, mits men met gewogen aantallen werkt. Een zwakkere vorm van die hypothese is bewezen.

Hoeveel sprongen 2 verwacht men tot x ?

Wat is de kans dat een paar getallen $(n, n+2)$, met $n+2 \leq x$, of $n \leq x$, een priemtweeling is? We gebruiken de notatie $\pi_2(x)$ voor het aantal priemtweelingen $(p, p+2)$ met $p \leq x$.

Stel dat de priemgetallen min of meer *volgens toeval* verdeeld zijn onder de gehele getallen. Dan is de kans dat een willekeurige $n \leq x$ priem is, ongeveer gelijk aan $1/\log x$. Inderdaad, het aantal priemgetallen $\leq x$ is gelijk aan $\pi(x)$, en het aantal gehele getallen $\leq x$ is gelijk aan $[x]$, het gehele deel van x . Voor het quotiënt geldt dus wegens de priemgetalstelling,

$$\frac{\pi(x)}{[x]} \sim \frac{x/\log x}{[x]} \sim \frac{1}{\log x}.$$

De kans dat $n+2$ priem is zou ook ongeveer $1/\log x$ zijn, dus de kans, dat ze allebei priem zijn, is ongeveer $1/\log^2 x$. Men zal dus verwachten, dat $\pi_2(x)$ in de buurt van $x/\log^2 x$ moet liggen.

Natuurlijk deugt deze redenering niet echt. Als n even is kunnen n en $n+2$ niet allebei priem zijn. Voor oneven $n > 2$ zijn de kansen dat n en $n+2$ allebei priem zijn niet onafhankelijk. Maar men kan correcties aanbrengen; zie de artikelen van Pólya [26] en Soundararajan [28], en het boek van Tenenbaum en Mendès France [31]. Zo kan men het beroemde Hardy–Littlewood vermoeden [13] voor $\pi_2(x)$ hieronder plausibel maken. Die auteurs gebruikten in 1923 overigens een andere redenering, gebaseerd op hun (toen nieuwe) cirkelmethode.

Vermoeden 4 [Hardy en Littlewood]. *Men heeft*

$$\pi_2(x) \sim K_2 \frac{x}{\log^2 x} \quad \text{als } x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Hier wordt de constante K_2 (meestal geschreven als $2C_2$) gegeven door

$$K_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \prod_{p \text{ priem}, p > 2} \frac{1-2/p}{(1-1/p)^2}$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{15}{16} \times \frac{35}{36} \times \frac{99}{100} \times \dots \\ \approx 1.32032.$$

Numerieke berekeningen zijn in goede overeenstemming met bovenstaand vermoeden, maar het is beter om de vergelijkingsfunctie $x/\log^2 x$ in (5) te vervangen door de logaritmische integraal van de orde twee:

$$\text{li}_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \sim \frac{x}{\log^2 x}.$$

Zie Tabel 2, en tellingen van Nicely [24] voor x lopend tot 10^{16} . Op het Internet wordt ook een telling tot 10^{18} vermeld; zie Twin prime [32]. De tellingen suggereren, dat analoog met (3):

$$\begin{aligned} &\text{de afwijking } |\pi_2(x) - K_2 \text{li}_2(x)| \\ &\text{is niet veel groter dan } \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Met behulp van een verfijnde zeefmethode heeft Jie Wu [33] bewezen dat $\pi_2(x) < (3.4)K_2x/\log^2 x$ voor alle grote x .

Algemene priemparen $(p, p+2r)$

Hardy en Littlewood stelden ook een vermoeden op voor de telfunctie $\pi_{2r}(x)$ van algemene priemparen $(p, p+2r)$ met $p \leq x$. Dat vermoeden luidt als volgt: voor $x \rightarrow \infty$ heeft men

$$\pi_{2r}(x) \sim K_{2r} \text{li}_2(x) \sim K_{2r} \frac{x}{\log^2 x},$$

waar

$$K_{2r} \stackrel{\text{def}}{=} K_2 \prod_{p|r, p>2} \frac{p-1}{p-2}. \quad (6)$$

(Het gaat hier om een product over de *verschillende* oneven priemfactoren van r .) In het bijzonder geldt $K_4 = K_2$, $K_6 = 2K_2$, $K_{30} = \frac{8}{3}K_2$, $K_{210} = \frac{16}{5}K_2$. Met de speciale waarde

$$2r = P_q \stackrel{\text{def}}{=} p_1 p_2 \cdots p_q,$$

het product van de eerste q priemgetallen, correspondeert de constante

$$K_{P_q} = K_2 \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{p_q - 1}{p_q - 2},$$

die groter is dan de constanten voor naburige waarden van $2r$; zie sectie ‘De meest voorko-

$2r \backslash x$	10^4	10^8	10^{12}	K_{2r}/K_2
2	205	440312	1870585220	1
4	203	440258	1870585459	1
6	411	879908	3741217498	2
8	208	439908	1870580394	1
10	270	586811	2494056601	4/3
12	404	880196	3741051790	2
14	245	528095	2244614812	6/5
22	226	489085	2078443752	10/9
30	536	1173934	4988150875	8/3
210	641	1409150	5985825351	16/5
$L_2(x)$:	214	440368	1870559867	

Tabel 2 $\pi_{2r}(x)$ voor speciale waarden $2r$ en x

mende sprongen’. Voor $q \rightarrow \infty$ gaat de constante K_{P_q} naar oneindig, terwijl de volledige rij $\{K_{2r}\}$ middellwaarde 2 heeft. In een formule uitgedrukt:

$$(K_2 + K_4 + \cdots + K_{2N})/N \rightarrow 2 \quad \text{als } N \rightarrow \infty.$$

Een eenvoudig bewijs van deze formule staat in een recente preprint van Van de Bult en Korevaar [3]. Goede schattingen voor het verschil tussen het linkerlid en het rechterlid waren overigens al veel vroeger gevonden door Bombieri en Davenport [2], en Friedlander en Goldston [9].

Berekeningen van $\pi_{2r}(x)$ met $2r \leq 5 \cdot 10^3$ en $x = 10^3, 10^4, \dots, 10^{12}$ ondersteunen het Hardy–Littlewood vermoeden; vergelijk Tabel 2. (Voor een uitvoeriger tabel, zie Korevaar en Te Riele [19].) De laatste regel in de tabel geeft (afgeronde) waarden $L_2(x)$ van de vergelijkingsfunctie $K_2 \text{li}_2(x)$ voor $\pi_2(x)$.

In het bijzonder ziet men uit de tabel dat voor grote x ,

$$\pi_4(x) \approx \pi_2(x), \quad \text{en} \quad \pi_6(x) \approx 2\pi_2(x). \quad (7)$$

Onderzoeksprobleem. Men is nog ver verwijderd van een bewijs van het algemene Hardy–Littlewood vermoeden. Maar zou men met een slimme aanpak, en aannemend dat $\pi_2(x) \rightarrow \infty$, de relaties (7) direct kunnen bewijzen?

Opmerking 5. Uit het werk van Montgomery [22] blijkt, dat er een subtiel verband is tussen de Hardy–Littlewood vermoedens en de fijne verdeling van de complexe nulpunten van de zetafunctie; zie ook Korevaar [18].

Sprongen van de algemene vorm $2r$

We kunnen nu iets zeggen over sprongen in de rij priemgetallen van de vorm $2r$; vergelijk Erdős en Straus [8].

Stelling 6. Als de Hardy–Littlewood vermoedens voor de telfuncties $\pi_{2r}(x)$ waar zijn, komt elke even sprong $2r$ oneindig vaak voor in de rij priemgetallen. Het aantal sprongen

$2r$ tot x , notatie $s_{2r}(x)$, zal zelfs asymptotisch gelijk zijn aan $\pi_{2r}(x)$.

We verifiëren dit voor het geval $2r = 6$. Stel dus dat

$$\pi_6(x) \sim K_6 x / \log^2 x \quad \text{als } x \rightarrow \infty.$$

Dan geldt ook

$$\pi_6(x - 6) \sim K_6 x / \log^2 x.$$

Beschouw nu een willekeurig priempaar $(p, p+6)$ met $p+6 \leq x$. Als er een priemgetal ligt tussen p en $p+6$ hebben we een priemtriplet $(p, p+2, p+6)$ of $(p, p+4, p+6)$. Het aantal daarvan met $p+6 \leq x$ is echter van lagere orde dan $x/\log^2 x$, namelijk, $\leq Cx/\log^3 x$. [De auteur dankt D.R. Heath-Brown voor de volgende algemene verwijzing. Voor gegeven ongelijke getallen $r_j \geq 0$ staat er in Halberstam en Richert [12], sectie 5.7, een bovengrens $Cx/\log^k x$ voor het aantal priem k -tupletten $\{p+2r_1, \dots, p+2r_k\}$ met $p \leq x$.] Het aantal priemparen $(p, p+6)$ met $p+6 \leq x$, waarbij er geen priemgetal ligt tussen p en $p+6$, is dus ook asymptotisch gelijk aan $K_6 x / \log^2 x$.

Onderzoeksprobleem. Zou men met behulp van slim zeven misschien kunnen bewijzen, dat als er oneindig veel priemparen $(p, p+6)$ zijn, er ook oneindig veel sprongen 6 moeten zijn in de rij priemgetallen? Priemtripletten zouden altijd zeldzamer moeten zijn dan priemparen!

Opmerking 7. We zullen in het volgende zien, dat sprongen van de speciale vorm

$$p_{n+1} - p_n = 2r = P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$$

(met vaste q)

een bijzondere rol spelen.

De meest voorkomende sprongen

We zagen in de inleiding dat bij de priemgetallen ≤ 1000 , de sprong 6 het meest voorkomt. De sprong die tot x het meest optreedt noemen we de *favoriete sprong* tot x . Men kan uit Tabel 1 afleiden, dat 2 en 4 afwisselend favoriet zijn voor $3 \leq x \leq 173$. Voor $x = 179$ komt 6 er even bij. Vanaf $x = 379$ gaat 6 echt als favoriet meedoen. Voor $x = 941$ deelt 4 voor het laatst de eer met 6. In het verleden heeft men wel gedacht, dat 6 vanaf $x = 947$ altijd de favoriete sprong zou blijven.

Onder aanname van de Hardy–Littlewood vermoedens konden Erdős en Straus in 1980

[8] echter laten zien dat dit niet waar is:

Stelling 8. De meest voorkomende sprong in de rij priemgetallen tot x gaat naar oneindig wanneer $x \rightarrow \infty$.

Bewijs. Uit de Hardy–Littlewood vermoedens volgt dat voor $P_q = p_1 \cdots p_q$ geldt

$$\pi_{P_q}(x) \sim K_{P_q} \frac{x}{\log^2 x}.$$

Bekijk nu de priemparen $(p, p+P_q)$ met $p \leq x$. Als er een priemgetal p' ligt tussen p en $p+P_q$ hebben we te maken met een priemtriplet $(p, p', p+P_q)$, waarbij $p \leq x$. Voor zulke tripletten zijn er bij gegeven p maar eindig veel mogelijkheden, en het totale aantal van die tripletten is dus $\leq Cx/\log^3 x$; zie sectie ‘Sprongen van de algemene vorm $2r$ ’. Het aantal priemparen $(p, p+P_q)$ met $p \leq x$, waarbij $p+P_q$ het eerste priemgetal is na p , is dus asymptotisch gelijk aan $\pi_{P_q}(x)$. Hieruit volgt, dat voor het aantal $s_{P_q}(x)$ van de sprongen P_q in de rij priemgetallen tot x geldt

$$s_{P_q}(x) \sim K_{P_q} \frac{x}{\log^2 x}.$$

We laten nu zien dat voor elk even getal $2r < P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$ geldt

$$K_{2r} < K_{P_q}. \quad (8)$$

Voor een bewijs van (8) mag men aannemen, dat de verschillende priemfactoren van $2r$ allemaal maar één keer voorkomen, zodat

$$2r = p_1 p_{n_2} \cdots p_{n_m}, \quad (9)$$

met $p_1 = 2 < p_{n_2} < \cdots < p_{n_m}$.

Inderdaad, stel dat

$$2r = p_1^{\alpha_1} p_{n_2}^{\alpha_2} \cdots p_{n_m}^{\alpha_m},$$

waarbij tenminste één exponent α_j groter is dan 1. Definieer nu

$$2r' = p_1 p_{n_2} \cdots p_{n_m}.$$

Dan geldt $2r' < P_q$, en uit (6) volgt dat $K_{2r'} = K_{2r}$. In het bewijs van (8) kan men dan r vervangen door r' .

We gaan verder met (9) en $2r < P_q$. Er zijn nu twee mogelijkheden. Als $p_{n_2} = p_2, \dots, p_{n_m} = p_m$ moet $m < q$, en dan volgt (8) meteen uit (6). In het andere geval kijken we naar de eerste factor p_{n_k} die verschilt van p_k , dus groter is. Dan vervangen

we p_{n_k} door p_k en krijgen zo een product $2r'' < 2r < P_q$; de corresponderende constante $K_{2r''}$ is groter dan K_{2r} . Zo doorgaande krijgen we tenslotte een product $2r^*$ van verschillende priemfactoren, dat kleiner is dan P_q . De bijbehorende constante is groter dan K_{2r} , maar zal kleiner zijn dan K_{P_q} . Hiermee is (8) bewezen.

Als gevolg zal voor elke gekozen $2r < P_q$ en $x \geq$ zekere x_{2r} ,

$$s_{2r}(x) < s_{P_q}(x).$$

Een sprong $2r < P_q$ kan dus niet de favoriete sprong zijn tot x wanneer $x \geq \max x_{2r}$ voor $2r < P_q$. De favoriete sprong moet dan minstens gelijk zijn aan P_q . $\square$

In 1999 hebben Odlyzko, Rubinstein en Wolf [25] laten zien, dat de sprong 6 de eervan favoriet (in hun terminologie: ‘jumping champion’) moet overdragen aan 30 in de buurt van $x = 1.7 \times 10^{35}$. Vervolgens zou 30 als favoriet ontroond worden door 210 in de buurt van $x = 10^{425}$. Zij spraken het vermoeden uit, dat de favoriete sprongen in de regel gevormd worden door de getallen $P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$, en dit over zeer lange intervallen van steeds grotere x . Het is echter niet duidelijk wat er precies gebeurt bij de overgangen.

Goldston en Ledoan [10] hebben recent bewezen, dat voor elke q , en voor alle $x \geq$ heel grote x'_q , de favoriete sprongen deelbaar moeten zijn door het product $P_q = p_1 p_2 \cdots p_q$.

Bijzondere patronen van sprongen

De sprong 2 kan niet twee keer achtereenvolgens voorkomen in de rij priemgetallen. Immers, van elk drietal getallen $n, n+2, n+4$ is er één door drie deelbaar. Hetzelfde geldt bijvoorbeeld voor sprongen 4, 8, 10, 14, 16.

Sprongen 6 kunnen twee keer en zelfs drie keer achter elkaar voorkomen. Zie bijvoorbeeld het rijtje opeenvolgende priemgetallen 251, 257, 263, 269. Drie opeenvolgende sprongen 12 of 18 lijken ook te kunnen. Vier keer achtereenvolgens een sprong 6 kan echter niet. (Waarom niet?)

Zij nu $R = \{2r_1, 2r_2, \dots, 2r_k\}$ een toenemend rijtje van k niet-negatieve even getallen. Stel dat we willen onderzoeken of de getallen in het k -tuplet $R_n = \{n + 2r_1, n + 2r_2, \dots, n + 2r_k\}$ allemaal priem kunnen zijn. Voor een gegeven priemgetal p definiëren we $v_R(p)$ als het aantal verschillende restklassen (mod p) dat door R wordt bezet. Als $v_R(p) = p$ voor een of ander priemgetal p (dat wil zeggen, alle restklassen bezet), dan

is voor elke n minstens een van de getallen in R_n door p deelbaar. In dat geval kunnen er hoogstens eindig veel k -tupletten R_n geheel uit priemgetallen bestaan.

Voor het bestaan van oneindig veel priem-tupletten R_n is dus *nodig*, dat $v_R(p) < p$ voor alle priemgetallen p .

Hardy en Littlewood [13] spraken het vermoeden uit, dat deze voorwaarde ook *vol-doende* is voor het bestaan van oneindig veel priem-tupletten R_n . Preciezer luidt hun algemene vermoeden als volgt:

Vermoeden 9. Zij $\pi_R(x)$ het aantal priem-tupletten R_n met $n \leq x$. Dan geldt voor $x \rightarrow \infty$,

$$\pi_R(x) \sim K(R) \operatorname{li}_k(x),$$

waar

$$\operatorname{li}_k(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log^k t} \sim \frac{x}{\log^k x},$$

en

$$K(R) = \prod_{p \text{ priem}} \frac{1 - v_R(p)/p}{(1 - 1/p)^k}.$$

Het oneindige product is absoluut convergent. Dit volgt uit het feit dat $v_R(p) = k$ voor alle $p > 2r_k$, zodat voor $p \rightarrow \infty$,

$$\{1 - v_R(p)/p\}/(1 - 1/p)^k = 1 + O(1/p^2).$$

Toepassing. Als het algemene Hardy–Littlewood vermoeden waar is, dan zullen er oneindig vaak vijf opeenvolgende sprongen 30 voorkomen. Het aantal van die vijftallen tot x zal asymptotisch gelijk zijn aan een positieve constante maal $x/\log^6 x$. Algemener zullen er oneindig vaak $(p_{n+1} - 2)$ opeenvolgende sprongen van de grootte $P_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ voorkomen, enzovoort.

Voor een bewijs in het geval van $P_3 = 30$ beschouwt men het rijtje

$$R = \{0, 30, 60, 90, 120, 150\}.$$

Hiervoor geldt $v(2) = v(3) = v(5) = 1$, dus $v(p) < p$ voor alle priemgetallen p . Het aantal priemzestallen

$$\{p, p+30, p+60, p+90, p+120, p+150\} \quad (10)$$

met $p \leq x$ zal dan asymptotisch gelijk zijn aan $K(R)x/\log^6 x$ (Hardy–Littlewood). Wanneer er nog een extra priemgetal is tussen p en $p+150$ hebben we te maken met een priemzevental. Er kunnen zulke zeventallen voorkomen van verschillende patronen, maar het totale aantal daarvan met $p \leq x$ is hoogstens van de orde $x/\log^7 x$; zie sectie ‘Sprongen van de algemene vorm $2r$ ’. Het aantal priemzestallen (10) *zonder* een tussenliggend zevende priemgetal is dus ook asymptotisch gelijk aan $K(R)x/\log^6 x$.

Referenties

- C. Bays en R. Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \operatorname{li}(x)$* . Math. Comp. **69** (2000), 1285–1296.
- E. Bombieri en H. Davenport, *Small differences between prime numbers*. Proc. Roy. Soc. Ser. A **293** (1966), 1–18.
- F.J. van de Bult en J. Korevaar, *Mean value one of prime-pair constants*. Zie arXiv:0806.1667v1 [math.NT], June 2008.
- H. Cramér, *On the order of magnitude of the differences between consecutive prime numbers*. Acta Arith. **2** (1936), 396–403.
- H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*. Academic Press, New York, 1974.
- P.D.T.A. Elliott en H. Halberstam, *A conjecture in prime number theory*. Symposia Mathematica, vol. 4 (INDAM, Rome, 1968/69), pp 59–72. Academic Press, London.
- P. Erdős, *On the difference of consecutive primes*. Quart. J. Math. Oxford, Ser (2) **6** (1935), 124–128.
- P. Erdős en E.G. Straus, *Remarks on the differences between consecutive primes*. Elem. Math. **35** (1980), 115–118.
- J.B. Friedlander en D.A. Goldston, *Some singular series averages and the distribution of Goldbach numbers in short intervals*. Illinois J. Math. **39** (1995), 158–180.
- D. Goldston en A.H. Ledoan, *Jumping champions and gaps between consecutive primes*. Zie arXiv:0910.2960v1 [math.NT], 15 Oct 2009.
- D. Goldston, J. Pintz en C.Y. Yildirim, *Primes in tuples. I*. Ann. of Math. (2) **170** (2009), 819–862.
- H. Halberstam en H.-E. Richert, *Sieve methods*. Academic Press, London, 1974.
- G.H. Hardy en J.E. Littlewood, *Some problems of 'partitio numerorum' III, On the expression of a number as a sum of primes*. Acta Math. **44** (1923), 1–70.
- D.R. Heath-Brown, *Prime number theory and the Riemann zeta-function*. Recent perspectives in random matrix theory and number theory, 1–30. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 322, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- A.E. Ingham, *The distribution of prime numbers*. Reprint of the 1932 original, with a foreword by R. C. Vaughan. Cambridge Univ. Press, 1990.
- J. Korevaar, *Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling*. Nieuw Arch. Wiskd. (5) **5** (2004), 284–291.
- J. Korevaar, *Tauberian theory, a century of developments*, Grundlehren der Math. Wiss. vol. 329, Springer, Berlin, 2004.
- J. Korevaar, *Prime pairs and the zeta function*. J. Approx. Theory **158** (2009), 69–96.
- J. Korevaar en H.J.J. te Riele, *Average prime-pair counting formula*. Math. Comp. **79** (2010), 1209–1229.
- J.E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*. C.R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1869–1872.
- H. Maier en C. Pomerance, *Unusually large gaps between consecutive primes*. Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), 201–237.
- H.L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, in: Analytic Number Theory (Proc. Symp. Pure Math., vol. 24), pp 181–193, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
- T.R. Nicely, *New maximal prime gaps and first occurrences*. Math. Comp. **68** (1999), 1311–1315.
- T.R. Nicely, *Enumeration of the twin-prime pairs to 10^{16}* . Zie http://www.trnicely.net/twins/t2_20000.htm, en ook <http://www.trnicely.net/twins/twins.html>.
- A. Odlyzko, M. Rubinstein en M. Wolf, *Jumping champions*. Experiment. Math. **8** (1999), 107–118.
- G. Pólya, *Heuristic reasoning in the theory of numbers*. Amer. Math. Monthly **66** (1959), 375–384.
- R.A. Rankin, *The difference between consecutive prime numbers*. J. London Math. Soc. **13** (1938), 242–247.
- K. Soundararajan, *Small gaps between prime numbers: The work of Goldston–Pintz–Yildirim*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **44** (2007), 1–18.
- Table of prime numbers 2 – 9999. <http://doc.trolltech.com/2.3/primes.html>.
- Table of prime numbers 1 – 100000. <http://www.achemar.btinternet.co.uk/primes.html>.
- Tenenbaum, G. en Mendès France, M., *The prime numbers and their distribution*. Student Math. Library vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. (Vertaling van de Franse editie uit 1997.)
- Twin prime, http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime; Twin Primes, <http://mathworld.wolfram.com/TwinPrimes.html>.
- Jie Wu, *Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem*. Acta Arith. **114** (2004), 215–273.

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
g.cornelissen@uu.nl

Klaas Landsman

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
landsman@math.ru.nl

Walter van Suijlekom

IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
waltervs@math.ru.nl

Interview Alain Connes

The flashes of insight never came for free

The 'Fellowship of Geometry and Quantum Theory' (GQT), one of the four mathematics clusters in the Netherlands, marked the end of its initial four-year funding period with a conference at Nijmegen in June. One of the speakers at this conference was Fields Medallist Alain Connes, who may be regarded as one of the intellectual fathers of the cluster. GQT-members Gunther Cornelissen, Klaas Landsman, and Walter van Suijlekom interviewed Connes on June 29, 2010.

Alain Connes (1947) is among the few mathematicians who created an entire area of math-

ematics. Roughly speaking, Connes's *non-commutative geometry* [2, 4] is a synthe-

sis and generalization of two seemingly unrelated areas of mathematics, namely operator algebras on Hilbert spaces (see box below) and a branch of differential geometry called *spin geometry* (see box on next page). Both topics emerged from a close interaction of mathematics and quantum physics, which happens to be the central theme of the GQT-

Noncommutativity

The history of noncommutative geometry goes back to the period 1900–1930, during which both mathematics and physics were revolutionised. In the former, functional analysis emerged (cf. [1, 6]), whilst in the latter quantum mechanics was discovered [12]. The key idea behind functional analysis is to look at functions as points in some infinite-dimensional (topological) vector space, rather than individually, as in classical analysis. A sound physical principle underlying quantum mechanics remains to be found, but the two main mathematical properties of the new theory were as follows. First, in 1925 Heisenberg discovered that whereas in classical physics the *observables* (like position, momentum, and energy) are represented by functions (on a so-called phase space), in quantum mechanics they are (typically infinite-dimensional) *matrices*. In particular, as Heisenberg observed, quantum-mechanical observables no longer commute (under multiplication). Second, in 1926 Schrödinger proposed that *states* of

a physical system (which assign values to observables) are ('wave') *functions* (rather than points in phase space).

Heisenberg was a postdoc in Göttingen at the time, where Hilbert ran a seminar on the mathematical structure of the new quantum mechanics. In this context, it was Hilbert's assistant von Neumann (originally employed to help Hilbert with his work on the foundations of mathematics) who at one stroke saw the connection between functional analysis and quantum mechanics, as well as between Heisenberg's and Schrödinger's ideas. In a nutshell, Heisenberg's matrices were to be regarded as linear operators on some vector space, whose elements were Schrödinger's wavefunctions. The inner product that defines a Hilbert space ultimately yields all probabilities characteristic of quantum mechanics. (At a heuristic level, similar ideas had been forwarded by the physicist Dirac [7].) In honour of his mentor, the specific topological vector spaces needed in quantum mechanics were called *Hilbert spaces* by von

Neumann, who published his work on quantum mechanics in 1932 [13].

Inspired by this development, Weyl (another pupil of Hilbert's) saw that Hilbert spaces formed an ideal setting for the theory of group representations, which turned out to play a crucial role in studying symmetries of quantum systems. The ensuing combination Hilbert space–quantum mechanics–group representations (and also ergodic theory) led von Neumann to the theory of *operator algebras* on Hilbert spaces (written down in a series of papers published between 1936 and 1949, partly with his assistant F.J. Murray). Such algebras — currently known as *von Neumann algebras* — generalize the addition and multiplication of complex matrices to infinite dimension and turn out to have an amazingly rich structure. An important extension of the class of operator algebras defined by von Neumann was introduced by Gelfand and Naimark in 1943 under the name of *C*-algebras*; the three books of Takesaki [15] present an exhaustive survey.

Spin geometry

Spin geometry is a refinement of Riemannian geometry, a subject created by Bernhard Riemann in his (meanwhile) legendary Habilitation lecture ‘Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen’, delivered in Göttingen in 1854. In this lecture, Riemann proposed a vast generalization of the non-Euclidean geometries that had independently been discovered earlier that century by Gauss (unpublished), Bolyai, and Lobachevsky. Riemann’s concept of geometry was based on an infinitesimal version of Pythagoras’s Theorem, so as to provide distances between points. Since “ $a^2 = b^2 + c^2$ ”, this had the consequence that geometric quantities tend to be *quadratic* in coordinates and/or derivatives. For example, for any Riemannian geometry the Laplacian $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ may be intrinsically defined as a second-order

partial differential operator.

Through the Laplacian, the Schrödinger equation for the quantum-mechanical wave-function contains second-order derivatives for the spatial coordinates, but it only involves a first-order derivative in time. This unequal treatment of space and time coordinates bothered various physicists in the late 1920’s, because it precludes consistency with Einstein’s theory of (special) relativity. Through sheer guesswork, in 1928 Paul Dirac found an equation (now named after him) that is *first-order* in all coordinates, at the price of extending (scalar) wave-functions to four-component *spinors*.

Dirac’s equation turned out to have sensational consequences in physics (like the prediction of antimatter), but it also interested mathematicians. Through contributions by Hermann Weyl, Charles Ehresmann

and others, this interest eventually led to the discovery of a special class of Riemannian manifolds called *spin manifolds*, which admit geometric quantities that are *first-order* in the coordinates and/or derivatives. In particular, the (generalized) Dirac equation for spinors on such manifolds was first written down in 1963 by Michael Atiyah and Isadore Singer. Atiyah and Singer were actually unaware of Dirac’s original equation; their contribution was made in the (then) purely mathematical context of *index theory*, for which they would receive the Abel Prize in 2004, cf. [10]. In any case, spin geometry, the Dirac equation, and index theory are closely related [11], and it is their combination that Connes in turn combined with the theory of operator algebras in creating noncommutative geometry.

cluster.

In order to combine operator algebras and spin geometry, Connes invented a whole arsenal of new techniques and ideas, drawing also from other areas of mathematics (like homological algebra and algebraic topology). An important feature of his work is the interplay between abstract theory and examples. The ensuing theory of ‘noncommutative geometry’ turned out to have a wide range of applications, both in mathematics (ranging through algebra, analysis, geometry, number theory, and stochastics) and physics (especially in

solid state physics and elementary particle physics).

Besides Connes’s own book [2] and his book with Marcolli [4], a good place to start is [9]. In the Netherlands, so far there have been two MRI Master Classes specifically devoted to teaching noncommutative geometry to advanced M.Sc. students: the first was in 2003–2004, and the second took place in 2009–2010. To the surprise and delight of the participants (coming from all over the world), the closing dinner of the latter was attended by Connes himself!

Early days

Connes’s early work, for which he was awarded the Fields Medal in 1982, was concerned with the classification of von Neumann algebras.

This wasn’t a fashionable area at the time. One might even say that operator algebras formed a rather introverted and isolated area of mathematics. It would have been more natural for a talented young mathematician in Paris to go to Grothendieck. Weren’t you attracted by him?

“I started research in 1970 and at that time I was actually *repelled* by the intellectual arrogance of the followers of Grothendieck. I never liked fashionable subjects and tried to find an area of mathematics as remote as possible from algebraic geometry.”

Decades later, Connes had a change of heart towards Grothendieck, both personally and mathematically. Although they never met, Connes came to appreciate Grothendieck’s personality through the latter’s autobiographical memoir *Récoltes et Semailles*, and in addition noncommutative geometry and algebraic geometry turned out to have surprising relevance to each other [4].

Presumably Gelfand must have been one of your favourite mathematicians? Did you have much contact with him?

“Neither. Sure, we met and discussed mathematics a couple of times. But I found him difficult to interact with. Of course, mathematically he was a big influence and quite often one step ahead. In operator algebras I



Foto: Bert Beelen

Connes during his lecture in Nijmegen, June 29, 2010

“Time emerges from noncommutativity”

Some familiarity with Hilbert spaces (assumed separable for simplicity) and operator theory is assumed in this box.

If $\mathcal{M}$ is some set of bounded operators on a Hilbert space H , the *commutant* $\mathcal{M}'$ of $\mathcal{M}$ consists of all bounded operators on H that commute with all elements of $\mathcal{M}$. We say that $\mathcal{M}$ is a *von Neumann algebra* if $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Indeed, such an $\mathcal{M}$ is automatically closed under addition and multiplication of operators, with the further properties that $A^* \in \mathcal{M}$ whenever $A \in \mathcal{M}$ (where A^* is the Hermitian conjugate or adjoint of A), and if $A_n \Psi \rightarrow A\Psi$ for all $\Psi \in H$, and $A_n \in \mathcal{M}$ for all n , then $A \in \mathcal{M}$ (in other words, $\mathcal{M}$ is strongly closed). Conversely, if $\mathcal{M}$ satisfies all these closure properties and contains the unit operator, then $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$: this *bicommutant theorem* is the earliest result about von Neumann algebras.

A problem to which Connes made decisive contributions already in his PhD thesis is the classification of von Neumann algebras up to algebraic isomorphism. In that context, it may be assumed without loss of generality that the Hilbert space H on which $\mathcal{M}$ acts contains a vector Ω that is *cyclic* and *separating* for $\mathcal{M}$, in that $\mathcal{M}\Omega = \{A\Omega, A \in \mathcal{M}\}$ is dense in H , and $A\Omega = 0$ for $A \in \mathcal{M}$ implies $A = 0$, respectively. (For example, if $H = \mathbb{C}^n$, then $\Omega = (1, \dots, 1)$ is cyclic and separating for the algebra of all diagonal matrices.) In that situation, Tomita defined an (unbounded) antilinear operator S by $SA\Omega = A^*\Omega$ (whose closure we denote by the same symbol). The (linear) operator $\Delta = S^*S$ then turns out to be of great interest. Since Δ is positive, for each $t \in \mathbb{R}$ the operator Δ^{it} is well defined and unitary, so that one has a ‘time-evolution’ $\sigma_t(A) = \Delta^{it}A\Delta^{-it}$ (think of $\Delta = \exp(H)$ and $\sigma_t(A) = A(t)$, in which case $\Delta^{it} = \exp(itH)$ and $A(t) = \exp(itH)A\exp(-itH)$, as in quantum mechanics). One of the main theorems of Tomita and Takesaki is that $\sigma_t(A) \in \mathcal{M}$ whenever $A \in \mathcal{M}$. Another is that $\sigma_t(A) = A$ for all $A \in \mathcal{M}$ and $t \in \mathbb{R}$ if $\mathcal{M}$ is commutative, justifying Connes’s credo that “time emerges from noncommutativity”.

In his thesis Connes took this argument one step further by analysing the dependence of this time-evolution on Ω . To state the simplest version of his result, assume that H contains two different vectors Ω_1 and Ω_2 , each of which is cyclic and sep-

arating for $\mathcal{M}$. We write $\sigma_t^i(A)$ for the time-evolution derived from Ω_i . Connes’s *Radon–Nikodym Theorem for von Neumann algebras* then states that there is a family $U(t)$ of unitary operators in $\mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$, such that

$$\sigma_t^1(A) = U(t)\sigma_t^2(A)U(t)^*; \quad (1)$$

$$U(t+s) = U(s)\sigma_s^2(U(t)). \quad (2)$$

One symbolically writes $U = D\Omega_1 : D\Omega_2$, in terms of which one has the property $(D\Omega_1 : D\Omega_2)^* = D\Omega_2 : D\Omega_1$, and, in the presence of three such vectors Ω_i , also $(D\Omega_1 : D\Omega_2) \cdot (D\Omega_2 : D\Omega_3) = (D\Omega_1 : D\Omega_3)$.

The proof of this theorem is based on the following idea. Extend $\mathcal{M}$ to $\text{Mat}_2(\mathcal{M})$, i.e., the von Neumann algebra of 2×2 matrices with entries in $\mathcal{M}$, and let $\text{Mat}_2(\mathcal{M})$ act on $H_2 = H \oplus H$ in the obvious way. Subsequently, let $\text{Mat}_2(\mathcal{M})$ act on $H_4 = H \oplus H \oplus H \oplus H = H_2 \oplus H_2$ by simply doubling the action on H_2 . The vector $(\Omega_1, 0, 0, \Omega_2) \in H_4$ is then cyclic and separating for $\text{Mat}_2(\mathcal{M})$, with corresponding operator $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_4, \Delta_3, \Delta_2)$. Here Δ_1 and Δ_2 are just the operators on H originally defined by Ω_1 and Ω_2 , respectively, and Δ_3 and Δ_4 are auxiliary operators on H . Denoting elements of $\text{Mat}_2(\mathcal{M})$ by $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, we obtain

$$\Delta^{it} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \Delta^{-it} = \begin{pmatrix} \sigma_t^{(1)}(\mathbf{A}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_t^{(2)}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

with

$$\sigma_t^{(1)}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \Delta_1^{it} A_{11} \Delta_1^{-it} & \Delta_1^{it} A_{12} \Delta_4^{-it} \\ \Delta_4^{it} A_{21} \Delta_1^{-it} & \Delta_4^{it} A_{22} \Delta_4^{-it} \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\sigma_t^{(2)}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \Delta_3^{it} A_{11} \Delta_3^{-it} & \Delta_3^{it} A_{12} \Delta_2^{-it} \\ \Delta_2^{it} A_{21} \Delta_3^{-it} & \Delta_2^{it} A_{22} \Delta_2^{-it} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

But by the Tomita–Takesaki theorems, the right-hand side of (3) must be of the form $\text{diag}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$ for some $\mathbf{B} \in \text{Mat}_2(\mathcal{M})$, so that $\sigma_t^{(1)}(\mathbf{A}) = \sigma_t^{(2)}(\mathbf{A})$. This allows us to replace $\Delta_4^{it} A_{22} \Delta_4^{-it}$ in (4) by $\Delta_2^{it} A_{22} \Delta_2^{-it}$. We then put $U(t) = \Delta_1^{it} \Delta_4^{-it}$, which, unlike either Δ_1^{it} or Δ_4^{-it} , lies in $\mathcal{M}$, because each entry in $\sigma_t^{(1)}(\mathbf{A})$ must lie in $\mathcal{M}$ if all the A_{ij}

do, and here we have taken $A_{12} = 1$. All claims of the theorem may then be verified using elementary computations with 2×2 matrices. For example, combining the identity

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

with the property $\sigma_t^{(1)}(\mathbf{AB}) = \sigma_t^{(1)}(\mathbf{A})\sigma_t^{(1)}(\mathbf{B})$, we recover (1). Using the identity

$$\begin{pmatrix} 0 & U_t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_t \end{pmatrix}$$

and evolving each side to time s , we arrive at (2).

A ‘Proof from the Book’!

Let us mention the main use of this result. An *automorphism* of $\mathcal{M}$ is a linear map $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ satisfying $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$ and $\sigma(A^*) = \sigma(A)^*$. The set of all automorphisms of $\mathcal{M}$ forms a group $\text{Aut}(\mathcal{M})$ under composition. With Ω fixed, σ_t is an automorphism of $\mathcal{M}$ for each t , and the map $t \mapsto \sigma_t$ is a group homomorphism from $\mathbb{R}$ (as an additive group) to $\text{Aut}(\mathcal{M})$. Its image $\sigma_{\mathbb{R}}$ is a subgroup of $\text{Aut}(\mathcal{M})$, which depends on Ω . However, call an automorphism σ of $\mathcal{M}$ *inner* if it is of the form $\sigma(A) = UAU^*$ for some unitary $U \in \mathcal{M}$. The inner automorphisms of $\mathcal{M}$ form a normal subgroup $\text{Inn}(\mathcal{M})$ of $\text{Aut}(\mathcal{M})$, with quotient group $\text{Out}(\mathcal{M}) = \text{Aut}(\mathcal{M})/\text{Inn}(\mathcal{M})$. Connes’s Radon–Nikodym Theorem then implies that the subgroup $\sigma_{\mathbb{R}}/\text{Inn}(\mathcal{M})$ of $\text{Out}(\mathcal{M})$ is independent of Ω , and hence is an invariant of $\mathcal{M}$. This insight formed the basis for all subsequent progress in the classification problem (largely due to Connes himself, Haagerup, and Takesaki); see [2], Chapter v.



Foto: Bert Beelen

am too young to have met von Neumann, but I was much more influenced at a personal level by the Japanese: Tomita and also Takesaki.” Minoru Tomita (1924) is a Japanese mathematician who became deaf at the age of two and, according to Connes, had a mysterious and extremely original personality. His work on operator algebras in 1967 was subsequently refined and extended by Masamichi Takesaki and is known as Tomita–Takesaki Theory (see box on previous page). It formed the es-

sential stepping stone between the first steps in the classification of von Neumann algebras taken by Murray and von Neumann, and the work of Connes. A key ingredient of Connes’s contribution was his cocycle Radon–Nikodym Theorem for von Neumann algebras, whose proof is based on a trick with 2×2 matrices (see box on previous page). “This remains my favourite result. It is very dear to me. Although at the end of the day the argument was very simple, it followed months of calcu-

lations and then came to me in a flash.”

Style of working

In a flash! Is that the way you typically arrive at crucial insights, as suggested also by Poincaré?

“Hardly. This happened extremely rarely, as it did with my idea that renormalization in quantum field theory corresponds to the Birkhoff decomposition (see box below). But even these so-called flashes of insight were

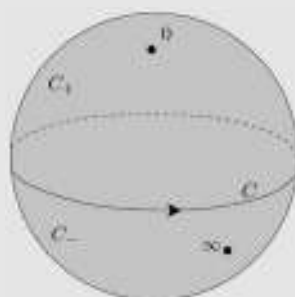
Renormalization as a Birkhoff decomposition

Quantum field theory was initially developed in the late 1920’s by Dirac, Heisenberg, and Pauli in order to describe electrodynamical processes in a quantum-mechanical way. This turned out to lead to infinities in the calculations, whose systematic removal was achieved by Feynman, Schwinger, Tomonaga, and Dyson in the late 1940’s. The procedure they introduced is called *renormalization*; the typical ‘Feynman diagrams’ displaying particle interactions have remained an important tool ever since. In the early 1970’s, ’t Hooft and Veltman succeeded in extending the Feynman diagram technique and ensuing renormalization procedure to the weak and strong nuclear interactions, earning them the Nobel Prize for Physics in 1999. A fundamental idea they introduced is *dimensional regularization*, in which Feynman diagrams are computed as a function of $z = d - 4$, where d is the dimension of space-time. The infinities then emerge as singularities in the limit $d \rightarrow 4$, or $z \rightarrow 0$, and can be removed by subtracting the singular terms in a systematic way.

Whilst physicists simply use dimension-

al regularization and renormalization as a recipe, mathematicians continue to look for a sound mathematical basis for it. In a collaboration with Dirk Kreimer, Alain Connes found a beautiful formulation in terms of a Birkhoff decomposition.

In general, a Birkhoff decomposition of a smooth invertible $n \times n$ matrix-valued function f on the unit sphere (regarded as the equator C of the Riemann sphere $\mathbb{S}$) is a product $f = f_- \cdot \delta \cdot f_+$. Here $\delta(z) = \text{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n})$ for certain integers k_i , whereas the $f_{\pm}$ are boundary values of holomorphic functions defined on the complements $C_{\pm}$ of C in $\mathbb{S}$ (i.e., the northern and southern hemispheres). In particular,



f_+ is finite at $z = 0$.

In the application to quantum field theory by Connes and Kreimer, the group of matrices in which f takes values consists of upper-triangular matrices of the form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{triangle} & & & \\ & \text{circle} & & \\ & & \text{circle} & \\ & & & \text{circle} \end{pmatrix}$$

In the first row one finds subgraphs of the graph in the upper-right corner of the matrix. Below each graph, one finds the same graph but with its subgraph(s) contracted to a vertex. Each matrix entry of $f(z)$ is to be read as the numerical value of the corresponding Feynman diagram (as given by the so-called Feynman rules), seen as a function of $z = d - 4$. This forms the basis for the systematics of renormalization: the physically relevant finite part of the diagrams in question is determined by the Birkhoff decomposition of f as $f_+(z = 0)$.



Landsman introduces Connes's lecture in Nijmegen, June 29, 2010

the culmination of massive computations, and never came for free!"

So what is the goal of these computations? Are they at least a path to structure, or to a theorem?

"Long computations are, for me, a way to get into a special state of mind, into a particular mood, in which a mental picture can slowly emerge. As a preparation I go for a long walk with a particular problem in mind, and start computing in my head, before doing it in a notebook."

We have never seen you on such a walk near Bures [i.e., Bures sur Yvette near Paris, site of the IHÉS, where Connes holds his main appointment, besides others at the College de France in Paris and Vanderbilt University in Nashville] ...

"I avoid meeting other people during such walks, especially mathematicians. I live in a remote place where I can go for a walk within a radius of 10 km around my house without meeting anyone."

So you do all your computations in your head?

"No, during such walks the framework of the computation is selected. Then I sit down and really start to compute. One of the dearest memories I have is a case where, with my collaborator and friend Henri Moscovici, we had to compute, separately and with a spirit of friendly competition, a cocycle which was a sum of about a thousand complicated terms. It took us three weeks of hard work, but at the end of the day a hidden Hopf algebra structure emerged from behind the scene."

Elsewhere, Connes describes the way he works in more detail [14]. To his amusement (see photo above), the following passage was read aloud by one of us as an introduction to Connes as a speaker at the GQT-conference; such open-

ness by a leading mathematician is rare:

"My impression is that I have never obtained anything at low cost. All my results have been preceded by preparatory ones, setting up work, a very long experimentation, hoping that at the end of this experimentation, an incredibly simple idea occurs which comes and solves the problem. And then you need to go through the checking period, almost intolerable because of the fear you have of being mistaken. I will never let anyone

believe that you can wait just like this until results come all by themselves. I spent the whole summer [of 2006] checking a formula [...] There is always this permanent fear of error which doesn't improve over the years. ... And there is this part of the brain which is permanently checking, and emitting warning signals. I have had haunting fears about this. For example, some years ago, I visited Joachim Cuntz in Germany, and on the return train I looked at a somewhat bizarre example of my work with Henri Moscovici on the local index theorem. I had taken a particular value of the parameter and I convinced myself on the train that the theorem didn't work. I became a wreck — I saw that in the eyes of the people I crossed on the suburban train to go back home. I had the impression that they read such a despair in me, they wanted to help. ... Back home, I tried to eat, but I couldn't. At last, taking my courage in both hands, I went to my office and I redid the verifications. And there was a miracle which made the theorem work out in this case. ... I have had several very distressing episodes like this."

So doing mathematics is largely a struggle. ... Your favourite composer must be Beethoven, rather than, say, Mozart, to whom

Statistical mechanics and number theory

In the language of operator algebras, a quantum system is described by a C^* -algebra A (representing the physical observables) endowed with a one-parameter group α of automorphisms of A (describing time evolution). In this context, the Gibbs equilibrium states of quantum statistical mechanics are described by an operator-algebraic condition first proposed by Haag, Hugenholtz, and Winnink in 1967, which replaces the classical notion of a partition function counting the energy levels E_i with the well-known temperature-dependent weights $\exp(-E_i/k_B T)$. The states selected by this condition are closely related to the vectors Ω in the Tomita-Takesaki theory (see box "Time emerges from noncommutativity" on one of the previous pages); for example, the time-evolution σ_t induced by Ω turns out to coincide with the physical time-evolution α_t .

In the 1990's, Jean-Benoît Bost and Alain Connes discovered a quantum statistical mechanical system with two interesting number theoretical features. The first is that its partition function is the Riemann zeta function (see box on next page). The second relates to its equilibrium states: in

the high temperature range, there is a (boring) unique equilibrium state for the system, but at a specific low temperature, there is a phase transition at which an infinite simplex of equilibrium states suddenly emerges, whose extremal points (physically corresponding to pure thermodynamic phases) are naturally indexed by... the abelianized Galois group of the rational numbers! This is an infinite topological group that plays a central role in algebraic number theory (especially in class field theory); here the relevant property is that it controls the ambiguity in distinguishing roots of the equation $X^n - 1 = 0$ in purely algebraic terms.

This discovery was followed by a phase of intense activity, trying to use the theory as a tool for the explicit determination of the maximal abelian extension of other number fields, but up to now, all results have been reformulations of known (deep) number-theoretical descriptions in terms of quantum statistical mechanics. In this language, explicit class field theory is equivalent to the description of a suitable set of algebraic generators for the C^* -algebra of the system.

Noncommutative geometry and number theory

How could a theory that has its roots in physics and differential geometry have anything to do with number theory? Historically, there have been various attempts at applying physical ideas to such elusive number-theoretical problems as the *Riemann hypothesis*, which says that all the zeros of the (analytic continuation of) the Riemann zeta function $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ with real part between 0 and 1, actually have real part equal to $1/2$. This seemingly innocuous statement is vital to many deep number-theoretical results.

As was observed by Pólya already before WW1, the Riemann hypothesis would follow if the imaginary parts of the zeros of $\zeta(s)$ would be the eigenvalues of a self-adjoint operator. But what should this operator be, or, why should it even exist? In the 1950's, Selberg observed that in the theory of Riemann surfaces, one can define a zeta function by replacing 'primes' by 'lengths of primitive geodesics' (note that shortest paths, like primes, cannot be broken up into smaller pieces), and then proved the famous *trace formula* named after him, which establishes a relation between this zeta function and the Laplace operator on

the surface. You should get excited now, because this Laplace operator is a self-adjoint unbounded operator. The main contribution of Connes from the 1990's was his use of noncommutative geometry to write down an analog of the trace formula of Selberg that is actually equivalent to the Riemann hypothesis. At this point, it was really necessary to use a *noncommutative* underlying space, since Connes's trace formula can never materialize on a usual commutative manifold.

The initial optimism that the Riemann hypothesis would now soon follow by 'just' proving the Connes trace formula from the (noncommutative) geometry of the underlying space has been converted into various high-tech long-term programs in noncommutative geometry, which increasingly seem to involve a synthesis with the algebraic and arithmetic geometry of Grothendieck and followers, and are producing interesting spin-offs—much like Kummer's theory of ideals, which failed to directly prove Fermat's Last Theorem, but produced the entire field of algebraic number theory. So let us wait and see. . .

Guillemin for foliations, and using a natural noncommutative space coming from the work with Bost, one obtained the Riemann–Weil explicit formulas as a trace formula and also a spectral realization of the zeros of zeta. The explicit formulas show very clearly that due to the archimedean places one needs not only an analogue of the curve used by Weil in his proof in characteristic p but also an ambient space, which in the above construction is noncommutative. But to transplant the geometric ideas of Weil, which we started doing in our collaboration with Consani and Marcolli, one needs another version of that construction, in which the points are concretely realized as valuations and the Galois ambiguity is completely respected. It is a very difficult problem but it has many interesting byproducts as shown in the recent work with Consani, which was the subject of my talk here." See also boxes on this and previous page.

Yuri Manin maintains that a proof of the Riemann Hypothesis that does not fit into some program would not be interesting. . .

"The hope is that this problem cannot be resolved without unfolding the hidden geometric structure of the above mysterious curve and its ambient space. I share this hope completely."

Platonism

In your book 'Triangle of thoughts' [3] you come out as an outspoken Platonist. So you think that the kind of structure we just talked about is going to be discovered, rather than invented?

"Prime numbers are as real for me as this table. For me, mathematical reality is completely analogous to physical reality."

But we are in Holland now, so we have to follow L.E.J. Brouwer in believing that mathematics is constructed by the human mind. Do you have a cogent argument for your Platonic position?

"My position comes from the very important distinction between provability and truth. This is very well explained in a book by Jean-Yves Girard [8] and it would take too long to explain here, but I urge the reader to study this book. We, mathematicians, are stuck in something like a court of justice, making deductions with limited information about an external reality which I call 'archaic reality'. In this reality, there are facts, true sentences, that are not provable in the court of justice, as shown by Gödel. Gregory Chaitin even showed that almost all true statements are not provable in the court. Anyway, the point is the existence of true — not just undecidable

his music apparently appeared from Heaven, without any effort?

"Actually, my favourite composer is Chopin. One of my ambitions remains to play all his Preludes well, especially number 8 these days. Each one is a perfectly homogeneous world of its own and has a different sound, with an implicit idea behind. It must have been a monumental struggle to manage to express these ideas so well into written music. A fascinating aspect of music — not only Chopin's, of course — is that it allows one to develop further one's perception of the passing of time. This needs to be understood much better. Why is time passing? Or better: why do we have the impression that time passes? Is it because we are immersed in the heat bath of the 3K radiation from the big bang?"

Riemann hypothesis

Connes's own research area is not as remote from such questions as one might think. Indeed, an idea he repeatedly expresses is that "time emerges from noncommutativity". Even thermodynamics arises from noncommutative geometry [5]: "Not only do [noncommutative algebras] generate their own

time, but they have features which enable you to cool them down or warm them up. You can do thermodynamics with them."

In the late 1960's, besides the work of Tomita and Takesaki, also the Dutch mathematical physicists Nico Hugenholtz and Marinus Winnink (in collaboration with Rudolf Haag) played an important role in relating operator algebras to time and thermodynamics. As Connes remarks, the ensuing link between Tomita–Takesaki Theory for von Neumann algebras and quantum statistical physics "has become an indisputable point of interaction between theoretical physics and pure mathematics" [2], p. 42. See also box "Time emerges from noncommutativity" and the box on the previous page.

In your recent book with Matilde Marcolli [4] you even develop a thermodynamical approach to number theory and the Riemann Hypothesis. You seem to have taken up the highest challenge in pure mathematics. What do you expect?

"It started with my work with Bost in the early 1990's on phase transitions on Hecke algebras. The Riemann zeta function came naturally as the partition function. Then in 1996, I showed that, using a formula due to



Foto: Bert Beelen

— but unprovable statements. Unless you understand that point it is worthless to debate about Platonism.”

Physics

What is the place of physics in this archaic reality? How do you see the relationship between physics and mathematics?

“The standard wisdom is that mathematics is the language in which physics is written and I certainly agree with that, but my hope is that the relation goes much further and that basic concepts such as the passing of time will only be really understood through the unfolding of deeper mathematics. The boundary line between physics and mathematics comes ultimately from the motivation of physicists to model reality and thus confront their predictions with experiment.”

You actually made a physical prediction from noncommutative geometry, i.e., the mass of the Higgs particle. The result was slightly off experimental bounds. How are you going to keep physicists on board?

“This prediction was based on the hypo-

thesis of the ‘big desert’, namely that there will be no new physics up to the unification scale, besides the Standard Model coupled to gravity. Thus it was a bit like trying to see a fly in a cup of tea by looking at the earth from another planetary system. But very strangely the model also predicted the correct mass of the top quark, and a surprising number of mechanisms such as the Higgs and the seesaw mechanisms. After our work in 1996 with Ali Chamseddine we gave up in 1998 because of the discovery of neutrino mixing, only to understand 8 years later that there was one case which we had overlooked, namely allowing the KO-theory dimension of the finite space to be 6 modulo 8, and which was giving for free the neutrino mixing and much better features for the model. [All this is explained in Connes’s book with Marcolli [4].] As it is now, I stopped doing such calculations and will just wait for the experiments. If supersymmetry is going to be found, it will be very hard to convince the physicists of the noncommutative geometry approach.”

But there is no contradiction between

supersymmetry and noncommutative geometry.

“You are right, but string theory would claim the ground even more than they are already doing now. In any case, the Standard Model [of elementary particle physics] is full of tricks. What we need is simplicity. I think that is what noncommutative geometry provides. The inverse line element is an operator. Its only invariants [under unitary transformations] are the eigenvalues. And these are eventually what is observed in Nature. The truth is that this simplicity is only a starting point and a lot more work would be needed to explore the quantum theory.”

Do you have a preference for mathematics over physics?

“My heart lies with both.”

At this appropriate point Connes had to leave for a dinner appointment with Sir Michael Atiyah, another speaker at the GQT-conference and a comparable source of inspiration for our cluster. ↵

References

- 1 G. Birkhoff and E. Kreyszig, The establishment of functional analysis, *Historia Mathematica* 11, pp. 258–321 (1984).
- 2 A. Connes, *Noncommutative geometry* (Academic Press, San Diego, 1994).
- 3 A. Connes, A. Lichnerowicz, and M.P. Schützenberger, *Triangle of thoughts* (American Mathematical Society, Providence, 2001).
- 4 A. Connes and M. Marcolli, *Noncommutative geometry, quantum fields and motives* (American Mathematical Society, Providence, 2008).
- 5 M. Cook, *Mathematicians* (Princeton University Press, 2009), p. 130.
- 6 J. Dieudonné, *History of functional analysis* (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- 7 P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1930).
- 8 J.-Y. Girard, *The blind spot: lectures on logic* (European Mathematical Society, 2011).
- 9 J.M. Gracia-Bondia, J.C. Varilly, H. Figueroa, *Elements of noncommutative geometry* (Birkhäuser, 2001). More concise recent introductions include J. Varilly, *An introduction to noncommutative geometry* (EMS, 2006) and M. Khalkhali, *Basic noncommutative geometry* (EMS, 2009). For a brief introduction to noncommutative geometry in Dutch see also W. van Suijlekom, Niet-commutatieve meetkunde niet-communicabel?, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/7, pp. 27–32 (maart 2006).
- 10 K. Landsman, De indexstelling van Atiyah en Singer, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/5, pp. 207–211 (2004). In Dutch.
- 11 H.B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn, *Spin geometry* (Princeton University Press, 1989).
- 12 J. Mehra and H. Reichenberg, *The historical development of quantum theory, Vols. 1–6* (Springer-Verlag, New York, 1982–2001).
- 13 J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, 1932).
- 14 G. Skandalis and C. Goldstein, Interview with A. Connes, Newsletter of the EMS 63, pp. 25–31 (2007), *ibid.* 67, pp. 29–33.
- 15 M. Takesaki, *Theory of operator algebras, Vols. I–III* (Springer, 2003).

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009

Wiskunde mengt moleculen

Kun je van tevoren uitrekenen hoe goed twee stoffen met elkaar mengen zonder dat de rekentijd uit de hand loopt? Het chemisch concern Albemarle vroeg de Studiegroep Wiskunde met de Industrie om te onderzoeken of de benaderingsmethode realistischer gemaakt kan worden.

Het van oorsprong Amerikaanse bedrijf Albemarle is een internationaal chemisch concern dat katalysatoren, fijnchemicaliën en additieven voor polymeren produceert. Afnemers zijn onder andere de olieraffinage, de landbouw-industrie, de schoonmaakindustrie en de geneesmiddelenindustrie. Het bedrijf is wereldwijd de grootste producent van de pijnstiller ibuprofen. Hoe chemicaliën mengen, is belangrijk voor de verschillende basistechnieken die het bedrijf gebruikt. Daarbij is de vraag steeds om vooraf te voorspellen hoe goed of slecht stoffen met elkaar mengen. De berekeningen dienen ook om die basistechnieken zo goed mogelijk uit te voeren, bijvoorbeeld om medicijnen goed en zuiver uit te laten kristalliseren.

Albemarle gebruikt momenteel modellen die de thermodynamische eigenschappen van een mengsel voorspellen. Ken je de thermodynamica, dan weet je hoe goed stoffen mengen. Natuurkundig gezien wordt het gemak waarmee chemicaliën met elkaar mengen vooral bepaald door de elektrostatistische wisselwerking tussen de moleculen in het mengsel. Moleculen hebben een bepaalde verdeling van elektrische lading rond zich en deze verdeling bepaalt wat de moleculen van elkaar voelen en dus hoe goed ze mengen. Door de enorme hoeveelheid moleculen die elkaar allemaal voelen, is het in de praktijk echter ondoenlijk om die wisselwerking exact uit te rekenen. Er zijn benaderingen noodzakelijk.

“Een veel gebruikte benaderingstechniek”, legt theoretisch chemicus Jaap Louwen van

Albemarle uit, “knipt het oppervlak van een molecuul denkbeeldig in stukjes. Elk stukje krijgt vervolgens een bepaalde positieve of negatieve lading toegewezen of wordt als elektrisch neutraal beschouwd. Bovendien wordt gedaan alsof die oppervlaktestukjes helemaal geen verband met elkaar hebben, iets wat in werkelijkheid wel degelijk het geval is.” Vervolgens worden alle segmenten bij elkaar gegooid en kan een computer met technieken uit de statistische mechanica uitrekenen hoe goed de losse segmenten mengen. In de vloeistof zitten de moleculen dicht op elkaar en meestal zal een segment van het ene molecuul wel een segment van een ander molecuul raken. Segmenten met een gelijke elektrische lading stoten elkaar af en segmenten met een tegengestelde lading trekken elkaar aan. De verzameling van segmenten gaat zich nu volgens de tweede wet van de thermodynamica zodanig rangschikken dat de entropie van het systeem maximaal is. In populaire termen betekent dit dat

de wanorde maximaal wordt, gegeven een totale energie. Deze methode, bekend onder de naam COSMO-RS, is ontwikkeld door Andreas Klamt van Bayer en wordt sinds 1995 toegepast.

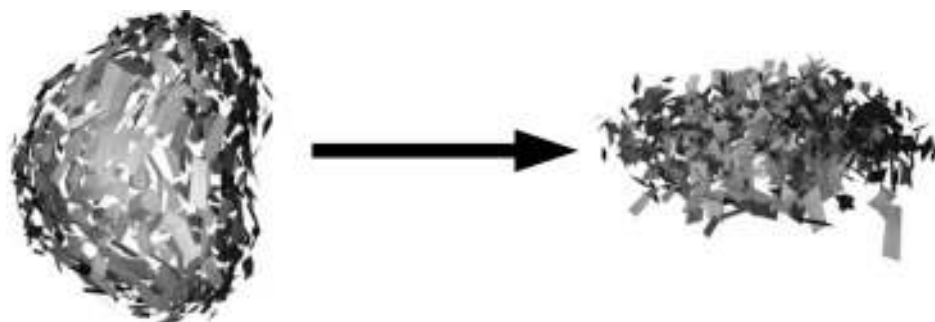
Het voordeel van COSMO-RS is dat de rekentijd beperkt blijft tot een paar seconden of minuten voor een willekeurig mengsel. Maar het nadeel is dat in deze benadering de geometrie van de moleculen volledig wordt genegeerd. Dat leidt er toe dat moleculen zich in het model soms anders gedragen dan in werkelijkheid. Louwen: “Onze vraag aan de studiegroep was om te onderzoeken of we de benaderingsmethode realistischer kunnen maken, zonder dat de rekentijd uit de hand gaat lopen.”

Lagrange multipliers

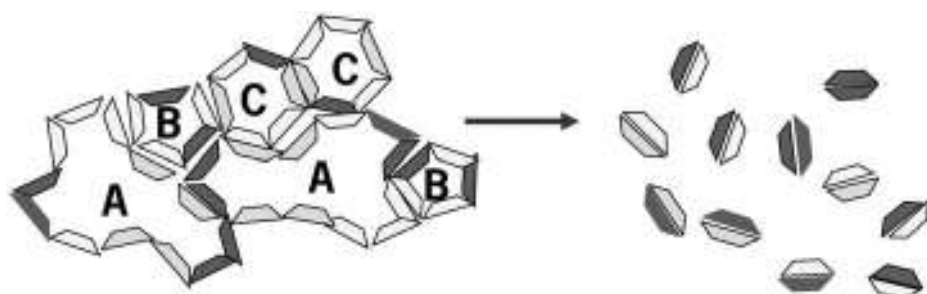
Samen met Bas van 't Hof, Lennart Ros (beiden van VORtech, Delft) en Martijn Zaal (VU) heeft hoogleraar toegepaste wiskunde Jaap Molenaar (WUR) tijdens de studieweek aan het probleem gewerkt. Hij vertelt: “Ons uitgangspunt was om de losse segmenten niet meer onafhankelijk van elkaar te beschouwen. We nemen aan dat de wisselwerking tussen twee segmenten van verschillende moleculen afhangt van de ladingsverdeling op naburige segmenten en van de lokale geometrie van het oppervlak van de betrokken moleculen.” De wiskundigen zagen echter al snel dat door het meenemen van de wisselwerking tussen de segmenten geen analytische oplossing meer gevonden kan worden. Molenaar: “Dus hebben we gezocht naar numerieke oplossingen langs twee lijnen. De belangrijkste uitdaging daarbij was om te zorgen dat de rekentijd niet uit de hand loopt. In de eerste aanpak hebben we de methode van COSMO-



Figuur 1 Schets van het oppervlak van een watermolecuul met de ladingsverdeling over het oppervlak



Figuur 2 In de standaardbenaderingsmethode COSMO-RS, worden de segmenten van een watermolecuul als het ware losgeknipt van het molecuul: het molecuul wordt gemodelleerd als een onafhankelijke verzameling van segmenten.



Figuur 3 Elk molecuul wordt opgeknipt in segmenten en het mengsel wordt beschouwd als een gas van onafhankelijke segmenten. De interacties tussen de segmenten worden bij elkaar opgeteld op een gemiddelde manier.

RS uitgebreid en in de tweede aanpak hebben we het probleem met een simulatietechniek benaderd.”

Voor de eerste aanpak gingen de wiskundigen uit van de oorspronkelijke wiskundige formulering voor de entropie van alle moleculen. Dat levert een maximalisatieprobleem onder bepaalde randvoorwaarden. Molenaar: “Een algemene methode om dit probleem op te lossen, maakt gebruik van de zogeheten Lagrange-multiplier-methode. Onze belangrijkste bijdrage was dat we die formulering zodanig hebben herschreven in matrixnotatie dat we het optimalisatieprobleem snel konden oplossen. Ik denk dat we met onze aanpak iets hebben gedaan dat de oude benaderingstheorie essentieel uitbreidt en ik vermoed dat we er zelfs samen met Albemarle over kunnen publiceren. Vooral als het gaat om moeilijke mengsels, kan het bedrijf met onze methode zeker winst boeken ten opzichte van de oude methode. De numerieke oplossing wordt binnen een minuut gevonden. Dat is belangrijk, omdat je daardoor heel veel mogelijke mengsels kunt doorrekenen.”

Simulatie

In de tweede aanpak heeft de studiegroep gekeken hoe de entropie van het systeem kan worden gemaximaliseerd via simulatie. Ook hier geldt dat het onmogelijk is om de interacties tussen alle moleculen uit het mengsel in rekening te brengen. Het vloeibare mengsel wordt opgebouwd gedacht uit een aan-

eenschakeling van doosjes, die elk genoeg moleculen bevatten om het mengsel op moleculaire schaal realistisch te representeren. Met periodieke randvoorwaarden worden de afzonderlijke doosjes als het ware aan elkaar geplakt om het volledige mengsel te beschrijven. Net als in de eerste aanpak wordt het molecuuloppervlak benaderd door het op te knippen in segmenten, die elk hun eigen lading hebben.

In een enkel doosje worden de beginposities en de beginoriëntaties van alle moleculen willekeurig gekozen. “Via een genetisch optimalisatiealgoritme worden de moleculen verschoven en gedraaid,” legt Molenaar uit, “zodanig dat de entropie stapje voor stapje wordt geoptimaliseerd. Dat probleem lijkt op een soort schuifpuzzel, waarbij je gaat schuiven met blokjes tot je uiteindelijk de gewenste rangschikking met de maximale entropie hebt bereikt.” Een extra complicatie is dat de willekeurig geplaatste moleculen elkaar in de simulatie kunnen overlappen, iets wat in werkelijkheid niet gebeurt. Vandaar dat de functie die geoptimaliseerd wordt niet alleen bestaat uit de entropie maar ook uit een ‘strafterm’ die ervoor zorgt dat de overlap van moleculen minimaal is.

Het simulatieprincipe werkt, maar de cruciale vraag is of er een genetisch algoritme is dat efficiënt genoeg werkt. Liefst moet het binnen een paar minuten een oplossing geven. Daarvoor hebben de wiskundigen voorstellen gedaan, die ze echter nog niet heb-

ben kunnen uitwerken. Dat vereist extra onderzoek en veel programmeerwerk. Wel is een eerste aanzet gegeven door een tweedimensionale simulatieaanpak te programmeren.

“Onze conclusie”, aldus Molenaar, “is dat onze eerste methode de oorspronkelijke vraag van Albemarle op een efficiënte manier beantwoordt. De simulatiemethode is echter veel algemener dan onze eerste aanpak, en zou uitgebreid kunnen worden om een mengsel in nog meer detail door te rekenen.”

Nieuwe inzichten

“We kunnen de resultaten niet morgen al toepassen,” vertelt Jaap Louwen van Albemarle over de resultaten van de studiegroep, “maar we kunnen er wel degelijk iets mee. Voor ons levert het werk van de wiskundigen een vliegende start voor vervolgonderzoek. In het *Dutch Separation Technology Institute* werken we samen met onder andere DSM, Organon en de universiteiten van Delft en Utrecht aan dit probleem. De bedoeling is dat we in een onderzoeksprogramma van dit instituut enkele promovendi verder laten werken aan allebei de onderzochte onderzoekslijnen van de studiegroep. Die promovendi zullen chemici zijn, die op hun manier natuurlijk wiskundig zijn geschoold, maar toch minder wiskunde in hun bagage hebben dan professionele wiskundigen. In het feit dat professionele wiskundigen met een bredere wiskundige achtergrond naar het mengprobleem kunnen kijken, ligt voor ons precies de toegevoegde waarde.” Wat Louwen vooraf had gehoopt, is eigenlijk precies de eerste aanpak van de studiegroep. “Die aanpak heeft een methode opgeleverd die net zo praktisch werkt als COSMO-RS, maar een hoger realiteitsgehalte heeft. Aan de aanpak van de tweede subgroep hadden we zelf helemaal niet gedacht. Ook dat toont de toegevoegde waarde van de studieweek. Het simulatiewerk geeft een interessante aanzet, maar is voor ons nu nog niet toepasbaar. In grote lijnen is het zeker iets om verder over na te denken, en er zou best wel eens meer uit kunnen rollen.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009, van 26–30 januari in Wageningen. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.swi2009.wur.nl.

Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com



Het keerpunt van Alexander Rinnooy Kan

Ik ben een omhooggevallen wiskundige

De interviewrubriek Het keerpunt draait om bepalende momenten in de loopbaan van wiskundigen. Deze keer: Alexander Rinnooy Kan, nu als voorzitter van de Sociaal Economische Raad één van de invloedrijkste mensen van Nederland. Zijn carrière vanaf zijn wiskundestudie kent verschillende keerpunten, met veel adviezen, toevalligheden en verrassingen. De ene keuze leidde haast vanzelf tot de andere: "Het was geen discontinu proces."

U studeerde wiskunde én econometrie. Waarom koos u deze twee studies?

"Econometrie was meer een nagedachte, ik ben begonnen met de studie zuivere wiskunde in Leiden. Dat was op dringend advies van Frans Oort. Hij was een vriend van de familie en wist dat ik belangstelling had voor wiskunde. Hij moedigde me aan om die richting verder te verkennen."

Waarom was uw belangstelling in wiskunde gewekt?

"Op de middelbare school had ik een erg goede wiskundeleraar die zelf was gepromoveerd. Hij liet dingen zien die je niet hoefde te weten, maar die wel prikkelden."

Herinnert u zich nog wat voor dingen dat waren?

"Eén voorbeeld dat ik me goed herinner was bij de behandeling differentiëren en integreren. We kregen het bekende lijstje: x^3 geeft $3x^2$ en andersom x^2 geeft $\frac{1}{3}x^3$. Dat lijstje kon je keurig invullen. Maar er zat een klein hiaat: bij x^{-1} werkte het niet. Toen vroeg onze leraar ons wat er voor functie bij x^{-1} zou kunnen horen. Hij tekende op het bord — en ik zie dat nog echt voor me — de

benadering van de grafiek van een functie met afgeleide x^{-1} . Hij begon in punt 1 met afgeleide 1, even verder in punt 2 had hij afgeleide $\frac{1}{2}$ enzovoorts. Onze leraar zei: "Dit ziet er een beetje uit als een logaritme, wat zou het grondtal kunnen zijn? Zo te zien ergens tussen 2 en 3." En daar liet hij het op dat moment bij. Wat hij deed was helemaal niet zo ingewikkeld, maar het prikkelde de

nieuwsgierigheid op een manier die ik ongelooflijk waardevol vind."

Beviel de studie zuivere wiskunde?

"Ik heb met heel veel plezier in Leiden gestudeerd. Aan het eind van mijn studie raakte ik geïnteresseerd in algebraïsche meetkunde, met name door Jaap Murre. Hij bood me een promotieplaats aan en na lang nadenken besloot ik het aanbod te accepteren."

Waarom aarzelde u om die promotieplaats aan te nemen?

"Ik wist niet zeker of ik voldoende talentvol was om een goed zuiver wiskundig



Alexander Rinnooy Kan

onderzoeker te worden. Ik had de studie redelijk snel gedaan en met goede cijfers, maar dat betekende nog niet dat ik ook als creatief onderzoeker goed zou functioneren. In mijn beleving was dat aspect nog niet getest tijdens de studie. Misschien was mijn zorg achteraf onterecht, dat is nu moeilijk te beoordelen. Ik heb in elk geval wat later, jaren met veel plezier en enig succes gewerkt als onderzoeker in de mathematische beslis-kunde.”

Hoe belandde u in de mathematische beslis-kunde?

“Er deed zich een wonderlijk moment voor in mijn leven. Ik studeerde af op 28 januari 1972 en een dag later werden de documenten voor mijn aanstelling in Leiden verstuurd. Maar nog een dag later, op 30 januari 1972 werd er een complete personeels-stop ingevoerd voor alle Nederlandse universiteiten — met terugwerkende kracht van één week.

Dat had voor mij vergaande consequenties. Als ik een week eerder was afgestudeerd, dan had ik hier helemaal geen last van gehad. Als ik een week later was afgestudeerd dan hadden ze er misschien nog iets op kunnen verzinnen. Maar omdat ik precies op 28 januari afstudeerde, was er geen oplossing mogelijk. Uiteindelijk heb ik het maar gezien als een vingerwijzing van hogerhand. Ik besloot me breder te oriënteren en eens naar toepassingen te kijken.

Econometrie was een voor de hand liggende eerste stap. Econoom Pieter Verdoorn — een huisvriend van mijn vader en hoogleraar in Rotterdam — had mij regelmatig duidelijk gemaakt dat dit een interessant aangrenzend gebied was. Na mijn prope-deuse in Rotterdam en kandidaatsexamen econometrie in Amsterdam was ik al half begonnen aan de doctoraalopleiding toen ik kennismakte met de mathematische beslis-kunde. Dat vond ik meteen een heel leuk vakgebied en daarin ben ik toen blijven hangen.”

Wat sprak u in dit vakgebied aan?

“Het lag tegen de toepassingen aan, maar was ook wiskundig intrigerend. Het was een betrekkelijk jong gebied en ik had het idee dat je er met wiskundige hulpmiddelen flinke stappen vooruit zou kunnen zetten. Dat bleek inderdaad te kloppen. Het waren voor de mathematische beslis-kunde jaren van snelle ontwikkeling en daar heb ik veel van mee kunnen maken.”

Toch ging u vrij snel de bestuurlijke kant van de universiteit op, u werd op uw 37ste rector magnificus in Rotterdam.

“Snel? Dat was toch tien jaar nadat ik gepromoveerd was. Ik heb eerst een erg leuk leven gehad als onderzoeker, met een in alle opzichten klassieke academische carrière. Ik was als hoogleraar ook internationaal actief en begeleidde verschillende talentvolle promovendi. Tot mijn eigen verbazing werd ik in 1986 gevraagd om rector te worden van de Erasmus Universiteit. Dat heb ik na enige aarzeling gedaan, omdat ik het een heel bijzondere kans vond.”

Was u toen al actief in bestuurlijke functies?

“Ik was voorzitter geweest van de wetenschapscommissie, maar dat kun je onmogelijk een zware bestuurlijke taak noemen. Het was eigenlijk in één keer een vrij grote stap naar het bestuur van een complexe organisatie. Kort na mijn aantreden kondigde Minister van Onderwijs Wim Deetman een grote bezuinigingsoperatie aan die de Rotterdamse universiteit hard dreigde te raken. Toen was ik gedwongen om samen met de voorzitter van het college van bestuur de politiek op te zoeken en daar te lobbyen voor het belang van de universiteit.”

Vond u dat moeilijk?

“Er was niet veel keus, het moest gebeuren. Het is wel goed verlopen, door onze gezamenlijke inspanningen is die bezuinigingsoperatie voor Rotterdam niet verschrikkelijk slecht afgelopen. Het lukte ook om een beroep te doen op de stad Rotterdam, en met name het bedrijfsleven daarin, om onze actie te steunen. Ik vermoed dat dit er toe geleid heeft dat ik weer een paar jaar later de kans kreeg om voorzitter te worden van werkgeversorganisatie VNO, wat voor mij natuurlijk al helemaal een verrassende mogelijkheid was.”

Was het een moeilijke keuze om de academische wereld te verlaten? Zo’n beslissing is vrijwel onomkeerbaar.

“Het was moeilijk maar er stond veel tegenover. Deze beslissing was ook een logisch gevolg van mijn eerdere keuze om rector te worden. Op een gegeven moment is er een vork in de weg van je leven en wandel je de ene route in, waarmee je andere routes definitief uitsluit. Ik koos toen maar voor het avontuur.”

Wat verbaasde u in uw begintijd bij VNO?

“De overgang was een geleidelijke. Ik wist

een beetje wat het betekent om verantwoordelijk te zijn voor een grote organisatie en had bovendien kennism gemaakt met de politiek. Het proces was niet helemaal discontinu. Het bedrijfsleven en de publieke sector waren wel in belangrijke mate nieuw voor mij. Ik ben nog steeds verbaasd dat mij dit krediet gegund werd, want mijn voorkennis en ervaring waren heel beperkt. Ik heb veel moeten leren in korte tijd.”

Had u daarbij nog enig voordeel van uw wiskundige achtergrond?

“Dat is altijd een lastige vraag. Wat ik in Leiden heb geleerd, heb ik nauwelijks kunnen toepassen. En toch heb ik altijd het gevoel gehad dat het een heel mooie en waardevolle vooropleiding was. Je leerde om op een vrij hoog abstractieniveau behoorlijk complexe redeneringen tot een goed einde te brengen, en om de concentratie op te brengen die daarvoor nodig is. Wiskunde is een schitterend vak met een grote, brede maatschappelijke betekenis, een superieure intellectuele discipline. Ik beschouw het als een voorrecht om met dit vak te hebben kennisgemaakt en ik betreurt het dan ook dat al vele jaren de belangstelling voor wiskunde in Nederland minder is dan zij zou moeten zijn.”

Bij toespraken geeft u uw publiek vaak een advies mee. Heeft u een advies voor de wiskundige gemeenschap?

“Ik ben me ervan bewust dat ik op enige afstand sta van de professionele wiskundige gemeenschap. Ik heb mezelf wel eens omschreven als een omhooggevalen wiskundige, ik geloof dat dat in de beeldvorming van veel wiskundigen een juiste kwalificatie is. Maar dat betekent niet dat ik niet alles zou willen doen om de positie van de wiskunde te bevorderen. Daarvoor is het nodig dat wiskundigen onophoudelijk een deel van hun tijd steken in het uitdragen van hoe fraai, veelbelovend en kansrijk hun vak is, met name in de richting van jongeren die aarzelen over hun studiekeuze. Ik ben zelf zeker wiskunde gaan studeren onder invloed van die goede wiskundeleraar en dat duwtje van Frans Oort. Ik hoop dat wiskundigen er toe bijdragen dat op middelbare scholen zo gedoceerd wordt dat dit soort keuzen zich regelmatig herhaalt.”

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar ionica.smeets@gmail.com.

Florin Olsthoorn

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
florispro@gmail.com

Derk Pik

JSG Maimonides
Postbus 87058
1080 JB Amsterdam
drpik@xs4all.nl

Nellie Verhoef

Instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
n.c.verhoef@utwente.nl

Maatschappij

De overval: Het Freudenthal Instituut

Het Freudenthal Instituut, dat in 1971 werd opgericht door de Duits-Nederlandse wiskundige Hans Freudenthal doet onderzoek naar alle aspecten van het wiskundeonderwijs. Het doel daarvan is het reken-wiskundeonderwijs op alle niveaus te verbeteren, vooral in het basisonderwijs, het voortgezet onderwijs en het beroepsonderwijs. Over reken-wiskundeonderwijs is er in Nederland veel discussie. Het Freudenthal Instituut speelt hier een belangrijke rol in. Alle reden voor het NAW om het Freudenthal Instituut eens onder de loep te nemen. De overvallers Florin Olsthoorn, Derk Pik en Nellie Verhoef werden er op 9 juli op afgestuurd.

Op een hete zomerdag, 9 juli, waren wij te gast bij het roemruchte Freudenthal Instituut (FI) in Utrecht, dat sinds lang een grote invloed heeft op alles wat te maken heeft met het Nederlandse reken- en wiskundeonderwijs en nu een hoofdrol vervult in de heftige discussies rond het rekenonderwijs.

Aan vaste lezers van het NAW kan deze discussie niet zijn ontgaan. Ze lijkt zich uit te splitsen in twee kampen: de voorstanders van het mechanistisch rekenen en de aanhangers van het realistisch rekenen, die binnen het FI sterk vertegenwoordigd zijn. Dit debat is in veel publicaties in de landelijke media groots uitgemeten waarbij de harde toon niet is geschuwd. De vertegenwoordigers van deze groepen hebben zich diep ingraven in de diverse standpunten en lijken elkaars argumenten inmiddels niet meer te horen. Het FI houdt zich echter met veel meer bezig dan realistisch rekenonderwijs. Er worden applets voor Wisweb ontwikkeld die wereldwijd een grote populariteit genieten. Men verricht wetenschappelijk onderzoek, begeleidt promovendi en verzorgt universitair onderwijs. Ook is het FI verantwoordelijk voor goed lopende

manifestaties zoals de Nederlandse Wiskunde Dagen (NWD), de wiskunde A-lympiade en de wiskunde B-dag. Het is dus hoog tijd voor een evenwichtiger beeld van het FI, haar medewerkers en de projecten die er worden uitgevoerd.

Ontvangst

We worden hartelijk ontvangen door Jan van Maanen, directeur van het instituut. We treffen hem in een door een verhuizing beheerst gebouw: het FI verhuist naar een gebouw op de Uithof, op een steenworp afstand van het Utrechtse Mathematisch Instituut. Om zijn wiskundige merites te tonen heeft hij speciaal voor ons kamer 4.14 ($\pi + 1$) uitgezocht voor het afnemen van de interviews. Het warme weer op deze mooie zomerdag zal deze ruimte in het deels onttakelde gebouw tot een ware oven maken.

Een innig verband

Onze eerste gesprekspartner, Paul Drijvers, heeft ICT-gebruik in het onderwijs als expertise. Wellicht het bekendste voorbeeld van ICT-gebruik in het onderwijs is de grafische reken-

machine (GRM). Drijvers heeft destijds aan de invoering meegewerkt.

Gevraagd naar zijn visie op het FI noemt hij de innige band in het instituut tussen de lespraktijk, de didactiek en het universitair onderwijs. Drijvers heeft heel wat ontwikkelingsonderzoek verricht. Deze stijl van onderzoek, die zo dicht mogelijk bij de praktijk ligt, is altijd populair geweest op het FI.

Het ontwikkelingsonderzoek contrasteert met het 'evidence based' onderzoek, waarin gewerkt wordt met zoveel mogelijk meetbare parameters. Drijvers verzekert ons dat beide methoden elkaar kunnen aanvullen. Op het FI wordt het ontwikkelingsonderzoek dat vaak beter tot de kern van de onderwijsproblematiek doordringt, gevolgd door meer op objectiviteit gericht evidence based onderzoek, zoals in twee lopende studies in het kader van het programma *Onderwijsbewijs*.

De GRM

Als het gesprek op de GRM komt, wil Drijvers allereerst een ergernis kwijt. Twee jaar geleden heeft de Utrechtse bijzonder hoogleraar kwantitatief watermanagement Ruud Schotting een oratie gehouden, waar hij een exemplaar van de TI-83 kapot heeft gemaakt, vergezeld van de uitspraak dat de rekenmachine een ramp is voor het onderwijs. Dit incident haalde de voorpagina van de Telegraaf [1]. Drijvers heeft de hoogleraar gevraagd of hij dit kan aantonen. De desbetreffende oratie is onlangs, twee jaar na dato, op schrift



Paul Drijvers

gezet. Volgens Drijvers geeft deze tekst geen enkele onderbouwing voor de bewering. De GRM is destijds ingevoerd met het volgende uitgangspunt: ICT in het onderwijs is een goede ontwikkeling, want het hoort bij deze tijd en het onderwijs zelf kan zich meer richten op conceptuele zaken (een enigszins naïef uitgangspunt volgens Drijvers).

Verder is de GRM ingevoerd omdat het apparaat klein, handzaam en eigendom van de leerlingen is. In de tijd van invoering waren laptops en computers onpraktischer en gewoon te duur. Wat er sindsdien allemaal gebeurd is met de GRM, is afhankelijk van een complex krachtenveld van uitgevers, examenmakers, scholen, enzovoorts, waar het FI maar weinig invloed op heeft. De leerlingen worden vervolgens studenten en blijven hun GRM nog steeds gebruiken bij de calculusvakken. Hierbij vraagt Drijvers zich af: wat is nu eigenlijk het probleem? Wordt het vak zo gegeven dat die rekenmachine nodig is? Worden de studenten ingelicht over de gevraagde vaardigheden en of de GRM daarbij nuttig is?

Wiskunde uitbesteden

Drijvers is naar eigen zeggen niet getrouwd met de GRM en ziet heel goed de beperkingen. Een belangrijk aspect van het gebruik van de GRM is dat de leerling leert welke wiskunde je met je hoofd moet blijven doen en wat je kunt uitbesteden aan een machine. Deze wisselwerking is volgens Drijvers zeer interessant en leerzaam. Van cruciaal belang is hierbij dat de leraar zich ook bewust is van deze bedoeling en dit goed overbrengt op de leerling. De GRM heeft ook een functie als voorbereiding op het gebruik van softwarepakketten zoals Maple en Mathematica. Drijvers' huidige onderzoek richt zich met name op de manier waarop docenten ICT in de les inzetten.

Tot slot uit Drijvers, als fervent voorstander van het harmoniemodel, zijn hoop dat men wat meer respect kan opbrengen voor de di-

dactiek van het wiskundeonderwijs, iets wat volgens hem wel eens ontbreekt in artikelen van het NAW.

Geldstromen

Op de vraag hoe het FI organisatorisch en financieel in elkaar steekt krijgen we in het tweede gesprek antwoord van Heleen Verhage, manager-beheer van het FI.

Zoals elk academisch instituut krijgt het FI zijn financiën uit de eerste, tweede en derde geldstroom. Wat opvalt is dat maar liefst tachtig procent van de omzet uit de derde geldstroom komt. Binnen deze stroom komt het geld van veel verschillende kanten. Het Ministerie van OCW zorgt voor een tamelijk stabiele inkomstenbron met de ondersteuning van projecten als RekenWeb en Panama [2]. Veel andere projecten worden gefinancierd door meerdere bronnen tegelijk. Subsidiebronnen zijn onder andere de HBO-, VO- en PO-raad, het ICT-innovatieplatform SURF, het Ministerie van Economische Zaken, het Platform Bèta Techniek en de Europese Unie.

De laatste jaren komen geldstromen ook steeds meer vanuit scholen, omdat deze tegenwoordig vaak zelf bepalen wat hun behoeften zijn op onderwijsgebied. Zo heeft het FI afgelopen jaar een grote opdracht uit-

gevoerd voor Zaan Primair, een scholengemeenschap van tien scholen in Zaanstad en omgeving, die past binnen het project Professionalisering in Primair Onderwijs.

Dienstverbanden

Waar komen alle mensen vandaan die deze projecten uitvoeren? Net als de lijst van financierders is dit een gevarieerd geheel. Naast een vaste staf met twee hoogleraren zijn er veel andersoortige constructies voor dienstverbanden met in totaal niet minder dan zeventig parttime medewerkers. Er werken bijvoorbeeld drie promovendi die betaald worden vanuit het DUDOC-programma van het Platform Bèta Techniek. Dit programma is opgezet vanuit de gedachte dat er meer leraren zouden moeten promoveren. De promovendi werken twee dagen per week op school en drie dagen per week aan hun promotie.

Verder worden zo'n twintig medewerkers gedetacheerd vanuit het onderwijs om aan een bepaald project te werken, vaak voor één dag per week. Hun dienstverband houdt op als het project ophoudt. Een belangrijk voordeel van het grote aantal werknemers zonder vast dienstverband is het ontstaan van samenwerking met mensen vanuit verschillende disciplines die die allemaal een eigen kijk hebben op wat er in het onderwijs speelt.

Verhuizing

Het onderwerp samenwerking brengt het gesprek op de verhuizing van het FI naar de Uithof, waar zich ook het Mathematisch Instituut bevindt en de andere onderdelen van de Faculteit Bètawetenschappen. Verhage is niet bang dat het FI zijn identiteit zal verliezen door deze verplaatsing en ziet vooral positieve ontwikkelingen. Het FI werkte de afgelopen jaren al samen met het Mathematisch Instituut voor bepaalde universitaire onderwijsverplichtingen, en ook de bestaande samenwerking met de vakdidactici Biologie,



Heleen Verhage



Peter Boon

Natuurkunde en Scheikunde zal alleen maar gemakkelijker verlopen. Sinds 2006 participeert het FI met deze groepen in Flsme, het Freudenthal Institute for science and mathematics education.

Verder zal de verhuizing de zichtbaarheid van het FI als onderdeel van de Universiteit van Utrecht vergroten. Volgens Verhage is in het verleden wel eens de misvatting ontstaan dat het FI een zelfstandig instituut is. Dit is zeker niet het geval.

Informaticapionier

Onze volgende gesprekspartner is Peter Boon, onder andere ontwikkelaar van applets voor wiskunde- en rekenonderwijs. Boon heeft na het behalen van een wiskunde MO-A diploma aan de Universiteit van Amsterdam eerst buiten het onderwijs gewerkt in een zeer divers palet van activiteiten variërend van kok in een restaurant tot het exploiteren van een eigen geitenhouderij met kaasmakerij. Na het behalen van een eerstegraads onderwijsbevoegdheid aan de Hogeschool Utrecht is hij uiteindelijk in het onderwijs beland. Boon heeft twaalf jaar gewerkt in het voortgezet onderwijs, eerst op het Titus Brandsma Lyceum in Oss en later bij Lek en Linge in Culemborg. De laatste drie jaren van zijn periode bij Lek en Linge heeft hij tevens gewerkt als informaticadocent. Informatica was toen een nieuw vak met weinig lesmateriaal en dus een 'paradijs voor pioniers'. Voor zijn leerlingen ontwikkelde hij daar Java-Logo, een programmeeromgeving binnen Java. Deze omgeving wordt nog steeds op veel scholen gebruikt.

Applets

De doelstelling van het werk van Boon is zoeken naar vruchtbare toepassingen van ICT in het wiskunde- en rekenonderwijs. Aanvankelijk ontwikkelde hij een omvangrijke verzameling applets die steeds gemakkelijker toegankelijk zijn en voor allerlei doeleinden in het

wiskunde-onderwijs kunnen worden ingezet.

Neem bijvoorbeeld het functieconcept. Leerlingen blijven vaak steken bij het rekenen en begrijpen niet veel van het begrip functie zelf. Boon heeft hiervoor de applet 'Algebra-pijlen' gemaakt, waar leerlingen niet hoeven te rekenen, maar zich volledig kunnen richten op het conceptuele aspect van functies.

Digitale Wiskunde Omgeving

De applets van Boon (zie Figuur 1) vinden gretig aftrek bij scholen. Via goede contacten met docenten kwamen ook beperkingen aan het licht en werden extra wensen en suggesties ter verbetering geuit. Integratie met bestaand lesmateriaal bleek niet altijd eenvoudig voor docenten. Dat het verrichte leerlingwerk verdwijnt bij het sluiten van het browservenster helpt ook niet bij goede integratie in het onderwijs. De laatste jaren richt Boon zich daarom meer en meer op de ontwikkeling van leeromgevingen voor completer digitaal lesmateriaal.

Een belangrijke stap hierin was de ontwikkeling van de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO). Dit is een soort digitaal werkschrift waarin alles wat de leerling gedaan heeft in een applet wordt opgeslagen. Het kan later weer geraadpleegd worden, en niet alleen

door de student, maar ook door de docent. De DWO is ontwikkeld vanuit de inhoud en vanuit het interactieve aspect van de applets. Dit zorgt voor een meerwaarde voor het onderwijs. Hiermee verschilt de DWO van de meeste andere elektronische leeromgevingen die vaak alleen een kale omgeving bieden en de invulling daarvan aan de gebruiker overlaten, waardoor ze vaak alleen voor 'text-on-screen' gebruikt kunnen worden.

De DWO wordt via het zogenaamde WisWeb+ project aangeboden aan scholen, die een abonnement kunnen nemen op de leeromgeving voor een bedrag afhankelijk van het aantal leerlingen, gemiddeld zo'n 300 euro per school per jaar. Het abonnement moet ervoor zorgen dat applets een vaste plek krijgen in het wiskundeonderwijs.

Het aantal scholen dat een abonnement heeft op WisWeb+ stijgt gestaag; op dit moment zijn er tweehonderd scholen lid. Ook worden steeds meer contracten met uitgevers gesloten die de applets willen incorporeren in hun lesmateriaal.

Algebra met blokken

Ter afsluiting wil Boon graag de applet 'Blokkenhuizen programmeren' naar voren brengen (zie Figuur 2). Voor de leraar is het vaak moeilijk om duidelijk te maken wat de kracht is van algebra — voor leerlingen is algebra geen oplossing; het is een probleem.

Blokkenhuizen programmeren kan de leerlingen op andere gedachten brengen. Het werkt als volgt. Als de gebruiker het commando 'bouw 1, 1, 1' intypt, wordt op die coördinaat een blok gebouwd. Als het commando 'bouw 1, x, 1' gebruikt wordt, waarbij x van te voren gedefinieerd is als $x = 1 \dots 10$, dan bouwt de applet een rij blokken met coördinaten $(1, 1, 1), (1, 2, 1), \dots, (1, 10, 1)$. De gebruiker hoeft dus niet 'bouw 1, 1, 1; bouw 1, 2, 1; bouw 1, 3, 1;...' te typen om deze rij te bouwen. Zo wordt met deze applet de kracht



Michiel Doorman

van variabelen gedemonstreerd aan de leerlingen.

Naast de applets die meer op begripvorming zijn gericht is er ook een grote verzameling die meer gericht is op het efficiënt oefenen van vaardigheden. In deze applets kunnen leerlingen stap voor stap naar de oplossing toewerken en bij elke stap via feedback zien of ze op de goede weg zitten. Essentieel is ook dat de leerlingen veel vrijheid krijgen in het zoeken naar een oplossingsstrategie. Deze vrijheid legt veel eisen op aan het programmeerwerk, die echter wel onontbeerlijk zijn om de wiskunde tot zijn recht te laten komen.

Een misvatting over contexten

We vervolgen onze gesprekken met Michiel Doorman. We vragen hem naar zijn visie op de realistische benadering van wiskunde in het voortgezet onderwijs. Volgens hem moet elk moment van de leergang gekoppeld zijn aan een of andere realiteit van de leerling. Hij benadrukt ook meteen een veel voorkomende misvatting: de contexten, waarom het in het realistisch onderwijs altijd gaat, hoeven niet noodzakelijk uit de praktijk te komen; het kunnen ook wiskundige contexten zijn.

Samenhang tussen vakken

Doorman is gepromoveerd op de didactische samenhang tussen de differentiaalrekening en de vakken wiskunde en natuurkunde. Vanzelfsprekend is de differentiaalrekening zowel in de wiskunde als de natuurkunde be-

langrijk.

Doorman ziet het ideale leertraject van deze theorie als volgt. Eerst wordt kennisgemaakt met differentiaalrekening in de natuurkundige context van snelheid en afgelegde weg. Op een gegeven moment wordt er aan de theorie een meer algemene geldigheid gegeven. De theorie krijgt het meer wiskundige perspectief van verandering vergezeld van wiskundige en algemenere toepassingen. Tegelijkertijd worden de achterliggende wiskundige structuren meer uitgediept. Later komen de twee paden weer bij elkaar, bijvoorbeeld in een project of profielwerkstuk.

De samenhang bevorderen is een van de belangrijke doelen van de profielen. In bepaalde opzichten is dit overigens wel mislukt. Er is bijvoorbeeld veel samengewerkt met uitgeverijen, die in hun lesmateriaal een goede samenhang tussen natuur- en wiskunde hebben bewerkstelligd. Tussen de verschillende uitgeverijen is er echter veel minder samenhang. Dit zorgt voor problemen bij scholen die bijvoorbeeld Moderne Wiskunde bij Noordhoff halen en het lesmateriaal voor natuurkunde bij Thieme Meulenhoff.

Vaardigheden

Een ander probleem is dat bij wiskunde tegenwoordig de nadruk veelal ligt op het ontwikkelen van vaardigheden, terwijl het aanbrengen van de samenhang met andere vakken een ondergeschoven kind is. Doorman is uiteraard geen tegenstander van het aanleren van vaardigheden; in samenwerking met het

MI wordt bijvoorbeeld onderzocht hoe vaardigheden die nodig zijn voor exacte studies goed onderwezen kunnen worden.

Hij hoopt dat de verhuizing naar de Uithof deze samenwerking verder zal bevorderen, niet alleen op dit punt, maar ook op de professionalisering van docenten. Het FI heeft hier voornamelijk ervaring mee op het gebied van vernieuwingen, zoals de invoering van Wiskunde A. De didactici van science hebben weer veel meer expertise als het gaat om het opzetten van de continue professionele ontwikkeling van docenten.

Volgens Doorman moet er veel gedaan worden aan het bij elkaar brengen van leraren van verschillende disciplines (zoals biologie, economie) om de samenhang tussen de vakken te verbeteren.

De NWD

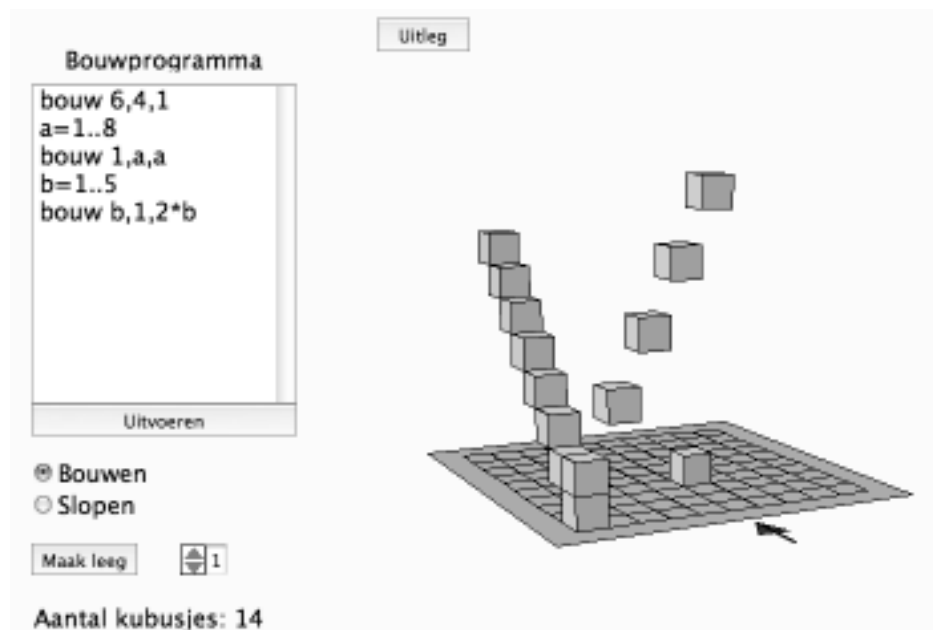
De professionalisering van docenten brengt ons bij de Nationale Wiskundedagen (NWD). Doorman is hiervan de huidige coördinator. Het idee voor het opzetten van de NWD kwam oorspronkelijk van Jan de Lange, toentertijd verbonden aan de Nederlandse Onderwijs Commissie voor de Wiskunde (NOCW). De NOCW is opgericht in 1954 en is een gezamenlijke commissie van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraars.

De bedoeling was om wiskundigen en wiskundeleraars bij elkaar te brengen en om docenten te inspireren met leuke, nieuwe ontwikkelingen en ideeën uit de wiskunde. Het moest vooral geen straf zijn voor de deelnemers, dus besloot De Lange meteen om de NWD te organiseren als tweedaags evenement met overnachting op een luxe locatie. De NWD is een populair evenement met als belangrijk kenmerk dat op de twee dagen verschillende groepen mensen samenkomen om te praten over de wiskunde; een onderwerp dat hun allemaal bindt. Harde discussies over bijvoorbeeld het rekenonderwijs staan daar dan ook niet op de voorgrond.

Doorman is al vanaf het begin in 1995 bij de organisatie betrokken en de afgelopen zes jaar projectleider. Elke keer weer moet er voor zeshonderd docenten een programma gemaakt worden bestaande uit twaalf parallelsessies en vier blokken waar in totaal zo'n zestig sprekers voor nodig zijn. Een commissie van wiskundigen uit verschillende Nederlandse universiteiten en bedrijven stelt dit programma samen. Deze commissie komt in april samen om een aantal thema's te bedenken voor de NWD waardoor er samenhang in het programma ontstaat. Soms wordt gepro-



Figuur 1 Als je op de link 'applets' van de website WisWeb (www.fi.uu.nl/wisweb/) klikt, kom je op een enorme pagina met allemaal puzzels en spelletjes die bedoeld zijn voor de basisschool en het middelbaar onderwijs.



Figuur 2 De applet 'Blokkenhuizen programmeren'. Door het geven van een bouwvoorschrift, zoals $a = 1..10$ en vervolgens 'bouw 1, 1, a ' bouwt het programma het rijtje blokken met coördinaten (1, 1, 1), (1, 1, 2) tot en met (1, 1, 10). De leerling leert onder andere een toepassing van het gebruik van variabelen en ontwikkelt zijn ruimtelijk voorstellingsvermogen.

beerd om na het evenement verder te bouwen op onderwerpen, besproken op de NWD. Docenten laten bijvoorbeeld wel eens filmpjes zien van de NWD aan de leerlingen in de klas. Naar aanleiding hiervan heeft de organisatie het idee opgevat om docenten aan te moedigen opnames te maken van de momenten waarop klassikaal iets wordt gedaan met materiaal van de NWD. De organisatie monteert het materiaal en zet het vervolgens op de site. Hiertoe is een camera aangeschaft die de docenten kunnen lenen. Tot op heden heeft Doorman een zeer mager aantal van drie reacties gehad, maar wellicht is het iets dat moet groeien.

Voordat we doorgaan met het volgende interview wil Doorman nog benadrukken dat de kracht van het FI vooral ligt in het feit dat er zo'n gemêleerde groep mensen werkt; naast wiskundigen huisvest het instituut ook docenten, psychologen, pedagogen en onderwijskundigen. Dat zoveel mensen in één instituut werken aan wiskunde- en rekenonderwijs geeft het FI niet alleen nationaal, maar ook internationaal een unieke positie. We nemen dit ter harte.

Lunch

Het was tijd voor de lunch, waarbij we getrakteerd werden op een gesprek met de twee hoogleraren van het FI: directeur Jan van Maanen, en Marja van den Heuvel-Panhuizen, gespecialiseerd in de didactiek van het rekenonderwijs voor kinderen tot veertien jaar.

Van Maanen is in Utrecht geboren en geto-

gen en heeft daar ook wiskunde gestudeerd. Tevens heeft hij vijftien jaar gedoceerd op het Christelijk Gymnasium te Utrecht, waar hij zelf overigens eerst leerling was. Hij had in de zesde klas zelfs al een aanstelling als docent op die school, vanwege een tijdelijk probleem met veel ziekteuitval. Tijdens zijn werk als docent is hij gepromoveerd in de geschiedenis van de wiskunde. Vervolgens heeft hij vijftien jaar op de Rijksuniversiteit Groningen gewerkt op het Mathematisch Instituut, eerst als universitair docent en later bij bètadidacticatie als universitair hoofddocent.

School zonder zitten blijven

Van den Heuvel-Panhuizen komt van een heel andere kant. Zij heeft elf jaar op de basisschool en in het speciaal onderwijs voor de klas gestaan. Net als Van Maanen heeft Van den Heuvel-Panhuizen lesgegeven op de school waar ze vroeger zelf leerling was. Ze kreeg daar les met behulp van de methode *School Zonder Zitten Blijven*, een methode waar de leerlingen zelf hun tempo konden bepalen — en ze kan zich nog herinneren dat ze altijd een boek verder was.

Tijdens haar werk als leraar is ze begonnen met een opleiding pedagogiek en is vervolgens naar de Universiteit van Utrecht gegaan waar ze betrokken is geraakt bij de didacticatie van het rekenonderwijs. Daar heeft ze een studentassistentie gehad bij Miriam Wolters, die destijds haar proefschrift *Van rekenen naar algebra* (1978) had geschreven met veel invloeden uit de Russische leerpsy-

chologie. Uiteindelijk is ze in 1987 op het FI terecht gekomen bij het project Methode Onderzoek Rekenwiskundeonderwijs (MORE), dat gefinancierd werd door de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs, die in 1996 in NWO opging.

Worldwide FI

Van den Heuvel-Panhuizen is 's ochtends op Schiphol teruggekeerd van een vlucht vanuit Australië waar ze gesproken heeft op een conferentie. Voorafgaand hieraan heeft ze op Cyprus zitting genomen in een benoemingscommissie ter gelegenheid van de benoeming van een associate professor. De nog jonge universiteit op Cyprus vraagt mensen uit het buitenland voor dergelijke benoemingen om te ontkomen aan provincialiteit.

Interesse vanuit het buitenland is het FI wel gewend. De werkwijze van het instituut is uniek en er komen regelmatig promovendi uit het buitenland om bij het FI te werken. Op de eerder genoemde conferentie in Australië stond het FI ook in de belangstelling; vooral het RekenWeb en de applets van Peter Boon vielen in de smaak. Van Maanen benadrukt dat de applets ontwikkeld zijn dankzij intensieve samenwerking met scholen. Sommigen binnen de universitaire wereld zijn van mening dat geld vanuit de universiteit moet aangewend worden voor onderzoek en voor onderwijs binnen de universiteit, maar Van Maanen ziet veel meerwaarde in de sterke connectie met de praktijk van scholen, en bovendien worden deze activiteiten niet met universitair geld gefinancierd.

Wiskunde voor dichters

Het gesprek komt al snel op Van Maanens college *Wiskunde voor Dichters, Denkers en Doeners* aan de Universiteit van Utrecht. Hier worden wiskundige onderwerpen behandeld, primair bestemd voor bachelorstudenten van de faculteit Sociale Wetenschappen. Het begint al met het elementaire verschil tussen cijfer en getal, een verschil waarmee de doelgroep grote moeite heeft. Andere onderwerpen zijn exponentiële groei, fundamentele kansrekening en de kwadratuur van de cirkel. De hoofdmoot van het vak is het eigen onderzoek van de student. Die kiest een thema dat een relatie heeft met zijn of haar eigen studie. Twee taalkundestudenten kozen bijvoorbeeld als thema de wiskunde achter generatieve grammatica's.

Het vak wordt door Van Maanen getypeerd als een soort tweedekansonderwijs voor mensen die in het voortgezet onderwijs een angst hebben opgebouwd voor de wiskunde en

denken dat ze daar niks van begrijpen. Gedurende het semester ziet Van Maanen het wiskundig zelfvertrouwen van de studenten groeien. Dit maakt het verzorgen van juist dit vak voor hem erg aantrekkelijk.

Realistisch versus traditioneel

We komen weer terug op het eerder genoemde project MORE, waar Van den Heuvel-Panhuizen graag over wil uitweiden. Bij dit onderzoek waren twintig scholen betrokken; tien die met de realistische methode *Wereld in Getallen* werkten en tien die de traditionele methode *Naar Zelfstandig Rekenen* gebruikten. Er werd onderzocht wat het effect was op de leerprestaties van de leerlingen door ze drie jaar te volgen van groep 3 tot groep 5.

De taak van Van den Heuvel-Panhuizen was om toetsopgaven te maken voor het onderzoek. De toetsopgaven bestonden uit contextopgaven enerzijds en 'kale' opgaven anderzijds. Om te vergelijken werd vaak dezelfde som in contextvorm en kale vorm naast elkaar gelegd. Zo werd de opgave om het verschil te bepalen tussen 145 en 138 gepresenteerd als $145 - 138 = \dots$ en in een context van twee kinderen die hun lengte aan het vergelijken zijn. Het bleek dat een hoger percentage van de kinderen het juiste antwoord gaven bij de contextuele versie. Daar werden ze blijkbaar meer aangemoedigd om een rekenstrategie te kiezen die hen naar het correcte antwoord zou leiden.

Tevreden

Ook kwam uit het onderzoek naar voren dat in de methode *Wereld in Getallen* te weinig aandacht werd besteed aan de basisvaardigheden. Dit resultaat stimuleerde de makers van deze methode tot aanpassing, met als gevolg dat de cito-scores voor leerlingen die *Wereld in Getallen* hebben gevolgd tegenwoordig hoger liggen dan in 1987. Van Maanen reageert tevreden: "Dat onderzoek kan dus bij de verhuizing gewoon bij het oud papier." Van den Heuvel-Panhuizen lijkt het daar niet helemaal mee eens te zijn.

Hans Freudenthal zelf was zeer te spreken over de toets van Van den Heuvel-Panhuizen en stelde voor dat zij daar een proefschrift over zou schrijven. Haar eerste artikel dat zij over toetsen had geschreven werd door Freudenthal in het Engels vertaald. Daarna moedigde hij haar aan om dit in de VS te presenteren. Alhoewel zij toen behoorlijke vlieg angst had, was zij zo vereerd dat ze toch het vliegtuig instapte om naar Amerika te gaan.

Van Maanen sloot de lunch af door te zeggen dat hij blij was dat het NAW voor wiskun-



Jan van Maanen

dig Nederland nauwkeurig is gaan kijken hoe het FI een constructieve bijdrage probeert te leveren aan de wiskunde en het onderwijs. Van den Heuvel-Panhuizen zei zich daar bij aan te sluiten.

Leerlijnen

Na de lunch gaan we weer terug naar kamer 4.14 om verder te spreken met Van den Heuvel-Panhuizen. Ze wil graag aangeven dat het FI niet alleen met onderzoek bezig is, maar ook met het ontwikkelen van onderwijsmateriaal dat direct gebruikt kan worden in de onderwijspraktijk. Een voorbeeld hiervan is het ontwikkelen van leerlijnen voor het basisonderwijs. Het FI is hiermee begonnen in 1997 in opdracht van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (OCW).

Op dat moment waren alle kerndoelen samen te vatten op één A4'tje. De leerlijnen moesten een uitgebreidere gids vormen om niet alleen leraren te helpen met het uitvoeren van de leermethode, maar ook de opleidingen, de begeleiders en de auteurs van de lesboeken. Het FI ontwikkelde leerlijnen voor gehele getallen, kommagetallen, breuken, verhoudingen en meten en meetkunde voor onderbouw en bovenbouw.

Nu zijn deze leerlijnen zelfs internationaal bekend en worden ze gebruikt in Mexico en Zuid-Afrika. Dat het FI wereldwijd een belangrijke speler is, is overigens iets dat Van den Heuvel-Panhuizen graag benadrukt: "Niet alleen ik word uitgenodigd om een plenaire lezing te houden op een internationaal congres;

zoiets maken we op het FI regelmatig mee."

Het Flisme

We komen weer terug op het onderzoek en de verhuizing. Van den Heuvel-Panhuizen verwacht dat het onderzoek van het FI danig versterkt zal worden door de verhuizing, omdat dan meer aandacht besteed kan worden aan het hele bèta-wetenschapsonderwijs. Stappen in die richting zijn al gezet toen de bètadidactiek-instituten in 2006 samengevoegd werden in één organisatie, het Flisme (Freudenthal Institute for science and mathematics education). Sinds de oprichting bestaat er een gezamenlijk onderzoeksprogramma met vier thema's. Twee thema's zijn gekoppeld aan de filosofie van het realistisch reken-wiskundeonderwijs, wat volgens Van den Heuvel-Panhuizen veel lijkt op de filosofie van het scienceonderwijs — de context-conceptbenadering: "Ze hebben in ieder geval meer overeenkomsten dan met de didactiek van taalonderwijs."

Bij al de thema's moet het instituut zorgen voor voldoende output, oftewel artikelen publiceren in peer-reviewed tijdschriften — een bekend verhaal voor academische instituten. Je zou willen dat het FI wordt afgerekend op de (internationale) populariteit van hun producten zoals de leerlijnen en de applets, maar de norm van de universiteit is onderwijs en onderzoek. Een belangrijk kanaal voor FI-artikelen zijn de tijdschriften op de ISI- en ICO-lijsten; ICO is de landelijke onderzoeksschool Interuniversitair Centrum voor Onderwijskun-



Marja van den Heuvel-Panhuizen

dig Onderzoek.

Een probleem daarbij is dat ICO niet op de eerste plaats geïnteresseerd is in vakdidactisch onderzoek, maar in algemeen onderwijskundig onderzoek. Opmerkelijk is ook dat op de ISI-lijst maar één tijdschrift staat voor onderzoek van wiskundeonderwijs.

Australisch avontuur

Van den Heuvel-Panhuizen is dan wel 's ochtends vroeg uit het vliegtuig gestapt om meteen door te gaan naar het FI, ze heeft nog voldoende energie om vers van de pers verslag te doen van haar bezoek aan het congres in Australië. De lezing die ze daar heeft gehouden met de titel *Reform under attack. Forty years of development of reform thrown on the scrap heap? No way* laat weinig aan de verbeelding over [3]. De aanleiding voor de voordracht was de eerder genoemde discussie over realistisch versus mechanistisch rekenen. Dit is niet enkel een Nederlandse discussie. De aanzet is gemaakt in de jaren '90 in de VS, waar in Californië een 'reformed' (realistisch) onderwijsprogramma werd gebruikt waartegen een aantal wiskundehoogleraren in opstand is gekomen. Haar lezing heeft ze bedoeld als een waarschuwing voor wat de daar aanwezige didactici zou kunnen overkomen.

De discussie rond realistisch versus mechanistisch is volgens Van den Heuvel-Panhuizen geen issue in de academische wereld van onderzoekers van reken-wiskundeonderwijs. Ze merkt op dat er voor het werk

van het FI wereldwijd veel belangstelling bestaat, terwijl hier in Nederland sommigen spreken over didactische blunders van de realistische methode. Zij had nooit voor mogelijk gehouden dat er zoveel tegenstand zou zijn tegen de ideeën van realistisch onderwijs. De boodschap van Van den Heuvel-Panhuizen aan haar toehoorders in Australië was daarom dat ze ervoor moeten zorgen om bewijzen voor de positieve werking van een vernieuwing bij de hand te hebben, en dan het liefst in de vorm van 'evidence-based' onderzoek. Verder heeft ze de aanwezigen op het hart gedrukt dat ook de ouders niet vergeten moeten worden. Leg aan hen uit dat de kinderen nog steeds de benodigde vaardigheden opdoen, maar dat de weg om naar het meest abstracte algoritme te komen nu wat meer doorzichtig voor de kinderen is. De congresbezoekers waren volgens Van den Heuvel-Panhuizen heel blij met haar 'heads-up'.

Schapen en grafieken

Van de grote wereld van congressen en debatten komen we terecht in de microcosmos van de kleuterschool. We praten met Aldine Aaten over haar onderzoek bij kleuters.

Aaten heeft in Leiden wiskunde gestudeerd en de eerstegraads lerarenopleiding gevolgd. Tijdens de laatste jaren van haar studie heeft ze lesgegeven op het Mouton Lyceum in Nootdorp (tegenwoordig Den Haag). Daarna is ze terechtgekomen in het bedrijfsleven bij een logistiek adviesbureau waar ze computersimulaties heeft ontwikkeld om

stromen van containers op terminals na te bootsen. Vanuit haar betrokkenheid bij het wiskundeonderwijs heeft ze de overstap gemaakt naar het Freudenthal instituut, waar ze een NWO-promotieonderzoek doet naar het leren van wiskunde door kleuters aan de hand van prentenboeken.

De kleuters vinden het vaak leuk als er wordt voorgelezen, en mede door de plaatjes worden ze aangemoedigd om zich volledig in te leven in het verhaal. In de boeken komen wiskundige concepten terug zoals meten ('Wordt iets groter?') en perspectief.

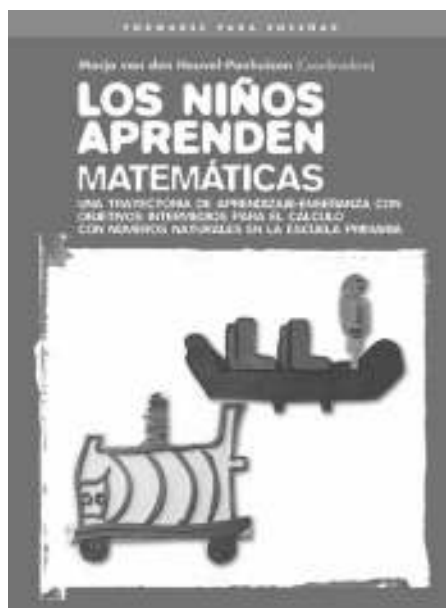
Als voorbeeld volgen we het relaas van een meisje dat haar pop per ongeluk door de wc spoelt. Er volgt een plaatje waar een doorsnede van het rioleringsstelsel getoond wordt. Dit is waarschijnlijk de eerste keer dat kleuters de dagelijkse wereld op een dergelijke manier zien. In een ander verhaal laat een schaap haar vacht groeien om het er later af te laten scheren. Het schaap pakt haar meetlat erbij om te meten hoe dik haar vacht is en heeft dit in een grafiek gezet. Grafieken tekenen en begrijpen komt traditioneel pas in het eerste jaar van het voortgezet onderwijs ter sprake, maar de kleuters krijgen er al een echte indruk van aan de hand van dit verhaal, vooral omdat ze zich inleven in wat er verteld en getoond wordt.

Het is een grote didactische sprong van de lerarenopleiding naar de kleuterschool. Daarom zit Aaten voor haar onderzoek ook echt in de kleuterklas en leest er één keer per week voor.

Een wiskundige blik

Juist omdat ze vanuit een heel andere hoek komt dan de voor dergelijk onderzoek meer gebruikelijke disciplines zoals onderwijskunde, pedagogiek en psychologie, is ze voor dit onderzoek aangenomen op het FI. Een niet-vakdidacticus ziet wiskundige concepten in de prentenboeken gemakkelijk over het hoofd. Om te beoordelen in hoeverre de kleuters bepaalde onderdelen van de wiskunde beheersen, hebben de kleuters toetsen gemaakt met pen en papier. Ook zijn de voorleessessies opgenomen: alles om het belang van de context voor het begrijpen van de wiskunde te bestuderen, waar Van den Heuvel-Panhuizen eerder op gehamerd heeft.

Aaten houdt erg van het veelzijdige werk op het FI. Werken met kleuters, bijleren over statistiek, meehelpen met het college Wiskunde voor Dichters van Jan van Maanen. Vooral de link met de werkelijkheid ervaart ze als positief; een link die ze heeft gemist bij haar studie wiskunde.



Figuur 3 De invloed van het FI reikt ver over de Nederlandse grens

Beroepsonderwijs

Van de kleuterschool naar het beroepsonderwijs: we praten met Monica Wijers en Vincent Jonker, twee onderzoekers op het FI die veel met elkaar samenwerken op het gebied van beroepsonderwijs maar ook op het gebruik van computers in het basisonderwijs.

Wijers heeft in Utrecht wiskunde gestudeerd, maar heeft het niet afgemaakt. De studie heeft ze ervaren als een aaneenschakeling van theorie met weinig aandacht voor *problem solving*. Ze is docent geworden, eerst aan het Ashram college in Alphen aan de Rijn en later aan de lerarenopleiding in Amsterdam en Rotterdam. Na een aantal jaar heeft ze

naast haar baan een studie onderwijskunde gedaan aan de Universiteit Utrecht. Bij haar afstuderen is ze op het FI terechtgekomen en sinds 1996 werkt ze daar fulltime.

Een van de projecten waar Wijers en Jonker zich op dit moment mee bezighouden is rekenen in het mbo. Rekenen-wiskunde is voor een aantal opleidingen aan het mbo een belangrijk vak, maar de zichtbaarheid hiervan is door de zogenaamde competentiegerichte kwalificatiestructuur sterk afgenomen.

Het FI heeft als reactie hierop, in samenwerking met anderen, het Raamwerk Rekenen/Wiskunde mbo gemaakt om rekenen/wiskunde in het mbo weer zichtbaar te maken. Vooral het technische mbo had hieraan behoefte. Met de komst van het referentiekader rekenen van de commissie Meijerink is vastgesteld dat het hele mbo examen moet doen in rekenen [4].

Gamen voor wiskunde

Jonker heeft onderwijskunde gestudeerd in Leiden met bijvak informatica. Als student-assistent kwam hij in aanraking met een aantal medewerkers van het FI die onderzoek deden naar de inzet van de computer in het basisonderwijs voor het vak rekenen. Dit gebeurde eind jaren '80, toen de PC pas net zijn plek begon te krijgen in het onderwijs. Uit dit onderzoek zijn tien jaar later de websites rekenweb.nl en wisweb.nl ontstaan.

Tegenwoordig kijkt het onderzoek veel naar het leren in de zogenaamde vrije momenten — lesmomenten waarin leerlingen zelf mogen bepalen wat ze willen doen — waar leerlingen met de software bezig zijn. In verband hiermee komt steeds meer het woord

'games' (spellen, maar dan voor de computer) naar voren. Bij games beslist het kind geheel vrijwillig of het iets leuk vindt en besluit om er energie in te steken. Is daar onderwijskundig gezien iets uit te halen? Dat is de onderzoeksvraag van Jonker.

Voor dit onderzoek hebben Jonker en Wijers een proeftuin naast de deur. Jonker wijst naar buiten naar basisschool OBS Tuindorp. Hier gaan ze elke dinsdagochtend naar toe om de kinderen te observeren als zij bezig zijn met de op het FI ontwikkelde software. Natuurlijk gebruiken ze voor hun onderzoek ook de logs van de games en registraties van computergebruik zoals mouseclicks. Ze zijn hier echter op het FI met de slogan 'wiskunde als menselijke activiteit', dus het daadwerkelijke contact met de leerling mag niet ontbreken.

Van rekenen naar wiskunde

Gevraagd naar wat het verschil is tussen rekenen en wiskunde antwoordt Jonker na enige twijfel: "geen". Daarna koppelt hij het rekenen echter wel aan het verrichten van vaardigheden. Er wordt in het basisonderwijs veel nagedacht wat de koppeling is tussen rekenvaardigheden en wiskunde. Wijers merkt op dat het vak op de basisschool niet voor niks tegenwoordig rekenen-wiskunde heet. Dit om te voorkomen dat het vak alleen maar bestaat uit het maken van rekensommetjes. Het is een lijn van rekenen naar wiskunde.

Wijers oppert dat het eigenlijk niet nodig is dat elke leerling uiteindelijk aan de formele, abstracte wiskundekant eindigt. Dat lijkt in het huidige onderwijs wel de bedoeling; niet alleen in het voortgezet onderwijs, maar ook het beroepsonderwijs.



Aldine Aaten



Monica Wijers



Vincent Jonker

Er wordt op dit moment weinig onderzoek gedaan naar het effect van de afwezigheid van wiskunde in bepaalde opleidingen. Wijers vindt dit wel een interessante vraag: is het erg dat leerlingen van mbo-richtingen waar wiskunde niet belangrijk is geen wiskundelers krijgen? Wellicht een idee voor toekomstig onderzoek bij het FI.

Professionalisering

Onze laatste gesprekspartners zijn Barbara van Amerom en Henk van der Kooij, die zich onder andere bezighouden met de professionalisering van leraren.

Barbara van Amerom komt vrij recent uit de praktijk: ze heeft twaalf jaar lesgegeven op Het Nieuwe Eemland in Amersfoort. In het begin van deze periode is ze in deeltijd aan het FI gepromoveerd. Na haar onderzoek is ze volledig het onderwijs in gegaan. Gewapend met veel praktijkervaring keert ze zes jaar later terug naar het FI. Het nauwe verband tussen theorie en praktijk ziet Van Amerom als een van de sterke punten van het instituut. Van Amerom doet namens het FI onder meer aan nascholing van docenten. Het feit dat ze zo dicht bij de praktijk van leraren staat, helpt daar enorm bij.

Ingenieurs van onderwijs

Reeds als student wiskunde op de TU/e werd het Henk van der Kooij duidelijk dat hij niet zijn hele leven achter de computer wilde slijten; de computer en de informatica was juist aan het opkomen. Jaap Seidel [5] was toen de eerste die het aandurfde een leraarsvariant uit te proberen en Van der Kooij maakte daar gretig gebruik van.

Na een aantal jaren als docent, eerst op het Christiaan Huygens Lyceum in Eindhoven en vervolgens op het Strabrecht College in Geldrop, kwam hij op het FI terecht. Wat Van der Kooij destijds trok aan het FI waren de grote en innovatieve projecten die aan het instituut uit werden gevoerd. Tegenwoordig is dit in zijn ogen veel meer versnipperd. Van der Kooij houdt erg van ontwikkelingsonderzoek en herkent zich volledig in Freudenthals karakterisering 'ingenieurs van onderwijs'.

De vaste klantenkring

Nascholing was in die tijd altijd gekoppeld aan de grote onderwijs-ontwikkelprojecten. Bij de ontwikkeling van Wiskunde Een en Twee (HEWET) was Van der Kooij als pilot-docent betrokken en bij het ontwerpen van het havo-programma in HAWEX als mede-ontwikkelaar. In die projecten merkt hij op



Barbara van Amerom

dat er enerzijds een soort vaste klantenkring was van docenten die met alle plezier de innovaties van het instituut toepasten in hun lessen, en dat anderzijds een grote groep van het docentencorps niet werd bereikt. Van Amerom voegt toe dat de trouwe aanhang er nog steeds is, maar dat die vaste klanten tegenwoordig steeds minder vrijheid krijgen van hun school om hun lessen naar eigen inzicht in te vullen. Dit verzwakt de positie van het FI enigszins en kan ook voor docenten een belemmering zijn. Van Amerom: "Maar of deze groep dezelfde ruimte nog krijgt als vroeger?" Van der Kooij: "Het gaat niet over de ruimte, het gaat over de methode!" Van Amerom: "Ik denk dat de docent minder autonoom is dan vroeger. Er praten meer partners mee bij dit soort beslissingen."

De macht van de methode

Zowel Van der Kooij als Van Amerom denkt niet dat de krapte op de arbeidsmarkt enige rol speelt bij de oppermachtige rol van het boek. Van Amerom ziet dat het zeer gedetailleerd vastleggen van het jaarprogramma van bijvoorbeeld parallelklassen en van de PTA's elke vrijheid ontnemt aan docenten om onderwijs te ontwikkelen. (De afkorting PTA staat voor programma van toetsing en afsluiting. Het is een wettelijk document waarin de school vastlegt waaruit het schoolexamen bestaat.) Van der Kooij voegt hieraan toe dat een docent die goed lesgeeft en goed materiaal kan herkennen, nog niet in staat hoeft te zijn om het ook te maken. Dat is een vak apart. Van Amerom zegt dat je ook gauw alleen staat als je zelf wat anders wilt.



Henk van der Kooij

Maatwerk

Een breed team van medewerkers van het FI houdt zich naast ontwikkelwerk, onderwijs en onderzoek bezig met de professionalisering van docenten. Dit kan vakinhoudelijk van aard zijn, zoals bijscholing in analytische meetkunde, statistiek, enzovoorts, maar er kan ook maatwerk geleverd worden aan scholen die zelf met een scholingsvraag zitten, zoals een school die met de Digitale Wiskunde Oefenomgeving wil werken of haar rekenonderwijs wil aanpakken. Hiervoor geeft het FI zowel beleidsmatig advies als inhoudelijk, didactisch advies. Daarnaast geven ze voorlichting over actuele zaken zoals het Referentiekader en de bijbehorende referentieniveaus voor rekenen. Tenslotte biedt het FI langer durende cursussen aan zoals (in samenwerking met de hogescholen Arnhem-Nijmegen en Windesheim) de minor Rekenen-wiskunde 10-14.

De aanmeldingen voor vakinhoudelijke nascholing vallen de laatste jaren tegen. Van Amerom denkt dat dit komt door het beleid van scholen dat vooral gericht is op schoolbrede nascholing met bijvoorbeeld als doel in een keer rekenen of wiskunde op orde te krijgen. Dan is er voor individuele nascholing weinig ruimte meer. Van der Kooij voegt daaraan enigszins gekscherend toe dat de leraar de school niet meer uit mag. De landelijke conferenties en bijeenkomsten blijven het wel goed doen; daar is namelijk minder tijd voor nodig.

De Wiskunde B-dag

Een heel ander project dat Van der Kooij coördineert is de Wiskunde B-dag, een wed-



Het Freudenthal Instituut tot september 2010 (verdiepingen 3, 4 en 5)

strijd voor Wiskunde B-leerlingen uit de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Veel scholen zetten deze wedstrijd in als praktische opdracht. (Een 'praktische opdracht' is een onderdeel van het schoolexamen waarin de leerling op het toepassen van de theorie in de praktijk wordt getest.) Van der Kooij vertelt over de B-dag met veel enthousiasme. Er doen rond de 170 scholen aan mee. Volgens hem is de Wiskunde B-dag steeds Wiskunde B'iger geworden; het aantal gymnasia dat meedoet neemt nog steeds toe. Van Amerom merkt op dat veel scholen inmiddels de praktische opdrachten uit het PTA hebben verwijderd. Desondanks blijft de belangstelling groot. Er doen echter nauwelijks havo-klassen aan mee. Van Amerom vindt dit jammer, juist omdat de havo-leerling praktisch geïntereerd is. Op het FI wordt gedacht aan aparte wedstrijden voor havo en ook voor de onderbouw.

Van der Kooij schetst het ontstaan van beide activiteiten. Toen er eind jaren tachtig

vanuit het ministerie van onderwijs de eis kwam om op scholen allerlei proces- en onderzoeksvaardigheden te doceren, kwam Jan de Lange in 1989 met het idee om dit door middel van de A-lympiade te doen. Deze vaardigheden waren immers niet op het Centraal Examen te toetsen. In die tijd kon men wiskunde A en B nog tegelijkertijd kiezen.

Toen dit niet meer kon, hebben verscheidene docenten gevraagd of er niet ook zoiets kon komen voor wiskunde B. Deze kwam er vanaf 1999. De eerste drie keer werd deze redelijk in contexten gezet, maar langzamerhand zijn de problemen steeds abstracter en is de nadruk meer op wiskundig redeneren komen te liggen.

Scholen kunnen zich opgeven en er wordt in groepjes van drie of vier leerlingen gedurende een hele dag aan een probleem gewerkt. De problemen variëren van het overdekken van Nederland met zenders met een zekere actieradius tot het bouwen van hijskranen met bepaalde eigenschappen.

Uit evaluaties blijkt dat docenten zeer enthousiast zijn hoe goed leerlingen gemotiveerd kunnen worden met dergelijke projecten. Er staat voor dit jaar weer een heel mooi onderwerp in de steigers. Wij verklappen het hier niet.

Twee werelden samengebracht

Welke conclusies kunnen we nu trekken uit deze dag? We hebben uit alle geledingen van het bedrijf met mensen kunnen spreken. Mensen die zonder uitzondering een stevige eigen visie op het wiskundeonderwijs hebben, maar zich ook bewust zijn van de verschillende meningen in het onderwijsveld. Sommigen voelen zich slecht begrepen, en een enkele keer heeft men geen idee gehad van de tegenstand die men heeft opgeroepen en wordt er bovendien bij herhaling gesproken over 'onze tegenstanders'.

Het is de vraag in hoeverre een dergelijke opstelling bijdraagt tot een open communicatie naar de buitenwereld. Door de gedrevenheid van de werknemers raakt de communicatie met de buitenwereld en het begrip voor andersdenkenden soms wat uit beeld. Het beeld dat er van het FI bestaat, moet wat ons betreft worden bijgesteld. Het FI is in elk geval niet het ongenaakbaar instituut dat het beleid voor het reken- en wiskundeonderwijs in Nederland bepaalt.

Daarnaast is het ons opgevallen dat elke medewerker de slogan van het FI (afkomstig van Hans Freudenthal zelf) — wiskunde als menselijke activiteit — in zijn werk geïntegreerd lijkt te hebben. Men kan van mening verschillen over de standpunten en keuzes die het FI maakt op het gebied van de wiskundendidactiek. Als een paal boven water staat echter dat de mensen waarmee wij hebben gesproken een passie voor onderwijs hebben.

Toen wij op het punt stonden het pand te verlaten kwam Aldine Aaten onze kamer weer binnen om ons de volgende gedachte mee te geven: "In mijn ogen bestaan er twee gescheiden werelden: de wiskundewereld en de wiskundeonderwijswereld. Dat is jammer. Het is mijn wens dat deze werelden zich bewust worden van elkaars bestaan en dat ze zich openen voor elkaars kennis en ideeën."

Referenties

- 1 www.telegraaf.nl/binnenland/3426179/_Rekenramp.in.onderwijs...html
- 2 Rekenweb: www.rekenweb.nl, Panama: www.fi.uu.nl/panama
- 3 www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7270.pdf

- 4 Zie bijvoorbeeld www.slo.nl/nieuws/dll

- 5 In Memoriam: NAW 5/2(3) september 2001 pp. 204–206

De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst
derdewet@nieuwarchief.nl

Het onderstaande is een reactie (geen weerwoord) op de boekbespreking van 'Analysis I, II' van T. Tao door Erik Koelink uit het NAW-septembernummer van 2008.

'Analysis' van T. Tao is een slecht geschreven boek

Je aarzelt om zo te spreken over het werk van een befaamd wiskundige, maar ik vind het boek 'Analysis' van T. Tao slecht geschreven. Laat ik vooropstellen dat ik hier Tao's bedoelingen en zijn opvattingen over analyse-onderwijs aan eerstejaars studenten buiten beschouwing laat; het gaat me om de manier waarop hij die uitwerkt. Waarom vind ik die slecht? Niet zozeer om de feitelijke onjuistheden — die zijn in het algemeen onschadelijk (al stel ik me voor dat het voor de lezer knap irritant zal zijn om achteraf te ontdekken dat Tao met de 'range' van een afbeelding iets anders bedoelt dan de rest van de wereld). Erger vind ik: de voortdurende verwarring van een wiskundig object met de naam ervan ("The sets $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ and $\{3, 4, 2, 1, 5\}$ are the same set, but have different first elements", twee regels na "we cannot use the notion of the 'first' or 'last' element in a set", op p. 35); de gepretendeerde opbouw uit axioma's zonder één woord over wat dat voor dingen zijn of waar ze toe dienen; de verbazingwekkend nonchalante taal ("Let X be a set. Then the set $\{Y : Y \text{ is a subset of } X\}$ is a set" (Lemma 3.4.9)); inconsistenties (zoals op p. 34, in verband met de axiomatiek van de verzamelingenleer, "we shall take the agnostic position as to whether all objects are sets or not", enkele regels verderop gevolgd door "... since 4 is not a set"); en geheimzinnige opmerkingen (zoals "... it now looks like we can keep all of the natural numbers distinct from each other" op p. 19, "... the concept of equality of functions can depend on the choice of domain" Expl. 3.3.8, en "This definition is well-defined" op diverse plaatsen). Dit zijn niet zo maar een paar mislukte passages die ik uit de tekst pluk: het hele boek is in deze stijl geschreven. Daarenboven is het doordrenkt met slonzige taal als "the limit converges", "monotone functions do not obey the intermediate value principle" (dat wil zeggen: er bestaan monotone functies die niet doorlopend zijn), "Definition X obeys Property Y ", en "assume $P(n)$ has been proved" (in plaats van: "assume $P(n)$ is true").

Voor ik verder ga, een standpuntverklaring. Het gaat om een analyseboek, bedoeld voor studenten die vertrouwd zijn met calculus maar niet met exacte analyse. Om de tekst (niet de onderliggende filosofie) te beoordelen moet je je verplaatsen in de gedachtenwereld van zo'n student. Die is een spel aan het leren waar hij de regels niet van kent; Tao zal hem die uitleggen. Drukt Tao zich slecht uit, dan is: "Och, iedereen begrijpt wel wat er bedoeld wordt" geen verdediging.

Hier zijn een paar voorbeelden van waar de student tegenaanloopt.

- Een 'infinite series' is een zeker soort 'expression' (Definition 7.2.1), en "expressions are a sequence of mathematical symbols which produces some mathematical object" (staat echt op p. 307). Wat voor wiskundig object wordt voortgebracht door de reeks $\sum (-1)^n$ van Opgave 7.2.1?
- Wat is $f(b) - f(a)$ als f een functie is met domein (a, b) , zoals $x \mapsto x^{-1} + (1 - x)^{-1}$ of $x \mapsto \sin x^{-1}$ op $(0, 1)$? (Zie Def. 11.8.1 op p. 291.)
- Wat is de integraal van een niet-integreerbare functie? (11.2.6)
- Als $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ de functie $x \mapsto x^2$ is, dan is de compositie $f \circ f$ niet gedefinieerd. (Def. 3.3.10.) Zou dat echt de bedoeling zijn?
- Wat moet ik met iets als "clearly, x is positive (why?)". (Zie bijv. p.147, p.204.)
- Denkt Tao dat ik onnozel ben? (Bijvoorbeeld 11.2.2, over constante functies. Hoewel ... "if E is empty, every real number c is a constant

value for f on E (why?)” Misschien b  n ik onnozel?)

De student zou zo door kunnen gaan; ik heb enkele van zijn problemen gekozen die geen omstandige uitleg vereisten. (Ik weet het: In werkelijkheid zal hij problemen als deze misschien niet eens opmerken. Hij weet namelijk niet beter. Hoe zou hij ook?) Laat ik mezelf nog even het woord geven voor een paar losse opmerkingen die buiten zijn bereik liggen.

- Dat O behoort tot ‘the Roman number system’ (Remark 2.1.12) is nieuw voor me. Ik meende overigens dat ‘Hindu-Arabic numerals’ en ‘Roman numerals’ namen waren voor dezelfde dingen, maar volgens Tao heb je ‘Hindu-Arabic numbers’ en ‘Roman numbers’, en zijn die verschillend (hoewel equivalent omdat beide stelsels voldoen aan de axioma’s van Peano).
- Dat elke oneindige verzameling gelijkmachtig is met een of andere echte deelverzameling (Exercise 8.1.1) kun je niet bewijzen zonder enige vorm van het keuze-axioma, en wie Exercise 8.5.15 (Tussen elk tweetal verzamelingen bestaat een injectieve afbeelding) aanpakt met de daar gegeven aanwijzing loopt onmiddellijk vast.
- De Riemann-Stieltjes-integraal, zoals gedefinieerd in 11.8, lijkt op het eerste gezicht aantrekkelijk, maar is geen integraal en kan ook niet uitgebreid worden tot een Lebesgue-Stieltjes-integraal waarvoor de convergentiestelling van Lebesgue geldt.
- ‘Principle of transfinite induction’ is geenszins een andere naam voor het Lemma van Zorn (p. 206) en heeft daar zelfs niets mee te maken. Wat wél met het Lemma van Zorn te maken heeft is de Wel-orderingsstelling (‘Well ordering principle’, Exerc. 8.5.19); die twee zijn wel niet hetzelfde maar althans in zekere zin equivalent. Transfinitie inductie (‘Strong induction’, 8.5.10) is iets totaal anders, en volkomen elementair.

Hiermee zijn we terug bij de feitelijke onjuistheden waar ik mee begon; die zijn duidelijk aanwijsbaar en kunnen weinig kwaad. Mijn bezwaren betreffen de ondoordachtetheid waarmee het hele boek geschreven is. (Behalve de bewijzen, die zijn correct, zij het soms slecht overdacht.) Niet alleen is het daardoor moeilijk te lezen; het suggereert ook dat dit de manier is waarop wiskundigen schrijven. Is dat de boodschap die we onze studenten willen meegeven? A. van Rooij, Nijmegen

Referentie

T. Tao, *Analysis I (Second edition)*, Hindustan Book Agency, 2009.

Het onderstaande is een reactie op het artikel ‘Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo’ van Geeke Bruin-Muurling, Koeno Gravemeijer en Michiel van Eijck uit het NAW-maartnummer.

Rekenen met breuken

In het artikel wordt uitgelegd dat rekenen met breuken (dus zonder context) niet behoort tot de stof die beheerst moet worden op de basisschool. Deze stof wordt gerekend tot de stof voor het voortgezet onderwijs. Dit heeft vergaande consequenties:

1. Het project ‘breuken’ duurt vijf    zes jaar, een onafzienbare tijd voor kinderen van die leeftijd. Voor de leerlingen is een dergelijk uitgestrekt tijdspad een bewijs van het buitengewone complexe karakter van de stof.
2. Uitstel van de behandeling van rekenen met breuken tot het voortgezet onderwijs betekent dat het twijfelachtig is of de leerlingen die niet naar vwo/havo-scholen gaan deze stof ooit nog wel onderwezen krijgen. Gezien de diepe identiteitscrisis in het vmbo, kan men hier niet optimistisch over zijn. Het gaat hier om meer dan 50% van

de leerlingen die niet zullen leren rekenen met breuken. Ik begrijp niet waarom een zo omvangrijke groep uitgesloten wordt van deze kennis. Het argument dat het niet nodig is voor de toekomstige beroepspraktijk gaat in ieder geval niet op:

3. Ongeveer 30% van de instroom van de pabo’s die de opleiding voor leraren op de basisscholen verzorgen, stroomt binnen via het mbo. Deze groep leerlingen heeft na het vmbo nog enkele jaren mbo doorlopen, en dus hoogst waarschijnlijk het onderwerp breuken niet voltooid. Nu wordt de laatste tijd een rekentoets afgenomen na het eerste jaar van de pabo waarbij getest wordt op het niveau van rekenen in groep 8 van de basisschool. Dus ook hier wordt het niveau van rekenen met breuken niet gehaald. En daarmee is de cirkel gesloten: ook de leerkrachten zullen in het algemeen niet in staat zijn te rekenen met breuken.

Er pleit veel voor om deze stof weer op de basisschool te onderwijzen. Alleen al hierdoor wordt het niveau van de basisschoolleraren aanzienlijk verhoogd. Het is een hard gelag voor leerlingen die via het mbo op de pabo komen om afgewezen te worden op grond van kennis die hun ouders of grootouders gewoon op de lagere school hadden verworven.

Peter de Jong, WSO, Amsterdam

Hieronder volgen twee reacties op het artikel ‘Newton voor Jan en alleman’ van Klaas Landsman uit het NAW-septembernummer

Waarheidsvinding

In zijn waardevolle bespreking van recent werk over Newton schrijft Klaas Landsman: “In dit opzicht was er een groot verschil tussen Newton en zijn voorgangers en wegbereiders Robert Hooke en Christiaan Huygens. De laatste twee zagen de wetenschap als een stelsel hypothesen, hoogstens te beschouwen als benaderingen tot de waarheid, voor zover daar al sprake van kon zijn. Zij dachten in dit opzicht moderner dan Newton, die in ieder geval in *Principia* een compromisloze vorm van waarheidsvinding nastreefde: dit is het ‘ware weten’ dat Cohen zelfs als titel van zijn boek heeft gekozen.”

Deze claim is wat misleidend. Allereerst, het is waar dat na de tweede editie (1713) van de *Principia*, Newton ‘hypotheses’ in de natuurfilosofie afwees. (Overigens, in de eerste editie stonden er negen officiële ‘hypotheses’ aan het begin van boek III! Voor een bespreking van de wijzigingen zie [2].) Ten tweede, Newton wilde inderdaad de waarheid ontdekken. Maar zijn houding ten opzichte van waarheidsvinding is complexer dan Landsman aangeeft. Newton formuleerde zijn definitieve houding in de vierde van de zogenaamde ‘rules for the study of natural philosophy’ (toegevoegd aan de derde editie (1726) van de *Principia*): “In experimental philosophy, propositions gathered from phenomena by induction should be considered either exactly or very nearly true notwithstanding any contrary hypotheses, until yet other phenomena make such propositions either more exact or liable to exceptions.” Newton voegt er dan aan toe: “This rule should be followed so that the arguments based on induction may not be nullified by hypotheses.” [1, p. 89]

Newton heeft het over ‘very nearly true’. De zogenaamde ‘Newtonian style’ (zie, met name, [3]) is complex, maar ze gaat ervan uit dat de waarheid op opeenvolgende wijze benaderd kan worden (e.g., ‘make ... more exact’); het is onduidelijk of Newton dacht dat de uiteindelijke waarheid ooit bereikt kan worden. Bovendien, Newton omarmde wat we tegenwoordig fallibilisme noemen. Behalve de vierde methodologische regel, die hierboven geciteerd is, levert zijn ‘author’s preface’ (in alle drie de edities) heel goed bewijs hiervoor: “I hope that the

principles set down here will shed some light on either this mode of philosophizing or some truer one.” Dat wil zeggen, de afwijzing van de hypothesen (en, in de context is het duidelijk dat Newton de eisen van de ‘mechanische filosofie’ van Hooke en Huygens, waarin alle uitleg in termen van vorm, grootte, beweging en botsing van lichamen begrijpelijk moet zijn, aan het verwerpen is) wordt geformuleerd op methodologische gronden. Newton stelt dat men zich niet moet laten afleiden door discussies over fysische verklaringen als die niet zijn ingegeven door systematische, empirische afwijkingen (dat wil zeggen, ‘fenomenen’) van een theorie. Dus, het verwerpen van hypothesen moet niet gelijkgesteld worden met een houding van (laten we zeggen) absolute waarheidsvinding.

Tenslotte, Newtons toewijding aan waarheidsvinding beschrijft vooral een psychologische houding binnen het domein van onderzoek. Hij claimt in de derde van zijn vier methodologische regels: “Those qualities of bodies... that belong to all bodies on which experiments can be made should be taken as the universal qualities of all bodies whatsoever.” [1, blz 87] Newton, die altijd zeer zorgvuldig formuleert, schrijft “should be taken as” niet “are”. Newtons ‘moderniteit’ is juist precies dat hij een methode waarin een (wiskundige) theorie-gemedieerde meting de boventoon voert, die als het ware op zijn eigen benen kan staan, heeft gecreëerd, terwijl het beantwoorden van andere (ongetwijfeld interessante) vragen en tegenwerpingen over verklaringen van fysieke mechanismen mogen worden uitgesteld totdat er zwaarwegende empirische redenen zijn om ze na te streven (zie ook [4]).

Eric Schliesser, Universiteit Gent, België

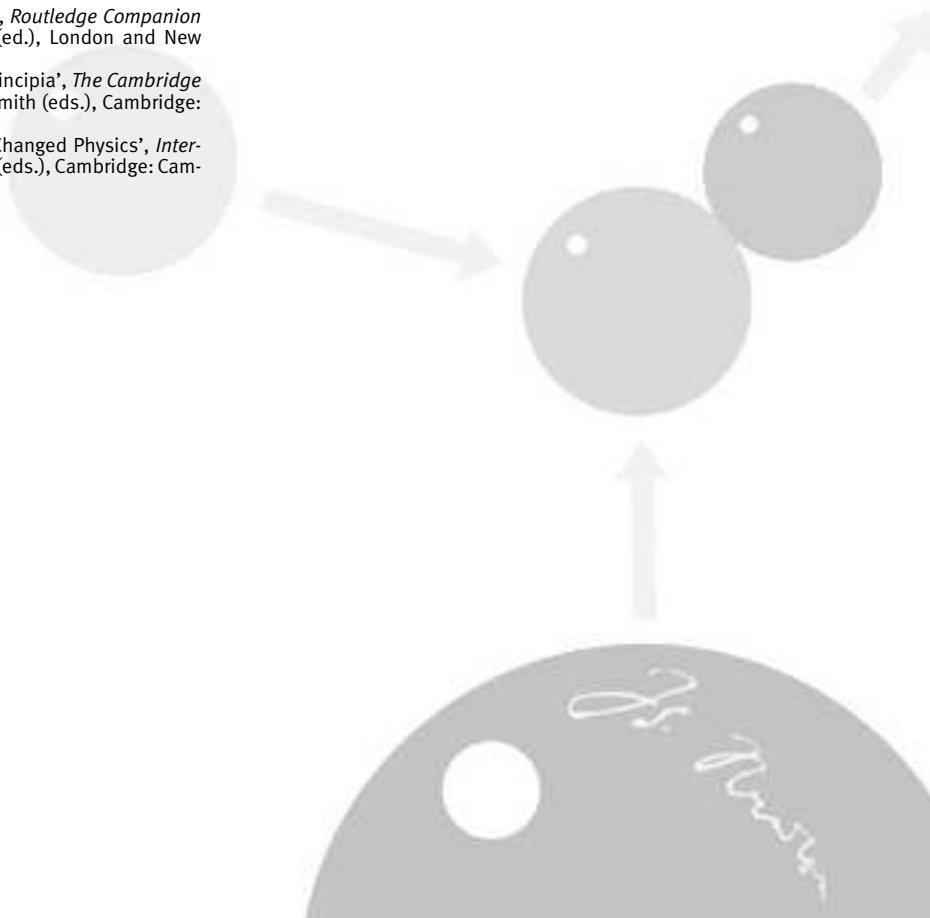
Referenties

1. Andrew Janiak (ed.), 2004. *Newton: Philosophical Writings*, Cambridge: Cambridge University Press.
2. Eric Schliesser, 2011, ‘Newton and Newtonianism’, *Routledge Companion to Eighteenth-Century Philosophy*, Aaron Garrett (ed.), London and New York: Routledge, nog te verschijnen.
3. George E. Smith, 2002. ‘The Methodology of the Principia’, *The Cambridge companion to Isaac Newton*, I.B. Cohen and G.E. Smith (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, pp. 138–173.
4. George E. Smith, 2011, ‘How Newton’s Principia Changed Physics’, *Interpreting Newton*, Andrew Janiak and Eric Schliesser (eds.), Cambridge: Cambridge University Press, nog te verschijnen.

Misselijke opmerking over Huygens

Het artikel ‘Newton voor Jan en alleman’ is een mooie bespreking van Klaas Landsman. Toch heb ik over twee passages nog wat opmerkingen. Bij de bespreking van het stripverhaal *Newton in Nederland* zegt Landsman “maar je vraagt je af voor wie het bedoeld is”. Beetje overbodige vraag. Voor beta-georiënteerden die ook van stripverhalen houden natuurlijk, dat zijn er heel wat. Het tweede punt is van meer belang. In de bespreking van *Isaac Newton en het ware weten* van Floris Cohen haalt hij op bladzijde 180 Cohen aan over Huygens: “In het algemeen zette hij, op momenten dat hij mogelijke radicale vernieuwingen op het spoor was, niet door: de air van een rijkeluiszootje dat tevreden was met af en toe wat virtuoos machtsvertoon blijft om Huygens hangen.” Wie wel eens in de meer dan twintig verzamelde delen van Huygens werken heeft gekeken en een idee heeft van zijn ideeënwereld met onder andere de wiskundige beschrijving van de slingerklok, de golftheorie van het licht, de ringen van Saturnus, leest deze zin met verbijstering. Wat een goedkope amateurpsychologie van die Cohen en wat vreemd dat Landsman zo’n misselijke opmerking kritiekloos overneemt. Een genie als Newton heeft het echt niet nodig dat een van zijn meest begaafde tijdgenoten op zo’n manier gedevalueerd wordt.

Pieter Lommerse, Hillegom



Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2
1055 XW Amsterdam
benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009

Gevaarlijk slingeren op zee

Af en toe beginnen grote schepen op zee opeens gevaarlijk hevig rond hun lengteas te slingeren. Het Nederlandse maritieme onderzoeksinstituut MARIN in Wageningen heeft zich tot de Studiegroep Wiskunde met de Industrie gewend voor een wiskundige analyse die inzicht geeft in het hoe en waarom van dit gedrag.

In 1998 voer een groot containerschip over de Stille Oceaan van Taiwan naar Seattle. Het kwam in een hevige storm terecht. Dat zou op zich geen probleem moeten zijn, maar deze keer begon het schip, terwijl de golven recht van voren kwamen, plotseling hevig te schommelen rond de lengteas. Het schommelde van stuurboord naar bakboord met een maximale uitwijking van tegen de veertig graden — een onverwachte vorm van resonantie. Toen de storm was gaan liggen, bleek een derde van de containers overboord geslagen en een derde hevig beschadigd. Dit is het meest extreme voorbeeld tot nu toe van plotseling optredende hevige rolbewegingen van grote schepen om hun lengteas.

In de loop van de afgelopen decennia zijn containerschepen langer geworden en zwaarder beladen, terwijl ze in de breedte vaak niet zijn veranderd. De lengte van zo'n schip kan nu in de buurt liggen van de golflengte van hoge oceaangolven: tweehonderd tot driehonderd meter. Kennelijk kan het dan gebeuren dat er een soort resonantie optreedt die het schip hevig doet rollen. Het Nederlandse maritieme onderzoeksinstituut MARIN in Wageningen onderzoekt onder welke omstandigheden dit gedrag optreedt en wil daaruit leren hoe hevige rolbewegingen voorkomen kunnen worden.

MARIN-onderzoeker Ed van Daalen legt uit hoe raar zulk rolgedrag van een groot schip

op het eerste gezicht lijkt: "Als je recht tegen de wind in fietst, dan ga je niet naar links of rechts zwabberen. Als je fietst met zijwind, dan merk je wel dat je gaat zwabberen. Op dezelfde manier verwacht je in eerste instantie niet dat een schip dat de golven precies van voren krijgt, hevig zijwaarts gaat zwabberen. En toch is dat precies wat er gebeurt in een aantal gevallen. Kennelijk ontstaat er een soort mechanische koppeling tussen wat er in verschillende bewegingsrichtingen van een schip gebeurt."

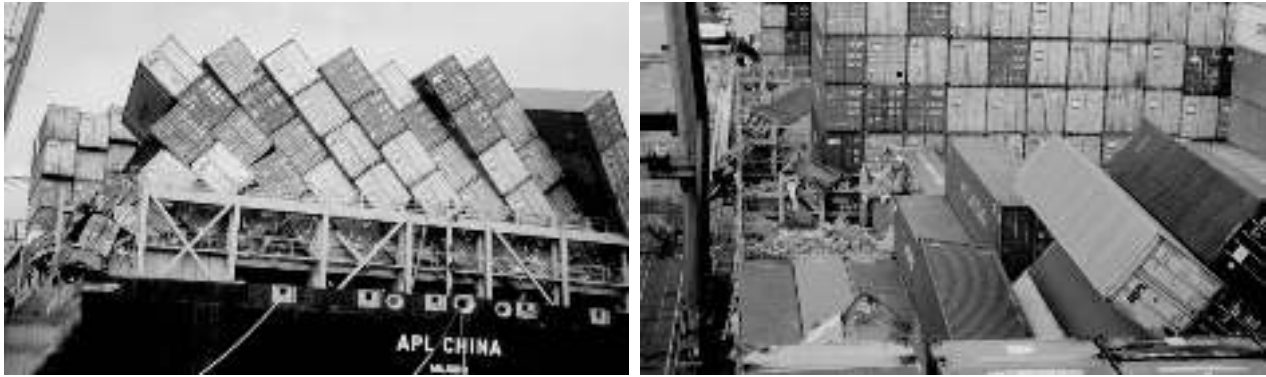
Het MARIN gebruikte tot nu toe numerieke simulatiemodellen die de bewegingsvergelijkingen van zowel de oceaangolven als het schip oplossen. De vorm van het schip wordt daarbij tot in detail gemodelleerd. "Hoewel zo'n model vrij compleet lijkt," vertelt Van Daalen, "vinden we er het resonante rolgedrag niet in terug. In de praktijk treedt dit effect wel degelijk af en toe op, maar onze simulatiemodellen voorspellen het niet. Om toch de vinger achter dit probleem te krijgen, hebben we ons gewend tot de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. Onze vraag was om niet met een numeriek simulatiemodel, maar met analytische modellen naar het rolprobleem te kijken. We hoopten dat deze an-

dere kijk ons inzicht zou verschaffen in het hoe en waarom van extreme rolbewegingen."

Slingermodellen

Wiskundige Johan Grasman, hoogleraar aan de Wageningen Universiteit, was één van de negen wiskundigen van diverse Europese nationaliteiten die zich een week lang over het MARIN-probleem heeft gebogen (Claude Archer, Marie-France Godeau, ERM Brussel; Ed F.G. van Daalen, Michiel Günsing, MARIN; Sören Dobberschütz, Univ. Bremen; Johan Grasman, WUR; Michael Muskulus, LU; Alexandr Pischanskyy, Marnix Wakker, TUD). "Wij hebben het rolprobleem vanuit twee verschillende invalshoeken onderzocht", vertelt Grasman. "Eerst hebben we verschillende mechanische modellen opgesteld, bestaande uit een massa, een veer en één of twee slingers. Deze modellen worden gebruikt om het gedrag van een schip bij golven van één bepaalde golflengte te beschrijven. Maar in werkelijkheid krijgt een schip op zee natuurlijk te maken met een superpositie van golven met verschillende golflengten. In een tweede, heel andere aanpak, hebben we daarom onderzocht welke stochastische eigenschappen de golven op zee hebben en wat dat stochastische karakter betekent voor het ontstaan van een extreme rolbeweging."

De beweging van een schip dat op de golven op en neer deint, kun je modelleren als een massa die door een periodieke kracht op en neer wordt bewogen. Omdat de beweging van het schip wordt gedempt, wordt de massa



Figuur 1 Voorbeelden van de gevolgen van de rolbeweging van een containerschip

met zowel een veer als een zuiger verbonden aan een denkbeeldig op en neer bewegend bodem. In dit mechanische model heeft het schip — voorgesteld als de massa — maar één vrijheidsgraad: het kan alleen omhoog en omlaag bewegen.

De wiskundigen hebben dit model vervolgens uitgebreid naar twee vrijheidsgraden door aan de massa een slinger te bevestigen, die ervoor zorgt dat de massa ook een rolbeweging om zijn lengteas kan maken. Het schip kan nu zowel op en neer bewegen als roteren naar stuurboord en bakboord. Grasman: “In eerste instantie hangt de slinger stil, maar bij bepaalde frequenties van de golven zet de slinger zich in beweging. Uit dit mechanische model hebben we een formule afgeleid die aangeeft boven welke golfamplitude het schip hevig gaat rollen om zijn lengteas en er een gevaarlijke resonantie ontstaat.”

Vervolgens hebben de wiskundigen met deze formule uitgerekend hoe de drempelwaarde van de amplitude afhangt van de frequentie van de golven. Dat hebben ze gedaan voor drie verschillende typen schepen, elk bij verschillende vaarsnelheden. De resultaten van deze berekeningen hebben ze in grafieken uitgezet. Grasman: “Deze grafieken laten precies zien bij welke combinatie van vaarsnelheid, golffrequentie en golfamplitude het schip instabiel wordt.”

Dit mechanische model kan verder verfijnd worden door het schip drie vrijheidsgraden van beweging te geven. Dat wordt gemodelleerd door aan de massa een tweede slinger te verbinden. Deze slinger neemt het effect mee dat de voor- en achterkant van het schip in wekelijkheid ook op en neer bewegen, een schommelbeweging om een horizontale as in dwarsrichting. “Voor dit model hebben we alleen maar een begin van een analyse gemaakt”, zegt Grasman. “Bovendien hebben we de twee slingers onafhankelijk van elkaar verondersteld, iets wat in werkelijkheid niet het geval is. Wiskundig gezien gaat het

om een zesde-orde differentiaalvergelijking, waarbij het de kunst is om in een grote parameterruimte te zoeken naar een resonantie in de rolbeweging. Omdat er van dit systeem nog geen uitgewerkte analyse bestaat, hebben we het MARIN aanbevolen om hier bijvoorbeeld een afstudeerproject van te maken.”

Stochastiek van oceaangolven

In werkelijkheid wordt de toestand van de golven op zee bepaald door de complexe interactie tussen de wind en het oppervlak van de zee. In een tweede aanpak hebben de wiskundigen onderzocht wat het gevolg voor het rolprobleem is wanneer je niet langer golven van één frequentie aanneemt, zoals in de massa-veer-slingermodellen, maar de realistische situatie waarbij het schip een superpositie van golven met allerlei frequenties tegenkomt.

“We hebben twee typen modellen bekeken”, zegt Grasman. “Een model waarbij we de zee stationair veronderstellen, en een tweede model waarin we de zee instationair veronderstellen. Het stationaire model geldt meestal maar een paar uur, tot hoogstens een paar dagen. In het algemeen verandert de golfslag op zee natuurlijk in de tijd. Golven hebben tijd nodig om zich op te bouwen. Beide modellen zijn in de literatuur al uitgebreid bestudeerd en uitgedrukt in een functie die aangeeft hoeveel energie in een golf met een bepaalde frequentie zit: het golfspectrum.”

Deze spectra hebben de wiskundigen gebruikt om een stochastische simulatie te maken van de golven. De uitkomst van deze simulatie hebben ze vervolgens als invoer gekozen voor het slinger-veermodel, waarbij het schip twee vrijheidsgraden heeft. Grasman: “Met deze aanpak hebben we laten zien hoe plotseling heftige rolbewegingen kunnen ontstaan. In een voorbeeldsimulatie was er bij een windsnelheid van 8,3 Beaufort nog geen enkele rolbeweging. Maar bij een kleine verhoging van de windsnelheid naar 8,4 Beaufort bleek er binnen tien minuten een heftige

rolbeweging te ontstaan. Dit model biedt nog veel ruimte voor verbetering, want wij hadden alleen maar tijd voor het doorrekenen van een vrij eenvoudig voorbeeld. Een van de interessante vragen die je met zo’n stochastisch golfmodel in principe kunt beantwoorden, is de vraag hoe lang het duurt voordat de golfamplitude een bepaalde kritische waarde overschrijdt.”

Ontwerpprogramma

“Het is een mooi afgerond stuk werk”, reageert MARIN-onderzoeker Ed van Daalen op de resultaten van de studiegroep. “Door achtereenvolgens analytische modellen met één, twee en drie vrijheidsgraden te beschrijven, kom je steeds een stukje dichterbij de werkelijkheid. De modellen zijn grotendeels gebaseerd op bestaand werk, maar van een deel van de literatuur waren wij niet op de hoogte. Ze geven ons een fris inzicht in het probleem van de hevige rolbewegingen. Het voordeel van deze analytische modellen is dat ze meer inzicht geven dan een computersimulatie waarin je ook alle details van het schip meeneemt. De analytische modellen zijn bovendien geformuleerd in grootheden waar we vertrouwd mee zijn en dat maakt de analyses voor ons gemakkelijk herkenbaar.”

Het MARIN heeft nog niet besloten of het met dit werk verder gaat, maar Van Daalen kan zich een aantal wegen voor vervolgonderzoek voorstellen: “We zouden met de inzichten uit het analytische model ons simulatiemodel kunnen verbeteren. Verder kan ik me ook voorstellen dat we een handig rekeninstrument ontwerpen dat voorspelt onder welke condities een schip op zee in de problemen komt. Dat zou een mooi stuk werk voor een toekomstige promovendus kunnen zijn.”

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009, van 26–30 januari 2009 in Wageningen. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.swi2009.wur.nl.

Eduard Looijenga

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

E.J.N.Looijenga@uu.nl

Maatschappij

Aan de speeltafels van NWO

Onderstaand betoog van Eduard Looijenga gaat over ‘voorselectie’ bij NWO. Hierin wordt een persoon *X* genoemd waarvan de identiteit bij de hoofdredactie bekend is. Wij hadden aanvankelijk enige aarzeling bij het opnemen van dit artikel, omdat wij weinig zicht hebben op de vraag of de beschreven voorselectie typerend is voor de procedures van NWO. Dat is op zichzelf verontrustend omdat de geldstroom voor onderzoek meer en meer via nationale kanalen loopt. Dit is een reden te meer om wel te kiezen voor discussie over voorselectie.

Voorselectie bij NWO: een casus

Een jonge wiskundige, laten we hem *X* noemen, dong dit jaar mee naar een Vidi-beurs en werd afgewezen. Niet opmerkelijk: er waren 46 aanvragen en er konden maar tussen de 3 en 6 gehonoreerd worden. Wel, dat die tot stand kwam door zogenaamde shortlisting, wat er op neer komt dat een betrekkelijk klein gezelschap van wiskundigen, informatici en astronomen op basis van veronderstelde kennis van het eigen vakgebied een eerste schifting maakt. De afwijzing was beargumenteerd met “(…) However, the committee felt that the proposed research is not sufficiently innovative to qualify for funding by the Innovational Research Incentives Scheme, largely because neither the problems themselves, nor the methods proposed here to address them are believed to be particularly novel.” Zo’n krachtige formulering kan natuurlijk alleen maar afkomstig zijn van lieden die weten waar ze het over hebben. Maar het vervolg leerde dat we NWO nog maar even niet moeten feliciteren met het bijeenbrengen van zoveel deskundigheid in zo’n klein gezelschap. De wiskundige in kwestie tekende protest aan, maar het panel bleef bij zijn standpunt met handhaving van de argumen-

tatie. Echter dit keer, waarbij we er toch van uit mogen gaan dat er nog eens heel goed naar gekeken is, ging de afwijzing vergezeld van een constatering, die ik in zijn geheel citeer: “In addition to the arguments above, the mathematical Vidi subcommittee thinks that dr. *X* has little contact with his Dutch colleagues, for example through the ‘Wiskunde Clusters’ (notably the C-cluster). He and his work are therefore considered to be relatively isolated in the Netherlands, at least as far as the mathematical and mathematical physics communities are concerned.” Dit is een opmerkelijke toevoeging, omdat het nu niet meer een oordeel betrof, maar om feiten ging. En wel om feiten, die op een eenvoudige manier zijn te weerleggen, want een bezoek aan de thuispagina van *X* leert onmiddellijk dat hij lid is van het C-cluster. En eenieder die op dit punt enige kennis van zaken heeft, zou moeten weten dat hij in ons land allerminst een geïsoleerde positie bekleedt. Dat is nogal verontrustend, lijkt me. Immers, als dit (voorlopig) anonieme panel op zulk een gezaghebbende toon de plank zo mislaat waar het de feiten betreft, hoe kunnen we dan nog geloven dat zijn wetenschappelijk oordeel van betere kwaliteit is?

De vrije competitie

Het is voor mij aanleiding de verhouding tussen NWO en de wiskundige gemeenschap in breder verband aan de orde te stellen. Zoals bekend meende de vorige minister van OCW, Plasterk, dat de verdeling van het schaarse onderzoeksgeld bij NWO in betere handen is dan bij de instellingen en bracht dat tot uitdrukking door de komende jaren honderd miljoen weg te halen van de laatsten, met het voornemen die over te hevelen naar NWO. Een van de eerste effecten van deze maatregel was het verdwijnen van de door de instelling gefinancierde AiO, waardoor promotieplaatsen nu eigenlijk alleen nog maar bekostigd kunnen worden uit de tweede of derde geldstroom, met als voorspelbaar gevolg niet alleen een aanzwellende aanvragenstroom, maar ook een door universitaire bestuurders uitgeoefende grotere scoringspressie. Voor wiskundigen komt het er op neer dat NWO in feite de enige financier van promovendi is geworden. Voor iedere aan te stellen promovendus dient dus een aanvraag geformuleerd te worden en moeten er, om minstens drie rapporten binnen te halen, een stuk of vijf referenten worden aangezocht. Zo gaan heel wat van de kostbare onderzoeksuren van Nederlandse en buitenlandse wiskundigen zitten in een operatie, waarvan de opbrengst kan worden uitgedrukt in het honoreringspercentage van ongeveer 20%. Dat betekent dat er per toewijzing van een ‘simpele’ OiO-plaats 25 referenten moeten worden aangeschreven! Of de instellingen het op het punt van selec-

tie beter zouden doen dan NWO laat ik in het midden, maar het is wel zeker dat die een veel minder zware wissel trekken op het referentenverkeer. Gelukkig is er hier tot dusverre geen sprake van een voorselectie.

De vernieuwingsimpuls

Anders is dat bij de vernieuwingsimpuls. Want zowel van de Veni- als de Vidi-aanvragen kan maar 10% toegewezen worden. Zulk een percentage geeft deze rondes eigenlijk meer het karakter van een kansspel, terwijl juist het belang voor de aanvragers navenant groter is, want de instellingen plegen hier nog meer dan bij de vrije competitie succes te koppelen aan het loopbaanperspectief, zoals het verwerven van uitzicht op een vaste aanstelling.

Omdat er dan voor ieder te honoreren project zo'n 50 referenten aangeschreven zouden moeten worden, heeft NWO er voor gekozen in zulke gevallen eerst een reductie van 50% tot stand te brengen door de leden van de panels voor hun eigen vakgebied een voorselectie te laten uitvoeren. De juiste formulering zou natuurlijk moeten zijn: NWO vraagt de panelleden dit te doen en die stemmen hierin toe, maar naar ik begrijp schijnt bij nog geen enkel

panellid de gedachte te zijn opgekomen dat je zoiets, zeg vanwege een gebrek aan expertise, zou kunnen weigeren. Vermoedelijk verloopt de wijze waarop zo iemand dit tegenover zichzelf onbewust rechtvaardigt langs een bekende route: hij onderkent dat dit weliswaar niet ideaal is, maar iemand moet het toch doen, en als een gezaghebbend orgaan (dat toch wel zal weten wat het doet) hem daarom vraagt, met als impliciete boodschap dat de gemeenschap zo een dienst bewezen wordt, ach, dan kan hij toch eigenlijk geen nee zeggen. En, zo gaat de redenering soms nog verder, als hij nee zou zeggen, dan komt vast een ander daarvoor in de plaats, en die is voor deze belangrijke taak natuurlijk veel minder gekwalificeerd.

In weerwil van de gebezigde naam lijkt shortlisting vooral een Nederlands fenomeen: al bijna een jaar of 15 ben ik geen lid meer geweest van een NWO-panel, maar wel heb (en had) ik zitting in een aantal buitenlandse beoordelingscommissies, met veelal leden die ik wiskundig hoger aansla dan mijzelf. Niettemin werden bij al deze commissies de beslissingen genomen op basis van referentierapporten — niemand die

ook maar overwoog het anders te doen.

Over de gevolgen

Ik wil hier tenslotte betogen dat een dergelijke voorselectie *alle* betrokkenen schaadt. Een panellid dat overweegt zich hiervoor te lenen zou zich eens moeten verplaatsen in de aanvrager, vaak iemand die hoopt aan het begin van een wetenschappelijke loopbaan te staan en die (zoals *X*) in een project al zijn wetenschappelijke ambities voor de komende vijf jaar heeft samengebracht. Dat die met een kans van 9 op 10 zijn neus gaat stoten, is iets wat wij wiskundigen schandalig kunnen vinden, maar waar wij niets aan kunnen doen (en NWO vermoedelijk evenmin). Maar als hij reden heeft te onderstellen afgewezen te worden door vakgenoten die hun eigen beperkingen niet kennen, dan zou hij voor de wetenschap wel eens voor altijd verloren kunnen zijn en zal dit uiteindelijk de Nederlandse wiskunde een slechte naam bezorgen. Bovendien zal het aanvaarden van dit soort procedures zijn effecten hebben op de beoordelaars zelf, want door zich zo te compromitteren, verliest een generatie zijn intellectuele integriteit. ←



Stefan van Zwam

University of Waterloo, Canada, en
Centrum Wiskunde en Informatica
Science Park 123
1098 XG Amsterdam
Stefan.van.Zwam@cwi.nl

Onderzoek

Matroïden en hun representaties

Als je alleen naar abstracte eigenschappen van symmetrie kijkt, dan beland je al snel bij de definitie van een groep. Maar wat krijg je als je alleen naar de abstracte eigenschappen van lineaire afhankelijkheid kijkt? In dit artikel geeft Stefan van Zwam een antwoord op deze vraag: matroïden! Hij behandelt de grondslagen van de matroïdentheorie en toont een aantal oude en nieuwe resultaten. Stefan van Zwam won in 2009 de Philips Wiskundeprijs voor Promovendi met zijn voordracht 'How to show it doesn't fit'.

Matroïdentheorie is een fascinerende tak van de discrete wiskunde. Door sterke banden met grafentheorie, lineaire algebra, coderingstheorie en projectieve meetkunde is het een veelzijdig vakgebied. Praktische toepassingen van de matroïdentheorie zijn te vinden in de combinatorische optimalisering, waar onder meer verbanden bestaan met het greedy algoritme, geheeltallige lineaire optimalisering en matching-problemen.

In dit stuk wil ik proberen een beeld te geven van de matroïdentheorie en het onderzoek dat ik erin doe.

Abstracte afhankelijkheid

In 1935 introduceerde Whitney [13] de naam matroïde in zijn artikel 'On the abstract properties of linear dependence'. [18] De titel was goed gekozen, want dat is precies wat matroïdentheorie is: een studie van de abstracte eigenschappen van afhankelijkheid. Wat voor eigenschappen zijn dit? Neem een eindige verzameling E van vectoren uit een vectorruimte V . Stel dat $I \subseteq E$ een verzameling lineair onafhankelijke vectoren is. Dan is elke deelverzameling van I ook lineair onafhankelijk. Als $J \subseteq E$ een andere verzameling lineair onafhankelijke vectoren is, en J bevat meer elementen dan I , dan moet er een vector $e \in J$ zijn die niet in het opspansel van I

bevat is. Whitney nam deze twee eigenschappen, verwijderde elke referentie aan een vectorruimte, en kwam tot de volgende definitie:

Definitie 1. Een matroïde is een paar $(E, \mathcal{I})$, waarbij E een eindige verzameling is en $\mathcal{I}$ een collectie deelverzamelingen van E die voldoet aan deze voorwaarden:

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$;
2. Als $I \subseteq J$ en $J \in \mathcal{I}$, dan ook $I \in \mathcal{I}$;
3. Als $I, J \in \mathcal{I}$ en $|I| < |J|$, dan is er een $e \in J$ zodat $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

De deelverzamelingen in $\mathcal{I}$ heten *onafhankelijk*; de overige deelverzamelingen noemen we *afhankelijk*. Deze axioma's staan meer toe dan alleen verzamelingen vectoren. Een voorbeeld is algebraïsche onafhankelijkheid in de theorie van lichaamsuitbreidingen. Voor een ander voorbeeld gaan we naar de grafentheorie. Ter opfrissing: een *graaf* is een paar $G = (V, E)$ van een eindige verzameling V , de 'punten', en een collectie E van paren van punten, de 'kanten'. Een *bos* van G is een deelgraaf die geen circuit bevat. Anders gezegd: tussen elk tweetal punten is hooguit één pad. Een graaf heet *samenhangend* als er tussen elk tweetal punten een pad bestaat. Tenslotte, H is een *component* van G als H een samenhangende deelgraaf is, en geen en-

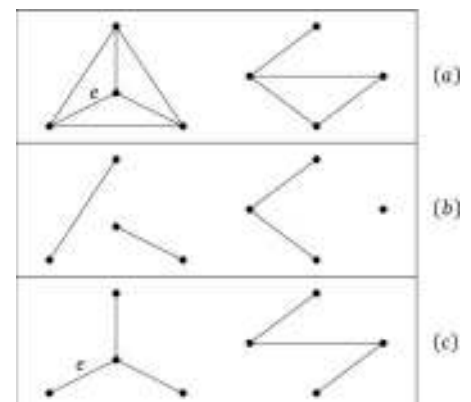
kele samenhangende deelgraaf van G die H bevat meer kanten heeft. Zie Figuur 1.

Stelling 2. Als $G = (V, E)$ een graaf is, en $\mathcal{I}$ bestaat uit alle kantenverzamelingen van bossen, dan is $M(G) = (E, \mathcal{I})$ een matroïde.

Bewijs. Alleen het derde axioma is niet triviaal. Laat I en J de kantenverzamelingen van twee bossen zijn, met $|J| > |I|$. Het aantal componenten van de deelgraaf (V, I) is $|V| - |I|$. Hieruit volgt dat er in J een kant e moet zijn die twee verschillende componenten van (V, I) verbindt. Maar dan bevat $I \cup \{e\}$ geen circuit, en dus $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. $\square$

Allemaal axioma's

Natuurlijk zijn er nog veel andere abstracte eigenschappen van lineaire afhankelijkheid te bedenken, bijvoorbeeld door te kijken naar de



Figuur 1 (a) Een graaf met twee componenten. (b), (c) Twee deelgrafen die bossen zijn.

bases, de minimale afhankelijke verzamelingen, de rang-functie, enzovoort. Het lijkt dus alsof onze keuze van axioma's nogal willekeurig is, maar niets is minder waar! Er bestaan verrassend veel stelsels van axioma's die allemaal dezelfde verzameling structuren opleveren. Birkhoff noemde zulke stelsels 'cryptomorf'. Ik geef, zonder bewijs, drie voorbeelden. Het eerste wijkt niet veel af van de originele definitie. Het verschil is dat we nu naar *maximale* onafhankelijke deelverzamelingen kijken, die we bases noemen.

Definitie 3. Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. Een deelverzameling $B \subseteq E$ is een basis als $B \in \mathcal{I}$, en $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ voor alle $e \in E \setminus B$.

Stelling 4. Laat E een eindige verzameling zijn. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van E is de verzameling bases van een matroïde dan en slechts dan als $\mathcal{B}$ voldoet aan deze voorwaarden:

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$;
2. Als $B, B' \in \mathcal{B}$ en $e \in B \setminus B'$, dan is er een $f \in B' \setminus B$ zodat $(B \setminus \{e\}) \cup \{f\} \in \mathcal{B}$.

Voor ons tweede voorbeeld kijken we naar minimale afhankelijke deelverzamelingen, die we circuits noemen. Deze naam is afgeleid van het voorbeeld van grafen hierboven.

Definitie 5. Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. Een deelverzameling $C \subseteq E$ is een circuit als $C \notin \mathcal{I}$, maar voor elke deelverzameling van C geldt $C \in \mathcal{I}$.

Stelling 6. Laat E een eindige verzameling zijn. Een collectie $\mathcal{C}$ van deelverzamelingen van E is de verzameling circuits van een matroïde dan en slechts dan als $\mathcal{C}$ voldoet aan deze voorwaarden:

1. $\emptyset \notin \mathcal{C}$;
2. Als $C, C' \in \mathcal{C}$ en $C' \subseteq C$ dan $C' = C$;
3. Als $C, C' \in \mathcal{C}$ zodat $C \neq C'$, en $e \in C \cap C'$, dan is er een $C'' \subseteq (C \cup C') \setminus \{e\}$ zodat $C'' \in \mathcal{C}$.

De laatste eigenschap is vrij eenvoudig te bewijzen voor verzamelingen vectoren: als C, C' verschillende verzamelingen vectoren zijn zodat

$$\sum_{f \in C} \alpha_f f = \sum_{f \in C'} \beta_f f = 0$$

waarbij alle α_f en β_f ongelijk nul zijn, dan is

$$\sum_{f \in C} \alpha_f^{-1} \alpha_f f - \sum_{f \in C'} \beta_f^{-1} \beta_f f = 0.$$

Hieruit volgt dat $(C \cup C') \setminus \{e\}$ lineair afhankelijk is, en dus een of meer minimale afhankelijke deelverzamelingen vectoren bevat.

Ons laatste voorbeeld generaliseert het begrip dimensie van deelruimten opgespannen door vectoren.

Definitie 7. Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. De rang-functie van M is $rk_M : 2^E \rightarrow \mathbf{N}$, gedefinieerd door

$$rk_M(I) := \max\{|J| : J \subseteq I, J \in \mathcal{I}\}.$$

Stelling 8. Laat E een eindige verzameling zijn. Een functie $r : 2^E \rightarrow \mathbf{N}$ is de rang-functie van een matroïde dan en slechts dan als r voldoet aan deze voorwaarden:

1. Voor alle $X \subseteq E$ geldt $0 \leq r(X) \leq |X|$;
2. Voor alle $X, Y \subseteq E$ met $X \subseteq Y$ geldt $r(X) \leq r(Y)$;
3. Voor alle $X, Y \subseteq E$ geldt

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

De derde eigenschap, die *submodulariteit* genoemd wordt, volgt voor verzamelingen vectoren eenvoudig uit de dimensieformule voor lineaire deelruimten:

$$\begin{aligned} \dim(V) + \dim(W) \\ = \dim(V + W) + \dim(V \cap W). \end{aligned}$$

De ongelijkheid in de stelling ontstaat omdat $X \cap Y$ soms te weinig elementen bevat om de volledige ruimte $V \cap W$ op te spannen.

Dualiteit

Als matroïdentheorie alleen een studie van axiomasystemen zou zijn, dan zou het onderwerp al jaren geleden zijn opgedroogd. Gelukkig is er veel meer over te zeggen. Een belangrijk concept is de *duale*, een generalisatie van het concept van orthogonale deelruimten. Voor matroïden werkt dat als volgt:

Stelling 9. Laat $\mathcal{B}$ de verzameling bases zijn van een matroïde $M = (E, \mathcal{I})$, en definieer

$$\mathcal{B}^* := \{E - B : B \in \mathcal{B}\}.$$

Dan is $\mathcal{B}^*$ de verzameling bases van een matroïde M^* die we de duale van M noemen.

Een verrassende stelling legt een verband tussen dualiteit en een topologische eigenschap van een graaf. We zeggen dat een graaf *planair* is als het mogelijk is om de punten in het vlak te tekenen, en de kanten als krom-

men te tekenen die elkaar alleen snijden in hun eindpunten. De graaf in Figuur 1 is een voorbeeld van een planaire graaf.

Stelling 10. Laat G een graaf zijn, en $M = M(G)$ de matroïde zoals gedefinieerd in Stelling 2. De duale M^* is de matroïde $M(H)$ van een graaf H dan en slechts dan als G planair is.

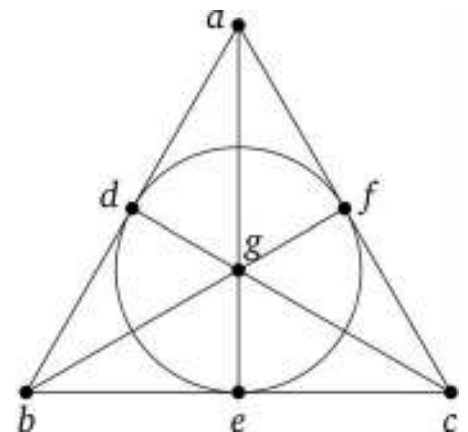
Projectieve meetkunde

Een matroïde is ook op te vatten als een verzameling punten in een abstracte projectieve meetkunde. Een voorbeeld is Figuur 2. De elementen van de matroïde zijn de zeven punten. Een deelverzameling punten is onafhankelijk als deze hooguit drie punten bevat, en als die drie punten bovendien niet op een lijn liggen, waarbij een 'lijn' niet altijd recht hoeft te zijn. Wel is het zo dat elk tweetal punten precies één lijn definieert, en dat twee lijnen elkaar in hooguit één punt snijden. In het voorbeeld is $\{d, e, f\}$ dus afhankelijk en $\{a, c, d\}$ onafhankelijk.

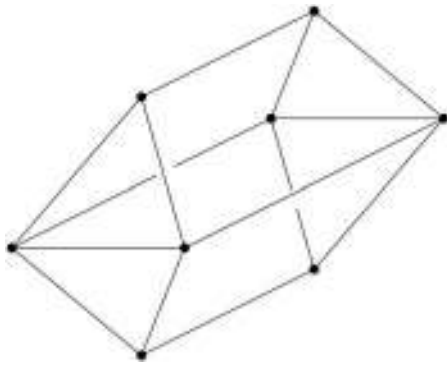
Een tweede voorbeeld is Figuur 3. Deze configuratie staat bekend als de *Vámos-matroïde*. De onafhankelijke verzamelingen zijn de deelverzamelingen die hooguit vier punten bevatten, met uitzondering van de verzamelingen hoekpunten van de vijf aangeduide vlakken. Een interessante eigenschap van deze matroïde is dat het *onmogelijk* is om een verzameling vectoren te vinden met precies deze lineair onafhankelijke deelverzamelingen, ongeacht welke vectorruimte je gebruikt!

Representaties

Whitney vroeg zich in zijn artikel af hoe goed zijn axioma's de eigenschappen van vectorruimten benaderen. Uit het vorige voorbeeld blijkt al dat de benadering niet perfect is. Dit leidt tot een belangrijke klasse van problemen in de matroïdentheorie, namelijk de representatieproblemen.



Figuur 2 Meetkundige weergave van de Fano-matroïde



Figuur 3 Meetkundige weergave van de Vámos-matroïde

Definitie 11. Laat $M = (E, \mathcal{I})$ een matroïde zijn. Een representatie van M over een lichaam $\mathbf{F}$ is een afbeelding $A : E \rightarrow \mathbf{F}^r$, voor zekere $r \geq \text{rk}_M(E)$, zodat, voor alle $X \subseteq E$,

$$\{A(e) : e \in X\}$$

lineair onafhankelijk is dan en slechts dan als

$$X \in \mathcal{I}.$$

In het vervolg zullen we A simpelweg als matrix behandelen, waarbij de kolommen worden gelabeld met de elementen van E . We zeggen dat M representeerbaar is over $\mathbf{F}$ als er een representatie A bestaat.

Als M representeerbaar is over $\mathbf{F}$, dan is er een representatie A met $r = \text{rk}_M(E)$ rijen. Verder geldt het volgende. Als A een representatie is, en A' is verkregen uit A door rijoperaties, dan is A' ook een representatie. Rijoperaties bestaan uit een rij bij een andere optellen, of alle elementen van een rij vermenigvuldigen met een element van $\mathbf{F} \setminus \{0\}$. Bovendien kunnen we kolommen schalen met een element van $\mathbf{F} \setminus \{0\}$, en kunnen we alle elementen vervangen door hun beeld onder een automorfisme van $\mathbf{F}$.

Laten we ter illustratie een representatie opstellen voor de Fano-matroïde (Figuur 2). We nemen als lichaam $\text{GF}(2)$, het lichaam met twee elementen 0 en 1, met de relatie $1+1=0$ en overige optellingen en vermenigvuldigingen zoals gewoonlijk. We mogen, door het uitvoeren van rijoperaties, aannemen dat de kolommen van de representatie corresponderend met elementen a, b, c een identiteitsmatrix vormen. Verzameling $\{a, b, d\}$ is afhankelijk. Hieruit volgt vrijwel direct dat de met d corresponderende kolom van A gelijk moet zijn aan $(1, 1, 0)$. Zo verder werkend komen we tot de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Voor een gegeven matroïde M kunnen we ons nu allerlei vragen stellen:

1. Wat is de verzameling lichamen waarover M representeerbaar is?
2. Kunnen alle representaties van M over een lichaam door bovenstaande operaties in elkaar worden overgevoerd?
3. Is M representeerbaar over een specifiek lichaam?

Die eerste vraag leidt tot verrassende resultaten, dus laten we daar mee beginnen. De tweede vraag voert te ver voor dit stuk; ik volsta ermee om te zeggen dat het antwoord vaak “nee” is. Op de derde vraag kom ik terug in de sectie ‘Geen representaties’.

Veel representaties

In 1965 bewees Tutte de volgende stelling:

Stelling 12. Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

1. M is representeerbaar over elk lichaam;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(2)$ en $\text{GF}(3)$;
3. M is representeerbaar over $\mathbf{R}$ met een totaal unimodulaire matrix.

Een matrix is *totaal unimodulair* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{-1, 0, 1\}$. Voor matroïden representeerbaar over $\text{GF}(2)$ (die we ‘binair’ noemen) zijn er dus maar twee mogelijkheden. Ofwel ze zijn alleen representeerbaar over lichamen van karakteristiek 2, ofwel ze zijn representeerbaar over elk lichaam. In het laatste geval noemen we zo’n matroïde *regulier*. De laatste eigenschap in de stelling vormt de sleutel tot een bewijs. We kunnen een totaal unimodulaire matrix opvatten als een matrix over de ring $\mathbf{Z}$, en deze via een *ring-homomorfisme* afbeelden op de ring $\mathbf{Z}_p = \text{GF}(p)$. Zo’n afbeelding zorgt dat determinanten die nul waren nul blijven, en die ongelijk nul waren ook ongelijk nul blijven. Het gevolg is dat de lineaire afhankelijkheden niet veranderen.

Omgekeerd is het mogelijk om, uitgaande van een representatie over $\text{GF}(2)$, een unieke totaal unimodulaire matrix te maken als die bestaat. Om dit stuk niet al te technisch te maken zal ik de details niet bespreken.

In de tweede helft van de jaren ’90 publiceerde Whittle [14–15] een aantal resultaten met dezelfde structuur als de stelling van Tutte. Ik geef twee voorbeelden.

Stelling 13. Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

1. M is representeerbaar over elk lichaam met oneven karakteristiek;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(3)$ en $\text{GF}(5)$;

3. M is representeerbaar over $\mathbf{R}$ met een totaal dyadische matrix.

Een matrix is *totaal dyadisch* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm 2^k : k \in \mathbf{Z}\}$.

Stelling 14. Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

1. M is representeerbaar over elk lichaam met minstens 3 elementen;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(3)$, $\text{GF}(4)$ en $\text{GF}(5)$;
3. M is representeerbaar over $\mathbf{R}(\alpha)$ met een haast-unimodulaire matrix.

In deze stelling is α een onbekende. Een matrix is *haast-unimodulair* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm \alpha^k (1 - \alpha)^l : k, l \in \mathbf{Z}\}$. Analoot aan Tutte’s stelling noemen we deze verzameling matroïden *haast-regulier*.

Net als in de stelling van Tutte kun je bewijzen dat de derde bewering de eerste twee impliceert met behulp van een ring-homomorfisme vanuit een goed gekozen ring. Maar het bewijs in de andere richting is niet zo eenvoudig. Een belangrijk verschil tussen de stelling van Tutte en de stellingen van Whittle is te vinden in de laatste conditie. In de stelling van Tutte kunnen de elementen van de matrix slechts drie waarden aannemen, terwijl de matrices in de stellingen van Whittle willekeurig veel verschillende waarden kunnen bevatten. Samen met Rudi Pendavingh [9] heb ik een algemene stelling bewezen die de omgekeerde route wel mogelijk maakt. Bovendien geeft deze stelling eenvoudig te verifiëren condities die de equivalenties impliceren.

We hebben deze stelling onder meer gebruikt om het volgende resultaat te bewijzen [19]:

Stelling 15. Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

1. M is representeerbaar over $\mathbf{R}$, over $\text{GF}(5)$, over $\text{GF}(p^2)$ voor elk priemgetal p , en over $\text{GF}(p)$ als $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(4)$ en $\text{GF}(5)$;
3. M is representeerbaar over $\mathbf{R}$ met een gulden-sne matrix.

Een matrix is *gulden sne* als elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm \tau^k : k \in \mathbf{Z}\}$, waarbij τ de gulden sne is, i.e. de positieve wortel van $x^2 - x - 1$.

Onze stelling was helaas niet toereikend om het volgende vermoeden te bevestigen:

Vermoeden 16. Laat M een matroïde zijn. De volgende uitspraken zijn equivalent:

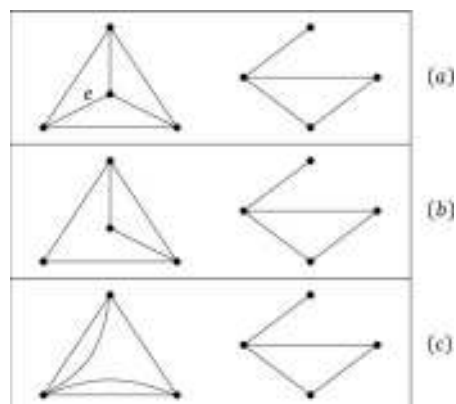
1. M is representeerbaar over elk lichaam van karakteristiek 2, behalve eventueel $\text{GF}(2)$;
2. M is representeerbaar over $\text{GF}(2)(\alpha)$ met een matrix waarvan elke vierkante deelmatrix een determinant heeft in $\{0\} \cup \{\pm \alpha^k(1 + \alpha)^l : k, l \in \mathbb{Z}\}$.

Geen representaties

Tenslotte kijken we naar de vraag of een matroïde representeerbaar is over een specifiek lichaam (of verzameling lichamen). Als het antwoord “ja” is dan kun je iemand daarvan overtuigen door een representatie te vinden en te verifiëren dat alle afhankelijkheden van de vectoren zijn zoals voorgeschreven. [20] Maar hoe toon je aan dat een matroïde *geen* representatie heeft over een gewenst lichaam? Een van de gebruikelijke technieken hebben we overgenomen van de grafentheorie. Een graaf H is een *minor* van G als H verkregen is door het weghalen van sommige kanten en punten, en door het samentrekken van sommige kanten. Een samentrekking bestaat uit het weghalen van de kant en het identificeren van de eindpunten. Zie Figuur 4. Een klassieke stelling uit de grafentheorie is de Stelling van Kuratowski:

Stelling 17. Een graaf G is planair dan en slechts dan als G geen minor heeft isomorf aan K_5 of $K_{3,3}$.

Afbeeldingen van $K_{3,3}$ en K_5 zijn te vinden in Figuur 5. Ook voor matroïden zijn minoren te definiëren. De precieze definities zijn niet belangrijk voor dit stuk, maar voor de volledigheid zal ik ze toch geven. Het weghalen van een element e is eenvoudig: de nieuwe matroïde, die we met $M \setminus e$ aanduiden, heeft als elementen $E \setminus \{e\}$ en als onafhankelijke deelverzamelingen precies die verzamelingen die



Figuur 4 (a) Een graaf G . (b) De graaf G met e weggehaald. (c) De graaf G met e samengetrokken.

eerder al onafhankelijk waren. Het samentrekken is niet veel moeilijker: deze operatie komt overeen met het weghalen van een element e in de duale matroïde. We noteren de nieuwe matroïde met M/e . In formulevorm:

$$M/e = (M^* \setminus e)^*.$$

Als M een verzameling vectoren vertegenwoordigt dan heeft het samentrekken van e een interessante interpretatie: eerst worden de overige vectoren geprojecteerd op de deelruimte orthogonaal op e , en dan wordt e weggehaald. Een *minor* van een matroïde M is een matroïde verkregen uit M door een reeks van deze twee operaties.

Een belangrijke observatie is dat deze operaties een *partiële ordening* opleveren: we schrijven $N \leq M$ als N isomorf is aan een minor van M . De verzamelingen matroïden die we tot nu toe bekeken hebben zijn *gesloten onder het nemen van minoren*:

Stelling 18. Laat $\mathcal{F}$ een verzameling lichamen zijn, en M een matroïde representeerbaar over elk van deze lichamen. Dan zijn M^* en alle minoren van M eveneens representeerbaar over elk van deze lichamen.

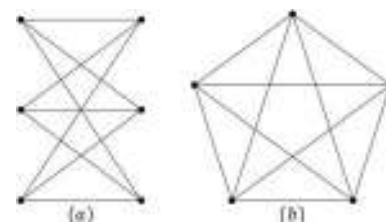
Nu kunnen we beweringen analoog aan de Stelling van Kuratowski doen. Laat $\mathcal{M}$ een verzameling matroïden zijn die gesloten is onder het nemen van minoren. We zeggen dat M een *verboden minor* is voor $\mathcal{M}$ als $M \notin \mathcal{M}$, maar elke minor van M met strict minder elementen wel in $\mathcal{M}$ voorkomt. Met andere woorden: M is een matroïde die niet in de verzameling zit en minimaal is in de minor-ordening wat betreft deze eigenschap. Misschien wel het belangrijkste onopgeloste probleem in de matroïdentheorie is het Vermoeden van Rota:

Vermoeden 19. Voor elk eindig lichaam $\text{GF}(q)$ is er een eindige lijst verboden minoren voor de verzameling matroïden die representeerbaar is over $\text{GF}(q)$.

Dit vermoeden stamt uit de jaren '70. Veel onderzoekers hebben een poging gewaagd om het te bewijzen, maar het is tot nu toe slechts voor drie lichamen opgelost:

Stelling 20. Het Vermoeden van Rota is waar voor $2 \leq q \leq 4$.

Voor $q = 2$ is er precies één verboden minor [12], voor $q = 3$ zijn dat er vier [1, 11], en voor $q = 4$ zijn dat er zeven [2]. Voor $q = 5$ zijn er al meer dan 500 bekend [6]. Merk op dat de



Figuur 5 (a) De graaf $K_{3,3}$. (b) De graaf K_5 .

eis dat het lichaam eindig is niet kan worden weggelaten: voor elk oneindig lichaam $\mathbf{F}$ zijn er oneindig veel verboden minoren voor de verzameling matroïden die representeerbaar is over $\mathbf{F}$.

Voor verzamelingen van lichamen is de situatie niet veel beter. Tot voor kort was er alleen de volgende stelling van Tutte, een aanvulling op Stelling 12:

Stelling 21. Er zijn precies drie verboden minoren voor de verzameling reguliere matroïden.

Een mooi en kort bewijs van deze stelling is te vinden in een artikel van Gerards [4]. Recent heb ik, samen met Rhiannon Hall en Dillon Mayhew [5], een vergelijkbare stelling voor haast-reguliere matroïden bewezen, een aanvulling op Stelling 14:

Stelling 22. Er zijn precies tien verboden minoren voor de verzameling haast-reguliere matroïden.

Ondanks de beperkte hoeveelheid resultaten hierboven heb ik er vertrouwen in dat het Vermoeden van Rota binnen niet al te lange tijd bewezen zal worden.

Meer weten?

In dit stuk heb ik slechts een klein deel van de matroïdentheorie bestreken. Ik ben bijvoorbeeld niet toegekomen aan het begrip samenhang, dat een zeer centrale rol speelt bij de bewijzen van een aantal van de hierboven genoemde stellingen. Ook ben ik voorbij gegaan aan de eigenschappen van matroïden die meer dan één representatie hebben over een enkel lichaam. Inequivalente representaties doemen op voor lichamen met 4 of meer elementen en zijn het belangrijkste obstakel voor een bewijs van het Vermoeden van Rota. Tenslotte ben ik voorbij gegaan aan het werk van Geelen, Gerards en Whittle [3], die bezig zijn het uiterst succesvolle Graph Minors Project van Robertson en Seymour te generaliseren naar matroïden representeerbaar over een eindig lichaam.

Het standaardwerk in het vakgebied is

Matroid Theory, geschreven door James Oxley [8]. Oxley [7] heeft eveneens een overzichtsartikel geschreven dat, in tegenstelling tot dit stuk, een meer bescheiden tempo heeft en een flink aantal bewijzen bevat. Schrij-

ver [10] geeft, in Hoofdstuk 39.10b, een uitgebreid overzicht van de geschiedenis van de matroïdentheorie. Whittle [16] geeft een goed overzicht van recent onderzoek tot 2005 en trends die ook nu nog het gezicht van het on-

derzoek bepalen. Een uitgebreide referentielijst is te vinden in mijn proefschrift [17], dat onder meer beschikbaar is vanaf mijn website www.cwi.nl/~zwam. ↩

Referenties

- 1 R. E. Bixby, 'On Reid's characterization of the ternary matroids', *J. Combin. Theory Ser. B*, **26**(2), pp. 174–204, 1979.
- 2 J. F. Geelen, A. M. H. Gerards, A. Kapoor, 'The excluded minors for GF(4)-representable matroids', *J. Combin. Theory Ser. B*, **79**(2), pp. 247–299, 2000.
- 3 J. Geelen, B. Gerards, G. Whittle, 'Towards a matroid-minor structure theory', In *Combinatorics, complexity, and chance*, vol. 34 of *Oxford Lecture Ser. Math. Appl.*, pp. 72–82, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- 4 A. M. H. Gerards, 'A short proof of Tutte's characterization of totally unimodular matrices', *Linear Algebra Appl.*, **114/115**, pp. 207–212, 1989.
- 5 R. Hall, D. Mayhew, S. H. M. van Zwam, 'The excluded minors for near-regular matroids', *European J. Combin.*, 2010. Accepted. Preprint at [arXiv:0902.2071v2](http://arXiv.org/abs/0902.2071v2) [math.CO].
- 6 D. Mayhew, G. F. Royle, 'Matroids with nine elements', *J. Combin. Theory Ser. B*, **98**(2), pp. 415–431, 2008.
- 7 J. G. Oxley, 'What is a matroid?', available from www.math.lsu.edu/~oxley.
- 8 J. G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford University Press, 1992.
- 9 R. A. Pendavingh, S. H. M. van Zwam, 'Lifts of matroid representations over partial fields', *J. Combin. Theory Ser. B*, **100**(1), pp. 36–67, 2010.
- 10 A. Schrijver, *Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency*, vol. 24 of *Algorithms and Combinatorics*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- 11 P. D. Seymour, 'Matroid representation over GF(3)', *J. Combin. Theory Ser. B*, **26**(2):159–173, 1979.
- 12 W. T. Tutte, 'A homotopy theorem for matroids. I, II', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88**, pp. 144–174, 1958.
- 13 H. Whitney, 'On the abstract properties of linear dependence', *Amer. J. Math.*, **57**(3), pp. 509–533, 1935.
- 14 G. Whittle, 'A characterisation of the matroids representable over GF(3) and the rationals', *J. Combin. Theory Ser. B*, **65**(2), pp. 222–261, 1995.
- 15 G. Whittle, 'On matroids representable over GF(3) and other fields', *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**(2), pp. 579–603, 1997.
- 16 G. Whittle, 'Recent work in matroid representation theory', *Discrete Math.*, **302**(1–3), pp. 285–296, 2005.
- 17 S. H. M. van Zwam, *Partial fields in matroid theory*, PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2009.
- 18 Niet tot ieders vreugde. Gian-Carlo Rota, bijvoorbeeld, was erg ongelukkig met de term matroïde, die hij 'onbeschrijfelijk kakafonisch' noemde.
- 19 Deze stelling is ooit aangekondigd door Vertigan. Hij heeft echter nooit een bewijs gepubliceerd.
- 20 Voor de algoritmicci onder de lezers: deze verificatie is *niet* een polynomiale-tijd algoritme. Algoritmische vragen rondom matroïden zijn overigens sterk afhankelijk van de manier waarop de matroïde wordt aangeboden.

Birgit van Dalen

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
bevandalen@gmail.com

Quintijn Puite

Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
g.w.q.puite@tue.nl

Maatschappij

De Wiskunde Olympiade in zeven vragen

De Wiskunde Olympiade: iedereen heeft er wel eens van gehoord. Omdat je zelf als scholier ooit meegedaan hebt aan één of meer rondes van deze wedstrijd, omdat je verhalen van studenten hebt gehoord die het olympiadetrainingsprogramma doorlopen hebben, of omdat je collega's hebt die betrokken zijn bij de organisatie van de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) in 2011 in Nederland. Voor iedereen die nu wel eens wil weten hoe de olympiade precies in elkaar zit, hier zeven vragen en antwoorden, over alles van de eerste ronde tot en met IMO 2011 in Nederland. Birgit van Dalen en Quintijn Puite vertellen graag over alle ins en outs.

Vraag 1: Hoe zit de Nederlandse Wiskunde Olympiade in elkaar en hoeveel scholieren doen er mee aan deze wedstrijd?

De eerste ronde van de wiskundeolympiade vindt elk jaar in januari plaats op havo/vwo-scholen in het land. Aan deze ronde doen zo'n 4000 leerlingen uit klas 1 tot en met 5 mee. De opgaven (zie een voorbeeldopgave in Fi-

guur 1) vereisen geen kennis van bovenbouwstof, maar wel een flinke dosis creativiteit en doorzettingsvermogen. De leerlingen uit verschillende jaarlagen krijgen dezelfde opgaven voor hun kiezen, maar om door te gaan naar de volgende ronde worden aan een vijfdeklasser andere eisen gesteld dan aan bijvoorbeeld een onderbouwleerling. De eerste ronde telt 700 winnaars, die uitgenodigd worden voor de tweede ronde. Deze vindt plaats in maart op de universiteiten van Amsterdam (2×), Delft, Eindhoven, Groningen, Leiden, Nijmegen, Rotterdam, Twente en Utrecht. De 150 besten van de tweede ronde nemen vervolgens in september deel aan de finale op de Technische Universiteit Eindhoven.

Tot voor kort bestond de wedstrijd uit alleen een eerste ronde en een finale; de tweede ronde is hier in 2010 tussengevoegd. Deze extra ronde is in eerste instantie ingevoerd om een zuiverder selectie voor de finale te krijgen. Maar het mes snijdt aan twee kanten. Zo krijgen door deze nieuwe tweede ronde maar liefst 700 leerlingen de positieve boodschap dat ze bovengemiddeld goed in wiskunde zijn, tegenover 150 voorheen. Verder gaat nu van vrijwel alle circa 250 deelnemende scholen wel een leerling door, waar docenten al opgetogen op hebben gereageerd.

Vraag 2: Wat is precies de rol van die tien universiteiten hierbij?

De winnaars van de eerste ronde worden verdeeld over de tien genoemde universiteiten. Elke universiteit ontvangt dus zo'n 70 gemotiveerde leerlingen, die de tweede ronde daar komen doen. De leerlingen die daarbij zo goed presteren dat ze uitgenodigd worden voor de finale, komen bovendien nog vier middagen terug naar hun universiteit. Ze worden dan uitgebreid getraind in hoe je een wiskundig bewijs opschrijft en in onderwerpen als inductie, getaltheorie en meetkunde. Want waar de eerste ronde nog bestond uit multiple-choice-vragen en vragen waar een getal als antwoord voldoende is, moeten bij de finale volledige uitwerkingen gegeven worden.

De deelnemers zijn over het algemeen zeer enthousiast over deze finaletraining en genieten met volle teugen van alle nieuwe werelden die voor hen open gaan. Ook de kennismaking met de universiteit en de staf bevalt hen goed; soms komen zelfs ouders en docenten mee om even sfeer te proeven. Niet minder enthousiast zijn de verhalen van de universitaire docenten die deze groep leerlingen vier middagen onder hun hoede krijgen: zij vinden het fantastisch om de leergierigheid en gedrevenheid van deze uitzonderlijke jonge talenten te mogen voeden.

Vraag 3: Wat gebeurt er met de allergrootste talenten, de winnaars van de Nederlandse olympiade?

De Nederlandse Wiskunde Olympiade eindigt met de finale in september, maar in juli is er vervolgens een Internationale Wiskunde

Eerste ronde januari 2009, opgave B2

Het gehele getal N bestaat uit 2009 negens achter elkaar geschreven. Een computer berekent $N^3 = (99999 \dots 99999)^3$. Hoeveel negens bevat het uitgeschreven getal N^3 in totaal?

Teamselectietest juni 2007, opgave 3

Je hebt 2007 kaarten. Op elke kaart is een positief geheel getal kleiner dan 2008 geschreven. Als je een aantal (minstens 1) van deze kaarten neemt, is de som van de getallen op de kaarten niet deelbaar door 2008. Bewijs dat op elke kaart hetzelfde getal staat.

Figuur 1 Een opgave uit de eerste ronde en een opgave uit de teamselectietest



Foto rechtsboven: de wedstrijdzaal van IMO 2009 in Bremen. Foto linksonder: het Nederlandse team voor IMO 2010 met op de achterste rij v.l.n.r. Madelon de Kemp, Guus Berkelmans, Daniël Kroes, Merlijn Staps en David Kok, en op de voorste rij v.l.n.r. Jeroen Huijben en Harm Campmans. Overige foto's achtereenvolgens: lancering van IMO 2011 met onder andere Robbert Dijkgraaf, staatssecretaris Van Bijsterveldt en wethouder Gerson van Amsterdam; leerlingen bij de training; leerling bij de tweede ronde in Eindhoven; trainer Julian Lyczak voor het bord tijdens de trainingsweek in Valkenswaard; de *leaders* van alle landen stemmen over welke opgaven geselecteerd moeten worden.

januari	maart	mei en juni	september	nov.–juni	juni
eerste ronde	tweede ronde	finaletraining	finale	IMO-training	teamselectietest
4000	700	150	30		6
★	★	⇒	★	⇒	★

Figuur 2 Selectieproces vanaf eerste ronde tot de selectie van het IMO-team

Olympiade, waar de zes beste scholieren van Nederland naartoe afgevaardigd worden. Deze zes worden geselecteerd uit een groep van dertig, die uit de uitslag van de finale komt rollen. Bij benadering zijn dit de beste tien zesdeklassers, de beste tien vijfdeklassers en de beste tien leerlingen uit klas 2, 3 en 4. Zij doorlopen van november tot juni het IMO-trainingsprogramma. In drie trainingsdagen, twee trainingsweekenden en een afsluitende trainingsweek komen diverse wiskundige onderwerpen aan bod. Van elementaire technieken als invariantie, modulorekenen en het ladenprincipe tot meer geavanceerde onderwerpen zoals de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, recurrente betrekkingen, oneindige afdaling en de cirkel van Apollonius. Onder tussen werken de deelnemers wekelijks aan oefenopgaven en oude IMO-opgaven, onder leiding van een trainingsstaf bestaande uit negen oud-deelnemers van de IMO.

In juni wordt het Nederlandse team voor de IMO bepaald door middel van een teamselectietest (zie een voorbeeldopgave in Figuur 1). Deze zes toptalenten hebben dan een training- en selectieproces van anderhalf jaar doorlopen, gerekend vanaf de eerste ronde (Figuur 2). Niet zelden hebben de gekozen teamleden zelfs meerdere jaren met de olympiade en de IMO-training meegedaan.

Vraag 4: Gaan deze leerlingen uiteindelijk ook wiskunde studeren?

Tijdens de IMO-training ontdekken de leerlingen vaak hoe leuk en mooi wiskunde is; ze gaan dan ook bijna zonder uitzondering allemaal wiskunde studeren. Met hun olympiade-

ervaring zijn sommige onderdelen van het eerstejaarscurriculum voor deze studenten een feest der herkenning. Omdat geen uitdaging groot genoeg is voor deze fanatiekelingen, volgen ze regelmatig ook alvast tweedejaarscolleges of doen ze een andere studie eraan, uiteenlopend van natuurkunde tot bijvoorbeeld vergelijkende taalwetenschap.

Vraag 5: De IMO komt naar Nederland. Hoe gaat dat evenement eruit zien?

In de zomer van 2011 vindt inderdaad de Internationale Wiskunde Olympiade voor het eerst in Nederland plaats. Zo'n 600 deelnemers uit circa 100 landen zullen hier op twee wedstrijddagen in Amsterdam de strijd om de medailles met elkaar aan gaan. Ongeveer de helft van de deelnemers krijgt een medaille, waarbij er circa 150 bronzen, circa 100 zilveren en circa 50 gouden plakken te verdelen zijn. Wie geen medaille behaalt maar wel minstens één van de zes opgaven volledig oplost, komt in aanmerking voor een eervolle vermelding. Naast de wedstrijd zelf, staat het programma voor de deelnemers in het teken van internationale ontmoetingen, met een openingsceremonie, diverse excursies en activiteiten, en een sluitingsceremonie (zie Tabel 1). Inclusief aankomst- en vertrekdag duurt het evenement voor hen en hun 100 directe begeleiders (de zogenaamde *deputy leaders*) negen dagen. Voor de 100 delegatieleiders (*leaders*) begint het evenement drie dagen eerder. Op een geïsoleerde locatie in regio Eindhoven maken zij uit een shortlist van 30 opgaven een geschikte selectie van 6 opgaven. Verder dragen zij zorg voor de officiële vertaling van

de opgaven, zodat elke leerling de opgaven in zijn moedertaal kan maken. Na de wedstrijd kijken de leaders ook het werk na, bijgestaan door hun deputy leaders, terwijl ondertussen ook een Nederlands contingent AiO's, post-docs en UD's het leerlingwerk nauwgezet bestudeert. In een twee dagen durend proces overleggen de leaders en Nederlandse nakijkers vervolgens hoeveel punten elk van de 3600 uitwerkingen waard is.

Al sinds Nederland in 2007 door de internationale jury als gastland is uitverkoren, zijn er vele mensen actief om dit grote evenement op touw te zetten. De organisatie is in de loop van de tijd flink gegroeid en inmiddels werken er tientallen mensen van diverse universiteiten en instituten mee (zie kader).

Vraag 6: Hoe doet Nederland het meestal bij de IMO?

Nederland behoort niet bij de landen die meestal de top tien bezetten. Dat zijn landen als China, Rusland, de Verenigde Staten en

Organisatoren IMO 2011 in Nederland

Bestuur

Robbert Dijkgraaf (UvA, KNAW)
Frits Beukers (UU)
Jan van Mill (VU)
Harry Roumen (TU/e)

Organisatiecomité

Wim Berkelmans (VU)
Birgit van Dalen (UL)
Martijn de Graaff (Platform Bèta Techniek)
Tom Koornwinder (UvA)
Jelle Loois (ORTEC)
Quintijn Puite (TU/e, HU)

Hoofdorganisatoren

Anick van de Craats (NFI) – *gidsen*
Hans van Duijn (TU/e) – *juryvoorzitter*
Karst Koymans (UvA) – *ICT*
Larissa Krawczyk (Winford) – *excursies*
Aad Loois – *accommodatie deelnemers*
Ronald van Luijk (UL) – *nakijkproces*
Freek van Schagen (VU) – *wedstrijd*
Rozemarijn Schalkx (TU/e) – *leaders*
Bart de Smit (UL) – *opgavenselectie*

Datum	Leaders	Deputy leaders	Deelnemers
wo. 13 juli 2011	Aankomsttag	—	
do. 14 juli 2011	Selectie opgaven	—	
vr. 15 juli 2011	Selectie opgaven	—	
za. 16 juli 2011	Selectie opgaven	Aankomsttag	
zo. 17 juli 2011		Openingsceremonie	
ma. 18 juli 2011		Eerste wedstrijddag	
di. 19 juli 2011		Tweede wedstrijddag	
wo. 20 juli 2011	Correctie en vaststellen scores		Excursie
do. 21 juli 2011	Correctie en vaststellen scores		Excursie
vr. 22 juli 2011		Gezamenlijke excursie	
za. 23 juli 2011		Sluitingsceremonie	
zo. 24 juli 2011		Vertrektag	

Tabel 1 Programma van IMO 2011

DAG 1

1. Bepaal alle functies $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zodat de gelijkheid

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

geldt voor alle $x, y \in \mathbf{R}$. (Hier staat $\lfloor z \rfloor$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan z .)

2. Zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek $\triangle ABC$ en zij Γ zijn omgeschreven cirkel. De lijn AI snijdt Γ nogmaals in het punt D . Zij E een punt op de boog BDC en zij F een punt op de zijde BC zo dat

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Zij G het midden van het lijnstuk IF . Bewijs dat de lijnen DG en EI elkaar snijden op Γ .

3. Zij $\mathbf{N}$ de verzameling van alle positieve gehele getallen. Bepaal alle functies $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ zo dat

$$(g(m) + n)(m + g(n))$$

een kwadraat van een geheel getal is voor alle $m, n \in \mathbf{N}$.

DAG 2

4. Zij P een punt in het inwendige van de driehoek $\triangle ABC$. De lijnen AP , BP en CP snijden de omgeschreven cirkel Γ van $\triangle ABC$ nogmaals in respectievelijk de punten K , L en M . De raaklijn aan Γ in C snijdt de lijn AB in S . Stel dat $|SC| = |SP|$. Bewijs dat $|MK| = |ML|$.

5. In elk van de zes dozen $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ zit oorspronkelijk één munt. Er zijn twee types handelingen toegestaan:

Type 1. Kies een niet-lege doos B_j met $1 \leq j \leq 5$. Verwijder één munt uit B_j en voeg twee munten toe aan B_{j+1} .

Type 2. Kies een niet-lege doos B_k met $1 \leq k \leq 4$. Verwijder één munt uit B_k en verwissel de inhoud van de (mogelijk lege) dozen B_{k+1} en B_{k+2} .

Bepaal of er een eindige rij van zulke handelingen bestaat, zo dat daarna de dozen B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 leeg zijn en de doos B_6 precies 2010^{2010} munten bevat. (Merk op dat $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6. Zij $a_1, a_2, a_3, \dots$ een rij van positieve reële getallen. Verder is $s \geq 1$ een bepaald geheel getal zo dat

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

voor alle $n > s$. Bewijs dat er positieve gehele getallen ℓ en N bestaan met $\ell \leq s$ en zo dat $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ voor alle $n \geq N$.

Figuur 3 De opgaven van IMO 2010

Japan. Nederland is wel aan de weg aan het timmeren. Dankzij het uitgebreide trainings- en selectieprogramma hebben we de laatste drie jaar een plek bij de bovenste helft kunnen veiligstellen, waar dat de acht jaar daarvoor niet gelukt was. We streven voor de thuiswedstrijd in 2011 zelfs naar een plek in de top 30.

Een land kan ook op een andere manier nog eer behalen bij een IMO: door een opgave in te zenden die geselecteerd wordt. In totaal worden elk jaar zo'n 150 opgaven ingezonden door de diverse landen, waarvan slechts zes het uiteindelijk schoppen tot de wedstrijd. Nederland heeft dit in het verleden regelmatig voor elkaar gekregen met opgaven van de hand van o.a. N.G. de Bruijn, Jan Donkers en

Thijs Notenboom. Bij IMO 2007 was opgave 6 ook een Nederlandse, gecreëerd door Gerhard Woeginger (TU/e). En opgave 5 van 2010 is ontsproten aan het brein van Hans Zantema (TU/e, RU). In een vervolgartikel in het volgende nummer (NAW 5/12 nr. 1 maart 2011) zal hij ingaan op deze opgave en hoe deze uit zijn onderzoek aan termherschrijfsystemen naar voren kwam.

Vraag 7: Hoe is IMO 2010 verder verlopen?

De Internationale Wiskunde Olympiade vond in 2010 in Kazachstan plaats en was een zeer bijzondere ervaring voor de teamleden en begeleiders. Kazachstan is een gigantisch land; dat bleek wel toen de honderden leerlingen in een colonne van bussen vervoerd werden

naar een vakantiepark 'nabij' de hoofdstad Astana en hiervoor bijna zeven uur onderweg waren. Ze arriveerden pas rond elf uur 's avonds op hun verblijfplaats, waar het team unaniem van plan was geweest om om half tien naar bed te gaan met het oog op de wedstrijd van de volgende dag. Dit was verre van een ideale voorbereiding, maar desondanks heeft het Nederlandse team goed gepresteerd op de eerste wedstrijddag: allemaal hebben ze opgave 1 perfect opgelost. Vermeldenswaardig is dat veel andere landen en zelfs de uiteindelijke winnaar China op deze opgave steken hebben laten vallen.

Na een middagje ontspanning op het park (dat voorzien was van een basketbalveld, een volleybalveld, een voetbalveld en een meer met waterfietsen) moesten de leerlingen de volgende dag weer aan de bak. Tot grote vreugde van de hele Nederlandse delegatie wisten de deelnemers hun prestatie van de eerste wedstrijddag te herhalen en weer allemaal de eerste opgave perfect op te lossen. Hoewel het waar is dat de eerste opgave van een wedstrijddag steeds het makkelijkste is, zegt dit vooral iets over de moeilijkheid van de overige opgaven. Hier heeft het Nederlandse team dan ook niet meer dan een paar puntjes bij elkaar gesprokkeld. Dit was echter wel voldoende voor vijf van hen om een medaille te halen; de zesde kreeg een eervolle vermelding.

Met de wedstrijd achter de rug kon het team nog dagenlang gaan genieten van excursies, naar zowel mooie stukjes natuur als architectonische hoogstandjes in de hoofdstad van Kazachstan. Ze konden het echter ook niet laten om in de verloren uurtjes het internet op te gaan en leuke wiskundeopgaven op te zoeken. En als er geen internet in de buurt was, verzonden ze zelf wel opgaven, die vervolgens per sms naar de begeleiding werden gestuurd om op te lossen. Kortom, de leerlingen hadden zelf de training alweer in gang gezet voordat de IMO goed en wel afgelopen was. Dat geeft goede hoop voor IMO 2011, wanneer een deel van hen opnieuw kan deelnemen, deze keer in eigen land. 

Voor meer informatie

www.wiskundeolympiade.nl
www.imo2011.nl
www.imo-official.org

In de verdediging

| In defence



Asymptotics of quantum spin networks

Roland van der Veen

Op 10 september 2010 vond er een bijzondere promotie plaats aan de Universiteit van Amsterdam. Eigenlijk was het niet zozeer de promotie zelf, maar het lekenpraatje dat eraan voorafging dat bijzonder was. Op een choreografie van eigen hand beeldde kandidaat Roland van der Veen zijn promotieonderwerp uit: al dansend bracht hij met zijn twee paranimfen de knopen uit zijn proefschrift tot leven. “De ultieme uitdaging”, noemde Van der Veen dit een paar weken van tevoren. “Ik dans al tien jaar, maar zo iets doe je maar een keer.”

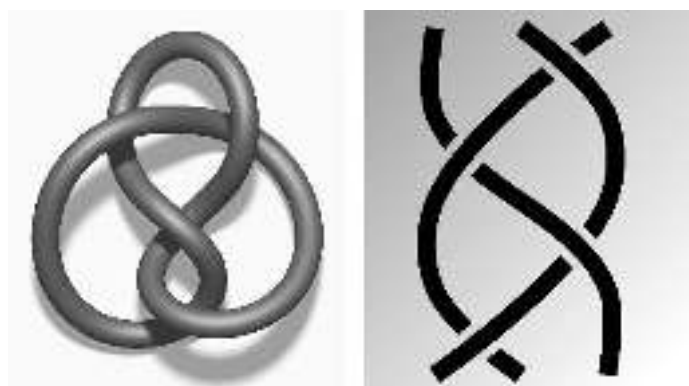
Knopen door een natuurkundige bril

Onder begeleiding van Eric Opdam (UvA) en Stavros Garoufalidis (Georgia Tech) werkte Van der Veen aan knopen. In de knopentheorie bestudeert men de wiskundige eigenschappen van knopen zoals je die elke dag in je veters maakt. Wat is bijvoorbeeld het verschil tussen de platte knoop en de oudewijvenknoop? En hoeveel verschillende knopen bestaan er eigenlijk? Het onderzoek van Van der Veen slaat een brug tussen twee zeer verschillende manieren om knopen te bestuderen.

De titel van zijn proefschrift, *Asymptotics of quantum spin networks*, doet enigszins fysisch aan, maar het gaat toch echt om wiskunde. Dat neemt niet weg dat een natuurkundige bril geen overbodige luxe is als je de twee methoden waarop hij knopen bestudeert, probeert te begrijpen.

In de eerste interpretatie worden knopen opgevat als zwarte gaten in een eenvoudig universum. Uit de manier waarop licht wordt afgebogen kan veel worden opgemaakt over de knoop zelf. Een centraal resultaat in dit gebied is het recente bewijs door G. Perelman van het vermoeden van Poincaré. Hieruit volgt dat het universum dat bij de knoop hoort een eindige inhoud heeft en dat dit getal belangrijke informatie over de knoop geeft.

De tweede manier waarop Van der Veen naar knopen kijkt, is door ze te zien als de geschiedenis van een aantal botsende deeltjes. De wetten van de kwantummechanica vertellen hoe de kans moet wor-



Figuur 1 De achtknoop (links) en de bijbehorende vlecht (rechts).

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek

la Voie-du-Coin 7

1218 Grand-Saconnex

Zwitserland

verdediging@nieuwarchief.nl

den berekend dat een aantal deeltjes precies zo botst als het plaatje van de knoop voorstelt. Zo kan dus opnieuw aan elke knoop een getal worden toegekend waarin de essentie van de knoop is samengevat.

Volume conjecture

Maar hoe hangen deze interpretaties precies samen? Is er een brug die hen verbindt? Een belangrijke stap in de richting van een antwoord op deze vraag is vijftien jaar geleden gezet door R. Kashaev. Hij vermoedde dat de twee getallen hierboven exact gelijk zijn. Dus de inhoud van het universum dat hoort bij de knoop, is volgens hem precies gelijk aan de kans dat de knoop optreedt als kwantummechanische geschiedenis! Het vermoeden van Kashaev staat nu bekend als het *volume conjecture* en het verifiëren ervan is een van de grootste onopgeloste problemen in het vakgebied van Van der Veen. Te meer omdat het waarschijnlijk het topje van een ijsberg aan nieuwe vondsten is.

Het doel van Van der Veens promotieonderzoek was om technieken te ontwikkelen om het volume conjecture te bewijzen en in een context te plaatsen. De titel *Asymptotics of quantum spin networks* refereert aan de gevonden context. Het belangrijkste resultaat is zijn bewijs voor het werkelijk bestaan van de hierboven beschreven brug. Voor een belangrijk deel van alle knopen heeft hij de correctheid van deze relatie wiskundig bewezen: aan iedere knoop kan een aantal ringen worden toegevoegd zodat het volume conjecture waar is voor de nieuwe knoop. Het mooie van het bewijs vindt Van der Veen dat het vrij transparant is: dezelfde plaatjes berekenen zowel de inhoud van de knoop als de kans in de kwantumwereld. Daarom zijn de twee noodzakelijk gelijk.

Verder heeft hij technieken ontwikkeld om de brug te verbreden, door niet alleen naar knopen te kijken maar ook naar geknoopte netwerken: de kwantum-spin-netwerken uit de titel van zijn proefschrift en hun bijbehorende klassieke limieten. Hoewel in zekere zin dus succesvol, zijn zijn technieken echter verre van toereikend gebleken om een definitief antwoord te geven op de vraag of het volume conjecture waar is of niet. Van der Veens case study van de knopen met volume 0 laat de beperkingen van de gebruikte technieken zien. Zijn verwachting is dat het vermoeden voor de komende generatie wiskundigen een

onbereikbaar maar inspirerend doel blijft.

De tekening is de berekening

Op de vraag of hij stellingen bij zijn proefschrift had, is het antwoord 'nee'. Maar hij geeft wel een stelling die zijn onderzoek en visie op de wiskunde bondig samenvat: De tekening is de berekening. "Dezelfde plaatjes *berekenen* zowel de inhoud van de knoop als de kans in de kwantumwereld." De oplettende lezer zal deze zin hierboven niet zijn ontgaan. Van der Veen vertelt: "Rekenen en tekenen komen heel dicht bij elkaar wanneer we knopen bestuderen. Dit komt omdat we met behulp van een plaatje aan iedere knoop een waarde kunnen toekennen. Deze waarde is het zogenaamde Jones-polynoom. Oorspronkelijk waren de tekeningen bedoeld als geheugensteun bij ingewikkelde berekeningen, maar gaandeweg zijn de rollen omgedraaid. De tekening is de berekening."

Aha-erlebnissen en Nescio

Het leven als aio beviel Van der Veen erg goed. De vrijheid om precies te doen wat je zelf mooi en belangrijk lijkt, vind je volgens hem in geen enkele andere baan. De conferenties in het buitenland waren een hoogtepunt. "Er gaat niets boven het samen verzinnen van onmogelijke fantastische luchtkastelen. Bovendien vind ik het prachtig hoe je via de wiskunde kunt communiceren met mensen uit totaal andere culturen." Ze waren ook een hoogtepunt om andere redenen. Hij herinnert zich nog goed het moment waarop hij in zijn hotelkamer in Aarhus plotseling zag dat de diagrammen uit twee totaal verschillende artikelen precies hetzelfde voorstelden. Hij werd wakker om een uur of twee 's nachts, deed het licht aan en keek nog eens naar het artikel waarboven hij in slaap gevallen was. Toen was het direct duidelijk.

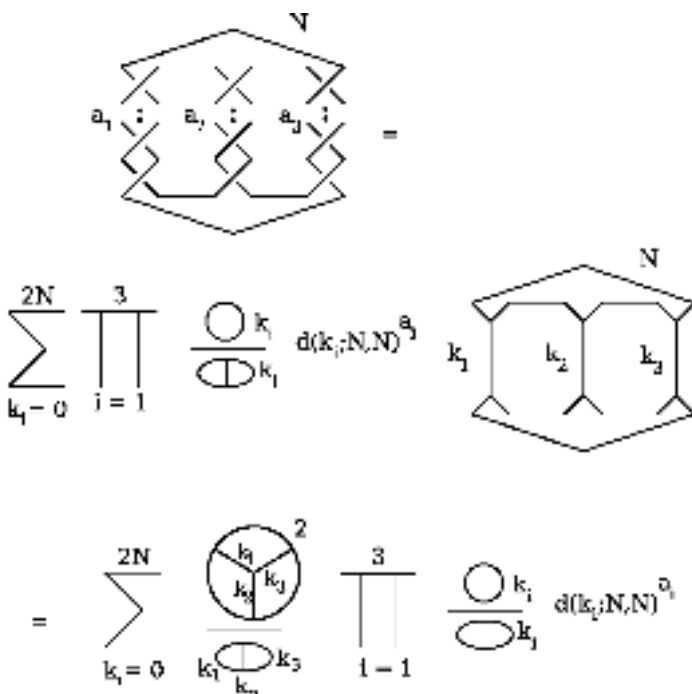
Op de terugweg van dezelfde conferentie ontmoette hij ook Stavros Garoufalidis, die later zijn copromotor zou worden. Op een haar na haalde hij de bus naar het vliegveld, hij kwam naast hem te zitten en zo raakten ze al snel in gesprek over kwantum-spin-netwerken. Twee van de vijf artikelen uit zijn proefschrift zijn rechtstreeks voortgekomen uit deze conversatie.

Ook mooi was het om een voordracht te geven op een grote conferentie in New York, waar hij vier jaar eerder als masterstudent ook was geweest. Daar was het allemaal begonnen, mooi dat die cirkel nu rond was. Van der Veen kan nog een hele rits hoogtepunten noemen, maar kende toch ook minder gelukkige momenten. Het moeilijkste moment was toen hij zich na maanden werk realiseerde dat zijn oplossing van het probleem waarmee hij worstelde gebaseerd was op een misvatting. Op dat moment fietste hij naar zijn ouders over de Nesciobrug in Amsterdam. Het was alsof de brug instortte. Een omgekeerde Aha-erlebnis.

Webklassen

Naast zijn onderzoek gaf Van der Veen natuurlijk ook onderwijs én was hij samen met Jan van de Craats de drijvende kracht achter de UvA *webklas* 'De Riemann-hypothese; een miljoenenprobleem' voor in wiskunde geïnteresseerde vwo-leerlingen. Vlak voor zijn promotie ronden hij en Van de Craats een boek over de Riemann hypothese af dat is gebaseerd op vier jaar webklassen. Ze hopen dat het werk in boekvorm nog meer mensen enthousiast kan maken voor de wiskunde.

Op het moment van verschijnen van dit interview zit Van der Veen al lang en breed in Berkeley, waar hij met behulp van zijn NWO Rubicon-subsidie twee jaar aan vervolgonderzoek kan werken. En hopelijk ook zal blijven dansen, luchtkastelen bouwen en anderen enthousiasmeren!



Figuur 2 De tekening is de berekening.



The application of Approximate Dynamic Programming techniques

Dennis Roubos

Op 7 september 2010 promoveerde Dennis Roubos aan de Vrije Universiteit Amsterdam op het proefschrift *The application of Approximate Dynamic Programming techniques* dat hij schreef onder begeleiding van Ger Koole en Sandjai Bhulai.

Markov beslissingsprocessen

Een Markov beslissingsproces is een raamwerk voor het modelleren van stochastische optimalisatieproblemen waarin beslissingen genomen kunnen worden om een systeem te sturen. Het doel is om het systeem zo te sturen dat een bepaalde prestatiegraad geoptimaliseerd wordt. De beslissingen die op dit moment genomen worden, hebben niet alleen invloed op het systeem op dit moment, maar ook op het gedrag van het systeem in de toekomst. Dit concept ligt aan de basis van de oplossingstechniek Dynamisch Programmeren.

Roubos begint zijn proefschrift met een illustratief voorbeeld van een callcenter met verschillende soorten medewerkers. Specialisten die óf Nederlands, óf Engels, óf Duits spreken, en generalisten die alle drie de talen spreken. Het callcenter heeft als doel ieder inkomend telefoontje zo snel mogelijk af te handelen. De gemiddelde wachttijd van de klanten moet dus worden geminimaliseerd. Een optimaliseringsprobleem: wat moet je bijvoorbeeld doen als een Engelssprekende klant belt? Toewijzen aan een specialist of een generalist? En als alle Engelssprekende specialisten bezet zijn, moet je hem dan aan de enige vrije generalist toewijzen of niet? De beslissing die genomen wordt, beïnvloedt het systeem op het moment zelf, maar ook daarna, want het aantal en het type beschikbare telefonisten hangt ervan af.

De waardefunctie

Bij het oplossen van Markov beslissingsproblemen speelt de waardefunctie, die aan elke toestand in de toestandsruimte een reëel getal toekent, een belangrijke rol. Uiteraard is de waardefunctie, als deze bekend is, te gebruiken om te bepalen welke beslissingen optimaal zijn in een bepaalde toestand van het systeem. Echter, het exact oplossen van de waardefunctie is vaak erg moeilijk, danwel onmogelijk. Traditionele numerieke oplossingsmethoden zijn ook niet meer toepasbaar, aangezien hedendaagse processen dusdanig groot zijn dat deze methoden teveel rekentijd met zich meebrengen. Bovendien bewaren ze de waarde van iedere toestand in een tabelvorm. Het toevoegen van een extra dimensie aan de toestandsruimte zorgt voor een exponentiële toename in grootte van die tabellen.

Omdat het vinden van een gesloten uitdrukking voor de waardefunctie analytisch erg lastig is en ook numeriek een te groot probleem is, zijn benaderingstechnieken waarmee bijna optimale beslissingen genomen kunnen worden van belang. Die moeten snel werken en niet teveel informatie hoeven op te slaan. In plaats van het opslaan van een reëel getal voor elke toestand in de toestandsruimte, kan de waardefunctie bijvoorbeeld worden benaderd door een geparameteriseerde

functie, waarbij alleen de parameters opgeslagen hoeven te worden. De vraag komt dan naar voren wat een goede structuur is voor de functie. Anderzijds kan gekeken worden naar methoden die de toestandsruimte verkleinen, zodat traditionele methoden weer computerteknisch mogelijk worden. In zijn proefschrift behandelt Roubos deze vragen, geeft hij daarvoor een theoretische basis én past hij de theorie toe op grote beslissingsproblemen uit de praktijk.

Zowel theoretisch als praktisch

Het mooie aan zijn proefschrift vindt Roubos dat het zowel theoretisch als praktisch is. Het bevat stellingen over goede structuren van de benaderende functie en over het verkleinen van de toestandsruimte. Die zijn belangrijk omdat ze een basis bieden voor het praktische gedeelte van het proefschrift waarin optimalisatieproblemen in callcenters en computernetwerken worden opgelost door het toepassen van de theorie. De nieuwe theoretische resultaten worden dus meteen in de praktijk gebracht bij het oplossen van interessante bedrijfsprocessen.

Het promotietraject

Het eerste jaar van het aio-schap vond Roubos vrij lastig. Het inlezen in het onderwerp was veel werk, waar een groot doorzettingsvermogen voor nodig was. Verder vond hij het moeilijk om te leren omgaan met tegenslagen. "Soms zit je dagenlang na te denken over een bewijs voor een stelling, of ontdek je ergens een klein foutje waardoor alle experimenten opnieuw gedaan moeten worden."

Het leven als aio beviel hem wel. Omdat je eigenlijk altijd en overal met wiskundig onderzoek bezig kunt zijn, ben je enorm flexibel. En tijdens het promotietraject waren er vele leuke en mooie momenten. Conferenties in het buitenland zijn een goed voorbeeld. Roubos vond het leuk om zijn resultaten aan een geïnteresseerd publiek te presenteren, en de discussies en vragen achteraf gaven altijd meer inzicht. Maar misschien was de laatste fase van de promotie, waarbij hij bezig was met het schrijven van het proefschrift, wel de mooiste. Meer en meer werd het een compleet boek, waar hij uiteindelijk vol trots naar keek toen er 200 gedrukte exemplaren werden afgeleverd. De promotieplechtigheid vond hij een verhaal apart. Als promovendus bereid je de receptie en het feest al tot in de puntjes voor, terwijl je proefschrift nog helemaal niet verdedigd is. Toch wel spannend! De dag ervoor was Roubos nog erg zenuwachtig, maar tijdens de verdediging niet meer. Hij vond het leuk en bijzonder om tegenover deskundigen op zijn vakgebied te staan en hun vragen te beantwoorden, en de verdediging is een ervaring waar hij nog lang met een goed gevoel op terug zal kijken.

Nu hij heeft laten zien dat hij zelfstandig onderzoek kan doen, is hij gewapend met zijn wetenschappelijk onderzoeksachtergrond verder gegaan als adviseur/onderzoeker bij een consultancy bedrijf in de zorgsector.



Boekbesprekingen

Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - HG 9.93
 Faculteit Wiskunde & Informatica
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513
 5600 MB Eindhoven
reviews@nieuwarchief.nl
www.win.tue.nl/wgreview



Yury J. Ionin, Mohan S. Shrikhande
Combinatorics of Symmetric Designs
 Cambridge: Cambridge University Press, 2006
 New Mathematical Monographs: 5
 520 p., prijs £89.00
 ISBN 0-521-81833-8

Dit boek geeft een tamelijk compleet en gedetailleerd overzicht van de huidige stand van zaken in de theorie van symmetrische designs. In de eerste twee hoofdstukken komen de bekende resultaten over voorwaarden waaraan de parameters van een symmetrisch design moeten voldoen aan de orde, zoals de ongelijkheid van Fisher en de stelling van Bruck-Ryser-Chowla. Daarna wordt een aantal hoofdstukken gewijd aan de gebruikelijke onderwerpen die men bij een studie van symmetrische designs niet kan vermijden. Zo is er natuurlijk een hoofdstuk over eindige meetkunde, omdat de klassieke voorbeelden van symmetrische designs daar vandaan komen. Verder zijn er aparte hoofdstukken over de bekende verbanden met zaken als Hadamard matrices, t -designs, (sterk) reguliere grafen, associatieschema's en natuurlijk ook verschilverzamelingen. Hoofdstuk 10 behandelt de theorie van 'balanced generalized weighing matrices', of kortweg BGW-matrices, een specialisme van de auteurs en een onderwerp dat de laatste jaren erg in de belangstelling staat. BGW-matrices zijn een generalisatie van de incidentiematrices van symmetrische designs. Grofweg gezegd zijn BGW-matrices incidentiematrices van symmetrische designs waarbij de 'enen' vervangen zijn door de elementen van een groep. In het bijzondere geval dat de groep de triviale groep is, krijgt men de vertrouwde incidentiematrices weer terug. In de resterende hoofdstukken wordt verder vooral aandacht geschonken aan structurele opbouw van symmetrische designs zoals de decompositie in deeldesigns, de verschillende soorten deeldesigns en de inbedbaarheid van designs in symmetrische designs.

Al met al is dit een goed verzorgd en helder geschreven boek geworden over dit specialistische onderwerp in de beproefde voorbeeld-definitie-stelling-bewijs-traditie, waarbij de auteurs in hun aanpak de nadruk leggen op de combinatorische aspecten van deze materie. Elk hoofdstuk bevat op het einde een serie opgaven, zodat het boek niet alleen geschikt is voor de specialist maar ook te gebruiken is als materiaal voor een college of voor zelfstudie.

Henny Wilbrink



Mihai Tibăr
Polynomials and Vanishing Cycles
 Cambridge: Cambridge University Press, 2007
 Cambridge Tracts in Mathematics 170
 253 p., prijs £50.00
 ISBN 0-521-82920-5

De polynomen die in dit boek besproken worden, zijn voornamelijk complexe veeltermen met veel variabelen. In de algebraïsche

meetkunde gaat het om de bestudering van de nulpuntsverzamelingen van stelsels polynomen. Verdwijnde cycli komen in het spel om hun topologie te onderzoeken. In zijn klassieke boek *L'analyse situs et la géométrie algébrique* (1924) gebruikt Lefschetz waaiers van hypervlaksneden om projectieve variëteiten te bestuderen. De algemene snede van een gladde variëteit is weer glad, maar voor bepaalde waarden treden gewone dubbelpunten als singulariteiten op. Lokaal ziet het eruit als een hyperboloïde, die naar een kegel degenereert. Men ziet nu een homologieklasse, gerepresenteerd door een cykel, hier een cirkel en in het algemeen een n -sfeer, die kleiner en kleiner wordt om tenslotte in het singuliere punt te verdwijnen. Aangezien we complex werken, kunnen we ook volgen wat er gebeurt als we om de kritieke waarde heenlopen. Later zijn verdwijnde cycli en monodromie belangrijke hulpmiddelen in het lokale geval geworden bij de bestudering van geïsoleerde singuliere punten van polynomen.

In het onderhavige boek gaat het nu weer om een meer globaal geval, van polynomen op de hele affiene ruimte. Een polynomiële functie $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ definieert buiten een verzameling van atypische waarden een lokaal triviale vezeling (dit is de definitie van atypisch). Een nieuw fenomeen is nu dat cycli ook naar oneindig kunnen verdwijnen. Dit manifesteert zich in zogenaamde singulariteiten op oneindig. Nu willen we graag meten hoeveel homologie er verdwijnt. Daartoe wordt een algemene hulpfunctie l gebruikt, die een waaier van hyperoppervlaksneden definieert. In het beeld van (f, l) bevindt zich dan een discriminant, die het beeld is van een kromme van singuliere punten, de polaire kromme, en veel informatie bevat.

Al deze zaken en veel meer komen aan de orde in de eerste twee delen van het boek, *Singularities at infinity of polynomial functions*, en *The impact of global polar varieties*. Het derde deel, *Vanishing cycles of nongeneric pencils*, bevat een vergaande generalisatie. Het boek, dat voornamelijk werk van de auteur en zijn co-auteurs bevat, zegt bedoeld te zijn voor onderzoekers en promovendi. Er is tamelijk veel voorkennis nodig; zo wordt bijvoorbeeld niet uitgelegd wat verdwijnde cycli zijn. Resultaten worden meestal in de algemeenste en scherpste vorm gegeven. Al met al bevat dit boek een schat aan informatie voor wie dit onderwerp wil leren.

Jan Stevens



Yann Bugeaud

Approximation by Algebraic Numbers

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

274 p., prijs £55.00

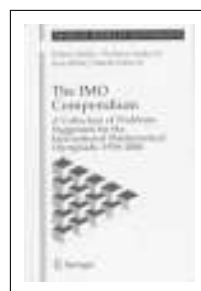
ISBN 0-521-82329-3

Bugeauds boek over benaderen met algebraïsche getallen is breed opgezet, maar met een duidelijke focus op de theorie van classificatie van reële getallen zoals ingevoerd door Mahler en Koksma en de daarmee samenhangende metrische theorie. In hoofdstuk 3 tot en met 7 krijgt de lezer een goed overzicht van de huidige stand van zaken op dit gebied, waarover eerder in boeken gerapporteerd is door Koksma (1936), Schneider (1957), Harman (1998) en Bernik en Dodson (1999). Bugeauds belangrijkste thema is of voor elk paar dalende rijen $(w_n)_{n \geq 1}$ en $(w_n^*)_{n \geq 1}$ in $[1, \infty)$ er een

reëel getal ξ bestaat met Mahler waarden (w_n) en Koksma waarden (w_n^*) , in zoverre dat het niet uitgesloten is door de noodzakelijke ongelijkheden $n \leq w_n^* \leq w_n \leq w_n^* + n - 1$ voor alle $n \geq 1$. De auteur vertelt wat bekend is en bewijst de basisstellingen, terwijl hij voor de ingewikkeldere bewijzen verwijzingen geeft. In Hoofdstuk 8 behandelt hij classificaties van Sprindzuk en Mahler voor de complexe getallen. In Hoofdstuk 9 komen benaderingen in andere lichamen (p -adische getallen, formele machtrekken) aan de orde. Hoofdstuk 10 bevat 55 open problemen, waarbij één sectie gewijd wordt aan het klassieke vermoeden van Littlewood en de problemen in de andere secties samenhangen met het hoofdonderwerp van het boek. Bijna elk hoofdstuk heeft zowel opgaven op een geavanceerd niveau als een uitgebreide opsomming van verwante resultaten in de literatuur. Dit resulteert in een literatuurlijst van 617 publicaties. Dit, met een index, maakt het boek ook geschikt als naslagwerk.

Andere onderwerpen waarop in boeken over diophantische approximaties vaak de nadruk is gelegd, zoals kettingbreuken (Cassels (1957), Schweiger (2000), Hensley (2006)), de stelling van Thue-Siegel-Roth en de Subspace Theorem (W.M. Schmidt (1980), Corvaja en Zannier (2003)), de theorie van lineaire vormen in logaritmen (A. Baker (1975), Feldman (1982), Waldschmidt (1992)), transcendentie (Schneider (1957), Feldman en Nesterenko (1998), Waldschmidt (2000)) en metrische theorie (Sprindzuk (1977), Harman (1998), Bernik en Dodson (1999)), komen kort ter sprake, met name in Hoofdstuk 1 en 2, en voornamelijk in zoverre het relevant is voor het hoofdonderwerp. Daarmee is ook de lezerskring van dit boek aangeduid. Voor wie geïnteresseerd is in de classificatie van getallen is dit boek onmisbaar. Voor anderen is er een ruime keus aan andere boeken.

Rob Tijdeman



Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović

The IMO Compendium

A collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004

New York: Springer Verlag, 2006

Problem Books in Mathematics

741 p., prijs €62,95

ISBN 0-387-24299-6

Dit vuistdikke boek bevat een verzameling problemen van de waarschijnlijk welbekende Internationale Wiskunde Olympiade (IWO, in het Engels IMO), vanaf de eerste competitie in 1959 tot en met 2004.

Het boek begint met een beknopte geschiedenis van de IWO, daarna volgen twintig bladzijden met resultaten uit de vlakke meetkunde, combinatoriek, getaltheorie, algebra en analyse. Ze dienen als aanvullende kennis om sommige problemen makkelijker op te kunnen lossen en zijn niet triviaal. Ik kan me zelfs voorstellen dat menig middelbare scholier er door afgeschrikt wordt, zeker omdat er weinig uitleg bijstaat. Dit stukje van het boek is daarom hooguit geschikt als vademecum, niet om uit te leren.

De formidabele probleemverzameling vormt het leeuwendeel van het boek. Niet slechts de competitie-opgaven staan erin (zes per jaar), maar ook de *short list* en/of *long list*, die de basis voor de uiteindelijke selectie vormen (vele tientallen per jaar). Het Compendium beoogt hierin zo volledig mogelijk te zijn, hoewel voor-

in al vermeld staat dat niet al deze lijsten openbaar gemaakt zijn. Hoe dan ook, het aantal problemen komt zo uit op bijna 2000, waarvan een groot aantal waarschijnlijk nooit eerder in druk is verschenen.

Van de problemen in de *short list* worden in het tweede deel van het boek bondige oplossingen gegeven, van die in de *long list* (minus de *short list*) niet. Het resultaat is een prettige mengeling van problemen waarbij je stiekem naar de oplossing kan gluren als het echt niet lukt, en andere waarbij je toch echt op jezelf bent aangewezen. (Zelfs een korte zoektocht op internet leverde mij niet de resterende antwoorden op een presenteerblaadje.)

De doelgroep van het boek beperken de auteurs zelf expliciet tot middelbare scholieren die voor de IWO willen trainen. In Nederland is dat wel een zeer kleine groep beoogde lezers. Is dit boek ook interessant voor de doorsnee NAW-lezer? Jazeker, als die zich tenminste aangesproken voelt door wiskundige problemen die weinig voorkennis vereisen maar desalniettemin ook voor de beroepswiskundige uitdagend kunnen zijn. Perfect voor een regenachtig weekend!

In vergelijking met andere 'probleemboeken' biedt het een grote hoeveelheid problemen, allemaal van hoog niveau. Is het boek voor de doelgroep zelf wel geschikt? Jazeker, maar niet als eerste probleemboek. Wil je je dochter of zoon klaarstomen voor de IWO, begin dan eerst met opgaven van de Nederlandse Wiskunde Olympiade (online op te zoeken) en een boek zoals Arthur Engels *Problem solving strategies*. Daarna is het Compendium een aanrader.

Maxim Hendriks



Benne de Weger
**Elementaire Getaltheorie en
Asymmetrische Cryptografie**

Utrecht: Epsilon, 2009
192 p., prijs €21,00
ISBN 90-5041-108-0

Kies twee priemgetallen p en q , bereken $n = p \cdot q$ en $\phi(n) = (p-1)(q-1)$. Kies daarna een getal e dat relatief priem is met $\phi(n)$. Bereken ten slotte de inverse d van e modulo $\phi(n)$. Je hebt nu een paar sleutels van een RSA cryptosysteem gemaakt. Het paar e en n vormen samen de openbare sleutel, het getal d de geheime privésleutel.

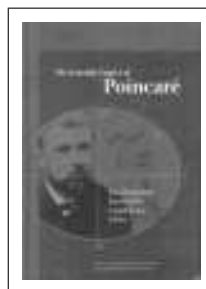
Wat kan ik met RSA? Is RSA een veilig systeem? Kan ik elk paar priemgetallen p en q kiezen of zijn er (on)handige keuzes? Vragen als deze staan centraal in het laatste hoofdstuk van het boek. Dan wordt ook duidelijk dat er wel degelijk handige en onhandige keuzes van p en q zijn. De auteur formuleert een aantal regels die resulteren in een algoritme voor sleutelpaargeneratie, een algoritme dat in de praktijk goed voldoet. Het is overigens niet de eerste keer dat de auteur aandacht besteedt aan praktische zaken, al eerder heeft hij de lezer primaliteitstesten en een aantal algoritmes om grote (pseudo)priemgetallen te genereren voorgeschoteld. In de eerdere hoofdstukken is daarnaast ruim aandacht geweest voor zaken als modulo rekenen, de ϕ -functie met daarbij de stelling van Euler, methoden om grote getallen te factoriseren en hun complexiteit.

Het boek biedt echter geen volledige cursus getaltheorie,

slechts de getaltheorie die nodig is voor RSA en voor de Diffie-Hellman sleuteluitwisselingsmethode komt aan de orde. Maar die wordt dan wel degelijk en uitgebreid behandeld. Het is ook geen cursus cryptografie: alleen de zojuist genoemde crypto-onderwerpen kun je in het boek vinden. De schrijver heeft willen laten zien hoe het begrip van getaltheorie essentieel is voor het begrijpen en goed kunnen gebruiken van asymmetrische cryptografie. Dat is volgens mij uitstekend gelukt.

Het boek is ontstaan uit een cursus van de Open Universiteit en is dan ook goed geschikt voor zelfstudie. Het bevat veel voorbeelden en opgaven. Van de meeste opgaven is achterin een uitwerking gegeven. Een handig hulpmiddel bij een aantal opgaven waar met grotere getallen moet worden gerekend, is het programma MCR, Modulaire en Cryptografische Rekenmachine, beschikbaar als Java-applet, welke is te vinden op de website bij dit boek.

Samenvattend: voor de doelgroep, studenten Informatica (hbo en universiteit) en ICT-professionals, biedt dit boek een mooi inzicht in de cryptografie gebaseerd op getaltheorie. Ernst Lambeck



 ric Charpentier, Étienne Ghys, Annick Lesne (eds.)

The Scientific Legacy of Poincaré

American Mathematical Society/London Mathematical Society, 2010
History of Mathematics 36
394 p., prijs \$ 89.00
ISBN 0-8218-4718-3

Het vele wetenschappelijke werk van Henri Poincaré, zijn veelzijdigheid in de wiskunde en zelfs ook in de natuurkunde en de filosofie, blijft een bron van inspiratie en studie. Deze nieuwe collectie van artikelen, oorspronkelijk in het Frans verschenen in 2006 en, zo te zien, goed vertaald door Joshua Bowman, bevat 19 artikelen over uiteenlopende onderwerpen. Om een idee van de collectie te geven bespreek ik er enkele.

Een prachtig artikel, 'Differential equations with algebraic coefficients over arithmetic manifolds' is van Nicolas Bergeron. Hij laat zien hoe Poincaré het verband legde tussen de analyse van 2de orde lineaire, gewone differentiaalvergelijkingen met zwakke singulariteiten in de coëfficiënten en de hyperbolische meetkunde. Dat begon met het werk van Fuchs die geïnteresseerd was in de analytische voortzetting van de oplossing rondom singuliere punten (monodromie) en de eigenschappen van hun inversen. Poincaré liet zien hoe je deze problemen hanteert met behulp van arithmetische transformatiegroepen, projectieve structuren en automorfe functies.

De artikelen over dynamische systemen en hemelmechanica zijn inhoudelijk minder sterk, behalve het artikel van E. Ghys over de recurrentiestelling voor maatbehoudende systemen. Die heeft tot heel wat discussies geleid, vooral onder fysici. Het bijzondere van het artikel is niet alleen de helderheid waarmee de stelling beschreven wordt, maar ook hoe uitgelegd wordt waarom de recurrentietijd in een aantal gevallen zoveel korter is dan men in het algemeen zou verwachten.

Natuurlijk wordt het Poincaré-vermoeden in deze bundel beschreven, minder bekend zijn echter zijn resultaten voor partiële differentiaalvergelijkingen. Misschien komt dit omdat ze vaak 'verstopt' zijn in de publicaties over fysische onderwerpen. Jean

Mawhin beschrijft Poincaré's 'sweeping method' voor het Dirichlet probleem van de Laplacevergelijking; deze methode speelt een belangrijke rol in de huidige theorie van elliptische randwaarde problemen. Andere resultaten zoals voor spectraaltheorie en de Poincaré ongelijkheid in de functionaalanalyse en de theorie van PDVs worden uitvoerig besproken.

De filosofische verhandelingen van Poincaré zijn voor een groot deel te vinden in vier boeken. Ze zijn helder geschreven, maar caleidoscopisch van opzet. Het gebrek aan systematiek doet

sommige geleerden twifelen aan de filosofische diepgang, maar dat berust op een vooroordeel. Gerhard Heinzmann licht uit deze boeken het onderwerp 'filosofie van de wetenschap' waar zowel wiskunde, natuurkunde als logica onder valt. Hij laat zien hoe ver Poincaré's visie van het axiomaticisme van Hilbert staat.

De meeste van de artikelen in deze bundel zouden een mooi uitgangspunt voor een seminarium kunnen zijn, als dan tegelijk de bijbehorende oorspronkelijke artikelen worden gelezen.

Ferdinand Verhulst

Recent verschenen publicaties. Als u een van deze boeken wilt bespreken of als u suggesties heeft voor andere boeken voor deze rubriek, laat dit dan per e-mail weten aan reviews@nieuwarchief.nl.



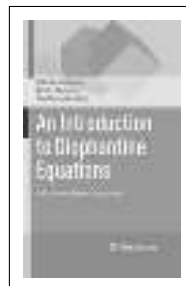
Phong Q. Nguyen, Brigitte Vallée (eds.)

**The LLL Algorithm
Survey and Applications**

Springer-Verlag, 2010

ISBN: 978-3-642-02294-4

www.springer.com/computer/security+and+cryptology/book/978-3-642-02294-4



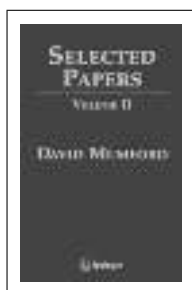
Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Căluțeanu

**An Introduction to Diophantine Equations
A Problem-Based Approach**

Birkhäuser, 2010

ISBN: 978-0-8176-4548-9

www.springer.com/birkhauser/mathematics/book/978-0-8176-4548-9



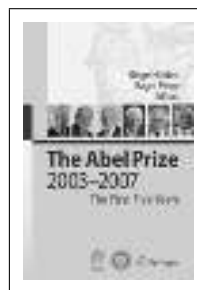
David Mumford
Amnon Neeman, Ching-Li Chai, Takahiro
Shiota (eds.)

**Selected Papers
Vol. II: On Algebraic Geometry,
including Correspondence with
Grothendieck**

Springer-Verlag, 2010

ISBN: 978-0-387-72491-1

www.springer.com/mathematics/algebra/book/978-0-387-72491-1



Helge Holden, Ragni Piene (eds.)

**The Abel Prize
2003-2007 The First Five Years**

Springer-Verlag, 2010

ISBN: 978-3-642-01372-0

www.springer.com/mathematics/history+of+mathematics/book/978-3-642-01372-0



Ioannis Z. Emiris, Frank Sottile, Thorsten
Theobald (eds.)

Nonlinear Computational Geometry

Springer-Verlag, 2010

ISBN: 978-1-4419-0998-5

www.springer.com/mathematics/algebra/book/978-1-4419-0998-5

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is March 1st, 2011.

Problem A (proposed by Gabriele Dalla Torre)

Show that there are infinitely many prime numbers p for which there is a positive integer n with

$$2^{n^2+1} \equiv 3^n \pmod{p}.$$

Also, show that there are infinitely many prime numbers p for which there is no such n .

Problem B (communicated by Marten Wortel)

Let $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be a continuous function that has a local minimum or maximum at every point of $\mathbf{R}$. Show that f is constant.

Problem C (communicated by Arne Smeets)

Let $f: \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ be a function such that for all $a \in \mathbf{Q}$ the functions $x \mapsto f(a, x)$ and $x \mapsto f(x, a)$ are polynomial functions from $\mathbf{Q}$ to $\mathbf{Q}$. Is it true that f is given by a polynomial in two variables? What if we replace $\mathbf{Q}$ by $\mathbf{R}$?

Edition 2010-2 We received submissions from Pieter de Groen (Brussel), Alex Heinis (Hoofddorp), Thijmen Krebs (Nootdorp), Julian Lyczak (Odijk), Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), and Sep Thijssen (Nijmegen).

Problem 2010-2/A Show that for every positive integer n and every integer $m \geq 2$, we have

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ m \nmid i}} \lfloor \log_m(n/i) \rfloor = \lfloor n/m \rfloor.$$

Solution This problem was solved by Pieter de Groen, Alex Heinis, Thijmen Krebs, Julian Lyczak, Tejaswi Navilarekallu, and Sep Thijssen. The book token goes to Julian Lyczak. Since every integer k has a unique representation $k = im^e$ with $m \nmid i$, the function

$$\{(i, e) \in \mathbf{Z}^2 : m \nmid i, 1 \leq i \leq n, 1 \leq e \leq \log_m(n/i)\} \rightarrow \{k \in \mathbf{Z} : 1 \leq mk \leq n\}$$

given by

$$(i, e) \mapsto im^{e-1}$$

is a bijection. From this the claimed identity follows at once.

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Problem 2010-2/B Let $b \geq 2$ be an integer. We let $\sigma_b(n)$ denote the sum of the digits in base b of the integer n . Show that we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_b(n!) = \infty.$$

Solution This problem was solved by Thijmen Krebs and Sep Thijssen. The book token goes to Sep Thijssen.

First note that for all integers $m, n \geq 1$ we have $\sigma_b(m) + \sigma_b(n) \geq \sigma_b(m+n)$, because this is true when m and n are digits. Let $k \geq 1$ be an integer and let $\sigma_{b^k}(n)$ denote the sum of the digits in base b^k of the integer n . Then for any integer $n = \sum_j n_j b^{jk}$ with $0 \leq n_j < b^k$ we have

$$\sigma_b(n) = \sum_j \sigma_b(n_j) \geq \sigma_b\left(\sum_j n_j\right) = \sigma_b(\sigma_{b^k}(n)).$$

We show by induction that for every multiple n of $b^k - 1$ we have $\sigma_b(n) \geq k(b-1)$. For $n = b^k - 1$ equality holds. Assume $n > b^k - 1$ is a multiple of $b^k - 1$. Then also $\sigma_{b^k}(n) < n$ is a multiple of $b^k - 1$, so we have

$$\sigma_b(n) \geq \sigma_b(\sigma_{b^k}(n)) \geq k(b-1)$$

by the induction hypothesis.

For n large enough, the integer $n!$ is divisible by $b^k - 1$, so we have $\sigma_b(n!) \geq k(b-1)$. We conclude

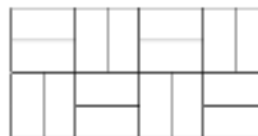
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_b(n!) = \infty.$$

Problem 2010-2/C Two players play a game of n -in-a-row on an infinite checkerboard. The first player plays with white pieces, the second with black pieces. On each move they place one piece on an empty square. The first player to have n consecutive pieces in a row or column wins. For which values of n is there a winning strategy for one of the players?

Solution This problem was solved by Thijmen Krebs. He receives the book token and the solution shown here is based on his submission.

Let us first note that the rules are so that having an extra piece on the board is never a disadvantage. Hence by strategy-stealing, White can at least draw the game for any n . Let us also note that for $n \in \{1, 2, 3\}$, White has an easy win in n moves.

The next thing we will show is that for $n \geq 5$, Black can force a draw. To do this, we partition the checkerboard in domino-shaped subsets, by repeating the following pattern:



If White places a piece on the board, Black can respond by playing in the same 'domino'. This way, any 5 consecutive pieces in a row or column will always contain both a black and a white piece, so neither player will win.

Let us thus assume $n = 4$. We will show that White has a winning strategy. A position with 3 consecutive white pieces having empty squares on both ends, but without 3 consecutive black pieces elsewhere on the board, can trivially be won by White:



Oplossingen

| Solutions

We will now write down a winning strategy for White by means of a game tree. The moves are written down by the letter 'W' or 'B', indicating whose turn it is, followed by coordinates in $\mathbb{Z}^2$. Without loss of generality, we may assume that White's first move is $W(3,3)$ and that Black's first move is $B(x_0, y_0)$ with $x_0 \leq y_0 \leq 3$. We will only list those black moves that prevent White from immediately being able to reach either 4-in-a-row or the type of winning position described above. With this in mind, the following table describes a full winning strategy for White:

Winning strategy for White, starting with $W(3,3)$

If Black plays $B(2, y_0)$:

$W(3,2)$	$B(3,1)$	$W(3,4)$	$B(3,5)$	$W(2,4)$	$B(1,4)$	$W(4,4)$	$B(5,4)$	$W(4,5-y_0)$
					$B(4,4)$	$W(1,4)$	$B(0,4)$	$W(1,5-y_0)$
	$B(3,4)$	$W(3,1)$	$B(3,0)$	$W(2,1)$	$B(1,1)$	$W(4,1)$	$B(5,1)$	$W(4,5-y_0)$
					$B(4,1)$	$W(1,1)$	$B(0,1)$	$W(1,5-y_0)$

If Black plays $B(x_0, y_0)$ with $x_0 \leq 1$ and $y_0 \geq 2$:

$W(3,2)$	$B(3,1)$	$W(3,4)$	$B(3,5)$	$W(4,4)$	$B(x,4)$	$W(4,5-y_0)$
	$B(3,4)$	$W(3,1)$	$B(3,0)$	$W(4,1)$	$B(x,1)$	$W(4,5-y_0)$

If Black plays $B(x_0, y_0)$ with $y_0 < 2$:

$W(3,4)$	$B(3,y)$	$W(4,3)$	$B(x,3)$	$W(4,4)$
----------	----------	----------	----------	----------

