

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- In Memoriam | Obituary**
- 163 **Israel Gohberg: Hij kwam, zag en overwon**
Rien Kaashoek
- Evenementen | Events**
- 167 **NMC 2010: Nadenken over de toekomst**
Wieb Bosma
- Maatschappij | Society**
- 168 **Oprichting Platform Wiskunde Nederland**
Frank den Hollander et al.
- Onderwijs | Education**
- 173 **Hoe staat ons Nederlands wiskundeonderwijs er voor? (deel 2)**
Anne van Streun
- Boekbespreking | Book review**
- 178 **Newton voor Jan en alleman**
Klaas Landsman
- Onderzoek | Research**
- 187 **Topologische kwantumcomputers: rekenen met vlechten**
Pieter Naaijkens
- Boekbespreking | Book review**
- 194 **Zermelo: een tragische held in het mathematisch theater**
Dirk van Dalen
- Maatschappij | Society**
- 199 **De overval: VORtech**
Rob Bisseling, Wil Schilders
- Evenementen | Events**
- 202 **Opening AMI: Numb3rs**
Ton Langendorff
- Onderwijs | Education**
- 203 **Wo- en vo-docenten ontwerpen samen een onderzoeksles**
Nellie Verhoeft, Nico Alink
- Boekbespreking | Book review**
- 209 **From a rational angle**
Jan Aarts
- Maatschappij | Society**
- 212 **SWI 2009: Hete zomerdagen voorspellen**
Bennie Mols

Rubrieken | Departments

- 154 **Colofon**
- 155 **Redactioneel**
Wil Schilders
- 156 **Agenda**
- 158 **Nieuws**
Charlene Kalle
- 185 **Het keerpunt van... Jan van de Craats**
Ionica Smeets
- 206 **De derde wet**
- 214 **In de verdediging**
Geertje Hek
- 217 **Boekbesprekingen**
- 222 **Problemen**

Uitgelicht



Rien Kaashoek blikt terug op het leven van de briljante wiskundige Israel Gohberg op pagina 163.



Fragment uit Newton's afleiding van Keplers perkenwet. Recent verschenen boeken over Newton worden besproken op pagina 178.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)
Judi Romijn (judi@nieuwarchief.nl)

Bladmanager/Advertenties

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (charlenekalle@gmail.com)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureau redactie

Floris Olsthoorn, Harm de Vries

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuypers (TU/e),
Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Teun
Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van
Luik (UL), Hans Melissen (TUD), Derk Pik (JSG Mai-
monides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL),
TeX-ondersteuning
Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aan-
melding ontvangen wordt. De opzegtermijn is
twee maanden vóór het verstrijken van de abon-
nementsperiode. / The subscription starts on the
day that your application is received. The term of
notice is two months before the end of the current
subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €80 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €40. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €30 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €60.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €60 instead of the full membership fee of €80 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €90 respectievelijk €105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), Rob van der Mei (CWI, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Kruger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
4	06-12-2010	verstreken
1	07-03-2011	25-10-2010
2	06-06-2011	24-01-2011
3	05-09-2011	25-04-2011

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Begin juni is het Platform Wiskunde Nederland (PWN) opgericht door het KWG en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars. Het PWN wil als spreekbuis fungeren voor de beroepswiskundigen in Nederland en de belangen behartigen van zowel onderzoekers als docenten.

Eenheid

Heeft u ook dat skeletje gezien op het omslag van ons vorige nummer? Het hing linksboven, vrijwel onzichtbaar, naast de 'N' van 'Nieuw Archief voor Wiskunde'. Was dit, bedoeld of onbedoeld, een verborgen boodschap van de eindredactie? Inderdaad zou je er wel symboliek in kunnen zien: er wordt enorm veel en op verschillende manieren gerekend in Nederland, maar de wiskunde hangt er tot op het bot verteerd bij. Dit verwoordt precies het gevoel van veel wiskundigen in dit land, dat er onvoldoende geld is en dat de meerwaarde van wiskunde eenvoudigweg niet wordt gezien.

Nu kunnen we natuurlijk blijven klagen en ons onbegrepen voelen. We zouden ook eens de hand in eigen boezem kunnen steken, analyseren hoe het zo gekomen is en actie ondernemen om dit tijt te keren. Gelukkig gebeurt dat laatste ook: eind 2008 is het *Masterplan Toekomst Wiskunde* gepresenteerd, en recent is het *Platform Wiskunde Nederland* (PWN) opgericht, na jaren van discussie. In dit nummer besteden we er uitgebreid aandacht aan door het slotdocument integraal te publiceren. Met het PWN slaan het Koninklijk Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren de handen ineen, om zo tot één gezamenlijke organisatie voor de wiskunde in Nederland te komen. Eenheid is hier dus het toverwoord, eenheid die broodnodig is voor de wiskunde. In andere disciplines, zoals de sterrenkunde, de natuurkunde, de informatica en de chemie, bestaan dergelijke organen al veel langer. Laten we hopen op, maar vooral met zijn allen meewerken aan, het toekomstige succes van PWN.

Ook de drie technische universiteiten slaan de handen ineen, zoals blijkt uit het verslag van het openingssymposium van 3TU.AMI, ofwel 'Applied Mathematics Institute'. Eenheid speelt ook hier een belangrijke rol, zich gezamenlijk presenteren naar de maatschappij en industrie. Dat is dringend nodig in een tijd waarin wiskundigen in het bedrijfsleven en masse worden ontslagen: zowel bij Philips, NXP Semiconductors als Shell zijn dit jaar de wiskundigen verdreven, onder het mom van een andere koers van het bedrijf. Inderdaad, er wordt tegenwoordig in het bedrijfsleven geoptimaliseerd met slechts één parameter, namelijk geld. Dat is simpel en overzichtelijk, maar men kan zich afvragen wat de effecten zijn op de langere termijn. De wiskunde

zal zich op deze nieuwe situatie moeten instellen, en proberen het nog groter geworden gat met de industrie te overbruggen. Wiskunde heeft altijd een onzichtbare bijdrage gehad aan de zichtbare successen, maar het wordt hoog tijd dat de zichtbaarheid van de wiskunde zelf wordt vergroot. Bovendien zullen we moeten leren de wiskunde beter te verkopen. Wat dat betreft gaf Richard Boucherie (UT) op het 3TU.AMI symposium een prachtig voorbeeld, waarin de directie van een ziekenhuis pas was overtuigd toen er een animatie werd getoond van de effectiviteit van een nieuwe methodiek om wachttijden drastisch te bekorten.

En hoe zit het dan met de eenheid in het wiskunde- c.q. rekenonderwijs? In het vorige nummer publiceerden we een artikel van Marja van den Heuvel-Panhuizen en Adri Treffers van het Freudenthal Instituut over de resultaten van het realistisch rekenonderwijs. Dit artikel was eerder verschenen in het Tijdschrift voor Orthopedagogiek, en sindsdien is in datzelfde tijdschrift ook een aantal reacties verschenen waar we de lezer graag naar verwijzen. Met een laatste ingezonden brief in 'De derde wet' willen wij de discussie echter afsluiten, ook al omwille van de broodnodige eenheid. Het recente KNAW-rapport 'Rekenonderwijs op de basisschool: analyse en sleutels tot verbetering', betoogt dat er geen verschil is aangetoond in het effect van de realistische en de traditionele rekendidactiek, en dat de aandacht verlegd zou moeten worden naar het werkelijke probleem, namelijk dat de leraar zelf niet meer leert rekenen. Het rapport had blijkbaar een helende werking, want in de week na publicatie werd er uit beide kampen nog wat gepruttel vernomen, maar dat ebde weg.

Op allerlei fronten wordt dus gewerkt aan een betere toekomst voor de wiskunde in Nederland, door de handen ineen te slaan en tevens uit de mouwen te steken. Wat dat betreft wil ik nog eens de oproep herhalen uit het vorige redactioneel: het is hoog tijd dat meer wiskundigen verantwoordelijkheid nemen voor de promotie van de wiskunde en het discours binnen het vak. Maar laten we het wel gezamenlijk doen! 

Wil Schilders, hoofdredacteur

NXP Semiconductors en TU Eindhoven

Agenda

Upcoming Events

september 2010

1 – 2 september 2010

□ New Directions in Algorithmic Game Theory

Bijeenkomst over speltheorie aan het Centrum voor Wiskunde & Informatica

plaats CWI, Amsterdam

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

6 – 10 september 2010

□ 4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up

Workshop met als doel om experts en jonge onderzoekers die vanuit verschillende gebieden blow-up fenomenen onderzoeken samen te brengen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

7 – 9 september 2010

□ ITC22

22ste editie van het jaarlijkse congres over het begrijpen en verbeteren van de manier waarop verkeer werkt in communicatienetwerken

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl

13 – 17 september 2010

□ ECCS'10

Europese conferentie over complexe systemen

plaats Lissabon, Portugal

info www.eccs2010.com

15 september 2010

□ zOEFi introductiebijeenkomst

Introductiebijeenkomst over het gebruik van het programma zOEFi voor leraren van groep 7 en 8 en de onderbouw van het voortgezet onderwijs.

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl/zoefi/overzoefi/zoefiintroductiebijeenkomst.html

17 september 2010

□ Finale wiskundeolympiade

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats TU/e, Eindhoven

info www.wiskundeolympiade.nl

20 – 24 september 2010

□ Geometry and Arithmetic

Conferentie ter gelegenheid van de 60ste verjaardag van Gerard van der Geer

plaats Schiermonnikoog

info www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~ortega/schierm

22 – 24 september 2010

□ PICNIC 2010

Internationaal congres/festival voor mensen die zich bezig houden met innovatie op het gebied van technologie, nieuwe media, entertainment, wetenschap en kunst

plaats Westergasterrein, Amsterdam

info www.picnicnetwork.org/2010

24 september 2010

□ Discovery 2010

Uitgaansnacht vol wetenschap, muziek en kunst

plaats NEMO, Amsterdam

info discovery09.wordpress.com

27 – 30 september 2010

□ ISDDE Conferentie 2010

Conferentie over het ontwerp en gebruik van producten, met plenaire lezingen van Angela Hall en/of Robin Millar, John Mason en Anne Watson, en Phil Daro

plaats Oxford, UK

info www.isdde.org/isdde/oxford2010

28 september 2010

□ NWO Talent Classes

Eendaagse bijeenkomst voor promovendi en post-docs over een van de onderwerpen waar tijdens de Talentendag een workshop over gegeven wordt. Andere dagen zijn 9 november en 7 december

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl

oktober 2010

1 oktober 2010

□ Wiskundetoernooi

Jaarlijkse wiskundewedstrijd, georganiseerd door studenten en werknemers van de opleiding wiskunde van de Radboud Universiteit, voor teams van 5 middelbare scholieren uit de bovenbouw

plaats Huygensgebouw, Nijmegen

info www.ru.nl/wiskundetoernooi/editie-2010

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
E-mail: agenda@nieuwarchief.nl

6 – 8 oktober 2010

Woudschoten Conferentie

35ste Woudschoten Conferentie van de Nederlandse en Vlaamse Numerieke Wiskundige Gemeenschappen.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist
info www.cwi.nl

12 oktober 2010

NWO talentendag

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag
info www.nwo.nl

25 – 29 oktober 2010

Arithmetic of Surfaces

Workshop over rekenkunde op oppervlakken met nadruk op K3, del Pezzo en elliptische oppervlakken

plaats Lorentz Center, Leiden
info www.lc.leidenuniv.nl/lc/web/2010/416/info.php3?wsid=416

november 2010

5 november 2010

Geogebra in de wiskundeles: een eerste kennismaking

Studiedag over het programma Geogebra

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht
info www.fi.uu.nl

6 november 2010

Studiedag/Jaarvergadering NVvW

Jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren met als thema 'Geboeid door wiskunde'

plaats Anna Van Rijn College, locatie Albatros, Nieuwegein
info www.nvww.nl

12 november 2010

Panama Opleidersdag

Dag voor pabodocenten rekenen-wiskunde, dit jaar in het teken van implementatie en toetsing van de kennisbasis rekenen-wiskunde. De dag wordt georganiseerd in samenwerking met ELWleR

plaats Utrecht
info www.fi.uu.nl

15 – 17 november 2010

Stochastics Meeting Lunteren 2010

Jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse stochastici en statistici

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren
info www.cwi.nl

18 november 2010

Meet the future - Science and Technology Summit 2010

Dag in het teken van baanbrekende wetenschap en technologie, waarop internationale topsprekers een visionaire blik op de toekomst geven

plaats World Forum, Den Haag
info www.summit2010.nl

19 november 2010

Voorronde Wiskunde A-lympiade

Een wedstrijd voor leerlingen in 5 havo en 5/6 vwo.

plaats Deelnemende scholen
info www.fi.uu.nl/alympiade

19 november 2010

Wiskunde B-dag

Variant van de Wiskunde A-lympiade voor leerlingen 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in het profiel of pakket.

plaats Deelnemende scholen
info www.fi.uu.nl/wisbdag

22 – 26 november 2010

Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces

Workshop over symmetrische ruimtes, speciale functies en q-deformaties en hun representaties

plaats Lorentz Center, Leiden
info www.lc.leidenuniv.nl/lc/web/2010/423/info.php3?wsid=423

januari–maart 2011

19 – 21 januari 2011

29ste Panama Conferentie

Conferentie over reken-wiskundeonderwijs met als thema 'Aanpassen, inpassen, toepassen'

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout
info www.fi.uu.nl/panama

28 – 29 januari 2011

Nationale Wiskunde Dagen

Dag voor leraren in het voortgezet onderwijs

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout
info www.fi.uu.nl/nwd

4 februari 2011

Nederlandse Wiskunde Olympiade 2011

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Deelnemende scholen
info www.wiskundeolympiade.nl

10 februari 2011

Mastercourse Dynamische systemen

Mastercourse voor vwo-docenten wiskunde over complexe wiskundige dynamische systemen

plaats UvA, Amsterdam
info www.science.uva.nl/mastercourses

2 maart 2011

World Maths Day

Dag waarop geprobeerd wordt het wereldrecord goed beantwoorde wiskunde vragen te breken. Dit jaar gaat de World Maths Day voor het eerst deel uitmaken van de World Educational Games

plaats Overal ter wereld
info www.worldmathsday.com

3 maart 2011

Mastercourse Deeltjesfysica in de Nieuwe Natuurkunde

Mastercourse voor vwo-docenten wiskunde, natuurkunde, nlt en anw over de LHC versneller op CERN en de vragen die spelen in de deeltjesfysica

plaats UvA, Amsterdam
info www.science.uva.nl/mastercourses

9 maart 2011

Wetenschap en Techniek Academie

Studiedag voor leerkrachten basisonderwijs en pabostudenten waarop handvatten worden aangereikt om de onderzoekende houding van de leerling in natuur- en techniekonderwijs te bevorderen

plaats Buys Ballot Laboratorium, Utrecht
info www.wtacademie.nl

26 maart 2011

375 jaar Universiteit Utrecht

75ste lustrum van de Universiteit Utrecht

plaats Universiteit Utrecht
info www.uu.nl/NL/Universiteitutrecht/uu375/Pages/default.aspx

Nieuws

| News

Alpha-machine

Het SXSW Interactive Festival in maart koos Wolfram|Alpha tot beste website in de categorie 'technical achievement' en 'best in show'.

Wolfram|Alpha is een internet-antwoordmachine. Je typt een vraag in of een aantal zoekcriteria en krijgt een antwoord terug. Het verschil met internet-zoekmachines is dat Wolfram|Alpha antwoord geeft op de vraag, in niet alleen een lijst met websites waarop relevante informatie te vinden is. Zo kun je bijvoorbeeld vragen naar het aantal inwoners van Wenen, de leeftijd van John Lennon in 1970 of het land met het op twee na grootste bruto nationaal product. Het antwoord op 'the meaning of life' weet het programma ook, dat is 42.

Om een antwoord te vinden, worden wiskundige berekeningen uitgevoerd en om de opgegeven vraag goed te interpreteren wordt natuurlijke taalherkenningstechnologie gebruikt. Achter het programma gaat zo'n zes miljoen regels Mathematicacode schuil. Er wordt geschat dat bij vijf tot tien procent van alle zoekopdrachten op het internet om een feitelijk antwoord wordt gevraagd. Dat betekent dat Wolfram|Alpha miljoenen mensen per dag zou kunnen helpen. *Bron: www.physorg.com*



Vraag en antwoord op Wolfram Alpha

Samen sterk

Wiskundigen van de drie Nederlandse technische universiteiten hebben zich in april verenigd in het Applied Mathematics Institute (3TU.AMI). Het instituut is in het leven geroepen om meer zichtbaarheid te geven aan de groepen wiskundigen van de universiteiten. Volgens Kees Vuik van de TU Delft bereiken deze groepen onder de paraplu van het AMI in grootte de negende plaats op wereldschaal. Vuik stelt dat het instituut een aanspreekpunt moet worden voor de buitenwereld. Vragen, ook vanuit het bedrijfsleven, kunnen door het instituut worden doorspeeld naar één van de deelnemende groepen.

De oprichting van het AMI is geïnspireerd door een Berlijns voorbeeld. In 2000 verenigden drie Berlijnse universiteiten in het Matheon en nu haalt dit instituut gemiddeld twee keer per week de krant, het heeft een enorm budget en is de vraagbaak voor tal van journalisten.

Om een goede start te kunnen maken heeft het AMI vijf tot tien miljoen euro aangevraagd voor de komende vijf jaar, maar vooralsnog is niets bekend over de toekenning hiervan. *Bron: delta.tudelft.nl*

Alles in orde

Als het menselijk brein nieuwe, onlogische informatie binnen krijgt, dan gaan de verschillende hersengebieden op topsnelheid aan de slag om deze informatie een plaatsje te geven. Dit blijkt uit onderzoek van

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

neurowetenschapper Marlieke van Kesteren van het Universitair Medisch Centrum St. Radboud in Nijmegen.

Van Kesteren bestudeerde twee groepen mensen terwijl ze naar het beginstuk van een film keken. De eerste groep kreeg het normale begin van de film te zien. Voor de tweede groep was dat begin in stukken geknipt en in een willekeurige volgorde aan elkaar geplakt. Een dag later kregen alle deelnemers het normale einde van de film te zien.

In een MRI-scan werd duidelijk dat de hersenen van de tweede groep op topsnelheid werkten om alle stukken film op een logische manier aan elkaar te plakken. Ook was deze activiteit nog lang na de vertoning van de film zichtbaar, zelfs toen bij de deelnemers uit de eerste groep al lang geen bijzondere activiteit meer meetbaar was.

Het was al bekend dat de hippocampus een belangrijke rol speelt bij geheugenvorming. Het onderzoek van Van Kesteren wijst uit dat er bij het opslaan van nieuwe informatie intensieve samenwerking is tussen dit gebied en de prefrontale hersenschors. Hoe ingewikkelder de nieuwe informatie is, hoe intensiever de twee hersengebieden met elkaar communiceren.

Het onderzoek geeft nieuw inzicht in het proces van kennisverwerking en kan in de toekomst van nut zijn bij de ontwikkeling van leer vakken in het onderwijs. Vooral bij vakken met een gefaseerde kennisopbouw, zoals wiskunde, is het volgens Van Kesteren van belang om te weten hoe de hersenen omgaan met nieuwe informatie.

Het onderzoek verscheen maart in het tijdschrift *Proceedings of the National Academy of Sciences*.
Bron: www.nu.nl

Speciale functies gaan digitaal

Het National Institute of Standards and Technology (NIST) heeft de *Digital Library of Mathematical Functions* (DLMF) en de bijbehorende papieren versie, de *NIST Handbook of Mathematical Functions* uitgegeven. De uitgave is een langverwachte herdruk van het meest geciteerde werk van de NIST en wordt voornamelijk gebruikt door specialisten in de toegepaste wiskunde.

In 1964 werd het *Handbook of Mathematical Functions* voor het eerst uitgegeven. Het werd al snel een onmisbaar naslagwerk over speciale functies voor wetenschappers en ingenieurs. Speciale functies verschijnen overal waar de natuur wordt bestudeerd, werktuigbouwkundige problemen worden aangepakt of computersimulaties worden gedaan. Ze komen ook voor in statistiek, financiële modellen en economische analyse.

De nieuwe uitgave maakt al deze informatie vrij beschikbaar op het internet en bevat bovendien speciale functies die pas sinds kort veel opduiken. De DLMF bevat ook visuele hulpmiddelen om kwalitatieve informatie te geven over het gedrag van wiskundige functies. Het is bijvoorbeeld mogelijk om drie-dimensionale weergaves te roteren. Verder zijn er referenties naar bewijzen van de wiskundige stellingen die in de tekst voorkomen, adviezen over methodes om speciale functies te berekenen en links naar beschikbare software en referenties.

Bron: www.nist.gov/itl/math/math_051110.cfm

Een vergiftigingsgezinde priester?

De Franse filosoof en wiskundige René Descartes stierf in 1650 in Stockholm. Er werd gedacht dat hij een longontsteking had opgelopen, omdat zijn lichaam niet opgewassen was tegen het koude Zweedse klimaat. Theodor Ebert, onderzoeker aan de Universiteit van Erlangen, bestudeerde een jaar lang stukken in archieven in zowel Parijs als Stockholm en kwam tot de conclusie dat Descartes stierf door een

met arseen vergiftigde hostie, die hij kreeg van de katholieke priester Jacques Viogu .

Viogu 's motief zou zijn dat Descartes de bekering van de Zweedse koningin naar het katholicisme in de weg stond. De protestantse koningin had sympathie voor katholieke idee n en de van huis uit katholieke Descartes werd in 1694 naar Zweden gehaald om haar les te geven. Door zijn radicale uitspraken, werd Descartes echter door veel van zijn katholieke tijdgenoten met argwaan bekeken en volgens Ebert was dit voor Viogu  voldoende aanleiding om hem te vermoorden.

Het bewijs voor Eberts uitspraken komt uit een brief van Descartes' dokter van na diens dood. Hierin wordt gesproken over iets verdachts in de urine van Descartes en volgens Ebert is dat bloed. Bloed in urine is namelijk geen symptoom van een longontsteking, maar wel van een arseenvergiftiging. Een andere aanwijzing is dat Descartes zijn dokter om een recept voor braakmiddel had gevraagd. Volgens Ebert is dit een duidelijke aanwijzing dat Descartes, die goed op de hoogte was van de geneeskunde van zijn tijd, vermoedde dat hij vergiftigd was.

Collega's reageren voorzichtig op de bevindingen van Ebert.

Bron: www.guardian.co.uk



Is Descartes overleden door een vergiftigde hostie?

Onvoldoende rekening met dyscalcul 

De overheid houdt in haar beleid onvoldoende rekening met gevolgen van dyscalcul . Dat stelt Hans van Luit van de Universiteit Utrecht in zijn oratie, uitgesproken op 27 mei van dit jaar.

Er wordt volgens Van Luit nog te veel gedacht dat dyscalcul  niet te behandelen is, terwijl juist bij herkenning van de rekenstoornis in een vroeg stadium de gevolgen in te perken zijn. Hij noemt hierbij als voorbeeld dat kinderen op school al op jonge leeftijd verboden wordt om op hun vingers te tellen. Leerlingen met dyscalcul  zijn echter heel erg gebaat bij het gebruiken van hun vingers als rekenhulpmiddel.

Van Luit hoopt dat er verandering komt in de houding van ontwikkelaars van rekenmethoden en vakdidactici, zodat rekenmethoden in de toekomst meer aansluiten op de vermogens van zwakke rekenaars. Ook hoopt hij dat leerlingen met een dyscalculieverklaring een vrijstelling krijgen voor de rekentoets die binnenkort een verplicht onderdeel wordt van het eindexamen. Hij waarschuwt voor de gevolgen van een dergelijke toets in de verdere schoolcarri re en de beroepsperspectieven van leerlingen met dyscalcul .

Bron: www.uu.nl

Een gevoelig onderwerp

Volgens onderzoek van Wondimu Ahmed van de Rijksuniversiteit Groningen hebben de emoties die leerlingen ervaren tijdens de wiskundes, belangrijke gevolgen voor hun prestaties. Leerlingen die meer

zelfvertrouwen hebben en meer overtuigd zijn van het belang van wiskunde, hebben positievere gevoelens bij het vak. Dit leidt tot betere prestaties en een beter gebruik van leerstrategieën.

Ahmed bestudeerde leerlingen in de eerste klas van het voortgezet onderwijs in de wiskundeles. Aan het begin van het eerste schooljaar hebben veel leerlingen positieve gevoelens bij de wiskundeles. Volgens Ahmed is dit omdat er eerst veel bekende stof uit het basisonderwijs wordt herhaald en het vak daardoor makkelijk lijkt. Gedurende het jaar slaat de verveling toe en wordt het vak negatiever ervaren.

Volgens Ahmed is er een grote rol weggelegd voor de docent. Het zelfvertrouwen van leerlingen kan vergroot worden door ze taken te geven van verschillende niveaus en het belang van het vak kan onderstreept worden door wiskunde te koppelen aan de werkelijkheid. Op beide manieren worden positieve gevoelens tijdens de wiskundeles versterkt. Volgens Ahmed kunnen ouders ook hun steentje bijdragen, vooral door thuis te benadrukken hoe belangrijk wiskunde is.

Op 8 april promoveerde Ahmed op het proefschrift *Expectancy-value antecedents and cognitive consequences of students' emotions in mathematics*.
Bron: www.rug.nl

Calendar girls

Op internet is een kalender te vinden met een stelling van een vrouwelijke wiskundige voor iedere maand in 2010. De stellingen worden vergezeld door een uitleg voor algemeen publiek en verwijzingen naar achtergrondliteratuur.

Eén van de stellingen op de kalender is de Vriendschapstelling uit 1966 van Paul Erdős, Alfréd Rényi en Vera Sós over grafen. Vertaald naar relaties tussen mensen op een feestje zegt de stelling het volgende. Als op een feestje iedere twee gasten precies één gemeenschappelijke vriend hebben die ook op het feestje aanwezig is, dan is er een gast aanwezig die bevriend is met iedereen op het feestje.

Een andere stelling is de Diaconis-Holmes-Montgomery muntgooistelling uit 2007 over de kans dat een munt na het opgooien op kop terecht komt. Verder staan er stellingen op van onder andere Jo Heath, Emmy Noether, Mireille Bousquet-Mélou en Cheryl Praeger.

Op onderstaande website staat de kalender. Hier zijn nog veel meer stellingen te vinden, ook van mannen, en iedere dag wordt er een stelling van de dag gegeven en besproken.
Bron: www.theoremoftoday.org

Leren van geleerden

Volgens een onderzoek aan het Northwestern Institute on Complex Systems (NICO) naar de relatie tussen promovendus en begeleider binnen de wiskunde, zijn zeer succesvolle academici goede begeleiders in het eerste derde deel van hun carrière, maar slechte begeleiders in het laatste derde deel. De belangrijkste reden hiervoor zou zijn dat van succesvolle academici verwacht wordt dat ze steeds meer mensen gaan aansturen en dat daardoor hun aandacht wat dun gespreid wordt.

Voor het onderzoek is het Mathematics Genealogy Project gebruikt. In deze online databank is voor iedereen die zich aanmeldt opgeslagen wie zijn of haar begeleider was. De gegevens gaan helemaal terug tot Isaac Newton. De onderzoekers hebben de gegevens bestudeerd van 7259 wiskundigen die tussen 1900 en 1960 promoveerden.

Hun belangrijkste bevindingen zijn als volgt. Die wiskundigen, waarvan de begeleider in het eerste derde deel van zijn of haar carrière zat, begeleidde zelf later 37 procent meer promovendi dan gemiddeld. Omgekeerd, als de begeleider in het laatste derde deel van zijn of haar carrière zat, dan begeleidde ze zelf 31 procent minder promovendi

dan gemiddeld. Verder bleek dat een wiskundige gemiddeld tien promovendi in zijn of haar carrière begeleidde en dat dit aantal over de gehele periode zo goed als constant was, ondanks de twee wereldoorlogen in deze periode. Een laatste conclusie uit het onderzoek is dat begeleiders van minder promovendi dan gemiddeld, het over het algemeen beter deden.

De resultaten verschenen in juni in *Nature*.
Bron: www.eurekalert.org

Hogendijk lid KNAW

Jan Hogendijk, hoogleraar geschiedenis van de wiskunde aan de Universiteit Utrecht, is benoemd tot lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW).

In mei heeft de KNAW 27 nieuwe leden geselecteerd tijdens de jaarlijkse verkiezing. De selectie vindt plaats op basis van de wetenschappelijke prestaties van de aspirant-leden en op voorspraak van de wetenschappelijke gemeenschap. De nieuwe leden zijn werkzaam op alle gebieden van het wetenschappelijke onderzoek en worden op 13 september geïnstalleerd.
Bron: www.knaw.nl



Jan Hogendijk

Om het even

Een vermoeden uit 1968 van de Russische wiskundige Alexandre Gelfond is bewezen Christian Mauduit en Joël Rivat van het Institut de Mathématiques de Luminy. Hun resultaat is dat het bij elkaar optellen van de cijfers uit de decimale ontwikkeling van een priemgetal, gemiddeld voor de helft van de priemgetallen een even getal oplevert.

Voor hun bewijs combineerden ze methodes uit de combinatoriek, analytische getaltheorie en harmonische analyse. Het lijkt erop dat hun werk zal leiden tot meer diepe resultaten over representaties van rijen gehele getallen. Buiten het theoretische belang van zulke resultaten, zijn er belangrijke toepassingen in bijvoorbeeld cryptografie.

Het artikel van Mauduit en Rivat is in mei verschenen in de *Annals of Mathematics*.
Bron: www.sciencedaily.com

Tijd voor een index

Onderzoek naar de schade van lange wachtrijen, kan winkeliers helpen om hun personeel efficiënt in te zetten. Volgens Pen-Yuan Liao van de Nationale Verenigde Universiteit in Miaoli, Taiwan, is het heel moeilijk om te berekenen wat het verlies in omzet is als klanten lang moeten wachten. De kosten van het wachten kunnen echter wel op een creatieve en effectieve manier worden berekend.

Liao baseerde zijn formule, de 'balking-index', op het gedrag dat

paarden vertonen als ze niet over een hindernis willen springen. De index gaat omhoog als mensen naar hun gevoel te lang in een rij staan te wachten. Door deze index te vermenigvuldigen met de lengte van de rij en de gemiddelde aankomstfrequentie van nieuwe klanten, krijg je het aantal gefrustreerde klanten dat de rij voortijdig verlaat. Met behulp van Liao's resultaat kunnen winkeliers beter bepalen hoeveel personeel ze op ieder moment zouden moeten inzetten.

Aangezien wachten altijd vervelend is, staat iedere gewonnen minuut volgens Liao voor grote winst: klanten zullen tevredener vertrekken en vaker terugkomen.

Bron: www.eurekalert.org



HagaZiekenhuis dreigt Gill met rechtszaak

Richard Gill, hoogleraar statistiek aan de Universiteit Leiden, heeft een concept-dagvaarding gekregen van het HagaZiekenhuis wegens zijn uitspraken op internet omtrent de zaak van Lucia de Berk.

Gill is al jaren intensief betrokken bij de beroemde rechtszaak tegen De Berk. De verpleegkundige werd in 2004 schuldig bevonden aan zeven moorden en drie pogingen tot moord en tot levenslang veroordeeld, om in april van dit jaar weer vrijgesproken te worden. In de veroordeling speelden statistische argumenten een grote rol en mede door de fouten die hierbij zijn gemaakt, werd de zaak in 2007 heropend. Het HagaZiekenhuis is ontstaan uit een fusie tussen de verschillende ziekenhuizen waar De Berk werkzaam was ten tijde van de aanklacht.

Na de vrij spraak heeft Gill op skipr.nl, nursing.nl en badscience.net teksten geplaatst over de fouten die zijn gemaakt tijdens de rechtszaak tegen De Berk en in het bijzonder over de bijdrage van het HagaZiekenhuis. Gill publiceerde zijn teksten, omdat hij vindt dat de Nederlandse samenleving veel te leren heeft van deze justitiële dwaling. Volgens hem zijn het vooral de geslotenheid en de hiërarchische aard van de medische wereld waardoor de hele situatie zo uit de hand is gelopen. Hij stelt dat er in Nederland een sterke doofpot mentaliteit heerst en dat hier alleen verandering in kan komen door het hele verhaal van De Berk publiek te maken.

Het HagaZiekenhuis dreigt nu met rechterlijke stappen als Gill de teksten niet van internet verwijderd. De motivatie hiervoor is dat Gill in zijn teksten ziekenhuispersoneel bij naam noemt. Verder is het ziekenhuis van mening dat Gill als hoogleraar aan een gerenommeerd Nederlands wetenschappelijk instituut een zekere autoriteit heeft en in de teksten persoonlijke meningen als feiten presenteert. Mocht de rechter oordelen in het voordeel van het HagaZiekenhuis, dan zal Gill een dwangsom van vijftien duizend euro moeten betalen voor iedere dag dat de teksten nog op internet staan.

Bron: www.badscience.net

Soort zoekt soorten

Het aantal soorten levende wezens op aarde is met grote waarschijnlijkheid veel kleiner dan werd gedacht. Onderzoek van de School of Land and Environment van de University of Melbourne wijst uit dat dit

eerder zo'n vijf en een half miljoen is dan de minimaal dertig miljoen waar vaak over gesproken wordt.

Het zijn vooral de tropische geleedpotigen die het nauwkeurig schatten van het aantal soorten moeilijk maken. Om van deze groep een goede schatting te geven is gebruik gemaakt van toegepaste kansmodellen die normaal gesproken worden toegepast op financiële risico's. Hier komt uit dat de kans 0,9 is dat het aantal tropische geleedpotige diersoorten op aarde tussen de twee en zeven miljoen ligt. De beste schatting is 3,7 miljoen.

Volgens Andrew Hamilton, de hoofdonderzoeker van het project, is meer bekend over het aantal sterren in heelal dan over het aantal soorten levende wezens op aarde. Dit was voor hem voldoende motivatie om aan het onderzoek te beginnen, maar hij stelt dat het onderzoek ook van belang is bij het bepalen van het aantal uitgestorven diersoorten. Dit kan namelijk alleen goed worden geschat als het totaal aantal soorten op aarde bekend is.

Bron: www.sciencedaily.com



Atta cephalotes, een soort tropische geleedpotige

Wiskunde op straat

Wiskundigen van de University of Manchester zijn in juni de straat op gegaan om het winkelende publiek enthousiast te maken voor wiskunde. Door middel van straatoptredens probeerden ze voorbijgangers ervan te overtuigen dat wiskunde overall is en heel leuk kan zijn.

De straatoptredens gingen vooraf aan de conferentie 'How to Talk Maths in Public: a Conference on Public Engagement', die in juni gehouden werd in Manchester. Volgens organisator Chris Budd van de University of Bath is het nu belangrijker dan ooit om wiskundigen en het algemene publiek met elkaar in contact te brengen, omdat de behoefte aan mensen met een wiskundige opleiding groeit.

De wiskundige straatoptredens zijn een initiatief van Sara Santos van de Royal Institution of Great Britain en Matt Parker, een wiskundige stand-up comedian, verbonden aan Queen Mary, University of London. Samen hebben ze al meer dan zestig wiskundigen getraind in wiskundig straattheater. Op de webpagina van de BBC zijn wiskundigen in actie te zien. De webpagina www.mathsbusking.com wordt nog gevuld met informatie.

Bron: www.manchester.ac.uk

Verstand van de ballen

Onderzoekers van de McCormick School of Engineering and Applied Science hebben een nieuwe methode gevonden om de kwaliteit van voetballers te bepalen.

Een voetballer wordt beschouwd als 'goed' als de experts het hierover eens zijn, maar tot nu toe ontbrak een redelijke, objectieve maat om dit te bepalen. Het aantal doelpunten dat gemiddeld per wedstrijd gemaakt wordt is te laag om er veel uit af te kunnen leiden.

Luís Amaral en zijn co-auteurs hebben bestaande methodes uit de analyse van sociale netwerken gegeneraliseerd om ze geschikt te ma-

ken voor voetbalwedstrijden. De knooppunten in deze netwerken stellen de voetballers uit een team voor, met een extra knooppunt voor het doel. Knooppunten zijn met elkaar verbonden als spelers elkaar de bal aanspelen of als een speler op het doel schiet. Een pad in het netwerk geeft zo de route weer die de bal aflegt op het veld.

Amaral en zijn collega's onderzochten het aantal paden in een netwerk met een schot op het doel. Hoe meer van zulke paden in het netwerk, hoe beter het team. De kwaliteit van een individuele speler hangt af van het aantal paden dat via deze speler loopt.

De methode is uitgetest met de gegevens van de webpagina van de Euro Cup 2008. Volgens Amaral kwam de uitkomst hiervan zo goed met de meningen van de experts overeen, dat er geen twijfel over bestaat dat de methode goed werkt. Het onderzoek verscheen in juni in het tijdschrift *PLoS ONE*.
Bron: www.eurekalert.org



Voetballers zijn goed als de experts het daarover eens zijn

Zaalkokaal voor Johan Wolswinkel

De Zaalkokaal wordt jaarlijks uitgereikt aan de auteur van het meest leesbare en vanuit journalistiek oogpunt meest interessante artikel in het Nieuw Archief voor Wiskunde in het vorige jaar en gaat dit jaar naar Johan Wolswinkel voor zijn artikel getiteld 'La Probabilité des Jugements'. Wolswinkel bespreekt in zijn artikel de relatie tussen kansrekening en rechtspraak en hoe kansrekening gebruikt werd en kan worden om een geschikt besluitsvormingsorgaan in te richten.

De jury, bestaande uit Adriaan van der Burgh, Vincent Icke en Charlotte Vlek, vond het stuk zeer toegankelijk voor de belangstellende lezer met basiskennis van de wiskunde. Ook daagt het stuk de lezer tegelijkertijd uit met enkele fundamentele vraagstukken. Bijvoorbeeld: is een oordeel van 12 personen die unaniem voor iets stemmen intuïtief even sterk als een oordeel van 112 personen voor en 100 personen tegen? Ook de vraag of het eigenlijk wel zinvol is om kansrekening toe te passen op rechtspraak, gaat de auteur niet uit de weg.

De prijs is bedoeld als schouderklopje voor een auteur die erin slaagt een aansprekend onderwerp op een prettig leesbare manier te presenteren aan het beoogde lezerspubliek: de leden van het KWG. In het bijzonder moet het artikel toegankelijk zijn voor niet-specialisten, en de lezer overtuigen van de relevantie van het onderwerp. Daarnaast is het wenselijk als zo'n artikel enerzijds ook lezers van buiten het Genootschap kan boeien, en anderzijds ook boeiend is voor lezers die zich beroepsmatig met het beschrevene bezighouden.

De jury vindt dat Wolswinkel er uitstekend in geslaagd is een geschikt, maatschappelijk relevant en origineel onderwerp met sterke mathematische aspecten op begrijpelijke wijze te presenteren. De jury is met name te spreken over de combinatie van solide uitleg en verwondering over de fundamentele kwesties in het vakgebied die het artikel oproept.
Bron: Charlotte Vlek

Think Spinque

Het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) heeft een spin-off bedrijf opgericht dat zoekmachines op maat kan leveren.

Het bedrijf heet Spinque en is opgericht door drie medewerkers van de afdeling Interactive Information Access van het CWI. Spinque biedt klanten de mogelijkheid om zelf hun eigen zoekmachine te creëren door verschillende zoekstrategieën te combineren of zelf een geheel nieuwe zoekstrategie te definiëren.

Naar eigen zeggen introduceert Spinque een nieuwe manier van zoeken, die ze 'Search by Strategy' noemen. *Bron: www.octrooicentrum.nl*

Minder zwakke scholen

Uit het jaarverslag van de Onderwijsinspectie, dat in april werd gepubliceerd, blijkt dat 145.000 leerlingen onderwijs krijgen dat onder de maat is, omdat ze op een zwakke of zeer zwakke school zitten. Dit is ongeveer zeven procent van het totaal aantal leerlingen. Het aantal is gedaald ten opzichte van vorig jaar.

Volgens de inspectie zouden er verplichte toetsen ingevoerd moeten worden, om zo op meerdere momenten in een schoolloopbaan het niveau van de leerlingen te kunnen peilen. Dat zou voor scholen een instrument kunnen zijn om hun prestaties te kunnen vergelijken en desnoods verbeteren.

Ook vindt de inspectie dat prestatiegericht onderwijs onvoldoende van de grond komt. Hierbij stelt een school duidelijke doelen voor iedere leerling en kan de leerling die zijn doelen niet weet te halen, gericht hulp en extra begeleiding krijgen. Voor rekenen en wiskunde werkt vijftien procent van de scholen op deze manier. Volgens de inspectie moet het aandeel omhoog, omdat bewezen is dat leerlingen met deze aanpak beter presteren.
Bron: www.nu.nl

Floris Takens overleden

Op 20 juni van dit jaar is Floris Takens overleden. Floris Takens was als hoogleraar aan de Rijksuniversiteit Groningen verbonden van 1971 tot 1999 en bekleedde tijdens zijn werkzame leven vele bestuurlijke functies. In het afgelopen decennium bleef hij actief betrokken bij onderzoeksactiviteiten zoals promotiebegeleiding. Hij was een wiskundige van uitzonderlijke kracht met een bijzonder grote internationale uitstraling. Takens werd gekozen tot KNAW-lid, was redacteur van de *Springer Lecture Notes in Mathematics* en werd in 2005 benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw.

In een latere editie van het Nieuw Archief zal meer aandacht besteed worden aan Floris Takens leven en werk.
Bron: Henk Broer



Floris Takens (1940-2010)

Rien Kaashoek

Department of Mathematics, FEW

Vrije Universiteit

De Boelelaan 1081A

1081 HV Amsterdam

m.a.kaashoek@few.vu.nl



Israel Gohberg

In Memoriam Israel Gohberg (1928–2009)

Hij kwam, zag en overwon

Op 12 oktober 2009 overleed Israel Gohberg, 81 jaar oud, na een verblijf van bijna drie weken in een ziekenhuis in Kfar Saba, een plaats grenzend aan zijn woonplaats Ra'anana in Israël. Rien Kaashoek haalde Gohberg in midden jaren zeventig naar de VU, eerst als vaste bezoeker en later als parttime hoogleraar bij de sectie Analyse. In dit artikel blikt hij terug op het leven van een briljant en charismatisch wiskundige.

Van 1983 tot zijn emeritaat in 1998, op 70-jarige leeftijd, was Gohberg als hoogleraar in deeltijd verbonden aan de afdeling Wiskunde van de Vrije Universiteit. In 1985 werd hij benoemd tot buitenlands lid van onze Koninklijke Akademie, in de plaats die vrij kwam door het overlijden van Marc Kac. Als emeritus kwam Gohberg tot 2006 nog elk jaar voor een paar maanden naar de VU. Hij was toen al enige jaren een dialyse patiënt en had een aantal bypasses. We wisten dat hij kwetsbaar was, maar we kenden zijn geestkracht en we deelden in zijn onverwoestbaar optimisme. Hij was tot het laatst wiskundig actief. En zo kwam zijn overlijden op 12 oktober 2009 toch nog onverwacht.

Het is goed om in het Nieuw Archief stil te staan bij het leven en werk van deze eminente wiskundige. Gohberg was een onbetwist leider op het gebied van singuliere integraalvergelijkingen, de theorie van niet-geadjungeerde operatoren, spectraaltheorie en factorisatie van matrix- en operatorfuncties, en inverteringsproblemen voor gestructureerde matrices. Zijn wiskundig werk is buitengewoon omvangrijk en het is onmogelijk om in kort bestek al wat hij in de wiskunde heeft bereikt te bespreken. In dit artikel

zal daarom het accent wat meer liggen op de 'Dutch connection'. Gohberg heeft veel betekend voor de Nederlandse wiskunde, in het bijzonder voor de groep 'Analyse en Operatortheorie' aan de Vrije Universiteit.

Nalatenschap

Gohberg laat een buitengewoon omvangrijk oeuvre na. Hij heeft meer dan 450 publicaties op zijn naam staan. Hij is co-auteur van 27 boeken waarvan de laatste dit jaar postuum verscheen. De eerste boeken waren in het Russisch en werden in het Engels, Frans en Duits vertaald. Van die 27 boeken werden er acht aan de VU geschreven met Harm Bart, André Ran, Freek van Schagen en mijzelf, in verschillende groeperingen, als co-auteurs. Hij gaf leiding aan het werk van veertig promovendi waaronder vijf van de VU. Velen maakten succesvolle academische carrières en sommigen deden het erg goed in het zakenleven. Gohberg stichtte in 1978 het tijdschrift *Integral Equations and Operator Theory*. Hij was de oprichter en eindredacteur van de boekenserie *Operator Theory: Advances and Applications* welke inmiddels meer dan 200 boeken omvat. Hij was de mede-oprichter (samen met William Helton) en de president

van de stuurgroep van de Internationale workshops on *Operator Theory and Applications (IWOTA)*, waarvan er drie in Nederland plaatsvonden en de overige verspreid over de wereld (Amerika, Europa, Africa en Azië). Al deze functies bekleedde hij tot zijn dood.

Jeugdjaren, kennismaking met wiskunde.

Gohberg werd geboren in 1928 in Tarutino, in Bessarabië dat toen deel uitmaakte van Roemenië. Zijn vader Tsudik had daar een kleine drukkerij en was een actief lid van de Joodse gemeenschap. Hij beheerde bijvoorbeeld de gelden bestemd voor de armlastigen. In 1940 ging het deel van Roemenië waar de familie Gohberg woonde, als gevolg van het Molotov-Ribbentrop pact, over in de handen van de Sovjet-Unie en werd deel van de Sovjetrepubliek Moldavië. Die verandering werd de familie noodlottig. Vader Tsudik werd beschuldigd van 'kapitalistische uitbuiting' en werd verbannen naar de Goelag waar hij is omgekomen. Wanneer precies is ook nu nog niet bekend. In 1941, als gevolg van de oorlogshandelingen, moesten moeder Clara en de twee kinderen Israel (Izea) en Fanja vluchten. Ze kwamen terecht in Kirgizië waar ze de oorlogsjaren doorbrachten in het dorp Vasilovsky Sovhoz, dichtbij de hoofdstad Frunze (later Bishkek), niet ver van de grens met China. Izea ging daar naar de middelbare school en had in de laatste drie jaar een voortreffelijke wiskundeleraar, pas opgeleid aan de Universiteit van Warschau, een leerling van

K. Borsuk. Deze leraar wekte zijn belangstelling voor de wiskunde.

Na de middelbare school koos hij voor een vervolgonderwijs aan het Pedagogisch Instituut in Frunze waar zijn belangstelling voor de wiskunde verder toenam. In 1947 ontving hij een Stalin-beurs, een grote eer en financieel erg welkom. De studie aan het Pedagogisch Instituut was echter vooral gericht op de lerarenopleiding. Daarom verliet Gohberg in 1947 Frunze, met achterlating van de Stalin-beurs, om zijn wiskundestudie te vervolgen aan de Universiteit van Kishinev in Moldavië. Daar leerde hij van een van de jongere docenten, een leerling van S.G. Mikhlin, voor het eerst over singuliere integraalvergelijkingen, over Fredholmtheorie en Fredholmindex, onderwerpen waaraan hij later zelf veel zou bijdragen.

Verdere levensloop

In de jaren 1947–1974 ontwikkelde Gohberg zich tot een leidinggevende wiskundige op het gebied van de functionaalanalyse en operatortheorie, toen nog relatief nieuwe onderzoeksgebieden. Van 1953 tot 1959 was hij werkzaam op het Pedagogisch Instituut in Beltsy (Bălți, Moldavië), de laatste jaren als voorzitter van de afdeling Wiskunde aldaar, van 1959–1974 werkte hij op het Wiskundelinstituut van de Akademie van Wetenschappen van Moldavië, eerst als onderzoeker en later als hoofd van de afdeling Functionaalanalyse. Van 1963–1973 was hij ook hoogleraar aan de Universiteit van Kishniv. In die jaren publiceerde het wiskunde instituut van de Akademie in Kishinev het tijdschrift

Matematicheskie Issledovaniya. Formeel was Gohberg een toegevoegd redacteur, maar in werkelijkheid organiseerde hij het tijdschrift en droeg de eindverantwoordelijkheid voor het analyse-deel. Joodse wiskundigen moesten niet een al te vooraanstaande positie hebben.

In de periode 1950–1970 verbleef Gohberg vele malen voor twee of drie maanden in Odessa voor gezamenlijk werk met de vooraanstaande wiskundige Mark Krein. Ze werkten meestal in het appartement van Krein. Gohberg had daar een kleine werkkamer die gewoonlijk werd aangeduid als ‘het kantoor van Izea’. De samenwerking met Krein heeft zeer veel voor Gohberg betekend. Hoewel hij geen student van Krein was in formele zin sprak hij toch over Krein als zijn leermeester. Ook later verwees hij vaak naar wat hij van Krein had geleerd. Discussies werden soms beslecht met een zin als: “Ik heb van Krein geleerd...” en verdere tegenspraak was dan uitgesloten.

Eind jaren zestig, begin jaren zeventig werd het voor Joodse wiskundigen in de Sovjet-Unie steeds moeilijker hun werk te publiceren. Het toenemende antisemitisme trof soms ook studenten met Joodse instructeurs. Meer en meer begon Gohberg te overwegen te emigreren naar Israël. Zorgvuldig, ook met het oog op zijn eigen leerlingen, maakte hij de plannen voor zijn vertrek. In 1974, na een jaar als ‘refusnik’, verliet hij de Sovjet-Unie en arriveerde hij via Wenen met zijn moeder Clara, echtgenote Bella en hun twee kinderen in Israël.

In Israël werd Gohberg hoogleraar aan de Universiteit van Tel-Aviv en bekleedde daar van 1976 tot 1998 de Nathan en Lillian leerstoel in de Wiskundige Analyse en Operatortheorie. Naast zijn voltijdse aanstelling aan de Universiteit van Tel-Aviv, had Gohberg deeltijdposities aan het Weizmann Instituut van 1975–1983, aan de Universiteit van Maryland te College Park van 1980–2002, aan de VU van 1976–2006, eerst als vaste bezoeker en later als deeltijd hoogleraar en emeritus. Daarnaast bezette hij in de tweede helft van de zeventiger jaren voor enige tijd semi-permanente posities aan de Universiteit van New York te Stony Brook, de Universiteit van Calgary in Alberta, Canada en de Universiteit van Georgia te Athens, en weer later met een Humboldt Fellowship ook op verschillende plaatsen in Duitsland.

Wij deelden Gohberg met vele anderen. Op de begrafenis in Rana'nana ontmoette ik een van de hoogleraren uit Stony Brook. Hij zei me: “You guys in Amsterdam stole Gohberg

from us”. Het stemt tot tevredenheid dat dit vergrijp zo goed geslaagd is.

Wiskundig werk in 1947–1974

Als Gohberg in 1974 de Sovjet-Unie verlaat en emigreert naar Israël behoort hij tot de wiskundige elite. Samen met Mark Krein uit Odessa was hij een van de pioniers van de moderne Fredholmtheorie. Zijn eerste artikel, dat in 1951 verscheen in *Doklady* toen hij nog een student was, ging over dat onderwerp. De beroemde stelling van Gohberg en Krein uit 1958, die de Fredholmindex van een block Toeplitzoperator met een continu symbool in geometrische termen beschrijft als het omloopsgetal van de determinant van dat symbool, kan nu worden aangemerkt als een vroege voorloper van de latere indexstelling van Atiyah-Singer. Collega Klaas Landsman heeft er een mooi artikel over geschreven in het Nieuw Archief [1]. Hij ontving lovende woorden van Gohberg en een kleine correctie [2]. De twee boeken die Gohberg en Krein samen schreven over niet-zelfgeadjungeerde operatoren waren van wereldklasse. Vanuit het Russisch werden ze vertaald in het Engels en Frans. Gohbergs werk over singuliere integraalvergelijkingen en met name het gebruik in die context van de toen nog nieuwe Gelfandtheorie van Banachalgebras was buitengewoon vernieuwend. Dat begon al met Gohbergs dissertatie (1952) en werd door hem voortgezet samen met zijn leerling Nahum Krupnik. Zij vonden de correcte beschrijving van het symbool van een singuliere integraaloperator waarvan de coëfficiënten sprongsgewijs continu zijn. Verrassend was dat het symbool een matrixfunctie moest zijn, zelfs als de coëfficiënten scalair zijn. Gohbergs werk samen met Jürgen Leiterer (toen een student uit de DDR, nu hoogleraar aan de Humboldt Universität te Berlijn) over multiplicatieve ontbindingen van analytische operatorfuncties wordt veel gebruikt tot in de mathematische fysica toe (astrofysica en lineaire transporttheorie). De formules van Gohberg-Semencul en Gohberg-Heinig voor de inverse van eindige Toeplitzmatrices en eindige block Toeplitzmatrices en het continue analogon van deze resultaten verwierven grote internationale bekendheid. Ze hadden een bijzondere invloed op de numerieke lineaire algebra: we zien die inversie-formules nu als een van de hoekstenen voor de moderne theorie van gestructureerde matrices en operatoren.

Komst naar Amsterdam

Aan de VU waren we goed op de hoogte van Gohbergs werk. We hadden een aantal van



Israel Gohberg in 1967

zijn publicaties tot in detail gelezen. Sommige waren speciaal voor ons uit het Russisch vertaald door Rudolf Troelstra, de toenmalige didacticus van de afdeling Wiskunde; andere publicaties lasen we in Duitse vertalingen die we ontvingen van collega Bernard Gramsch uit Kaiserslautern. Zij waren vertaald door een niet-wiskundige, en hadden daardoor soms een wat komisch taalgebruik. Wij genoten van zowel de wiskunde als de taal en waren in alle opzichten klaar voor zijn komst.

Gohbergs eerste bezoeken aan de VU vonden plaats in december 1975 en in het voorjaar van 1976. In de eerste twee maanden van 1975 hadden we een gezamenlijk project gestart. Wij waren toen beiden in College Park, Israël als gast van zijn vriend Seymour Goldberg en ik met sabbatsverlof als gast van David Lay. De twee eerste bezoeken van Gohberg aan Nederland dienden onder andere ter voorbereiding op een verblijf van zes maanden als gasthoogleraar in het najaar van 1976. Dat najaarssemester was een groot succes: hij kwam, zag en overwon. Hij stal de hoofden en ook de harten van velen.

Eind 1976 werd besloten dat Gohberg elk jaar naar de VU zou komen voor twee of drie korte perioden, elk van drie tot zes weken. Dat paste goed in het gastenbeleid, één van de bestuurlijke speerpunten van de toenmalige afdeling. Het contract met Gohberg werd gemaakt voor 3 jaar, maar voor elke periode moest een formele aanstelling plaatsvinden en elke keer moesten alle formulieren worden ingevuld. Formulieren die niet bedoeld waren voor iemand die was geboren in een deel van Roemenië dat in 1940 was overgegaan in de handen van de Sovjet-Unie, voor iemand die vervolgens uit de Sovjet-Unie was geëmigreerd naar Israël en nu in Amsterdam wiskunde-onderzoek kwam verrichten, en dus een werkvergunning moest verkrijgen. En zo kwam Gohberg terecht temidden van gastarbeiders uit diverse streken, wachtend tot het zijn beurt was om de juiste stempels te ontvangen. Hij kon er met humor over vertellen. Al spoedig kende hij de belangrijkste personen in het ambtelijk web, ontwikkelde met hen een vriendschappelijke relatie, en verkortte alle administratieve procedures tot een half uurtje werk.

Wiskundig werk met de VU-groep

In de operatorentheorie is het heel gewoon concrete klassen van integraal- en differentiaalvergelijkingen te bestuderen in termen van analytische functies die op een natuurlijke wijze verbonden zijn met de betreffende vergelijkingen. De analyse van een singu-



Israel Gohberg (achter) in 1988 met (v.l.n.r.) Harry Dym, Seymour Goldberg, Peter Lancaster en Rien Kaashoek, die ter gelegenheid van Gohbergs 60ste verjaardag een conferentie in Calgary organiseerden.

liere integraalvergelijking aan de hand van het bijbehorende symbool is een voorbeeld waar zo'n reductie heel nuttig is. Tijdens Gohbergs bezoek aan Amsterdam, kwam hij met een suggestie voor een tweede reductie. Het werd één van de hoogtepunten in het werk dat Harm Bart en ik samen met hem hebben verricht. André Ran sloot zich hier later bij aan. Gohbergs suggestie was gebaseerd op de theorie van karakteristieke matrix- en operatorfuncties voor operatoren die niet al teveel verschillen van een zelfgeadjungeerde operator of van een unitaire. Die theorie was in de jaren 50–70 ontwikkeld en Gohberg had er zelf aan bijgedragen. De spectrale analyse van matrix- en operatorveeltermen waaraan hij direct na zijn emigratie had gewerkt, samen met Peter Lancaster en Leiba Rodman, was een tweede bron van inspiratie.

De nieuwe stap die Gohberg in gedachten had, gebruikte het idee van realisatie zoals dat in de systeem- en regeltheorie gemeengoed is. Analytische functies worden opgevat als overdrachtsfuncties van input-output systemen, waardoor het mogelijk wordt deze functies te analyseren in termen van drie of vier operatoren, soms zelfs matrices, die vaak veel eenvoudiger zijn dan de oorspronkelijke operator. Om dat toe te lichten nemen we als voorbeeld een integraalvergelijking van Wiener-Hopf type:

$$f(t) - \int_0^\infty k(t-s)f(s)ds = g(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (1)$$

Veronderstel dat het symbool $W(\lambda) = I_m - \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda s} k(s)ds$ een rationale $m \times m$ matrix is. Dan heeft het symbool geen polen in oneindig en een klassieke realisatie-stelling van Kalman vertelt ons dat het symbool kan worden geschreven als

$$W(\lambda) = I_m + C(\lambda I_n - A)^{-1}B. \quad (2)$$

Hier zijn I_m en I_n eenheidsmatrices, respectievelijk van de orde m en n , en A , B en C zijn matrices van bijpassende grootte. Op deze manier wordt de analyse van de integraalvergelijking (1), waarbij het gaat om een operator die werkt op een oneindig dimensionale ruimte, teruggebracht tot een probleem in de lineaire algebra. Ter illustratie vermelden we één resultaat in detail.

Stelling Vergelijking (1) is uniek oplosbaar in de Lebesgue-ruimte van alle integreerbare $\mathbb{C}^n$ -functies op $[0, \infty)$ dan en slechts dan als aan de volgende twee voorwaarden is voldaan:

- de matrix $A - BC$ heeft geen reële eigenwaarden;
- de deelruimte M opgespannen door alle eigenvectoren en gegeneraliseerde eigenvectoren van A behorende bij eigenwaarden in het boven halfvlak en de deelruimte $M^\times$ opgespannen door alle eigenvectoren en gegeneraliseerde eigenvectoren van $A - BC$ behorende bij eigenwaarden in

het beneden halfvlak vormen samen een directe som decompositie van $\mathbb{C}^n$, d.w.z.

$$\mathbb{C}^n = M \oplus M^\times.$$

In dat geval wordt de unieke oplossing van (1) gegeven door de formule

$$f(t) = g(t) + \int_0^\infty \gamma(t, s)g(s)ds, \quad 0 \leq t < \infty,$$

waarbij de resolvente $\gamma(t, s)$ als volgt bepaald wordt:

$$\gamma(t, s) = \begin{cases} iCe^{-it(A-BC)}\Pi e^{is(A-BC)}B, & 0 \leq s < t < \infty, \\ -iCe^{-it(A-BC)}(I_n - \Pi)e^{is(A-BC)}B, & 0 \leq t < s < \infty. \end{cases}$$

Hier is Π de projectie van $\mathbb{C}^n$ langs de ruimte M op de ruimte $M^\times$.

Met betrekkelijk kleine wijzigingen blijft bovengenoemde stelling ook van kracht als de matrices A , B en C in (2) vervangen worden door operatoren. Dat bleek in het bijzonder interessant te zijn als A en C beide onbegrensd zijn en C begrensd met betrekking tot A . Het verschaft ons een directe relatie met de lineaire transporttheorie en met collega Lekkerkerker van de Universiteit van Amsterdam. Bi-halfgroepen en exponentieel dichotome operatoren verschenen als nieuwe entiteiten die inmiddels een vaste plaats in de operatorentheorie hebben gekregen.

De hierboven geschetste aanpak wordt nu de *methode van de toestandsruimte* genoemd. Het onderzoek veranderde onze kijk op de relatie tussen operatorentheorie en de lineaire algebra. We raakten geïnteresseerd in de systeem- en regeltheorie, eerst als een bron van inspiratie en later ook als een terrein van toepassingen voor operatorentheorie. We hebben de methode gebruikt om aller-

lei problemen op te lossen, variërend van lineaire Toeplitzvergelijkingen tot niet-lineaire integreerbare PDE's; zie de overzichtsartikelen [3], [6] en [7].

Het tweede grote thema in ons werk aan de VU, waar ook Freek van Schagen actief bij betrokken was, betrof de reconstructie van operatoren en matrices op basis van partiële gegevens. Ook dat thema was een direct uitvloeisel van die eerder genoemde belangstelling voor de ingenieursproblemen. Het behelsde problemen van interpolatie en extensie voor matrix- en operatorfuncties, waaronder operator-waardige en niet-stationaire versies van de klassieke interpolatie-problemen van Carathéodory, Nevanlinna en Pick, Schur en Nehari, met toepassingen op het zogenaamde vier blokprobleem uit de regeltheorie. De studie van invarianten van partieel gegeven matrices en operatoren onder gelijkvormigheidstransformaties (zie [8]) was een ander belangrijk deel van dit onderzoek.

Charismatische persoonlijkheid

Het gezamenlijk werk met Gohberg was een waar genoegen en gaf veel voldoening. Zijn charismatische persoonlijkheid en charme, zijn gevoel voor humor, zijn principes en regels voor goede samenwerking, die dateerden uit de tijd van zijn samenwerking met M.G. Krein, zijn talent als verhalenverteller, de wiskundige juweeltjes die hij onverwacht te voorschijn toverde, zijn fenomenale geheugen: het droeg allemaal bij aan een inspirerende en ontspannen werkomgeving waarin het goed toeven was. Gohberg verstond de kunst mensen voor zich te winnen. In de 35 jaar dat ik met hem heb mogen samenwerken was er zelden sprake van onenigheid. Volgens MathScienceNet van de AMS ben ik zijn topco-auteur, althans “by number of collaborations”. Ik ben er buitengewoon dankbaar voor.

Gohberg hield van Amsterdam. Hij bezocht graag de vismarkt in de Albert Cuypstraat en kende de beste restaurants. Eén van de Chinese restaurants genoot zijn bijzondere voorkeur en hij nam zijn gasten er vaak mee naar toe. Het werd bekend als *Gohbergs restaurant*.

Gohberg and friends

Uitvoerige informatie over zijn wetenschappelijk werk kan gevonden worden in de artikelen [9] en [10] die verschenen zijn in het boek *Gohberg and Friends* [4] dat in 2008 werd uitgegeven ter gelegenheid van zijn 80ste verjaardag. Gohberg schrijft in dat boek ook zelf, over zijn jaren in de Sovjet-Unie, over zijn relaties met zijn wiskundige vrienden en over zijn eigen visie op de wiskunde. In [4] vindt de lezer ook informatie over zijn zes eredoctoraten en de vele andere eerbewijzen die Gohberg in de loop der jaren ontving, waaronder zijn benoeming tot SIAM Fellow in 2009. Een bijzonderheid is dat in *Gohberg and Friends*, zijn beide dochters schrijven over ‘Our Dad’s mathematics’ en hoe het is om een beroemde wiskundige als vader te hebben. Veel informatie over Israel Gohberg, ook van persoonlijke aard, kan gevonden worden in de recente levensberichten [5], [11] en [12].

Gohberg was een groot wiskundige en een bijzondere vriend. Velen met ons zullen hem missen. Ons medeleven gaat uit naar zijn familie, in het bijzonder naar zijn echtgenote Bella, die hem de laatste jaren begeleidde op al zijn tochten. We gedenken Israel Gohberg in dankbaarheid.

Dankwoord

Met dank aan Harm Bart, Jaap Korevaar en Freek van Schagen voor hun commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Referenties

1. Klaas Landsman, ‘De indexstelling van Atiyah en Singer’, NAW 5/5 (3) (2004), pp. 207–211.
2. Israel Gohberg, ‘The Atiyah-Singer index formula’, NAW 5/5 (4) (2004), p. 319.
3. H. Bart, Transfer functions and operator theory. *Lin. Alg. Appl.* **84** (1986), 33–61.
4. H. Bart, Th. Hempfling, and M.A. Kaashoek (Eds.), *Israel Gohberg and Friends*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
5. H. Bart, H. Dym, M.A. Kaashoek, A. Markus, and L. Rodman, In Memoriam Israel Gohberg, August 1928–October 12, 2009, obituary in: *Lin. Alg. Appl.*, to appear.
6. H. Bart, I. Gohberg and M.A. Kaashoek, The state space method in problems of analysis, in: *Proceedings First International Conference on Industrial and Applied Mathematics, Contributions from the Netherlands*, CWI 1987; pp. 1–16.
7. I. Gohberg, and M.A. Kaashoek, State space methods for analysis problems involving rational matrix functions, in: *Dynamical systems, control, coding, computer vision*, (Eds. G. Picci and D.S. Gilliam), Birkhäuser Verlag, 1999; pp. 93–110.
8. I. Gohberg, M.A. Kaashoek and F. van Schagen, *Partially specified matrices and operators: classification, completion, applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995; 333 pp.
9. M.A. Kaashoek, A review of the mathematical work of Israel Gohberg up to 1998, in [4], pp. 105–109.
10. M.A. Kaashoek and L. Lerer, Gohberg’s mathematical work in the period 1998–2008, in [4], pp. 111–115.
11. J. Korevaar, Levensbericht van Israel Gohberg, in: *Levensberichten en Herdenkingen 2010*, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam.
12. C. Tretter, In Memoriam Israel Gohberg (23-8-1928–12-10-2009), *Integral Equations and Operator theory* **65** (2009), pp. 305–306.

Wieb Bosma

Radboud Universiteit Nijmegen
Toernooiveld1, 6525 ED Nijmegen
bosma@math.ru.nl

Evenementen 46ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2010)

Nadenken over de toekomst

Het Nederlands Mathematisch Congres nadert de 50! Op 22 en 23 april vond NMC aflevering 46 plaats in De Uithof in Utrecht. Wieb Bosma doet verslag en nodigt u uit om mee te denken over de toekomst van dit congres.

De wiskundige bezoeker, wel gewend aan zakelijk beton, voelde zich bij aanmelding direct thuis bij de ontvangstbalie in de hal, met de ambiance van een forse fietsenstalling, onderdeel van het Educatorium, ontworpen door het befaamde Office for Metropolitan Architecture (van Rem Koolhaas). Een hellend vlak leidde naar de foyer en de (mooie) zaal Megaron waar alle hoofdsprekers optraden. Mindere goden stonden geprogrammeerd in de Rode en de Blauwe zaal van een belendend gebouw, waarvan de hoofdgang vooral associaties met een moderne gevangenis oproept. Ook de programmering was in grote lijnen vertrouwd: ik telde drie plenaire voordrachten, zes semiplenaire (eufemisme voor 3 tegelijk) en een stuk of tien parallelle minisymposia. Bovendien was er een avondprogramma voor een breder publiek, met David Acheson en een elektrische gitaar, waarover ik enthousiaste verhalen hoorde. Inderdaad, ik heb lang niet alles bijgewoond, en vertel verder slechts over de onderdelen die mij zijn bijgebleven. Zoals de openingsvoordracht van Günther Ziegler (met een prachtig

gedoseerde combinatie van historie en details over een combinatorisch-topologisch onderwerp). En de tiende Beegerlezing, door Florian Luca, waarin met tomeloze energie ontwikkelingen in de getaltheorie van aritmetische functies werden geschetst. Altijd aardig om te zien: 6 promovendi, strijdend (voor de vijfde maal) om de Philipsprijs; met ditmaal Matthias Mnich van de TU Eindhoven als winnaar. Ter gelegenheid van het verschijnen van Selecta van Hans Freudenthal haalden Van Dalen en Springer herinneringen op. Voorafgaand daaraan heb ik me ook zeer vermaakt bij de presentatie door Astrid Balsem van enkele bijzondere items uit de collectie uit de Boekerij van het Wiskundig Genootschap, beheerd door de UB van de UvA.

Hetgeen mij brengt bij het organiserende KWG, waarvan de ledenvergadering traditioneel tijdens het congres plaatsvindt. Ongebruikelijk was dit jaar de lichte opwindings, veroorzaakt door de aangekondigde oprichting van een nieuwe stichting Platform Wiskunde Nederland, die één nationaal loket voor alle wiskunde in Nederland beoogt te bieden — en die volgens sommige leden de doodsteek voor het eerbiedwaardige genootschap zou kunnen betekenen. Er waren twee zittingen tijdens het congres, een extra vergadering begin juni, en vooral een verbeterd voorstel met getemperde ambities voor PWN voor nodig om de gemoederen wat te bedaren. Toen was het NMC al lang afgesloten door David Bressoud, met een inspirerende voordracht over hoe het begrip van calculus en analyse gebaat is bij het schetsen van successen en fouten in de historische ontwikkeling van het vak. Wederom een goede greep van het organiserende comité, waarmee een mooi congres werd afgesloten. Waar na dit stukje zou kunnen eindigen met de aankondiging dat op 14 en 15 april 2011 aan de Technische Universiteit van Twente NMC 2011

plaatsvindt. Ware het niet dat ik lezers nog graag zou willen oproepen na te denken over de toekomst van het NMC.

Dit congres trekt bij lange na niet het merendeel der professionele wiskundigen als bezoeker; het wordt steeds moeilijker de organisatie rond te krijgen (financieel: universiteiten vragen veel geld voor zalen, de goede sprekers moeten voor de gelegenheid ingevlogen worden), ook omdat de kleinere wiskundeafdelingen (Wageningen, Rotterdam) niet meer meedoen en de anderen sneller aan de beurt komen. Ondanks enkele goede nieuwe programma-onderdelen is dit niet de plek waar je jaarlijks bijna al je collega's treft, waar je hoort over ontwikkelingen net buiten je eigen terrein, waar student en aio de coryfee eens aan het werk zien, en waar de leraar wat extra inspiratie opdoet.

Zelf heb ik twee suggesties. Voor de eerste werd vorig jaar in Groningen een aanzet gegeven: zou het niet mooi zijn als de vier landelijke onderzoeksclusters groots zouden uitpakken en hun leden met een onverbidde-lijk programma zouden lokken naar een gezamenlijke lokatie waar als bijeffect kruisbestuiving plaats kan vinden? De timing is niet goed, want nieuw geld is er nog niet en het oude is op, maar misschien zou dit onderdeel van de nieuwe ronde kunnen worden? Een idee van geheel andere aard, maar niet per se los hiervan: jaarlijks wordt voor wiskundeleraars een groots spektakel georganiseerd, de Nationale Wiskunde Dagen (waaraan velen van ons ook wel eens hebben bijgedragen). Zou het niet geweldig zijn deze NWD en het NMC parallel en in elkaars nabijheid te organiseren? Zodat leraren eens bij ons kunnen binnenwippen, en wij af en toe bij hen kunnen rondkijken — met zoveel deelnemers en aardige stands zou het de sfeer zeer ten goede kunnen komen! Ik houd me aanbevolen voor reacties. ←



David Acheson met elektrische gitaar

foto: Fabian van Noort, licentie via creativecommons.org

Frank den Hollander
Petra de Bont
Arjeh Cohen
Swier Garst
Marian Kollenveld

Douwe van der Kooi
Jan van Mill
Gert Vegter
Jan Wiegerinck
Lex Zandee

Voorzitter oprichtingsbestuur PWN:
Frank den Hollander
Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
denholla@math.leidenuniv.nl

Maatschappij Oprichting Platform Wiskunde Nederland

Nederlandse beroepswiskundigen bundelen hun krachten

Op 3 juni van dit jaar vond een extra Algemene Ledenvergadering van het KWG plaats. Tijdens deze vergadering is besloten tot de oprichting van de Stichting Platform Wiskunde Nederland. In dit slotdocument (opgesteld op 25 mei van dit jaar) vertelt het oprichtingsbestuur van het platform over structuur, doel en werkwijze. In het volgende nummer zal het NAW ruimte bieden voor opiniërende stukken.

Dit document bevat een beschrijving van de structuur van het *Platform Wiskunde Nederland* (PWN), dat zal opereren onder de koepel van het KWG en de NVvW. Het is geschreven ter informatie van wiskundigen in Nederland, en dient tevens als leidraad voor het Bestuur, de Commissies en de Directeur van het Bureau PWN bij de uitvoering van de geschetste taken en uitdagingen.

Voorgeschiedenis

In oktober 2006 heeft het Landelijk Voorzittersoverleg Wiskunde, o.l.v. R. Tijdeman, een *Commissie Structuur Belangenbehartiging Wiskunde* ingesteld ten einde te komen tot een vereenvoudiging van de bestuurlijke structuur van de wiskunde in Nederland. Achtergrond daarbij was het feit dat er diverse be-

roepsverenigingen en adviescommissies voor de wiskunde actief waren, zonder dat daarbij steeds duidelijk was waar de eindverantwoordelijkheden lagen. De slagvaardigheid was daarmee niet optimaal gediend. Ook naar buiten toe werkte deze situatie verwarrend. De suggestie werd gedaan om een *landelijk platform* op te richten, dat alle zaken die voor de wiskunde van belang zijn op efficiënte wijze kan behartigen: een platform dat een centrale plaats in de Nederlandse wiskunde kan innemen, tot profijt van alle Nederlandse wiskundigen, en dat bovendien dienstverlenend kan werken. De bestaande adviescommissies zouden op een natuurlijke wijze in een dergelijke nieuwe structuur dienen op te gaan.

De noodzaak tot verdere stroomlijning van de bestuurlijke structuur van de wiskunde

weerspiegelt zich in het feit dat in aangrenzende disciplines een bundeling van krachten reeds voorhanden is: de informatica heeft het IPN, de sterrenkunde het NCA en de scheikunde het Regieorgaan Chemie, die elk als een krachtige pleitbezorger voor hun discipline naar buiten treden. De natuurkunde is landelijk al even sterk georganiseerd.

De Commissie Structuur Belangenbehartiging Wiskunde heeft in januari 2008 een rapport uitgebracht, getiteld *Het Bureau Wiskunde* en geschreven door A. Sevenster, dat een eerste inventarisatie bevatte van de contouren van de beoogde reorganisatie. Dit rapport vormde de basis voor een *landelijke consultatieronde* in het najaar van 2008 en het voorjaar van 2009, waarbij rectoren, decanen, directeuren van instituten en onderzoekscholen, voorzitters van beroepsverenigingen en adviescommissies, KNAW, NWO en VSNU om commentaar en input werden gevraagd. Dit mondde op zijn beurt uit in een raamplan, de *Blauwdruk PWN* van de hand van H. Broer, F. den Hollander, M. Kollenveld, J.K. Lenstra

en A. Schrijver (15 maart 2009), waarin een mogelijke structuur van PWN werd geschetst. Dit raamplan is vervolgens besproken tijdens de algemene ledenvergadering van het KWG op het Nederlands Mathematisch Congres in april 2009. In die vergadering werd een mandaat afgegeven aan een *oprichtingsbestuur* om PWN binnen een jaar in de steigers te zetten. Dit mandaat is vervolgens door het bestuur van de NVvW bekrachtigd.

Huidige stand van zaken

Het huidige document geeft een overzicht van de structuur en van de voorziene activiteiten van PWN, zoals neergezet door het oprichtingsbestuur. Tijdens de algemene ledenvergadering van het KWG op het Nederlands Mathematisch Congres op 22 april 2010 is er door de voorzitter van het oprichtingsbestuur verslag van gedaan. *De oprichting van PWN dient formeel te worden goedgekeurd door de besturen van het KWG en de NVvW.*

De streefdatum voor de oprichting van de Stichting PWN is 1 juli 2010. PWN opereert onder de koepel van het KWG en de NVvW, die als beroepsvertegenwoordigende instanties optreden. Het functioneren van PWN kent twee aspecten:

1. Optreden als vertegenwoordiger van de Nederlandse beroepswiskundigen (op terreinen waar het KWG en de NVvW deze rol niet hebben), ter vergroting van de slagvaardigheid op bestuurlijk terrein.
2. Faciliteren door diensten op maat te ontwikkelen en op contractbasis aan te bieden aan het KWG, de NVvW en derden.

NWO is nauw betrokken bij de oprichting van PWN: het plan tot oprichting van PWN was reeds verankerd in het *Masterplan Toekomst Wiskunde* (november 2008), dat een direct uitvloeisel was van de NWO strategienota wiskunde getiteld *Concentratie en Dynamiek* (22 mei 2008). Ook de TWINSraad van de KNAW heeft haar steun aan PWN toegezegd.

Organisatie

Het Platform Wiskunde Nederland (PWN) bestaat uit:

- *Bestuur*.
- *Commissies*: Onderzoek, Onderwijs, Publicaties, Publiciteit, Innovatie.
- *Bureau*: Directeur met secretariële ondersteuning.

Bestuur

Het Bestuur bestaat uit 5 personen: een voorzitter op persoonlijke titel, de voorzitters van het KWG en de NVvW, en 2 leden voor te dragen door de besturen van het KWG en de

Afkortingen

APS	=	Algemeen Pedagogisch Studiecentrum
CITO	=	Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling
cTWO	=	Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs
CWI	=	Centrum voor Wiskunde & Informatica
NWO-EW	=	Bureau Exacte Wetenschappen van NWO
EZ	=	Ministerie van Economische Zaken
ERC	=	European Research Council
ESF	=	European Science Foundation
EU	=	European Union
FI	=	Freudenthal Instituut
HAVO	=	Hoger Algemeen Voortgezet Onderwijs
HBO	=	Hoger Beroepsonderwijs
ICMI	=	International Commission on Mathematical Instruction
IPN	=	ICT-Onderzoek Platform Nederland
KNAW	=	Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen
KWG	=	Koninklijk Wiskundig Genootschap
MBO	=	Middelbaar Beroepsonderwijs
NCA	=	Nationaal Comité voor Astronomie
NVvW	=	Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
NWO	=	Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek
NWO-EW	=	Bureau Exacte Wetenschappen van NWO
NWO-GBE	=	Gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen van NWO
NOCW	=	Nederlandse Onderwijscommissie voor de Wiskunde
NVORWO	=	Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-wiskundeonderwijs
OCW	=	Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap
PABO	=	Pedagogische Academie voor het Basisonderwijs
PWN	=	Platform Wiskunde Nederland
SLO	=	Stichting Leerplanontwikkeling
STW	=	Stichting Technische Wetenschappen
TWI	=	Transferpunt Wiskunde en Innovatie
TWINS	=	Raad voor de Technische Wetenschappen, Wiskunde, Informatica, Natuur- en Sterrenkunde en Scheikunde van KNAW
VMBO	=	Voorbereidend Middelbaar Beroepsonderwijs
VSNU	=	Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten
VWO	=	Voorbereidend Wetenschappelijk Onderwijs
3TU-AMI	=	Applied Mathematics Institute van de Technische Universiteiten van Delft, Eindhoven en Twente

NVvW. De taak van het Bestuur is het opstellen van een reglement voor PWN, het benoemen van de Commissies en van de Directeur, en het besluiten over (en bevorderen van) de implementatie van het door de Commissies en de Directeur voorgestelde beleid. Tevens zorgt het Bestuur voor landelijk draagvlak, staat het garant voor openheid in de adviesstructuur, en bewaakt het de financiële contouren van PWN. Na een aantal jaren kan het aantal bestuursleden tot 3 worden teruggebracht.

Commissies

De Commissies zijn de *centrale actoren* van PWN. Zij werken initiërend en uitvoerend in hun domein. De voorzitters van de Commissies onderhouden contact met het Bestuur en met de Directeur. De Commissies zijn verantwoording schuldig aan het Bestuur. Hun taak is het voorstellen van domeinspecifiek beleid.

Bureau

Het Bureau ondersteunt en faciliteert de activiteiten van het Bestuur en van de Commis-

sies. Waar mogelijk werkt het ook dienstverlenend richting het KWG en de NVvW. Het Bureau bestaat uit een directeur (0,5 fte), die belast is met de volgende taken:

- Zorgdragen voor de uitvoering van het door Bestuur en Commissies gevormde beleid en voor de onderlinge afstemming daarvan.
- Opstellen van het jaarverslag, de jaarlijkse begroting, en de convenanten met NWO-EW, CWI en 3TU-AMI.
- Onderhouden van contact met de besturen van het KWG en de NVvW, alsmede met de directeurs van NWO-EW, CWI en 3TU-AMI.
- Aanspreekpunt zijn voor zaken van algemeen belang voor PWN. Vervullen van de rol van ambassadeur voor de wiskunde in Nederland.

De Directeur is verantwoording schuldig aan het Bestuur. De Directeur krijgt secretariële ondersteuning. Het Bureau PWN is gehuisvest aan het CWI (bij de start voor een periode van 3 jaar) en is dagelijks telefonisch en via email bereikbaar. NWO-EW onderhoudt de PWN-website in overleg met de Directeur.

Stichting

Het KWG en de NVvW richten een stichting op — *de Stichting Platform Wiskunde Nederland* — die als rechtspersoon van PWN kan optreden. Er is een stichtingsacte opgesteld. De domeinnaam *WisNed* is vastgelegd (emailadres: PWN@wisned.nl). Het Bestuur van PWN is tevens het Bestuur van de stichting. De formele aanstelling van de directeur van het Bureau PWN kan bij de Stichting PWN geschieden, dan wel via een andere weg worden gerealiseerd indien zulks wenselijk is.

Activiteiten Commissies

In wat volgt wordt een schets gegeven van de taken, de verantwoordelijkheden en de uitdagingen van de Commissies. Daarbij wordt een aantal urgente zaken genoemd, die de eerste aandacht verdienen.

Commissie Onderzoek

De *Commissie Onderzoek* bestaat uit 12 personen: vertegenwoordigers van elk van de 9 wiskunde-instituten, van het CWI, en van de Sectie Wiskunde van de KNAW, alsmede een adviseur van het NWO-GBE. Het Bureau van NWO-EW verzorgt het secretariaat.

De Commissie Onderzoek heeft de volgende taken:

- Opstellen en ontwikkelen van strategie en beleid rond het onderzoek wiskunde in Nederland.
- Adviseren aan o.a. NWO, KNAW, STW, OCW, EZ, VSNU, rectoren en decanen.
- Vormen van een landelijk draagvlak zowel voor het direct onderzoekveld als daarbuiten.
- Bewaken van de financiering van het onderzoek wiskunde in Nederland.

De Commissie Onderzoek komt minstens 4 keer per jaar bijeen, om actuele zaken te behandelen en strategische ontwikkelingen te bespreken. De Commissie Onderzoek is verantwoording schuldig aan het Bestuur. Een keer per jaar doet zij schriftelijk verslag van haar activiteiten richting het Bestuur. Waar mogelijk streeft zij naar samenwerking met de andere Commissies.

De Commissie Onderzoek kan steunen op de bestaande goede infrastructuur voor onderzoek en op de reeds sterk gefocuseerde nationale onderzoekagenda. Urgente zaken die de eerste aandacht vragen zijn:

- Adviseren m.b.t. de ontwikkelingen rond het Masterplan Toekomst Wiskunde richting rectoren en decanen. Dit plan vraagt bijzondere aandacht voor voortzetting van de financiering van de vier wiskundeclusters, voor doorstroom van jonge onderzo-

kers, en voor een nauwere relatie tussen universiteiten en wiskundeleraren VWO.

- Begeleiden van de groei van de nationale onderzoeksschool wiskunde WONDER.
- Aandacht voor de positie van de didactiek van de wiskunde, en van het onderzoek naar reken- en wiskundeonderwijs en naar de geschiedenis van de wiskunde.
- Begeleiden van aanvragen in de Vernieuwingsimpuls en bij de ERC, ESF en EU.
- Versterken van de onderzoekrelatie tussen universiteit en hogeschool.

Commissie Onderwijs

De *Commissie Onderwijs* bestaat uit 1–15 personen met de volgende achtergrond: Docenten universiteit, Docenten voortgezet onderwijs, Lerarenopleiding, Technisch HBO, SLO, APS, CITO, KWG, NVvW, NVORWO, cTWO, FI, NVvW.

De Commissie Onderwijs heeft de volgende taken:

- Opstellen en ontwikkelen van strategie en beleid rond het onderwijs wiskunde in Nederland.
- Organiseren en coördineren van nascholing van wiskundeleraren, met bijbehorende accreditatie.
- Sturing geven aan curriculum-ontwikkeling voor wiskunde, o.a. door certificering van modules wiskunde D voor HAVO en VWO, en geven van kwaliteitsborging.
- Contact onderhouden met internationale organisaties op het gebied van het onderwijs wiskunde.

De Commissie Onderwijs komt minstens 4 keer per jaar bijeen om actuele zaken te behandelen en strategische ontwikkelingen te bespreken. De Commissie Onderwijs is verantwoording schuldig aan het Bestuur. Een keer per jaar doet zij schriftelijk verslag van haar activiteiten richting het Bestuur. Waar mogelijk streeft zij naar samenwerking met de andere Commissies.

Volgens internationale afspraken hebben de nationale wiskundige beroepsverenigingen een nationale onderwijscommissie. In Nederland is dat de NOCW, die onder de koepel van het KWG en de NVvW opereert en die de Nederlandse representant is van de ICMI. De NOCW wordt ingebed in de Commissie Onderwijs.

De Commissie Onderwijs staat voor een zeer divers en complex pakket van taken. Het is daarom van belang om prioriteiten te stellen. Een keer per jaar stelt zij een raamplan op van aandachtspunten met daaraan gerelateerde projecten. Zij legt dit plan ter goedkeuring voor aan het Bestuur. Uitvoering van

de projecten zal in samenspraak met onderwijsinstanties kunnen plaatsvinden. De communicatie met deze instanties is derhalve van groot belang. Urgente zaken betreffende het wiskundeonderwijs die als eerste aandacht vragen zijn:

- Aandacht geven aan de schakelpunten in de lijn van Primair Onderwijs, HAVO-VWO-onderbouw en VMBO, HAVO-VWO-bovenbouw en MBO, via de universitaire bachelor en de HBO-bachelor, de universitaire master, naar de uitstroom in de maatschappij.
- Lijn doen brengen in het bestaande aanbod van nascholing van wiskundeleraren: leemtes vaststellen en opvullen. Nemen van een leidende rol bij de accreditatie.
- Leiding geven aan de landelijke discussie rond reken- en wiskundeonderwijs. Streven naar één gemeenschappelijke stem naar buiten.
- Verbeteren van de kwaliteit van het basisonderwijs en het PABO-onderwijs, i.h.b. streven naar het academischer worden van de PABOstudent, mede in internationaal perspectief.
- Instellen van een commissie voor permanente curriculumontwikkeling in het voortgezet onderwijs.
- In kaart brengen van de oorzaken en de gevolgen van het tekort aan leraren in het voortgezet onderwijs, en het doen van voorstellen die kunnen leiden tot toename.
- Positionering m.b.t. de sectorale onderwijssamenwerking binnen het beta- en techniek-domein van de universiteiten, i.h.b. het Hoger Onderwijs Centrum Wiskunde dat onder het landelijke betadecanenoverleg ressorteert.

Commissie Publicaties

De *Commissie Publicaties* bestaat uit minstens 5 personen, waarvan een bestuurslid van het KWG (de portefeuillehouder publicaties), een bestuurslid van de NVvW, een redactielid van Nieuw Archief voor Wiskunde, een redactielid van Pythagoras, en een lid van het bestuur van de Stichting Epsilon.

De Commissie Publicaties is belast met de volgende taken:

- Bundelen van de bestaande activiteiten rond publicaties in wiskundig Nederland door onderlinge uitwisseling van informatie en wederzijdse versterking.
- Helpen een efficiëntieslag te maken met het uitgeven van een aantal tijdschriften die onder de verantwoordelijkheid van het KWG en de NVvW vallen.

De Commissie Publicaties komt minstens 3 keer per jaar bijeen om actuele zaken te behandelen en strategische ontwikkelingen te bespreken. De Commissie Publicaties is verantwoordig schuldig aan het Bestuur. Een keer per jaar doet zij schriftelijk verslag van haar activiteiten richting het Bestuur. Waar mogelijk streeft zij naar samenwerking met de andere Commissies. Bij de start van PWN zal de Commissie Publicaties frequenter moeten vergaderen i.v.m. de grote uitdagingen die er liggen rond de tijdschriften.

De belangrijkste voor PWN relevante tijdschriften in wiskundig Nederland zijn: *Indagationes Mathematicae* (KNAW), *Nieuw Archief voor Wiskunde* (KWG), *Pythagoras* (KWG), *Euclides* (NVvW), *Nieuwe Wiskrant* (FI), *Epsilon Uitgaven* (KWG, Stichting Epsilon), *Zebrareeks* (KWG, Stichting Epsilon), *Wisschriften* en *Doeboeken* (Stichting Vierkant voor de Wiskunde).

Waar mogelijk en gewenst streeft de Commissie Publicaties naar een intensievere samenwerking tussen de diverse tijdschriften. Een interessante optie is dat het KWG een raamovereenkomst met PWN afsluit om, op basis van een jaarlijks te bespreken servicecontract, de uitgeversactiviteiten rond *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Pythagoras* aan het Bureau PWN uit te besteden (bureau redactie, vormgeving, bladmanaging, drukken, verspreiden, acquisitie van advertenties), waarbij de redacties en de redactieraden onder het KWG blijven ressorteren. In een dergelijke constructie blijven de inhoud en de redactie van de tijdschriften de verantwoordelijkheid van het KWG, terwijl de uitgeverij en de productie naar PWN verhuizen. Beide tijdschriften blijven daarmee "lijfbladen" van het KWG. Een en ander zal zorgvuldig door de Commissie Publicaties moeten worden overwogen, voorbereid en ingeleid, in nauw overleg met betrokkenen en belanghebbenden, waarbij de taken van PWN in een raamovereenkomst moeten worden afgebakend en er bovendien helder zicht moet zijn op de financiële consequenties voor zowel het KWG als voor PWN. Een dergelijke constructie is wellicht ook mogelijk voor *Euclides* en *Epsilon Uitgaven*. Het is dan zaak dat het KWG en de NVvW tot een goede onderlinge afstemming komen. PWN biedt daarvoor het kader.

Een permanent probleem is het losse dienstverband van de personen die bovengenoemde publicaties tot stand brengen. Het gaat daarbij niet om de redacties en de redactieraden, die veelal uit personen bestaan die elders een vaste werkkring hebben, maar

om "los" personeel, zoals eindredacteuren en productiemanagers, op tijdelijke contracten. De gangbare oplossing, via wisselende dienstverbanden bij hulpverlenende universiteiten en scholen, is juridisch weliswaar correct, maar leidt tot een instabiele en onbevredigende werksituatie. Door de genoemde bundeling kan een synergie ontstaan die de tijdschriften minder kwetsbaar maakt voor financiële schommelingen en minder afhankelijk maakt van de welwillendheid van de instituten die deze werkzaamheden op een incidentele basis faciliteren. Bundeling maakt de bereikbaarheid van de uitvoerende bureaus ook nog eens gemakkelijker.

Urgente zaken die de eerste aandacht vragen zijn:

- Oplossen van het 'dienstverbandprobleem'.
- Streven naar verdere professionalisering van de tijdschriften wiskunde, inclusief het verhogen van het aantal abonnees (bv. via goedkope studentabonnementen, combiabonnementen of het aanbieden van 'life-long memberships').

Commissie Publiciteit

De *Commissie Publiciteit* bestaat uit 5 personen en is belast met de volgende taken:

- Structureren, coördineren en ondersteunen van publiciteit voor de wiskunde in brede zin.
- Inventariseren van bestaande publicitaire activiteiten m.b.t. de wiskunde in Nederland. Uitbouwen van goed lopende activiteiten en nemen van nieuwe initiatieven.
- Zorgdragen voor continuïteit in de organisatie en de financiering van publiciteit.
- Geven van publicitaire ondersteuning aan de andere Commissies van PWN waar nodig.

NWO-EW heeft belangstelling voor publiciteit rond de wiskunde en wenst die waar mogelijk te ondersteunen.

De Commissie Publiciteit komt minstens 3 keer per jaar bijeen om actuele zaken te behandelen en strategische ontwikkelingen te bespreken. De Commissie Publiciteit is verantwoordig schuldig aan het Bestuur. Een keer per jaar doet zij schriftelijk verslag van haar activiteiten aan het Bestuur. Waar mogelijk streeft zij naar samenwerking met de andere Commissies.

Er is een breed scala van activiteiten in Nederland die wiskunde onder de aandacht brengen: *Wiskunde Persdienst*, *Kennislink Wiskunde*, *Wiskundemeisjes* (gericht op een algemeen publiek); *Wiskunde Olympiades*, *Kangoeroe*, *Pythagoras* (gericht op VWO-leerlingen); websites als *WISFAQ*, *Math4All*,

Mathadore, *Ratio*, *Rekenweb*, *wiskundeonline*, *DK&wiskunde* (gericht op VWO-leerlingen en docenten); hulp voor wiskundedocenten door het FI; de tijdschriften *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Euclides* (gericht op vakgenoten). De samenhang en de coördinatie van deze activiteiten is beperkt. Bundeling kan tot een efficiëntieverbetering leiden en daarmee ook tot een betere beeldvorming van de wiskunde.

Naast de reeds lopende initiatieven zijn er verschillende aanvullende soorten van publiciteit mogelijk voor de wiskunde: het verbreiden van nieuwe onderzoekresultaten en toepassingen gericht op het algemene publiek, op scholieren en op Nederlandse wiskundigen in brede zin; imagoverbetering van de wiskunde; wiskundepromotie op scholen; het beroepsperspectief van wiskundigen onder de aandacht brengen van scholieren en leraren; publiciteit n.a.v. speciale wiskundige evenementen, zoals de wiskundeolympiades; tentoonstellingen organiseren in musea als Boerhaave, Hofwijck, Nemo en Teylers.

Vanuit PWN dienen ter uitvoering van publicitaire taken in ieder geval te worden ondersteund: een nationale pr-medewerker wiskunde en een vakredacteur wiskunde bij Kennislink (elk voor 1 dag per week werkzaam op het Bureau PWN). Financiële steun hiervoor kan worden gezocht bij sponsors, bv. de Stichting Thomas Stieltjes en de Stichting Compositio.

Urgente zaken die de eerste aandacht vragen zijn:

- Streven naar een meer gebundelde ondersteuning van lopende publicitaire initiatieven, bv. via het openen van een loket waar publicitaire ondersteuning kan worden aangevraagd. Waar mogelijk individuele initiatieven stimuleren.
- Inventariseren van doelgroepen voor publiciteit en kiezen van een daarvoor specifieke publicitaire aanpak, inclusief periodieke toetsing.
- Zorgen voor een solide basis voor de bekostiging van publiciteit, i.h.b. zoeken naar sponsors voor specifieke projecten.
- Aanmoedigen van de opleidingen aan de universiteiten en de HBO's om activiteiten rond wiskundige publiciteit gedurende een aantal jaren te financieren.

Commissie Innovatie

De *Commissie Innovatie* bestaat uit 5 wiskundigen — waaronder de directeur van 3TU-AMI en een persoon van het CWI — en 4–5 leidinggevende personen uit de industrie, het bedrijfsleven en de overheid, alsmede een secretaris. NWO zal nauw betrokken zijn bij

de Commissie Innovatie, o.a. via een adviseur vanuit NWO-EW.

De Commissie Innovatie zal zich bezighouden met de volgende taken:

- Aangaan van strategische samenwerkingsverbanden en lange-termijnallianties tussen universiteiten, industrie, bedrijfsleven en kennisinstellingen, geconcentreerd rond grote maatschappelijk problemen (zoals gezondheid, energie, duurzaamheid, financiën en hightech).
- Bieden van één gezamenlijk loket voor toegepaste problemen uit industrie en bedrijfsleven met een wiskundige tint.
- Verzorgen van doorstroom van kennis en innovatie.
- Oprichten van een bureau Transferpunt Wiskunde en Innovatie (TWI), dat de ontwikkelde plannen tot uitvoering kan brengen.

De Commissie Innovatie komt minstens 3 keer per jaar bijeen om actuele zaken te behandelen en strategische ontwikkelingen te bespreken. De Commissie Innovatie is verantwoordig schuldig aan het Bestuur. Een keer per jaar doet zij schriftelijk verslag van haar activiteiten aan het Bestuur. Waar mogelijk streeft zij naar samenwerking met de andere Commissies.

Het plan tot oprichting van TWI was reeds verankerd in het Masterplan Toekomst Wiskunde (november 2008). In het buitenland zijn er vergelijkbare organisaties, die succesvol opereren. TWI zal worden aangestuurd door het 3TU-AMI instituut, dat op 15 april 2010 is opgericht. De specifieke taken van TWI omvatten:

- Uitvoeren van het door de Commissie Innovatie uitgestippelde beleid.
- Vergroten van de wiskundige basiskennis bij niet-wiskundige professionals. Vergroten van de bekendheid met toepassingen in het bedrijfsleven en de maatschappij bij wiskundige professionals. Beide zijn in wezen een kwestie van mobiliteit.
- Geven van voorlichting over wiskunde aan het bedrijfsleven, i.h.b. aan het midden- en kleinbedrijf. Geven van voorlichting over in het bedrijfsleven toegepaste wiskunde aan scholieren en docenten.
- Verhogen van het aantal wiskundigen in het bedrijfsleven en bij de overheid.

Urgente zaken die de eerste aandacht vragen zijn:

- Opstarten van TWI. Zoeken naar financiële steun bij EZ en STW.
- Cijfermatig zichtbaar maken van de rol van de wiskunde in de Nederlandse maatschappij en economie. Aangeven waar

winst is te behalen en waar verantwoordelijkheden kunnen worden genomen.

- Streven naar verhoging van het veelal lage acceptatieniveau van het hoger management m.b.t. de noodzaak wiskunde te gebruiken binnen hun bedrijf.
- Faciliteren van de wiskundige inbreng bij alledaagse problemen uit de industrie, het bedrijfsleven en de maatschappij, in aansluiting op de daarvoor bij de individuele universiteiten reeds bestaande activiteiten.
- Ondersteunen van succesrijke landelijke activiteiten, zoals de jaarlijkse studieweek *Wiskunde voor de Industrie*.
- Ontwikkelen van een CASIMIR-achtig uitwisselingsprogramma.

Financiering

Het PWN heeft financiële ondersteuning nodig om haar taken naar behoren te kunnen vervullen. De volgende bronnen zijn/worden daartoe aangeboord (een gedetailleerde begroting voor 2010 en 2011 met toelichting is beschikbaar via de KWG-website):

- Financiële ondersteuning door de 9 wiskunde-instituten (9 k€ per jaar elk), CWI (25 k€ per jaar in natura), FI, EURANDOM en de 4 universiteiten zonder wiskunde-instituut (4,5 k€ per jaar elk).
- Financiële ondersteuning door NWO-GBE (circa 60 k€ per jaar, deels in natura via secretariële ondersteuning door NWO-EW; dit bedrag is per jaar nader te bepalen aan de hand van een door PWN ingediende begroting).
- Jaarlijkse bijdrage van het KWG en de NVvW (7,5 k€ elk).
- Startbijdrage van de Stichting Thomas Stieltjes (50 k€).
- Bijdrage van de Stichting Compositio voor Kennislink (3 k€ per jaar voor 2 jaar).

Voor de instituutsbijdragen is het wervingsproces nog in gang. De bijdrage van het KWG dient nog te worden bekrachtigd. De NVvW heeft zulks al gedaan. De overige bijdragen zijn toegezegd.

Het KWG is voornemens om afstand te doen van haar instituutsbijdragen (5 k€ per jaar) ten faveure van PWN. De facto betekent dit dat de 9 wiskundeinstituten een accres van 4 k€ te verwerken krijgen. Daarvoor krijgen zij toegang tot het volledige palet van activiteiten van PWN. Omdat circa 40 k€ uit de instituutsbijdragen van het KWG thans worden gebruikt voor de exploitatie van het Nieuw Archief voor Wiskunde, betaalt PWN een geoormerkt bedrag ter grootte van 40 k€ terug aan het KWG (voor een aantal jaren, en mede af-

hankelijk van de nader uit te werken mogelijke samenwerking van KWG en PWN rond de wiskunde-tijdschriften).

Het is de taak van de Directeur om te zoeken naar aanvullende inkomsten. Naar verwachting kunnen op termijn inkomsten worden gegenereerd uit de nascholing van wiskundeleraars. De Sectie Wiskunde van de KNAW heeft aangegeven te overwegen om de inkomsten uit *Indagationes Mathematicae* (20 k€ per jaar) door te sluizen naar PWN. 

Anne van Streun

Leidyk 24

9247 CT Ureterp

avstreun@euronet.nl

Onderwijs

Hoe staat ons Nederlands wiskundeonderwijs er voor? (deel 2)

In de laatste jaren zijn veel rapporten en studies verschenen over de stand van zaken in (delen van) ons Nederlands reken- en wiskundeonderwijs. Publicaties die intussen op tal van terreinen hebben geleid tot acties om de kwaliteit van dat onderwijs te verbeteren. Anne van Streun geeft in dit artikel een overzicht van die publicaties voor de wiskundige gemeenschap en maakt een weging van de sterke en zwakke kanten van ons wiskundeonderwijs.

In 2001 verscheen in dit tijdschrift eveneens een artikel van mijn hand over de stand van ons toenmalig Nederlands wiskundeonderwijs [4].

Achtereenvolgens gaat het over:

- *Voor wie is het wiskundeonderwijs bestemd?* Welk deel van de leerlingenpopulatie volgt welk wiskundeonderwijs?
- *Het rekenonderwijs in revisie.* Het rapport over de doorlopende leerlijnen rekenen (Meijerink). Het rapport over het rekenonderwijs op de basisschool (KNAW, Lenstra).
- *Vandaag kampioen in gelijke kansen, morgen ook in wiskunde.* Analyses en acties na het afscheid van de basisvorming.
- *De herprofilering van de Tweede Fase havo-vwo.* De gevolgen van de ingreep in de profielen.
- *TIMSS-Advanced 2008.* Het vergelijkend internationaal onderzoek naar 'voortgezet-te' wiskunde.
- *De lerarenopleidingen.* De kwaliteit van pabo's, 2de-graad en 1ste-graad lerarenopleidingen wiskunde.
- *Aandachtspunten voor versterking.* Op welke punten moeten we het reken- en wiskundeonderwijs versterken?

Voor wie is het wiskundeonderwijs bestemd?

De eindexamenopgave kweekschool in Figueur 1 werd mij toegestuurd toen wij

in de commissie Meijerink bezig waren de opbrengst van het rekenonderwijs door te lichten. Het is in ieder geval een illustratie van het feit dat in 1930 de juffen en meesters tot een soort van intellectuele bovenlaag behoorden. Hoe groot was die bovenlaag eigenlijk?

Tabel 1 geeft informatie over de samenstelling van de subpopulaties in een aantal jaren. In 1954 verliet ik de lagere school en na geslaagd te zijn voor het toelatingsexamen mocht ik naar de chbs in Leeuwarden. De leerlingen die in de gangrij van mijn klaslokaal zaten, ongeveer een derde van de klas, gingen na de lagere school werken. Zij konden amper lezen en nauwelijks rekenen. Landelijk verschilde dat beeld niet veel, ongeveer een kwart van de populatie ging meteen aan het werk. De toppers, ruim 10%, zetten hun opleiding voort aan de hbs en het gymnasium. Het nijverheidsonderwijs was sterk beroepsgericht met de ambachtschool en de huishoudschool als de twee grote schooltypen. De ulo was het schooltype dat vooral opleidde voor kantoor, maar het omvatte ook ulo-B (ongeveer 5% van de populatie) met een stevig wiskundeprogramma, vergelijkbaar met de onderbouw van de hbs [3]. De B-richtingen van de hbs en het gymnasium trokken 7% van de gehele populatie.

Kijken we nu naar de populatie die in 1998 één of ander schoolexamen aflegde. (De leerlingen zonder diploma voortgezet onderwijs,

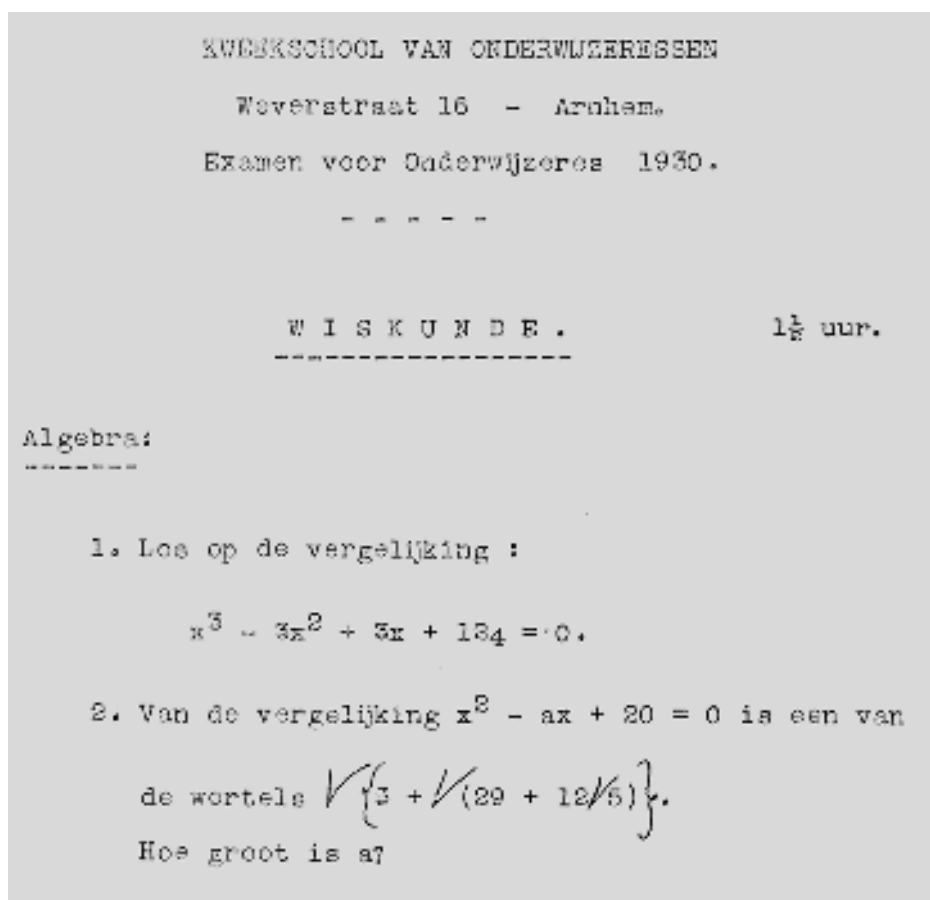
naar schatting 5%, zijn buiten beschouwing gelaten.) In dat jaar had de Tweede Fase met de profielen deze leerlingen in havo-vwo nog niet bereikt. We zien dat 60% examen aflegt in het vbo of de mavo, dat is van dezelfde orde van grootte als 45 jaar eerder de subpopulaties 'geen vo' en 'nijverheidsonderwijs'. Analooeg bevat havo-vwo ongeveer de subpopulaties ulo en vmo van 45 jaar eerder. Opvallend is dat de subpopulatie vwo wiskunde B eenzelfde percentage van 7% omvat als 45 jaar eerder de subpopulatie hbs-B en gymnasium-B.

Wat heeft de invoering van de profielen ons in dit opzicht gebracht? De samenstelling van de populatie die recent in 2009 examen heeft gedaan, geeft daar inzicht in. De geleidelijke verschuiving richting havo-vwo heeft zich doorgezet, wat met name in het vwo geleid heeft tot een groter aandeel van wiskunde B in de gehele populatie. Of de herprofilering van de Tweede Fase nog invloed heeft gehad op deze verdeling in het vwo zal bij de examens in 2010 moeten blijken. In het havo is dat amper het geval.

Deze gegevens zijn voor een goed begrip van de discussies over ons onderwijs van belang. Intelligentie of leergeschiktheid is normaal verdeeld. Grote verschuivingen in schooltype kun je alleen bereiken door meer tijd te geven voor hetzelfde niveau of door het niveau te verlagen [2].

Het rekenonderwijs in revisie

In de pers en ook in dit tijdschrift [1] is de laatste jaren stevig gediscussieerd over het niveau van het rekenen in het basisonderwijs en het vervolgonderwijs, in het bij-



Figuur 1 Examen voor onderwijzeres. Kweekschool van onderwijzeressen, 1930, Arnhem

zonder de pabo. De (vorige) minister zoekt wijsheid en wint tijd door een commissie in te stellen. Deze keer werd het de commissie Meijerink, een breed samengestelde groep 'experts' uit alle sectoren van het onderwijs, zowel bestuurders als vakdeskundigen. Het eindrapport *Over de drempels met rekenen* is te vinden op de websites van de SLO en het ministerie, evenals het algemene eindrapport *Over de drempels met taal en rekenen* en de verdere specificatie *Een nadere beschouwing* [7–8]. Na overleg met OCW stelt de KNAW een onderzoekscommissie in (onder leiding van J.K. Lenstra) die de kwaliteit van het rekenonderwijs op de

basisschool nader gaat onderzoeken.

De commissie Meijerink constateert dat veel van de rekenproblemen die in allerlei deelonderzoeken zijn geconstateerd een rechtstreeks gevolg blijken te zijn van de defecten in ons onderwijsstelsel. Zo stroomt bijvoorbeeld de helft van de gediplomeerden van de mbo-opleiding tot onderwijsassistent door naar de pabo en vormt daar een aanzienlijk deel van de groep eerstejaars pabostudenten. Die binnenstromende studenten hebben de laatste vier jaar op het mbo niet meer gerekend, want rekenen en/of wiskunde is daar geen onderdeel van het curriculum. Daaraan voorafgaand heeft een deel van de

ze groep na twee jaar vmbo het vak wiskunde laten vallen en op de leeftijd van 13–14 jaar behoorden die leerlingen tot de zwakste rekenaars van de totale leerlingenpopulatie. Met andere woorden, na een zwakke start met de ontwikkeling van hun rekenvaardigheden hebben ze zes jaar niet meer gerekend. En zo komen ze aan bij de pabo! Welkom, goed gemotiveerd, maar met veel te weinig inhoudelijke bagage. Het ministerie heeft na acceptatie van dit rapport in overleg met de Tweede Kamer besloten dat op elk eindniveau van een schooltype (po, vmbo, havo-vwo, mbo, pabo) een rekentoets zal worden afgenomen, die voldoende moet worden gemaakt.

Op voorstel van de commissie Meijerink zijn voor de verschillende schooltypen beheersingsniveaus vastgelegd. Voor groep 8 is bijvoorbeeld vastgelegd dat 65% van de populatie (instroom in vmbo TL, havo-vwo, zie Tabel 1) de opgaven uit Figuur 2, opgaven op het hoogste niveau, goed moet kunnen maken. Daarbij zijn we mede uitgegaan van de empirische gegevens van het laatste vierjaarlijkse onderzoek naar het rekenniveau PPON (Periodieke Peiling Onderwijs Nederland) waarin deze drie opgaven nu door slechts 25% van de leerlingen goed worden gemaakt! Het is nu de verantwoordelijkheid van de scholen voor mavo-havo-vwo om de toeleverende basisscholen duidelijk te maken dat het rekenniveau van de binnenstromende leerlingen moet worden opgetrokken naar het vastgelegde hoogste niveau. Een mooie kans voor de wiskundesecties om daar bij hun directies op aan te dringen.

Het KNAW-rapport over de wetenschappelijk gefundeerde kennis over de kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisschool kenmerkt zich door heldere uitkomsten. Zoals Robbert Dijkgraaf het formuleert in het voorwoord: “De belangrijkste conclusie die de commissie trekt, is dat de verkeerde discussie is gevoerd en dat dit ons ervan heeft weerhouden tot de kern van de zaak te komen.” Het gaat niet om welke rekenmethode (die van opa of die van Malmberg) je toepast, als je maar goed rekenonderwijs geeft. En dat

Schooltype	% populatie 1954	Schooltype	% populatie 1998	Schooltype	% populatie 2009
Geen VO	23%	Vbo	33%	Vmbo BB&KB	26% 21% wi
Nijverheids-onderwijs	34%	Mavo	27%	Vmbo TL	27% 22% wi
ULO	31% wi 5%	Havo	23% 6% wiB	Havo	27% 7% wiB
VHMO	12% wiB 7%	Vwo	17% 7% wiB	Vwo	20% 11% wiB

Tabel 1 Deelname aan het voortgezet onderwijs

- Rond af op het dichtstbijzijnde gehele getal: 3437,48
- In een krat staan 24 flesjes van $\frac{1}{3}$ liter. Hoeveel liter is dat in totaal?
- $1\frac{3}{8} - \frac{7}{8}$

Figuur 2 Opgaven op het hoogste niveau groep 8

hangt voor een groot deel af van de kwaliteit van de docenten. Zoals de commissie Meijerink ook al opmerkte is die kwaliteit van nieuw opgeleide docenten op het gebied van de beheersing van het rekenen beneden peil. Ook over de helaas gebruikelijke rekendidactiek van zelfstandig sommetjes maken wordt een helder geluid geformuleerd: "Scholen dienen zich te bezinnen op het veelvuldig gebruik van niet-begeleid zelfstandig werken tijdens de rekenles. De commissie plaatst vraagtekens bij de effectiviteit van deze werkvorm en pleit voor een grotere inhoudelijke rol voor de leraar. Sturing door en interactie met de leraar en instructie, oefening en nabespreking zijn noodzakelijk."

Gelijke kansen, morgen ook in wiskunde

Alle wetenschappelijk stevig onderbouwde internationale onderzoeken als TIMSS-2007 (leerjaar 2 voortgezet onderwijs), twee keer PISA (15-jarigen) of het cohortonderzoek VOCL van het GION (opbrengst na de basisvorming bij 15-jarigen) wijzen voor de opbrengst van de onderbouw van het voortgezet onderwijs dezelfde kant op. Gemiddeld scoren onze leerlingen in die onderzoeken goed, ook na de basisvorming. Dat is een gevolg van de geringe spreiding in de resultaten van Nederlandse leerlingen en wel met name door de relatief goede resultaten van de 'onderkant', zeg de eerder onderscheiden 35% van vmbo BB-KB (Tabel 1). De sterkste groep scoort daarentegen lager dan in veel vergelijkbare landen. De Vlaamse top scoort bijvoorbeeld duidelijk veel beter dan de Nederlandse top. De Vlaamse minister van Onderwijs en Vorming merkt daarover in een persbericht van 4 december 2007 het volgende op: "Ik hecht een zeer groot belang aan deze internationale onderzoeken. Zij leveren een perspectief op de sterktes en zwaktes van ons onderwijsbestel. De titel van mijn beleidsnota in 2004, *Vandaag kampioen in wiskunde, morgen ook in gelijke kansen*, was rechtstreeks beïnvloed door de resultaten van PISA2003. Deze toonden aan dat Vlaanderen in gemiddelde resultaten kwalitatief tot de internationale top behoort, maar dat er tegelijk een zeer grote en door sociaal-economische factoren bepaalde kloof bestaat tussen sterke en zwakke leerlingen. De nieuwe resultaten zijn een aanleiding om de analyse te bevestigen en te verbreden." Het is aan onze minister om op grond van het internationaal onderzoek een beleidsnota uit te brengen met de titel: *Vandaag kampioen in gelijke kansen, morgen ook in wiskunde*. Daarover later meer.

Het effect van de basisvorming met een

uniform programma voor de gehele breedte heeft het niveau van het wiskundeprogramma voor de onderbouw havo-vwo onnodig verlaagd. De Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs heeft in overleg met OCW voor de onderbouw havo-vwo een voorstel voor een steviger programma uitgewerkt met eindtermen voor 3 havo en 3 vwo. (Zie op de website van cTWO het Trajectenboek en de Voorkennistabel.) Het streven is om het niveau op een hoger peil te brengen, maar wegens het ontbreken van een centraal examen hangt er veel af van een krachtige wiskundesectie die de doorlopende leerlijn van de onderbouw naar de bovenbouw bewaakt.

Herprofilering Tweede Fase havo-vwo

De eerstejaarstoetsen van de TU Delft voor alle technische studierichtingen lieten in 2003 en 2004 een onthullend beeld zien van de opbrengst van de Tweede Fase op het gebied van algebraïsche vaardigheden. Zie Figuur 3. Zonder enig rekenwerk, met een plaatje of een inschatting van extreme situaties, kun je de alternatieven onmiddellijk afvoeren! Inmiddels is er in havo-vwo een inhaalslag gemaakt met exittoetsen en entreetoetsen. Het blijft de vraag of leerlingen nu wel in staat zijn om met begrip naar een formule of algebraïsche expressie te kijken. Ondanks de meer gerichte aandacht voor vaardigheden is het maar de vraag of de opbrengst van met name wiskunde B op peil kan worden gebracht. Er is immers drastisch gesneden in het aantal lessen en studielasturen.

Na de erkenning door de politiek van de overbelasting van de Tweede Fase waren er twee keuzes mogelijk, namelijk de kaasschaafmethode 'a mile wide and an inch deep' of het per profiel beperken van het aantal verplichte vakken, ruimte voor talenten om zich te verdiepen [6]. Het pakte nog erger uit dan de kaasschaafmethode, alle vakken werden gelijkgeschakeld ten koste van grote vakken als wiskunde B12 en Natuurkunde12. En het profiel Natuur en Gezondheid werd uitgedaan door Natuurkunde er uit te verwijderen en Wiskunde A (een vak ontwikkeld voor de maatschappijprofielen) werd ineens het wiskundevak binnen het profiel Natuur en Gezondheid. Protesten van de bètawetenschappers en van studenten wiskunde leverden alleen een minieme vergroting van de studielast voor wiskunde B op. Inmiddels hebben we in 2009 het eerste examen havo van de geherprofileerde Tweede Fase gehad, in 2010 volgt het vwo. Nog steeds kiest slechts een kwart van de havo-populatie in 2009 het examenvak wiskunde B. Een klein

Herleid: $\frac{x^2-x}{x^2-2x+1}$ 50% goed
 18% streep x^2 weg: $\frac{-x}{-2x+1}$
 16% streep nog even door: $\frac{1}{-x+1}$

Los x op uit: $x^2 \geq 4x$ 20% goed

Figuur 3 Meerkeuzeopgaven eerstejaarstoets. Delft 2004

ne 20% van de havo-populatie, leerlingen uit het profiel Cultuur en Maatschappij, heeft nu geen wiskundevak meer, omdat het vak wiskunde A1 is afgeschaft, evenals het vak wiskunde B12. Een verlies-verlies situatie.

TIMSS-Advanced 2008

Het verheugende nieuws van het laatste internationale vergelijkende onderzoek op het gebied van de voortgezette wiskunde en natuurkunde in 6 vwo is dat onze bètaleerlingen in 6 vwo een hoog internationaal niveau halen [10]. Verheugend omdat het een signaal is dat onze bètatoppers best veel leren op het vwo in de door hen gekozen vakken wiskunde B12 en Natuurkunde 12. Van de Nederlandse leerlingen maakt 75% de opgave uit Figuur 4 goed, veel meer dan bijvoorbeeld Zweden (44%) of de Russische top (52%). Van de Nederlandse leerlingen maakte 60% deze conceptuele opgave uit Figuur 5 goed, tegen bijvoorbeeld 40% Italië en 36% Noorwegen. Op de procedurele opgaven scoorden Nederlandse leerlingen relatief lager maar over het geheel goed, op de tweede plaats van de tien deelnemende landen. (Voor natuurkunde staat Nederland op nummer 1 met heel veel goede scores.)

Dit resultaat is een kans voor open doel om de politiek weer eens te wijzen op de fatale herprofilering van de Tweede Fase. Wat wil het geval? De Nederlandse steekproef bestaat voornamelijk uit leerlingen van het NT-profiel met de vakken wiskunde B12 en Natuurkunde12. Die vakken zijn terwille van de eenheid in het maaiveld simpelweg door de politiek

One side of an equilateral triangle lies along the x -axis. The sum of the slopes of the three sides is.

- A. 0
- B. -1
- C. 1
- D. $2\sqrt{3}$
- E. $1 + 2\sqrt{3}$

Figuur 4 Een conceptuele opgave uit TIMSS-Advanced 2008

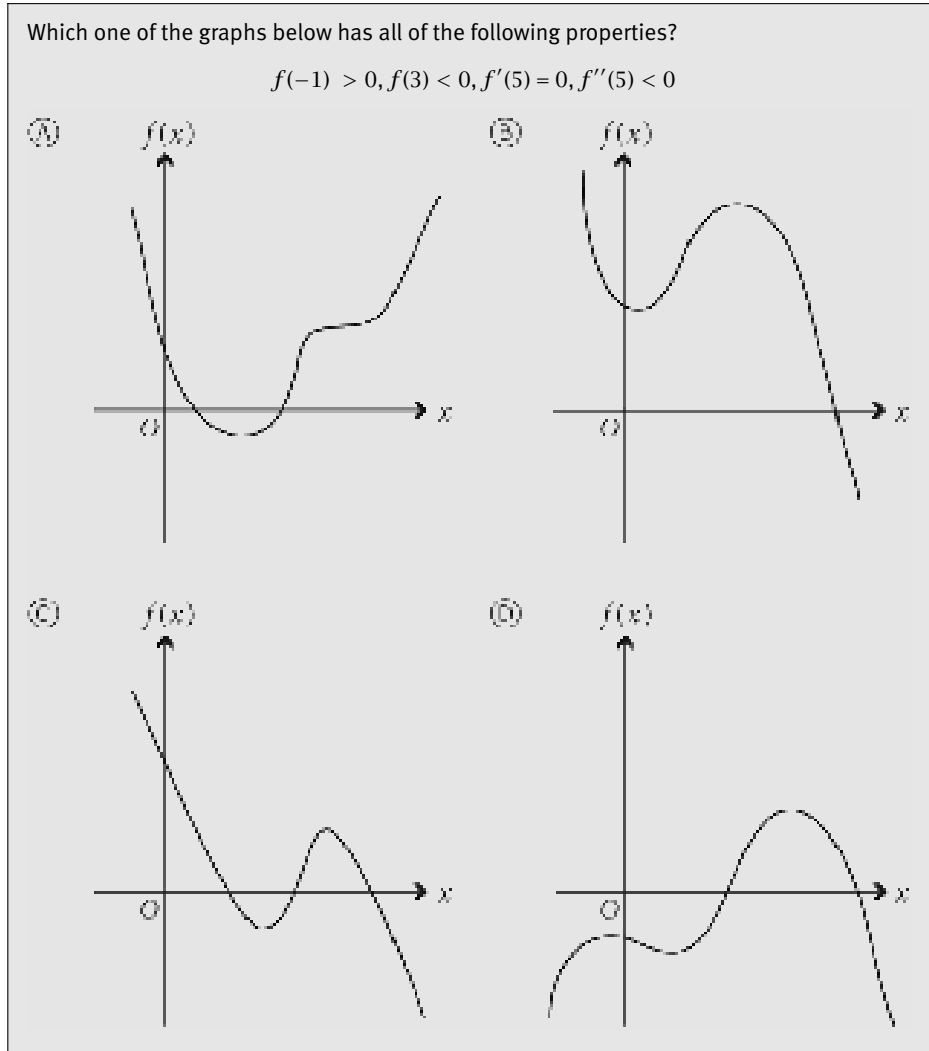
afgeschaft! Wij weten dat onze bètatoppers alleen nog maar het vak wiskunde B (600 studielasturen) als profielvak kunnen kiezen. Een vak dat door veel meer leerlingen moet worden gekozen dan het nu afgeschafte vak wiskunde B12 (760 studielasturen), wat de diepgang niet ten goede komt. Idem voor Natuurkunde (nu 480 studielasturen) en Natuurkunde12 (was 560 studielasturen). Zoals de onderzoekers van de Universiteit Twente aan het slot van het Nederlandse TIMSS-rapport wat treurig opmerken, zal deze nivellering ongetwijfeld tot gevolg hebben dat Nederland nooit weer zo goed zal scoren. ...

Dit resultaat laat onverminderd de noodzaak zien van een herstel van de NT-vakken in de oude omvang. Bedenk wel dat in de oude situatie, waar dit onderzoek over gaat, de leerlingen 3,5 lesuur per week hadden. Met de huidige 600 slu kan dat wel tot 2,8 lessen per week zijn afgezaakt, een absoluut minimum vergeleken met alle landen ter wereld! In Rusland en Iran, maar ook in Vlaanderen dat nu niet meedeeld, is dat in de bovenbouw minstens zes lessen per week! Om over de situatie in Engeland, waar leerlingen zich op A-level mogen concentreren op drie of vier vakken, maar niet te spreken.

Natuurlijk valt er in de breedte niet te juichen, omdat we alleen met de beste 3,5% meededen, terwijl sommige landen (Noorwegen, Zweden) in de orde van de 11% die onze vwo wiskunde B in 2009 omvatte, meededen. Om maar niet te spreken van Slovenië (40,5%). Wellicht moeten we onze 7% have wiskunde B nog bij onze breedte optellen. Waar het om gaat is dat wij in Nederland die 18% niet de kans geven om zich royaal te verdiepen in de wiskunde en natuurwetenschappen met weglating van allerlei vakken die voor hen rompslomp zijn. Kunnen we aan de leerlingen voor onze wiskunde/natuurkundevakken meer tijd beschikbaar stellen (bijvoorbeeld als zij andere vakken niet hoeven te kiezen), dan is het ook mogelijk om meer leerlingen de kans te geven deze vakken te volgen. Mits we de extra tijd niet weer volstoppen met nieuwe leerstof. We zullen in havo-vwo echt ernst moeten maken met het ruimte scheppen voor leerlingen die in de toekomst de technologische vernieuwingen moeten realiseren. Leerlingen, die wel de diepte in willen en kunnen gaan tijdens een heel creatieve periode in hun ontwikkeling? Nederland kennisländ. ...

De lerarenopleidingen

Het KNAW-rapport over het rekenonderwijs heeft duidelijke taal gesproken over het ge-



Figuur 5. Een conceptuele opgave uit TIMSS-Advanced 2008

brek aan vakinhoudelijke kwaliteit van de pabo. Inmiddels heeft de hbo-raad voor de pabo een kennisbasis rekenen vastgelegd en voorgeschreven dat er per week minimaal 10 uur aan rekenen en taal moet worden besteed. Ook voor de 2de-grad lerarenopleidingen is voor het de vakinhouden en vakdidactiek een Kennisbasis vastgelegd. Zie de genoemde websites.

In het 1ste-grad gebied stroomt de komende jaren een groot aantal heel bekwame, hoog opgeleide, oudere wiskundeleraren uit het onderwijs. Het is niet duidelijk of de kwaliteit en kwantiteit van hun opvolgers is verzekerd. De vakinhoudelijke kwaliteit van de zo opgeleide wiskundeleraren staat niet ter discussie, omdat ze een masteropleiding hebben gevolgd. Tijdens de recente visitatie spraken de schoolleidingen zich positief uit over hun academische kennis en vaardigheden op het gebied van de vakdidactiek en vakontwikkeling en hun voortrekkersrol in het praktijkgericht onderzoek binnen de school. Het aan-

tal universitair opgeleide wiskundeleraren is evenwel veel te klein om de tekorten op te vangen.

Het rapport van de commissie Rinnooy Kan over het lerarentekort heeft mede geleid tot een herwaardering van de vakinhoudelijke kant van het lerarenberoep en tot een beter salarisperspectief voor eerstegraads leraren. Met enige financiële steun van OCW zijn dit studiejaar grote aantallen tweedegraads leraren begonnen met de bekende avondopleidingen (nu vakmasters genoemd) om de eerstegraads onderwijsbevoegdheid te verwerven. De kwaliteit van ons wiskundeonderwijs wordt in de komende jaren in hoge mate bepaald door de kwaliteit en kwantiteit van deze groep wiskundeleraren.

Aandachtspunten voor versterking

Overzien we het geheel van de recente studies, rapporten en aanbevelingen dan dringen zich een drietal aandachtspunten voor versterking op.

1. De omvang van de effectieve studietijd

In de Nederlandse onderwijssituatie met een geringe variatie tussen scholen en leraren en een centraal examenprogramma is de effectieve studietijd de voornaamste variabele die de opbrengst van ons wiskundeonderwijs bepaalt. Willen we in Nederland de kwaliteit en de kwantiteit van de bètavakken in het algemeen en van wiskunde in het bijzonder versterken, dan moet het aantal beschikbare studielasturen drastisch worden vergroot. Onze organisaties moeten niet nalaten om de politiek daar op te blijven wijzen!

2. De kwaliteit van interactie met de docent bepaalt de effectiviteit van studietijd

De studietijd wordt in de Tweede Fase uitgedrukt in studielasturen, die op school en thuis kunnen worden besteed. De opbrengst van het onderwijs wordt niet alleen bepaald door de omvang van de studietijd maar ook door de effectiviteit. Diepgang, ontwikkeling van begrippen, probleemaanpak, reflectie, samenhang, het komt voor de modale leerlingen alleen van de grond in wisselwerking met de vakbekwame leraar. Met de Tweede Fase is

het aantal contacturen (lesuren) simpelweg gekoppeld aan het aantal sluis, wat heeft geleid tot het internationaal gezien belachelijk laag aantal lesuren voor wiskunde. Gelukkig zijn hier en daar schoolleidingen tot het inzicht gekomen dat het zo niet kan en heeft wiskunde naar verhouding meer contacturen gekregen. Nu bovendien door OCW eisen worden gesteld aan de cijfers op het centraal schriftelijk examen voor het drietal schoolvakken nederlands, engels en wiskunde is dit het moment voor wiskundesecties en hun organisaties om opnieuw vergroting van het aantal lesuren te vragen.

3. Leerlingen moeten een basis aan kennis en vaardigheden altijd paraat hebben

Het laatste decennium was de trend in het basisonderwijs en voortgezet onderwijs voor alle schoolvakken dat (parate) kennis niet zo belangrijk meer is. Je kunt alles immers gewoon opzoeken. De genoemde trend heeft ook in het wiskundeonderwijs geleid tot het verwaarlozen van het belang van parate kennis, van het belang om snel en foutloos routines te kunnen uitvoeren, van het belang

om met één oogopslag kenmerken van veel voorkomende formules, functies of vergelijkingen te kunnen noemen. Iedereen die leerlingen of studenten bezig ziet een probleem op te lossen, herkent het falen als gevolg van het moeten heruitvinden van simpele technieken. De expertgroep Meijerink heeft dan ook drie componenten onderscheiden in de doelen van het rekenen: paraat hebben, functioneel gebruiken, uitleggen waarom. Voor paraat hebben kun je eisen dat leerlingen toetsen met standaardopgaven foutloos maken. Dat type eenvoudige opgaven zijn zinvol met ICT te oefenen en te toetsen, en vanaf de brugklas door de jaren heen uit te breiden en te onderhouden. De start is uiteraard de zelf ontworpen rekentoets op het hoogste niveau, aan het begin van de brugklas, waarover een terugkoppeling naar de aanleverende school plaats vindt. De afsluiting wordt gevormd door passende exittoetsen in de examenklas. Bij een systematische aanpak van dit subdoel, het paraat hebben, komt tijd vrij voor de beide andere subdoelen, het functioneel gebruiken en het uitleggen waarom. 

Referenties

- 1 Craats, J. van de, 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **5/8**, 132–136, 2007
- 2 Groot, A.D. de, *Denken over onderwijs*, 1993
- 3 Smid, H.J., 'Wiskundeonderwijs op bijna vergeeten scholen', in Goffree, F., Hoorn, M. van, Zwanveld, B., *Honderd jaar wiskundeonderwijs*, NVvW, Leusden, 2000
- 4 Streun, A. van, 'Hoe staat ons Nederlands wiskundeonderwijs ervoor?', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **5/2**, 48–55, 2001
- 5 Streun, A. van, 'Het denken bevorderen', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **5/3**, 294–301, 2002
- 6 Streun, A. van, 'Gerommeld aan de Tweede Fase', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **5/4**, 56–57, 2003
- 7 www.ocw.nl, *Over de drempels met taal en rekenen*. Commissie Meijerink, SLO-2008: Toewijzing en invoering Referentiekader Taal en Rekenen, Nader beschouwd, commissie Meijerink: *Leerkracht!* Commissie Rinnooy Kan
- 8 www.slo.nl, *Over de drempels met rekenen*, Commissie Meijerink, werkgroep rekenen
- 9 www.knaw.nl, *Rekenonderwijs op de basis-school*
- 10 doc.utwente.nl/68672/1/TIMSS-A-2008.pdf, Timss-advanced 2008 rapport (Nederlandse versie)
- 11 timss.bc.edu/, TIMSS, internationale rapporten
- 12 www.cito.nl, balans van het Periodieke Peilings Onderzoek Nederland (PPON), onder andere voor rekenen-wiskunde aan het einde van groep 8
- 13 www.ctwo.nl, door OCW goedgekeurde nieuwe examenprogramma's havo-vwo 2014; documenten over de versterking van de onderbouw
- 14 gion.gmw.eldoc.ub.rug.nl/root/2007/resultaten_vocl, Cohortenonderzoek VOCL
- 15 www.hbo-raad.nl/component/content/article/29/570, Kennisbases lerarenopleidingen Pabo's en tweedegraads wiskunde

Klaas Landsman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Heyendaalseweg 135

6525 AJ Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Boekbespreking Vier boeken over Isaac Newton

Newton voor Jan en alleman

De stroom boeken over Isaac Newton groeit gestaag. Klaas Landsman bespreekt de nieuwe oogst: het voor iedereen bestemde stripboek *Newton in Nederland* door FitzVerploegh, Bergmans en Maas, het populair-wetenschappelijke *Isaac Newton en het ware weten* van Cohen, het op exact ingestelde scholieren en studenten gerichte *Op de schouders van reuzen: de mechanica van Isaac Newton* door Van Haandel en Heckman, en ten slotte de geavanceerde wiskundige monografie *Isaac Newton on mathematical certainty and method* van Guicciardini.

Na een groot deel van zijn loopbaan aan Newton te hebben gewijd opende de wetenschapshistoricus Sam Westfall — volgens degenen die hem hebben gekend een nuchter mens — zijn monumentale Newton-biografie met de woorden: “The end result of my study of Newton has served to convince me that with him there is no measure. He has become for me wholly other, one of the tiny handful of supreme geniuses who have shaped the categories of the human intellect, a man not finally reducible to the criteria by which we comprehend our fellow beings.” [26] (p. x) Niettemin blijven auteurs proberen Newton zo niet geheel te begrijpen, dan toch tenminste te duiden.

Een boekenkast vol

Van de ‘grote’ moderne biografieën door professionele historici wil ik hier naast Westfall [26] ook die van Hall noemen [13], en voor lezers met minder tijd en geduld is er de uitstekende en prachtig geïllustreerde korte biografie door Guicciardini [12]. Pogingen Newtons werk — en dan met name zijn opus magnum *Principia* — uit te leggen, laten evenmin af. De *Principia*-vertaling (uit het Latijn) en bezorging van Cohen (Bernard, niet Floris) en Whitman [21] geldt als definitief. Naast de daarin opgenomen *Guide* (die

vrijwel dezelfde lengte heeft als de vertaling) zijn bijvoorbeeld de (elkaar goed aanvullende) *Principia*-commentaren van Brackenridge [4] en Chandrasekhar [5] zeer geslaagd. Maar ook de internationaal geheel onbekende Nederlandstalige inleiding tot *Principia* door de wiskundeleraar H.J.E. Beth (vader van de logicus E.W. Beth) mag er zijn [2]. De aanloop tot *Principia* vanaf de oudheid vindt men bijvoorbeeld bij Dijksterhuis [8] en recenter bij Barbour [1]. Het wiskundige werk van Newton, tijdens diens leven grotendeels ongepubliceerd, is volledig ontsloten en in ongekend detail gereconstrueerd en becomeментарieerd door Whiteside [27].

Zoals de meeste lezers echter zullen weten is het wis- en natuurkundige werk van Newton slechts de top van een enorme ijsberg aan ongepubliceerde manuscripten van zijn hand: naast de exacte wetenschappen besteedde hij zo mogelijk nog meer aandacht aan uiteenlopende zaken als alchemie, theologie, kerkgeschiedenis, en politiek. Veel daarvan is nog niet uitgebracht, maar momenteel loopt een omvattend *Newton Project* om alle manuscripten van Newton te ontsluiten en op het internet te plaatsen [22]. Voor een up-to-date totaaloverzicht over Newton in al zijn facetten kan men ten slotte terecht bij de gezaghebbende *Cambridge Companion to Newton* [6].

Hoewel Newton dus al onderwerp van een hele boekenkast is, valt er ook nog veel te onderzoeken. Mede daarom blijft er voortdurend nieuwe literatuur over hem verschijnen, zowel voor vakgenoten als voor het grote publiek. Deze voortdurende aandacht lijkt me terecht. Newton is een icoon van genialiteit, uniek in zijn uitzonderlijke talent voor zowel wiskunde als natuurkunde, en bovendien ‘de juiste man in de juiste tijd op de juiste plaats’. Hij was als grondlegger van de differentiaal- en integraalrekening (alsmede virtuoos meetkundige) niet alleen één van de drie grootste wiskundigen uit de geschiedenis (met Archimedes en Gauss, zo wil het cliché), maar was met Einstein tevens de belangrijkste theoretisch fysicus tot nu toe. Zelfs als experimenteel fysicus duldte hij weinigen naast zich: hij nam nauwkeuriger en doelgerichter waar dan al zijn tijdgenoten en ook nu nog is bijvoorbeeld zijn *experimentum crucis* uit 1666 (waarmee hij het samengestelde karakter van wit licht definitief aantoonde) vanwege de benodigde precisie en volharding nauwelijks na te doen.

Van een warme persoonlijkheid kunnen we niet spreken — Newton had voor zover bekend nooit een intieme relatie en maakte met veel collega’s ruzie — maar juist zijn eenzame en paranoïde karakter blijft boeien. Wat voegen de vier nu te bespreken boeken toe aan de al enorme literatuur? We voeren het wiskundig gehalte langzaam op, te beginnen bij nul.

Newton in Nederland

Het stripboek *Newton in Nederland* door Boerhaave-conservator Ad Maas (met teke-



Figuur 1 Passage uit het stripboek *Newton in Nederland*

naars Peter FitzVerploegh en René Bergmans) is een gezamenlijke uitgave van Uitgeverij Epsilon en Museum Boerhaave. Het verscheen in 2009 ter gelegenheid van de tentoonstelling *NewtonMania* in dit Leidse museum (loopt tot 12 september 2010). De hoofdpersoon in het stripboek, evenals van de tentoonstelling, is niet zozeer Newton (1642–1727), maar de Leidse hoogleraar Willem Jacob 's Gravesande (1688–1742). Met zijn collega's Petrus van Musschenbroek (1692–1761) en Herman Boerhaave (1668–1738) speelde 's Gravesande een belangrijke rol in de verspreiding van het wetenschappelijke gedachtegoed van Newton, zowel door hun colleges als door hun boeken [3, 10, 18–19] (zie bijvoorbeeld [17] voor verdere informatie). Sterker nog: 's Gravesande was in ruwweg de periode 1720–1740 de belangrijkste schakel in de verspreiding van Newtons ideeën in het continentale Europa (Voltaire, die daarna de rol als toonaangevend Europees Newtoniaan van 's Gravesande zou overnemen, bezocht bijvoorbeeld diens colleges in Leiden). Zijn colleges werden verrijkt door

tallose experimenten, waarvoor de apparatuur werd gebouwd door Jan van Musschenbroek (de oudere broer van Petrus); deze instrumenten zijn dan ook in de onderhavige Boerhaave-tentoonstelling te bezichtigen. Een belangrijke vernieuwing van 's Gravesande was daarbij dat de experimenten niet zozeer ter vermaak van de studenten dienden, maar — in navolging van Newton — een systematische rol speelden in de opbouw van het vak op empirisch-mathematische grondslag. Zoals uitvoerig beschreven door de historicus Jonathan Israel [14–15] werd Newton in sommige conservatieve kringen als het religieuze antwoord op Spinoza gezien, volgens diezelfde kringen een atheïst die een groot gevaar vormde voor de stabiliteit (lees: hiërarchie) van de toenmalige samenleving. Newton daarentegen toonde aan dat iemand zowel wetenschappelijk vernieuwend als streng gelovig kon zijn, zodat een zekere gecontroleerde vorm van vooruitgang compatibel moest zijn met het in stand houden van de bestaande goddelijke (lees: politieke) ordening op aarde. Het stripboek zet 's Gravesande in dit licht neer als een soort van hogerhand aangestuurde pion van het Newtonianisme in Nederland, die daarmee vooral de Fransen de indruk moest geven dat Nederland een keurig en stabiel land was dat allerminst zat te wachten op Franse interventie om het geloof te redden.

Newton in Nederland is een leuk en mooi getekend boek met een hoogst originele keuze van onderwerp, maar je vraagt je af voor wie het bedoeld is. Kinderen en zelfs middelbare scholieren zullen weinig van het verhaal begrijpen, al zullen ze genieten van met name de passages over Newtons jeugd en er wellicht iets van opsteken over onze vaderlandse geschiedenis. Volwassenen die bij Israel of elders iets verdere naspeuringen naar het onderliggende verhaal doen, zullen lezen

dat 's Gravesande vanwege afwijkende meningen na verloop van tijd door de kring rond de (aftakelende) meester met wantrouwen — en zelfs als 'Leibniziaan' — werd bejegend, en in het kielzog daarvan door sommige conservatieve krachten zelfs als heimelijke Spinozist werd beschouwd! Dit had nog een mooie spanningsboog in het stripboek op kunnen leveren, dat echter aanstuurt op een *happy end*. Hoe dan ook is het een mooie geschiedenis: je hoeft geen TON-stemmer te zijn om trots te zijn op de sleutelrol die Nederlanders als 's Gravesande speelden in de verspreiding van de wetenschappelijke revolutie, waarvan het werk van Newton het hoogtepunt was en waarop de moderne samenleving is gebaseerd.

Isaac Newton en het ware weten

À propos wetenschappelijke revolutie: Floris Cohen raakte bij het grote publiek bekend met zijn boek *De herschepping van de wereld* (Bert Bakker, Amsterdam, 2007), waarin hij een poging doet om te verklaren waarom deze juist in het 17de-eeuwse West-Europa is ontketend. Zijn verklaring is omstreden en doet hier niet terzake, afgezien van het feit dat Newton er een hoofdrol in speelt als de persoon bij wie filosofisch, wiskundig en empirisch denken — na een scheiding van millennia — voor het eerst in volle glorie samenkomen. In die zin is *Isaac Newton en het ware weten* (Bert Bakker, Amsterdam, 2010) een vervolg op *De herschepping van de wereld*.

Dit nieuwe boek lijkt op het eerste gezicht een min of meer conventionele wetenschappelijke minibiografie van Newton, met nadruk op diens prestaties in de optica en de mechanica (zoals vastgelegd in *Opticks* en *Principia*). Voor de op feitelijke informatie belust lezer kan het boek deze rol ook spelen, al bevat het dan soortgelijke informatie als de al genoemde Nederlandstalige Newtonbiografie van Guicciardini en ontbreken bovendien de plaatjes. Het werkelijke doel van Cohen is echter niet het in het Nederlands herhalen van bekend materiaal — al doet hij dat ook, op voortreffelijke wijze — maar om aan de hand van Newtons oeuvre licht te werpen op een wetenschapsfilosofische vraag die Cohen op een aantal manieren stelt: Wat maakt het verschil tussen beweren en bewijzen? Hoe ver strekt de waarheidsclaim van de natuurwetenschap? Bestaat er zoiets als 'het ware weten'? Deze inzet geeft het boek een samenhang die het feitenmateriaal op een opmerkelijk effectieve manier ordent en bindt, en het lezen zelfs tot een spannend avontuur maakt.

In dit opzicht was er een groot verschil tus-



Peter FitzVerploegh, René Bergmans, Ad Maas, *Newton in Nederland*, Epsilon Uitgaven, 2009, 32 p., ISBN-13: 978-90-5041-120-2, prijs € 7.



Figuur 2 Gravure uit het boekje met de rede waarin Herman Boerhaave in 1715 het rectoraat van de Universiteit van Leiden aanvaardde [3]; deze ging specifiek over Newtons methodiek.

sen Newton en zijn voorgangers en wegbe-reidders Robert Hooke en Christiaan Huygens. De laatste twee zagen de wetenschap als een stelsel hypothesen, hoogstens te beschouwen als benaderingen tot de waarheid, voor zover daar al sprake van kon zijn. Zij dachten in dit opzicht moderner dan Newton, die in ieder geval in *Principia* een compromissloze vorm van waarheidsvinding nastreefde: dit is het 'ware weten' dat Cohen zelfs als titel van zijn boek heeft gekozen. (Ook met zijn optica had Newton uiteindelijk dit doel, maar hij zag in dat dit niet tijdens zijn leven bereikt kon worden en schreef mede daarom de *Opticks* niet op de wiskundig georiënteerde wijze van *Principia* en bovendien in het 'informele' Engels in plaats van het 'geleerde'

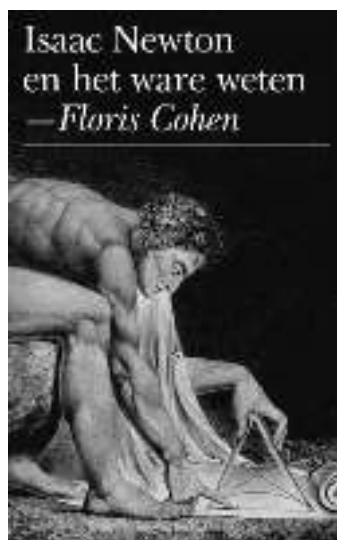
Latijn.) Newtons algehele werkwijze rond het schrijven van *Principia*, van zijn maniakale bezetenheid tot de axiomatisch-deductieve opbouw van dit werk, vormt hier een sterke aanwijzing voor, en de later te bespreken argumenten van Guicciardini ronden het bewijs van deze claim af.

De vergelijking met enerzijds Hooke en anderzijds Huygens vormt de rode draad in het boek van Cohen. (Cohen zet zich weliswaar uitdrukkelijk af tegen de huidige trend in de wetenschapsgeschiedenis om alles in termen van instituten en lokale contexten te beschrijven en neemt het in zekere zin op voor het romantische archetype van 'het genie', maar ook hij ontsnapt niet aan context en voorgeschiedenis: Newton stond op de schouders

van reuzen.) De verschillen in werkwijze tussen Newton en Hooke, alsmede hun eindeloze conflicten, zijn welbekend, maar Cohen weet ze onderhoudend op te dissen — zijn boek is in eerste instantie niet voor experts geschreven (al kunnen ook die er van genieten). Kort samengevat: Hooke *beweerde*, Newton *beweest*. Dit betekent niet dat Hooke *zomaar* wat beweerde; hij beschikte mede op grond van de experimenten die hij voor de Royal Society verrichtte over diepe en originele inzichten in de natuurkunde, waarmee hij vrijwel al zijn tijdgenoten overtrof. Newton had dan ook het een en ander aan Hooke te danken (zoals het toentertijd verbluffende idee dat de ellipsvorm van de planeetbanen ontstaat door afbuiging van de vrije rechte beweging door een centripetale kracht), maar de combinatie van Hooke's zelfingenomen en belerende houding met zijn gebrek aan wiskundige begaafdheid sloten iedere vorm van generositeit van Newtons kant uit.

De vergelijking tussen Newton en Huygens ligt subtieler. Van alle geleerden uit de geschiedenis kwam Huygens misschien nog wel het meest in de buurt van Newtons gecombineerde talent voor wiskunde én natuurkunde, en bovendien hielden zij zich wat de exacte wetenschap betreft ook met vrijwel dezelfde problemen uit de optica en de mechanica bezig. In *De herschepping van de wereld* kent Cohen Huygens nog een hoofdrol in de wetenschappelijke revolutie toe als dé denker die de dogmatische natuurfilosofie vervangde door een hypothetische, maar in *Isaac Newton en het ware weten* wijst hij Huygens toch uitdrukkelijk diens plaats ten opzichte van Newton: de tweede. Huygens was weliswaar een briljant wis- en natuurkundige, die om deze reden dan ook door Newton als geen ander werd bewonderd (Newton reserveerde slechts voor Huygens de eretitel '*vir summus*'), maar vergeleken met Newton was Huygens in deze gebieden beduidend minder vernieuwend. Als natuurkundige bleef hij ondanks een kritische houding steken in de mechanistische botsings- en wervelfysica van Descartes (een goede bekende van zijn vader), terwijl hij als wiskundige weliswaar bij vlagen in de buurt kwam van het infinitesimale denken [28], maar niet doorzette en het technische en conceptuele apparaat van de Euclidische meetkunde uiteindelijk niet wist af te schudden. In het algemeen zette hij, op de momenten dat hij mogelijke radicale vernieuwingen op het spoor was, niet door: de air van een rijkeluijszontje dat tevreden was met af en toe wat virtuoos machtsvertoon blijft om Huygens hangen. De vasthoudendheid en

het concentratievermogen dat een deel van Newtons kracht vormde, kon Huygens af en toe slechts voor (te) korte perioden opbrengen. Op p. 191 schrijft Cohen: “Wat Newton in staat stelde om Huygens voorbij te streven door krachten toe te voegen aan een wereld gestoffeerd met bewegende deeltjes (...) was dat Newton tegelijk een soort Hooke was. Net als Hooke had ook hij de ingebouwde dubbelsinnigheid ervaren van een wereld vol actieve principes en aethermechanismen, zij het dat bij hem [i.e. Newton] vooral chemie en alchemie hem in die richting dreven. (...) Wat Newton in staat stelde om Hooke voorbij te streven bij hun gedeelde zoektocht naar actieve principes was iets anders. Het was een grote stap om van een speculatie en hooguit schattend-kwantitatief uit de verte wat zwaaien naar fysisch bestaande krachten over te gaan tot een volgehouden verkenning van waar dit toe leidden zou wanneer je eenmaal de resultaten in wiskundige strengheid ging verankeren. Dat Newton die stap wist te zetten, zat hem erin dat hij ook een soort Huygens was. Dat wil zeggen, een man wiens primaire loyaliteit gelegen was in de realistisch-wiskundige wetenschap en in de strakke eisen die deze stelde.” Dit is scherp geobserveerd, maar beantwoordt niet de vraag (die Cohen dan ook niet expliciet stelt) *waarom* Newton als een bezetene het ‘ware weten’ nastreefde — de zekerheid waar ook Guicciardini het over zal hebben — en *wat* hem diep in zijn ziel zo anders maakte dan Hooke en Huygens (en ook dan Galilei en Descartes). Wellicht is dit ook eerder een vraag voor de psychoanalyse [29], maar er bestaat mijns inziens toch een wetenschappelijk antwoord op. Nadat een 19de-



Floris Cohen, *Isaac Newton en het ware weten*, Uitgeverij Bert Bakker, 2010, 267 p., hardcover, ISBN-13: 978-90-3513-454-6, prijs € 24,95.

eeuwse biograaf als David Brewster nog geweldig in zijn maag zat met de toen recente ontdekking dat Newton een groot deel van zijn tijd aan alchemie (alsmede aan theologie en kerkgeschiedenis) had besteed, en alles deed om dit gegeven weg te moffelen, probeerden in de 20ste eeuw historici als I. Cohen en Hall, die hier niet meer omheen konden, tenminste nog een strenge scheiding aan te brengen tussen Newtons werk aan de exacte wetenschap en zijn alchemistische activiteiten. Bij Westfall vinden we het eerste integrale portret van Newton dat in gelijke mate recht doet aan ál zijn werk; in het bijzonder wijst hij erop dat Newtons alchemie een sleutelrol speelde bij het tot stand komen van zijn krachtbegrip, en dan met name het inzicht dat krachten op afstand kunnen werken. Maar waar de genoemde generatie wetenschapshistorici (net als Newtons concurrenten Huygens en Leibniz) de alchemie als een ook in de 17de eeuw al achterhaalde aberratie uit vroeger tijden zag, is de huidige trend om de alchemie eerder te zien als voorloper van de moderne chemie en farmacie dan als een occulte bezigheid waar de mensheid zich voor zou moeten schamen [7, 20, 25]. Floris Cohen sluit zich daar ook bij aan, en wijdt interessant passages aan de alchemie van Starkey, Boyle, en Newton. Hij beperkt zich daarbij echter tot het natuurwetenschappelijke denken van Newton (zoals in het bovenstaande citaat).

Ik wil hier aan toevoegen dat voor zover de alchemie een ongebruikelijke kant had (die in het denken van Huygens en Hooke dan ook volledig ontbreekt), deze lag in de dwingende religieuze ondertoon, inclusief het streven naar perfectie in mens én natuur. Dit uitte zich onder meer in een totale overgave van haar beoefenaren: de alchemisten leidden een hermetisch bestaan en werkten dag en nacht door om de beoogde perfectie te bereiken. Hun doel was immers de waarheid, via geheime symboliek en vuur geopenbaard in de vorm van een mysterie van goddelijke oorsprong. In dit opzicht was Newton naar mijn mening in de eerste plaats alchemist en bedreef hij ook de wis- en natuurkunde vanuit die mentaliteit: hij stond daarin dicht bij Paracelsus dan bij Huygens. Tegelijk ligt het kardinale verschil tussen de alchemisten en Newton in diens enorme kennis van de wis- en natuurkunde en zijn daarmee samenhangende systematische en exacte aanpak van de ‘natuurfilosofie’ als geheel: het is de combinatie van zijn exacte kennis en zijn alchemistische mentaliteit die Newton mijns inziens maakte tot de man die hij was.



Figuur 3 Schilderij *Britannia tussen Newton en Gravesande* van Giovanni Martino dei Boni (1753–1810) uit 1787

Op de schouders van reuzen

Hoe dan ook: Newton streefde klaarblijkelijk het ‘ware weten’ na, maar waaruit bestond dat weten eigenlijk? Wat ‘bewees’ Newton, waar Hooke slechts ‘beweerde’? Alle commentatoren zijn het er over eens dat de afleiding van de ellipsvorm van de planeetbanen (en meer in het algemeen van de drie wetten van Kepler, waarvan dit de eerste is) het hoogtepunt van Newtons werk — en daarmee van de hele wetenschappelijke revolutie en wellicht zelfs van het menselijk denken — vormt. Floris Cohen: “Op de wiskundige details na wordt geen stap weggelaten die vereist is om bij het eindpunt van het onderzoek uit te komen, de afleiding van de elliptische baan van de planeten.” (p. 169). Bernard Cohen: “Historians of science have recognized that prop. 41 [waarin deze afleiding culmineert] represents a climax, a high peak, of the development of dynamics in the *Principia*.” [21] (p. 141). Chandrasekhar: “Newton was the first to recognize that these problems require formulation and solution.” [5] (p. 161).

Meer in het algemeen geldt Newton als de eerste die bewees dat oplossingen van het zogenaamde Kepler-probleem (i.e. beweging onder een centrale aantrekkingskracht die afneemt als $1/r^2$) *kegelsneden* zijn: behalve de ellipsvormige planeetbanen zijn ook ‘ongebonden’ banen mogelijk in de vorm van parabolen en hyperbolen, waarbij zeg een meeteor het zonnestelsel weer verlaat.

Maar nu komen we bij een van de merkwaardigste episoden uit de wetenschapsgeschiedenis: waar men inderdaad zou verwachten dat Newton, zoals elders in *Principia*, aan iedere onzekerheid een eind maakt met een even schitterende als strenge bewijsvoering, maakt hij er zich bij het onderhavi-

ge bewijs ogenschijnlijk met een paar losse opmerkingen vanaf (i.e. Corollary 1 na Proposition 13 [21] (p. 467) en Proposition 41 [21] (p. 529), beide in Book I van *Principia*). Tot overmaat van ramp geeft hij (in Corollary 3 na Proposition 41) de details slechts voor een $1/r^3$ -kracht, in plaats van de fysisch relevante $1/r^2$ -vorm, en als klap op de vuurpijl gaat hij er ook nog eens vanuit dat de lezer de bijbehorende integralen zelf wel even uitrekent (wat in zijn tijd vrijwel niemand kon en ook nu nog geen sinecure is)!

Uiteraard is hierover eindeloos gespeculeerd; recent en betrouwbaar historisch werk op dit gebied is [23–24], waarin wordt aangetoond dat Newton zelf in eerste instantie (i.e. bij de eerste editie van *Principia* in 1687) inderdaad een aantal subtiliteiten over het hoofd had gezien, en zelfs in de aanvullingen op het bewijs in de tweede editie (1713), verder uitgebreid in de derde druk uit 1726, na laat de lezer expliciet te wijzen op de combinatie van argumenten die tezamen het bewijs leveren — een bewijs dat *Principia* dus wel degelijk bevat. Het argument van Newton is, kort samengevat, dat een ellipsbaan die volgens de perkenwet wordt doorlopen (dit moet erbij worden vermeld, omdat de *baan* als geometrisch object zelf geen informatie geeft over het *traject*, i.e. de tijdafhankelijkheid van de beweging) een oplossing geeft van de bewegingsvergelijkingen voor een aantrekkende $1/r^2$ -kracht. Op ieder tijdstip heeft een dergelijke baan beginvoorwaarden (in de zin van plaats en snelheid), die (bij gegeven kracht) omgekeerd ook de baan bepalen. Er zijn dus geen andere mogelijkheden. Bij deze laatste conclusie is het echter noodzakelijk dat het

beginwaardeprobleem van de onderliggende differentiaalvergelijking (N.B. een begrip dat Newton zelf in de wiskunde had ingevoerd, zij het niet expliciet in *Principia*) uniek oplosbaar is (i.e., bestaan én uniciteit staan ter discussie). De verwarring is mede ontstaan omdat Newton zich er op de plaats waar je een bewijs daarvan zou verwachten met een korte opmerking vanaf maakt (“and two different orbits touching each other cannot be described with the same centripetal force and the same velocity” [21] (p. 467)), terwijl hij elders — maar zonder daar naar te verwijzen — wel degelijk alle ingrediënten van het bewijs geeft (zie Propositions 17 [21] (p. 470) en 42 [21] (p. 532) voor uniciteit en bestaan van de oplossing behoudens het verschil tussen baan en traject, en Propositions 30 en 31 [21] (p. 510–514) inclusief dit verschil).

In het lovenswaardige *Op de schouders van reuzen: de mechanica van Isaac Newton* (Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2009) geven wiskundecollega Maris van Haandel (Pantarij Scholengemeenschap Wageningen) en hoogleraar wiskunde Gert Heckman (Radboud Universiteit Nijmegen) een inleiding in deze materie, bedoeld voor vwo-6 en eerstejaars universiteit (wiskunde en/of natuurkunde). Het materiaal is zowel in Masterclasses (voor scholieren) als in collegevorm gebruikt.

Na een aantal heldere voorbereidende hoofdstukken over inproduct, uitproduct, vlakke krommen en ruimtekrommen, de tweewielerkromme van Copernicus (een vlakke kromme die ontstaat door het verschil te nemen van twee eenparige cirkelvormige bewegingen met hetzelfde middelpunt, met als speciaal geval de epicycloïde, die volgens Ptolemaeus de planeetbanen om de aarde beschrijven), de wetten van Kepler, de beweging van projectielen bij Galilei, en de wetten van Newton, geven de auteurs een fraai bewijs — gedeeltelijk van eigen makelij — van de drie wetten van Kepler. Het bewijs is ten opzichte van Newton enerzijds volstrekt anachronistisch, omdat het op cruciale wijze gebruik maakt van symmetrie en behouden grootheden (die men bij Newton niet tegenkomt, onder meer omdat hij ondanks zijn fabuleuze inzicht in de mechanica hardnekkig in vegetatieve krachten en andere dissipatieve grootheden bleef geloven, die iedere behoudswet in de weg staan). Aan de andere kant bevat het ter identificatie van de uiteindelijke ellipsvorm een geometrisch argument dat zonder meer aan Newton bekend was, namelijk de zogenaamde ‘tuinmandefinitie’ van een ellips als verzameling punten waarvan de som van de afstanden tot twee gegeven punten (name-

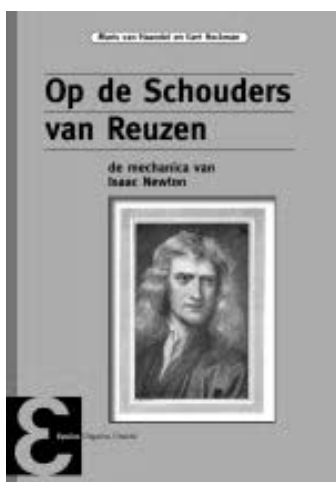
lijk de beide brandpunten) constant is. (Op deze manier leggen tuinlieden namelijk een ellipsvormig bloem- of grasperk aan, simpelweg door twee pinnen in de grond te steken en aan ieder daarvan een strak gespannen touw te bevestigen en daarmee rond te lopen.)

Vervolgens keren Heckman en Van Haandel toch terug naar *Principia* en geven zij zowel Newtons ‘directe’ als ‘inverse’ oplossing van het Kepler-probleem. Het ‘directe’ probleem is de afleiding van de wiskundige vorm van de zwaartekracht uit de drie wetten van Kepler, dat in de axiomatisch-empirische opbouw van *Principia* een sleutelrol speelt (zie ook verderop) en voor Newton klaarblijkelijk nog belangrijker was dan het omgekeerde probleem (wat wellicht ook verklaart waarom hij, zoals boven uiteengezet, zijn oplossing van het directe probleem aanzienlijk zorgvuldiger opschreef dan die van het inverse probleem). De ‘inverse’ oplossing is het al eerder genoemde argument, dat berust op de eenduidigheid van oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen met geschikte begincondities. Het bewijs van deze eenduidigheid, in Newtons dan wel de moderne vorm, wordt door Heckman en Van Haandel begrijpelijkerwijs weggelaten; het zou een cursus op zich zijn.

Als uitsmijter geven Heckman en Van Haandel nog een derde oplossing van het (inverse) Kepler-probleem, afkomstig van Richard Feynman (die het in 1964 in een college gaf, maar nooit publiceerde; dat gebeurde pas in 1996, na zijn dood). Dit bewijs is gebaseerd op de zogenaamde ‘hodograaf’, i.e. de kromme die de snelheidsvector van de planeet doorloopt. In tegenstelling tot de plaats, die een ellips doorloopt, volgt de hodograaf een cirkel. Dit kan men uit de wet van behoud van draaiimpuls afleiden, en geeft op zijn beurt uiteindelijk de ellipsbaan van de plaats. Na de posthume publicatie van Feynmans bewijs werd overigens duidelijk dat het al eerder was gevonden door Möbius (1843) en Hamilton (1845).

On mathematical certainty and method

Met alle respect voor de drie tot nu toe besproken boeken — in zekere zin (zeer geslaagde) gelegenhedswerken — is het nieuwe Newtonboek van Niccolò Guicciardini — hoogleraar wetenschapsgeschiedenis aan de Universiteit van Bergamo en een nazaat van Niccolò Machiavelli — van een ander kaliber: het is bijna een levenswerk. Sinds het overlijden van Whiteside in 2008 is Guicciardini zonder twi- fel dé expert op het gebied van Newtons wiskunde. Zoals onder meer blijkt uit zijn vorige



Maris van Haandel, Gert Heckman, *Op de Schouders van Reuzen, de mechanica van Isaac Newton*, Epsilon Uitgaven, 2009, 104 p., ISBN-13: 978-90-5041-107-3, prijs € 14.

boek over de receptiegeschiedenis van *Principia* [11] is hij bovendien een groot kenner van het tijdvak waarin Newtons meesterwerk ontstond.

Guicciardini's nieuwe boek *Isaac Newton on mathematical certainty and method* (MIT Press, Cambridge, MA, 2009) gaat over Newtons filosofie van de wiskunde, die onlosmakelijk verbonden is met zijn filosofie van de natuurkunde (onderwerp van een ander recent boek [16]). Hier is vreemd genoeg tot nu toe nauwelijks aandacht aan besteed, in tegenstelling tot bijvoorbeeld Newtons wetenschappelijke methodiek. Newton heeft zelf nooit een systematische presentatie van zijn filosofie van de wiskunde gegeven, en Guicciardini heeft dan ook alle mogelijk documenten binnenstebuiten moeten keren om er een verhaal van te kunnen maken. Dit verhaal is om drie redenen niet helemaal coherent: ten eerste veranderde Newton tijdens zijn leven enige malen van standpunt, ten tweede was er een aanzienlijk verschil tussen zijn (veelal opportunistische) wiskundige praktijk en zijn filosofische idealen, en ten derde zijn Newtons gepubliceerde opmerkingen op dit gebied vaak vertroebeld en misleidend vanwege de politieke agenda die hij tegelijk bediende. Dit laatste betreft vooral zijn toenemende afkeer jegens Descartes, en later ook zijn prioriteitsconflict met Leibniz over de calculus. Guicciardini brengt dit allemaal zorgvuldig in kaart, maar ik zal me hier beperken tot de periode rond *Principia*, waarin zich een min of meer navolgbare filosofie uitkristalliseert.

Newton was een fenomenaal wiskundige, maar uiteindelijk stond zijn wiskunde in dienst van zijn natuurkunde. Zoals benadrukt door Floris Cohen deed Newton dat laatste voor niets minder dan de waarheid, en Guic-

ciardini voegt hier aan toe dat de functie van de wiskunde bij Newton was om als het ware zekerheid in de natuurkunde te spuiten. Tenzamen vormen zij dan een deductieve wetenschap, met, in de context van de mechanica van *Principia*, de volgende taakverdeling:

1. Uit een beperkt aantal waarnemingen wordt de wiskundige vorm van bepaalde krachten afgeleid. Hét model hiervoor is het al eerder genoemde 'directe probleem', waarin de $1/r^2$ vorm van de zwaartekracht wordt afgeleid uit de wetten van Kepler (beschouwd als empirische input).
2. Vervolgens worden uit de zo gevonden krachten opnieuw met behulp van wiskunde alle andere waargenomen bewegingen afgeleid. Bij de zwaartekracht is dit dus het 'inverse probleem'.

Voor de daadwerkelijke zekerheid van deze procedure is het noodzakelijk dat zowel de empirische gegevens in stap 1 als de berekende bewegingen in stap 2 zelf van wiskundige aard zijn, omdat anders hét grote grondslagenprobleem van de wiskunde op de loer ligt, dat sinds Plato en Aristoteles onderkend wordt en als volgt kort en bondig is geformuleerd door Einstein: "Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit." [9]. Newton was zich dit probleem terdege bewust en gaf het zelfs de hoogst mogelijke prioriteit, want hij begint *Principia* met het (in het voorwoord) geven van zijn oplossing ervan: "(...) the description of right lines and circles, which is the foundation of geometry, appertains to mechanics." [21] (p. 381). Met andere woorden: de natuur — en dan met name mechanische beweging — geeft ons de figuren waar de meetkunde vervolgens over gaat. Vanuit een modern Hilbertiaans standpunt kunnen we zeggen: de niet-logische termen in de axioma's (in dit geval van de Euclidische meetkunde) worden direct geïnterpreteerd, en wel in de natuur. Dit gaat een stap verder dan Euclides, die deze figuren als geïdealiseerde (menselijke) constructies met passer en lineaal beschouwde. Newton heeft het elders in het voorwoord over een 'mechanicus omnium perfectissimus' die de natuur van dergelijke beweging voorziet, waarmee hij ongetwijfeld de almachtige God bedoelt in wie hij zo diep geloofde.

Op deze manier staan wiskunde en natuurkunde in een wederzijdse afhankelijkheid en omstrengeling: de natuur voorziet de wiskunde van haar materiaal, waarmee de wiskunde weer over de natuur redeneert en de conclusies als het ware aan de natuur teruggeeft. De

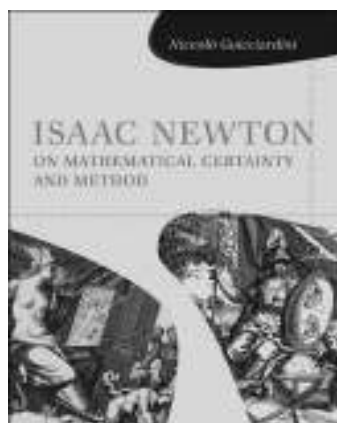


Uit: Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*

Figuur 4 Afleiding van Keplers perkenwet uit 1684, in Newton's eigen handschrift

filosofische positie die Newton hier inneemt zou je als 'realistisch' kunnen beschouwen, in de zin dat wiskundige objecten 'echt' en bovendien op volmaakte wijze in de natuur bestaan. Dit is echter een ander dan het aan Plato toegeschreven realisme: daarin bevinden de wiskundige objecten zich in een slechts voor het intellect toegankelijke hogere sfeer van vormen c.q. ideeën. Misschien kunnen we Newtons opvatting daarom beter 'naturalistisch' noemen.

Newton kon deze positie innemen in een tijd dat de ontkoppeling tussen wiskunde en werkelijkheid (een 19de-eeuws fenomeen, gevoed door realiteitsvreemde uitvindingen als niet-Euclidische en later Riemannse meetkunde, algebraïsche getaltheorie, en verzamelingenleer) nog ver weg was; het is maar de vraag of hij zijn naturalistische visie op de wiskunde ook nu nog zou volhouden. Hoe dan ook stond Newton nog voor een tweede probleem, namelijk de rechtvaardiging van de zekerheid van de wiskunde zelf. Dit is allerm minst een 20ste-eeuwse kwestie, gevoed door de opkomst van nieuwe logische systemen: al in 1547 stelde Alessandro Piccolomini zijn tijdgenoten deze vraag. Diens motivatie lag in een poging om door middel van een negatief antwoord de syllogistische logica van Aristoteles en daarmee indirect de scholastiek te beschermen tegen de in opkomst zijnde wiskunde en andere vormen van nieuwlichterij, en vreemd genoeg was het met Newton mu-



Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, The MIT Press, 2009, 448 p., hardcover, ISBN-10: 0262013177, ISBN-13: 978-02-6201-317-8, prijs \$55.

tatis mutandis niet zo heel anders gesteld: in zijn streven naar zekerheid in *Principia* begon hij in toenemende mate te twijfelen aan de geldigheid van de nieuwe wiskundige methoden die hij zelf mede in het leven had geroepen, en ontstond een steeds sterker worden-de drang om zich uitsluitend te baseren op de wiskunde van de ‘Ancients’ (met wie Newton de oude Grieken als Euclides en Apollonius van Perga bedoelde).

Deze drang — waarvan het belang voor het begrijpen van de latere Newton niet overschat kan worden — was onderdeel van een algehele tendens bij Newton (en sommige van zijn tijdgenoten) om te denken dat er een ‘*prisca sapientia*’ zou bestaan, een soort oerkennis die de mensheid in vroegere tijden was geopend maar die inmiddels als onderdeel van een algeheel vervals- en corruptieproces dat de mensheid onderging, grotendeels verloren was gegaan. Sommige commentatoren merken zelfs op dat Newton zichzelf als een soort profeet zag, met als taak deze verloren gegane kennis weer op te dissen. Meer concreet ontwikkelde Newton een steeds grotere afkeer van Descartes en diens wiskun-

dige (en theologische) nieuwlichterij en een steeds grotere bewondering voor Huygens, met name voor diens meesterwerk *Horologium Oscillatorium* uit 1673, dat hij met name preeste vanwege de gedegen (lees: antieke) wiskunde, daarmee zijn eigen voorsprong op dat gebied geheel uit handen gevend! Om deze verbluffende ontwikkeling te begrijpen is meer nodig dan Newtons filosofie van de wiskunde, maar om toch in dat laatste kader te blijven voldoet het hier om op te merken dat Newton de vraag naar de zekerheid van de wiskunde eenvoudigweg beantwoordde door te verwijzen naar de ‘Ancients’ (en daarmee mogelijk naar de goddelijke openbaring als ultieme grond van de wiskunde en haar zekerheid). Anders gezegd: hij beantwoordde deze vraag *niet*.

Het bewuste proces dat Newton doormaakte had in ieder geval grote invloed op *Principia*: dit boek is niet, zoals men zou verwachten in de wiskundige taal van de calculus geschreven — die Newton op dat moment al bijna 20 jaar in de vingers had — maar in een soort hybride geometrische analyse. Daarin probeert Newton krampachtig (maar virtuoos)

zo dicht mogelijk bij de Euclidische meetkunde te blijven, wat hem uiteraard niet lukt — hij had de calculus niet voor niets uitgevonden — zodat hij zich gedwongen ziet daar alerhande limietprocessen in te stoppen. Deze wiskundige stijl bleek letterlijk onnavolgbaar: ons huidige begrip van *Principia* is, historici daargelaten, gebaseerd op latere ‘hertalingen’ naar de calculus (door Euler en anderen).

Guicciardini besluit zijn boek met de vraag: “Does Newton emerge as a creative and innovative philosopher of mathematics?” Weinigen zouden, na hun halve leven aan dit onderwerp te hebben gewijd en er een meesterwerk over te hebben geschreven, de grootheid hebben om deze vraag anders dan positief te beantwoorden. Zo niet Guicciardini: “Clearly, the answer is no.” Persoonlijk vind ik dat hij Newton daarmee tekort doet, maar wie ben ik om dat te zeggen? Het oordeel is aan de lezer, die zelfs als hij/zij het uiteindelijk met Guicciardini eens blijkt te zijn, door hem verwend is met een doorwrochte inblik in de denkwereld van een van de grootste geesten die de wiskunde heeft voortgebracht. ↵

Referenties

- J.B. Barbour, *Absolute or relative motion? Vol. 1: The discovery of dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- H.J.E. Beth, *Newton's "Principia", Deel I en II* (Noordhoff, Groningen-Batavia, 1932).
- H. Boerhaave, *Sermo academicus, de comparando certo in physicis* (Leyden, Van der Aa, 1715).
- B. Brackenridge, *The key to Newton's dynamics* (University of California Press, Berkeley, 1995).
- S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the common reader* (Clarendon Press, Oxford, 1995).
- I.B. Cohen and G.E. Smith (eds.), *The Cambridge Companion to Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- B.J.T. Dobbs, *The Janus faces of genius: The role of alchemy in Newton's thought* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- E.J. Dijksterhuis, *De mechanisering van het wereldbeeld* (Meulenhoff, Amsterdam, 1950).
- A. Einstein, *Geometrie und Erfahrung* (1921), herdrukt in ‘*Mein Weltbild*’, pp. 119–127 (Ullstein Materialien, Frankfurt, 1982). Vertaling: “Voor zover de conclusies van de wiskunde met de werkelijkheid te maken hebben zijn ze niet zeker; en voor zover ze zeker zijn, verwijzen ze niet naar de werkelijkheid.”
- G.J. 's Gravesande, *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata: Sive Introductio ad philosophiam Newtonianam*, 2 delen (Leyden, Van der Aa, 1720-1721).
- N. Guicciardini, *Reading the Principia: The debate on Newton's mathematical methods for natural philosophy from 1687 to 1736* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- N. Guicciardini, *Newton: Alchemist, filosoof en natuurwetenschapper* (Natuur en Techniek, Veen Magazines, Amsterdam, 2002).
- A.R. Hall, *Isaac Newton: Adventurer in thought* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- J. Israel, *Radical enlightenment: Philosophy and the making of modernity 1650-1750* (Oxford University Press, Oxford, 2001).
- J. Israel, *Enlightenment contested: Philosophy, modernity, and the emancipation of man 1670-1752* (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- A. Janiak, *Newton as philosopher* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- A.J. Kox en M. Chamalaun (red.), *Van Stevin tot Lorentz: Portretten van Nederlandse natuurwetenschappers* (Intermediair, Amsterdam, 1980).
- P. van Musschenbroek, *Beginnselen der natuurkunde, beschreven ten dienste der landgenooten* (Leyden, Luchtmans, 1736).
- P. van Musschenbroek, *Introductio ad philosophiam naturalem* (Leyden, Luchtmans, 1762).
- W.R. Newman, *Atoms and alchemy: Chymistry and the experimental origins of the scientific revolution* (University of Chicago Press, Chicago, 2006).
- Isaac Newton, *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, A new translation by I.B. Cohen and A. Whitman, Preceded by A Guide to Newton's Principia by I.B. Cohen (University of California Press, Berkeley, 1999).
- www.newtonproject.sussex.ac.uk
- B.H. Pourciau, *On Newton's proof that inverse-square orbits must be conics*, *Annals of Science* 48, 159–172 (1991).
- B.H. Pourciau, *Proposition 1 (Book 11) of Newton's Principia*, *Archive for History of Exact Sciences* 63, 129–167 (2009).
- C.K. Webster, *From Paracelsus to Newton: Magic and the making of modern science* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
- R.S. Westfall, *Never at rest: A biography of Isaac Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- D.T. Whiteside, *The mathematical papers of Isaac Newton*, Vols. I-VIII (Cambridge University Press, Cambridge, 1967–1981). Deze editie, die lange tijd zo al verkrijgbaar dan toch onbetaalbaar was voor particulieren, is begin 2008 door CUP uitgebracht in paperback en kost nu nog slechts 400 pond.
- J.G. Yoder, *Unrolling time: Christiaan Huygens and the mathematization of nature* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- H. Zwart, *De waarheid op de wand: Psychoanalyse van het weten* (Vantilt, Nijmegen, 2010).

Ionica Smeets

Boerhaavelaan 114

2334 ET Leiden

ionica.smeets@gmail.com



Het keerpunt van Jan van de Craats

Ineens moest ik wiskunde verdedigen

De nieuwe rubriek Het keerpunt draait om bepalende momenten in de loopbaan van wiskundigen. Een boek, een ontmoeting, een nieuwe aanstelling: de koers van een carrière kan er totaal door veranderen. Het spits wordt afgebeten door Jan van de Craats (1944). Deze emeritus hoogleraar kennen we de laatste jaren vooral van zijn aanhoudende strijd voor beter rekenonderwijs. Hij vertelt hoe zijn kijk op wiskunde verschoof.

Als jongen maakte Jan van de Craats met veel plezier staartdelingen die zijn vader hem op grote folioellen gaf. Toch was het niet vanzelfsprekend dat hij wiskunde ging studeren. Pas toen hij in de vijfde klas kennismaakte met wiskundeolympiade-achtige opgaven, wist hij waar zijn passie lag. Hij studeerde met veel plezier in Leiden en rolde er van zijn studie direct in een promotieonderzoek en later in een baan als wetenschappelijk medewerker. Begin jaren tachtig werd hij echter ontslagen bij een reorganisatie.

Hoe reageerde je op je ontslag?

“In die tijd vond ik dat heel erg, maar achteraf gezien is het een enorme zegen geweest. Ik werd gedwongen om buiten de deur te kijken. In die tijd kwamen twee aantrekkelijke vacatures langs: universitair hoofddocent aan de Open Universiteit en hoogleraar wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie (KMA). Ik solliciteerde op allebei de banen en kreeg beide posten aangeboden.”

Je koos voor de KMA. Waarom?

“Het was een betere positie met allerlei aantrekkelijke voorwaarden. Het was niet omdat ik veel sympathie voor het militaire be-

drijf had. Ik zou bij de KMA ook in dienst komen als burgerdocent, zonder uniform.”

Was je wel in dienst geweest?

“Nee, ik kon geen korporaal van een generaal onderscheiden. Dat vonden ze ge-



Jan van de Craats

lukkig helemaal niet erg. Er was trouwens toch ook een andere reden dat ik naar de KMA wilde. Ik had jarenlang de Nederlandse delegatie naar de internationale wiskundeolympiade begeleid. Dat was toen om het jaar in een Oostblokland. Ik kon daar in de keuken kijken en zien wat het betekent om onder een dictatuur te leven.

In het begin van mijn studietijd was ik nog pacifistisch ingesteld, maar dat is door die reizen veranderd. Daardoor keek ik anders tegen de krijgsmacht aan. Ik heb nooit spijt van mijn keuze gehad. Het moment dat ik naar de KMA ging, in 1984, beschouw ik als het keerpunt in mijn carrière. Het heeft mijn visie op wiskunde en wiskundeonderwijs totaal veranderd.”

Waarom kwam die verandering?

“In Leiden hield ik me voornamelijk bezig met wiskundestudenten. Er was ook wat serviceonderwijs. Die servicecolleges waren een slap aftreksel van analyse. Je deed wat sommetjes voor en vertelde iets over de wiskundige achtergronden. Je jaagde de stelling van Rolle en limieten met epsilon en delta er gewoon doorheen. Als ik daar achteraf op terug kijk, dan is dat volkomen dwaas geweest om dat op zo’n manier te doen. Die kinderen hadden daar niets aan en vonden het ook helemaal niet interessant of leuk.

Op de KMA gebruikten ze boeken die veel meer op toepassing gericht waren en veel minder op de wiskundige precisie. Dat was voor mij een eye-opener. Toen ben ik me

gaan afvragen hoe je wiskunde moet geven aan mensen die geen wiskunde gaan studeren. Dat betekende een totaal andere manier van college geven en leerstof opbouwen.”

Was er nog meer anders op de KMA?

“Ja, wiskunde was daar niet vanzelfsprekend. Toen ik er net werkte, vroeg de gouverneur — dat was de baas — waarom we eigenlijk al die wiskunde gaven en of we niet zonder konden. Dat vond ik ontzettend vreemd. Dat wiskunde überhaupt een vak is dat je moet verdedigen was vanuit mijn Leidse situatie volkomen ondenkbaar: natuurlijk moest iedereen wiskunde doen! Diezelfde mentaliteit tref je bij wiskundeleraren aan: we moeten dat vak geven, het is ontzettend belangrijk en in het buitenland hebben ze wel tien uur wiskunde per week. Maar wat wiskundeleraren zich niet afvragen is waarom ze bepaalde dingen geven. En wat voor soort wiskunde voor het overgrote deel van de leerlingen belangrijk is. Dat leerde ik op KMA zien.”

En waarom hadden ze wiskunde nodig op de KMA?

“Technische officieren moeten bijvoorbeeld kunnen berekenen of een brug nog sterk genoeg is om er een tank over te laten gaan. Daar heb je wiskunde voor nodig, maar natuurlijk niet de stelling van Rolle. Wiskunde is voor hen een instrument en allerlei dingen waar wij als wiskundigen groot belang aan hechten, interesseren hen helemaal niet.”

Was dat schrikken voor jou, als Leidse wiskundige?

“Schrikken niet, maar het was een omslag, een keerpunt. Ik merkte dat het belangrijk is om studenten alleen vaardigheden te leren waar ze iets aan hebben. Cadetten moesten bijvoorbeeld goed leren omgaan met Fourieranalyse. Maar onder welke voorwaarden een Fourierreeks precies convergeert, vinden ze niet belangrijk. Je moet ze daarvan alleen de resultaten vertellen, in welke gevallen dingen misgaan. Maar in de praktijk komen die gevallen bijna nooit voor. De cadetten hebben ook steeds die praktijk als controle. Als het niet goed is, dan zien ze dat onmiddellijk.”

Hoe werkte de afstemming met andere vakken?

“Technische officieren luchtvaart moesten veel aërodynamica leren, de theoretische kant daarvan is vrij pittig. Wij gaven dan

de nodige vectoranalyse parallel met de colleges aërodynamica. Dat werkte heel motiverend voor de cadetten. Dat is de ideale situatie om wiskunde als serviceonderwijs te geven. Op veel universiteiten gebeurt nu ook zo iets, maar daar is de kloof is toch groter. Vaak wordt serviceonderwijs als een soort vervelend corvee beschouwd, terwijl het juist heel uitdagend en leuk kan zijn.

In deze tijden van bezuinigingen en lage studentenaantallen is het belangrijk om te zorgen voor goed contact met andere opleidingen en te vragen wat ze willen dat hun studenten leren. Anders bestaat het gevaar dat die andere studies een streep door het serviceonderwijs halen en zelf die wiskundevakken er wel even bijdoen. Op de HTS is het zo gegaan. Daar doen ze het allemaal in de vakken zelf. Soms behandelen ze dan alleen heel specifieke toepassingen, zodat de wiskunde zijn kracht kwijtraakt. Studenten kunnen dan alleen bepaalde problemen oplossen, maar zijn hulpeloos als ze een andere variant tegenkomen. Dan kom je bij het realistische rekenen waar ze erg doorgeslagen zijn in die richting.”

Wanneer ben je je met wiskunde op scholen gaan bemoeien?

“Het heeft me altijd geïnteresseerd en ik was steeds op de een of andere manier betrokken bij wiskundeonderwijs. Rond 2002 constateerden mijn collega Rob Bosch en ik dat cadetten steeds vaker basisvaardigheden misten. Ze wisten niets meer van haakjes wegwerken en konden bijvoorbeeld niet werken met goniometrische functies en logaritmen. Rob en ik besloten om een boek te maken waarin dat allemaal goed werd gedaan.”

Maakten jullie dat boek voor de KMA?

“Nee, het was breder bedoeld voor de aansluiting van VWO naar universiteit. Dat boek is uiteindelijk het *Basisboek wiskunde* geworden. We hebben dat boek opgezet vanuit onze basisfilosofie over hoe studenten het beste leren. Op de KMA merkten we dat het maken van oefeningen het beste werkte. Je kunt nog zo helder college geven, ze moeten het leren door sommen te maken. Toen hebben we een revolutionair concept voor het boek bedacht: op de linkerbladzijden opgaven, op de rechterbladzijden heel kort de theorie. Studenten hebben de onderwerpen al eens gehad, laat ze daarom maar gewoon beginnen met de sommen. Dan lopen ze vanzelf vast en kijken ze rechts hoe het in elkaar zit.”

Hoe werd er gereageerd op jullie boek?

“In het begin was er veel gekrakeel. Veel leraren en didactici vonden het schandelijk wat we deden: oefenen was volgens hen nergens voor nodig. Uiteindelijk is het boek opgepikt door uitgever Pearson Education Benelux en een enorm succes geworden. Per jaar worden er tussen de 5000 en 6000 exemplaren verkocht en er komt binnenkort een Duitse vertaling. Op het *Basisboek wiskunde* ben ik nog steeds ontzettend trots, ik zie het als mijn grootste succes.”

Vond je het niet lastig dat je bij het rekenonderwijs in gekrakeel terecht kwam?

“Dat was vervelend, maar ik vond de situatie belangrijk genoeg. Ik heb altijd geprobeerd de persoonlijke verhoudingen goed te houden, het ging echt om de inhoud. Ik denk dat de strijd uiteindelijk heel goed is geweest. Allerlei veranderingen zijn in gang gezet. Laten we hopen dat op den duur de instaptoetsen en bijspijker cursussen op de universiteiten overbodig zijn. Ik heb er vertrouwen in dat het goed komt.”

Als je niet naar de KMA was gegaan, zou je je dan in deze richting hebben ontwikkeld?

“Je weet het nooit zeker, maar ik denk het niet.”

Heeft u een goede suggestie voor een (Nederlandse) wiskundige met een bijzonder keerpunt in zijn of haar carrière? Stuur dan een e-mail naar ionica.smeets@gmail.com.

Pieter Naaijken

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

p.naijken@math.ru.nl

Onderzoek

Topologische kwantumcomputers: rekenen met vlechten

Topologische kwantumcomputers bieden een alternatief voor meer gebruikelijke modellen van kwantumcomputers, die in de praktijk met grote technische moeilijkheden kampen. Topologische kwantumcomputers gebruiken topologische eigenschappen van bepaalde kwantumsystemen om berekeningen te doen. Pieter Naaijken, promovendus in Nijmegen, laat zien dat zulke systemen op een elegante manier kunnen worden beschreven door modulaire categorieën.

Kwantumcomputers gebruiken de wetten van de kwantummechanica om berekeningen te doen. Het idee van een kwantumcomputer gaat terug tot begin jaren '80. De wiskundige Manin [16] (pp. 69–79) en de fysicus Feynman [5] vroegen zich onafhankelijk van elkaar af of het mogelijk was om de wetten van de kwantummechanica te gebruiken om kwantumsystemen te simuleren. Dit soort simulaties zijn op een gewone computer niet te doen vanwege de computationele complexiteit. Een natuurlijke vraag is dan of omgekeerd kwantummechanica gebruikt kan worden om grote berekeningen te doen. Dit is precies wat een kwantumcomputer doet. Er wordt gebruik gemaakt van kwantummechanische effecten om operaties uit te voeren die in een gewone computer niet mogelijk zijn, zoals het rekenen met superposities van toestanden.

David Deutsch gaf in 1985 een meer concrete vorm aan het idee van een kwantumcomputer [4]. Hij introduceerde een model voor kwantumcomputers en beschreef een 'universele kwantumcomputer', een computer waarop in principe elk kwantumalgoritme uitgevoerd kan worden. De interesse kwam echter pas goed op gang toen Shor een algo-

ritme voor een kwantumcomputer publiceerde waarmee getallen gefactoriseerd kunnen worden [28]. Dit algoritme is veel efficiënter, in termen van het aantal benodigde operaties, dan de bekende 'klassieke' algoritmes.

In de praktijk is het nog niet mogelijk gebleken om iets anders dan de simpelste kwantumcomputers, bijvoorbeeld eentje die het getal 15 kan factoriseren [30], te bouwen. Een groot probleem bij het realiseren van ingewikkeldere kwantumcomputers is dat de systemen erg gevoelig zijn voor interactie met de omgeving, hetgeen leidt tot *decoherentie*. Een van de voorstellen om dit probleem aan te pakken is om *topologische* eigenschappen van een systeem te gebruiken. Op deze manier hoopt men het systeem beter te kunnen beschermen tegen decoherentie. Dit kan gezien worden als een vorm van *hardware* foutcorrectie.

Veel van de literatuur over dit onderwerp is gericht op fysici. Hier richten we ons op de essentie van de achterliggende wiskunde. Eerst bekijken we de wiskundige formulering van een kwantumcomputer. In de volgende secties behandelen we zogenaamde *anyonen*, en hoe hiermee een kwantumberekening kan worden gedaan.

Daarna wordt beschreven hoe de algebraïsche eigenschappen van anyonen gegeven worden door middel van een *modulaire tensorcategorie*. Tenslotte komt een eenvoudig model, dat van Fibonacci anyonen, aan bod.

De literatuur over kwantumcomputers is inmiddels erg uitgebreid. Voor de geïnteresseerde lezer geven we daarom aan het eind van het artikel een selectie uit de literatuur die als startpunt kan worden gebruikt voor meer informatie. Resultaten in dit artikel die zonder referentie worden vermeld, zijn terug te vinden in één van deze referenties.

Kwantumcomputers

De toestandsruimte van een kwantummechanisch systeem wordt beschreven door een (complexe) Hilbertruimte $\mathcal{H}$. Voor toepassingen op kwantumcomputers is het voldoende om te kijken naar het geval waar $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^{2^n}$, voor zekere n . We zien elke tensorfactor $\mathbb{C}^2$ als een *qubit*, het kwantumalogon van een bit. Om aan te sluiten bij de fysische literatuur, gebruiken we de Dirac notatie $|\psi\rangle$ voor een vector in $\mathcal{H}$. Een basis van de qubit wordt als $|0\rangle, |1\rangle$ genoteerd, om de analogie met bits te benadrukken. Een *toestand* in het systeem is dan een eenheidsvector (modulo fase) in $\mathcal{H}$, of equivalent, een projectie van rang 1. De basisvectoren $|0\rangle$ en $|1\rangle$ zijn doorgaans eigentoestanden van een vooraf gekozen observabele (zoals hieronder

beschreven), bijvoorbeeld de spin van een deeltje in de z -richting. De toestand van het systeem is in het algemeen een lineaire combinatie van deze basisvectoren. Dit is in feite wat kwantumcomputers zo krachtig maakt, omdat in een klassieke computer dit niet mogelijk is.

We kunnen informatie over de toestand verkrijgen door het meten van *observabele*n. Een observabele komt overeen met een zelfgeadjungeerde matrix werkend op de toestandsruimte. In de kwantummechanica is het, anders dan in de klassieke fysica, niet mogelijk om door metingen de oorspronkelijke toestand precies te achterhalen. Een meting zorgt ervoor dat het systeem instantaan in een *eigentoestand* van de gemeten observabele komt. Als $|\psi\rangle$ de toestand van het systeem is, en $|\chi\rangle$ een eigentoestand van de te meten observabele, bijvoorbeeld $|\chi\rangle = |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$, dan is de kans dat het systeem na meting naar de toestand $|\chi\rangle$ overgaat volgens de wetten van de kwantummechanica gelijk aan $|\langle\chi|\psi\rangle|^2$. Hier is $\langle\chi|\psi\rangle$ het inproduct van de twee toestandsvectoren in de Hilbertruimte [33]. Zoals eerder vermeld zijn de vectoren $|0\rangle$ en $|1\rangle$ over het algemeen eigenvectoren van een zekere observabele S . Een meting van deze observabele wordt ook wel een *meting in de computationele basis* genoemd. Als de toestand gegeven wordt door $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, met $|a|^2 + |b|^2 = 1$, levert zo'n meting 0 op met kans $|a|^2$ en 1 met kans $|b|^2$.

De uitkomst van een algoritme kan worden bepaald door een meting in de computationele basis van de toestand. De uitkomst van een algoritme is dus *probabilistisch*. De meeste algoritmes, zoals het factoriseren van getallen, geven het correcte antwoord met een bepaalde kans p . Door het algoritme een aantal keren te herhalen, kan het antwoord met grotere zekerheid vastgesteld worden. Zelfs als dit in ogenschouw wordt genomen, blijven sommige kwantumalgoritmes, zoals het ontbinden in priemfactoren, veel efficiënter dan hun klassieke tegenhangers.

Het systeem kan van een toestand $|\psi\rangle$ in een andere toestand $|\psi'\rangle$ overgaan door middel van *unitaire evolutie*. Dat betekent dat er een unitaire matrix U is [34], zodat

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle.$$

We zullen de werking van een unitaire matrix op een vector ook wel een *unitaire operatie* noemen. Een unitaire operatie behoudt het inproduct op de Hilbertruimte, en in het bijzonder dus de norm van een vector.

Een *kwantumpoort* is nu een unitaire operatie werkend op één of twee qubits. Een belangrijke kwantumpoort is de *Hadamard-poort*. De bijbehorende unitaire matrix is

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deze poort maakt het mogelijk om superposities van de basistoestanden te verkrijgen, bijvoorbeeld $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Bij een meting in de computationele basis is de kans op 0 als uitkomst gelijk aan de kans op 1 als uitkomst, namelijk $\frac{1}{2}$.

Een berekening op een kwantumcomputer bestaat uit drie stappen:

1. *Initialisatie*: breng het systeem in een bekende toestand, bijvoorbeeld $|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$.
2. *Berekening*: het algoritme wordt uitgevoerd door het toepassen van unitaire operaties op de qubits.
3. *Meting*: bepaal de uitkomst door een meting te doen.

Hoe elke stap in de praktijk uitgevoerd kan worden, hangt af van het specifieke kwantumsysteem, en valt buiten het bereik van dit artikel.

Het belangrijkste voordeel van kwantumcomputers is *kwantumparallelisme*. Willen we op een klassieke computer een eigenschap van de grafiek van een functie weten, dan rest ons niets anders dan eerst elke waarde uit te rekenen. Op een kwantumcomputer kan dit in één stap. We laten dit zien in het eenvoudigste geval. Stel dat $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Dan is het mogelijk om een unitaire operator U_f op $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ te vinden, zodat $U_f(|x\rangle \otimes |0\rangle) = |x\rangle \otimes |f(x)\rangle$, waarbij $x = 0, 1$. Met behulp van U_f is het dus mogelijk om de grafiek van f te bepalen. Maar we kunnen deze operator ook op een *superpositie* van de toestanden toepassen, bijvoorbeeld op $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$. Deze toestand kan met de Hadamardpoort verkregen worden. We vinden nu

$$U_f \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle + |1\rangle \otimes |f(1)\rangle).$$

Met één operatie hebben we nu informatie over de grafiek van f gevonden.

In een algoritme voor een kwantumcomputer is in principe *elke* unitaire operatie toegestaan. Dit is in de praktijk niet realiseerbaar. Het blijkt echter voldoende te zijn om een manier te hebben om een willekeurige unitaire

operatie te benaderen. Stel dat we een *eindige* verzameling $\mathcal{U}$ kwantumpoorten hebben. Zo'n verzameling heet *universeel*, als voor elke poort $U \in \mathcal{U}$, zijn inverse $U^* \in \mathcal{U}$, en de groep voortgebracht door deze poorten *dicht* ligt in $SU(2^n)$, de groep van complexe $2^n \times 2^n$ matrices met determinant 1 [35]. Deze conditie geeft aan dat we een operatie uit $SU(2^n)$ willekeurig dicht kunnen benaderen. Met deze voorwaarden geldt de volgende stelling:

Stelling 1 (Solovay-Kitaev). *Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Zij $\mathcal{U}$ een universele verzameling kwantumpoorten. Dan is er een c , zodanig dat er voor elke $V \in SU(d)$ een ε -benadering U , bestaande uit $O(\log^c(1/\varepsilon))$ poorten uit $\mathcal{U}$, is.*

De constante c kan op 4 geschat worden, maar verbeteringen hierop zijn mogelijk. De stelling geeft ook een algoritme om voor een willekeurige unitaire operatie V zo'n ε -benadering te vinden. Een toegankelijk bewijs en beschrijving van het algoritme is te vinden in [3]. In het algemeen is het erg lastig om te bewijzen dat een bepaalde verzameling universeel is. Desondanks zijn er wel enkele voorbeelden, bijvoorbeeld door de Hadamard-, de $\pi/8$ - en de CNOT-poort te nemen. De $\pi/8$ poort [36] stuurt $|0\rangle$ naar $|0\rangle$ en $|1\rangle$ naar $e^{i\pi/4}|1\rangle$. De CNOT-poort U werkt op twee qubits: $U(|i\rangle \otimes |j\rangle) = |i\rangle \otimes |i \oplus j\rangle$, waar $i, j = 0, 1$ en $\oplus$ is optelling modulo 2.

Het is echter niet genoeg om een willekeurige unitaire operatie te kunnen benaderen. In de praktijk is het vaak onmogelijk om een universele poort $U \in \mathcal{U}$ exact uit te voeren. Dit introduceert nieuwe fouten in de berekening. Verder speelt het probleem van *decoherentie*. Interacties met de omgeving zorgen ervoor dat de toestand van het systeem verandert, zelfs als we geen operaties uitvoeren. In analogie met klassieke computers zijn er foutcorrectieprotocollen ontwikkeld die deze problemen ondervangen. Met behulp van deze methodes is het mogelijk om *fout-tolerante kwantumberekeningen* te doen. Dit wil zeggen dat we elk algoritme willekeurig precies kunnen uitvoeren.

Stelling 2 (Drempelstelling). *Stel dat we een universele verzameling kwantumpoorten $\mathcal{U}$ hebben, zó dat de kans p dat een poort $U \in \mathcal{U}$ niet exact wordt uitgevoerd voldoet aan $p < p_{th}$. Dan zijn fout-tolerante kwantumberekeningen mogelijk.*

De meest optimistische schatting voor p_{th} is 10^{-3} , dit is echter in de praktijk nog verre van haalbaar. Het is mogelijk om een boven-

grens te geven voor het aantal kwantumporten dat in de fout-tolerante implementatie van het algoritme nodig is. Voor een kwantumcircuit bestaande uit $p(n)$ poorten en kans op fout $\varepsilon > 0$ wordt de bovengrens gegeven door

$$O(\text{poly}(\log p(n)/\varepsilon)p(n)),$$

waar poly een polynoom van vaste graad is. Dus het aantal poorten in een fout-tolerant kwantumcircuit hangt poly-logaritmisch af van het aantal poorten in het oorspronkelijke circuit.

Anyonen

Beschouw een kwantummechanisch systeem met n deeltjes. In ruimtedimensie 3 en groter gedragen deeltjes zich óf symmetrisch (*bosonen*) óf anti-symmetrisch (*fermionen*) onder verwisseling. In de beschrijving van hierboven betekent dat dat de toestand (een eenheidsvector) gelijk blijft, respectievelijk met -1 wordt vermenigvuldigd als we twee deeltjes omwisselen.

In 1971 toonden Laidlaw en Morette DeWitt aan dat het aantal mogelijkheden afhangt van de topologie van de klassieke configuratieruimte van ononderscheidbare deeltjes [13]. Deze topologische ruimte beschrijft de posities van de deeltjes, waarbij twee deeltjes niet op dezelfde plek kunnen zijn en de klassieke toestand niet verandert onder permutatie van de deeltjes. Leinaas en Myrheim bekeken in 1977 de situatie in twee ruimtedimensies [14]. In plaats van alleen een plus- of minteken, wordt de toestand dan met een willekeurige fasefactor $e^{i\theta}$ vermenigvuldigd. Wilczek gaf in 1982 de naam *anyon* (omdat 'elke waarde' is toegestaan) aan zulke deeltjes [32]. In plaats van een fasefactor kan ook een meer algemene unitaire transformatie mogelijk zijn. In dit geval kan het uitmaken in welke volgorde anyonen worden verwisseld. Men spreekt dan van *niet-abelse anyonen*.

De reden dat er in twee ruimtedimensies meer mogelijkheden zijn, is topologisch van aard. Beschouw, om dit in te zien, een aantal deeltjes in het vlak (Figuur 1). De posities van de anyonen vormen een pad in de ruimte-tijd, de zogeheten *wereldlijnen*. In de figuur zijn de wereldlijnen van de deeltjes getekend: bovenaan de positie van de deeltjes op $t = 0$, en onderaan op $t = 1$. Ze vormen zo een *vlecht*. Het punt is nu dat er twee *verschillende* manieren zijn om twee deeltjes om te wisselen. De vlecht links in de figuur is topologisch anders dan de vlecht in het midden. Als we van de ene vlecht naar de andere willen, zullen de wereldlijnen op een zeker punt moeten kruisen. Dit betekent echter dat de deeltjes botsen, wat niet is toegestaan. In meer ruimtedimensies is dit niet meer het geval [37]. Twee keer deeltje 1 en 2 omwisselen (of equivalent: het ene deeltje rondom het andere deeltje bewegen), moet dan gelijk zijn aan de identieke operatie. Hieruit volgt het onderscheid in bosonen en fermionen.

In twee dimensies zijn er dus a priori meer mogelijkheden. Het verwisselen van twee anyonen heeft als effect dat de toestand vermenigvuldigd wordt met een fasefactor $e^{i\theta}$, of algemener, de toestand gaat met een unitaire transformatie over in een nieuwe toestand. Stel dat het systeem in een toestand $|\psi\rangle$ is. Schrijf σ_1 voor het verwisselen van de anyonen op positie 1 en 2, en σ_2 voor het verwisselen van de anyonen op positie 2 en 3, et cetera. Bij elke σ_i , hoort dan een unitaire operatie $\pi(\sigma_i) = U_i$, zodat het systeem van toestand $|\psi\rangle$ naar $U_i|\psi\rangle$ overgaat. Schrijf $\sigma_2\sigma_1$ voor het eerst uitvoeren van σ_1 en dan σ_2 . Het is dan duidelijk dat moet gelden

$$\pi(\sigma_2\sigma_1)|\psi\rangle = U_2U_1|\psi\rangle = \pi(\sigma_2)\pi(\sigma_1)|\psi\rangle.$$

Dit levert een *unitaire representatie van de vlechtgroep* op. De vlechtgroep B_n wordt voortgebracht door voortbrengers $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

en de Artin relaties: $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ als $|i - j| \geq 2$, en $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$. Als de representatie abels is, spreken we van *abelse anyonen*.

De uiteindelijke toestand hangt alleen van de vlecht en de begintoestand af. Dit is de reden dat topologische kwantumcomputers beter beschermd zijn tegen invloeden van buitenaf. Een kleine verstoring in het systeem kan er voor zorgen dat de anyonen een iets ander pad volgen, maar de vlecht blijft topologisch hetzelfde. Het probleem dat poorten met een kans p niet exact worden uitgevoerd kan hiermee worden ondervangen. Men kan dan de vervlechtingsooperaties gebruiken als (deel van) de verzameling kwantumporten $\mathcal{U}$.

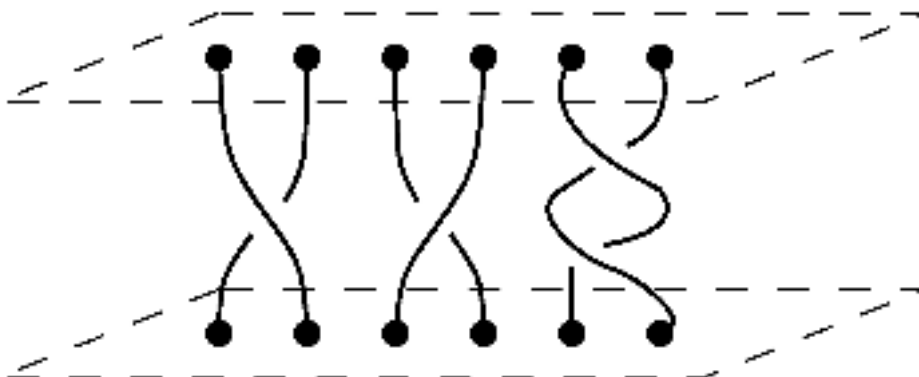
Een topologische kwantumcomputer

Het idee van een topologische kwantumcomputer gaat terug naar Freedman [6] en Kitaev [12]. De aanpak van Freedman gaat via topologische kwantumveldentheorie, zie [7] voor een introductie. Kitaevs aanpak gebruikt de eigenschappen van systemen met anyonen. Hij betoogt ook dat de topologische aard van anyonen zorgt voor goede eigenschappen met betrekking tot foutvrije berekeningen. De twee aanpakken liggen dicht bij elkaar dan op het eerste gezicht lijkt, zie bijvoorbeeld [27]. In beide gevallen zijn modulaire categorieën, zoals hieronder beschreven, belangrijk.

De gedachte is dan om een systeem met anyonen te gebruiken om berekeningen mee te doen. Volgens de beschrijving hierboven zijn er drie stappen noodzakelijk. Het moet mogelijk zijn om het systeem in een bekende begintoestand te brengen, we moeten door middel van unitaire operaties de toestand kunnen veranderen, en tenslotte moet er een manier zijn om het resultaat uit te lezen door middel van een meting.

Ten eerste de belangrijkste stap: het uitvoeren van kwantumalgoritmes. Het cruciale punt is dat door het vervlechten van anyonen de toestand van het systeem door middel van een unitaire transformatie overgaat in een nieuwe toestand. Stap 2 uit de beschrijving van een kwantumcomputer hierboven kan dus uitgevoerd worden door het vervlechten van anyonen.

Om weer elk kwantumalgoritme te kunnen implementeren, moet elke unitaire operatie op de toestandsruimte willekeurig goed benaderd kunnen worden. Er zijn in dit geval twee verschillende aanpakken. In de ene gebruikt men systemen waar de vervlechtingen elke unitaire operatie kunnen benaderen. Wiskun-



Figuur 1 Een vervlechting van 6 anyonen. Dit is de vlecht $\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_5^2$, waarbij $\sigma_i, i = 1 \dots 5$ de generatoren van de vlechtgroep B_6 zijn.

dig gezien betekent dit dat representatie dicht ligt in $U(d)$, waarbij d de dimensie is van de toestandsruimte. In specifieke modellen is dit vaak erg lastig om te bewijzen, desalniettemin zijn er wel enkele resultaten in die richting. Freedman, Larsen en Wang bijvoorbeeld hebben dit aangetoond voor bepaalde representaties die voorkomen in de topologische Chern-Simons theorie [8]. Als eenmaal bewezen is dat de representatie dicht ligt, kunnen we met behulp van de Solovay-Kitaev stelling bij een unitaire operatie de bijbehorende vervlechting vinden die deze operatie benadert.

Als de representatie van de vlechtgroep niet dicht ligt, zal een aantal operaties moeten worden toegevoegd, die samen met de vervlechtingen dicht liggen in de unitaire groep. Een voorbeeld hiervan zijn modellen gebaseerd op de kwantumdubbel $D(G)$ van bepaalde eindige groepen [17]. Deze aanpak sluit aan bij de oorspronkelijke aanpak van Kitaev.

Om de initialisatie en uitlezing van een topologische kwantumcomputer te beschrijven, is het noodzakelijk om te weten hoe we informatie kunnen opslaan in een systeem met anyonen. Met andere woorden, wat is het analoog van een qubit? Abstract gezien verandert er weinig: de toestandsruimte is weer een Hilbertruimte, waarin we een geschikte basis kunnen kiezen. We kunnen echter wat concreter zijn door het begrip *fusie* te introduceren.

Als we twee anyonen bij elkaar brengen, kunnen deze fuseren. De *fusieregels* geven aan welke mogelijkheden er zijn. Door twee deeltjes te laten fuseren, en het resultaat te meten, kunnen we informatie krijgen over de berekening. We gaan hier later iets dieper op in.

Samenvattend kan gesteld worden dat het mogelijk is om kwantumberekeningen te doen met behulp van topologische eigenschappen van een systeem. Om aan te geven wat de voordelen zijn ten opzichte van de ‘conventionele’ kwantumcomputers, komen we terug op het probleem van decoherentie. In een topologische kwantumcomputer worden kwantumpoorten uitgevoerd door het vervlechten van anyonen, een operatie die alleen van de topologie van de vlecht afhangt. Een kleine verstoring levert (topologisch gezien) dezelfde vlecht op, en dus dezelfde operatie. Stel dat één van de operaties het roteren van een basisvector over 90° is. In tegenstelling tot in een ‘conventionele’ kwantumcomputer, is het hier niet mogelijk dat we iets te ver door roteren.

Er zijn nog andere factoren van belang, behalve het uitvoeren van de kwantum-

poorten. Door thermische fluctuaties bijvoorbeeld, kunnen anyon-antianyon paren ontstaan, die de berekening beïnvloeden. Ook hiervoor kan beargumenteerd worden dat onder gunstige omstandigheden, deze invloeden miniem zijn [12].

Modulaire tensorcategorieën

De structuur van anyonen kan puur algebraïsch beschreven worden door een *modulaire tensorcategorie* (MTC) [1, 9, 29]. Dit is in essentie de structuur die er achter topologische kwantumcomputers verborgen zit. Aan de andere kant komen MTC’s ook in andere gebieden van de wiskunde voor, bijvoorbeeld bij representaties van kwantumgroepen, invarianten van 3-variëteiten en topologische kwantumveldentheorie [9, 29]. Dit leidt tot interessante verbanden tussen op het oog zeer verschillende vakgebieden. Aan de andere kant zijn er systemen die een onderliggende structuur van een MTC hebben. Deze leveren mogelijk nieuwe kandidaten op voor topologische kwantumcomputers. Voor de duidelijkheid geven we niet de meest algemene definitie van een MTC, en laten we compatibiliteitseisen tussen de verschillende eigenschappen achterwege. De originele motivatie van Turaev, die als eerste een MTC definieerde, kwam uit de conforme veldentheorie.

Een categorie $\mathcal{C}$ bestaat uit een klasse *objecten*, en voor elk paar objecten X, Y een verzameling *morfismen* van X naar Y , $\text{Hom}(X, Y)$. Als $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow Z$ twee morfismen zijn, dan is er een samenstelling $g \circ f : X \rightarrow Z$. Deze samenstellingsoperatie is associatief. Verder is er voor elk object X een identiteitsmorfisme $\text{id}_X \in \text{Hom}(X, X)$.

Het standaardvoorbeeld is de categorie **Set**, met als objecten verzamelingen, en als morfismen functies tussen verzamelingen.

Als we $\mathcal{C}$ noteren voor de categorie die de anyonen gaat beschrijven, kunnen we intuïtief de objecten van $\mathcal{C}$ zien als verschillende configuraties van anyonen. De morfismen tussen twee objecten zijn dan de wereldlijnen van de anyonen, als de ene configuratie in de andere wordt overgebracht.

Behalve de basisstructuur van een categorie, is in een MTC een *tensorproduct* gedefinieerd. Dit is een zogeheten *bifunctor*: voor elk tweetal objecten X, Y is er een object $X \otimes Y$, evenzo is er een tensorproduct voor morfismen. Het tensorproduct voldoet aan een aantal eisen, zoals associativiteit [38]: $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$, voor alle X, Y, Z . Verder is er een eenheid $\mathbf{1}$, zodat $X \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes X = X$. In een *gevlochten* tensorcategorie is er voor elk paar objecten X, Y een iso-

morfisme $\varepsilon_{X,Y} \in \text{Hom}(X \otimes Y, Y \otimes X)$. Zo’n vervlechting geeft aan wat er gebeurt als je twee objecten ‘omwisselt’.

Definitie 3. Zij $\mathcal{C}$ een *gevlochten tensorcategorie*. Het centrum $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ is de volle deelcategorie met objecten X [39], waarvoor geldt dat $\varepsilon_{X,Y} \circ \varepsilon_{Y,X} = \text{id}_{Y \otimes X}$ voor alle objecten Y van $\mathcal{C}$.

Een gevlochten tensorcategorie heet *symmetrisch* als $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Het centrum is een maat voor hoe ‘triviaal’ de vervlechting is.

Een andere eigenschap is *rigiditeit*. Voor elk object X , is er een *duaal* object $\bar{X}$ [40], samen met morfismen $\mathbf{1} \rightarrow X \otimes \bar{X}$ en $\bar{X} \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$. Het is mogelijk dat een object gelijk is aan zijn duale, in het bijzonder geldt $\bar{\mathbf{1}} \cong \mathbf{1}$. We eisen ook dat de categorie een *twist* heeft: voor elk object X een isomorfisme $\Theta_X \in \text{End}(X) := \text{Hom}(X, X)$. Deze twist maakt het mogelijk om X met zijn dubbele duale $\bar{\bar{X}}$ te identificeren. Fysisch komt de twist neer op rotatie van een aantal anyonen om een centrale as.

Definitie 4. Een (strikte) *rigide tensorcategorie met een twist* heet een *lintcategorie* (*Engels: ribbon category*).

Een belangrijke eigenschap van lintcategorieën is dat het mogelijk is om het spoor van een morfisme en de dimensie van een object in de categorie te definiëren. In de categorie van eindigdimensionale vectorruimtes, die een lintcategorie is, komen deze begrippen overeen met het spoor van een lineaire afbeelding, en de dimensie van een vectorruimte.

In de context van anyonen heeft de duale van een object een fysische interpretatie als het antideeltje van X . Het morfisme $\mathbf{1} \rightarrow X \otimes \bar{X}$ valt dan te interpreteren als het creëren van een deeltje/antideeltje paar uit het vacuüm. Het bijbehorende morfisme $\bar{X} \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ is dan niets anders dan het annihileren van het paar.

Tenslotte is er nog de lineaire structuur, in dit geval over het lichaam $\mathbf{C}$. Voor elk paar objecten X, Y is $\text{Hom}(X, Y)$ een vectorruimte over $\mathbf{C}$. Verder eisen we dat samenstelling van morfismen bilineair is, evenals het tensorproduct. Het is ook mogelijk om *directe sommen* van objecten en morfismen te nemen, precies zoals we directe sommen van bijvoorbeeld Hilbertruimtes kunnen nemen. Dus, voor elk tweetal objecten X, Y is er een directe som $X \oplus Y$, met een overeenkomende operatie om de directe som van morfismen te nemen. In een tensorcategorie moet de tensoroperatie compatibel zijn met het nemen van directe sommen,

$$(X \oplus Y) \otimes Z \cong X \otimes Z \oplus Y \otimes Z.$$

In de categorie van anyonen beschrijft een directe som een samengesteld object opgebouwd uit eenvoudigere objecten.

Een object heet *irreducibel*, of *enkelvoudig*, als het niet op een niet-triviale manier te schrijven is als directe som van objecten. In de huidige situatie geldt een variant op Schurs Lemma: een object X is irreducibel, dan en slechts dan als $\text{End}(X) \cong \mathbf{C}$. We eisen dat de eenheid $\mathbf{1}$ voor de tensoroperatie *irreducibel* is.

Een categorie heet *half-enkelvoudig*, ruwweg, als deze directe sommen heeft en elk object te schrijven is als een directe som van enkelvoudige objecten. Kiezen we voor elke equivalentieklasse van irreducibele objecten een representant X_k , dan geldt in een half-enkelvoudige tensorcategorie in het bijzonder

$$X_i \otimes X_j \cong \bigoplus_k N_{ij}^k X_k.$$

Hier zijn de N_{ij}^k positieve gehele getallen. In formeel geeft dit aan hoe vaak het object X_k voorkomt in het tensorproduct $X_i \otimes X_j$. Een bekend geval van deze situatie is de categorie van eindig-dimensionale unitaire representaties van een compacte groep G , $\text{Rep}_f G$. Deze categorie is half-enkelvoudig: elke eindig-dimensionale unitaire representatie kan als een directe som van irreducibele representaties geschreven worden.

Definitie 5. Een fusie categorie is een half-enkelvoudige, $\mathbf{C}$ -lineaire categorie met eindigdimensionale Hom-sets, eindig veel, tot op isomorfisme, irreducibele objecten en irreducibele tensoreenheid $\mathbf{1}$. Tenslotte moet de categorie ook dualen hebben.

Een fusie categorie is dan een modulaire categorie, als de vervlechting *niet gedegene-reerd* is. Dit houdt in dat het centrum $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ triviaal is.

Definitie 6. Een modulaire tensorcategorie is een fusie categorie die tevens een lintcategorie is, waarvoor geldt dat $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ triviaal is: de enige objecten in $\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$ zijn van de vorm $\mathbf{1} \oplus \dots \oplus \mathbf{1}$.

De term *modulair* komt van het feit dat het in een modulaire categorie mogelijk is om twee matrices S en T te definiëren die een eindigdimensionale projectieve representatie van de modulaire groep $SL(2, \mathbf{Z})$ de-

finiëren [29, 31]. De modulariteitseis wordt vaak in termen van deze matrix S gegeven. De conditie is dan dat S inverteerbaar is. Dit is equivalent aan de definitie hier [26].

Merk op dat de vervlechting $\varepsilon_{\rho, \sigma} \circ \varepsilon_{\sigma, \rho}$ kan worden geïnterpreteerd als het deeltje ρ eenmaal om σ winden. De modulariteitseis maakt het mogelijk om verschillende soorten anyonen te onderscheiden van elkaar, door ze te omwinden met bekende testdeeltjes.

Tenslotte is er nog een generalisatie van Hermitische conjugatie: de $*$ -operatie. De $*$ -operatie is een contravariante functor, wat inhoudt dat $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, die involutief is: $(f^*)^* = f$. De $*$ -operatie heet *positief*, als $f^* \circ f = 0$ impliceert $f = 0$. Een categorie met een positieve $*$ -operatie heet *unitair*.

In een modulaire tensorcategorie is het mogelijk om op een canonieke manier representaties van de vlechtgroep B_n te construeren. Neem een object X . Dan is $\text{End}(X^{\otimes n})$ een eindigdimensionale vectorruimte. Hier is $X^{\otimes n} = X \otimes \dots \otimes X$, het tensorproduct van n kopieën. Definieer een representatie π_X^n van B_n door

$$\pi_X^n(\sigma_i) f := (\text{id}_X^{\otimes(i-1)} \otimes \varepsilon_{X, X} \otimes \text{id}_X^{\otimes(n-i-1)}) \circ f,$$

met $f \in \text{End}(X^{\otimes n})$. In een unitaire modulaire categorie kan $\text{End}(X^{\otimes n})$ van een inproduct worden voorzien, zodat het een Hilbertruimte wordt. De representatie is dan unitair. De studie van deze representatie is interessant voor de toepassing op topologische kwantumcomputers. Als de representatie dicht ligt in $U(\text{End}(X^{\otimes n}))$, of in ieder geval dicht in de unitaire groep van een deelruimte die qubits kan beschrijven, is universele kwantumberekening mogelijk. Is dit niet het geval, dan zullen de vervlechtingen aangevuld moeten worden met andere operaties.

Fibonacci anyonen

Het eenvoudigste voorbeeld van een univer-

sele topologische kwantumcomputer is dat van de zogeheten Fibonacci anyonen [24]. De enkelvoudige objecten zijn het vacuüm $\mathbf{1}$ en een anyon τ . De enige niet-triviale fusieregel is

$$\tau \otimes \tau = \mathbf{1} \oplus \tau.$$

Verder geldt $\bar{\tau} = \tau$. We beschrijven hoe we een qubit kunnen zien in dit model, en hoe we kwantumpoorten kunnen benaderen door vervlechtingen.

Er zijn drie anyonen nodig om een qubit te beschrijven. Nemen we drie anyonen met label τ , dan geven de fusieregels

$$(\tau \otimes \tau) \otimes \tau = (\mathbf{1} \oplus \tau) \otimes \tau = \tau \oplus \tau \oplus \mathbf{1}.$$

Dit is als volgt te interpreteren. Stel dat we drie τ -anyonen hebben, als in Figuur 2, en we fuseren eerst de onderste twee anyonen met elkaar, en dan het resultaat met de overgebleven anyon, dan kunnen we een τ -anyon overhouden op twee verschillende manieren, of $\mathbf{1}$ op één manier. De toestandsruimte is dus driedimensionaal. In het algemeen geldt in dit model: de toestandsruimte van n τ -deeltjes, heeft dimensie $\text{Fib}(n+1)$, het $n+1$ -ste Fibonacci getal. Het idee is om een qubit te beschrijven door een basis van twee van deze drie toestanden. Door vervlechting van de drie anyonen kunnen we unitaire transformaties op de *tweedimensionale* qubit bewerkstelligen.

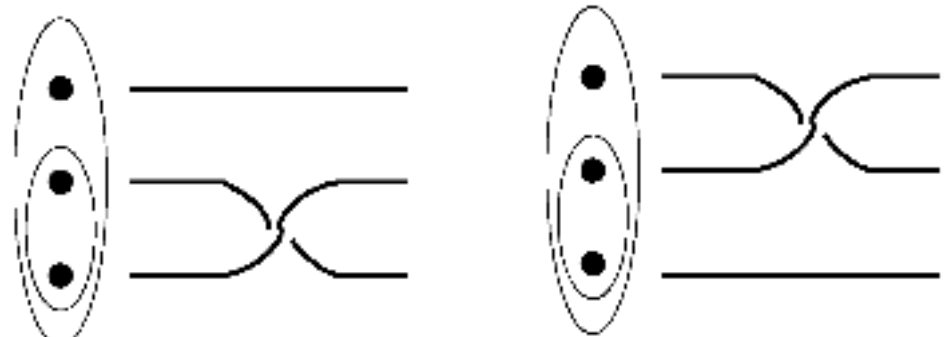
Uit de axioma's voor een MTC, en door te gebruiken dat $\mathbf{1}$ en τ irreducibel zijn, volgt

$$\text{Hom}((\tau \otimes \tau) \otimes \tau, \tau) \cong \mathbf{C}^2,$$

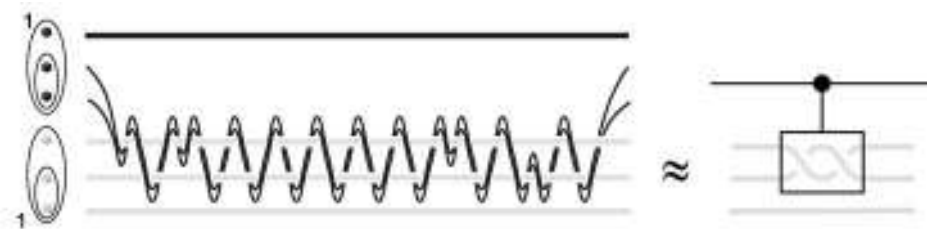
$$\text{Hom}((\tau \otimes \tau) \otimes \tau, \mathbf{1}) \cong \mathbf{C},$$

als vectorruimtes. Deze vectorruimtes heten *fusieruimtes*, ze beschrijven hoe de anyonen kunnen fuseren. De fusieruimte van $(\tau \otimes \tau) \otimes \tau$ is de directe som van de fusieruimtes, dus isomorf aan $\mathbf{C}^2 \oplus \mathbf{C}$. Het centrale idee is om deze structuur te gebruiken om de qubit te beschrijven.

In deze vectorruimte kiezen we een basis.



Figuur 2 Een qubit in het Fibonacci model, samen met de twee vervlechtigingsoperaties op de qubit. Deze operaties, samen met de inverses, kunnen elke unitaire operatie op de qubit willekeurig dicht benaderen.



Figuur 3 Een benadering van een *gecontroleerde vervlechting*. De vervlechting van de anyonen uit de onderste qubit wordt alleen uitgevoerd, als de bovenste qubit in de toestand $|1\rangle$ is. De nauwkeurigheid is hier $\varepsilon = 2,3 \times 10^{-3}$. Figuur uit Bonesteel et al. [2].

Met $|((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_\tau\rangle$ geven we de toestand aan waarbij de twee onderste anyonen tot τ fuseren, en een fusie met het overgebleven anyon weer τ oplevert. Definieer met deze notatie de basis $|0\rangle = |((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_\tau\rangle$, $|1\rangle = |((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_\tau\rangle$ en $|NC\rangle = |((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_1\rangle$. De eerste twee vectoren vormen de qubit, de laatste is voor de berekening niet belangrijk. Merk op dat wel van belang is dat de deelruimte opgespannen door de vectoren $|0\rangle$ en $|1\rangle$ in zichzelf wordt afgebeeld door de operaties op de anyonen. Uit de beschrijving volgt dat we de qubit kunnen meten door de onderste twee qubits te fuseren, en te bepalen of er een 1 of τ overblijft.

De categorie die we bekijken is in dit geval niet strikt: $(\tau \otimes \tau) \otimes \tau$ is bijvoorbeeld slechts isomorf aan $\tau \otimes (\tau \otimes \tau)$, in plaats van identiek. Om het model volledig vast te leggen, moet nog vastgelegd worden hoe associativiteit en vervlechting effect hebben op de toestanden. In dit specifieke model wordt dit door de axioma's van een gevlochten tensorcategorie en compatibiliteit met de fusieregels in essentie uniek bepaald. Een gevolg van deze eisen is bijvoorbeeld dat er een unitaire transformatie moet zijn tussen $\text{Hom}((\tau \otimes \tau) \otimes \tau, \tau)$ en $\text{Hom}(\tau \otimes (\tau \otimes \tau), \tau)$. De eisen leveren een stelsel polynoomvergelijkingen op, die in dit geval een unieke oplossing hebben.

Voor wat betreft de vervlechtingsoperatie kan een soortgelijke procedure worden gevolgd. Opnieuw leveren compatibiliteitseisen een unieke oplossing op. Het vervlechten van anyonen induceert een unitaire operatie op de fusieruimte. In de basis $|0\rangle, |1\rangle, |NC\rangle$ die we hierboven hebben gekozen, wordt de vervlechting van de bovenste twee anyonen, zoals in Figuur 2 rechts, gegeven door de matrix [2]

$$\begin{pmatrix} -\eta e^{-i\pi/5} & -i\sqrt{\eta} e^{-i\pi/10} & 0 \\ -i\sqrt{\eta} e^{-i\pi/10} & -\eta & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-i2\pi/5} \end{pmatrix},$$

met $\eta = (\sqrt{5} - 1)/2$, de inverse van de gulden snede. Merk op dat de vervlechting de qubit in zichzelf overvoert.

Bonesteel et al. laten zien hoe door vervlechten een willekeurige unitaire operatie op de qubit benaderd kan worden. De auteurs gebruiken een brute force methode, maar door gebruik te maken van de Solovay-Kitaev stelling kan een willekeurige nauwkeurigheid bereikt worden [2]. Dit is nog niet genoeg voor universele kwantumberekening. Daarom construeren Bonesteel et al. ook bepaalde kwantumpoorten die op twee qubits (in dit model dus voorgesteld door 6 anyonen) werken. Ook hier wordt de Solovay-Kitaev stelling gebruikt om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken. Zie Figuur 3 voor een voorbeeld. Deze kwantumpoorten samen zijn universeel, elk kwantumalgoritme kan met behulp van deze poorten worden opgebouwd.

Conclusies

Topologische kwantumcomputers lijken een aantrekkelijk alternatief voor, of aanvulling op, de bestaande methodes voor kwantumberekeningen. Het is aan de fysici om daadwerkelijk, in een laboratorium, een systeem met anyonen te maken. Er zijn wat resultaten in die richting (zie [21]), maar die zijn nog lang niet voldoende voor topologische kwantumcomputers. Het is bijvoorbeeld nodig om de individuele anyonen te kunnen manipuleren, om de vervlechting uit te voeren.

Een interessant vraagstuk voor de mathematische fysica is systemen te beschrijven die aanleiding geven tot een modulaire tensorcategorie. Dit soort systemen kunnen uiteindelijk wellicht nieuwe aanknopingspunten geven voor de zoektocht naar een topologische kwantumcomputer in de praktijk. In het raamwerk van de algebraïsche kwantumveldentheorie is er een aantal voorbeelden hiervan bekend [11, 18, 25].

Vanuit een wiskundig oogpunt is de abstracte beschrijving in termen van een modulaire categorie interessant. Deze categorieën komen ook in andere onderzoeksgebieden voor. Voor een kort overzicht van de verbanden, en toepassingen op kwantumcomputers, zie [27]. Men kan zich afvragen wat voor representaties van de vlechtgroep we in een be-

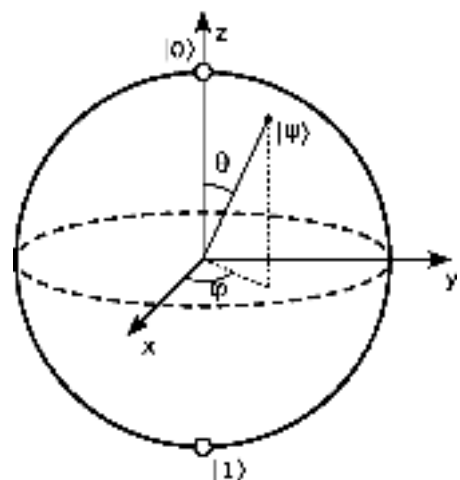
aalde categorie krijgen, en of deze representatie voldoende is om een universele kwantumcomputer te beschrijven. De theorie van vlechtgroepen en hun representaties is ook erg uitgebreid. In tegenstelling tot de representatietheorie van S_n , is die van B_n echter nog niet volledig begrepen [10].

Als een representatie van de vlechtgroep niet universeel is, kan niet elk kwantumalgoritme uitgevoerd worden door het vervlechten van anyonen. In plaats van het toevoegen van nieuwe operaties zodat *wel* een universele verzameling kwantumpoorten beschikbaar is, kan ook gekeken worden welke algoritmes nog wel uit te voeren zijn. Zie [27] voor een overzicht.

Tenslotte kan men denken aan een classificatie van modulaire categorieën, en bijvoorbeeld methodes om van een gevlochten, maar niet modulaire, categorie een modulaire categorie te krijgen. Zie bijvoorbeeld [19], en voor een iets recenter overzicht, de lecture notes van Müger [20].

Aanvullende literatuur

Het standaardwerk over kwantumberekening en kwantuminformatie is het boek van Nielsen en Chuang [22]. De lecture notes van Preskill geven een introductie tot *topologische* kwantumcomputers [24]. Het overzichtsartikel van Nayak et al. [21] geeft een overzicht van de huidige stand van zaken, en behandelt enkele systemen die mogelijk in een laboratorium gerealiseerd kunnen worden. In het artikel van Panangaden en Paquette ligt de nadruk op het verband met modulaire tensorcategorieën; het voorbeeld van de Fibonacci anyonen wordt ook behandeld [23]. Deze laatste referentie is het meest toegankelijk voor lezers zonder achtergrond in de fysica. ←



Figuur 4 De mogelijke toestanden van een qubit kunnen inzichtelijk worden gemaakt door middel van de Bloch sfeer. Elk punt op het boloppervlak komt overeen met een eenheidsvector in $\mathbb{C}^2$.

Referenties

- 1 B. Bakalov en A. Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- 2 N.E. Bonesteel, L. Hormozi, G. Zikos en S.H. Simon, 'Braid Topologies for Quantum Computation', *Phys. Rev. Lett.*, **95**(14):140503, 2005
- 3 C.M. Dawson en M.A. Nielsen, 'The Solovay-Kitaev theorem', *Quantum Inf. Comput.*, **6**(1):81–95, 2006.
- 4 D. Deutsch, 'Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer', *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **400**(1818):97–117, 1985.
- 5 R.P. Feynman, 'Simulating physics with computers', *Internat. J. Theoret. Phys.*, **21**(6–7):467–488, 1982.
- 6 M.H. Freedman, 'P/NP, and the quantum field computer', *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **95**(1):98–101, 1998.
- 7 M.H. Freedman, A. Kitaev, M.J. Larsen en Z. Wang, 'Topological quantum computation', *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **40**(1):31–38, 2003.
- 8 M.H. Freedman, M.J. Larsen en Z. Wang, 'A modular functor which is universal for quantum computation', *Comm. Math. Phys.*, **227**(3):605–622, 2002.
- 9 C. Kassel, M. Rosso en V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, Société Mathématique de France, Parijs, 1997
- 10 C. Kassel en V. Turaev, *Braid groups*, Springer, New York, 2008.
- 11 Y. Kawahigashi, R. Longo en M. Müger, 'Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory', *Comm. Math. Phys.*, **219**(3):631–669, 2001.
- 12 A. Kitaev, 'Fault-tolerant quantum computation by anyons', *Ann. Physics*, **303**:2–30, 2003.
- 13 G.M.M. Laidlaw en C. Morette DeWitt, 'Feynman Functional Integrals for Systems of Indistinguishable Particles', *Phys. Rev. D*, **3**(6):1375–1378, 1971.
- 14 J.M. Leinaas en J. Myrheim, 'On the theory of identical particles', *Il Nuovo Cimento B*, **37**(1):1–23, 1977.
- 15 S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- 16 Y.I. Manin, *Mathematics as metaphor*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- 17 C. Mochon, 'Anyon computers with smaller groups', *Phys. Rev. A*, **69** 032306, 2004.
- 18 M. Müger, 'On charged fields with group symmetry with degeneracies of Verlinde's matrix S ', *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **71**(4):359–394, 1999.
- 19 M. Müger, 'On the structure of modular categories', *Proc. London Math. Soc. (3)*, **87**(2):291–308, 2003.
- 20 M. Müger, *Tensor categories: A selective guided tour*, arXiv:0804.3587.
- 21 C. Nayak, S.H. Simon, A. Stern, M. Freedman en S. Das Sarma, 'Non-abelian anyons and topological quantum computation', *Rev. Mod. Phys.*, **80**(3):1083–1159, 2008.
- 22 M.A. Nielsen en I.L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- 23 P. Panangaden en É.O. Paquette, 'A categorical presentation of quantum computation with anyons', in B. Coecke (red.): *New structures for Physics*, 2010.
- 24 J. Preskill, *Lecture notes in quantum computation*, www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/#lecture.
- 25 K.-H. Rehren, 'Markov traces as characters for local algebras', *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, **188**:259–268, 1990.
- 26 K.-H. Rehren, 'Braid group statistics and their superselection rules', in D. Kastler (red.): *The algebraic theory of superselection sectors*, 1990.
- 27 E.C. Rowell, 'Two paradigms for topological quantum computation', *Contemp. Math.*, **482**:165–178, 2009.
- 28 P.W. Shor, 'Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring'. In *Proceedings, 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 56–65, IEEE Press, Los Alamitos, CA, 1994.
- 29 V.G. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, Walter de Gruyter, Berlijn, 1994
- 30 L.M.K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C.S. Yannoni, M.H. Sherwood, I.L. Chuang, 'Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance', *Nature*, **414**(6866):883–887, 2001
- 31 E. Verlinde, 'Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory', *Nuclear Phys. B*, **300**(3):360–376, 1988.
- 32 F. Wilczek, 'Quantum mechanics of fractional-spin particles', *Phys. Rev. Lett.*, **49**(14):957–959, 1982.
- 33 Stel A is de observabele die we willen meten. Dan is er een *spectrale decompositie*, $A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$. Hier zijn λ_i de eigenwaarden van A , en P_i de bijbehorende projectie op de eigenruimte. Een meting van een systeem in toestand $|\psi\rangle$, levert dan een eigenwaarde λ_i op, met kans $\langle\psi|P_i|\psi\rangle$. Dit is *Borns regel*.
- 34 Een matrix waarvoor geldt $U^*U = UU^* = I$, met $*$ Hermitische conjugatie en I de eenheidsmatrix.
- 35 Preciezer: voor elke $\varepsilon > 0$ zijn er $S_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, \dots, n$, zodanig dat $\|S_1 \cdots S_n - U\| < \varepsilon$, waarbij $\|A\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|A\xi\|$ met $\xi \in \mathbb{C}^n$.
- 36 Deze poort heet de $\pi/8$ poort om historische redenen. De poort is (op een irrelevante fasefactor na) gelijk aan de poort met $e^{\pm i\pi/8}$ op de diagonaal.
- 37 Het argument komt er op neer dat de fundamenteaalgroep van de configuratieruimte van n deeltjes in $\mathbb{R}^2$ gelijk is aan de vlechtgroep. In hogere dimensies is de fundamenteaalgroep triviaal.
- 38 De gelijkheid geldt in het geval van een *strikte* tensorcategorie. In het algemene geval geldt de gelijkheid slechts tot op isomorfisme. Echter, men kan aantonen dat elke tensorcategorie equivalent is aan een *strikte* tensorcategorie [15].
- 39 Een deelcategorie $\mathcal{C}$ van $\mathcal{D}$ heet *vol*, als $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$, voor alle objecten X, Y van $\mathcal{C}$.
- 40 Algemener kan men spreken over een links-respectievelijk rechtsduale. In een unitaire $*$ -categorie zijn deze twee a priori verschillende objecten automatisch isomorf. Het is dan mogelijk om een symmetrische definitie van een duale te geven. De definitie hier heeft als voordeel dat in de huidige context er een duidelijke fysische interpretatie is.

Dirk van Dalen

Subfaculteit Wijsbegeerte

Universiteit Utrecht

Postbus 80.126

3508 TC Utrecht

Dirk.vanDalen@phil.uu.nl

Boekbespreking Heinz-Dieter Ebbinghaus: Ernst Zermelo – An Approach to His Life and Work

Zermelo: een tragische held in het mathematisch theater

Vrijwel alle grondleggers van de moderne wiskunde krijgen in diverse biografieën de aandacht die ze verdienen. Toch werd lange tijd een belangrijke bijdrage genegeerd. Volgens Dirk van Dalen, emeritus hoogleraar geschiedenis van de logica en filosofie van de wiskunde, heeft Heinz-Dieter Ebbinghaus met zijn indrukwekkende biografie een ereschuld van de wiskundige gemeenschap aan Ernst Zermelo ingelost.

Zermelo's gift aan de moderne wiskunde kan wellicht alleen vergeleken worden met Hilberts Grundlagen der Geometrie; waar Hilbert de axiomatische methode glashelder demonstreerde aan de hand van de meetkunde, gaf Zermelo een basis aan de wat kwakkelende verzamelingenleer, zodat na zijn elegante axiomatisering de wiskunde opgezet kon worden op het fundament van de verzamelingenleer. Niettemin is de persoon Zermelo al snel van het toneel afgevoerd, zodat zijn naam alleen nog onder het hoofd "Zermelo-Fraenkel" (of zelfs onder **ZF**) voortleefde. Zo langzamerhand hebben alle grondleggers de erkenning geoogst, en de biografie gekregen, waar ze recht op hadden, alleen Zermelo bleef in de schaduwen van het gebouw der grondslagen.

De biografie van Ebbinghaus doet einde-

lijk recht aan het curieuze genie van de opvolger van Cantor. Ebbinghaus laat zien dat de combinatie van persoonlijkheid en externe omstandigheden zoals het politieke noodlot van Duitsland en de economische crisis, hem zo goed als geheel uit de wiskunde en de maatschappij deden verdwijnen.

Jeugd en opleiding

Zermelo kwam op de wereld in Berlijn in 1871, toen zijn grote voorganger, Cantor, op het punt stond de geheime wereld der verzamelingen te verkennen. De naam 'Zermelo' had en heeft een enigszins mysterieuze klank. Zermelo zelf placht nieuwsgierigen uit te leggen dat de naam ontstaan was uit 'Walzermelodie' door de eerste en laatste lettergreep weg te laten. In een wat serieuzere stemming

suggereerde hij dat het een afleiding was van 'Termeulen' via 'Zurmühlen'. Veel Zermelo's kunnen er niet geweest zijn; de biograaf vermeldt dat na de dood van Zermelo's weduwe, de naam Zermelo uit de Duitse telefoonboeken verdwenen is.

Zermelo kreeg, naar traditioneel Duits patroon, een veelzijdige opleiding, hij begon zijn studie aan de Friedrich Wilhelm Universität in Berlijn (1889), volgde later colleges in Halle en Freiburg, en eindigde in Göttingen. Hij volgde colleges van Cantor in Halle (over elliptische functies en getaltheorie), van Husserl over de wijsbegeerte der wiskunde, van Bruno Erdmann over logica (als tak van de psychologie), in Freiburg volgde hij onder meer een college van Lüroth, en terug in Berlijn (1891) liep hij college bij Max Planck, Wien, Frobenius, Knoblauch en Schwarz. Bij de laatste bestudeerde hij variatierekening, het gebied van zijn dissertatie (1894). Onder de drie stellingen die het onderwerp van de mondelinge verdediging van de aanstaande doctor vormden, bevond zich een provocerende

Zermelo's axioma's

Hier volgt een informele weergave van Zermelo's axioma's uit 1908.

- I. *Extensionaliteit.* Verzamelingen die precies dezelfde elementen hebben, zijn gelijk (populair: een verzameling wordt bepaald door zijn elementen).
- II. *Elementaire verzamelingen.* Er is een lege verzameling, $\emptyset$; bij iedere a en b is er een verzameling $\{a, b\}$ die precies uit a en b bestaat (*ongeordend paar*, idem *singleton* $\{a\}$).
- III. *Separatie.* Bij iedere formule $A(x)$ en

verzameling a is er een verzameling $\{c \in a \mid A(c)\}$ die precies alle elementen c van a bevat die aan $A(x)$ voldoen.

- IV. *Machtsverzameling.* Bij iedere verzameling a is er een verzameling $\mathcal{P}(a)$ die precies alle deelverzamelingen van a bevat.
- V. *Vereniging.* Bij iedere verzameling a is er een verzameling $\bigcup(a)$ die precies alle elementen bevat die in een der verzamelingen uit a zitten.
- VI. *Keuzeaxioma.* Als a een verzameling is van niet lege disjuncte verzamelingen,

dan is er een verzameling k die van iedere verzameling uit a precies één element bevat.

Een prettiger moderne formulering: iedere verzameling van niet-lege verzamelingen u heeft een keuzefunctie f met $f(u) \in u$.

- VII. *Oneindigheid.* Er is tenminste één verzameling die $\emptyset$ bevat, en die bij ieder element a ook de verzameling $\{a\}$ bevat.

Zie hoofdstuk *Zermelo 1908a* in [1], in het bijzonder de inleiding van Ulrich Felgner.



Illustratie: Ryu Tajiri

bewering: “Ten onrechte wordt in de fysica de taak gesteld, alle natuurverschijnselen op de mechanica van de atomen te herleiden.” Dit standpunt leidde in 1895 tot een conflict met Boltzmann over de rol van de kinetische gastheorie in de thermodynamica, beschreven in hoofdstuk 1. Afgezien van de wetenschappelijke merites getuigde de aanval van Zermelo op de gevestigde orde van een grote dosis zelfvertrouwen, door anderen ook wel lichtzinnigheid genoemd.

Tenslotte besloot Zermelo in 1897 in Göttingen zijn studie voort te zetten; hij volgde daar colleges van Hilbert (irrationale getallen), en het seminarium over differentiaalvergelijkingen in de mechanica van Hilbert en Klein. Hij habilliteerde in 1899 op een onderwerp uit de toegepaste wiskunde (wervelingen op een bol), zie hoofdstuk 2.

Assistent van Hilbert

De aanvankelijke belangstelling voor toegepaste wiskunde verschoof vanaf 1900 naar

de achtergrond. Ebbinghaus schetst hoe Hilbert tegen het eind van de negentiende eeuw naar de grondslagen getrokken werd, voornamelijk onder invloed van Cantors verzamelingenleer. De paradoxen (Hilbert was zelf de bedenker van de paradox van alle cardinaalgetallen) zetten hem aan om consistentieproblemen te gaan bestuderen. Op dat punt kwam de aanwezigheid van een slimme, eigenwijze assistent als Zermelo van pas. Zermelo had al eerder over paradoxen nagedacht, en hij vond vóór Russell de paradox van de verzamelingen die zichzelf niet als element bevatten. Ebbinghaus voert Hilbert en Husserl aan als getuigen, hij spreekt zelfs van de Zermelo-Russell paradox; een nobel streven, maar een algemeen geaccepteerde naamgeving veranderen is zo ongeveer het moeilijkste wat men kan bedenken. Zermelo schreef op latere leeftijd aan Scholz dat hij de paradox omstreeks 1900 had ontdekt.

In de standaard presentaties van verzamelingenleer komt het axiomastelsel van

Zermelo (1908), samen met zijn keuze-axioma en welorderingsstelling (1904), min of meer uit de lucht vallen. En in zekere zin is dat ook zo: wie onvoorbereid met de axioma's van Zermelo wordt geconfronteerd, kan volstrekt niet inzien waarom dit stelsel voldoende zou zijn voor ‘de hele wiskunde’. Het mag dus wel verbazend genoemd worden dat een nieuwkomer aan het begin van zijn carrière zo precies scoort.

Ebbinghaus geeft in zijn tweede hoofdstuk een kijkje in de voorgeschiedenis van de genoemde feiten, maar van een langdurige verkenning is nauwelijks sprake. Zermelo gaf in 1900 al een college verzamelingenleer en in de volgende jaren bewees hij enkele stellingen over cardinaal arithmetiek, maar niets wees op de komende uitbarsting van ideeën. In 1904 slaagde Zermelo erin de welorderingsstelling volkomen algemeen te bewijzen, met behulp van een nieuw principe: het keuze-axioma. Voor dit laatste gaf hij de eer aan Erhard Schmidt (de man die volgens



De belangrijkste spelers in het toneelstuk *Verzamelingen* — van links naar rechts, van boven naar beneden: Georg Cantor, David Hilbert, Bertrand Russell, Edmund Husserl, Adolf Fraenkel, Luitzen Brouwer, Thoralf Skolem, Kurt Gödel

André Weil net zo snel kon denken als Hadamard). Hiermee had Zermelo één van Cantor's belangrijkste vermoedens bevestigd, iets dat hem onmiddellijk een grote status gaf.

Het is boeiend om te lezen dat het keuze-axioma al direct krachtig aangevallen werd (onder meer door Borel, Julius König, Bernstein, Schoenflies). Borel sprak in zeker zin voor de Franse pre-intuitionisten; Brouwer noemt in zijn proefschrift het axioma in het voorbijgaan en merkt op dat het continuüm niet welgeordend kan worden — “ook deze kwestie blijkt dus illusoir”. Zermelo nam de oppositie zo serieus op dat hij in 1908 een tweede bewijs gaf, vergezeld van uitvoerig en bijtend commentaar op zijn tegenstanders. Fraenkel sprak zelfs van “een verhandeling die wat sarcasme betreft, zijn gelijke niet vindt in de wiskundige literatuur”. Gaande-

weg werd het keuze-axioma (AC) echter door de wiskundige gemeenschap aanvaard, hoewel een zekere mate van voorbehoud geconstateerd kon worden bij auteurs die elk gebruik van AC expliciet vermeldde.

In hetzelfde jaar publiceerde Zermelo zijn axiomatisering van de verzamelingenleer. De achtergrond van dit artikel wordt door Ebbinghaus van commentaar voorzien. Het lijkt plausibel dat Zermelo met deze axioma's de paradoxen wilde uitschakelen — een verheven grondslagen project. Er zijn echter aanwijzingen dat Zermelo voorgoed de twijfels over het keuze-axioma wilde uitbannen. Beide artikelen waren geschreven in 1907 toen Zermelo in Zwitserland herstellend was van tuberculose.

Hoogleraar in Zürich

Ondanks zijn grote roep als topwiskundige had Zermelo geen geluk bij het vinden van een leerstoel, zelfs een klinkende aanbeveling van Hilbert voldeed niet om hem aan één van de Duitse universiteiten een aanstelling te verschaffen. Uiteindelijk werd hij full professor in Zürich (1910–1916), een periode die weinig wiskundige wapenfeiten opleverde. Zijn gezondheid liet te wensen over, hij stond alleen voor het wiskunde onderwijs, en zijn contacten waren stroef. Na lang aandringen kreeg hij een assistent, en niet de eerste de beste: Paul Bernays. In die tijd begon Zermelo serieus aan speltheorie te werken, voornamelijk in de context van verzamelingenleer.

Er bestaat een merkwaardige anekdote over de beëindiging van Zermelo's aanstelling in Zürich, overgeleverd door Fraenkel. Kort voor de eerste wereldoorlog was Zermelo in de Beierse Alpen, waar hij in een hotel over-

nachtte. In het registratieformulier schreef hij toen achter Nationaliteit: “God zij dank geen Zwitser”. Op zichzelf geen ernstige zonde, ware het niet dat kort daarna het hoofd van het onderwijs in Zürich in hetzelfde hotel verbleef, en Zermelo's registratieformulier zag. Fraenkel concludeerde dat hierna Zermelo de hoop op verlenging wel kon laten varen. Ebbinghaus heeft in Zürich geen documenten kunnen vinden om de anekdote te bevestigen. Het lag meer voor de hand dat Zermelo's zwakke gezondheid en langdurige ziekteverloven een voortzetting van zijn aanstelling onwaarschijnlijk maakte.

Pensioen in Freiburg

Na het Zwitserse intermezzo volgt de Freiburg periode; het laatste hoofdstuk is geheel gewijd aan Zermelo's ervaringen in dit charmante Schwarzwald stadje. Aanvankelijk was de eerste zorg het herstel van zijn gezondheid. Zijn Zwitsers pensioen stelde hem in staat een sober maar tamelijk onbezorgd leven te leiden. Ongeveer in 1924 begon hij contact op te nemen met de plaatselijke wiskundigen. De Freiburgse wiskunde staf bestond uit de hoogleraren Lothar Heffter en Alfred Loewy; er waren goede studenten zoals Reinhold Baer, Wolfgang Krull, Bernhard Neumann en Ernst Witt. Baer was een vermaard algebraïcus, maar hij werd tevens aangetrokken door Zermelo's verzamelingenleer. Gedurende lange tijd was hij Zermelo's voornaamste volgeling en persoonlijke vriend. De financiële situatie van Zermelo verslechterde in 1922 door een verlaging van zijn pensioen — de Zwitserse autoriteiten merkten op dat de (in onze terminologie) arbeidsongeschikte hoogleraar Zermelo in Duitsland een pensioen ontving dat vier maal zo hoog was als het honorarium van een Duitse professor. Overigens werd het pensioen weer opgetrokken (na lang aandringen van Zermelo) toen de Duitse inflatie op hol geslagen was. In 1926 bepleitten Heffter en Loewy een (onbezoldigd) honorair professoraat voor Zermelo — met succes.

De Freiburg periode neemt ongeveer een derde van de biografie in beslag; wanneer we bedenken dat Zermelo zich op zijn vijftigste als gepensioneerde in het Zwarte Woud vestigde, een leeftijd waarop een wiskundige zijn volle geestkracht kan geven aan de verzamelde inzichten en ervaringen, dan zou dit tijd van oogsten moeten zijn. Helaas, het hele hoofdstuk staat vol met conflicten en wetenschappelijke achterhoede gevechten, om maar te zwijgen van zijn politieke lotgevallen.

Wat de grondslagen betreft had hij genoeg te doen; er was van alles gebeurd in de lo-



Figuur 1 Zermelo in Zürich, 1913

gica en verzamelingenleer, Skolem had een rigoureuze axiomatisering van de verzamelingenleer in de taal van de eerste-orde logica ondernomen, en hij had zijn stelling over het bestaan van aftelbare modellen bewezen; Von Neumann had zich op de verzamelingenleer geworpen en Skolem en Fraenkel hadden Zermelo's axiomastelsel aangevuld met een ontbrekend axioma (het replacement axioma). Bovendien had Fraenkel, om zo te zeggen, de markt voor verzamelingenleer gepopulariseerd, om niet te zeggen gemonopoliseerd, met zijn *Einleitung in die Mengenlehre*, 1919. De verzamelingenleer was bezig zijn schepper in te halen, en de schepper was niet blij met wat hij zag. Ebbinghaus heeft in dit hoofdstuk de teugels strak gehouden. Hij had de zware opgave de draad van de vele onderwerpen, plannen, conflicten tot hun essentie terug te brengen. Om te beginnen was daar de ontwikkeling van de filosofie in Freiburg. Toen Zermelo aankwam was Husserl nog in functie, maar hij verloor al snel zijn interesse in de fenomenologie, en dat werd er niet beter op toen de invloed van Heidegger groeide; "Er is hier niemand met wie ik over logica kan praten. Professor Becker is evenmin geïnteresseerd: de 'intuitionisten' verachten logica! En nog erger wanneer Heidegger zal komen: [...] zo'n filosofie van 'leven' en 'dood' heeft niets met logica en wiskunde gemeen."

Freiburg bracht onder meer een terugkeer tot de toegepaste wiskunde, in het bijzonder de variatierekening. Zermelo onderzocht het *navigatieprobleem*, geïnspireerd door de wereldreis van de Graf Zeppelin. En in de speltheorie ontwierp hij een methode voor de berekening van toernooiresultaten (later herontdekt door Bradley en Terry). Tenslotte publiceerde hij een artikel over het splijten van gecentreerde ovals, met als ondertitel "Hoe

breekt men een suikerklont?", als bijdrage aan een Festschrift voor de vijftigste verjaardag van Von Mises.

Zermelo versus Skolem en Gödel

Het zwaartepunt van Zermelo's onderzoek lag echter bij de grondslagen van de wiskunde. Twee zaken hadden volgens Zermelo de voorrang: logica en verzamelingenleer. In beide gevallen nam hij een afwijkende positie in, dat wil zeggen, in zijn 'afwezigheid' was de logica voortgegaan op het pad van de eerste-orde logica, met alle gevolgen van dien. De verzamelingenleer was eveneens gemonopoliseerd door de eerste-orde logica, en daar werd men geconfronteerd met wat in de wandeling *Skolems paradox* heette. De eerste-orde logica kent behalve eigenschappen, relaties en functies, alleen elementen. In het bijzonder kan alleen over elementen gekwantificeerd worden ('alle x ' slaat alleen op elementen). Voor deze logica geldt een enigszins verbazende stelling van Löwenheim en Skolem: als een theorie consistent is heeft zij (onder geschikte voorwaarden) een aftelbaar model. Nu past Zermelo's axiomatisering van de verzamelingenleer binnen de eerste-orde logica: de theorie spreekt alleen over verzamelingen en er zijn geen andere dingen. Een verzameling is een object dat door de relatie $\in$ met andere verzamelingen te maken kan hebben. ergo: als **ZF** consistent is, heeft zij een aftelbaar model. Dat laatste levert 'Skolems paradox': volgens Cantor is de machtsverzameling (de verzameling van alle deelverzamelingen) van de natuurlijke getallen overaftelbaar en volgens Skolem is er een model waarin ze aftelbaar is.

Zermelo wees de relativiteit van begrippen als 'aftelbaar' met kracht van de hand. In zijn opvatting van verzamelingenleer moest recht gedaan worden aan de 'intuïtieve' betekenis van de grondbegrippen (inclusief 'machtsverzameling'). Hij zag twee mogelijkheden: de verruiming van de logische taal met oneindige formules (de infinitaire logica) en de tweede-orde logica: een logica die kwantificatie over elementen *en* verzamelingen toelaat. Beide logica's vermijden de Skolem-Löwenheim stelling, en dus de Skolem paradox.

Ebbinghaus geeft in hoofdstuk 4 een voor treffelijke uiteenzetting over Zermelo's werk, waarbij hij opmerkt dat, gezien Zermelo's mening, geen enkele finitaire taal volstaat voor de verzamelingenleer (laat staan voor de hele wiskunde). Aangezien de tweede-orde logica een finitaire syntax en bewijsstructuur heeft, komt dus in feite alleen de infinitaire taal in aanmerking.

In 1930 publiceerde Zermelo zijn nieuwe fundering van de verzamelingenleer, gebaseerd op een infinitaire taal, en leunend op zijn cumulatieve hiërarchie die volgde op die van Von Neumann. De laatste was geformuleerd in een taal van functies, terwijl Zermelo een modernere formulering met verzamelingen verkoos. De cumulatieve domeinen V_α die als model voor de verzamelingenleer dienden, bezaten een ordinaalgetal α dat door Zermelo een *Grenzzahl* genoemd werd, en waarvan hij aantoonde dat het sterk onbereikbaar is. Het artikel trok nauwelijks aandacht, de markt was — bij wijze van spreken — al geheel in beslag genomen door het jonge genie, Kurt Gödel. Ebbinghaus ruimt een speciale paragraaf in voor de Zermelo-Gödel discussie, zoals die had moeten plaatsvinden op het congres in Bad Elster in 1931. Gödel had in 1930 op de Königsberg conferentie zijn onvolledigheidsstelling bijna terloops ter sprake gebracht, en hoewel slechts enkele van de toehoorders, onder wie in ieder geval Von Neumann, de portee zagen, ging er toch een schok door de wiskunde wereld. Baer bracht Zermelo op de hoogte; die zag twee mogelijke reacties: ofwel capitulatie voor de 'klassieke logica' en amputatie van de wiskunde, ofwel "verklaar, zoals u doet, de klassieke logica voor onvoldoende". Het spreekt bijna vanzelf dat Zermelo de tweede optie koos, en in de aanval ging. Hij bereidde zich grondig voor op een discussie op het congres in Bad Elster in September, een discussie die niet tot stand kwam. In een daarop volgende briefwisseling (zie Gödels *Collected Works*, deel 5) legde Gödel helder uit waar Zermelo hem verkeerd begrepen had. Zoals Ebbinghaus terecht opmerkt hadden Gödel en Zermelo ook de overeenkomst van hun benadering kunnen onderstrepen: Gödel liet zien dat de klassieke finitaire logica niet voldeed om de volledige rijkdom van de wiskunde te vangen, terwijl Zermelo hetzelfde betoogde door de onderliggende filosofie van de infinitaire logica te benadrukken. Het was Zermelo niet gelukt om tegen de stroom van de heersende logica op te roeien. De logische gemeenschap was geheel aan de zijde van Gödel — en niet ten onrechte. Hetgeen niet wegneemt dat Zermelo's poging om de wiskunde een passende logica te verschaffen wel wat meer aandacht verdiend had. Zermelo was in deze aangelegenheid te emotioneel om zijn positie te verdedigen, hij had al voor het Bad Elster congres een nerveuze inzinking gehad.

De erkenning die als balsem voor een gepijnigde ziel kon dienen kreeg Zermelo in Polen; de logica in Warschau nodigden hem uit



Figuur 2 Zermelo in Freiburg, 1934

om in 1929 een reeks voordrachten te geven. De nagelaten papieren laten zien dat hij een vrij omvattende expositie van zijn nieuwe grondslagen ideeën en resultaten gaf. Door een misverstand kwam zijn Poolse reis hem op een scherp standje van Heffter te staan – de decaan Loewy had vergeten de vervanging voor Zermelo's college differentiaal meetkunde te regelen, en Zermelo kreeg de rekening gepresenteerd.

Derde Rijk en levenseinde

Alsof Zermelo niet genoeg problemen had, kwam hij vervolgens in botsing met de volgingen van het Derde Rijk. Bij de officiële viering van de aansluiting van het Saarland (1935) werd door een assistent van Doetsch, SS-Oberscharführer Schlotter, opgemerkt dat Zermelo bij het zingen van het Horst Wessel-lied niet naar behoren de Hitlergroet bracht. Voorts had Zermelo volgens Schlotter herhaaldelijk de Führer en de instellingen van het Derde Rijk beledigd. Die aanklacht eindigde met het verzoek aan de docenten corps van de universiteit Freiburg om na te gaan of "Professor Zermelo (nog) waardig is om honorair professor aan de Universiteit van Freiburg te zijn, en of het hem toegestaan zou worden de reputatie van het Duitse docentencorps ergens anders gedurende het volgende semester of het daaropvolgende nog verdere schade toe te brengen." De studentenvereniging drong in gelijkluidende termen eveneens aan op maatregelen tegen de dissidente geleerde, die "alleen nog in Freiburg kan bestaan omdat hij tot dusver getolereerd was als zijnde onschadelijk, en die alleen in wetenschappelijke zaken serieus genomen wordt." Ook zijn collega Doetsch signaleerde de ernstige tekortkomingen van Zermelo, die hem de Hitlergroet weigerde te brengen, "zelfs een luid 'Heil Hitler, Herr Zermelo' uitsluitend tot hem gericht als hij de gebruikelijke begroeting weer had genegeerd, werd door hem slechts door een onderdrukt 'Heil' beantwoord." De denunciaties leidden tot een onderzoek.

Een dag na zijn verhoor legde Zermelo in een brief aan de rector zijn ereprofessoraat neer. Op vierenzestigjarige leeftijd was hij plotseling ambteloos burger, verstoken van zijn zo nodige universitaire contacten. Waar een geestrijk man als Zermelo ongetwijfeld na zijn emeritaat nog veel had kunnen ondernemen, volgde nu een periode van isolatie, financiële zorgen en huisvestingsproblemen. Hij onderhield contact met zijn vroegere leerling Arnold Scholz, overwoog de publicatie van een boek over verzamelingenleer, bedacht argumenten tegen het 'Skolemisme',

adviseerde Heinrich Scholz over de publicatie van Frege's verzamelde werken, maar niets wierp eigenlijk vrucht af. Het was een leven in limbo, dat ondanks alle tegenslagen één lichtpunt bevatte: in 1944 trad Zermelo in het huwelijk met Gertrud Seekamp, een charmante en vastberaden dame die een gelukkig tegenwicht was voor Zermelo's zwaarmoedigheid en in zichzelfgekeerdheid.

Na de oorlog verzocht Zermelo de rector van de Universteit van Freiburg om herstel van zijn positie als honorair professor; na een aantal formaliteiten (ook de Franse bezettingsautoriteiten moesten instemmen) werd hij in maart 1947, nog juist voor zijn vijfenzeventigste verjaardag, in functie hersteld. In 1953 overleed hij en werd begraven in het kerkhof van het klooster in Günterstal.

Tot slot

De biograaf verdient dank en bewondering van de wiskundige wereld voor het corrigeren van ons beeld van een man die van 1904 tot 1908 als een meteor door het wiskundig firmament schoot.

Zermelo was in elk opzicht een volstrekt autonoom geleerde en mens; hij was zich terdege bewust van de invloed van zijn tijdgenoten en voorgangers, maar hij bepaalde zijn eigen positie in het speelveld van de twintigste eeuwse grondslagen discussies. Het intuïtionisme, bijvoorbeeld, was volgens hem niet serieus te nemen – "het ideaal van het intuïtionisme, het weggooien van het oneindige uit de wiskunde". In zijn rapport aan de *Notgemeinschaft der Deutsche Wissenschaft* (1930) geeft Zermelo aan dat "de vraag naar de 'grondslagen' weer op gang was gekomen door het ietwat luidruchtige optreden van de intuïtionisten, die in temperamentvolle tijdschriften een 'grondslagen crisis' in de wiskunde verkondigden, en zo ongeveer de hele moderne wetenschap de oorlog verklaarden – zonder er zelf iets beters voor in de plaats te kunnen stellen." Zijn afkeer richtte zich overigens voornamelijk tegen Weyl; in een (ongepubliceerd pamflet met een handleiding 'hoe word ik een bovenbaas' raadde hij aan om "een charlatan [...] als Weyl, obstinaat als Hilbert, gek als Brouwer ..." te zijn. Hierbij moet opgemerkt worden dat Zermelo met Brouwer het onvermogen tot het sluiten van compromissen deelde.

Het formalisme kwam er niet veel beter af: Zermelo's waardering voor Hilbert weerhield hem er niet van om de doctrine van het formalisme te verwerpen. Logica en verzamelingenleer waren de basis van de hele wiskunde, waarbij aangetekend dient te worden dat

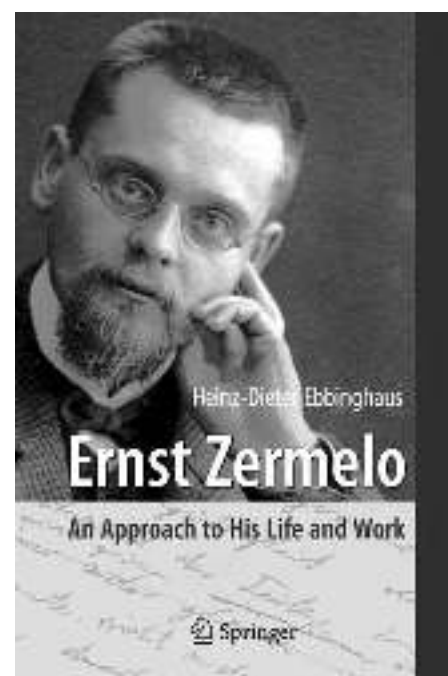
Zermelo de logica ruimer nam dan zijn tijdgenoten.

De biografie is niet alleen een schatkamer van persoonlijke details en van een consciëntieuze historische inbedding, maar ook een diepgaande analyse van de opvattingen en conflicten die nooit de tijdschriften haalden. Zijn meningsverschil met Gödel en vooral de strijd tegen Skolems opvattingen, het modeltheoretische relativisme, zijn grondig geanalyseerd en van achtergrond-informatie voorzien. Voor iedere logicus is deze stof verhelderend, juist omdat door de technische perfectionering van de mathematische logica, men gemakkelijk de filosofische motiveringen en problemen zou kunnen vergeten.

Samenvattend: de Zermelo biografie is een aanrader, omdat onverwachte gezichtspunten worden belicht, en omdat recht wordt gedaan aan een tragische held, die als eenling buiten de bestaande netwerken viel, en die het ongeluk had het Derde Rijk op zijn pad te vinden. Ebbinghaus heeft overigens ook het eerste deel van Zermelo's verzameld werk [1] gepubliceerd; bij een grondiger bestudering van de biografie is het aan te raden om dit deel bij de hand te hebben.

Referenties

- 1 Ernst Zermelo, *Collected Works, Volume 1, Set Theory, Miscellanea* (Eds. H-D. Ebbinghaus, A. Kanamori). Springer, Heidelberg, 2010.



Heinz-Dieter Ebbinghaus, *Ernst Zermelo – An Approach to His Life and Work*, Springer, Berlijn, 2007, xiv+356 p., hardcover, ISBN-10: 3540495517, ISBN-13: 9783540495512, € 58

Rob Bisseling

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
R.H.Bisseling@uu.nl

Wil Schilders

W&I
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
w.h.a.schilders@tue.nl

Maatschappij

De overval: VORtech

Het Delftse VORtech is een bedrijf van scientific software engineers. Het levert een keur van diensten op het gebied van rekenprogrammatuur, aan zowel multinationals als aan MKB bedrijven. NAW was heel benieuwd wat deze diensten inhouden, en stuurde op 21 april de overvallers Rob Bisseling en Wil Schilders op pad.

Gewapend met een lijst vragen togen de overvallers naar Delft. We verzamelden ons voor het kantoorgebouw Torenhove om nog wat laatste afspraken te maken omtrent de te volgen tactiek. Daarna meldden we ons bij de portier die ons, zonder al te veel argwaan, de weg wees naar VORtech. Het zal een van de schaarse overvallen zijn die plaatsvindt op de 19e verdieping van een gebouw; veel collega-overvallers zullen zich daar toch door laten weerhouden, echter niet het team van NAW. Aangekomen op de betreffende verdieping diende er aangebeld te worden, en werden we hartelijk ontvangen door een van de oprichters van VORtech, Edwin Vollebregt. Collega-oprichter en managing director Mark Roest was helaas niet aanwezig, maar Edwin bleek een uitstekend gastheer. In een kamer met historische (nou ja...1996) posters kregen we uitleg over het verleden, heden en toekomst van VORtech. Een paar mooie glanzende nieuwsbrieven vormden het eerste deel van de buit. Deze nieuwsbrief, die in een oplage van ongeveer 300 stuks verschijnt, wordt tweemaal per jaar toegezonden aan klanten en geïnteresseerden. Een van de overvallers staat al jaren op de verzendlijst. Het idee achter de nieuwsbrief is om te laten zien wat VORtech vermag, aan welke problemen er gewerkt wordt, en wat men voor de klanten kan betekenen of betekend heeft. Opvallend in een van de nieuwsbrieven die we inzagen was een moderne versie van de tien gebo-

den. In dit geval betrof het tien regels voor het maken van rekenprogrammatuur (zie kader). Het eerste softwaregebod luidt: "Maak duidelijkheid je nummer-1 top-prioriteit." Dat is bijvoorbeeld belangrijker dan rekensnelheid.

VORtech heeft in de loop der jaren een wereld aan ervaring opgedaan rondom het ontwikkelen van technisch-wetenschappelijke software, en geleerd wat men wel en niet moet doen. Die kennis is vastgelegd in de tien regels, en medewerkers binnen het bedrijf dienen zich hier dan ook aan te houden. Men gelooft er bij VORtech in!

Het begin

Bij zo'n inleidend gesprek hoort natuurlijk de vraag hoe het bedrijf ooit is ontstaan. In 1996 werkten zowel Mark Roest als Edwin Vollebregt aan de TU Delft, als promovendi, aan een onderzoek voor Rijkswaterstaat (RWS). Dit onderzoek was onderdeel van een Europees project omtrent het paralleliseren van simulatiemodellen voor kustwateren, en Roest en Vollebregt droegen hier een belangrijke steen aan bij. Een zeer praktisch onderwerp, bestaande uit een combinatie van wiskundige methoden en geavanceerde programmeertechnieken. Na hun promotie bij Len Dekker richtten ze het bedrijf op en werden beiden ook postdoc bij Arnold Heemink in Delft. Met beide activiteiten zetten ze hun werk aan de RWS-software voort. Overigens is dat ook nu nog een belangrijk

onderdeel van het werk van VORtech: het inbouwen van nieuwe en geavanceerde algoritmen in software van klanten. Een voorbeeld hiervan is het open-source CFD (computational fluid dynamics) pakket OpenFOAM (zie www.openfoam.com), dat voor klanten wordt aangepast aan specifieke eisen en situaties. Het werk voor Rijkswaterstaat was dermate succesvol, en continuïteit leek bovendien gegarandeerd, dat men in 1996 besloot de stap te wagen en een eigen bedrijf op te richten en daarin de werkzaamheden verder te ontplooiën. Het vinden van een naam was niet zo moeilijk: men neme de 'VO' van Vollebregt, de 'RO' van Roest wordt gespiegeld en dus 'OR'. De vereniging van beide levert dan 'VOR' op,

Tien regels voor het maken van rekenprogrammatuur

1. Maak duidelijkheid de nummer-1 top-prioriteit
2. Gebruik versiebeheer
3. Gebruik de standaard directoryindeling
4. Automatiseer het testen van wijzigingen
5. Ken de reproduceerbaarheid/gevoeligheid van het numerieke model
6. Denk na over opzet en ontwerp van de programmatuur
7. Gebruik een goedgekozen software ontwikkelproces en goede tools
8. Investeer tijd in goede visualisatie en goede debuguitvoer
9. Optimaliseer niet te vroeg
10. Gebruik een helpdesksysteem of bug-tracker

en zo ontstond dus VORtech als naam. Een typisch wiskundige manier om een naam te bedenken! Ook werd al snel een nieuwe medewerker aangenomen, Bas van 't Hof die van de TU Eindhoven kwam. In de jaren erna groeide het bedrijf gestaag. Bij 7 medewerkers was er even een kleine pas op de plaats, maar inmiddels kent VORtech 14 medewerkers, waarvan sommigen part-time. Het groeiende aantal medewerkers betekende ook dat er een verbreding kon plaatsvinden, mede leidend tot een veel kleinere afhankelijkheid van die ene grote klant van het prille begin. Het betekende wel dat er veel aan acquisitie moest worden gedaan vanaf de eerste jaren van deze eeuw, om zodoende voldoende werk te genereren voor het bedrijf.

De technieken

De nieuwsbrieven op tafel waren reden voor geanimeerde discussies over een uiteenlopend aantal onderwerpen. Zo viel ons oog op een artikel over op maat gemaakte lesroosters. Scholen gaan naar een veel flexibeler inrichting van het lesprogramma, waarbij leerlingen voorkeuren mogen aangeven en veel minder als groep of klas worden behandeld. Dat levert uitdagingen op met betrekking tot het maken van lesroosters, en VORtech is erin geslaagd om de complexe en langdurige berekeningen te optimaliseren met behulp van constraint programming. Andere onderwerpen die de revue passeerden waren het schatten van verkeersstromingen uit tellingen, geluidsberekeningen die een factor 60 waren versneld en een systeem om de luchtkwaliteit boven scheepvaartroutes in kaart te brengen. Daarnaast beweegt men zich momenteel ook heel erg richting het gebruik van de grafische kaart (GPU) in PC's, waarvan bekend is dat hij sommige regelmatige berekeningen veel sneller kan uitvoeren dan de centrale processor, de CPU. Het was voor VORtech dus essentieel om hier ervaring in op te doen, en te bestuderen wat wel en niet mogelijk is met de GPU.

Omdat VORtech relatief klein is, kan men natuurlijk niet alles zelf ontwikkelen. Wel volgt men ontwikkelingen binnen de numerieke wiskunde en de informatica op de voet, en maakt men dankbaar gebruik van nieuwe programmeermethoden en wiskundige algoritmen. Dit doet men onder andere door goede relaties te onderhouden met universiteiten, en dan met name natuurlijk 'the home university' TU Delft. Vollebregt heeft er sinds 2008 ook een deeltijd-aanstelling, die hij echter mede te danken heeft aan een wat minder mooie omstandigheid, het overlijden van

Prof. Kalker. Deze hoogleraar was een expert op het gebied van 'rollen': de interactie tussen treinwielen en rails. Hiervoor was software ontwikkeld binnen Kalker's groep, en deze werd na zijn emeritaat door VORtech onderhouden. Nadere bestudering van de code bracht aan het licht dat ook de wiskundige methoden aanpassing behoeften, en dat het programma ook veel breder inzetbaar zou zijn na wat aanpassingen.

De klanten

Van het een kwam het ander in de discussie, en via de deeltijdpositie aan de TUD kwamen we op het onderwerp promoveren. Het is niet



VORtech onderhoudt software voor de interactie tussen treinwielen en rails

per definitie zo dat iedere nieuwe medewerker gepromoveerd dient te zijn, maar er is wel een stimulans om dit alsnog te doen binnen het bedrijf. Hiertoe krijgt men tijd beschikbaar gesteld. Zo heeft medewerker Nils van Velzen onlangs een promotietraject afgerond. De meeste medewerkers hebben een wiskundige achtergrond, hoewel er ook verdwaalde natuurkundigen door de gang liepen. Men komt uit alle windstreken, dient echter wel een behoorlijke bagage aan programmeer-skills mee te brengen. Kennis van het gebruik van multiple cores is absoluut een pré. Na binnenkomst krijgen alle nieuwe medewerkers een inwerkopdracht, onder andere om kennis te maken met de programmeerontwikkelomgeving en het versiebeheersysteem. Ze leren parallel rekenen en gaan vaak op een programmeercursus zoals 'advanced C++' bij AT computing. Maandelijks is er een lunchvoordracht voor alle medewerkers. "Maar hoe kom je aan klanten?", was onze onbescheiden vraag. Dat gebeurt natuurlijk vooral via eigen acquisitie. Klanten willen echter wel zien wat je kunt, en dus is er een standaardprocedure. Een potentiële klant kan zich aanmelden voor een zogenaamde 'model-scan'. Een of meer medewerkers van VORtech komen dan op bezoek, en krijgen inzage in de gebruikte software. Deze wordt doorgenomen, de documentatie

wordt bekeken, er wordt gesproken met ontwerpers (voor zover deze nog aanwezig zijn bij de klant), de software wordt gedraaid op een aantal testproblemen. Dit alles neemt zo'n twee dagen in beslag, vervolgens maakt VORtech een rapport op met haar bevindingen, en aanbevelingen voor versnellingen en verbeteringen. De klant beslist dan in een eindgesprek of de diensten van VORtech gewenst zijn. Dit tegen een alleszins redelijk bedrag, dat de overvallers echter niet wisten los te peuten, vooral omdat dit afhankelijk is van 'allerlei factoren'. Soms kan het wel moeite kosten de klant te overtuigen: "De meerwaarde van een wiskundige blik is moeilijk aantoonbaar te maken." Over het algemeen is de klant echter al overtuigd voordat de modelscan wordt gemaakt, men vermoedt al dat VORtech hier een prima bijdrage kan leveren. Zodoende hoeft er dus niet zo heel veel overtuigingskracht gebruikt te worden. Bovendien bewijst het zich vanzelf, als de software vele malen sneller blijkt te zijn dan voorheen. Dan kan de klant er natuurlijk niet meer omheen! Het meest trots zijn ze bij VORtech als ze een programma twee maal zo snel hebben kunnen maken. Dat klinkt wat vreemd, je zou zeggen dat een factor 60 meer trots op zou leveren. "Nee," zegt Vollebregt, "want als het een factor 60 is, dan was het blijkbaar eenvoudig. Een factor 2 betekent vaak echter heel veel werk in reeds geoptimaliseerde software, en dat is heel wat lastiger." Wat men ook vaak tegenkomt zijn gigantische hoeveelheden data, waar dan op een efficiënte(re) manier mee omgegaan dient te worden. Dit is bijvoorbeeld het geval bij verkeersmodellen zoals het Landelijk Model Systeem (LMS), en hierbij speelt de zogenaamde HB matrix een grote rol, een matrix waarbij de rijen de herkomsten en de kolommen de bestemmingen representeren. Men wil deze matrix bepalen om op die manier voor elk paar (h,b), met h een herkomst en b een bestemming, te kunnen zeggen hoeveel mensen er van h naar b reizen. Er zijn 4000 herkomsten en evenveel bestemmingen. Deze matrix HB verandert in de loop van de dag. Als input gebruikt de dienst verkeer en scheepvaart van RWS onder andere tellingen op de weg, en ook economische gegevens. Het pakket AVV-MAT bepaalt vervolgens de bijbehorende 16 miljoen getallen. VORtech heeft dit pakket onder handen genomen en vooral algoritmische verbeteringen aangebracht. De berekening gebeurt nu met de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno methode voor niet-lineaire optimalisatie, en het benut ook de 2 tot 8 cores van de moderne multicore processor. Het programma is

daarmee 10 tot 30 keer zo snel als voorheen. Het resultaat speelt een grote rol bij het inschatten van de benutting van wegennetten.

VORtech beweegt zich dus vooral in het leveren van diensten ten behoeve van simulatie- en rekensoftware. Er is feitelijk geen eigen software die aan de mens wordt gebracht, het gaat om de software van de klant zelf. Meestal wordt er een vaste prijs afgesproken met de klant, en men biedt ook onderhoud aan. Een uitzondering vormt de software voor contactmechanica, waar VORtech wel eigen ontwikkelingen heeft. Daarnaast levert VORtech een grote bijdrage aan het open-source pakket OpenDA voor data-assimilatie. Deze software wordt mede ontwikkeld en gebruikt door onder andere Deltares en de TUD.

De medewerkers

Alvorens het tijd wordt om een aantal medewerkers lastig te gaan vallen achter hun bureaus, vragen we nog hoe men aan nieuwe medewerkers komt. Blijkbaar wordt hiervoor onder andere de zogenaamde WSC-lijst gebruikt, de adressenlijst van de Werkgemeenschap Scientific Computing (de numeriek wiskundigen in Nederland en Vlaanderen). Ook reageert men op open sollicitaties die regelmatig binnenkomen. Er is eigenlijk weinig concurrentie van soortgelijke bedrijven. LIME, het Laboratory for Industrial Mathematics Eindhoven, is feitelijk al ver weg, geografisch gezien, en veel andere instituten of bedrijven van deze soort bestaan er niet in Nederland.

Hoewel overvallers vaak zelf bepalen wanneer zij zich waar bewegen, waren we in dit geval toch uitermate geboeid door het verhaal van Edwin Vollebregt, ook al omdat het onderwerp van simulatie- en rekensoftware beide overvallers na aan het hart ligt. Maar op een gegeven moment werd het toch de hoogste tijd om eens 'op de werkvloer' te gaan kijken. Het kantoor van VORtech is ruim van opzet, met een mooie bibliotheek waar tijdschriften, boeken en proefschriften verzameld worden. Op de eerste kamer die we, onaangekondigd, binnenstormden, was Bas van 't Hof, medewerker van het tweede uur, aan de slag met ondiepwatervergelijkingen. Wat meteen opviel was een exemplaar van het blad *Pythagoras*, waarop veel medewerkers een abonnement bleken te hebben! Daarnaast was ook ons eigen *Nieuw Archief* natuurlijk aanwezig.

Bas voelde zich wat ongemakkelijk toen we hem vroegen ("wat doe je op dit moment?") naar het project met Shell, vooral omdat 'de baas' tegenover hem stond. Er moest wel even bij deze industriële grootmacht na-



Medewerkers van VORtech, met uiterst rechts Mark Roest en daarnaast Edwin Vollebregt

gevraagd worden of er over gesproken en gepubliceerd mocht worden. Maar dat bleek het geval, gelukkig, de software is hier de kritische component. Dus nogmaals de vraag, wat doet VORtech voor Shell? "We werken aan een seismische applicatie. Uit metingen van geluidsgolven aan het oppervlak, gegenereerd via dynamiet of trilplaten, reconstrueren wat de opbouw is van de ondergrond. Zogenaamde 'travel time inversion'. Op basis van een initieel snelheidsmodel worden voorspellingen van reistijden van geluidsgolven gemaakt en afgezet tegen gemeten reistijden. Er wordt een Jacobiaan gemaakt die aangeeft hoe de reistijden afhangen van de snelheden per roosterpunt. En dan wordt een update van het snelheidsveld bepaald die een betere fit oplevert tussen voorspellingen en metingen."

Van 't Hof en Vollebregt vervolgen: "Het voorspellen gebeurt in het pakket SMART waar wij aan werken met ray-tracing. Sterk gerelateerd aan tomografie, maar hier buigen stralen af door dichtheidsverschillen, en bijvoorbeeld door anisotropie. De Jacobianen leiden tot een enorm groot kleinste-kwadratenprobleem. Bijvoorbeeld, voor een middelmatig groot probleem zijn 192 cores nodig om de matrix in het geheugen te kunnen opslaan(!). Het lineaire probleem wordt opgelost met de LSQR methode. Wij onderzoeken of we de performance hiervan kunnen verbeteren met heel diverse maatregelen. Dit betreft onder andere de communicatie in parallele runs en het gebruik van preconditioners in LSQR."

Een heel verhaal, na initieel wat terughoudendheid! En zeer interessant ook, zeker voor numerici. Geeft toch een kijkje in de keuken van VORtech. Omdat de tijd begon te dringen, bezochten we nog één andere kamer, waar Alja Vrieling (samen met Erwin Loots) bezig was met een probleem voor Royal Haskoning. Kijkend naar haar scherm kwamen vele vragen op, en zagen we ook hoe problematisch het kan zijn. Immers, de klant heeft een probleem in het binnenste van een softwarepakket, in dit geval SRMII, maar de VORtech medewerker moet wel weten hoe hij of zij met dat pakket om dient te gaan, teneinde simulaties te kunnen doen. En dat is absoluut geen sinecure, elk pakket heeft zijn eigen grafische interface en invoermogelijkheden. Het kost tijd om je dat eigen te maken. Maar Alja bleek er weinig moeite mee te hebben, en liet ons een mooi voorbeeld zien van wat er mis kan gaan in een pakket, en hoe VORtech daar vervolgens een oplossing voor bedenkt. In dit geval ging het over geluidsgolven die weerkaatsen tegen gebouwen langs een snelweg.

Een koffer vol

Rond kwart over vijf werd het de overvallers een beetje te heet onder de voeten, bovendien was het aardig enerverend. Het hoofd vol met nieuwe indrukken en de koffer vol met nieuwsbrieven togen we dus weer huiswaarts, tevreden terugkijkend op een mooi bezoek aan een interessant bedrijf dat wiskunde hoog in het vaandel heeft staan! Meer informatie staat op www.vortech.nl.

Ton Langendorff

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

A.N.M.Langendorff@tue.nl

Evenementen Opening Applied Mathematics Institute

Numb3rs

Sinds 2007 hebben de TU Delft, de TU Eindhoven en de Universiteit Twente hun krachten gebundeld in de 3TU-Federatie. De wiskunde-afdelingen van de 3 TU's hebben nu binnen deze samenwerking het nieuwe Applied Mathematics Institute (AMI) opgericht. Op 15 april vond de feestelijke opening plaats tijdens een symposium in Delft. Ton Langendorff, secretaris van het AMI, doet verslag.

Bij de oprichting van AMI vormde MATHEON — het instituut van de drie Berlijnse universiteiten en twee wiskunde-instituten — een inspiratiebron. Volker Mehrmann, de wetenschappelijk directeur van MATHEON, was dan ook de keynote speaker van het AMI-symposium. Zijn boodschap was bekend: de wiskunde moet zich meer zichtbaar opstellen. Het hele symposium stond in dat teken. De drie hoogleraren Hester Bijl (TUD), Richard Boucherie (UT) en Remco van der Hofstad (TU/e) gaven voorbeelden van respectievelijk wiskundige toepassingen in vliegtuigontwerpen, logistiek in de zorg, en routing in complexe netwerken. Drie promovendi vertelden over hun onderzoek: baaivorming door getijden, cryptografie, en wachttijden in poliklinieken. In de pauze konden nog eens 34 posters van promovendi bekeken worden.

De vele voorbeelden waren nieuw, maar de boodschap van de alomtegenwoordigheid van de wiskunde was bekend. Dat gaf ook niet. Het was immers een feestelijk symposium waar *tout mathématique* elkaar weer eens zag en waar genoten kon worden van de schoonheid van het eigen vak. Maar de ondertoon was ernstig, misschien zelfs zorgwekkend.

In het *Masterplan Toekomst Wiskunde* uit 2008 konden we al lezen dat de wiskunde zich ondanks haar overkoepelende belang grotendeels 'onder de motorkap' van de samenleving bevindt. Een jaar later verscheen een bundel van LIME, het Laboratory for Industrial Mathematics Eindhoven, waarin een groot aantal wiskundige toepassingen

zijn beschreven; de titel was heel toepasselijk *Math Inside*.

Maar, zo bleek op het AMI-symposium, er is meer. De wiskunde moet zich niet alleen zichtbaar maken, ze heeft met een nog lastiger probleem te maken: ze moet ook overtuigen. Richard Boucherie vertelde dat hij onderzoek deed in samenwerking met verschillende zorginstellingen. Artsen vormden daarbij voor hem een belangrijke bron van kennis van processen. De artsen namen echter de nieuwe logistieke volgordes en prioriteiten van de wiskundigen niet voor zoete koek aan. Zij meenden serieus dat zij gelijk hadden en voerden daarvoor argumenten aan; de wiskundigen wisten dat de artsen ongelijk hadden, maar hoe moesten zij hen overtuigen?

Eenzelfde probleem bracht Huib de Vriend, directeur van Deltares, naar voren in zijn voordracht over het belang van de wiskunde voor alles wat met water te maken heeft. Bij water in combinatie met dijken en wassend rivierwater komen emoties bovendrijven. Boeren en burgers hebben dan geen vertrouwen in de kansberekeningen van eens in de zoveel duizend jaar.

We hoeven maar even terug te denken aan de reacties achteraf op de deskundigen die hadden gewaarschuwd voor een mogelijke griepdemonie — overdreven! — en het is duidelijk dat het ongeloof van burgers en het wantrouwen tegen deskundigen niet alleen de wiskunde treft. In grote groepen van de samenleving heerst een anti-wetenschapshouding.

Hoe moet de wiskunde zich tegen dit ge-

weld te weer stellen? In de Amerikaanse misdaadserie *Numb3rs* speelt een wiskundige de hoofdrol. De serie laat zien dat wiskunde op vrijwel elk probleem toegepast kan worden en dat jonge mensen dit aanspreekt. Dat weten we al en de lessen die daaruit te trekken zijn, worden door MATHEON en anderen (zoals LIME) in praktijk gebracht. Het voordeel van een tv-serie is dat dromen erin kunnen uitkomen. In *Numb3rs* krijgt de wiskundige steeds gelijk en hij kan dat nog uitleggen ook; telkens worden de *bad guys* gevangen.

Alleen laten zien dat wiskunde overal 'inside' zit, is dus niet voldoende. Er moet ook meer begrip bijgebracht worden. Dat kan door drempels weg te halen. Volker Mehrmann vertelde over de *MATHathlon*. Kinderen van 12 tot 15 jaar moesten bij de start van een hardloewedstrijd een wiskunde-opgave lezen die ze tijdens het hardlopen moesten oplossen. Bij de volgende tussenstop moesten ze de oplossing opschrijven, de volgende opgave lezen en weer doorrennen, enzovoort. Dit is een enorm succes geworden. In het Nederlandse tv-programma 'Mijn vader is de beste!' zit een onderdeel waarin de vaders op een rolbank, die steeds sneller gaat, moeten lopen en hardop sommetjes $[174 - 93 \text{ of } 25 \times 13, \text{ dat soort}]$ moeten uitrekenen. 't Is een begin, een beginnetje, misschien nog minder. Maar meer hebben we niet.

Wetenschappelijk Directeur van AMI, Bernard Geurts, zette aan het slot van het symposium de ambities van AMI uiteen op de terreinen onderwijs, onderzoek en innovatie. De wiskunde moet (aan)tonen wat haar impact is en ze moet dat kunnen uitleggen. Alleen zó kan het succes van *Numb3rs* enigszins benaderd worden, namelijk dat wiskunde voor jongeren — maar ook de bedrijven en de samenleving als geheel — *fun* is en allen van wiskunde wijzer worden. 

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragswetenschappen, instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
N.C.Verhoef@utwente.nl

Nico Alink

Faculteit Gedragswetenschappen, instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
N.H.M.Alink@gw.utwente.nl

Onderwijs

Wo- en vo-docenten ontwerpen samen een onderzoeksles

Vakinhoudelijke en vakdidactische scholing voor docenten loopt al jaren niet soepel, dat is geen nieuws. Toch is er hoop. Schooloverstijgende vakgebonden professionalisering zit in de lift. Fysiek bij elkaar in de keuken van de lespraktijk kijken schept een band, stimuleert en is ook nog effectief. Nellie Verhoef en Nico Alink bespreken een veelbelovende scholingswijze.

Wiskundedocenten hebben het druk. Niet alleen met lesgeven maar ook met taken die dat lesgeven faciliteren zoals het mentoraat, projectleiderschap, of het coördinatorschap van een leerjaar of een afdeling binnen de school. Het is allemaal nodig om hoger ingeschaald te worden, dus meer te gaan verdienen. Vakinhoudelijke scholing staat op een laag tot zeer laag pitje omdat het zo weinig wordt gewaardeerd door schooldirecties. Toch zijn er docenten te vinden die ervoor gaan, docenten die plezier hebben in het bezig zijn met wiskunde samen met hun leerlingen.

Een veelbelovende manier om docenten te professionaliseren is het vormen van teams waarin behalve docenten ook medewerkers van een universiteit participeren. Rondom de Universiteit Twente bestaat er sinds het begin van het schooljaar 2009–2010 zo'n team, een Community of Learners (CoL). Een CoL is geen gewoon team. Van oorsprong is een CoL een onderzoeksnetwerk waarin de deelnemers samen onderzoek doen [2]. Dat betekent in Twente dat docenten wetenschappelijke literatuur (in de vorm van artikelen) lezen, elkaar over de inhoud informeren en op grond daarvan samen één theoretisch onderbouwd lesontwerp maken. Kenmerkend is dat alles in een sfeer plaatsvindt waarin de deelnemers naar elkaar luisteren, elkaar waar-

deren en respecteren. Aan de Twentse CoL nemen vijf eerstegraads docenten van vijf verschillende scholen deel, én vijf medewerkers van de UT: een docent van de afdeling Toegepaste Wiskunde, twee vakdidactici, een schoolpracticumdocent en een AIO. Elk lid heeft zo zijn eigen toegevoegde waarde.

Hoe wordt er in zo'n CoL idealiter gewerkt? Het doel is dat alle deelnemers zich professionaliseren, zowel vakinhoudelijk als vakdidactisch. Zij doen dat door onderzoeksactiviteiten uit te voeren die direct gekoppeld zijn aan de lespraktijk. Concreet ontwerpen docenten één les, voeren de les uit op hun eigen school en evalueren samen het verloop van de les achteraf. Daarnaast ontwikkelen de docenten onderzoeksinstrumenten en verzamelen, verwerken en analyseren data. Deze aanpak is die van *Lesson Study*, een professionaliseringsvorm die afkomstig is uit Japan, waar het een traditie heeft binnen het reken- en wiskundeonderwijs. Daar wordt het al tientallen jaren gezien als hét middel voor het ontwikkelen van de professionaliteit van docenten. Spannend is de observatie van de uitvoering van die ene les door collega's en andere geïnteresseerden [1, 3–4]. Dit zijn we in Nederland niet echt gewend — bovendien is dat moeilijk te organiseren.

Waarop zijn die onderzoeksactiviteiten

dan gericht? In Twente is gekozen voor 'het denken van leerlingen'. Hoe denken leerlingen nu eigenlijk? In de praktijk hebben docenten doorgaans nauwelijks tijd om hierbij stil te staan, ze reageren onmiddellijk op vragen van leerlingen. Op grond van hun ervaring gaan de docenten ervan uit dat ze wel weten wat de leerlingen bedoelen te vragen, zonder daar nog bij stil te staan. Tja, dat is ook ingewikkeld, want hoe doe je dat: blootleggen wat leerlingen denken — ze zitten in een groep tenslotte — om daar vervolgens adequaat op te reageren als docent?

Hoe is het dit schooljaar in de praktijk gegaan? Driewekelijks kwam de CoL op de universiteit bij elkaar om, in de periode tot eind december, één les te ontwerpen. In dit geval is gekozen voor de introductie van de afgeleide in 4vwo wiskunde B. Elke docent kreeg een wetenschappelijk artikel voor de kiezen, om dat vervolgens aan de anderen te presenteren. De volgorde van deze artikelen was: een algemeen theoretisch achtergrondartikel over het aanleren van wiskundige begrippen, een praktische uitwerking van het leren begrijpen van een vergelijking waarbij gewaarschuwd wordt voor pseudoconcepten, een artikel over het aanleren van het (voor leerlingen moeilijke) begrip 'limiet', één over de verschillende aspecten van de afgeleide en een laatste artikel over de betekenis van de visualisatie van wiskundige begrippen. Dit laatste artikel ging over het verband tussen een functie en zijn afgeleide. Het eventueel gebruik van ICT in de vorm van de

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

	Graphical	Verbal	Physical	Symbolic
Ratio				
Limit				
Function				

Tabel 1 Schema dat leerlingen helpt verschillende aspecten van een afgeleide te bepalen

GR kwam daarbij ook ter sprake. Om welke theorie gaat het hier dan? Algemeen bruikbaar leek het schema waarin de verschillende aspecten van de afgeleide te herkennen zijn. Dit schema (Tabel 1) is gebaseerd op de formele definitie van de afgeleide. Alle docenten bleken enthousiast te zijn: het schema is helder en praktisch, het leidt tot bewustwording over koppelingen (van rijen en kolommen) en over mogelijke misconcepties bij leerlingen. Dit schema past beter bij de benadering van het boek, waar ook het limietbegrip een uitgangspunt is, maar niet wordt genoemd. Dat wordt weggemoffeld. Nadenkend over de consequenties van dit schema kwam spontaan de vraag naar boven: Welk idee hebben 5vwo-leerlingen achteraf eigenlijk van de afgeleide? Een van de deelnemers aan de CoL heeft bij 41 leerlingen een korte enquête gehouden met de vraag: Wat is volgens jou de afgeleide? Daar is een breed scala aan antwoorden op gekomen variërend van “Een formule die de helling voor elk punt in de grafiek kan geven als je de x -waarde invult” en “Een hulpmiddel om de raaklijn te berekenen” en “De helling van een functie in een bepaald punt” tot “De snelheid waarmee de grafiek in een punt stijgt” en “Een functie, als je die differentieert, de functie die daar uit komt is de afgeleide”. Al deze leerlingen hebben in 4vwo les gehad van dezelfde docent en toch hebben zij zich allemaal een eigen begrip gevormd van de af-

geleide.

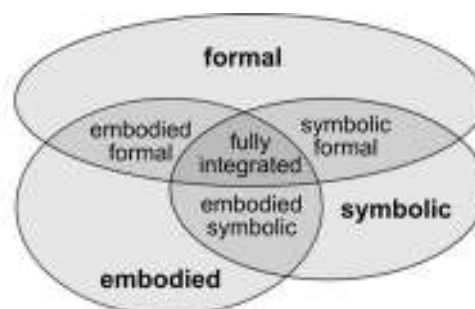
Wat kwam er in de bijeenkomsten zoal nog meer ter tafel? Drie werelden waar doorheen, volgens David Tall [5], een reis verloopt om een wiskundig concept te leren begrijpen. De drie werelden van Tall zijn kort te omschrijven als: (i) de *embodied world*, de meest laagdrempelige wereld van waarnemingen, zowel meetkundig als analytisch, als opstap naar de eigenschappen van objecten; (ii) de *symbolic world* van symbolen waarmee je rekent, (algebraïsch) manipuleert; en (iii) de *formal world* van definities, axioma's en logische bewijzen. In Figuur 1 is te zien hoe Tall deze hiërarchie tussen de drie werelden in beeld brengt. Op die reis spelen eerder verworven kennis (*set-befores*) en ervaring (*met-befores*) een rol. Zij kunnen het denken van leerlingen beïnvloeden. Deze set- en met-befores kunnen een belemmering zijn voor een goede begripsvorming. Een voorbeeld van een met-before is dat leerlingen in de natuurkunde al eerder worden geconfronteerd met het begrip afgeleide, vaak in relatie tot het natuurkundige begrip snelheid. De natuurkundedocent verwacht van de leerlingen dat zij het concept afgeleide moeiteloos kunnen toepassen (Eindverslag van werkgroep af

stemming wiskunde-natuurkunde, 2007). Leerlingen beheersen dan wel de procedure om de afgeleide te bepalen en te gebruiken, maar dat betekent nog niet dat ze het concept doorzien. Voor docenten is het dus van belang om rekening te houden met mogelijke set- en met-befores.

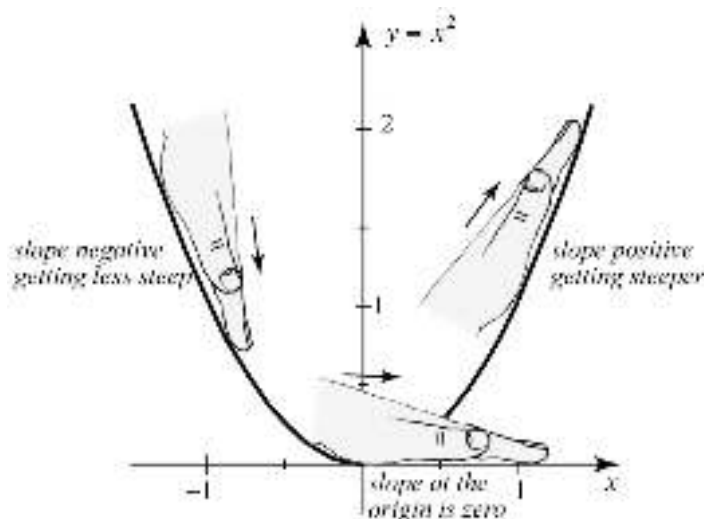
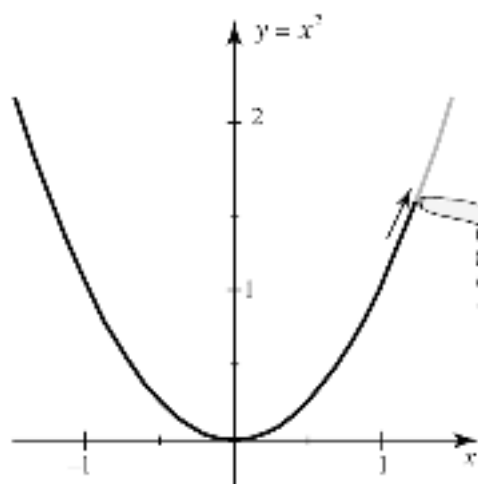
Hoe zien deze werelden eruit bij de introductie van het begrip afgeleide? De introductie van de afgeleide begint met het zorgvuldig kijken naar het verloop van een kromme, bijvoorbeeld de grafiek van $y = x^2$. Wat verandert er aan die kromme? Deze verandert lokaal voortdurend van richting (Figuur 2 links). Als je met je hand langs de kromme glijdt voel je de verandering van richting (Figuur 2 rechts). Als je voldoende inzoomt, met een loep bijvoorbeeld (Figuur 3 links), dan zie je uiteindelijk een rechte lijn. In elk punt van de grafiek kun je de richtingscoëfficiënt van die lijn bepalen en met een stip aangeven in de grafiek (Figuur 3 rechts). Dit alles speelt zich af in de *embodied world*. In de *symbolic world* is de richtingscoëfficiënt van die lijn, de raaklijn aan de kromme, te representeren als twee componenten dx en dy van een vector (Figuur 4).

Hoe hebben docenten zich nu geprofessio-

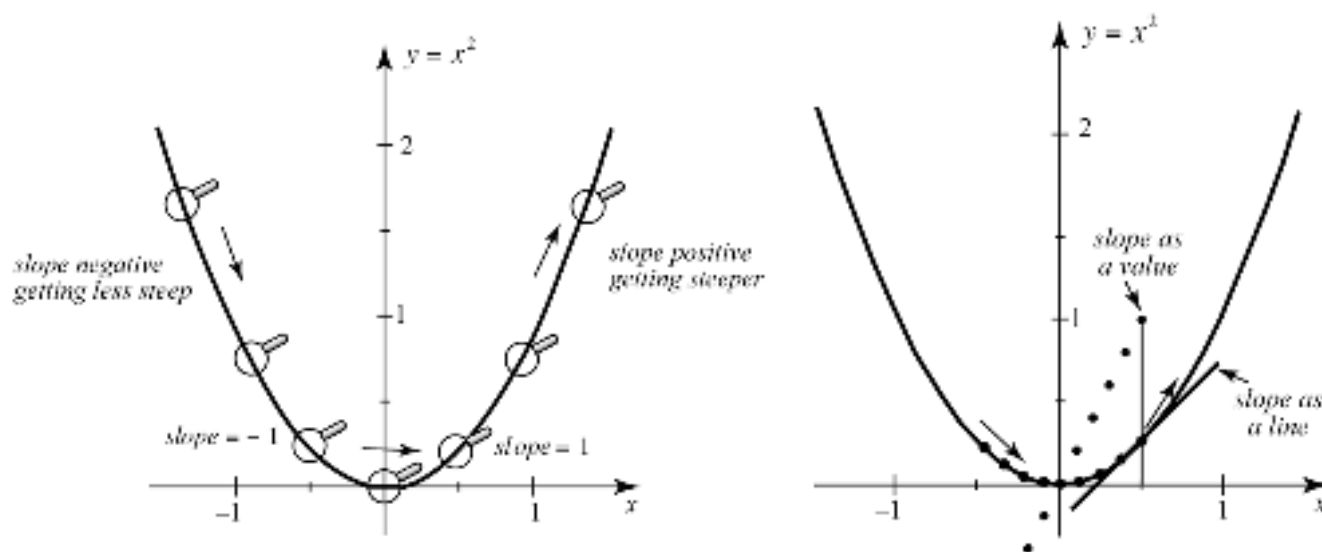
cognitive
development



Figuur 1 De drie werelden van Tall: “Mathematicians live in three worlds building on met-befores, preferring different (combinations of) areas. A broad framework for mathematical thinking” [5].



Figuur 2



Figuur 3

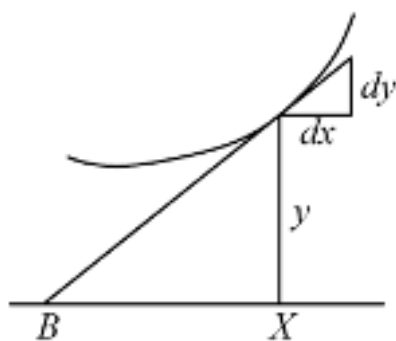
naliseerd? Het ontwerpen van een observatielijst bleek een lastig karwei te zijn. De drie werelden van Tall zijn gebruikt om interacties van leerlingen en docenten te classificeren. Steeds werd de vraag gesteld: hoe weet je nu hoe de leerlingen denken? Het beste zou natuurlijk zijn om gebruik te maken van hard-op-denken-protocollen, maar daar leent een klassikale les zich niet voor. Uiteindelijk is besloten om observatoren met een blanco papier de les bij te laten wonen. Van hen werd verwacht dat zij zelf de gemaakt

te opmerkingen noteerden en nadien zouden classificeren. Maar wat bleek? Bij de eerste uitvoering van de ontworpen les stelden leerlingen geen vragen. De docent had zijn les zó goed voorbereid dat alle eventuele vragen vooraf ingebakken waren. Dat was nu ook niet de bedoeling! Wel bleek dat leerlingen problemen hadden met het begrip raaklijn. Als reactie werd unaniem besloten een criteriumlijst te ontwerpen om antwoorden van leerlingen op schriftelijke vragen van de docent tijdens de les te classificeren. Wat bleek? Leerlingen denken totaal anders dan vermoed.

Hoe denken leerlingen dan? De aanpak van 'local straightness' bleek totaal niet aan te sluiten bij de aanpak van het boek met de nadruk op steeds kleiner wordende differentiequotiënten zonder over de limiet te praten; dat is in de praktijk lastig. Na de eerste les was het idee ontstaan dat er al eerder problemen zijn met het begrip raaklijn. Na de derde uitvoering van de les bleek dat leerlingen inderdaad problemen hebben met de vertaling tussen verschillende representaties van het begrip raaklijn: de analytische en de alge-

braïsche. Zo zijn er leerlingen die in één punt van een grafiek meer dan één raaklijn kunnen tekenen, terwijl zij zich er tegelijkertijd van bewust zijn dat er volgens de formule slechts één uitkomst kan zijn: hoe zit dat? Leerlingen gaven op geen enkele manier aan dit vreemd te vinden.

Al met al heeft deze *Lesson Study*-benadering docenten bewust gemaakt van het verschil tussen dat wat leerlingen denken en de voorstelling die een docent daarvan heeft. Het blijft toch oppassen geblazen als je lesgeeft! Dat maakt van het lesgeven natuurlijk wel een boeiend beroep. Deelnemende docenten hebben deze eerste serie Col-bijeenkomsten als zeer aangenaam en vrijkend ervaren. Dat is niet in de laatste plaats te danken aan de omstandigheid dat daar tijd en gelegenheid is om uitgebreid met elkaar over (vak)didactische zaken van gedachten te wisselen.



Figuur 4 Bij deze opbouw staat de grafiek centraal.

Referenties

- Baba, T. (2007). Japanese education and Lesson Study: An overview. In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa (Eds.), *Japanese Lesson Study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Brown, A. L., & Campione, J. C. (1996). *Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles, and systems*. In L. Schauble and R. Glaser (Eds.), *Innovation in learning: New environments for education*, 289-325. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Tall, D. O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.

De derde wet

| Solicited Comments

Hieronder volgen reacties op het artikel 'Cijfer positieve rekenprestaties niet weg' uit het NAW-juninummer.

Ten geleide

Het rekenonderwijs heeft de afgelopen jaren veel emoties opgeroepen en de verschillende groepen, 'realisten' en 'mechanisten' (de oma's en de opa's), hebben zich vast in hun posities ingegraven. Gelukkig zijn er vorig jaar verstandige woorden gesproken door de KNAW-commissie Lenstra die het rekenonderwijs tegen het licht heeft gehouden, zie bijvoorbeeld het verslag van Martinus van Hoorn (NAW maart 2010). Een van de conclusies is dat de rekenvaardigheid van Nederlandse leerlingen de afgelopen jaren gedaald is, verder dat de verschillende rekenmethoden minder invloed hebben dan de leraar die de methode gebruikt. Een ieder die onderwijs heeft gegeven, in wat voor onderwerp en op wat voor niveau ook, zal dit laatste direct herkennen. Het ligt voor de hand om naar de toekomst te kijken en tevens meer aandacht te besteden aan de vorming van de leraar.

In het juni- en septembernummer van het NAW ronden we de discussie af. In het vorige NAW-nummer, juni 2010, verscheen van de kant van de realisten een artikel van Marja van den Heuvel-Panhuizen en Adri Treffers over het rekenonderwijs. Het artikel verscheen eerder in het *Tijdschrift voor Orthopedagogiek* waar het een reactie opriep van C.M. van Putten en M. Mickendorff (deel 49, pp. 68–70, 2010) die wijst op het ongenueanceerde argumenteren in beide kampen en het ontbreken van methodologisch verantwoord onderzoek. Op zijn beurt riep dit weer een reactie op van de auteurs Van den Heuvel-Panhuizen en Treffers (zelfde tijdschrift, deel 49, pp. 73–74, 2010) waarvan de strekking is dat de realisten echt gelijk hebben.

De voorlopig laatste reactie die we in het NAW opnemen staat hieronder. Deze bijdrage is van Joost Hulshof die een verfrissende kijk heeft op het rekenonderwijs, zeker de moeite waard om kennis van te nemen. We roepen een ieder die in dit onderwerp geïnteresseerd is op het bovengenoemde KNAW-rapport opnieuw te lezen. *Ferdinand Verhulst, UU*

Mechanistische opa's en realistische oma's

Voor de goede orde, dit is een reactie op het artikel van Marja van den Heuvel-Panhuizen en Adri Treffers, waarin de realisten aan het woord zijn en zich vooral richten tot de mechanisten.

De eerste keer dat ik het woord 'mechanistisch' in rekencontext tegenkwam was in de TAL-boekjes, een project van Van den Heuvel-Panhuizen, gefinancierd door OCW, waarin het TALig rekenonderwijs voor PABO-studenten wordt uiteengezet. TAL staat voor 'Tussendoelen Annex Leerlijnen'. In het TAL-onderbouwboekje lezen we op pagina 66: "In de geschetste realistische didactiek van vermenigvuldigen en informeel delen en het leren van de tafels, wordt niet direct en uitsluitend op het reproduceren van de tafels aangestuurd via herhaald optellen, zoals vroeger in de mechanistische methodiek gebeurde via klassikaal uitgevoerde klaagzangen." Het is maar dat u het weet. Op het CV van Van den Heuvel-Panhuizen is te vinden hoeveel dit project gekost heeft.

De verwijzing naar opa's waaraan je niets meer moet vragen zag ik in de rekendiscussie voor het eerst op pagina 60 van NAW 5/9 nr. 1 maart 2008. Net als dit nieuwe artikel van Van den Heuvel-Panhuizen en Treffers bestond ook dat artikel van Willem Uittenbogaard voornamelijk uit een reactie op de standpunten van Jan van de Craats, die als adviseur van de Stichting Goed Rekenonderwijs nauw betrokken was bij de recent gereed gekomen nieuwe methode Reken Zeker (zie staff.science.uva.nl/~craats/#rekenzeker). Tegenover opa Jan wordt nu een

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

oma geplaatst die waarschuwt tegen het invoeren van rekenmethoden, die wat er door de realisten bereikt is terug dreigen te draaien: “Het kan immers niet de bedoeling zijn om van rekenen weer een stervend vak te maken!”

De toon is dus wel zo’n beetje gezet.

Wat ik me allang afvraag is of het eigenlijk wel gaat om een strijd tussen realisten en mechanisten. Freudenthal’s uitspraak (*Wijsgerig Perspectief* 4, 1966, pp. 205–216.) over Leibniz lijkt me hier relevant:

“Steeds bewuster werkt men aan de mathematische taal, om gebieden, die men onder de knie heeft, zo te formaliseren, dat, als bij het cijferen, de werktuigelijkheid de rol van het inzicht overneemt, om op een hoger vlak het inzicht nieuwe kansen te geven.”

Ik lees hierin een synthese die mijn indruk bevestigt dat de zelf-verklaarde realisten (de R’s) met hun hier opnieuw gepresenteerde strijdpunten missen waar het om gaat. Een reden te meer om eens goed te lezen wat de R’s in dit verhaal de M’s te vertellen hebben en waar dat op is gebaseerd.

Om met het tweede te beginnen, de schrijvers baseren zich op onderzoek naar leerlingenprestaties bij het maken van CITO-opgaven. De schrijvers interpreteren dat onderzoek, en zetten daarbij het cijferen neer als betrekking hebbend op slechts drie van de relevante 24 onderdelen in het rekenen. Vervolgens concluderen de schrijvers dat er bij de overige onderdelen sprake is van een aanzienlijke vooruitgang.

Zoals gebruikelijk in R-kringen, is elk van de CITO-opgaven in een context gesteld. Het zou goed zijn om ook naar de kale rekensom zelf te vragen die de leerling uit de context moet destilleren, maar dat gebeurt nooit in CITO-toetsen voor zover ik heb gezien. Dat maakt deze sommen als rekentoetsen sowieso minder onderscheidend. Ook het gebruik van kale rekensommen blijft omstreden, niet alleen bij het CITO. Nog recent was ik bij een door het Freudenthal Instituut verzorgde workshop (zie www.platformvvo.nl/bestanden/cat.view/65-taal-en-rekenen.html) op een conferentie over Taal en Rekenonderwijs waar de presentatrice zonder verdere toelichting verklaarde daar geen voorstander van te zijn.

Wat de boodschap van het artikel betreft, na een kort historisch overzicht over het ‘waarom’ (‘men’ wilde meer tijd reserveren aan hoofdrekken, schatten en praktische toepassingen) van de door en dankzij de R’s vastgestelde nieuwe kerndoelen, komt het artikel ter zake aan de hand van een voorbeeldsom (voor groep 6/7) die die nieuwe doelen moet illustreren. In die som wil Lieke 4 broden kopen van 1,98 per stuk en ze heeft een tientje. Is dat genoeg?

Deze Lieke-som zou zo uit een CITO-toets kunnen komen, bijvoorbeeld uit een van de nieuwe rekentoetsen die nu in het voortgezet onderwijs gebruikt worden. Ik heb via-via een paar setjes illegaal mogen inzien en ben nogal geschrokken. Het zou goed zijn deze toetsen meer op inhoud en doel te controleren, maar het circuit waarbinnen dit gebeurt is helaas niet bepaald transparant. Net zo belangrijk is het echter om te begrijpen wat de genoemde kerndoelen zijn, en ook hier ontbreekt het aan transparantie. Je vraagt je bij lezen namelijk meteen af wat de bedoeling van deze som geweest kan zijn, en wat de kerndoelenschrijvers ermee willen of kunnen uitleggen:

De vijf verschillende manieren waarop kinderen Lieke’s probleem aanpakken zijn, zo lezen we, het uitgangspunt voor hoe een en ander in de les zou kunnen geschieden. Vier van de vijf manieren zijn gebaseerd op het (precies) uitrekenen van 4 maal 198, en (slechts) één manier is gebaseerd op schattend rekenen, 4 keer 200. Schattend rekenen wordt hier zo te zien gebruikt in de betekenis van ‘ongeveer’, dus 4 keer 198 is ongeveer 800 (cent neem ik aan) en dat is minder dan een tientje. Opmerkelijk is dat de komma’s geheel achterwege blijven. Wat ook

achterwege blijft is de preciezere uitleg dat 4 keer 1,98 minder is dan 4 keer 2, dus minder dan 10, en dat 10 gedeeld door 4 gelijk is aan tweeënfijftig en dus meer dan 1,98. Tenslotte kan opgemerkt worden dat de getallen in deze som voor wat het rekenen zelf betreft, precies of schattend, verre van generiek zijn.

Samenvattend, ik vind dit een slecht gekozen en slecht toegelichte som, waardoor het zich nog eens extra wrekt dat de uitleg van de leerdoelen geschiedt aan de hand van opgaven die kinderen te maken krijgen, en niet aan de hand van een beschrijving van technieken en methoden die beheerst moeten worden. Dat betreur ik, ook voor wat betreft het schattend rekenen. Dat is namelijk moeilijk, en een goede behandeling is bepaald niet gebaat bij deze typische TAL-aanpak die van de zelfontdekkende kindergeest veel te veel een ongeleid projectiel maakt.

Ook de acht ‘ankersommen’ die gebruikt zijn om de prestaties bij het niet-cijferend rekenen te meten worden slechts zeer summier besproken. Mij lijkt de geschiktheid van deze sommen als ankersommen aan enige twijfel onderhevig, nog los van de vraag waarom deze sommen niet-cijferend moeten worden aangepakt. Bij zeven van de acht is een cijferaanpak immers zonder veel problemen mogelijk, dus wat rechtvaardigt deze opgelegde handicap?

Twee van de drie sommen waarin ‘ongeveer’ gerekend moet worden zijn niet meer dan sommen waarin één van de inputgegevens van een bijvoeglijk naamwoord is voorzien; als antwoord van de overeenkomstige som volstaat dit inputgegeven zonder bijvoeglijk naamwoord. Hier wordt slechts ruis geschapen voor de analyse van de ‘meetgegevens’. De ene som waarin wel een ‘ongeveer’-vraag gesteld wordt op basis van precieze gegevens, gaat mank onder het generieke CITO-verschijnsel van de niet-generieke getallen. Dat verschijnsel zien we ook veel in de sommen waarmee de R’s kinderen het rekenen proberen aan te leren.

Gezien deze opmerkingen laat ik de stellingen die de schrijvers in dit verhaal presenteren aan de hand van deze ‘meetgegevens’ voor wat ze zijn.

Wat lezen we verder?

De schrijvers prijzen de traditionele methode Nieuw Rekenen met als illustratie de som $8 \times 22,50$ omdat het antwoord mag worden opgeschreven als $45 - 90 - 180$, niet verbazingwekkend voor wie de TAL-boekjes gelezen heeft. Je moet er weer naar raden, maar bedoeld wordt $8 \times 22,50 = 4 \times 45 = 2 \times 90 = 180$, op zich prima, maar de inconsistente notatie naast $200 - 20$, of $160 + 20$ zorgt voor een inmiddels herkenbare verwarring. De boodschap bij 5×98 en variaties daarop (waarin de 9 invariant is, en daardoor de relevantie van deze voorbeelden beperkt) voor wat betreft de kwaliteit van deze methode ontgaat me volledig. Hetzelfde geldt voor staartdelingen met een 1-cijferige deler.

Tenslotte: het pleidooi voor meer oefenen is op zich verheugend. Helaas spelen de slechte CITO-opgaven en ook opgaven zoals beschikbaar via de site rekenbeter.nl geen positieve rol. De volstrekt misleidende en niet onderscheidende naamgeving ‘kolomrekenen’ blijft een van de treurige erfenissen van het TAL-project. Dat de schrijvers dit ‘van links af rekenen’ niet alleen meer als doel zien, maar ook als middel op weg naar cijferend rekenen, is echter een bescheiden stapje vooruit. Bij Stelling 5 over de onderwijspraktijk wordt uitgelegd dat je voor vermenigvuldigen wel eerst cijferend moet kunnen optellen. Dat is bedoeld voor Opa Jan. In de TAL-boekjes is dit inzicht bij de uitleg van de diverse delingen voor wat betreft het cijferend aftrekken nog afwezig. Het vergt te veel ruimte om die TAL-boekjes hier in detail te bespreken, maar lees u vooral eens de op deze boekjes gebaseerde nieuwe

kennisbasis voor het rekenen op de PABO, zoals die door de HBO-raad in december aan de staatssecretaris is aangeboden. *Joost Hulshof, VU*

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Lijfrentes in de zeventiende en achttiende eeuw' uit het NAW-juninummer.

Erkenning voor de bijdrage van Johan de Witt

In het juninummer van het NAW verscheen van de hand van Jan Hogendijk diens uitstekende bijdrage over lijfrentes, zoals in de zeventiende eeuw door toedoen van Johan de Witt is ontwikkeld. Het onderwerp komt als geroepen en op het juiste moment, temeer daar de historische ontwikkeling van één en ander wel bekend is, doch in de loop der tijden wat verwaaid lijkt te zijn. In dit verband is het goed om een uitvoerig referentiekader bij de hand te hebben.

Naast alle zaken die Hogendijk in zijn Notes al noemt, wil ik de lezer op het volgende opmerkzaam maken. In 1937 vond het elfde internationale congres van actuarissen plaats. Bij Martinus Nijhoff (Den Haag) werd daartoe een Franse vertaling van De Witts *Waerdije* door P.J.L. de Chateleux en J.P. van Rooyen gepubliceerd, voorzien van commentaar en geschiedenis van het onderwerp. Het boekwerkje telt 45 pagina's, waarbij op pp. 41–43 aandacht is besteed aan het belang van De Witt's bijdrage, in binnen- en buitenland. Er wordt vermeld dat in de 18de, 19de en begin 20ste eeuw in Noorse, Zweedse en Engelse kringen voor De Witts werk aandacht en waardering is, doch dat dit niet zonder slag of stoot is gebeurd. Hier en daar lijkt De Witts werk nevenschikkend danwel ondergeschikt te zijn gemaakt aan werk in Engeland in de 17e eeuw, maar De Chateleux (en Van Rooyen trouwens ook) benadrukt dat

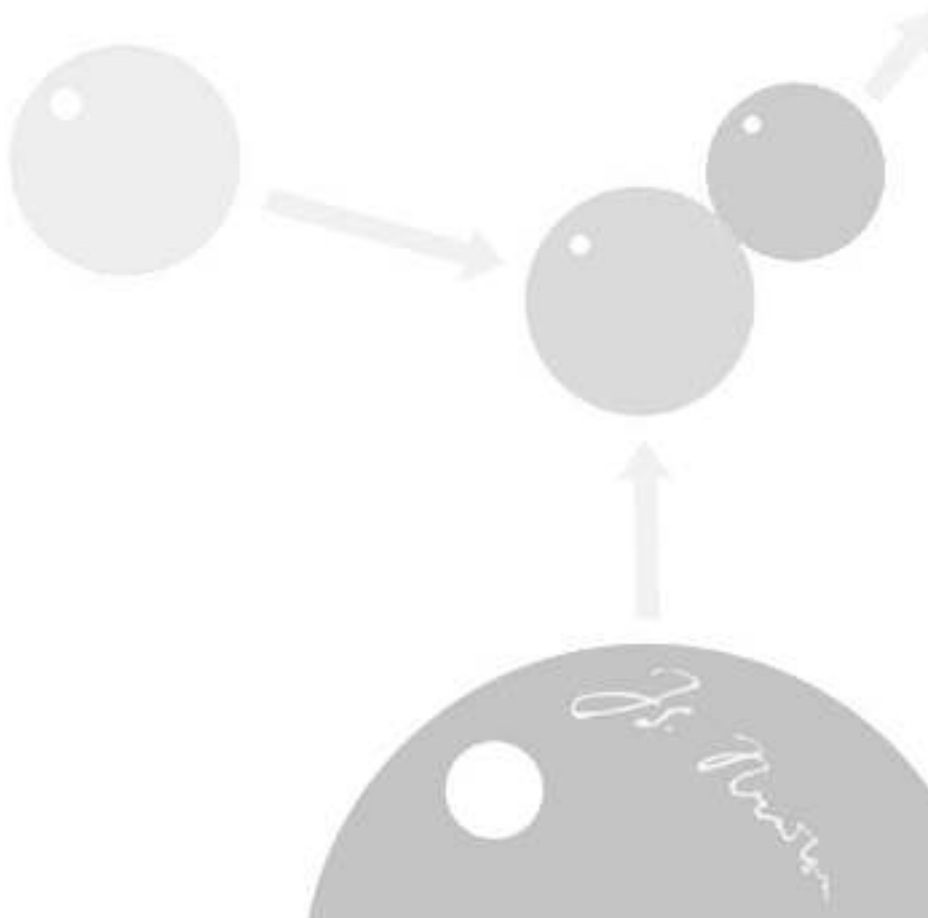
men het er toch wel over eens is dat "... il y a tout lieu de considérer Johan de Witt comme le créateur de la science des assurances sur la vie". Dat is mooi natuurlijk.

Des te ergerlijker is het, dat in het septembernummer in 2009 van *Scientific American*, dat geheel gewijd is aan de 50 meest doorbrekende uitvindingen en ontdekkingen op wereldniveau, het begrip annuïtenrekening geheel aan Graunt en Halley wordt toegedicht (ander werk, dus ook Nederlands, is niet genoemd), en dat het is ontstaan naar aanleiding van de Grote Brand in Londen! Daarom ben ik zo blij met Hogendijks bijdrage die heel goed zegt wat De Witt en Halley hebben gedaan (iets onderscheidenlijks, en verschillend in tijd). (Een door mij met bronnen omklede brief aan *Scientific American* over de tekortkomingen van het bewuste artikel aldaar, december 2009, is niet geplaatst geworden wegens ruimtegebrek.) Maar gelukkig valt er over dit onderwerp ook te zeggen dat de Harvard-professor Julian Lowell Coolidge in *The Mathematics of Great Amateurs* (verschenen in 1949) een hoofdstuk wijdt aan De Witts werk over Kegelsneden en Annuïteiten. Hij verwijst naar originele bronnen (zoals Robert Gibbs Barnwell, *Life and Time of John de Witt*, New York, 1856, met name pp. 127–131) en spreekt zijn waardering over De Witt expliciet uit.

Wat naslagwerk betreft noem ik hier ook *Biografieën bedeutender Mathematiker* (1978) van Wolfgang Arnold en Hans Wussung; zij vermelden De Witt, Huygens, Hudde en vervolgens Graunt.

Een ieder die over het werk en leven van Johan de Witt uitvoerig wil worden geïnformeerd, kan ik verwijzen naar: Herbert Rowen, *John de Witt: Grand Pensionary of Holland, 1625–1672*, 1978, Princeton University Press; met name hoofdstuk 20 is voor ons doel van belang.

Robert van der Waall, Huizen



Jan Aarts

Delft University

P.O. Box 5031

2600 GA Delft

johannesaarts@gmail.com

Book review Norman Wildberger: Divine Proportions

From a rational angle

By clever changes of both the distance function and the angle measure a new geometry comes into being. Though the new distance function and angle measure are not linear, in many situations the new trigonometry results in simpler computations. The new theory has unexpected applications in new areas, notably finite geometries. Many classical results of the Euclidean Geometry (that in the good old days were taught in secondary school) have their counterpart in finite geometries. Norman Wildberger presents an outline of the new trigonometry. Jan Aarts discusses the merits of Wildberger's approach.

According to the preface, "This book introduces a remarkable new approach to trigonometry and Euclidean geometry, with dramatic implications for mathematics teaching, industrial applications and the direction of mathematical research in geometry."

The proposed approach to geometry allows for the development of a geometry over any field of characteristic $\neq 2$ very similar to the usual Euclidean geometry. The book is not written as a textbook of rational trigonometry, it is rather intended as an introduction for a mathematically mature audience.

A bird's-eye view of rational geometry

A large part of the book concerns plane geometry. The geometry is defined over a field F with characteristic $\neq 2$ whose elements are called *numbers*. Most of the examples relate to geometries over the field $\mathbf{F}_p$ of the integers modulo the prime number p , the field of the rational numbers, the reals or the complex numbers. A *point* of the plane (over F) is an ordered pair of numbers: $A = [x, y]$ and a *line* is a 3-proportion: $l = \langle a : b : c \rangle$. The point A is on the line l precisely when $ax + by + c = 0$. For

example, in the field F_5 of integers modulo 5, the line $l = \langle -2 : 1 : -3 \rangle$ passes through the points $[0, 3]$, $[1, 0]$, $[2, 2]$, $[3, 4]$, $[4, 1]$, and no other points.

The basic notions are *parallel* and *perpendicular*, whose definitions do not come as a surprise. The lines $l_1 = \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ and $l_2 = \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ are *parallel* if and only if $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. The lines l_1 and l_2 are *perpendicular* if and only if $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

The crux of the book is that the notions of distance and angle are replaced by quadrance and spread, respectively. The *quadrance* $Q(A, B)$ between the points $A = (x_1, y_1)$ and $B = (x_2, y_2)$ is the square of the 'usual distance', that is

$$Q(A, B) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

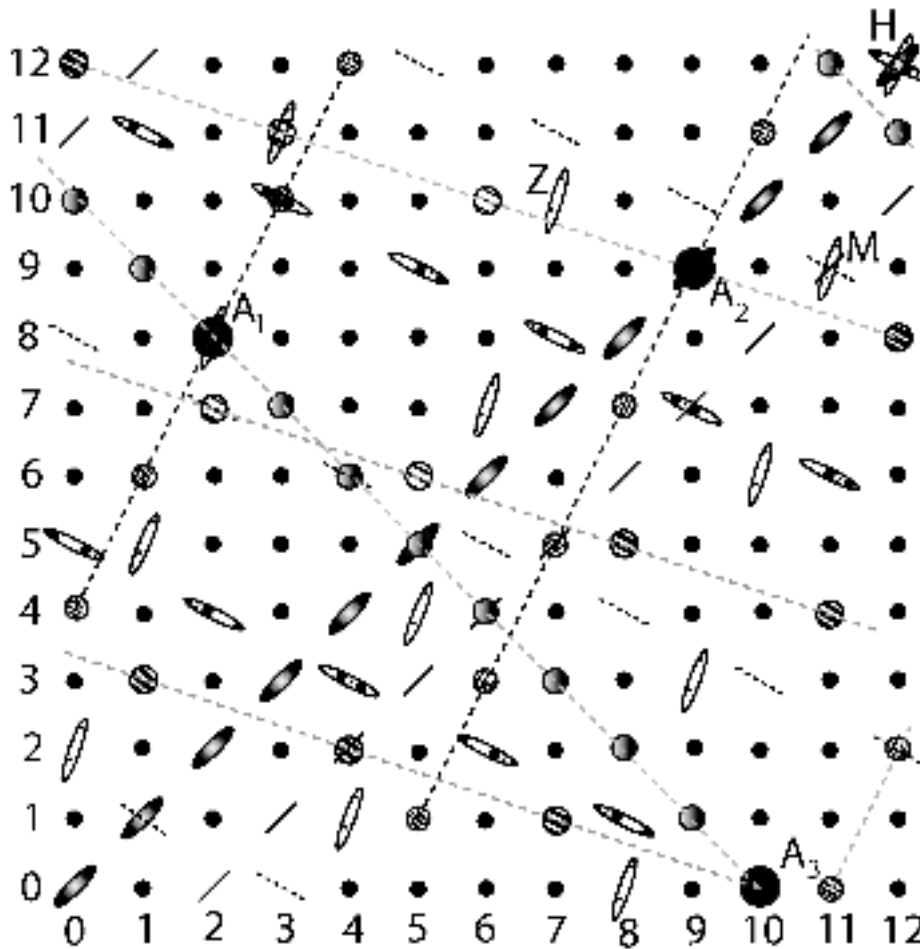
As said before this theory also applies to finite geometries. However, there is a caveat. In plane geometries over finite fields (or over the complex numbers) there are so-called *null lines* that at first glance have an unusual behavior. The line $l = \langle a : b : c \rangle$ is called a null line if $a^2 + b^2 = 0$. So null lines exist whenever -1 is a square. A null line is parallel to

itself (as it should be), but it is also perpendicular to itself. If the points A and B are distinct, then it may be verified that the line AB is a null line if and only if $Q(A, B) = 0$. In the example above, the line l is a null line and the five points on the line l have mutual quadrance 0. If neither of the lines $l_1 = \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ and $l_2 = \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ is a null line, the *spread* $s(l_1, l_2)$ between them is the number

$$s(l_1, l_2) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

Two lines are parallel if and only if the spread between them is 0. Two lines are perpendicular if and only if the spread between them is 1. If one of the lines is a null line the spread is not defined. The *cross* of lines l_1 and l_2 is defined to be $c = 1 - s$. Later on in the book, it is shown that s and c are equal to the $\sin^2(\alpha)$ and $\cos^2(\alpha)$, respectively, where α is one of the angles enclosed by l_1 and l_2 . Note that the spread does not distinguish between supplementary angles.

The most important objects of study are the triangle, its special lines and the circles related to it. If A_1, A_2 and A_3 are three points in the plane (over a field F), we denote by Q_1 the quadrance between A_2 and A_3 and by l_1 the line through the points A_2 and A_3 , and similarly for Q_2, l_2 and Q_3, l_3 . The triangle $A_1A_2A_3$ is said to be non-null if none of its sides is a null line. The Pythagoras' Theorem holds in the new geometry. It reads as follows: the lines l_1 and l_2 of a non-null triangle

Figure 1 Triangle $A_1A_2A_3$ and some of its special lines and points

are perpendicular if and only if $Q_3 = Q_1 + Q_2$.

The *quadrea* A of the triple $\{A_1, A_2, A_3\}$ is the number

$$A = (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 - 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2).$$

The quadrea A is equal to 16 times the square of the area of the triangle $A_1A_2A_3$, and $A = 0$ precisely when the points A_1, A_2 and A_3 are collinear.

Keeping in mind the similarity between spread and cross on the one hand and $\sin^2$ and $\cos^2$ on the other hand, the following statement do not come as a surprise. The *spread law* holds for any triangle whose quadrares are non-zero:

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}.$$

The *cross law* reads: if c_3 is the cross of the lines A_2A_3 and A_1A_3 then

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3.$$

Instead of the fact that the angles of a triangle

add up to 180° , here the *triple spread formula* arises for the spreads s_1, s_2 and s_3 of the triangle:

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 - 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - 4s_1s_2s_3 = 0$$

The book is written in the style of a classical textbook of analytic geometry and trigonometry with an abundance of formulas. In the first chapters one will find formulas for the concurrence of the lines, the collinearity of three points, and later on formulas for the foot of the altitude, the perpendicular bisector, the orthocenter, the circumcenter, etc. The verification of properties usually boils down to plugging in coordinates. The author advocates the use of computer algebra packages for the derivation of complicated formulas. That is a rather dull way of doing geometry. It is more fun to use elementary computations in order to verify the results for some selected examples, preferably over a finite field.

An example

In this section the properties are discussed of a triangle $A_1A_2A_3$ in the plane over the

field F_{13} of the integers modulo 13, where $A_1 = [2, 8]$, $A_2 = [9, 9]$, $A_3 = [10, 0]$. The quadrea $Q_1 = Q(A_2, A_3)$ of the side opposite A_1 is 4. Similarly $Q_2 = Q(A_1, A_3) = 11$ and $Q_3 = Q(A_1, A_2) = 11$, so no side is a null line and the triangle is isosceles. For the line l_1 of the side A_2A_3 opposite A_1 one gets: $l_1 = \langle 9 : 1 : 1 \rangle$ and similarly $l_2 = \langle 1 : 1 : 3 \rangle$ and $l_3 = \langle 12 : 7 : 11 \rangle$. It follows that $s_1 = s(l_2, l_3) = 10$, $s_2 = s(l_1, l_3) = 8$ and $s_3 = s(l_1, l_2) = 8$, confirming the spread law.

The altitude h_3 on A_1A_2 is of the form $h_3 = \langle 7 : 1 : c \rangle$. As A_3 lies on h_3 one has $h_3 = \langle 7 : 1 : 8 \rangle$ and its foot is the point $[3, 10]$. This can be used to compute the values of s_1 and s_2 in an alternative way. The perpendicular bisector m_3 of A_1A_2 is $m_3 = \langle 7 : 1 : 5 \rangle$. In a similar way one finds the equations $h_2 = \langle 12 : 1 : 0 \rangle$ and $m_2 = \langle 12 : 1 : 2 \rangle$ for the altitude and the perpendicular bisector on A_1A_3 , respectively. From this one can deduce that the orthocenter H is $[12, 12]$ and the center M of the circumcircle of triangle $A_1A_2A_3$ is $[11, 9]$. The centroid Z of the triangle, that is, the point of concurrence of the medians, is $[7, 10]$. One

may verify that $Z = \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}H$, so these three points lie on the same line, the Euler line. As the triangle is isosceles the Euler line coincides with the altitude h_1 on $[A_2A_3]$. For each i , the quadrance $Q(M, A_i) = 4$ and this number is denoted by K , the *quadrance K of the circumcircle*. The spread law may be extended to $\frac{s_i}{Q_i} = \frac{1}{4K}$ for each i .

One may also consider the given triangle $A_1A_2A_3$ with $A_1 = [2, 8]$, $A_2 = [9, 9]$, $A_3 = [10, 0]$ in the plane over the field of rational numbers. In this case $M = [\frac{49}{8}, \frac{33}{8}]$, $H = [\frac{35}{4}, \frac{35}{4}]$ and $Z = [7, \frac{17}{3}]$. It can be expected that all the occurring numbers are rational. For this reason this branch of geometry is named rational trigonometry. As it may be applied to finite geometries as well, it is also called universal.

What else is new?

The book is loaded with results of classical geometry that have a counterpart in the new geometries. There is a section on proportions discussing among others the theorems of Ceva and Menelaus. Another section deals with the incircle and the excircles of a triangle.

A section that I particularly enjoyed is the one on regular stars and polygons. A regular n -star is a cyclically ordered set consisting of n lines $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$, $l_n = l_0$ such that l_{i+1} is the reflection of l_{i-1} in l_i , for all i . It is clear that the existence of regular n -stars and regular n -gons are intimately related. One of the results is that a regular star of order 3 exists precisely when the number 3 is a non-zero square. It follows for example that there are no regular stars of order 3 in the planes over any of the fields $\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_5, \mathbf{F}_7$, but that such stars do exist in the plane over the field $\mathbf{F}_{11}$. There is no regular star of order 3 in the plane over the rational numbers, in contrast with the situation in the plane over the real numbers.

There is a section devoted to conics that can be defined metrically, including circles and ribbons, parabolas, quadrolas and gram-molas. Another section deals with cyclical quadrilaterals. Showing that so many ideas of classical geometry carry over to finite geometries is a remarkable achievement, indeed. The book certainly will kindle the reader's curiosity and lead to the invention of new results.

Editorially speaking, the book is well produced. The numbering of the items is rather unconventional. The theorems are numbered consecutively, the exercises are numbered per chapter, while definitions are not numbered at all. This does not lead to any problems as the author gives a page-reference for

all citations.

I have some reservations about the dramatic implications for mathematics teaching that are claimed by the author. First of all the trigonometric functions play an important role in mathematics. Just think of the polar representation of complex numbers, the group of rotations and differential equations. The traditional introduction of the trigonometric functions as proportions in a rectangular triangle points directly to important applications. I think that the author overemphasizes the rational character of quadrance and spread. A student will hardly realize that the trigonometric functions are transcendental, let alone ever grasp the meaning of transcendence. Math instruction is about numbers and shapes. Gradually it changes into elementary algebra and geometry. One of the important goals of geometry instruction is the development of the ability to perceive spatial structure. The picture I made of the example in the previous section with all the lines drawn in, looked like a pointillistic miniature, rather than an appealing illustration of some geometric object.

In advocating his wonderful invention of the new geometry the author suppresses the beneficial employment of vectors in geometry. This statement may be clarified by the following observations. As was stated above, the non-null lines $l_1 = \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ and $l_2 = \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ are perpendicular if and only their cross c equals zero. From the formula of the spread and the equality $s = 1 - c$, for the cross we have the formula

$$c(l_1, l_2) = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}.$$

So it is quite natural to interpret (a_1, b_1) and (a_2, b_2) as normal vectors of the lines l_1 and l_2 and $a_1a_2 + b_1b_2$ as their inner product. Moreover, the vectors (a_1, a_2) and (b_1, b_2) are orthogonal (and so are the lines l_1 and l_2) as their inner product is 0. I found that the systematic use of the vector notation substantially simplifies many of the proofs.

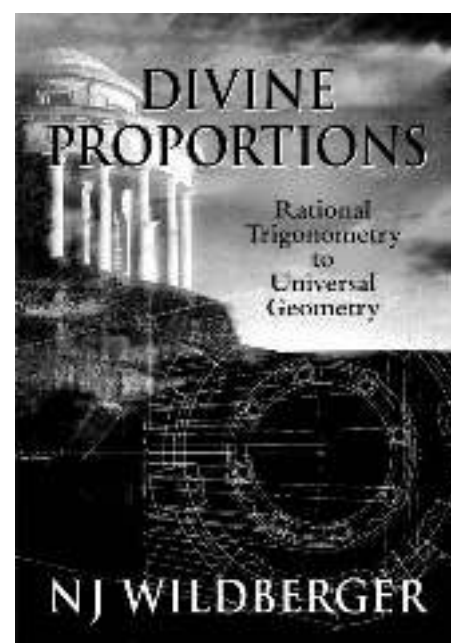
In the final part, the applications, the plane geometry is employed to problems in solid geometry, some of which may be labeled 'applied'. I enjoyed the chapter on Platonic solids. Here the spreads between the faces of the solids are computed, resulting in the values $\frac{8}{9}, 1, \frac{8}{9}, \frac{4}{9}$ and $\frac{4}{5}$ for tetrahedron, cube, octahedron, icosahedron and dodecahedron, respectively.

In the preface the author states that the message of the book is controversial. On the

Internet one may find many reviews of the book and there is a lively discussion about the merits of the new geometry. Summarizing my opinion of the book, my advice to the reader is to neglect the vast amount of formulas and to just enjoy the original approach to a new geometry. It is fun. 

Acknowledgement

I thank Reinie Ern  for carefully reading the manuscript and suggesting some linguistic improvements. Thanks also go to Swier Garst who converted my handmade picture of Figure 1 into an electronic picture.



N.J. Wildberger, *Divine Proportions*, 20 September 2005, Wild Egg Books, \$89.95.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009

Hete zomerdagen voorspellen

Kun je uit grootschalige atmosferische stromingspatronen voorspellen wanneer Nederland te maken krijgt met extreem warme zomerdagen? Het KNMI spitte deze vraag aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie toe op extreme temperaturen.

Computermodellen van het klimaat op aarde rekenen op een denkbeeldig rooster dat over de aardbol wordt gespannen. Op dit rekenrooster liggen de rekenpunten typisch tussen honderd en tweehonderd kilometer uit elkaar. Met de bewegingswetten van Newton en de wetten van de thermodynamica worden vervolgens grootheden als temperatuur, druk en windsnelheid in de atmosfeer berekend. Stel, dat je het computermodel laat beginnen met de gemeten waarden van het weer in 1950. Vervolgens laat je de computer vijftig jaar doorrekenen hoe het klimaat zich in die tijd ontwikkelt. Ten slotte kun je dan het klimaatmodel valideren door de uitkomsten van de berekening te vergelijken met de werkelijke gegevens uit de periode 1950–2000. Als deze validatie goed genoeg blijkt, kun je het computermodel vervolgens gebruiken om het klimaat van bijvoorbeeld de komende vijftig jaar te voorspellen, onder de aanname van een bepaald scenario voor de koolstofdioxide-uitstoot. Een belangrijk probleem is echter dat het rekenrooster te grof is om te voorspellen wat de gevolgen van een veranderend klimaat zijn op elke plek in Nederland. Toch zou je het liefst willen weten wat een verandering van grootschalige stromingspatronen voor Nederland betekent, vooral als het gaat om extreem weer. Worden de zomers warmer? Plenst er in de winter meer regen?

Sommige grootschalige atmosferische circulatiepatronen blijken vaak samen op te treden met warme zomerdagen in Nederland, vertelt Frank Selten, onderzoeker bij het KNMI. “Een van deze grootschalige patronen is een hogedrukgebied boven Zuid-

Scandinavië. Omdat deze structuur de doorgang van depressies naar het Europese vasteland blokkeert, noemen we dit een ‘blokkerend hoog’. Zo’n blokkerend hoog blijft vaak twee weken bestaan. In deze tijd is het weer in Nederland vrij stabiel. Er is dan minder wind en minder bewolking dan gemiddeld, en er komen vrij veel hete dagen voor. Bij het KNMI zoeken we naar een objectieve statistische methode om uit grootschalige atmosferische circulatiepatronen te voorspellen wanneer Nederland te maken krijgt met extreme temperaturen, extreme wind of extreme neerslag.” Het KNMI spitte de vraag aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie (Corinna Ziemer, Univ. of Bremen; Katarzyna Marczyńska, Anna Szczepańska, Joanna Zyprych, Poznań Univ.; Jos Hageman, Timo Doeswijk, WUR) toe op extreme temperaturen: Kun je een methode vinden die op grond van de grootschalige luchtcirculatiepatronen kan voorspellen wanneer het in De Bilt een extreem warme zomerdag wordt? “Om dat te onderzoeken,” vertelt Selten, “hebben we de studiegroep de temperatuurmetingen gegeven van 1958 tot 2000 voor elke dag in de zomermaanden juli en augustus. Alle metingen komen van De Bilt. Daarnaast kregen ze de beschikking over de luchtcirculatiegegevens in een gebied dat loopt van Noord-Amerika tot diep in Rusland, en van Noord-Afrika tot de Noordpool.”

Legendrepolynomen

Over het gegeven geografische gebied ligt een rooster van 49 punten in oost-westrichting en 28 punten in noord-zuidrichting. Dat levert in totaal $28 \times 49 = 1372$ punten op waarop de

druk bekend is. Een circulatiepatroon wordt dan beschreven in een matrix van 28 rijen bij 49 kolommen. “Wiskundig gesproken,” zegt Timo Doeswijk van de studiegroep, “zoeken we naar een functie met als invoer het drukpatroon op een bepaalde dag en als uitvoer de maximale temperatuur op die dag.” Deze functie beeldt een 1372-dimensionale ruimte af op een eendimensionale ruimte. Dit betekent dat het probleem overgedetermineerd is. Er is geen unieke oplossing en de oplossing is gevoelig voor kleine veranderingen in de dataset. Daarom hebben de wiskundigen zich geconcentreerd op datareductie: eerst het aantal vrijheidsgraden op een slimme manier terugbrengen voordat de functie wordt bepaald. Doeswijk: “Het aantal beschikbare roosterpunten is groot en er bestaat ook een grote afhankelijkheid tussen de datapunten. Dit maakt conventionele methoden slecht bruikbaar. Hierdoor hebben we gezocht naar manieren om de luchtdrukgegevens samen te vatten in een aantal hoofdstructuren. Daarvoor hebben we twee wiskundige technieken onderzocht: Legendrepolynomen en een techniek die watershedding heet.”

Bij de eerste methode probeerden de wiskundigen om zowel de oneven rijen als de oneven kolommen van de matrix te beschrijven met een vierde-orde Legendrepolynoom met drie parameters. Dat levert $(14+25) \times 3 = 117$ parameters op, die moeten worden bepaald. “Dat is nog steeds een fors systeem,” zegt Doeswijk. De wiskundigen namen de lokale temperaturen die tot de vijf procent warmste datapunten behoorden, en vonden 130 datapunten op evenzoveel dagen. De helft van deze temperatuurmetingen namen ze om hun model op te stellen. Dat is de kalibratiestap. De andere helft namen ze om te onderzoeken of het model vervolgens ook de extreme



Figuur 1 Extreme zomerse regenval

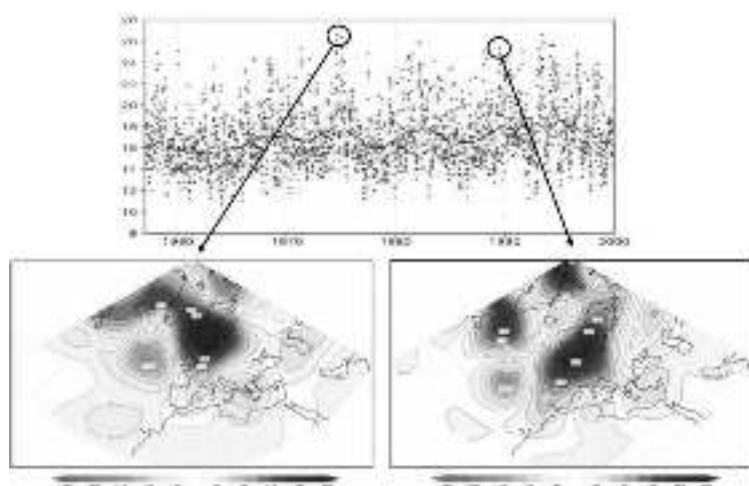
temperatuur uit het drukveld kan voorspellen. Dat is de validatiestap. “Uit de validatie blijkt helaas dat het niet lukt om te zeggen of er een dag met een extreme temperatuur aankomt”, concludeert Doeswijk. “Vervolgens hebben we onderzocht of het resultaat beter zou worden wanneer we het drukveld beschrijven met tweedimensionale polynomen van de zevende of achtste orde, in plaats van met eendimensionale Legendrepolynomen. Dat brengt het aantal parameters terug tot zo’n vijftig. Maar ook deze aanpak leidt niet tot een goede voorspelling van extreem warme dagen.”

Waterkering

De tweede aanpak die de studiegroep onderzocht, is gebaseerd op de watershed-techniek (waterkering). Het voorbeeld waaruit deze werkwijze afkomstig is, is een topografische toepassing. Een druppel water die boven Amerika valt, eindigt uiteindelijk ofwel in de Atlantische Oceaan ofwel in de Stille Oceaan. De denkbeeldige lijn die deze twee gebieden scheidt, heet de ‘watershed’ ofwel waterkering. In de beeldanalyse wordt het als volgt toegepast: Stel, je begint met een ingewikkeld beeld waarin elke pixel een bepaalde grijswaarde heeft. Je zoekt vervolgens naar een compactere beschrijving van dit beeld door

gebieden die qua grijswaarde op elkaar lijken allemaal dezelfde pixelgrijswaarde te geven. Als je de grijswaarden nu denkbeeldig verlaagt naar een bepaalde hoogte, dan stel je het beeld voor als een berglandschap met pieken van allerlei hoogten en dalen van allerlei diepten. Vervolgens vul je alle valleien denkbeeldig met water, tot het punt waarop elke vallei helemaal is gevuld. Daar leg je een waterkering neer — een watershed. Het getransformeerde beeld bestaat dan nog maar alleen uit de contouren van de waterkering, waarbij elke gesloten contour een gebied met dezelfde grijswaarde omsluit. Dat levert een aanzienlijke reductie van de hoeveelheid beeldinformatie. Alleen de belangrijkste contouren blijven zo zichtbaar.

“Ons idee was om het drukveld ook te zien als een soort berglandschap van pieken en dalen,” zegt Doeswijk, “en met de waterkeringstechniek te zoeken naar de belangrijkste contouren in het drukveld. De vraag was of je op die manier een correlatie kunt vinden met de lokale extreme temperatuur in De Bilt. Helaas hebben we moeten concluderen dat ook dat niet is gelukt. Het is moeilijk te zeggen waar dat aan ligt. Misschien hebben we de informatie uit het drukveld wel te veel gereduceerd. Of misschien moet je er wel meer meteorologische kennis aan toevoegen.”



Figuur 2 Hoge Nederlandse zomertemperaturen in 1975 en 1990, geassocieerd met grootschalige hogedrukgebieden

Grootst gemene deler

Frank Selten van het KNMI vindt de twee aanpakken van de studiegroep origineel, maar geeft eerlijk toe dat ze er waarschijnlijk niets aan hebben. “De studiegroep heeft zich vooral gericht op de beschrijving van de grootschalige structuren, en is eigenlijk niet echt toegekomen aan het leggen van een link met de lokale extreme temperatuur. Zij liepen aan tegen het probleem dat er heel veel informatie zit in de grootschalige structuren, terwijl je alleen maar iets wilt zeggen over een enkel stukje informatie: de temperatuur op één bepaalde plek. Dat ze vastliepen, is geen schande. Het probleem dat wij hebben voorgelegd, is eigenlijk al een heel oud probleem uit de meteorologie. Hoewel er in de loop van de tijd allerlei oplossingsmethoden zijn voorgesteld, bestaat er geen consensus over welke de beste is. Ik denk ook niet dat er één oplossing voor het probleem bestaat.”

Selten had de hoop dat de wiskundigen ofwel de methode zou bevestigen waaraan het KNMI zelf al had gewerkt, ofwel dat ze zelfs met een betere methode zouden komen. Om de gedachten van de wiskundigen niet al van tevoren de kant op te sturen van de KNMI-methode, hebben ze deze aanpak dan ook niet voorgelegd. Dat mocht niet baten, want van bevestiging of verbetering bleek geen sprake. Voorlopig gaat het KNMI daarom verder met de methode die ze zelf al hadden ontwikkeld. “Wiskundig gezien werkt onze methode met een lineaire regressie op een subset van data”, legt Selten uit. “We hebben een grote dataset van temperatuurmetingen over de jaren heen. Daarvan nemen we alleen de tien procent warmste metingen. We hebben laten zien dat we met deze dataset een goede correlatie vinden tussen de voorspellingen van het model en de gemeten waarden in de zomer. Wat betreft de grootschalige structuren, vinden wij eigenlijk een soort grootste gemene deler: een structuur die redelijk overeenkomt met alle grootschalige structuren die je in de praktijk ziet. Elk grootschalig hogedrukgebied is in de praktijk namelijk weer ietsje anders.”

Met deze methode zal het KNMI uit de voorspelling voor de grootschalige atmosferische ontwikkelingen proberen te voorspellen of bepaalde weersextremen in Nederland in de toekomst vaker gaan voorkomen.

Dit is een verslag van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009, van 26–30 januari 2009 in Wageningen. Voor de bijbehorende wetenschappelijke publicatie, waarin de gebruikte wiskundige modellen en methoden uitvoerig staan beschreven, verwijzen we u naar de website www.swi2009.wur.nl.

In de verdediging

| In defence



On continued fraction algorithms

Ionica Smeets

Wie de wiskundemeisjes volgt, weet vast dat Ionica Smeets als aio in Leiden 'werkte aan kettingbreuken, benaderingen en algoritmen'. Vlak voor de verdediging van haar proefschrift *On continued fraction algorithms* op 16 juni j.l. was het het juiste moment om haar te vragen eens wat gedetailleerder over haar werk te vertellen.

Kettingbreuken en benaderingen

Zoals bekend, kun je ieder irrationaal getal x op precies één manier schrijven als een oneindig lange kettingbreuk. Als je deze oneindig lange kettingbreuk afkapt, krijg je een benaderingsbreuk, die als een gewone breuk te schrijven is. Je kunt je dan afvragen hoe goed deze breuk $\frac{p}{q}$ het getal x benadert. Een veel gebruikte maat voor de kwaliteit van een benadering is $q^2|x - \frac{p}{q}|$. Een benadering is goed als de kwaliteit zo klein mogelijk is: dan heb je zowel een kleine noemer als een korte afstand tot x . Het standaard kettingbreukalgoritme vindt alleen maar benaderingen met kwaliteit kleiner dan 1 en al in 1798 bewees Legendre dat iedere breuk $\frac{p}{q}$ die x benadert met een kwaliteit kleiner dan $\frac{1}{2}$ gevonden wordt door het kettingbreukalgoritme. Borel bewees in 1905 dat bovendien één in elke drie opeenvolgende benaderingen heel goed is.

In het eerste deel van haar proefschrift bestudeert Smeets zulke reguliere kettingbreuken, maar gebruikt ze een andere kwaliteitsmaat voor wat een goede benadering is. Geïnspireerd door de stelling van Borel beantwoordt ze voor deze maat de vraag wat je kunt zeggen over de kwaliteit van de n -de benadering als gegeven is dat de $n - 1$ -ste en $n + 1$ -ste benaderingen heel goed zijn. En andersom: hoe goed moet een benadering zijn die tussen twee slechte benaderingen inzit? Daarnaast berekent ze ook de kans dat zulke situaties voorkomen.

Natuurlijke uitbreidingen en lapjesdekentjes

Vervolgens bestudeert Smeets zogenaamde α -Rosen-kettingbreuken. Allereerst generaliseert ze hiervoor de stellingen van Borel (die het minimum van de kwaliteit in een reeks opeenvolgende benaderingen geeft) en Hurwitz (die de kleinste kwaliteit geeft die oneindig vaak voorkomt). Maar het mooiste resultaat in haar proefschrift vindt ze het werk aan de natuurlijke uitbreiding voor α -Rosen-kettingbreuken, en dan vooral de nieuwe, meetkundige techniek die ze daarvoor gebruikt: 'quiltten'. Smeets bepaalt de natuurlijke uitbreiding voor een groter interval van α dan normaal gebruikelijk is, en ze kijkt hoe ver de parameter α kan worden opgerekt voordat de natuurlijke uitbreiding in stukken uit elkaar valt.

Smeets noemt het 'quiltten', waarmee ze de natuurlijke uitbreiding construeert, een nogal plastische techniek. De naam quiltten is gekozen vanwege de overeenkomst met de techniek om lapjesdekentjes te maken. Zij begint met de al bekende natuurlijke uitbreiding voor het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ en plakt daar rechthoeken aan en haalt

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

er rechthoeken af. Vervolgens kijkt ze naar de baan van die rechthoeken. De methode is heel krachtig; weggehaalde en toegevoegde rechthoeken blijken na een eindig aantal stappen prachtig samen te vallen, waardoor sterke uitspraken over de entropie van het onderliggend dynamisch systeem kunnen worden gedaan. Die entropie verandert bijvoorbeeld zodra de natuurlijke uitbreiding in twee stukken uiteenvalt.

Het laatste hoofdstuk gaat over meerdimensionale kettingbreuken, over hoe je simultane Diophantische benaderingen vindt. Smeets geeft hiervoor een algoritme, dat in feite een geïtereerde versie van het LLL algoritme is. Het algoritme zoekt efficiënt benaderingen met een gegarandeerde kwaliteit die alleen afhangt van de dimensie.

Leuke periodes van intensief samenwerken

Het leven als aio beviel Smeets heel erg goed, hoewel ze onderzoek doen op zich best zwaar en eenzaam vond. Een groot deel van het werk doe je in je eentje, en dat bleek ze niet zo leuk te vinden. Het is dan ook niet zo verrassend dat ze een periode van intensief samenwerken in haar laatste jaar noemt als de mooiste tijd. Thomas Schmidt uit Oregon, met wie ze al geregeld had gewerkt, was een paar weken te gast in Delft. Met hem en copromotor Cor Kraaikamp werkte ze hard aan het hoofdstuk over quilten. Ze heeft ook goede herinneringen aan een vergelijkbare tijd van samenwerking aan het laatste hoofdstuk met Wieb Bosma uit Nijmegen. Het waren perioden vol opwinding: 's avonds werkte ze thuis nog snel dingen uit, om de volgende ochtend met kloppend hart weer aan te komen rennen op het instituut om de anderen te laten zien wat ze gedaan had en om te horen wat zij op hun beurt voor ideeën hadden. Samen voor het bord staan, elkaar dingen uitleggen en discussiëren over hoe het moet — dit samenspel vond ze het allerleukste aan haar onderzoek.

Een absoluut dieptepunt was er ook. In wat de eindversie van haar proefschrift had moeten zijn, zag haar promotor Rob Tijdeman een fout. Smeets zag haar wereld instorten. Ze was erg somber en dacht dat het nooit meer goed zou komen. Uiteindelijk bleken er slechts wat lemma's veranderd en andere dingen aangepast te moeten worden en bleven alle resultaten overeind. Hoewel de fout dus met extra werk hersteld kon worden en niet zo ingrijpend was, was het idee dat al het werk voor niets was geweest heel slopend. Gelukkig waren haar promotoren er in die tijd voor haar, en werd ze door hen heel erg uit de put gehaald. Door deze ramp in de krant met half Nederland te delen, kreeg ze bovendien van allerlei kanten steunbetuigingen en ontving ze brieven van 'best wel bekende wiskundigen' die vertelden zelf ook dat soort momenten te hebben gekend. Dat alles was zeer opbeurend.

Nergens anders vind je zo'n vrije baan

In Leiden kreeg ze de kans om zich naast haar onderzoek te ontwikkelen op het gebied van de journalistiek en het uitleggen van wetenschap aan een breed publiek. Ze had vanwege haar nevenactiviteiten geen onderwijstaak, waardoor de combinatie aio-wiskundemeisje (en meer) te doen was. En juist omdat ze er allerlei dingen naast kon doen en daarvoor ook alle vrijheid kreeg, vond ze het leven als aio erg leuk. "Nergens anders vind je zo'n vrije baan, waar je al die dingen kunt combineren en je bijvoorbeeld gewoon even bij je werk weg kunt om een populaire lezing te geven."

Inmiddels werkt Smeets voor de helft van de week met Bas Haring bij Publiek Begrip van Wetenschap aan de Universiteit Leiden. Ze doen samen onderzoek naar hoe je exacte wetenschap goed aan mensen uit kunt leggen. De rest van de week is ze freelance wetenschapsjournalist en schrijft ze artikelen, geeft ze voordrachten en presenteert ze wetenschapsdagen. Beide dingen doet ze met veel plezier.

De laatste stelling

'Jazeker' waren er stellingen bij haar proefschrift. Ze is het blijst met de laatste: 'zo belangrijk is relativiseren nu ook weer niet'. Ze heeft er een beetje voor moeten knokken omdat hij niet zo wetenschappelijk was, maar hij is erin gebleven. En daar is ze, evenals met het totale resultaat, heel tevreden mee!



Space-time discontinuous Galerkin finite element method for two-fluid flows

Henk Sollie

Op 16 april j.l. promoveerde Henk Sollie aan de Universiteit Twente op het proefschrift *Space-time discontinuous Galerkin finite element method for two-fluid flows* dat hij schreef onder begeleiding van Jaap van der Vegt en Onno Bokhove. Deze dag markeerde niet alleen het eind van zijn promotietraject, maar was voor Sollie ook de mooiste die hij als aio beleefde. Een gevoel van tevredenheid maakte zich van hem meester, het gevoel dat hij een goed stuk werk had afgeleverd. De promotieceremonie en het feest erna in de aanwezigheid van familie en bekenden waren echt de kroon op zijn werk.

Twee-vloeistofstromingen

Meer-vloeistof- of meer-fasestromingen worden gekenmerkt door de aanwezigheid van meerdere vloeistoffen en/of gassen die gescheiden worden door grenslagen. Dit type stromingen komt veel voor in de natuur en is ook belangrijk in industriële processen. Voorbeelden uit de natuur zijn oppervlaktegolven, olievlekken op water, of iets 'simpels' als regen. Toepassingen in de chemische industrie, waarop Sollie in zijn proefschrift de door hem ontwikkelde methoden heeft getest, zijn bellencolommen en gefluïdiseerd-bed-reactoren.

Bellencolommen zijn vaten met vloeistof, waar een gas doorheen wordt geleid, en worden toegepast om een gas op te lossen in een vloeistof. In de waterzuivering, waarbij water in contact wordt gebracht met bacteriën, worden de bacteriën zo van zuurstof voorzien. En bij staalproductie laat men zuurstof en argon door vloeibaar ijzer borrelen.

Een gefluïdiseerd-bed-reactor wordt gebruikt voor meer-fase chemische reacties. In zo'n reactor wordt een gas of een vloeistof door een granulaire vaste stof geleid, die gewoonlijk als katalysator optreedt. Bij voldoende hoge snelheden gaan de kleine vaste-stofdeeltjes dwarrelen en zich gedragen als een vloeistof — de vaste stof vormt dan een gefluïdiseerd bed.

Vloeistofdynamica en grenslagen

De grenslagen maken dat twee-vloeistofstromingen lastig te simuleren zijn. Die zijn namelijk meestal niet statisch, maar bewegen met de vloeistoffen mee. Ook kan de topologie ervan veranderen door breking of samenvoeging van grenslagen, en zijn grootheden zoals de dichtheid, de tangentiële snelheid en de druk vaak discontinu over

de grenslaag. Tot slot kunnen deze discontinuïteiten ook nog eens erg sterk zijn, zoals in het geval van vloeistof-gasstromingen.

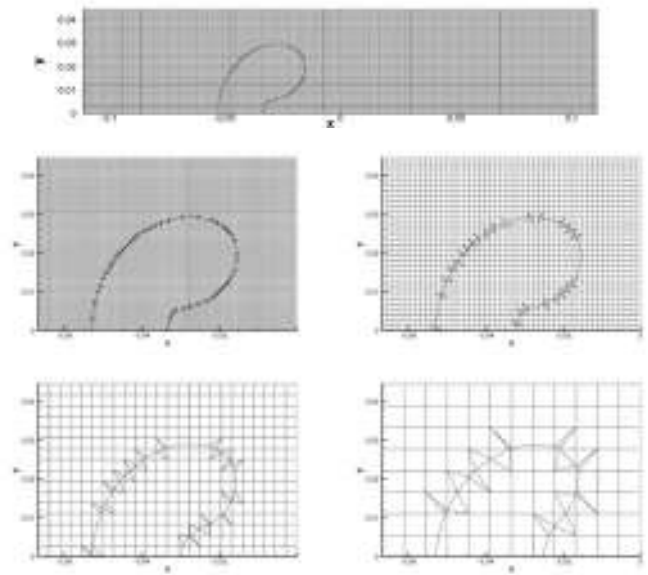
In zijn proefschrift beschrijft Sollie een nieuwe methode voor twee-vloeistofstromingen. De basis is een ruimte-tijd discontinue Galerkin (RTDG) eindige-elementendiscretisatie van de partiële differentiaalvergelijking die de hydrodynamica beschrijft. Deze methode biedt een hoge nauwkeurigheid, kan goed omgaan met discontinuïteiten en heeft een erg lokaal rekenrooster. Sollie combineert haar met de *level set* methode en *cut-cell front tracking* om de grenslagen tussen de vloeistoffen te beschrijven en te kunnen volgen in de tijd. Als je een grenslaag beschrijft met een parametrisatie, loop je vooral bij veranderingen van de topologie tegen allerlei numerieke problemen aan. Bij de *level set* methode heb je deze niet. De methode komt neer op het beschrijven van een gesloten kromme of oppervlak (de grenslaag) als niveauverzameling van een hulpfunctie die tijdsafhankelijk is.

Bij front tracking methoden wordt het rekenrooster aangepast aan de oplossing met de bedoeling het front (de grenslaag) te volgen. Sollie koos voor een front tracking methode vanwege de scherpe grenslaagvoorstelling en de hoge nauwkeurigheid van dit type methoden. In het geval van cut-cell verfijning wordt uitgegaan van een statisch achtergrondrooster, dat alleen verfijnd wordt dichtbij het front. Vanwege haar lokale natuur is een dergelijke verfijning goed te combineren met de eveneens lokale RTDG methode.

Sollie heeft alle mogelijke doorsnijdingen van de 0-niveauverzameling met vierkante en kubusvormige elementen geïdentificeerd en voor elk type doorsnijding een expliciete elementverfijning bepaald. Om de connectiviteit van het verfijnde rooster te kunnen garanderen zijn de d -dimensionale *face*-verfijningen gelijk aan de $(d - 1)$ -dimensionale elementverfijningen.

Combinatie van methoden maakt het interessant

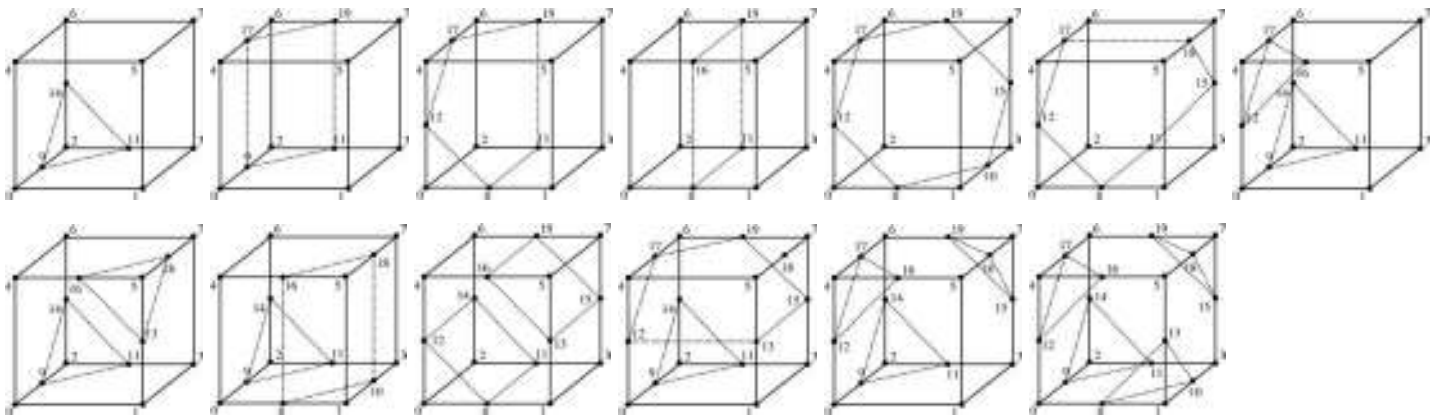
De toepassing van discrete Galerkin, of meer algemeen, hogere orde methoden, op meer-vloeistofproblemen is relatief onontgonnen terrein. De combinatie met de *level set* methode en met cut-cell front tracking is echt nieuw. Deze combinatie is volgens Sollie erg interessant. Allereerst omdat front tracking methoden vaak problemen hebben met samenvoeging en opbreking van bellen, terwijl *level set* methoden dit automatisch doen. Verder zijn front tracking methoden vaak



Lokale verfijning van het rekenrooster bij de grenslaag in het heliumcilinder-schokgolf interactieprobleem.

lastig uit te breiden naar hogere dimensies. De combinatie van de *level set* methode met generieke cut-cell verfijning maakt een dergelijke uitbreiding doenlijk, zelfs in 4D ruimte-tijd.

Verwacht wordt dat de nieuwe methode nauwkeurig kleinschalige problemen kan oplossen waar de grenslaagvorm en complexe grenslaagfysica belangrijk zijn. Voor grootschalige problemen, zoals bijvoorbeeld hele bellenkolommen, is ze echter te duur vanwege de nauwkeurige grenslaagbeschrijving. Sollie heeft de methode onder andere getest op een heliumcilinder-schokgolf interactieprobleem, een probleem met meerdere interessante aspecten. De heliumkolom wordt vervormd onder invloed van de schokgolf en bovendien is er een hogere golfsnelheid in de heliumkolom dan in zijn omgeving, waardoor de kolom zich als een soort lens gedraagt. Dit probleem diende in eerste instantie als validatietest voor zijn methode in 3D ruimte-tijd, maar Sollie vindt het uiteindelijk het mooiste resultaat in zijn proefschrift omdat het de methode erg goed illustreert.

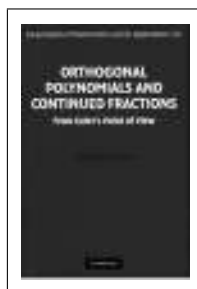


Driedimensionale elementverfijningen.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Adres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: reviews@nieuwarchief.nl



S. Khrushchev
**Orthogonal Polynomials and
Continued Fractions
From Euler's point of view**

Cambridge: Cambridge University Press,
2008

Encyclopedia of Math. and Its Appl. 122

478 p., prijs £72.00

ISBN 0-521-85419-1

De titel van het boek van Khrushchev is enigszins misleidend omdat het voornamelijk over de geschiedenis van kettingbreuken gaat. Het boek is tot op zekere hoogte het resultaat van Khrushchevs persoonlijke zoektocht naar de oorsprong van orthogonale veeltermen, die hij terugbrengt tot de studie van kettingbreuken. Het grootste deel van het boek bestaat dan ook uit een verhandeling over kettingbreuken vanuit een historisch oogpunt. De helden in zijn verhaal zijn William Brouncker (1620–1684), John Wallis (1616–1703), en natuurlijk Leonhard Euler (1707–1783), van wie een Engelse vertaling van zijn artikel uit 1739 over kettingbreuken is opgenomen. Belangrijke spelers uit de daaropvolgende eeuw in het boek zijn Chebychev (1821–1894), Stieltjes (1856–1894) en Markov (1856–1922). Khrushchev geeft duidelijk aan dat Wallis' boek *Arithmetica infinitorum* uit 1656 een belangrijke bron van inspiratie is geweest, en hij sluit het voorwoord af met een citaat uit Wallis' boek. In hoofdstuk 3 wordt bijvoorbeeld Wallis' product $\frac{2}{\pi} = \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 2 \times 4 \dots 2n \times 2n} \dots$ besproken met een gerelateerde kettingbreukexpansie van Brouncker voor $\frac{4}{\pi}$ en hoe deze in het werk van Euler terugkomen en vervolgens de aanleiding zijn voor Eulers werk aan de gamma- en betafuncties. De nadruk van het boek ligt dan ook op kettingbreuken. Behalve het historische aspect geeft het boek ook vele voorbeelden van toepassingen van kettingbreuken, zoals bijvoorbeeld de vergelijking van Pell die Fermat als probleem voorschotelde aan de Engelse wiskundige Wallis en waarvan de oplossing door Wallis en Brouncker uitgebreid wordt besproken.

Van de acht hoofdstukken gaan de laatste twee over orthogonale veeltermen. Het een-na-laatste hoofdstuk gaat over orthogonale polynomen op de reële rechte. Het eerste deel daarvan gaat over de nulpunten van de orthogonale veeltermen en hun kettingbreukexpansies. Een ander verband met kettingbreuken is de kettingbreukexpansie van de Stieltjes- (of Cauchy-)transformatie van de orthogonaliteitsmaat, waarbij de noemers van de n -de convergent dan de orthogonale veeltermen geven. Deze aanpak is afkomstig van Chebychev en verfijnd door Markov en Stieltjes. Het is opmerkelijk dat de orthogonale veeltermen bij een van de kettingbreuken van Brouncker een speciaal geval zijn van de Wilson-polynomen, die in 1977 zijn geïntroduceerd in volledige algemeenheid. Het laatste en langste hoofdstuk gaat over orthogonale veeltermen op de eenheidscirkel, het onderzoeksgebied van Khrushchev. In dit hoofdstuk worden de verbanden besproken tussen orthogonale veeltermen, kettingbreuken en holomorfe functies op de eenheidsschijf. De rest van dit hoofdstuk besteedt aandacht aan verschillende klassen van orthogonaliteitsmaten op de eenheidscirkel.

Het boek is de moeite waard voor geïnteresseerden in kettingbreuken en hun geschiedenis en in orthogonale polynomen op de eenheidscirkel.

Erik Koelink



Shawn Hedman
**A First Course in Logic
 An Introduction to Model Theory,
 Proof Theory, Computability, and
 Complexity**

Oxford: Oxford University Press, 2004
 Oxford Texts in Logic 1
 431 p., prijs £40.00
 ISBN 0-19-852981-1

De ondertitel van dit boek is *An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity*. Daarmee bestrijkt de auteur zo'n beetje het hele gebied van de *wiskundige logica*, want laten we duidelijk zijn: dit is een wiskundig boek. Ik heb geen filosofische uitweidingen of zelfs maar terzijdes gezien. Het boek biedt een stevige inleiding in de klassieke logica, beginnend bij de Propositielogica (met een nogal lange lijst afleidingsregels) waarvan de volledigheds- en compactheidsstellingen via resoluties worden bewezen. Daarna krijgt de eerste-orde logica vijf hoofdstukken lang de ruimte met veel aandacht voor structuren en modellen. Natuurlijk ontbreken ook hier de volledigheid en compactheid niet, maar er is veel meer: van Löwenheim-Skolem tot aan stabiliteitstheorie. Daarna is het de beurt aan berekenbaarheid en complexiteit waarin (primitief) recursieve functies, (on)beslisbaarheid en Turing-machines aan bod komen met aan het eind een bespreking van het $P=NP$ -probleem. De onvolledighedsstellingen van Gödel krijgen hun eigen hoofdstuk en de eerste stelling krijgt twee bewijzen: een bewijs van Boolos (uit 1989) dat gebaseerd is op de Paradox van Berry (het kleinste natuurlijk getal dat niet in minder dan twintig woorden te definiëren is) en Gödels eigen bewijs dat de leugenaarsparadox formaliseert. Ten slotte zijn er nog twee hoofdstukken over meer-dan-eerste-orde logica (tweede-orde, met oneindige disjuncties, ...) en over eindige-modeltheorie.

Wat ontbreekt zijn de andere logica's — meerwaardig, intuitionistisch, modaal, enzovoort. Is dat erg? Ik denk het niet; de gene die dit boek tot zich neemt zal van alternatieve aanpakken en logica's niet meer schrikken.

Klaas Pieter Hart



Wieb Bosma, John Cannon (eds.)
Discovering Mathematics with Magma

Berlijn: Springer Verlag, 2006
 Algorithms and Computation in Mathematics 19
 374 p., prijs €69,50
 ISBN 3-540-37632-1

Het computeralgebrasysteem MAGMA is met name bedoeld voor en bekend bij discreet wiskundigen. Dit is niet zonder reden: de grote kracht van het pakket ligt bij onderwerpen waar structuur en morfismen centraal staan, zoals algebra, getaltheorie, algebraïsche meetkunde, topologie en combinatoriek. Het staat bekend als zeer snelle maar kostbare software. De grote (gratis) concurrent heet GAP.

MAGMA wordt gekenmerkt door een degelijke basis, die zoveel mogelijk in de buurt is gebleven van de bekende wiskundige concepten. Hand in hand hiermee gaat de ver doorgevoerde ty-

pering van objecten, die zowel voordelen als nadelen biedt. Zo wordt de gebruiker er onmiddellijk op geattendeerd wanneer hij iets doet wat wiskundig niet helemaal zuiver is, maar komt het ook vaak voor dat iets wat wiskundig volkomen logisch lijkt alleen via kleine omwegen in MAGMA bewerkstelligd kan worden.

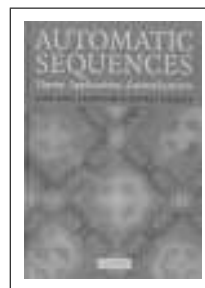
Het besproken boek is een verzameling 'case studies' van zo'n 20 à 30 pagina's per stuk. Een breed scala aan onderwerpen in de discrete wiskunde wordt afgedekt: getaltheorie (bijdragen van Wieb Bosma en Claus Fieker), algebraïsche meetkunde (Nils Bruin, William Stein, Paul van Wamelen, Gavin Brown), algebra's en representatietheorie (Don Taylor, Jon Carlson), groepentheorie (Derek Holt, Colva Roney-Douglass, Bill Unger, Volker Gebhardt) en discrete wiskunde (Markus Grassl, Paulette Lieby).

De hoofdstukken zijn gevarieerd op alle mogelijk manieren. Sommige vereisen nauwelijks voorkennis, andere vragen gevorderde voorkennis over hun onderwerp; sommige beschrijven hoe MAGMA gebruikt is om nieuwe stellingen te ontdekken, andere beschrijven hoe met MAGMA bekende stellingen geverifieerd kunnen worden, en weer andere hoe de computer gebruikt is om nieuwe stellingen te bewijzen. Het is duidelijk dat de hoofdstukken niet al te zwaar bewerkt zijn door de editors. Er zijn bijvoorbeeld grote verschillen in de stijl en de mate van documentatie van de voorbeelden, al wordt dat nooit echt storend.

Alle in het boek gedrukte voorbeelden kunnen van een website gedownload worden, zodat ze niet hoeven te worden overgetypt. Mede door de uitgebreide introductie tot de syntax van MAGMA in de appendix kan het boek dan ook eventueel gebruikt worden als manier om dit systeem te leren. Bovendien is de index zeer uitgebreid, waardoor het boek ook geschikt is om als naslagwerkje te gebruiken.

Al met al vormt dit boek aan de ene kant een mooi opstapje voor iemand die MAGMA wil gaan gebruiken bij zijn onderzoek, aan de andere kant is het een mooie illustratie van de kracht van computeralgebrasystemen in het algemeen en van MAGMA in het bijzonder.

Dan Roozmond



Jean-Paul Allouche, Jeffrey Shallit
**Automatic Sequences
 Theory, Applications, Generalizations**

Cambridge: Cambridge University Press, 2003
 571 p., prijs £48.00
 ISBN 0-521-82332-3

Beschouw een gerichte graaf, ook wel automaat genoemd, met de volgende eigenschappen: elke knoop heeft precies k uitgaande kanten: gelabeld van 0 tot en met $k-1$; elke knoop bevat een label; één knoop is aangewezen als startknoop. Zo'n graaf heet een k -DFAO: *deterministic finite automaton with output*. Bij zo'n k -DFAO kun je een oneindige rij maken, waarvan het n -de element bepaald wordt door n in het k -tallig stelsel te noteren, en vervolgens vanuit de startknoop alle cijfers hiervan van links naar rechts te doorlopen, daarbij steeds de i -tak volgend als het gelezen cijfer een i is. Als je hiermee klaar bent heb je een knoop bereikt, en het n -de element van de rij is per definitie het label in deze knoop. Een oneindige rij die zo door een k -DFAO beschreven kan worden heet een k -automatic sequence, een k -automatische rij, en daarmee

is de titel van dit boek uitgelegd. Periodieke rijen zijn automatisch, maar er zijn er veel meer, bijvoorbeeld rijen die vlakvullen-de krommen beschrijven, of de kortste oplossingen van de torens van Hanoi. Er zijn ook eenvoudig te beschrijven rijen die niet automatisch zijn, bijvoorbeeld de rij van nullen en enen waar op de n -de positie een 1 staat precies als n een kwadraat is.

De auteurs behandelen vele verrassende en diepe resultaten, zoals: als een rij zowel k -automatisch als n -automatisch is voor multiplicatief onafhankelijke k, n , dan is de rij uiteindelijk periodiek. Het boek gaat niet alleen over automatische rijen. De definitie van automatische rij verschijnt pas op pagina 152. De onderliggende getaltheorie en automatentheorie worden uitgebreid behandeld, tot en met het bewijs van de irrationaliteit van π .

Er zijn legio boeken over getaltheorie en discrete wiskunde. Op een andere afdeling in de bibliotheek zijn er ook legio boeken over automaten en formele talen. Dit boek is een van de weinige boeken die beide werelden bij elkaar brengt. Het ziet er goed verzorgd en goed gestructureerd uit, op een enkel typefoutje na, en is prettig leesbaar. Het bevat honderden oefeningen en open problemen en een zeer uitgebreide bibliografie. De auteurs geven de indruk met veel plezier aan dit boek gewerkt te hebben en zelf verrast te zijn door alle prachtige resultaten.

Hans Zantema



Alexander Kleshchev
Linear and Projective Representations of Symmetric Groups

Cambridge: Cambridge University Press, 2005
Cambridge Tracts in Mathematics 163

277 p., prijs £55.00

ISBN 0-521-83703-0

De representatietheorie van de symmetrische groep op n symbolen vormt een verbijzondering van de algemene representatietheorie van eindige groepen. In dit speciale geval kan een prachtige, concrete en gedetailleerde theorie worden opgesteld, die verband houdt met onder meer combinatoriek, Lie-theorie en algebraïsche meetkunde, en voorts toepassingen kent in bijvoorbeeld de quantummechanica. De klassieker van G.D. James uit 1978, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, beschrijft de representatietheorie: zoals welbekend zijn de $n!$ elementen van de symmetrische groep S_n te verdelen in conjugatieklassen die corresponderen met de partities van n . Volgens de representatietheorie over het lichaam der complexe getallen is het aantal irreducibele representaties van S_n derhalve gelijk aan het aantal partities van n . Op hun beurt kunnen de partities gevisualiseerd worden door combinatorisch objecten genaamd Young tableaux. Elke irreducibele representatie kan dan expliciet worden geconstrueerd uit het Young tableau, met behulp van de Young symmetriserder (symmetrizer), een bepaald element van de groepsalgebra van S_n . Voor representaties van S_n over een willekeurig lichaam K is het handiger de groepsalgebra $K[S_n]$ te bestuderen. Voor lichamen van karakteristiek 0 gaat de bovenstaande constructie verbatim door, en er is een relatie tussen de irreducibele modulen van de algebra en de irreducibele representaties. Dit is in feite de inhoud van de Stelling van Maschke, die zegt dat de groepsalgebra hier half-eenvoudig is. Voor lichamen van karakteristiek $p > 0$, levert de constructie via de Young symmetriserder nog steeds een moduul

op, de zogeheten Specht-module, dat echter niet langer irreducibel hoeft te zijn. Het blijkt dan ook veel lastiger om irreducibele modulaire representaties en karakters te identificeren.

Welnu, Kleshchev beschrijft in zijn boek een nieuwe benadering van dit probleem, op basis van recent werk van Lascoux, Leclerc, Thibon, Ariki, Grojnowski, Brundan en hemzelf. Veel van deze materie verscheen eerder in de vaktijdschriften. In dit boek wordt de theorie vanaf de grond opgebouwd en derhalve toegankelijk gemaakt voor mathematici of fysici, die slechts een basispakket aan groepentheorie en commutatieve algebra tot zich genomen hebben. De nieuwe aanpak van Kleshchev is gebaseerd op zogeheten 'vertakkingsregels' (branching rules), die iets zeggen over decompositiemultipliciteiten van irreducibele modulen van $K[S_n]$ bij restrictie tot S_{n-1} . Deze regels worden vanaf het begin behandeld en vormen de sleutel tot het aanpakken van het probleem via kristalgrafen van affiene Kac-Moody algebra's. De gebruikte methodieken zijn puur algebraïsch, en de schrijver bedient zich van affiene en cyclotomische Hecke algebra's en Sergeev superalgebra's.

Van dit traktaat behandelt Deel II voor de eerste keer in boekvorm de projectieve (spin) representatietheorie van S_n , welke zich overigens langs dezelfde lijnen voltrekt als de lineaire representatietheorie. De auteur verklaart hoofdzakelijk in de modulaire representatietheorie geïnteresseerd te zijn, maar haast zich op te merken dat veel van de theorie overeind blijft in karakteristiek 0 of $p > n$ (i.e. p deelt de orde van S_n niet). In karakteristiek 0 lijkt zijn aanpak veel op de theorie van A. Okounkov en A. Vershik (*A new approach to representation theory of symmetric groups*, *Selecta Math.* (N.S.) 2 (1996), 581–605). De auteur zet ten slotte de theorie kracht bij door in Deel II met expliciete berekeningen voor de dag te komen (zie bijvoorbeeld de vol met formules staande pagina's 210–216).

Om kort te gaan, de theorie die hier in dit boek op de ietwat saaie, klassieke theorem-lemma-proposition-corollary-remark manier uit de doeken wordt gedaan, toont zeker de moderne aanpak van de representatietheorie van de symmetrische groep op n symbolen, zoals deze in het laatste decennium door voornamelijk Russische en Japanse auteurs ontwikkeld is. Het betreft dan wel een specialistische tak van wiskunde en uw recensent kan zich voorstellen dat algebraïci of theoretisch fysici vroeg of laat dit deel 163 uit de vermaarde lichtblauwe reeks van Cambridge University Press wel eens ter hand zullen nemen. Vooralsnog geen aanrader voor studenten, al was het alleen maar omdat 'exercises' ten enenmale ontbreken.

Nicky Hekster



James E. Humphries
Modular Representations of Finite Groups of Lie Type

Cambridge: Cambridge University Press, 2006

London Mathematical Society Lecture Note Series (No. 326)

233 p., prijs £76.99

ISBN 0-521-67454-9

Dit boek behandelt onder meer de volgende onderwerpen, vermeld naar hoofdstuktitels: eindige groepen van het Lie-type, enkelvoudige modulen, Weyl modulen en Lusztigs vermoeden, berekening van gewicht multipliciteiten, ..., tensorproducten, BN-

paren en geïnduceerde modulen, bloktheorie, projectieve modulen, ..., Cartan-invarianten, ..., Loewy-reeksen, cohomologie, ..., gewone en modulaire representatietheorie, Deligne-Lusztig karakteren, de groepen $G_2(q)$, algemene en speciale lineaire groepen, Suzuki en Ree groepen. Het boek geeft een overweldigende, encyclopedische, hoeveelheid informatie die tevens up-to-date is, vaak in verhaaltrant. De behandeling van de stof berust sterk op die van Jantzen in diens boek *Representations of Algebraic Groups*. Resultaten worden in de lopende tekst genoemd en/of kort verantwoord, veel stellingen als zodanig geponeerd, terwijl bewijzen ervan af en toe gegeven worden. Maar daar, waar die er niet staan, wordt naar één of meer referenties verwezen. Er zijn veel, zeer overzichtelijke, lijstjes en veel voorbeelden.

Als ik als reviewer de inhoud moet inschatten, dan lijkt het boek me het meest geschikt voor promovendi en hun begeleiders van het betreffende vakgebied. Het boek is namelijk heel handig om in korte tijd, als ware het een papieren super-Google-informatie-zoekmachine, te weten te komen wat er is gebeurd en wat er rondwaart in het vakgebied der modulaire representatietheorie van de eindige Lie-groepen. Als zodanig kan ik het boek zeer aanbevelen. De schrijver verdient alle waardering voor het bijeenbrengen van het materiaal.

Robert van der Waall



Francesco Mezzadri, Nina C. Snaith (eds.)
Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory

Cambridge: Cambridge University Press, 2005
London Mathematical Society Lecture Note Series, 322

518 p., prijs £50.00
ISBN 0-521-62058-9

Dit boek is de neerslag van een workshop (29 maart – 8 april 2004) die onderdeel was van het onderzoeksprogramma *Random Matrix Approaches in Number Theory*, dat van 26 januari – 16 juli 2004 heeft gelopen aan het Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK. Het is bedoeld als (eerste) leerboek over het gebruik van random matrix technieken in de analytische getaltheorie: een nieuw, snel opkomend, multidisciplinair onderzoeksgedebied op het raakvlak van random matrices, mathematische fysica en getaltheorie.

Het verband tussen random matrix theorie (RMT) en de complexe nulpunten van de Riemann zeta-functie werd voor het eerst, in 1973, gesuggereerd door Hugh Montgomery en Freeman Dyson. In *The pair correlation of zeros of the zeta function* (Proc. Sympos. Pure Math. 24, AMS, 1973) formuleerde Montgomery zijn beroemde *Pair Correlation conjecture*: onder aanname van de Riemann hypothese stelde hij de volgende schatting voor betreffende het aantal paren van ordinaten γ, γ' , met $0 < \gamma < \gamma' \leq T$, van de complexe nulpunten van de Riemann zeta-functie met (genormaliseerde) afstand liggende tussen positieve getallen $0 < \alpha < \beta < \infty$:

$$\sum_{\substack{2\pi\alpha \\ \log T} < \gamma' - \gamma < \frac{2\pi\beta}{\log T}} 1 \sim N(T) \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du,$$

($T \rightarrow \infty$). Hierin is $N(T)$ het totale aantal complexe nulpunten van de Riemann zeta-functie met ordinaten tussen 0 en T . Toen Montgomery deze uitdrukking aan Dyson liet zien (Conrey: *The*

Riemann Hypothesis, Notices of the Amer. Math. Soc., March 2003, p. 348), herkende Dyson de integrand onmiddellijk als de zogenaamde *Pair Correlation* functie voor eigenwaarden van grote random Hermitische matrices, gemeten met een Gaussische maat – de zogenaamde *Gaussian Unitary Ensemble* (GUE). Deze werd al lang door fysici bestudeerd in verband met de verdeling van energie-niveaus in grote deeltjes-systemen (M.L. Mehta, *Random matrices and the statistical theory of energy levels*, Academic Press, London, 2nd edition, 1991). De latere berekeningen van Odlyzko (*On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. 48, 1987) hebben numerieke ondersteuning aangeleverd voor Montgomery's *Pair Correlation conjecture*.

Dit boek beschrijft de basistechnieken uit RMT en analytische getaltheorie die nodig zijn om goed inzicht te krijgen in het nieuwe onderzoeksgebied. De inleiding door de editors Mezzadri en Snaith bevat een overzicht van alle (14) bijdragen in dit boek. Wegens restricties op de ruimte die mij ter beschikking staat zal ik mij hier beperken tot het noemen van de bijdragen die mij het meeste aanspreken. De eerste bijdrage is een mooie inleiding in de analytische getaltheorie door de expert bij uitstek op dit gebied: Roger Heath-Brown. Hij concentreert zich op de Riemann zeta-functie en zijn nulpunten, de Priemgetalstelling (met bewijs!), en Dirichlet L -functies. Dan volgt een inleiding door Yan Fyodorov in RMT aan de hand van één van de belangrijkste instrumenten die in RMT en bij de analyse van statistische eigenschappen van grote random Hermitische matrices worden gebruikt: de theorie van orthogonale polynomen. Fyodorov past dit onder andere toe op de berekening van de spectrale correlatiefuncties van eigenwaarden van de Hermitische matrices die de GUE vormen. Dan Goldston geeft vervolgens een overzicht van het werk van Montgomery en het werk van anderen die hierop hebben ingehaakt. Een flink aantal bijdragen is gewijd aan de connectie van L -functies met RMT. Aangezien veel van de voorspellende kracht van RMT is gebaseerd op vermoedens, spelen numerieke berekeningen een belangrijke rol in de theorie: Michael Rubinstein maakt de lezer wegwijs in de belangrijkste technieken uit de computationele getaltheorie en in vermoedens en numerieke experimenten die de link leggen tussen de analytische getaltheorie en RMT.

Een onmisbaar boek voor onderzoekers die zich willen verdiepen in het nog grotendeels onontgonnen gebied van random matrix theorie en toepassingen hiervan in de analytische getaltheorie.

Herman te Riele



Nicholas Young
Surveys in Geometry and Number Theory

Cambridge: Cambridge University Press, 2007
London Mathematical Society Lecture Note Series 338

318 p., prijs £90.99
ISBN 0-521-69182-6

The London Mathematical Society heeft een programma om 'jonge' Russische wiskundigen uit te nodigen. Die moeten dan op een aantal plaatsen een voordracht houden en ze moeten een overzichtsartikel schrijven. Zo ontstond een stapeltje artikelen, en omdat de society ook een uitgever is maken ze er

een boek van. Voor mij is het boek niet bedoeld. Te grote spreiding van onderwerpen en per onderwerp vaak te technisch. Sommige schrijvers maakten er veel werk van. Je kunt van alles vinden over affiene inbeddingen en over equivariante inbeddingen. Ook het verhaal over projectieve dualiteit voor homogene ruimtes past daar goed bij. Maar om Cartier-Dieudonné modulen

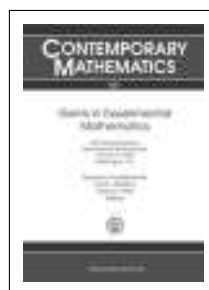
aan te treffen naast symplectomorfismen vind ik toch wat teveel van het goede. De flap raadt het boek aan aan 'Graduate students in algebraic geometry and number theory'. Die doen natuurlijk de Kostant-Souriau methode van geometrische quantizatie gewoon even naast het Mori programma.

Wilberd van der Kallen

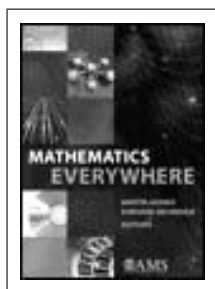
Recent verschenen publicaties (suggesties naar reviews@nieuwarchief.nl)



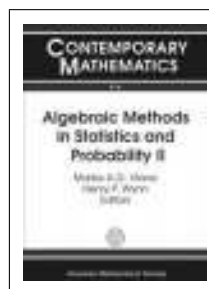
James Lepowsky, John McKay, Michael P. Tuite
Moonshine - The First Quarter Century and Beyond
 Cambridge University Press, 2010
 ISBN: 0521106641
www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521106641



Tewodros Amdeberhan, Luis A. Medina, Victor H. Moll (eds.)
Gems in Experimental Mathematics
 American Math. Soc./London Math. Soc., 2010
 ISBN: 0-8218-4869-0
www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=whatsnew&ikey=CONM-517



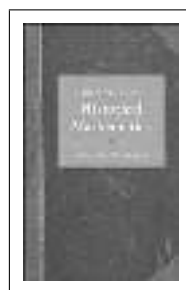
Martin Aigner, Ehrhard Behrends (eds)
Mathematics Everywhere
 American Math. Soc., 2010
 ISBN: 0-8218-4349-4
www.ams.org/bookstore-getitem/item=mbk-72



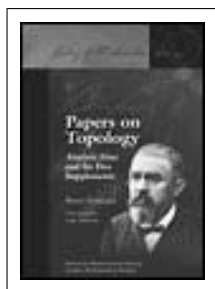
Marlos A.G. Viana, Henry P. Wynn (eds.)
Algebraic Methods in Statistics and Probability II
 American Math. Soc./London Math. Soc., 2010
 ISBN: 0-8218-4891-7
www.ams.org/bookstore?fn=20&arg1=whatsnew&ikey=CONM-516



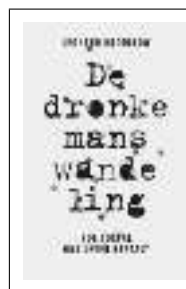
Jiří Matoušek
Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra
 American Math. Soc., 2010
 ISBN: 0-8218-4977-8
www.ams.org/bookstore-getitem/item=stml-53



Benjamin Wardhaugh
How to Read Historical Mathematics
 Princeton University Press, 2010
 ISBN13: 978-0-691-14014-8
press.princeton.edu/titles/9228.html



Henri Poincaré (vertaling: John Stillwell)
Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements
 American Math. Soc./London Math. Soc., 2010
 ISBN: 0-8218-5234-5
www.ams.org/bookstore-getitem/item=hmath-37



Leonard Mlodinow
De dronkemanswandeling
 Uitgeverij Nieuwezijds, 2010
 ISBN13: 9789057123153
www.nieuwezijds.nl/Boek/9789057123153/De-dronkemanswandeling

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

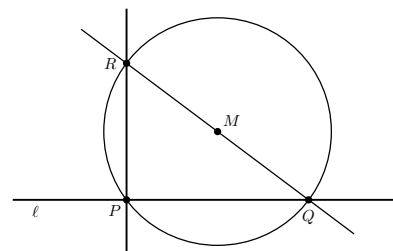
For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is December 1st, 2010.

All three problems ask for a construction with ruler and compass in a limited number of steps. More precisely, given a collection of points, lines, and circles in the plane, a *move* consists of adding to the collection either a line through two of the points, or a circle centered at one of them and passing through another. At any time one is allowed to freely add any intersection point among the lines and circles, as well as any sufficiently general point, either in the plane, or on any of the lines or circles.

For example, given a line ℓ and a point P on ℓ one can construct a line through P and perpendicular to ℓ in three moves as follows. Choose a point M not on ℓ . For the first move, take the circle C centered at M and going through P . Let Q be the second point of intersection between C and ℓ . For the second move, add the line through Q and M and let R be the second point of intersection between this line and C . Finally, add the line PR , which is perpendicular to ℓ .



These problems are inspired by Robin Hartshorne's book *Geometry: Euclid and beyond*.

Problem A

Given a line and distinct points A and B on it, construct in at most four moves the point C between A and B that satisfies $6|AC| = |AB|$.

Problem B

Given a circle, but not its center, construct in at most seven moves an equilateral triangle whose vertices lie on the circle.

Problem C

Construct a square in at most eight moves.

Edition 2010-1 We have received submissions from Thijmen Krebs (Nootdorp), Josephine Buskes (Holthees), Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), Pieter de Groen (Brussel), Shai Covo (Kiryat-Ono), Paolo Perfetti (dip. mat. Rome), Adrian & Ileana Duma (Craiova), Noud Aldenhoven (Nijmegen), Aad Vijn (Den Haag), Dušan Holý & Ladislav Matejíčka (Púchov), and Jan van Neerven (Delft).

Problem 2010-1/A Show that for every positive integer n there exists a sequence of n consecutive integers with the property that for every k the k -th term can be written as a sum of k distinct squares.

Solution This problem was solved by Thijmen Krebs, Josephine Buskes, Tejaswi Navilarekallu, and Pieter de Groen. The following is essentially the solution submitted by

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Thijmen Krebs and Josephine Buskes. The book token goes to Josephine Buskes. For any integer $a > 1$, the sequence whose first term is the square $4a^{2^n}$ satisfies the requirement. Indeed, repeatedly applying the formula

$$4x^2 + 1 = (2x - 1)^2 + 4x,$$

we find

$$\begin{aligned} 4a^{2^n} + 1 &= (2a^{2^{n-1}} - 1)^2 + 4a^{2^{n-1}}, \\ 4a^{2^n} + 2 &= (2a^{2^{n-1}} - 1)^2 + (2a^{2^{n-2}} - 1)^2 + 4a^{2^{n-2}}, \end{aligned}$$

etcetera, up to

$$4a^{2^n} + n - 1 = (2a^{2^{n-1}} - 1)^2 + (2a^{2^{n-2}} - 1)^2 + \cdots + 4a^2.$$

Problem 2010-1/B The integers of the real line mark positions at which we may place chips. We start with $2n + 1$ chips, alternatingly blue and red, at consecutive positions. A *move* is a translation by an integer of a pair of differently coloured chips at adjacent positions to two empty positions, as long as at least one of the new positions is adjacent to one that was already occupied.

Show that it is possible, in a finite sequence of moves, to arrange the chips so that they occupy $2n + 1$ consecutive positions again, but now with all blue chips on one side and all red chips on the other. Give upper and lower bounds for the smallest number of moves required.

Solution This problem was solved by Pieter de Groen and Tejaswi Navilarekallu. Tejaswi Navilarekallu receives the book token. His solution is shown here.

We shall denote a blue and red chip by 1 and 0 respectively. Thus we start with the string 101010...101 with the number 1 occurring $n + 1$ times. We consider the pairs 10 starting from the left-end. There are n such pairs. We repeat the following n times:

- Move the left-most pair to the right end.

We thus end up with the string 1101010...10. We now have the n pairs on the right. We continue to move the left-most of these pairs to the right until we have a gap of $n(n - 1)$ between the starting 1 and the rest. That is, at the end of this procedure, we will be left with

$$1 \underbrace{\text{---} \cdots \text{---}}_{\text{empty gap of length } n(n-1)} \underbrace{1010 \cdots 1010}_{n \text{ pairs}}.$$

Note that this takes $n(n - 1)/2$ moves.

For $1 \leq r \leq n$, let C_r denote the configuration

$$1 \underbrace{\text{---} \cdots \text{---}}_{\text{empty gap of length } t_r} \underbrace{11 \cdots 11}_{r \text{ 1's}} \underbrace{00 \cdots 00}_{r \text{ 0's}} \underbrace{1010 \cdots 1010}_{(n-r) \text{ pairs}}$$

with $t_r = n(n - 1) - r(r - 1)$. Thus we have achieved above the configuration C_1 as $t_1 = n(n - 1)$. We now shall go from C_r to C_{r+1} . We repeat the following r times:

- Move the first instance of 01 (starting from the left) to the right of the left-most 1;
- Move the left-most 10 to the pair of empty slots that was created by the previous move.

For instance, after applying these moves once, we will have

$$1 \underbrace{\text{---} \cdots \text{---}}_{\text{empty gap of length } (t_r-2)} \underbrace{11 \cdots 11}_{r \text{ 1's}} \underbrace{00 \cdots 00}_{(r-1) \text{ 0's}} \underbrace{1001010 \cdots 1010}_{(n-r-1) \text{ pairs}}.$$

And after applying these moves r times we will obtain C_{r+1} as $t_{r+1} = t_r - 2r$.

We can thus move from C_1 to C_n , and in this case $t_n = 0$, which is what we wanted to achieve. This proves that we can get the desired configuration using the allowed moves. Note that it takes $n + n(n-1)/2$ moves to get from the initial configuration to C_1 and $2r$ moves to go from C_r to C_{r+1} . Therefore, the above procedure takes $n + n(n-1)/2 + n(n-1) = n(3n-1)/2$ moves in total. This gives an upper bound for the smallest number of moves required.

For a lower bound we will give the proposer's solution. Suppose the coordinate of the leftmost 1 is 0 (and thus the coordinate of the rightmost 1 is $2n$). Let $a_0, \dots, a_n$ be the coordinates of the 1's and let $b_1, \dots, b_n$ be the coordinates of the 0's. Each move translates a 0 and a 1 over the same distance, which implies that the quantity $\sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i$ is invariant during the game. In the initial configuration this quantity is n and in the final configuration we have, say, $a_i = c + i$ and $b_i = c + n + i$ so that $\sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = c - n^2$, from which $c = n(n+1)$ follows. So the coordinate of the rightmost occupied point in the final configuration is $n(n+1)$ higher than in the initial configuration. Each move raises the coordinate of the rightmost point by at most 2, so $n(n+1)/2$ is a lower bound for the number of moves required.

It thus remains an interesting challenge to improve either of the bounds.

Problem 2010-1/C Is there a function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ that is everywhere left continuous but nowhere continuous?

Solution The problem was solved by Shai Covo, Paolo Perfetti, Thijmen Krebs, Adrian & Ileana Duma, Noud Aldenhoven, Aad Vijn, Dušan Holý & Ladislav Matejíčka, Tejawsi Navilarekallu, and Jan van Neerven.

The following is based on the solutions submitted by Paolo Perfetti and Shai Covo. The book token goes to Shai Covo.

A function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ that is everywhere left-continuous cannot be nowhere continuous. Indeed, we prove that the set D of discontinuity points of f is at most countable.

We start with a definition.

Definition (Left Limit Point). Let X be a subset of $\mathbf{R}$. A point $y \in \mathbf{R}$ is a left limit point of X if for every $\epsilon > 0$ there exists $x \in X$ such that $y - \epsilon < x < y$.

We also need the following lemma.

Lemma. Let X be an uncountable subset of $\mathbf{R}$. Then there exists a left limit point of X .

Proof. Suppose, by contradiction, that every point of $\mathbf{R}$ is not a left limit point of X , that is for every point $x \in \mathbf{R}$ there exists ϵ_x such that the open interval $(x - \epsilon_x, x)$ does not contain points of X . All these intervals are disjoint and everyone of them contains at least a rational number. Since there are only countably many rational numbers and the number of intervals is not countable, we are done. ■

Now suppose that the set D of discontinuity points of f is uncountable and define for every $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ the set D_n by

$$D_n = \{x \in \mathbf{R} : \forall \delta > 0 \exists y \in (x, x + \delta) : |f(y) - f(x)| \geq 1/n\}.$$

Obviously, $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots \subseteq D$, and by hypothesis $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Since a countable union of countable sets is countable, there exists $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ such that D_N is uncountable. By the previous lemma there exists a left limit point l of D_N , that is we have an increasing sequence $\{x_n\}_{n \geq 1}$ of points of D_N such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$. For every x_n there is x'_n such that $x_n < x'_n < l$ and $|f(x'_n) - f(l)| \geq 1/n$, because $x_n \in D_N$. Then $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = l$, but $|f(x'_n) - f(l)| \geq 1/n$, and this contradicts the fact that f is left-continuous at l .

As Dušan Holý & Ladislav Matejíčka pointed out, the answer to this problem is also an immediate consequence of the following theorem.

Theorem. [1] Let X, Y be topological spaces and let X be a Baire space. If $f: X \rightarrow Y$ is a quasicontinuous function then the set of points of continuity is dense in X .

References

[1] T. Neubrunn: Quasicontinuity, Real. Anal. Exchange, (Vol. 14, 1988, 259–306).