

Inhoud | Contents

Artikelen | Features

- Maatschappij | Society**
- 92 Opklaringen in het Oosten *Eduard Looijenga*
- Maatschappij | Society**
- 98 SWI 2008: Watermanagement in een veranderend klimaat *Bennie Mols*
- Oratie | Inaugural lecture**
- 100 Parallel, groen en snel *Rob Bisseling*
- Maatschappij | Society**
- 108 SWI 2008: Klaar voor vertrek *Bennie Mols*
- Overzichtsartikel | Overview**
- 111 Een korte geschiedenis van de computeralgebra in Nederland *Arjeh Cohen*
- Boeken | Books**
- 117 “Ik loop blootsvoets over worstenbroodjes” *Gunther Cornelissen*
- Onderwijs | Education**
- 120 Cijfer positieve prestaties in rekenen niet weg *Marja van den Heuvel-Panhuizen, Adri Treffers*
- Cultuur | Culture**
- 125 Wiskunde en muziek: een eeuwig misverstand *Karim Zahidi*
- Evenementen | Events**
- 129 Pleidooi voor de praktische opdracht *Rob van Oord*
- Wiskundig werktuig | Mathematical tools**
- 130 Hoe houd je een goede seminariumvoordracht? *Manfred Lehn*
- Maatschappij | Society**
- 134 Worden baby's door ooievaars gebracht? *Hans van Maanen*
- Boeken | Books**
- 136 Using physical reasoning to solve problems *Henk Broer*
- Geschiedenis | History**
- 138 Lijfrentes in de zeventiende en achttiende eeuw *Jan Hogendijk*

Rubrieken | Departments

- 82 Colofon
- 83 Redactioneel *Ferdinand Verhulst*
- 84 Agenda
- 86 Nieuws *Charlene Kalle*
- 91 Vroeg beginnen *Robbert Dijkgraaf*
- 119 De derde wet
- 127 In de verdediging *Geertje Hek*
- 145 Boekbesprekingen
- 149 Problemen

Uitgelicht



Een klassiek statistisch misverstand ontcracht. Lees over correlatie en causaliteit op pagina 134.



Een man en vrouw schrijven zich in bij de weduwenbeurs. Was dat wel een verstandige beslissing? Lees over lijfrentes in de 17de en 18de eeuw op pagina 138.

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Judi Romijn (judi@nieuwarchief.nl)

Bladmanager/Advertenties

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (charlenekalle@gmail.com)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureau redactie

Floris Olsthoorn
Harm de Vries

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuyppers (TU/e),
Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Teun
Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van
Luijk (UL), Hans Melissen (TUD), Derk Pik (JSG Mai-
monides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL),
TeX-ondersteuning
Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aan-
melding ontvangen wordt. De opzegtermijn is
twee maanden vóór het verstrijken van de abon-
nementsperiode. / The subscription starts on the
day that your application is received. The term of
notice is two months before the end of the current
subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €50.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €50 instead of the full membership fee of €70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €90 respectievelijk €105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), Rob van der Mei (CWI, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Kruger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	06-09-2010	verstreken
4	06-12-2010	26-07-2010
1	07-03-2011	25-10-2010
2	06-06-2011	24-01-2011

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Door het werk te verdelen kan parallel aan grote problemen worden gerekend. Dit geeft sneller resultaat, en door soepeler eisen aan de snelheid per rekeneenheid is het ook nog duurzamer. Lees de oratie van Rob Bisseling op pagina 100. Foto en collectie: Mark Bollman (www.albion.edu/mathcs/MBollman/Calculators.html).

De toekomst is onzeker

Het is amusant om aan kinderen de eigenschappen van de Möbiusband uit te leggen, aan studenten de schoonheid van de complexe functies en aan een algemeen publiek de rol van een singulariteit in een ets van Escher. Ook zorgen dergelijke onderwerpen in ons blad voor prettig leesbare artikelen, nuttige boekbesprekingen en historische beschouwingen. Het is een kunst apart om moeilijke en abstracte zaken aan studenten of zelfs een breed publiek eenvoudig en toch correct te vertellen. Rond 1900 was Felix Klein daar erg goed in en op het gebied van de natuur- en sterrenkunde was Marcel Minnaert later een getalenteerd spreker en auteur. Dat populariseren beperkte hen niet in hun activiteit: zowel Klein als Minnaert hebben belangrijk wetenschappelijk werk geleverd. In ons land zijn tegenwoordig enkele stichtingen actief in het populariseren van de wiskunde, zoals de Bernoullistichting en de stichting Epsilon.

Dit aspect van uitleggen en verhelderen is ook weer te vinden in het nummer dat voor u ligt. Het is boeiend om te zien hoe de computeralgebra ontwikkeld is om veeltermen, integralen en andere wiskundige uitdrukkingen exact, dat wil zeggen zonder numerieke afronding, te manipuleren. Het vakgebied heeft een hoge vlucht genomen waarbij puur wiskundig gebruik en toepassingen elkaar afwisselen. Op een heel ander gebied voert het artikel over lijfrentes ons terug naar de zeventiende en achttiende eeuw waarin maatschappelijke problemen een fraaie en uitvoerbare wiskundige oplossing vergden.

In NRC Handelsblad en The Economist lezen we over het lot van de Lissabondoelstelling uit 2000 om van de EU “de meest dynamische competitieve kenniseconomie ter wereld” te maken. Nederland geeft van het Nationaal Inkomen 1,7% uit aan ‘research and development’, dat is de helft van het percentage dat Zweden en Finland uitgeven en minder dan wat België en Slovenië doen. Universiteiten en diverse organisaties die onderzoek faciliteren maken zich zorgen. Zelfs technologiestichting STW vreest bezuinigingen, terwijl STW zich toch bezig houdt met innovatie door wetenschap op industrieel gebied.

Nederlandse politici lijken wetenschappers niet erg serieus te nemen. Kunnen we daar wat aan doen? Ik vrees bar weinig. Naast uitleggen en verklaren van boeiende wiskunde kunnen we

in ons vak en in het NAW aandacht geven aan ‘research and development’. Dat houdt in dat we nieuwe wegen verkennen en beschrijven. Maar onderzoek is een slecht voorspelbaar proces. Felix Klein onderscheidt algoritmisch en synthetisch wiskundig onderzoek. Bij het eerste wordt gebruik gemaakt van reeds ontwikkelde technieken. Ik denk dat dit 99% van het huidige onderzoek omvat. Het tweede is nieuwe gebieden exploreren: met een hakmes je een weg zoeken in de rimboe zonder te weten waar je uitkomt, zelfs zonder te weten of je wel ergens uitkomt. Dat kan echt nieuwe wiskunde opleveren, maar in planmatig onderzoek past het helemaal niet. Toch moeten nieuwe ontwikkelingen daarvan komen.

Spelen onderwerpen van het tweede type ook mee in het nummer dat voor u ligt? Jazeker. Een boek als ‘Mathematics as Metaphor’ van Manin bevat zoveel spannende ideeën dat zelfs de boekbespreking opwindend kan zijn. Elke bladzij van dat boek zet je aan het denken.

Over wiskunde en muziek is veel geschreven. Het intrigerende is dat er veel aanwijzingen voor een verband is, maar dat het moeilijk is om daar de vinger op te leggen. Leest u zelf over ‘een muzikaal thema met wiskundige variaties’.

Het is ook verrassend dat er ‘opklaringen in het Oosten’ zijn. In plaats van wiskundige inhoud, gaat dit over een sociaal-politieke context waarin wiskunde tot bloei kan komen. Dat verbaast ons omdat we in Nederland gewend zijn geraakt aan bezuinigingen, kaalslag en (meestal) ongeïnteresseerde bestuurders. Terwijl wij geregeerd worden door juristen, sociologen en halfafgestudeerden, zijn in China de bèta’s aan de macht. Daar is een maatschappelijk experiment bezig dat geschiedenis zal schrijven.

Voor het NAW vragen we regelmatig wiskundigen om bijdragen. In de meeste gevallen is de reactie “nee, te druk”, blijft geheel achterwege of is zelfs narrig. Het is hoog tijd dat meer wiskundigen verantwoordelijkheid nemen voor de promotie van de wiskunde en het discours binnen het vak.

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Agenda

Upcoming Events

juni 2010

31 mei – 12 juni 2010

□ Masterclass

Masterclass van het Korteweg-de Vries instituut en het cluster GQT met als titel 'Geometry of gauge theories and the geometric quantization'

plaats Science Park, Amsterdam

info staff.science.uva.nl/~nresheti/MC-2010.html

4 juni 2009

□ Wiskunde D-dag

Een conferentie voor docenten in de tweede fase van havo en vwo, in het teken van het profielkeuzevak Wiskunde D

plaats Jaarbeurs, Utrecht

info www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD

7 juni 2010

□ Bessensap

10de editie van het door NWO georganiseerde evenement om wetenschappers en media dicht bij elkaar te brengen

plaats Museon, Den Haag

info www.nwo.nl/bessensap

7 – 9 juni 2010

□ DisCoTec'10

5de internationale conferentie over gedistribueerde computationele technieken

plaats Science Park, Amsterdam

info discotec.project.cwi.nl

7 – 18 juni 2010

□ Numeration

Een week van minicursussen, gevolgd door een workshop van een week over verschillende aspecten van getalsystemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

11 juni 2010

□ Bèta onder de Dom

Workshops voor bètadocenten over bestaand en nieuw lesmateriaal voor NLT en Wiskunde D

plaats Institute for Engineering and Design, Hogeschool Utrecht

info www1.phys.uu.nl/wwwcdb/subw/best/?pid=11

14 – 16 juni 2010

□ HPOPT 2010

11de internationale workshop 'High Performance Optimization Techniques'

plaats Tilburg

info lyrawwww.uvt.nl/~edeklerk/hpopt2010

21 juni – 10 juli 2010

□ PIMS Summer School

5de editie van de zomerschool over kansrekening voor jonge onderzoekers

plaats University of Washington, VS

info pims2010.web.officelive.com/default.aspx

24 – 25 juni 2010

□ Stochastic models of manufacturing systems

Workshop over recent onderzoek in prestatieanalyse van productieprocessen, met nadruk op stochastisch modelleren

plaats TU/e, Eindhoven

info www.eurandom.nl/events/workshops/2010/SMMS.dwt

28 juni – 2 juli 2010

□ GQT-conferentie

Conferentie ter gelegenheid van het vierjarig bestaan van het Geometry and Quantum Theory-cluster

plaats Nijmegen

info www.gqt.nl

juli 2010

2 – 14 juli 2009

□ 51ste Internationale Wiskunde Olympiade

Wereldkampioenschap wiskunde voor middelbare scholieren

plaats Astana, Kazachstan

info www.imo2010org.kz

5 – 9 juli 2010

□ Sage Days 23: Number Theory

Bijeenkomst over het programma Sage. Aan bod komt recent wiskundig onderzoek waarbij gebruik gemaakt wordt van computationele hulpmiddelen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
E-mail: agenda@nieuwarchief.nl

11 – 16 juli 2010

ICOTS8

8ste internationale conferentie over statistiekonderwijs met als titel 'Data and context in statistics education: towards an evidence based society'

plaats Ljubljana, Slovenië

info cots8.org

12 – 16 juli 2010

Coherent structures in evolutionary equations

Workshop over patroonvorming en evolutionaire partiële differentiaalvergelijkingen.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

19 – 23 juli 2010

6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education

6de editie van deze conferentie over geschiedenis en kennisleer in het wiskundeonderwijs

plaats Wenen, Oostenrijk

info www.clab.edc.uoc.gr/HPM/

ESU6-1stAnnouncement.pdf

24 – 28 juli 2010

Bridges Pécs 2010

13de editie van deze jaarlijks terugkerende conferentie over wiskunde in relatie tot kunst, muziek en wetenschap

plaats Pécs, Hongarije

info peccikult.hu/en/bridges2010

26 – 30 juli 2010

ECMI 2010

16de editie van de Europese conferentie over wiskunde voor de industrie

plaats Wuppertal, Duitsland

info www.ecmi2010.eu

augustus 2010

2 – 6 augustus 2010

Symplectic techniques in conservative dynamics

Workshop over het gebruik van symplectische technieken bij het oplossen van problemen in conservatieve dynamica

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

16 – 27 augustus 2010

Utrecht Summer School in Mathematics

De Utrechtse zomerschool heet dit jaar 'Mathematical Statistical Mechanics: Foundations, Applications and Simulations'

plaats Universiteit Utrecht

info www.utrechtsummerschool.nl

18 – 25 augustus 2010

YESS-5 Summer School

5de editie van de zomerschool van de Young European Researchers in Mathematics Education

plaats Palermo, Sicilië

info yermc.eu

19 – 27 augustus 2010

International Congress of Mathematicians 2010

Internationaal congres voor wiskundigen

plaats Hyderabad, India

info www.mathunion.org/ICM/PC/2010.html

september 2010

1 – 2 september 2010

New Directions in Algorithmic Game Theory

Bijeenkomst over speltheorie aan het Centrum voor Wiskunde & Informatica

plaats CWI, Amsterdam

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

6 – 10 september 2010

4th Euro-Japanese Workshop on Blow-up

Workshop met als doel om experts en jonge onderzoekers, die vanuit verschillende gebieden blow-up fenomenen onderzoeken, samen te brengen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

13 – 17 september 2010

ECCS'10

Europese conferentie over complexe systemen

plaats Lissabon, Portugal

info www.eccs2010.com

17 september 2010

Finale wiskundeolympiade

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats TU/e, Eindhoven

info www.wiskundeolympiade.nl

20 – 24 september 2010

Geometry and Arithmetic

Conferentie ter gelegenheid van de 60ste verjaardag van Gerard van der Geer

plaats Schiermonnikoog

info www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~ortega/schierm

28 september 2010

NWO Talent Classes

Eéndaagse bijeenkomst voor promovendi en post-docs, ter verdieping van de Talentendagen. Andere Talent Classes zijn 9 november en 7 december

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl

oktober–november 2010

6 – 8 oktober 2009

Woudschoten Conferentie

35ste Woudschoten Conferentie van de Nederlandse en Vlaamse Numerieke Wiskundige Gemeenschappen.

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info www.cwi.nl

12 oktober 2010

NWO talentendag

Eéndaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl

15 – 17 november 2010

Stochastics Meeting Lunteren 2010

Jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse stochastici en statistici

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren

info www.cwi.nl

Nieuws

| News

Praatjes vullen gaatjes

De eerste resultaten uit een onderzoek aan de Universidad de Granada, Spanje, lijken uit te wijzen dat studenten een wiskundevraagstuk sneller kunnen oplossen als ze hardop praten of tekeningen maken tijdens het denken.

Het onderzoek werd uitgevoerd door José Luis Villegas Castellanos van de Universidad de los Andes in Venezuela en Enrique Castro Martínez en José Gutiérrez van de Universidad de Granada. Ze zetten drie laatstejaars studenten wiskunde in aparte kamers en legden hen een probleem voor. Tijdens het oplossen werden ze gefilmd en uit dit materiaal trokken de onderzoekers hun conclusies. Hun resultaten zijn verschenen in het tijdschrift *Revista de investigación psicoeducativa* en de *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*.

Het onderzoek laat volgens de onderzoekers zien dat het maken van representaties het begrijpen van wiskundige concepten vergemakkelijkt. Ook zou het ervoor zorgen dat je flexibeler en opener gaat denken tijdens het oplossen van een probleem. De manier waarop iemand gebruik maakt van dit soort representaties (zoals het maken van tekeningen of hardop nadenken) staat daardoor in direct verband met de mate waarin die persoon in staat is wiskundige problemen op te lossen. Villegas Castellanos en zijn collega's merken wel op dat er meer onderzoek op dit gebied nodig is.

Bron: *prensa.ugr.es*



Geen kunst aan

Het is mogelijk om met de computer vervalsingen van schilderijen te herkennen. In januari is hierover een artikel verschenen in de *Proceedings of the National Academy of Sciences*, door Daniel Rockmore, James Hughes en Daniel Graham van het Dartmouth College in de Verenigde Staten.

De methode werkt als volgt. Een schilderij waarvan men zeker weet wie de schilder is, wordt gedigitaliseerd. Vervolgens wordt de digitale versie in een heleboel kleine vierkantjes verdeeld. Vanuit deze vierkantjes wordt een verzameling 'basisfuncties' gemaakt. Die beginnen als vierkantjes met willekeurige vormen in zwart-wit. De computer past deze elementen dan aan, totdat ieder gedeelte van het originele schilderij samengesteld kan worden met een deelverzameling van deze basisfuncties. Daarna worden de basisfuncties nog verder aangepast, totdat het kleinst mogelijke aantal basisfuncties bereikt is waarmee ieder stuk van het schilderij gemaakt kan worden. Het idee is dat een vervalsing van het schilderij niet te construeren is met deze verzameling basisfuncties. Deze aanpak heet 'sparse coding'.

Het team heeft de methode getest op het werk van Pieter Bruegel de Oude, waarvan een aantal bekende vervalsingen bestaan, en de

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

geoptimaliseerde basisfuncties waren inderdaad niet in staat om zo'n vervalsing weer op te bouwen.

Het analyseren van kunst met behulp van wiskunde is een relatief nieuwe discipline, die voor het eerst wereldwijd aandacht kreeg in 1999. De bewering dat voor het analyseren van de beroemde *drip paintings* van Jackson Pollock fractals gebruikt zouden kunnen worden, was het begin van een debat dat nog geen duidelijke winnaar kent.

Bron: news.bbc.co.uk

Mensenwerk

Sinds half december is op de website van de University of Bristol, Engeland, een serie van vijf korte filmpjes te bekijken waarin verschillende wiskundigen van deze universiteit vertellen over hoe ze denken en werken, over hun passie voor het vakgebied en over hoe ze zichzelf zien.

De makers van de filmpjes, Chrystal Cherniwchan, Azita Ghassemi en Professor Jon Keating, allen van de universiteit van Bristol, zijn een jaar lang met dit project bezig geweest. Het project heet 'Mathematical ethnographies' en is bedacht door Keating. In totaal is meer dan honderd uur filmmateriaal gemaakt. De makers hebben de wiskundigen een aantal vragen voorgelegd om het zo over de mooie en vervelende kanten van het doen van wiskundig onderzoek te kunnen hebben. De filmpjes zijn bedoeld om mensen enthousiast te maken over wiskunde en zullen worden getoond op scholen en festivals door heel Engeland.

Voor Ghassemi was de kracht van het project vooral dat het de menselijkheid van de wiskundigen laat zien. Ze praten over hun frustraties en plezier, hun teleurstellingen en overwinningen. Over wat sommigen het 'Aha! moment' noemen. Volgens Cherniwchan zouden meer mensen geïnteresseerd raken in het doen van wetenschappelijk onderzoek als ze zich zouden afvragen hoe het voelt om jaren aan een probleem te werken en het dan te kunnen oplossen.

De filmpjes heten 'Are mathematicians creative?', 'Is a mathematical proof beautiful?', 'False trails', 'Moment of truth' en 'Some random thoughts'. Ze zijn te vinden op de website van het departement wiskunde van de University of Bristol: www.maths.bris.ac.uk/research/videos.

Bron: www.bris.ac.uk/news/2009/6772.html

Brief Descartes gevonden

In februari is in Pennsylvania een originele brief van Descartes gevonden. De brief is geschreven op 27 mei 1641 in kasteel Endegeest bij Leiden.

De brief was in de achttiende eeuw ontvreemd uit het Institut de France door de Italiaanse wiskundige Guglielmo Libri. In totaal heeft Libri toen zo'n drieduizend boeken en manuscripten gestolen. Naast de 72 brieven van Descartes, zaten hier werken van Galileo, Fermat, Leibniz, Copernicus, Kepler en andere grootheden bij. Toen Libri bang was om in Frankrijk gearresteerd te worden, vluchtte hij met de buit naar Londen. In 1861 organiseerde hij twee veilingen, en verkocht zo in totaal 7628 stukken uit zijn oneerlijk verkregen collectie.

De Nederlandse onderzoeker Erik-Jan Bos vond de brief tijdens een nachtelijke zoektocht op het internet in de collectie van Haverford College in Pennsylvania. Bos, gespecialiseerd in de geschiedenis van de filosofie en verbonden aan de Universiteit Utrecht, is op dit moment betrokken bij het maken van een nieuwe editie van de correspondentie van Descartes. Hij zocht contact met John Anderies, de verantwoordelijke voor de bijzondere collecties van Haverford en die zond hem een ingescande versie van de brief toe.

De gevonden brief gaat over de publicatie van *Meditationes de prima philosophia*. Hij is gericht aan de Franse filosoof, theoloog en wiskundige Marin Mersenne, die was belast met het drukken van dit werk. In de brief verzoekt Descartes Mersenne om een aantal passages uit de tekst van *Meditationes de prima philosophia* te schrappen. Het gaat om passages die Descartes had geschreven als reactie op eerste kritiek die hij had ontvangen op zijn werk.

Toen de voorzitter van Haverford, Stephen Emerson, de achtergrond van de brief begreep, nam hij contact op met het Institut de France en beloofde de brief terug te geven. Emerson zei geschokt te zijn, omdat hij er geen idee van had dat de brief in hun bezit was. Het Institut de France is vanzelfsprekend erg blij met de terugkeer van de brief en schenkt de bibliotheek van Haverford als dank vijftien duizend euro.

Bron: www.nytimes.com

Hans Duistermaat overleden

Op 19 maart is Hans Duistermaat, emeritus-hoogleraar Zuivere en Toegepaste Wiskunde aan de Universiteit Utrecht en Oud-Akademiehoogleraar, overleden.

Hans Duistermaat is sinds 1974 aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht verbonden geweest als hoogleraar in de Zuivere en Toegepaste Wiskunde, waarvan de laatste vijf jaar als Akademiehoogleraar. Hij was een bevlogen onderzoeker van internationale faam. Steeds weer sloeg hij nieuwe wegen in. Velen, waaronder tal van promovendi, heeft hij geïnspireerd met zijn ideeën, die hij graag deelde. Voor studenten was hij toegankelijk en zijn onderwijs kenmerkte zich door helderheid en aanstekelijk enthousiasme. Het karakter van het Instituut is in sterke mate bepaald door zijn sprankelende persoonlijkheid en groot vakmanschap.

In een van de volgende nummers van het Nieuw Archief zal uitgebreider stil worden gestaan bij Hans Duistermaat als wiskundige en persoon.

Bron: www.math.uu.nl



foto: Bart Raaijmakers

Hans Duistermaat behaalde de enige remise in een simultaan schaakpartij tegen Anatoli Karpov in 1977.

Toetsje erbij

Begin oktober 2009 is meer bekend geworden over het 'referentiekader taal en rekenen' voor het primair onderwijs, voortgezet onderwijs en mbo. Er is onder andere aangegeven dat vanaf 2014 een rekentoets wordt afgenomen bij de eindexamens in het voortgezet onderwijs. Deze toets is geen onderdeel van het vak wiskunde of van een ander bestaand vak, maar valt onder het grote geheel van 'het' eindexamen.

Het ministerie van OCW stelt nu drie jaar lang gratis diagnostische

toetsen beschikbaar en vanaf dit jaar worden er proefexamens afgenomen. De resultaten van deze proefexamens zullen bepalend zijn voor hoe de toets uiteindelijk gaat meewegen. Wel is al duidelijk dat het niet halen van een voldoende niveau door een leerling of een school hoe dan ook consequenties zal hebben. Vooralsnog is er niets besloten over het gebruik van rekenmachines tijdens deze toets.

In januari is een steunpunt taal en rekenen VO opgericht, bestemd voor communicatie naar scholen en het beantwoorden van vragen. Ook is veel informatie te vinden op de website www.taalenrekenen.nl.

Bron: www.wiskundebrief.nl

Voel je goed

Om slechtiende en blinde kinderen te helpen bij het leren van wiskunde heeft Sheila Schneider, studente aan de College of Fine and Applied Arts in Illinois, een reeks kleine beeldhouwwerkjes gemaakt. Op deze beeldjes zijn in Brailleschrift wiskundige vergelijkingen gezet.

De beeldjes zijn bedoeld voor leerlingen tussen de zeven en de tien jaar met een visuele handicap. Vaak leren deze kinderen rekenen met behulp van een traditioneel telraam, maar er is volgens Schneider, die zelf blind is, grote behoefte aan modernere leermiddelen. Het is de bedoeling dat de kinderen de beeldjes in hun handen houden en zo letterlijk met de wiskundige vergelijkingen in aanraking komen.

De beeldhouwwerkjes vormden het afstudeerproject van Schneider; zij heeft eind april als eerste blinde student op de school een bachelordiploma gehaald.

Bron: www.news.illinois.edu

Klein maar fijn

Een grote groep onderzoekers uit de informatica, wiskunde, meteorologie, materiaalbouw en natuur- en sterrenkunde hebben een subsidie gekregen voor het bouwen van een revolutionaire supercomputer.

De nieuwe supercomputer zal kleiner en energiezuiniger zijn dan de andere supercomputers in Nederland, maar de rekenkracht ervan zal vergelijkbaar zijn met die van de grootste supercomputers. Arjen Doelman, één van de onderzoekers die werkt aan het project, zei hierover: "We willen graag heel grote sommen maken, maar dat mag niet meer ten koste te gaan van het milieu." De supercomputer zal Little Green Machine gaan heten.

Het ontwerp stoelt op het aaneenschakelen van PC's, uitgerust met grafische kaarten, die met elkaar communiceren via een supersnelle internetverbinding. Dit moet een totale reken capaciteit opleveren, vergelijkbaar met de snelheid van ongeveer 20.000 PC's.

Als de Little Green Machine eenmaal gebouwd en geprogrammeerd is, zal de computer gebruikt gaan worden om gecompliceerde berekeningen uit te voeren voor het beter begrijpen van onder andere de interactie tussen wind en wolken, de structuur van de aller kleinste deeltjes en botsingen tussen sterrenstelsels.

Bron: www.littlegreenmachine.org

Een gevat netwerk

De meest efficiënte weg van A naar B is een rechte lijn. Maar als meer punten met elkaar verbonden moeten worden en als er iets vervoerd moet worden tussen deze punten zijn rechte lijnen vaak niet de beste oplossing. Recent onderzoek laat zien dat het beste netwerk stukken ingewikkelder is. Een groep biofysici van Rockefeller University heeft een model ontwikkeld waaruit blijkt dat een complexe structuur met aan elkaar geschakelde lussen grote voordelen kan hebben. De optimale structuur die ze hebben gevonden, is bijvoorbeeld te zien bij de

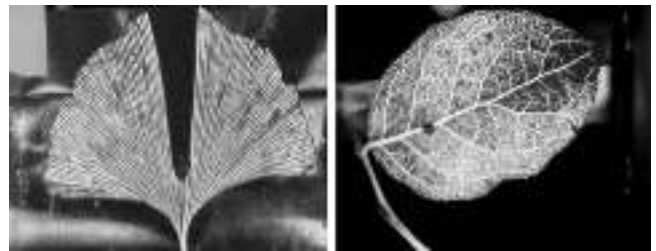
watervaten van sommige boombladeren, maar ook bij de bloedvaten in ons netvlies en bij de structuur van sommige koralen.

In het algemeen werd gedacht dat netwerken met een boomstructuur het beste werken. Hierin is een centrale tak, waaruit een aantal takken ontspringen die dan op hun beurt ieder weer in een aantal takken overgaan, enzovoort. Een groot probleem van een dergelijke structuur is echter dat, als ergens een beschadiging optreedt, dan alles achter dit punt onbereikbaar wordt. De watervaten in boombladeren hebben vaak een veel complexere structuur. Ze hebben allerlei lussen, waardoor na een beschadiging nooit een groot gedeelte van het blad zonder water komt te zitten. Dat is belangrijk voor de plant, omdat de bladeren constant bloot staan aan allerlei bedreigingen als insecten, ziektes en het weer.

Het meest verrassende van het onderzoek is volgens Marcelo Magasco, hoofd van de Laboratory of Mathematical Physics van Rockefeller University, dat de complexere netwerken ook beter kunnen reageren op veranderende eisen van delen van het systeem. Netwerken waarbij dit een rol speelt zijn bijvoorbeeld distributienetwerken, waarbij de hoeveelheden goederen die naar de verschillende locaties vervoerd moet worden verschilt van locatie tot locatie. Als deze hoeveelheden veranderen, dan kan een complex netwerk met veel aan elkaar geschakelde lussen hier beter mee omgaan.

De resultaten zijn in januari verschenen in de *Physical Review Letters*.

Bron: www.sciencedaily.com



Het rechterblad kan schade beter aan dan het linkerblad

2 ons groente, 2 stuks fruit en 4 rekensommen

In april is de website rekenbeter.nl in de lucht gegaan. Op deze website kunnen mensen hun naam en emailadres achterlaten, om dan iedere dag per email vier rekensommen te ontvangen. Dit zijn drie sommen om meteen uit te rekenen en één som om over na te denken.

De website is bedoeld voor iedereen die zijn rekenvaardigheid wil oefenen of op peil wil houden. Na het beantwoorden van de eerste drie opgaven, wordt meteen duidelijk of je ze goed of fout hebt beantwoord. Op de website kun je je score vergelijken met die van andere mensen. Ook worden bij iedere opgave verwijzingen naar achtergrondinformatie gegeven. De uitwerking van de vierde opgave verschijnt de volgende dag op de website.

Bron: www.rekenbeter.nl

Algoritmiek

Er is een nieuwe module beschikbaar die bij Wiskunde B of D kan worden ingezet: Algoritmiek. Mark de Berg van de faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven heeft de module geschreven en in het schooljaar 2008/2009 uitgetest bij wiskunde B in drie klassen 5 vwo.

Algoritmiek is het gebied binnen de informatica dat draait om het ontwerpen en analyseren van algoritmen en datastructuren. Het heeft allerlei raakvlakken met wiskunde.

Voor deze module is geen voorkennis van informatica nodig; het doel is om leerlingen kennis te laten maken met de verschillende aspecten van het ontwerpen van algoritmen. *Bron: www.win.tue.nl/wiskunded*

Pascale van Gerwen Prima Mentor 2010

In maart van dit jaar is wiskundedocente Pascale van Gerwen uitgeroepen tot Prima Mentor van het jaar 2010. De verkiezing is een initiatief van het vakblad voor onderwijsprofessionals Prima.

Er waren in totaal 450 aanmeldingen, waaruit door een stemronde op de website van Prima een groep van vijftien finalisten werd gekozen. Een deskundige jury, bestaande uit vertegenwoordigers van onder andere het LAKS, de VO-raad en ASP, bepaalde de uiteindelijke winnaar.

De jury koos Van Gerwen vanwege haar stimulerende aanwezigheid voor zowel leerlingen als collega's. Buiten de eretitel krijgt ze een opleidingscheque ter waarde van drie duizend euro en mag ze met de hele klas een dagje naar Walibi. *Bron: www.prima-online.nl*

Abelprijs voor Tate

Op 24 maart is bekend gemaakt dat de Amerikaan John Torrence Tate de winnaar is van de Abelprijs 2010. Tate krijgt de Abelprijs voor zijn werk in de getaltheorie. Volgens de jury heeft zijn werk een blijvende impact en waren veel resultaten van de afgelopen decennia niet mogelijk geweest zonder zijn bijdragen.

Tate werd geboren in 1925. Hij promoveerde in 1950 aan Princeton University en werkt sinds 2004 aan de University of Texas. In de getaltheorie zijn heel veel begrippen naar hem vernoemd, zoals Tate-dualiteitsstelling, Tate's algoritme, Tate-moduul, Tate-kromme. Zelfs zijn proefschrift, waarin Tate een nieuwe kijk geeft op de Riemann-zeta-functie, was al enorm invloedrijk.

De Abelprijs is niet de eerste prijs die Tate in ontvangst mag nemen. In 1956 won hij de Cole Prize van de American Mathematical Society, in 1995 won hij de Leroy P. Steele Prize en in 2002-2003 kreeg hij samen met Mikio Sato de Wolfprijs uitgereikt. *Bron: www.kennislink.nl*



John Torrence Tate

Aan tafels met de Maya's

Op een basisschool in de Verenigde Staten wordt Mayarekenkunde gebruikt bij wiskunde voor leerlingen van elf en twaalf jaar oud.

Sinds afgelopen september krijgen deze leerlingen iedere week een extra wiskunde-rekenles, waarin gerekend wordt met de getallen en symbolen van de Maya's. Hierdoor krijgen de leerlingen niet alleen extra oefening in de rekenvaardigheden uit de gewone wiskunde-rekenles, maar komen ze ook al op een vrij jonge leeftijd in aanraking met andere getallenstelsels. Een bijkomend voordeel is dat ze op deze

manier ook veel leren over de cultuur van de Maya's.

Volgens de docente Jill Brody werkt deze aanpak motiverend voor leerlingen, omdat wiskunde-rekenen op deze manier in een culturele context wordt geplaatst. Leerlingen krijgen zo het gevoel dat ze deel uitmaken van een wiskundige wereld, waardoor ze ook minder snel geneigd zijn om te twijfelen aan hun eigen kunnen. *Bron: www.vcstar.com/news/2010*

Grote brief

Alexander Grothendieck, de bekende wiskundige die al twintig van de aardbodem leek te zijn verdwenen, heeft aan het begin van dit jaar door middel van een brief van zich laten horen.

Grothendieck wordt beschouwd als één van de grote wiskundigen in zijn vakgebied tijdens de twintigste eeuw. Hij werkte aan het Institut des hautes études scientifiques (IHES) in Frankrijk. Samen met mensen als Jean-Pierre Serre werkte hij aan *Eléments de géométrie algébrique* (EGA). Dit is een duizenden pagina's tellende wetenschappelijke verhandeling over algebraïsche meetkunde.

In 1966 kreeg Grothendieck de Fields Medal toegekend, die hij accepteerde. Vervolgens kwam hij de prijs echter niet in Moskou in ontvangst nemen, omdat hij een fel tegenstander was van de militaire acties die de Sovjet Unie voerde. Later trok hij zich helemaal terug uit de academische wereld en volgens geruchten woont hij sinds twintig jaar op een afgelegen plek ergens in de Pyreneeën.

Aan het begin van dit jaar schreef Grothendieck een brief, die inmiddels op het internet te vinden is. Hierin staat dat hij geen enkele verantwoording neemt voor het materiaal dat zonder zijn toestemming is gepubliceerd. Ook wil hij niet dat zijn werk wordt verspreid en vind hij dat bibliotheken kopieën moeten verwijderen. *Bron: www.kennislink.nl*

Si mon intention était d'aider, j'aurais écrit une lettre de recommandation pour votre livre, mais, une fois l'heure de la retraite venue, je ne puis plus que vous recommander les éditions illimitées, et les réponses de la bibliothèque de la ville de Paris, les livres que les autres ont été informés de mon existence.

Fait à mon domicile le 3 janvier 2010

Alexandre Grothendieck

Fragment uit Grothendiecks brief van 3 januari 2010

Open toegang

Voor schoolverlaters die een studie aan hogeschool of universiteit willen doen, maar daarvoor niet het juiste profiel hebben gekozen op de middelbare school, biedt de Open Universiteit nu een oplossing in de vorm van voorbereidingscursussen en voortentamens. Studenten die slagen voor het voortentamen kunnen daarna alsnog worden toelaten tot de opleiding.

Voortentamens zijn er voor de VWO-vakken biologie, scheikunde, natuurkunde, wiskunde A en wiskunde B. Voor ieder vak is er een Centrale Commissie Voortentamen die verantwoordelijk is voor de inhoud en beoordeling van de tentamens. In deze commissies zitten vertegenwoordigers van de instellingen die de voortentamens accepteren en betreffende studenten toelaten tot de opleiding.

Ter voorbereiding op deze voortentamens biedt de Open Universiteit nu ook cursussen voor alle vakken aan. Deze cursussen worden een aantal keer per jaar gegeven in Utrecht. *Bron: www.ou.nl*

Stelling van Pythagoras

Uit onderzoek in Vlaanderen blijkt dat dans en beweging kunnen helpen bij het leren van wiskundige begrippen. De methode heet *Moving Math* en is gericht op jongeren tussen tien en veertien jaar.

Volgens Lut De Jaegher, die de methode heeft ontwikkeld, raken jongeren vaak hun zelfvertrouwen kwijt als een bepaald probleem wordt gebracht als een wiskundeprobleem. Het idee achter de methode is dat jongeren door middel van beweging en dans ontdekken dat ze zelf spontaan wiskundige begrippen gebruiken in andere situaties dan het klaslokaal. Er wordt gebruik gemaakt van dans, ritme en muziek en de leerlingen creëren hun eigen choreografieën. Wiskunde doen is niet het doel, maar het is volgens De Jaegher wel het spontane gevolg.

De Jaegher heeft onderzoek gedaan onder 779 leerlingen op 24 scholen. Hieruit bleek dat de leerlingen door de methode meer vertrouwen kregen in hun wiskundig en abstract denken. Op 18 maart is het boek *Moving Math* van De Jaegher verschenen. *Bron: www.klasse.be*

Zeg maar nee, dan krijg je er twee

Op 18 maart heeft het Clay Mathematics Institute (CMI) bekend gemaakt dat Grigoriy Perelman de Millennium Prize heeft verdiend voor zijn bewijs van het Poincarévermoeden.

Het Poincarévermoeden gaat over het begrijpen van drie-dimensionale vormen. Het vermoeden werd in 1904 geformuleerd door de Franse wiskundige Henri Poincaré. Het simpelste drie-dimensionale object is de drie-dimensionale sfeer. Die leeft in de vier-dimensionale ruimte en wordt gedefinieerd als de verzameling van alle punten die op een vaste afstand van een gegeven punt liggen. Poincaré vroeg zich af of er een test bestaat, waarmee men in staat is om een vorm te herkennen als de drie-dimensionale sfeer door alleen metingen en andere operaties toe doen op de sfeer zelf. Poincaré had zelf de juiste test al gevonden, maar was niet in staat om te laten zien dat de test ook daadwerkelijk doet wat het moet doen.

In de vorige eeuw zijn veel pogingen gedaan om het Poincarévermoeden te bewijzen of weerleggen. In zijn bewijs maakt Perelman gebruik van een aantal nieuwe elementen. Zo moest hij het ontstaan van singulariteiten in Ricci-stromen volledig begrijpen en had hij nieuwe begrippen nodig als een nieuwe entropie en de L-functionaal. In mei 2006 werd een definitieve versie van het bewijs van Perelman op arxiv.org gezet en het artikel verscheen in 2008 in het tijdschrift *Geometry and Topology*.

Perelman's werk aan het Poincarévermoeden werd al eerder beloond. In 2006 werd besloten om hem de Fields Medal uit te reiken voor het bewijs, maar Perelman weigerde de prijs te accepteren. Voor hem zou het feit dat zijn bewijs klopt voldoende erkenning zijn en een andere vorm van erkenning had hij niet nodig.

De prijs die nu aan Perelman is toegekend is de eerste Millennium Prize die wordt uitgereikt. In 2000 stelde het CMI een lijst van zeven Millennium Prize Problems op. Deze zeven problemen werden gezien als de moeilijkste problemen waar wiskundigen rond de eeuwwisseling mee worstelden en er werd één miljoen dollar gezet op het oplossen van zo'n probleem. Op het moment van schrijven is nog niet duidelijk of Perelman de prijs heeft geaccepteerd of niet. *Bron: www.claymath.org*

Gill Distinguished Lorentz Fellow

Professor Richard Gill van de Universiteit Leiden is benoemd tot Distinguished Lorentz Fellow. Het onderzoeksvoorstel van Gill gaat over het gebruik van statistiek in forensisch onderzoek en rechtspraak. Gill

heeft zich intensief bezig gehouden met de bekende zaak van Lucia de Berk. Na aanleiding hiervan heeft hij veel ideeën opgedaan over het toepassen van statistiek in rechtspraak. Het fellowship geeft hem de gelegenheid om deze ideeën het komende jaar verder uit te werken.

Het Distinguished Lorentz fellowship is in 2008 opgericht om onderzoek op het snijvlak van α - en γ -wetenschappen met β -wetenschappen te bevorderen. De prijs bestaat uit een geldbedrag van 10.000 euro, een vergoeding voor een verblijf van maximaal tien maanden aan het Netherlands Institute for Advanced Studies in the Humanities and Social Studies (NIAS) en een bedrag van 25.000 euro voor het organiseren van een workshop. *Bron: www.math.leidenuniv.nl*

Goedgevuld DNA

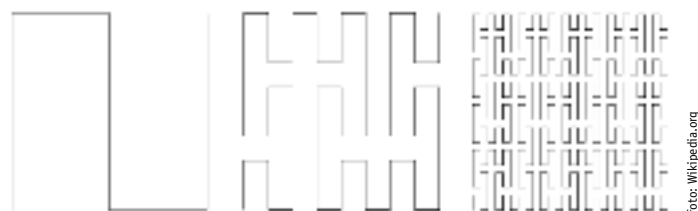
Het was tijdenlang een raadsel hoe DNA opgeborgen is in de kern van een cel. Helemaal uitgevouwen en ontrold is het DNA uit een cel bijna twee meter lang en op een of andere manier past dit allemaal in een celkern van een honderdste millimeter in diameter. Aan het einde van vorig jaar heeft Erez Lieberman-Aiden, een promovendus aan de Harvard-MIT Division of Health Sciences and Technology, een nieuwe techniek ontwikkeld om het menselijk genoom drie-dimensionaal in kaart te brengen. De techniek heet Hi-C.

Volgens Lieberman-Aiden heeft het menselijke genoom in opgevouwen vorm een fractalachtige structuur, waardoor het heel weinig ruimte inneemt en niet in de knoop raakt. Een idee dat aan de grondslag van de nieuwe techniek ligt, is dat de functie van een cel afhangt van de manier waarop het genoom in de celkern is opgeslagen. Door stukken van het genoom te bevriezen, hebben Lieberman-Aiden en zijn collega's stukken DNA kunnen identificeren, die zich in de uitgerekte streng ver uit elkaar bevinden, maar in het drie-dimensionale model tegen elkaar aan liggen en op die manier de functie van de cel beïnvloeden.

Lieberman-Aiden en zijn collega's hebben nog verder ingezoomd en gekeken naar de manier waarop strengen van basenparen in het genoom zijn opgevouwen. De structuur die ze daarin herkenden was die van een ruimtevullende kromme. Dit is een een-dimensionale kromme, die de ruimte zo dicht vult, dat het een hoger dimensionaal object lijkt. De twee-dimensionale versie hiervan werd in 1890 ontdekt door Giuseppe Peano. Hij vond een kromme die door ieder punt van het eenheidsvierkant gaat.

De ruimtevullende kromme is een wiskundig object, waarvan lange tijd werd gedacht dat het niet voor zou kunnen komen in de natuur, tot een groep natuurkundigen het eind vorige eeuw herkende in de begintoestand van een condenserend polymeer. Tot de ontdekking van Lieberman-Aiden en zijn collega's was dat de enige situatie waarin de ruimtevullende kromme in de natuur is aangetroffen.

Lieberman-Aiden heeft verschillende prijzen gewonnen voor zijn onderzoek, waaronder de Lemelson-MIT Student Prize 2010 van dertig duizend dollar. *Bron: tech.mit.edu/V130/N11/lieberman.html*



Drie iteraties in de constructie van de Peanokromme

foto: Wikipedia.org

Robbert Dijkgraaf

Universiteit van Amsterdam

Spui 21

1012 WX Amsterdam

officedijkgraaf-bb@uva.nl

Column Kinderen, stripboeken en wiskunde

Vroeg beginnen

Zijn stripboeken leerzaam of bederven ze juist de ratio? Is logica iets voor kinderen, en hoe dan? Robbert Dijkgraaf put uit persoonlijke ervaring.

Als jongen was ik gek op strips, maar kreeg daar niet veel waardering voor. De generatie van mijn ouders beschouwde stripboeken als belangrijkste bewijs voor de algehele neergang van de westerse beschaving. Strips waren een symbool van oppervlakkig en slordig denken. Mij gaf de combinatie van plaatjes en tekst juist een mooi gecombineerde stimulans van beide hersenhelften. En dankzij stripboeken beleefde ik zelfs mijn eerste ondernemers-ervaring: ik richtte een biblio-

theekje op waar mijn vrienden voor een klein bedrag iets uit mijn aanzienlijke collectie konden lenen. Het was een commerciële ramp, aangezien geen enkel boek ooit werd gere-tourneerd.

Tegenwoordig heeft mijn elfjarige zoon zich ook in een stripboek ingegraven. Door het lezen van deze strip is hij zelfs gaan nadenken over het kamerindelingbeleid van een zeker hotel. Niet zomaar een hotel, maar één met oneindig veel kamers waar de gasten allemaal van kamer moeten wisselen. Hij leest namelijk over Hilberts hotel in *Logicomix*, een beeldroman die de geschiedenis van de moderne logica schetst aan de hand van het kleurrijke leven van Bertrand Russell, en die in korte tijd is doorgestoten tot de lijst van internationale bestsellers.

Het feit dat een stripboek zoveel lezers kan bereiken met de levensverhalen van Cantor, Frege en Wittgenstein is opmerkelijk, alhoewel een van de auteurs, Apostolos Doxiadis, al eerder had laten zien in *Uncle Petros and Goldbach's conjecture* dat hij een bestseller kon maken van een open vraag uit de getaltheorie. De gekoppelde prijsvraag — waarbij een miljoen dollar te verdienen was met het oplossen van Goldbachs vermoeden — was hierbij een handige publiciteitsstunt.

Dat wiskunde en logica zo'n breed en jong publiek kunnen aanspreken verbaast me niet: abstracte problemen hebben een bepaalde

magie. Bijvoorbeeld het concept oneindigheid is uitermate fascinerend. Ik geef vaak les aan jonge kinderen en er is niets dat ze zo kan bezighouden. Dat iets wel bestaat maar nooit kan worden bereikt is gewoon niet te vatten.

Logica en wiskunde zijn de eerste abstracties die jonge kinderen tegenkomen. Ik herinner me hoe mijn eigen kinderen — nog voor ze leerden lezen — naar de bakker renden en onderweg hun stappen telden. Plotseling begonnen ze te tellen met sprongen van twee of drie, en te schuiven met de patronen. Spelenderwijs verkenden ze de wereld van de getaltheorie.

Wetenschappelijk denken en logisch redeneren zouden een vaste plek in elke opvoeding moeten hebben. Op de basisschool, of nog eerder, is het juiste moment te vinden. Helder denken komt dan heel natuurlijk tot stand. Uit eigen ervaring kan ik melden dat kinderen de slordige redeneringen van hun ouders verbeteren op het irritante af. We kunnen niet vroeg genoeg beginnen om kinderen te confronteren met de wondere wereld van de logica. De eerste stap kan worden gezet met een stripboek.

Naschrift

Deze tekst is eerder verschenen in *ILLC Magazine* (december 2009).
Vertaling: Judi Romijn.



Een scène uit het populaire stripboek *Logicomix*

Eduard Looijenga

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

E.J.N.Looijenga@uu.nl

Maatschappij

Opklaringen in het Oosten

Evenals hier worden ook in China wiskunde-competities voor middelbare scholieren georganiseerd. Eduard Looijenga werd gevraagd als jury-lid: hij reisde af naar het Oosten en was tevens getuige van de opening van een nieuw wiskundig onderzoeksinstituut. De Chinese wiskunde beleeft een enorme opmars.

In het voorjaar van 2009 trof ik in de afval-emmer van mijn digitale brievenbus een uitnodiging aan om in december van dat jaar zitting te nemen in een jury voor een Chinese wiskunde olympiade, de *S.-T. Yau High School Mathematics Awards*, met de naamgever van dit evenement als afzender. De organisatie zou mijn reis- en verblijfkosten volledig vergoeden, zonder dat dit echter vergezeld ging van een wetenschappelijk programma, zoals het houden van een voordracht. Een sceptischer geest (zoals die blijkbaar in mijn mailprogramma zetelt) had wantrouwend gereageerd, maar Yau is geen onbekende, en dus vroeg ik hem wat er precies van mij verwacht werd. Uit zijn antwoord bleek dat hij het stellen van deze vraag had geïnterpreteerd als een toezegging, terwijl het vierdaags programma dat hij me stuurde (twee dagen voor de beoordeling, een dag voor de prijsuitreiking en een dag voor excursies) mij eigenlijk op dit punt niet geruststelde. In het najaar volgde een nieuwe e-mail, nu een officiële aandoend PDF document, waarin tevens de opening werd aangekondigd van een wiskundig onderzoeksinstituut, eveneens een initiatief van Yau. Het verzoek was om ook deze ceremonie luister bij te zetten en tevens zitting te nemen in een adviescommissie. De vier dagen waren er zes geworden en de excursie beperkte zich nu tot een dagdeel. Nee zeggen leek niet meer aan de orde te zijn.

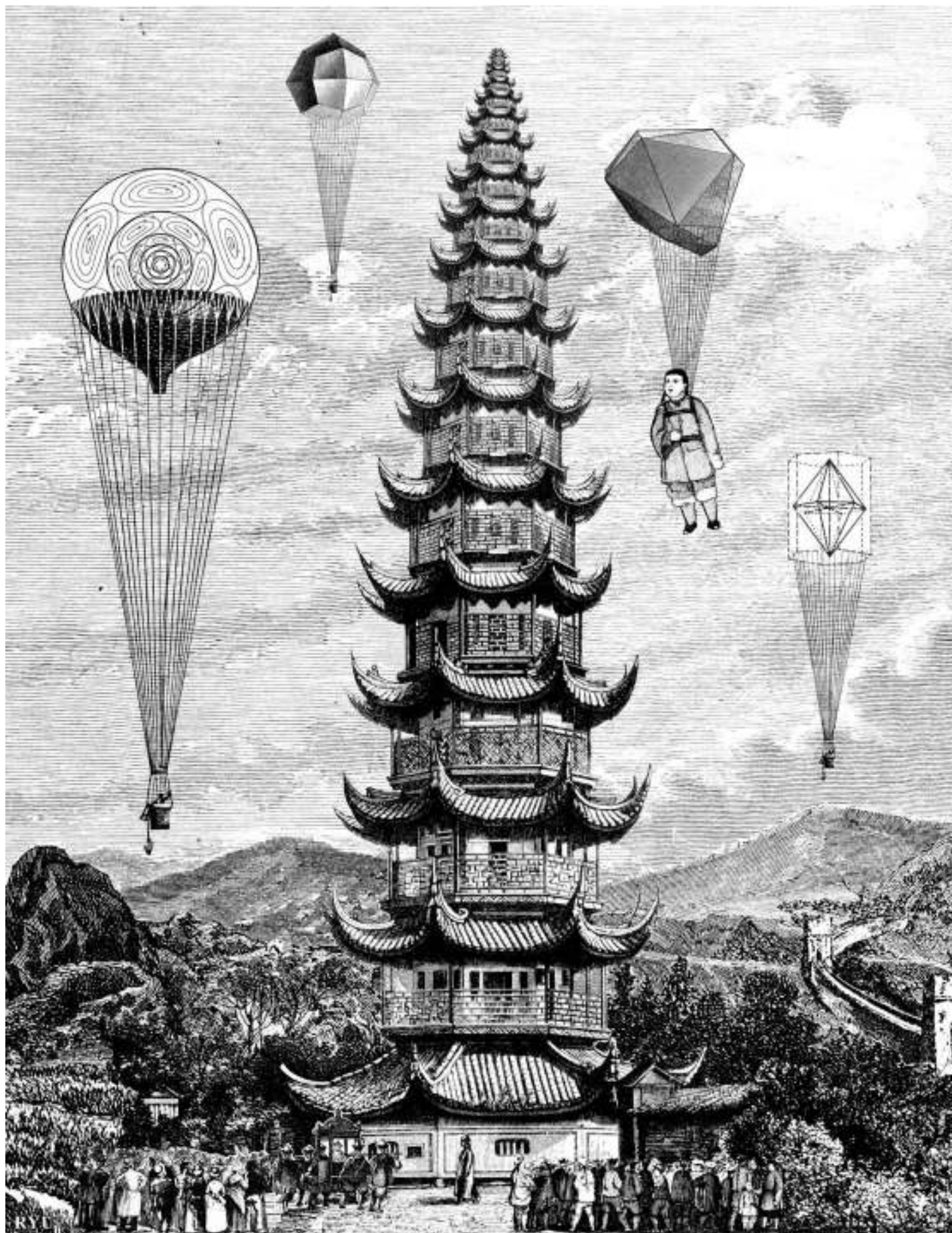
Laat ik meteen maar bekennen dat ik er geen spijt van heb gekregen. Ik heb gemerkt dat een zich ontwikkelende samenleving ons vak (en de wetenschap in het algemeen) een veel groter maatschappelijk en strategisch belang toekent dan ik had gedacht, en dat is dan ook mijn reden om er verslag van te doen. Dat dit wel eens iets bijzonders zou kunnen worden, bleek toen ik een maand voordien de geselecteerde inzendingen (18 in totaal met 10 reserves) ter beoordeling kreeg voorgelegd. Dat deed me ook besluiten een dagboekje bij te houden. Maar omdat ik een chronologische volgorde wil aanhouden zal ik beginnen met te berichten over de opening van het onderzoeksinstituut. Daarvoor is het echter wenselijk eerst iets te vertellen over Yau, in het bijzonder over het aanzien dat hij in zijn geboorteland geniet.

Shing-Tung Yau

Zij die niet zijn werk kennen, maar wel van hem gehoord hebben zullen Yau vooral in verband brengen met de affaire Perelman en het desbetreffende artikel van Silvia Nasar en David Gruber in de *New Yorker*, waarover ook in de kolommen van dit blad is bericht. Deze kwestie heeft nogal wat publiciteit buiten de wetenschappelijke fora teweeg gebracht, waarschijnlijk doordat de gebeurtenissen die eraan ten grondslag lagen op een bijna clichématige manier aandoen als de sy-

nopsis van een negentiende-eeuwse roman. Voor Yau was die publiciteit overwegend negatief. In het midden latend of dat terecht was, het lijdt geen twijfel dat hij een van de groten van de wetenschap is. Zijn oplossing in 1978 van het Calabivermoeden (wat hem mede de Fieldsmedaille opleverde en heeft geleid tot het begrip Calabi-Yauvariëteit) werd gevolgd door een nog steeds ononderbroken reeks van diepe en centrale resultaten van zijn hand op het snijvlak van differentiaalmeetkunde en analyse. Hij is medeauteur van bijna 350 artikelen en begeleidde zo'n 50 promoties. Daarnaast heeft hij een flink aantal tijdschriften het licht doen zien (waarvan het lovenswaardige mijns inziens minder vanzelf spreekt), een drietal onderzoeksinstituten opgericht en is de initiatiefnemer van de naar hem vernoemde wiskundecompetitie voor middelbare scholen. Het moge duidelijk zijn: Yau is niet alleen een groot wiskundige, maar beschikt ook over een kolossale werkkraft.

Voor de Chinese taalgemeenschap is hij de natuurlijke opvolger van Shiing-Shen Chern (een van Yau's leermeesters), maar ook en vooral de eerste Fieldslaureaat uit hun mid-den. Dit laatste in combinatie met zijn dominante persoonlijkheid maakt hem tot een Bekende Chinees. Daarmee doe ik hem eigenlijk tekort, want zo blijkt dat hij ook directe toegang heeft tot het hoogste politieke niveau van China, een voorrecht waar westerse bedrijven doorgaans heel wat voor over hebben. Hij is dus ook een Belangrijke Chinees. Dit maakt tevens duidelijk dat wanneer hij zijn naam ergens voor leent (zoals aan de eerder vermelde competitie),





Figuur 1 Het instituut is zojuist officieel geopend. In het midden Yau, rechts van hem achtereenvolgens de president van de Tsinghua Universiteit Gu Bing-Lin en vice-president voor onderwijs Chen Xi

dit meer ten goede komt aan de ontvanger, dan aan de gever.

Inwijding van een instituut

Voor een buitenstaander lijkt het alsof het in het Chinese taalgebied traditie is geworden dergelijke instituten op te richten. Chern heeft er drie geïnitieerd en Yau doet in dat opzicht niet voor hem onder.

Het nieuwste is het Tsinghua Center of Mathematics, gelieerd met en ondergebracht nabij het Mathematisch Instituut van de gelijknamige universiteit te Beijing en geopend op 17 december 2009. De periode tussen initiatief (naar men zegt, de zomer van 2009) en opening was wonderbaarlijk kort. De adviescommissie, waarvan de meeste leden, net als ik, geen bijzondere Chinese connectie hebben, werd er de eerste dag rondgeleid door Yau, directeur Poon en de decaan van de faculteit. Het bleek gehuisvest in een gerenoveerd gebouw van twee verdiepingen, bestaand uit 25 vertrekken. Maar wat op ons niet-Chinezen eigenlijk de meeste indruk maakte, was Yau's min of meer terloopse uitspraak dat geld hier geen rol speelde, een uitspraak die overigens in overeenstemming was met de wijze waarop we waren ondergebracht. Ik denk dat in het Westen zulk een geluid in een dergelijk verband voor het laatst vernomen werd kort na de lancering van de eerste Spoetnik, in ieder geval nimmer door een van ons (waaronder de directeur van het Institut des Hautes Études Scientifiques en de voorzitter van de European Mathematical Society). Tijdens de lunch hoorde ik Yau voor het eerst de doelstelling formuleren: dit tot het beste instituut van China te maken en van een niveau vergelijkbaar met de wereldtop.

Die middag gingen we naar het auditorium voor de openingsceremonie. Ieder van ons kreeg een corsage aangeklikt, vastzittend aan de revers met twee magneetjes, en een oorkonde in de vorm van een menukaart, zo een die scharniert in het midden. Dat laatste was een doordacht detail, want de zichtbaar-

heid verlangt dan niet meer dat je hem ophangt. Daarna beluisterden we een reeks van speeches die simultaan in het Engels vertaald werden. Tijdens de pauze beklommen we een voor dit doel in de nabijgelegen hal opgestelde tribune, die net toereikend bleek om alle Belangrijke Personen (bijna zeventig!) plaats te bieden, en lieten ons gecorseerd door vele camera's vereeuwigen.

Interessanter was het programma na de pauze. Yau gaf een voordracht met lichtbeelden, waarin hij de manieren vergeleek waarop China en Japan vanaf de tweede helft van de negentiende eeuw hadden geprobeerd zich de westerse wiskunde eigen te maken. Helaas werd dat nu juist niet vertaald. Na afloop werd hij bestookt door een barrage van vragen van studenten (die op dat punt geen enkele terughoudendheid leken te hebben), welke hij met zichtbaar plezier en humor tegemoet trad. Tijdens de lunch vatte hij voor mij zijn voordracht als volgt samen: Japanners hadden in het opnemen van westerse wiskunde meer succes gehad dan Chinezen en dat kwam omdat de eersten hun mensen naar de beste universiteiten in het Westen stuurden, terwijl de Chinezen het op een koopje wilden doen en de hunne naar Japan stuurden. Het klonk aannemelijk en herbergt natuurlijk een boodschap die niet kan worden misverstaan. 's Avonds zaten we aan bij een banket (dat de eerste van een reeks zou worden) met een dozijn speeches, waaronder een door de auteur, die, net als de andere buitenlanders, daarop in het geheel niet was voorbereid.

De ochtend daarop volgde een kennismaking met gevorderde wiskundestudenten. Dat was niet helemaal het informele samenzijn waar we op gerekend hadden. Wij, een twaalf-tal commissieleden, zaten achter een lange tafel tegenover zo'n 40 studenten met Yau als discussieleider en het eerste kwartier werd besteed aan het zich voorstellen: ieder van ons — ook de studenten — vertelde in een paar woorden iets over zichzelf. Vervolgens konden een paar vragen van de studenten plenair behandeld worden. De eerste vraagsteller riep onze hulp in bij de volgende kwestie: hij had onlangs in Zwitserland een affaire gehad met een landgenote met rijke ouders, maar die had hem tenslotte afgewezen omdat zij voorzag dat zij haar uitgavenpatroon neerwaarts bij zou moeten stellen indien de bron het inkomen van een beroepswiskundige zou worden. Wist Dr. Yau raad? Jazeker — en hij gaf hierop het voor de hand liggende en enig juiste antwoord.

's Middags gaven de onderzoeksgroepen van het Mathematisch Instituut ieder een kor-

te presentatie, ten einde ons een beeld te geven van de daar aanwezige expertise. Kort tevoren had elk van ons een pak papier gekregen, waarin een compleet CV van werkelijk iedere daar werkzame onderzoeker.

Enkele dagen later zou instituutsdirecteur Poon enkelen van ons een papiertje in handen stoppen waarop hij bovenaan de naam van de ontvanger geschreven had met het verzoek dit te completeren tot een lijstje van buitenlandse experts die zouden kunnen helpen zijn instituut van de grond te krijgen.

Op audiëntie

Wat later die middag reden we met onze eigen bus naar de *Grote Hal van het Volk*, om daar ontvangen te worden door de minister van het 'Organization Department'. De persoon in kwestie, Li Yuanchao, is niet alleen minister maar ook, en vermoedelijk belangrijker, lid van het Politbureau. Kort tevoren had Yau ons laten weten dat Li de nummer tien is van dit gezelschap en dat hij weldra zou promoveren naar de vierde positie (een aan hem gewijd Wikipedi lemma lijkt dat min of meer te bevestigen), waarmee impliciet heel wat over de staatsinrichting van dit land is samengevat. De Grote Hal meet ongeveer 350 bij 200 meter en is zo'n 40 meter hoog, een kolossaal gebouw dus, dat ten tijde van Mao's 'Grote Sprong Voorwaarts' (in 1959), in 10 maanden door 'vrijwilligers' voltooid is. Het herbergt onder meer een dertigtal vertrekken ter grootte van een middelgrote concertzaal, die ieder gewijd zijn aan een provincie. We werden ontvangen in die van Hong-Kong, vermoedelijk omdat Yau daar opgroeide. Intussen hadden zich bij ons gevoegd allerlei autoriteiten, waaronder de president van de Tsinghua universiteit, maar ook de andere winnaar van de Fieldsmedaille met een Chinese familienaam, Terry Tao. Die werd duidelijk als een van hen beschouwd, ook al is hij in Australië geboren en getogen, want Li had zich laten flankeren door de twee Fieldslaureaten. Nadat Yau ons allen had voorgesteld nam Li het woord (uiteraard in de eigen taal, maar op iedere passage volgde een vertaling in het Engels). Het begon met een ietwat uitgebreid, maar elegant geformuleerd welkom, waarbij alle aanwezigen als individu of als groep even werden genoemd (hij bleek bij Yau college gelopen te hebben en zei in Tao een jonge Yau te herkennen). Mijn reden om hiervan verslag te doen is vooral vanwege wat er toen volgde, namelijk een analyse plus slotsom van een eenvoud en een helderheid, zoals ik die bij een politicus maar zelden heb kunnen beluisteren.

Hij stelde eerst vast dat de huidige eco-

nomische expansie van zijn land uitsluitend gebaseerd is op goedkope arbeid. Maar omdat China eigenlijk van natuurlijke hulpbronnen verstoken is, zal deze groei weldra tot stilstand te komen, tenzij het nu verdiende geld op een uitgekiende manier wordt geïnvesteerd. En wel vooral — dat leek vanzelf te spreken — in scholing en onderzoek. Wat dat laatste aangaat, zo redeneerde hij, is wiskunde het fundament van alle wetenschap en dient de aandacht dus eerst daar naar uit te gaan. Waarop hij het voornemen formuleerde zijn land (en in het bijzonder het zojuist geopende onderzoeksinstituut) binnen tien tot vijftien jaar tot de wereldtop te doen behoren. Toen hij dat zei ging mijn blik naar de universiteitspresident, de decaan en de instituutsdirecteur, die naast elkaar zaten en allen wat ongemakkelijk keken. Het leed geen twijfel: hier werd hen eenvoudig de overeenkomstige instructie gegeven (Bourguignon en Laptev, met wie ik het er later over had, deelden mijn duiding). Nadat ik bedacht had dat dit wel een aardige prioriteitenstelling is voor een overheid die op een vermogen van zo'n 2 biljoen euro zit, dwaalden mijn gedachten ongewild even af naar de verbale rituelen die in ons land indertijd de Lissabondeclaratie omgaven en thans de nog pretentieuze motie Hamer. Enkelen van ons fronsten wel even toen Li beweerde dat Chinezen een bijzonder talent voor wiskunde zouden hebben.

Yau repliceerde in dezelfde elegante stijl, waarna andere gewichtige personen hem volgden. Namens ons voerden Neil Trudinger en Kyoji Saito het woord, de laatste op een manier die mijn bewondering afdwong: hij stelde dat de gekozen weg beslist de juiste is, maar dat de snelheid waarmee hij wordt afgelegd, niet zomaar te plannen is, en waar-schuwde voor mogelijke teleurstellingen als de verwachtingen voor de korte termijn te hoog gespannen zijn. De audiëntie werd besloten met een fotosessie. Daarna terug naar ons hotel, in slakkegang meegevoerd door de Beijingse avondspits.

Yau's wiskundecompetitie

De volgende twee dagen waren voor de Yau awards. Model voor deze wedstrijd lijkt bestaan te hebben de Siemens-Westinghouse competitie in de Verenigde Staten, maar dan toegespitst op wiskunde en met een Chinese levensverzekeraar als sponsor. De spelregels (na te lezen op www.yau-awards.org/index.php) zijn in het kort als volgt. Een team bestaat uit hooguit drie leerlingen van eenzelfde school en dient een onderzoeksproject uit te voeren, waarbij het zich in onder-



Figuur 2 Ontvangst door minister Li Yuanchao in de Hong-Kongzaal. Op de rug gezien Neil Trudinger, gezicht en uitgestoken hand van George Lusztig, Kyoji Saito, Ari Laptev, Yang Le, Jean-Pierre Bourguignon, Terry Tao, Yau.

foto: Scott Wolpert

werpkeuze, formulering van de vraagstelling en het wegwijs worden in de literatuur (maar beslist niet anderszins!) mag laten bijstaan door een leraar van de eigen school en incidenteel door een wiskundige verbonden aan een universiteit. De behaalde resultaten moeten worden uiteengezet in een werkstuk, dat qua omvang en opzet in de praktijk vergelijkbaar is met een bachelorscriptie. Er zijn drie selectieronden, waarvan de eerste zich alleen baseert op het werkstuk. Bij de overige twee gaat het ook om de presentatie (de criteria op basis waarvan uiteindelijk een keus gemaakt wordt, zijn achtereenvolgens: creativiteit, presentatie en, indien het team uit meer dan één persoon bestaat, de wijze van samenwerken). De tweede ronde leidt tot 18 nominaties, waaruit door een internationale jury de prijswinnaars worden geselecteerd. Dat bestaat uit het aanwijzen van een gouden, een zilveren en drie bronzen teams en vijf eervolle vermeldingen, achtereenvolgens gedoteerd met 150.000 RMB (dat is bijna 16.000 Euro), 100.000 RMB, 60.000 RMB en 30.000 RMB. Zelfs naar onze maatstaven zijn dat stevige geldprijzen, maar voor de winnende teams is vermoedelijk nog interessanter dat zij bij een aantal Amerikaanse topuniversiteiten vrijgesteld worden van de tuition fee. Deelname is overigens niet beperkt tot het Chinese taalgebied.

In 2009, het tweede jaar van de competitie, deden ruim 800 teams mee. Het lezen en beoordelen van zo'n werkstuk is behoorlijk tijdsintensief (in enkele gevallen kostte mij het wel een paar uur), dus beroepswiskundigen moeten hard aan het werk geweest zijn

om dat aantal tot 18 terug te brengen. Bovendien komen de inzendingen vanuit het hele land en ook daarbuiten (zoals Taiwan en de VS), en dat maakt dit in organisatorisch en logistiek opzicht wel tot een huzarenstukje. Omdat Yau van zijn werkgever (Harvard) maar drie maanden per jaar elders mag verblijven, zal hij dit proces alleen maar op afstand kunnen sturen, wat mij doet vermoeden dat hieraan een verfijnd delegatiemechanisme ten grondslag ligt, zijn effectiviteit ontleend aan een straffe hiërarchie.

De inzendingen

Ik liet al doorschemeren hoezeer ik onder de indruk was van de inzendingen die ons een maand eerder waren toegezonden, want de gelijkenis met een bachelorscriptie betrouwt niet alleen de vorm, maar zeker ook de inhoud. Dat gold evenzeer voor de variatie in onderwerpen: over geheelwaardige functies die mogelijk veel priemgetallen produceren (zoals die van Mersenne), over hoe een eindige verzameling van cirkels in het platte vlak er uit kan zien, over pakkingsproblemen, over de winststrategie voor een klasse van spelen door middel van lineaire algebra, over veralgemeende gemiddelden. Soms ging het zelfs boven het bachelorniveau uit: programmering van zoekmachines gebruik makend van een entropiebegrip, bovengrenzen voor Ramseygetallen, prijsvorming van opties, al kwam dan meestal — net als bij scripties — de nadruk meer te liggen op tonen dat iets goed begrepen was, dan op oorspronkelijkheid. Ik had voordien niet voor mogelijk gehouden dat zelfs



Figuur 3 Een bronzen team bij hun presentatie

zeer getalenteerde middelbare scholieren dit soort onderzoek zouden kunnen verrichten.

De presentaties

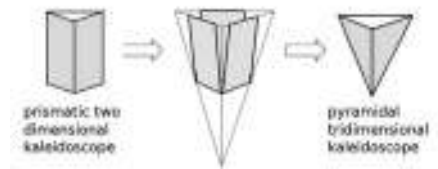
Voor ieder genomineerd team was een half uur uitgetrokken: 20 minuten voor de presentatie en 10 minuten voor vragen. Bij binnenkomst van het gebouw waar dit zou plaatsvinden bleek het al druk met teams en hun supporters. Ieder van ons kreeg een geplastificeerde briefkaart om de nek waarop met grote letters Referee stond gedrukt. We vormden zo blijkbaar een fotogeniek gezelschap, want de eerste camera's werden al te voorschijn getrokken.

Enkele teams kwamen op in een soort trainingspak dat een schooluniform bleek te zijn en stelden zich in unisono voor (*Good morning distinguished professors, we are students of Guangdong Guangya High School ...*), waarop dan een hunner de teamleden introduceerde. Bijna allemaal gebruikten ze een beamer en een bijbehorend presentatieprogramma en tot onze verrassing bleek een

groot aantal zich ook van $\text{\LaTeX}$ te bedienen. Een jaar of twintig geleden was communicatie met vakgenoten uit het Chinese vasteland bijna altijd een moeizame aangelegenheid: wij spraken geen Chinees en zij slecht Engels. Maar hier werd duidelijk dat er in ieder geval aan één zijde veel veranderd is, want voordracht en beantwoording van vragen geschieden in nagenoeg foutloos Engels. Het gemiddelde niveau was bijna even indrukwekkend als dat van de werkstukken.

Tijdens de pauzes kwamen er veel leerlingen op Tao af (en soms ook hun ouders en mentoren) om zijn handtekening bemachtigen, of zelfs om hem (in het Engels!) een opdracht te laten schrijven in een meegebracht exemplaar van *Additive Combinatorics* — ongeplande signeersessies, die hij hij bereidwillig onderging. Een Fieldslaureaat, 34 jaar oud, die al bijna 200 publicaties op zijn naam heeft staan — ik kan mij een slechtere keus voor een idool denken.

Ik laat een paar bekroonde inzendingen de revue passeren. Eén was gewijd aan de *Wonderful tridimensional kaleidoscope* (brons), van Wang Zili, een meisje van meen ik vijftien, dat er trouwens nog jonger uitzag. Zij had onderzocht wat je zoal ziet als je in een ruimtehoek kijkt, waarvan de wanden spiegels zijn. Zij kon goed het verband leggen met de regelmatige veelvlakken en ze toonde ons prachtige modellen (gemaakt met de hulp van haar ouders omdat ze zelf niet over de kracht beschikte om het metaal te snijden). Ze had boeken als *The magic of Mathematics*, (en de varianten die *magic* hebben vervangen door *joy of unity*) in haar biblio-



Figuur 5 De methode van Wang Zili's driedimensionale kaleidoscoop

grafie staan, maar toen Tao vroeg of ze wel eens van het begrip Coxetergroep gehoord had, moest ze het antwoord schuldig blijven.

De zilveren plak ging naar *Pricing European options based on the Vasicek interest model*, een werkstuk van een team van drie. Van dit onderwerp weet ik eigenlijk niets af en daarom moet ik wat de oorspronkelijkheid aangaat varen op het oordeel van deskundige collega's. Maar het lezen van het werkstuk van bijna 50 pagina's was een genoegen: helder gestructureerd en geformuleerd in een bijna vlekkeloos Engels. In het slothoofdstuk blikt het team terug op zijn ervaringen: de dalen waardoor ze getrokken zijn om deze top te kunnen bereiken, en besluit — iets minder vlekkeloos — met *Absorbing new knowledge and conquering a rich diversity of problems construct the most fascinating experience of our research, maturing both our minds and our option contracts*. De presentatie was van overeenkomstig hoge kwaliteit, waarbij opviel dat alle vragen (zoals uitleggen wat stochastische integratie is!) werden beantwoord door het enige vrouwelijke lid van het team, Yueran Ma. Later zou blijken dat zij over nog andere talenten beschikte.

De gouden medaille ging naar een zekere Irene Chen, een Amerikaanse van weliswaar Chinese afkomst, die echter het Mandarijn niet machtig bleek. Zij had een broer van Yau, ook hoogleraar wiskunde, als mentor. Het betrof een individuele inzending, waarvan de titel luidde *Coordinate-free characterization of homogeneous polynomials with isolated singularities*. Niet zo'n goede keus voor een titel, vond ik, want die heeft betrekking op een context die een gemiddelde wiskundestudent niet kan plaatsen (zij zelf eigenlijk ook niet), terwijl de probleemstelling zich heel wel laat formuleren zonder een dergelijke verwijzing. Het gaat namelijk om de vraag naar een goede afschatting van het aantal roosterpunten in het convex omhulsel van de oorsprong $0 \in \mathbb{R}^n$ en positieve scalaire veelvouden van de basis vectoren $\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n$ in termen van die scalairen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Hiervoor had Granville in 1991 een vermoeden opgesteld wat zij verifieerde voor $n = 5$ (voor $n < 5$ hadden anderen, waaronder haar mentor, dit al gedaan).



Figuur 4 Op audientie bij mevrouw Chen Zhili. V.l.n.r. John Coates, Terry Tao, Yau, Zhili, Chen Xu (vicepresident Tsinghua Universiteit.)

Mooi werk en een uitstekende presentatie, waardoor zij de prijs meer dan verdient.

De volgende ochtend konden we tamelijk snel bepalen hoe de geldprijzen verdeeld moesten worden. Tevens werd besloten alle overige 13 genomineerde teams (in plaats van slechts 5) een eervolle vermelding te geven. De jury, en Yau in het bijzonder, was blijkbaar niet bevreesd voor de mogelijke repercussies van de keus voor de eerste prijs. Niettemin waren een ander jurylid en ik het erover eens dat Yau's broer er verstandiger aan zou doen voortaan af te zien van een dergelijk mentoraat.

De prijsuitreiking

Dit was opgezet als een mediaspektakel, dat plaatsvond in het groot auditorium van de universiteit. Op de geplastificeerde briefkaarten om onze nek stond nu VIP (ook in het Chinees) en er was ons weer een magnetische corsage aangeklikt. Bij binnenkomst bleek de zaal al nagenoeg gevuld met leerlingen en hun supporters. Na ons volgden allerlei autoriteiten en een stuk of twintig fotografen. Bij het welkom werd ieder jurylid nog eens afzonderlijk voorgesteld: bij het noemen van onze naam werden we ondersteund even op te staan; wellicht niet zo vreemd dat zo de ene Jean-Pierre (Bourguignon) opstond bij het noemen van de andere (Demailly), dit overkwam zelfs Terry Tao, die zijn naam verwarde met die van Kefeng Liu. Gelukkig waarschuwde mijn buurman mij toen ik aan de beurt was.

De presentatie was in handen van een duo, of eigenlijk alleen van de vrouwelijke helft hiervan, een *anchor woman* van de Chinese televisie, want haar partner leek de rol van sidekick toebedeeld te zijn. Zij vroeg een autoriteit de prijswinnende teams te noemen, en na elke naam werd een onzer uitgenodigd de bijbehorende sculptuur uit te reiken. Mij was het gegund dat te doen aan Wang Zili. Daarna nam zij de winnaars korte interviews af, wat bij Irene Chen vanwege de taal wat moeizaam verliep. Tenslotte mochten afgevaardigden van de winnende teams in het Engels een kort woord van dank spreken. Yueran Ma deed dat voor het zilver en hield onvoorbereid een prachtige, bijna ontroerende rede: zij dankte



foto: Scott Wolpert

Figuur 7 Mevrouw Chen Zhili temidden van de vertegenwoordigers van de prijswinnende teams. Uiterst links Yueran Ma (zilver) en daarnaast Irene Chen (goud). Aansluitend rechts van haar Wang Zili.

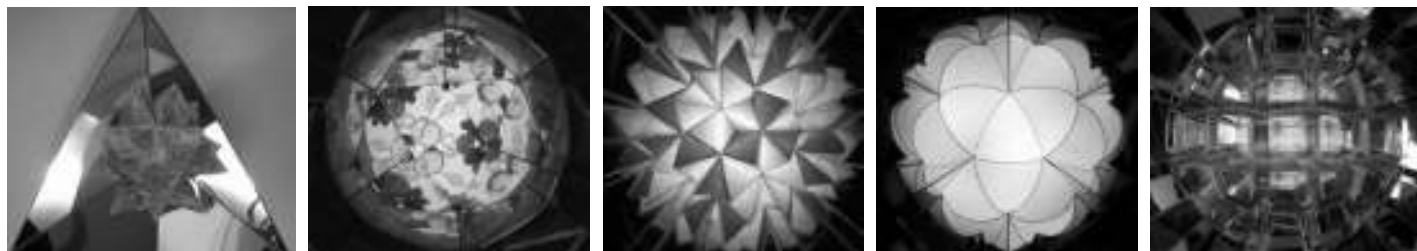
niet alleen degenen die haar team hadden bijgestaan, maar repte ook van de schoonheid van de wiskunde die hen onderweg niet heeft doen versagen (een onvermoeide arbeid enzovoorts), was dankbaar voor de ervaring hier deel aan te hebben gehad en besloot met de aankondiging dat haar team het bijbehorende geldbedrag voor hun school zal bestemmen. Tenslotte werden er prijzen uitgereikt aan scholen die zich bijzonder hadden ingezet bij de begeleiding. Er volgden toespraken door Tao en Yau en daarna een fotosessie. Na afloop sprak ik nog even met Wang Zili, die mij deed beloven haar boektitels te geven voor verdere studie. Vervolgens bij wijze van lunch een groot banket in het Royal King (sic!) Hotel, waarbij onder meer de prijswinnaars, hun mentoren en hun familie aanzaten. Met natuurlijk weer vele toespraken.

Nog eens naar de volkshal

Later die middag bracht de bus en een vertegenwoordiger van ieder prijswinnend team ons weer naar de *Great Hall* om nu ontvangen te worden in de zaal van de provincie Sichuan door de vicevoorzitter van het volkscongres, mevrouw Chen Zhili, die bij buitenlandse sporters kennelijk bekend is vanwege haar gouverneurschap van het Olympisch Dorp. Dat vier van de vijf teams waren afgevaardigd door een meisje kon haar

wel bekoren. Er was niet voorzien in simultane vertaling en toen gebeurde iets ongelooflijks: Yueran Ma werd ter plekke gevraagd even deze dienst te verlenen. Zij stemde toe, nam plaats achter de vicevoorzitter, en kweet zich vervolgens van die taak alsof ze daarin al jaren ervaring had (de enige zin waar ze over struikelde, was de nogal uitgebreide omschrijving van de titulatuur van onze gastvrouw). De audiëntie voltrok zich verder volgens hetzelfde scenario als bij ons eerdere bezoek, met alleen dit verschil dat nu ieder van ons (juryleden en prijswinnaars) een toespraakje moest houden. Met zovelen is het lastig iets oorspronkelijks te zeggen en de meesten van ons bezweken dan ook voor de verleiding alleen maar te loven. Tao zag dat goed: het moet een mengsel zijn van *something sweet and something of substance*.

De volgende dag reisde ik terug naar Nederland. Door omstandigheden moest ik een nacht doorbrengen in Kopenhagen en toen ik daar even mijn mail raadpleegde trof ik een berichtje aan van Wang Zili, die terug in haar woonplaats Shenzhen, iets vertelde over haar wederwaardigheden na afloop van de ceremonie, mij goede kerstdagen wenste, en niet naliet mij te herinneren aan mijn belofte haar literatuur voor verdere studie door te geven.



Figuur 6 Wang Zili's driedimensionale kaleidoscoop (foto's door maakster; een diapresentatie in kleur staat op www.staff.science.uu.nl/~looi101/Coxeter.groups.illustrated.html)

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2008

Watermanagement in een veranderend klimaat

Het Twentse waterschap Regge en Dinkel zoekt naar een oplossing om het extra regenwater dat de klimaatverandering oplevert zonder overlast te verwerken. De studiegroep Wiskunde met de Industrie bestudeert het probleem.

Naar verwachting leidt klimaatverandering in Nederland tot nattere winters en drogere zomers. Waarschijnlijk valt er in de toekomst meer regen in korte tijd, zowel 's winters als 's zomers. Hoewel nog onzeker is of de totale hoeveelheid regen in een jaar ook toe gaat nemen, wordt in ieder geval wel een grotere piekbelasting verwacht. De waterschappen in Nederland moeten zich op deze veranderingen instellen.

Het waterschap Regge en Dinkel is in de regio Twente verantwoordelijk voor het waterbeheer in een gebied van veertig bij veertig kilometer, waarin de steden Almelo, Hengelo en Enschede liggen. De belangrijkste waterwegen in dit gebied zijn de twee rivieren: de Regge en de Dinkel. Allebei stromen ze uit in de Vecht, die buiten het beheergebied van het

waterschap ligt. Uiteraard wil het waterschap de problemen niet verplaatsen naar de burens en dat zou wel gebeuren als al het overtollige water meteen in de Regge en daarna in de Vecht uitkomt.

Het waterschap onderzoekt al een paar jaar hoe het in de toekomst moet omgaan met de verwachte toename van de regenval in korte tijd. "Daarvoor hebben we een hydrologisch simulatiemodel opgesteld", vertelt Jeroen van der Scheer van het waterschap. "Als invoer van ons model gebruiken we de piekhoeveelheid regen die in tien dagen kan vallen. Het model is gebaseerd op eigenschappen van de bodem en die van het hele watersysteem met sloten, stuwen en rivieren. Het model voorspelt vervolgens hoe de extra waterhoeveelheid wordt afgevoerd en wat de waterpeilen in de regio dan zijn. Door de voorspellingen van ons model te gebruiken, willen we toekomstige waterproblemen voorkomen."

Een nadeel van dit simulatiemodel is echter dat het ingewikkeld in elkaar steekt. Het is zeer gedetailleerd doordat alle belangrijke waterlopen meegenomen zijn. Bovendien kost het een dag om het simulatiemodel te draaien. Dat betekent ook dat het lastig is om snel inzicht te krijgen in de gevolgen van bepaalde maatregelen: de aanleg van een extra sloot of stuw bijvoorbeeld.

"Met het simulatiemodel hebben we het probleem doorgerekend", zegt van der Scheer.

"Onze conclusie was dat je het totale gebied het beste in een stuk of veertig deelgebieden kunt opdelen, en dan elk deelgebied zijn eigen probleem te laten oplossen door het water tijdelijk vast te houden. Dat is een betere oplossing dan het aanleggen van één groot bassin waarin het water tijdelijk wordt geparkeerd. Maar we vroegen ons af of er geen andere oplossingen waren, en of ons model wel de beste oplossing gaf. Vandaar dat we het probleem hebben voorgelegd aan de studiegroep wiskunde met de industrie."

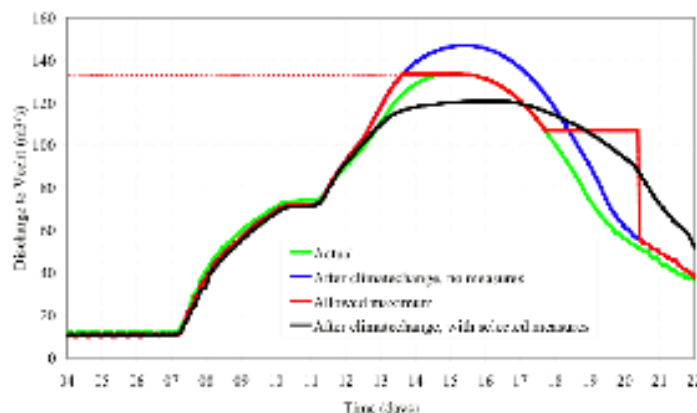
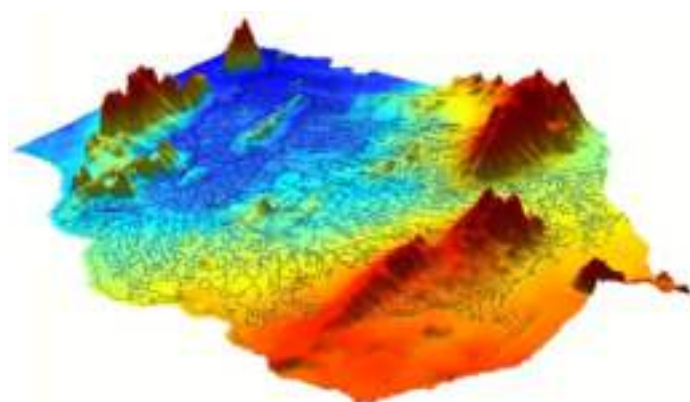
Bodemkarakteristiek

Niels Besseling, Onno Bokhove, Alfred Stein, Anton Stoorvogel (Universiteit Twente), Alla Kollechkina, Ronald van Nooyen (TU Delft), Jaap Molenaar (Universiteit Wageningen) en Vivi Rottschäfer (Universiteit Leiden) hebben zich tijdens de studieweek over het probleem gebogen. "Bij sommige fysische problemen heb je te weinig informatie, maar voor het probleem van het waterschap hadden we eigenlijk een overvloed aan informatie", zegt Stoorvogel. "We hebben te maken met duizenden beken en slootjes; en met subgebieden die allemaal een eigen bodemkarakteristiek hebben. Zoveel informatie konden we niet in een week analyseren. Daarom hebben we onderzocht hoe ver we kunnen komen met een veel eenvoudiger model waarin we wel de essentie, maar niet alle details meenemen."

De studiegroep ontwikkelde twee modellen. Het eerste is een ééndimensionaal fysisch model. Uitgangspunt was het opdelen van het beheergebied in subgebieden met een min of meer uniforme bodemkarakteris-



Figuur 1 Het beheergebied van het waterschap



Figuur 2 Links: Topografie van het beheergebied Regge en Dinkel met in blauw de rivieren en sloten. Rechts: Waterafvoer in de rivier de Vecht bij verschillende scenario's: het huidige scenario (groen); na de klimaatverandering, maar zonder maatregelen (blauw); het toegestane maximum (rood); na de klimaatverandering, maar met genomen maatregelen (zwart)

tiek. Zo houdt kleigrond meer water vast dan zandgrond, en dus moet het model klei- en zandgronden van elkaar scheiden. Per gebied werd de waterafvoer bekeken en werden de afzonderlijke bijdragen bij elkaar opgeteld.

Stoorvogel: "Gegeven de bodemkarakteristieken, hebben we met een ééndimensionaal diffusiemodel berekend hoe snel regenwater in de bodem zakt, en hoe snel het via het grondwater in een aangrenzende sloot terecht komt. Van daaruit wordt het water naar de Regge afgevoerd. In ons model hebben we niet naar de Dinkel gekeken, omdat het water ofwel in de ene ofwel in de andere rivier terecht komt."

Voor elk subgebied vonden de wiskundigen zo een fysische vergelijking die vertelt hoeveel water wordt afgevoerd naar de Regge en wanneer het bij de Vecht aankomt. Deze vergelijkingen werden numeriek opgelost. De oplossingen laten zien dat zelfs dit eenvoudige model al een realistische beschrijving geeft.

Vervolgens vroeg de studiegroep zich af hoe groot de subgebieden mogen worden, met behoud van kwaliteit van de oplossingen. "We begonnen met gebieden van tweehonderd vierkante meter", zegt Stoorvogel. "Daarna gingen we de gebieden groter maken. Daarmee gingen we gebieden die in detail iets verschillen qua bodemkarakteristiek, toch als een geheel beschouwen. Dat gaat een keer mis, maar we wilden weten hoe lang die aanpak goed gaat. Het bleek goed te gaan tot subgebieden van ongeveer een vierkante kilometer."

De wiskundigen ontwikkelden ook nog een tweede model: nog eenvoudiger met maar één parameter per subgebied. Stoorvogel: "We nemen dan alleen maar aan dat in elk gebiedje een regenhoeveelheid ter grootte ρ wordt afgevoerd, waardoor een hoeveelheid $(1 - \rho)$ achterblijft. Een verandering in een

subgebied leidt dan alleen tot een verandering in ρ . Deze eenvoudige aanpak laat bijvoorbeeld snel zien dat per gebied tussen 15 en 40% van het water binnen een dag is afgevoerd, en dat dus tussen 60 en 85% achterblijft."

Natuurlijke oplossing

De belangrijkste conclusie van beide modellen is dat het waterprobleem kan worden opgelost zonder het bouwen van een groot bassin. Het benutten van de natuurlijke opslagcapaciteit van sommige gebieden —door ze indien nodig gecontroleerd onder water te laten lopen— werkt net zo goed als het aanleggen van een nieuw, en waarschijnlijk duur bassin.

Een andere conclusie is dat het handig is om de waterafvoer van subgebieden die ver van de Regge afliggen te vertragen en die van gebieden die op een gemiddelde afstand liggen te versnellen. Dat voorkomt een plotse piekafvoer in eerst de Regge, en daarna de Vecht. Stoorvogel: "Met beide modellen kunnen we snel uitrekenen wat de gevolgen zijn voor de waterafvoer bij een verandering in een subgebied. Dat is de waarde van deze modellen."

"Hoewel de studiegroep geen opzienbarende nieuwe dingen heeft gevonden, geven hun resultaten ons wel handvatten om mee verder te gaan", reageert Jeroen van der Scheer van Waterschap Regge en Dinkel op het werk van de studiegroep. "Het belangrijkste resultaat is de bevestiging van onze eigen resultaten. Hun resultaat, dat het om het even is of je in alle gebieden een beetje doet, of in enkele gebieden een heleboel, is een onderbouwing voor onze strategie om in alle gebieden iets te doen."

Vooraf had het waterschap zich afgevraagd of de tijdsvertraging die optreedt tussen de opname van de lokale regenval door de bodem en de afvoer naar de Regge op een

of andere manier slim gebruikt kan worden. "Maar," zegt van der Scheer, "de studiegroep heeft laten zien dat het tijdseffect te klein is om zinvol te gebruiken bij het watermanagement. Het effect valt in het niet tegenover andere mogelijke oplossingen. Dat is het tweede belangrijke resultaat waarmee we in het vervolg rekening kunnen houden."

Meer in het algemeen, zegt van der Scheer, kan het waterschap profijt trekken van het feit dat het eenvoudige, analytische model van de studiegroep snel inzichtelijk maakt wat er per gebied gebeurt. "Daarmee hebben we meer inzicht gekregen in ons watersysteem."

Het verdere plan van het waterschap is om tot een compleet actieprogramma te komen, dat in detail aangeeft welke maatregelen genomen moeten worden om de verwachte extra regenval aan te kunnen. De belangrijkste aanpak van de situatie wordt gezocht in een zo natuurlijk mogelijke oplossing van het probleem in plaats van het bouwen van extra stuwen en dammen of andere waterwerken. De bedoeling is dat het actieprogramma tussen 2010 en 2050 wordt uitgevoerd in de regio Regge en Dinkel. Van der Scheer: "In het actieprogramma wijzen we gebieden aan waar water tijdelijk geparkeerd kan worden door ze onder water te laten lopen. Bij voorkeur zijn dat gebieden die van nature al geschikt zijn om water te parkeren, bijvoorbeeld omdat ze vroeger ook af en toe onder water liepen. Uiteraard moeten dit gebieden zijn waar een overstroming het minste kwaad kan. In totaal zal het gaan om zo'n zeven procent van ons hele beheergebied. Vervolgens moet met de beheerders van de grond geregeld worden dat het gewenste beheer ook mogelijk wordt, en hoe ver een gebied onder water mag komen te staan."

Rob Bisseling

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
R.H.Bisseling@uu.nl

Oratie

Parallel, groen en

Computers met meerdere processorkernen zijn doorgedrongen in ons dagelijks leven: moderne desktop pc's en draagbare computers zijn vaak voorzien van dual-core of soms zelfs quad-core processoren. Hoe moeten we onze software en rekenmethoden aanpassen zodat we deze parallelle processorkracht ook daadwerkelijk kunnen gebruiken? Hoe kunnen we tegelijkertijd meerdere bewerkingen op deze computers uitvoeren? In zijn oratie, uitgesproken op 8 december 2009 aan de Universiteit Utrecht, zet Rob Bisseling, profileringshoogleraar scientific computing, uiteen hoe we parallellisme kunnen inzetten in diverse toepassingen, waarom dit een groene technologie is en hoe snellere berekeningen van maatschappelijk nut kunnen zijn.

Het is parallel, groen en snel. Dit klinkt als een raadsel en zo is het ook bedoeld. In de volgende tekst zal ik dit raadsel ophelderen en u laten zien hoe deze woorden mijn vakgebied, *scientific computing*, karakteriseren.

Parallel

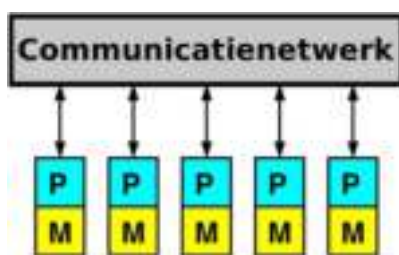
U rijdt misschien wel eens over de parallelweg, evenwijdig aan de snelweg. Of u droomt van een parallel universum, of wat bescheiden van een parallelle wereld, evenwijdig aan de echte, maar net iets anders. Zonder dat u het beseft gebruikt u waarschijnlijk al een parallelle computer, en dat is de beteke-

nis van het woord 'parallel' waar het hier om gaat. Als ik droom over iets parallels dan gaat het om parallelle algoritmen: rekenrecepten om parallelle computers te gebruiken.

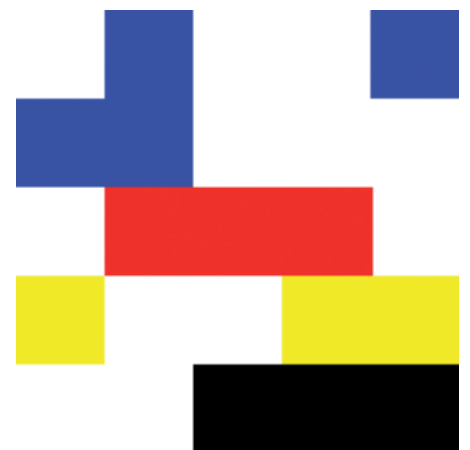
Wat is een parallelle computer? Simpel gezegd, een computer die tegelijkertijd, dus parallel, verschillende operaties uitvoert. Daarvoor beschikt die computer over verschillende processoren, zie Figuur 1. Een computer met 1000 processoren kan in principe 1000 maal zo snel rekenen als met een niet-parallelle, sequentiële computer. Dat is veelbelovend, en vormt op zich al een mooie motivatie voor fundamenteel onderzoek naar parallellisme. Mijn eigen interesse in dit vakgebied werd gewekt door een cursus *Parallel and distributed algorithms* van Larry Rudolph aan de Hebreeuwse universiteit van Jeruzalem, waar ik mijn promotieonderzoek deed van 1982 tot 1986. Parallelle computers waren toen vooral van theoretisch belang, en pas in 1986 kwam de eerste commerciële machine, een Intel hypercube, op de markt. Ik was zo fortuinlijk vanaf 1987 op het researchlaboratorium van Shell in Amsterdam te werken, waar men al snel een parallelle computer met wel 400 pro-

cessoren aanschafte van Europees fabrikaat, gebaseerd op een computerchip genaamd de *transputer*. De goede connecties van de chip-fabrikant (Inmos in Bristol) en het succes van deze chip zorgden er voor dat de term 'transputer' al snel een trefwoord in de *Concise Oxford English Dictionary* werd.

We maken een sprong in de tijd, en belanden in 2009. Mijn broer wil een nieuwe thuiscomputer kopen en laat mij een folder zien van de lokale pc-verkoper ergens in de Achterhoek, onze geboortestreek. De keuze is tussen een single-core, dual-core, en een quad-core computer, ter plekke in elkaar te zetten op basis van losse componenten, zo van het schap. Als u weet dat een *core* een rekenkern is, en er meerdere kernen op een



Figuur 1 Parallelle computer met 5 processoren (*P*), ieder met een eigen geheugen (*M*, *memory*). De processoren communiceren met elkaar via een netwerk.



Figuur 2 Matrix met 13 niet-nul elementen verdeeld over vier processoren door het programma Mondriaan [21]. De blauwe processor heeft vier niet-nul elementen, de anderen drie.

snel



Rob Bisseling

computerchip geplaatst kunnen worden, dan is de eigenlijke vraag, hoeveel parallelisme wil je hebben in de computer: 1-, 2-, of 4-voudig? Hierbij is enkelvoudig natuurlijk sequentieel, en spreken we pas vanaf 2 kernen over echt parallelisme. Ruwweg betaal je zo'n 100 Euro meer voor elke extra kern.

Meer is kennelijk beter, maar let op: kan de computer de verschillende kernen ook echt tegelijk gebruiken? Eén kern kan een bepaalde nuttige taak verrichten, en voor een wiskundige is dat vaak een berekening of de visualisatie ervan, en een andere kern zou de elektronische post af kunnen handelen. Wat kunnen we 4 kernen echter laten doen? Om die goed te gebruiken, moeten we onze software geschikt maken. Dit betekent dat we de onder-

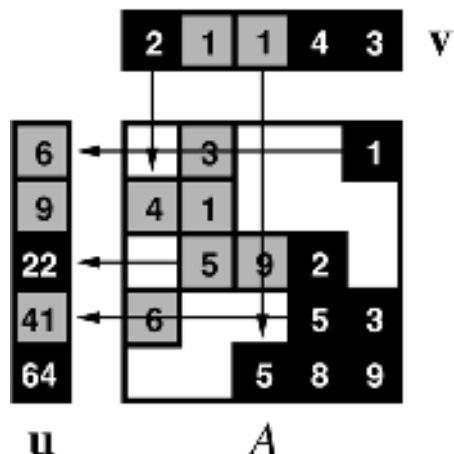
liggende algoritmen, de rekenrecepten, moeten *paralleliseren*. Dit is een uitdaging, voor grote bedrijven als chipmaker Intel, computerfabrikant Apple en softwareproducent Microsoft, en binnen het wiskundig gebied voor de makers van Matlab en Mathematica.

Een intellectuele uitdaging ook voor numeriek wiskundigen, die wiskundige problemen oplossen op de computer, vaak via benaderingen en snelle algoritmen. Sinds 1993 geef ik aan deze universiteit met veel plezier het vak Parallele Algoritmen, waarin we allerlei basisberekeningen paralleliseren volgens twee principes:

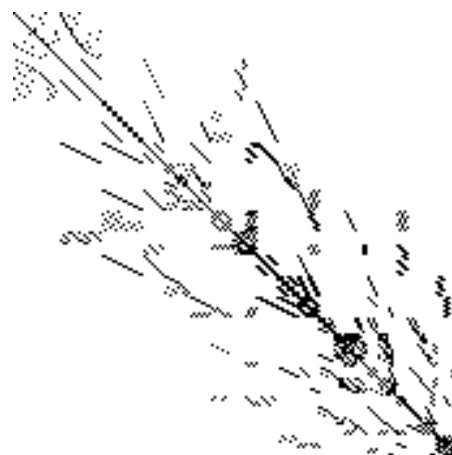
1. *Verdeel en heers*: verdeel de gegevens en het rekenwerk eerlijk over de processoren, zodat niemand hoeft te wachten en niemand te veel werk heeft, zie Figuur 2.
2. *Communiqueer met mate*: zo min mogelijk, maar wel voldoende. Om samen een probleem op te lossen is communicatie nodig: gegevens worden verstuurd tussen de processoren of kernen, zie Figuur 3. Een informatieve boodschap kan een processor weer aan het werk zetten die anders niet verder zou kunnen met zijn berekening. Te veel communicatie kost echter tijd en houdt de processoren maar van het werk. Het versturen van de informatie kost zelf ook tijd, vaak meer dan het bewerken ervan, en dit willen we dus vermijden.

Een matrix is een soort schaakbord gevuld met gegevens, de elementen. Een ijle matrix, zie Figuur 4, bevat weinig elementen ongelijk nul, zoals ijle lucht weinig zuurstof bevat.

Niet-nullen zijn de zuurstof van onze berekeningen. Gegevens die een numerieke waarde ongelijk nul bevatten worden door ons gemanipuleerd net zo lang tot we betekenisvolle uitkomsten krijgen. Gegevens die gelijk aan nul zijn kunnen we overslaan. In de scientific computing is een matrix met een miljoen rijen en kolommen heel normaal. Vaak zijn onze matrices vierkant, maar dat hoeft niet. Voor mij worden matrices pas interessant als ze veel nullen bevatten. Je krijgt dan een structuur van nullen en niet-nullen, de *ijlheidsstructuur*. Deze structuur kan benut worden om berekeningen te versnellen. Een nul ergens bij optellen is gratis, en met nul ver-



Figuur 3 Twee processoren, zwart en grijs, communiceren met elkaar tijdens de parallele berekening van het matrix-vector product $u = Av$ [2].



Figuur 4 340×340 matrix cage7 met 3084 niet-nullen (2.7% van het totaal aantal matrixelementen). De matrix stelt een Markov model voor van DNA elektroforese [20]. Rijen en kolommen representeren hierbij mogelijke toestanden en matrixelementen representeren overgangswaarschijnlijkheden tussen de toestanden.

menigvuldigen levert een zekere uitkomst van nul op. Ook hoeft je nullen niet op te slaan in het computergeheugen. Immers, het volstaat de niet-nullen en hun posities op te slaan (een niet-nul met waarde 7.5 in rij 6 en kolom 12,

of bij schaken een paard in rij 1 en kolom g). Deze geheugenbesparing zorgt ervoor dat je veel grotere problemen kunt oplossen.

In het deelgebied *Combinatorial scientific computing* [6] (afgekort CSC) staan ijle matri-

ces centraal. CSC is een van mijn researchinteresses. Als onderzoeker probeer ik algoritmen te bedenken die de ijheidspatronen van matrices benutten om matrixberekeningen sneller te maken, onder andere door deze te pa-

Mondriaanpartitionering

De Mondriaanpartitioneerder verdeelt een ijle matrix A in p stukken, ieder bestemd voor een processor (of een core). De processoren zijn genummerd 0 t/m $p-1$. Het totaal aantal niet-nullen (*nonzeros*) van de hele matrix is $nz(A)$ en het aantal van processor s is $nz(A_s)$. De eerlijke werkverdeling wordt opgelegd door de voorwaarde

$$nz(A_s) \leq (1 + \epsilon) \frac{nz(A)}{p},$$

voor $s = 0, 1, \dots, p-1$,

waarbij ϵ de toegestane onbalans in de werkverdeling is. Het *communicatievolume* behorend bij de verdeling is

$$V(A_0, A_1, \dots, A_{p-1}) = \sum_i (\lambda_i - 1) + \sum_j (\mu_j - 1),$$

waarbij λ_i het aantal processoren is dat een niet-nul in matrixrij i heeft en μ_j het aantal processoren dat een niet-nul in matrixkolom j heeft. Deze metriek geeft weer dat een processor informatie moet sturen naar alle andere processoren die een deel van de rij of kolom bezitten. Er geldt dat $1 \leq \lambda_i, \mu_j \leq p$, voor alle i, j . (We nemen aan dat geen enkele rij of kolom leeg is.)

Het partitioneren gebeurt via *orthogonale recursieve bisectie*, het herhaaldelijk

in tweeën splitsen van de matrix waarbij zowel de rijrichting als de kolomrichting wordt geprobeerd en de beste richting (met het kleinste volume) wordt gekozen. Dit wordt weergegeven door het onderstaande recursieve algoritme.

De functie roept zichzelf aan, met de helft van het oorspronkelijke aantal processoren. De waarde van ϵ wordt hierbij aangepast: het matrixdeel met minder niet-nullen krijgt een grotere ϵ voor de resterende partitionering. De splitsing in tweeën gaat er vanuit dat alle toekomstige splitsingen dezelfde onbalans δ creëren, resulterend in een uiteindelijke groeifactor $1 + \epsilon = (1 + \delta)^q \approx 1 + q\delta$, wat leidt tot de optimale keuze $\delta = \epsilon/q = \epsilon/\log_2 p$ voor de eerste splitsing.

De splitsing in twee stukken gebeurt via een *multilevelmethode*, waarbij (in het geval van de kolomrichting) eerst matrixkolommen die op elkaar lijken via een herhaalde matchingsprocedure worden samengevoegd, daarna de ontstane superkolommen worden verdeeld in twee groepen met behulp van het Kernighan–Lin [9] algoritme, en de resulterende verdeling uiteindelijk wordt verfijnd op alle verschillende niveaus van de multilevelmethode.

aanroep: $(A_0, \dots, A_{p-1}) := \text{MatrixPartition}(A, \epsilon, p)$.

invoer: A : ijle matrix,
 p : aantal processoren, $p = 2^q$ met $q \geq 0$,
 ϵ : toegestane onbalans, $\epsilon > 0$.

uitvoer: $(A_0, \dots, A_{p-1})$: partitionering van A .

if $p > 1$ **then**

{Splits in 2 delen}

$(B_0^{rij}, B_1^{rij}) := \text{split}(A, \text{rij}, \frac{\epsilon}{2})$;

$(B_0^{kol}, B_1^{kol}) := \text{split}(A, \text{kol}, \frac{\epsilon}{2})$;

if $V(B_0^{rij}, B_1^{rij}) \leq V(B_0^{kol}, B_1^{kol})$

then $(B_0, B_1) := (B_0^{rij}, B_1^{rij})$;

else $(B_0, B_1) := (B_0^{kol}, B_1^{kol})$;

{Splits verder}

$maxnz := (1 + \epsilon) \frac{nz(A)}{p}$;

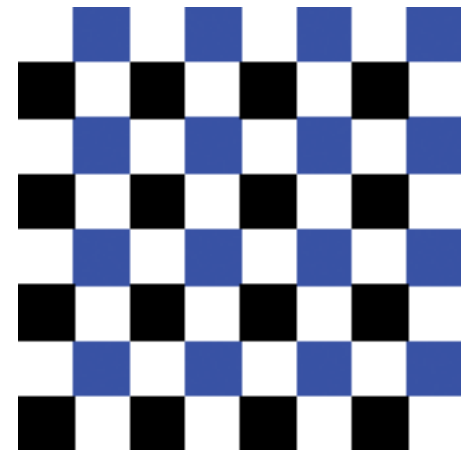
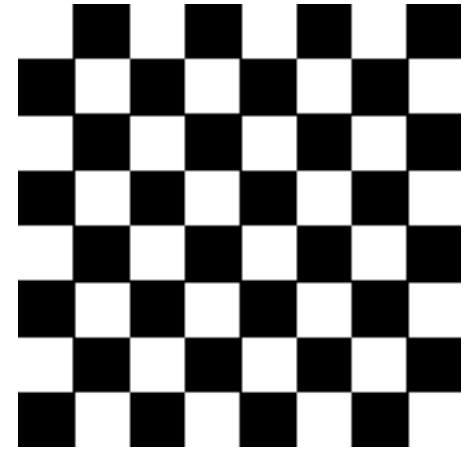
$\epsilon_0 := \frac{maxnz}{nz(B_0)} \cdot \frac{p}{2} - 1$;

$\epsilon_1 := \frac{maxnz}{nz(B_1)} \cdot \frac{p}{2} - 1$;

$(A_0, \dots, A_{p/2-1}) := \text{MatrixPartition}(B_0, \epsilon_0, \frac{p}{2})$;

$(A_{p/2}, \dots, A_{p-1}) := \text{MatrixPartition}(B_1, \epsilon_1, \frac{p}{2})$;

else $A_0 := A$;



Figuur 5 8×8 matrix chess8 met 32 niet-nullen.
(a) originele matrix;
(b) matrix eerlijk verdeeld over 2 processoren, waarbij alle niet-nullen in een rij of kolom dezelfde kleur (processor) hebben gekregen;
(c) dezelfde matrixverdeling, maar nu na rijpermutatie (blauwe rijen eerst) en kolompermutatie (blauwe kolommen eerst). Bij deze verdeling is geen communicatie nodig tijdens parallele matrix-vector vermenigvuldiging.



Figuur 6 Piet Mondriaan: *Compositie nr. 2 in Lijn en Kleur*, 1913. Gemeentemuseum Den Haag

rallelliseren. Van 1987–1993 heb ik bij Shell samen met collega's Daniël Loyens en Hans van de Vorst een hele parallelle lineaire algebra bibliotheek ontwikkeld, PARPACK, voor berekeningen met ijle en ook volle matrices, gericht op raffinaderijoptimalisatie. De matrices verdeelden we toen over de processoren via twee-dimensionale cyclische verdelingen.

Later, in Utrecht, ben ik dieper ingegaan op het verdelingsprobleem, ook wel *partitionering* genoemd. Een voorbeeld hiervan ziet u in Figuur 5. Ik mocht daarbij profiteren van mijn interactie met vele creatieve, slimme en kritische Utrechtse studenten die mijn woord nooit meteen voor waar aannamen. Als ik dacht dat Cartesische verdelingen het summum waren, dan liet Brendan Vastenhouw mij zien dat voor matrix-vectorvermenigvuldiging niet-Cartesische verdelingen soms beter zijn; daar is later de Mondriaan-verdeling uit geboren. Het is een genot elk jaar weer dergelijke studenten tegen te komen, deze te mogen begeleiden en samen onderzoek te doen.

Piet Mondriaan is een groot Nederlands schilder, geboren in Amersfoort in 1872, overleden in New York in 1944. Hij is zijn loopbaan figuratief begonnen, met het schilderen van onder andere de molens en bomen aan de rivier het Gein. De bomen werden steeds recht-hoekiger en abstracter, en de kleuren steeds meer primair. Het groen verdween. Zijn schilderijen zijn een inspiratiebron voor velen, en ook voor mij. In 2001, toen Brendan en ik een naam zochten voor onze verdelingssoftware voor matrices kwamen we uit op Mondriaan. We hebben de naam bijna een jaar geheim gehouden om het achterliggende verdelingsidee niet te verklappen vóór publicatie. In mei 2002 zetten we versie 1.0 op het web en stuurden ons artikel naar SIAM Review, waar het uiteindelijk verscheen in 2005 [21].

Versie 2.0 brachten we in juli 2008 uit op onze website, met Figuur 6 als begeleidende foto. Deze versie bevat geavanceerde methoden voor de verdeling van vectoren, naast nieuwe, fijnkorreliger en hybride

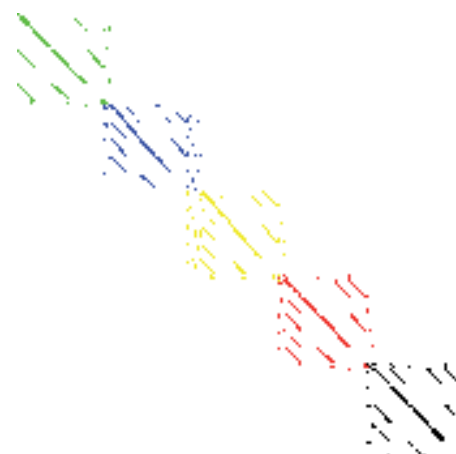


Figuur 7 *Cache-oblivious* permutatie van rijen en kolommen. Gemengde rijen worden in het midden geplaatst, recursief, om een geleidelijke overgang in cachegebruik van gegevens aan de linkerkant naar gegevens aan de rechterkant te bewerkstelligen. Dezelfde permutatie kan gebruikt worden voor elke cache-architectuur, ongeacht de precieze cache-groottes en cache-hiërarchie [22].

methoden voor matrices. Extra aandacht hebben we hierbij besteed aan de kwaliteit van de software via uitvoerige tests, zowel van afzonderlijke modules, als stresstests van het hele systeem. Wij stellen onze software als *open source* beschikbaar. Iedereen kan elke regel programmacode lezen, veranderen naar eigen behoefte en fouten opsporen. Mijn opvatting is dat software zelf een steeds belangrijker publicatie wordt, naast de traditionele artikelen in wetenschappelijke tijdschriften. Software als eindproduct van onderzoek wordt nog wel eens ondergewaardeerd. Het is goed te beseffen dat het gebruik van ons onderzoek en wellicht ook het aantal citaties van onze artikelen sterk beïnvloed worden door de beschikbaarheid van goed gedocumenteerde en robuuste software.

Visualisatie is belangrijk voor scientific computing. Allereerst om grote hoeveelheden gegevens snel te begrijpen, maar ook om beter nieuwe algoritmen te kunnen bedenken. De eerste plaatjes van matrices in *De Stijl* maakte ik met de hand, hokje voor hokje, niet-nul voor niet-nul, zoals een schilder zou doen op het canvas. Een nuttige vingeroefening, die later hielp bij het automatisch creëren van een mooie visualisatie.

Inmiddels staat Mondriaan versie 3.0 klaar. Mijn huidige promovendi Albert-Jan Yzelman en Bas Fagginger Auer hebben veel nieuws toegevoegd aan de software. Albert-Jan heeft permutatie-algoritmen bedacht om bepaalde structuren te creëren, zoals de *Separated Block Diagonal* (SBD) structuur [22], zie Figuur 7, die erg goed werkt bij moderne computers met een ingewikkelde geheugenarchitectuur, voorzien van meerdere lagen van cache-geheugen, met prozaïsche namen zoals L1, L2, en L3 cache. Bas, promovendus sinds september 2009, heeft interfaces ge-



Figuur 8 Matrix 1ns3937 met 3937 rijen en kolommen, en 25407 niet-nullen. De matrix komt voort uit de oplossing van de Navier-Stokes vergelijkingen voor vloeistofstroming en is door de Mondriaanpartitioneerder in 5 gelijke delen gesplitst, waarbij 3% onbalans is toegestaan in het aantal niet-nullen per processor. In dit plaatje is de matrix gepermuterd naar de bijbehorende SBD-structuur. Een filmpje van de partitionering gemaakt met Mondriaan-Movie van Bas Fagginger Auer is te zien op www.math.uu.nl/people/bisseling/oratiefilmpje.avi

maakt voor Mondriaan met de veelgebruikte pakketten Matlab en Mathematica. Ook heeft hij het mogelijk gemaakt om het verdelingswerk in uitvoering vast te leggen in filmpjes, zie Figuur 8.

De meesten van u zullen vrijwel dagelijks een zoekmachine zoals Google gebruiken om informatie te vinden, bijvoorbeeld de locatie van het Academiegebouw in Utrecht, recente publicaties van een collega of alle betekenissen van het woord 'parallel'. Google is ontwikkeld in 1998 door twee promovendi van Stanford University, Sergey Brin en Larry Page, en bevat een fikse dosis numerieke wiskunde, zie bijvoorbeeld [10]. Brin had een TWIN-master met dubbele major wiskunde en informatica afgerond, Page een master informatica, en ze deden onderzoek binnen de afdeling informatica. De zoekmachine is begonnen uit ijdellheid: spiegeltje, spiegeltje aan de wand, wie heeft de populairste webpagina van het land? En van de hele wereld? Brin en Page vroegen zich af wie er naar hun pagina verwees op het net ontstane wereldwijde web. En natuurlijk naar alle andere pagina's, anders kun je geen vergelijking maken en dus ook geen rangorde bepalen. Maar als een pagina populair is en ook nog de door jou gezochte term bevat, dan is dat vast een goed antwoord op je zoekvraag. Hun zoekmachine draaide eerst binnen het domein van Stanford, gedoogd door een vriendelijke systeembeheerder, en groeide uit tot een groot succes. Menig wiskundige en informaticus in Stanford werd hierdoor miljonair.

Het wereldwijde web kan worden be-

Rang	Locatie	Computer	Cores	$R_{\max}$	Verbruik
1	Oak Ridge, VS	Jaguar Cray XT5	224162	1759	6951
2	Los Alamos, VS	IBM Roadrunner	122400	1042	2346
3	Univ. Tennessee, VS	Kraken Cray XT5	98928	832	
4	Jülich, Duitsland	IBM Blue Gene/P	294912	826	2268
5	Tianjin, China	Tianhe-1 NUDT	71680	563	
93	SARA, Amsterdam	IBM Power 575	3456	51	552

Tabel 1 Lijst van de snelste supercomputers ter wereld in november 2009. Voor elke computer wordt het aantal cores gegeven, de maximaal gemeten rekensnelheid in Tflop/s (10^{15} floating-point operaties per seconde) en het elektriciteitsverbruik in kWatt, exclusief koeling. Bron: <http://www.top500.org>

schouwd als een ijle matrix, waarbij elke rij en bijbehorende kolom een webpagina voorstelt, en elke niet-nul een link van de ene pagina naar de andere. De matrix is niet-symmetrisch, want als jij naar mij wijst, betekent dit nog niet dat ik naar jou wijs. Het bepalen van de populariteit via het aantal naar mij wijzende links komt overeen met de vermenigvuldiging van een ijle matrix met een vector, wat we zojuist met behulp van Mondriaan hebben geparalleliseerd. Ik hoop dat u bij de naam 'Mondriaan' inmiddels denkt aan het softwarepakket in plaats van de schilder! De genialiteit van Brin en Page lag erin dat ze zagen dat je de matrix herhaaldelijk met de vector moest vermenigvuldigen, zodat de populariteit van de verwijzende webpagina's meetelt bij het bepalen van de populariteit van een pagina. Een numeriek wiskundige zou dit formuleren als: wij lossen een eigenwaardeprobleem op met de powermethode. Google doet dit eens per maand voor het hele web, voor een matrix van meer dan 10 miljard rijen en 10 miljard kolommen, inderdaad meer webpagina's dan mensen op aarde, en met gemiddeld zo'n 10 niet-nullen per rij. Na 50 keer vermenigvuldigen is men bij Google uitgedanst, en is de populariteit van elke pagina bepaald. Dit is in het kort het beroemde PageRank algoritme dat ervoor zorgt dat u snel uw zoekvraag beantwoordt ziet. Nu Google tot een groot bedrijf is uitgroeid, zijn verde-

re ontwikkelingen van dit algoritme uiteraard bedrijfsgeheim. Immers, Yahoo! en Microsoft luisteren mee. Laat ik u verklappen dat de vindrijkheid van onze Utrechtse studenten en promovendi niet onderdoet voor die op Stanford, en laten we hen vooral de ruimte geven. Ruimte om hun ideeën te beproeven, computers en vriendelijke programmeeromgevingen (UNIX en Linux), en ICT als spannend researchhulpmiddel en -doel, niet als routine-automatisering. Zo houden we onze getalenteerden gelukkig en krijgen we mooie resultaten, ook in Utrecht onder de Dom.

Groen

In december 2009 vond in Kopenhagen de conferentie over klimaatverandering van de Verenigde Naties plaats, waarin gesproken werd over de invloed van de mens op het klimaat, en in het bijzonder de veranderingen die teweeggebracht worden door de uitstoot van CO_2 , kooldioxide. Oorzaak van deze uitstoot is het gebruik van fossiele brandstoffen, als benzine in auto's, maar ook als grondstof bij de opwekking van elektriciteit nodig voor onze wasmachines, airconditioning, en, inderdaad, computers.

Als burger hebben wij allen een verplichting jegens de komende generaties om onze aarde in goede toestand over te dragen. Als wetenschapper hebben wij ook nog een bijzondere positie: de kennis die wij genereren kan direct benut worden om inzicht te krijgen in de processen die plaatsvinden en deze wellicht ten goede te veranderen. Als wiskundigen kunnen wij hieraan volop meedoen.

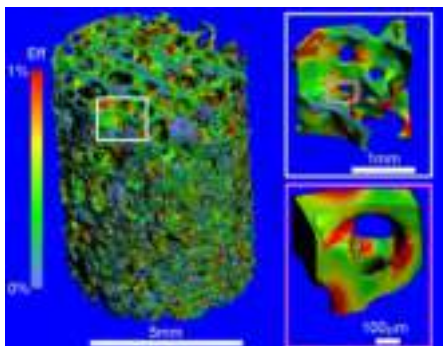
In 2007 was computergebruik al verantwoordelijk voor meer dan 2% van de totale CO_2 -uitstoot. Deze zogeheten *voetafdruk* van de computergebruiker heeft in de afgelopen decennia ongemerkt kunnen groeien. Twee ontwikkelingen stuwden deze toename: het groeiend aantal computergebruikers (iedere wereldburger zijn eigen pc) en de stijgende energieconsumptie van de computerchip. Heel lang was het elektriciteitsverbruik van de chip verwaarloosbaar, en viel in het niet bij die van bijvoorbeeld de monitor, of de rondwentelende harde schijf. Het schaalge-

drag als functie van de kloksnelheid is echter niet gunstig: een hogere kloksnelheid betekent meer rekenoperaties per seconde, maar helaas *veel* meer Watt benodigde elektriciteit [15]. Een chip (met 2 rekenkernen) van onze nationale supercomputer Huygens verbruikt ongeveer 320 Watt, evenveel als 3 verboden gloeilampen samen. Een chip in een pc haalt makkelijk 100 Watt, en meer energieverbruik met de bijbehorende warmteontwikkeling wilt u beslist niet op schoot hebben in uw laptopcomputer.

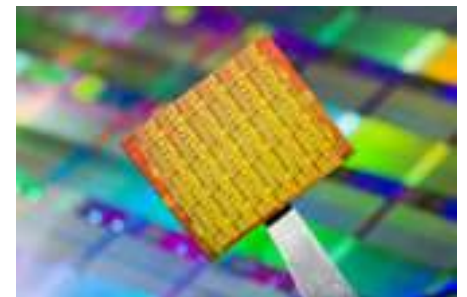
Het elektriciteitsverbruik bij mij thuis (3 personen en 3 computers) was 6137 kiloWattuur in 2008. Dat is omgerekend dag in, dag uit 700 Watt. De snelste supercomputer ter wereld, de Jaguar Cray XT in het Oak Ridge National Laboratory in de VS, verbruikt zo'n 7 MegaWatt, zie Tabel 1, dus 10.000 maal zoveel als mijn huishouden. Hier is werk te doen.

Ziet u in mijn verhaal vooral geen pleidooi om supercomputers uit te zetten en pc's af te danken. Ons moderne leven is te afhankelijk van de computer, en de prachtige simulaties op supercomputers leveren veel nieuwe kennis op. Simulaties van menselijke botstructuren zoals collega's Peter Arbenz en Costas Bekas op massief parallel supercomputers uitvoeren [1], helpen bij het lokaliseren van zwakke plekken en kunnen in de toekomst fracturen helpen voorkomen en osteoporose helpen bestrijden, zie Figuur 9. De simulaties die collega Gerard Barkema en ik van amorf silicium draaien [17] kunnen ons uiteindelijk helpen betere beeldschermen en zonnecellen te produceren. De oceaan simulaties van collega Henk Dijkstra van het IMAU, een grote rekenaar op Huygens, helpen ons te voorspellen of de warme golfstroom over precies 69 jaar nog bestaat. Daarvan willen we blijven profiteren. Ons doel is dit te doen via *green computing*, groen rekenen.

We moeten de technologie gebruiken om



Figuur 9 Simulatie van de effectieve belasting van een menselijke ruggenwervel (uit [1]). De rekentijd is ruim 27 minuten op 8100 cores van een IBM BlueGene/L computer, waarvan 13 minuten voor het verdelen van de bijbehorende matrix door ParMetis [8] over de processoren. De matrix heeft meer dan 1,5 miljard rijen en kolommen.



Figuur 10 Intel Single-Chip Cloud computer met 48 cores. Deze experimentele chip, aangekondigd op 2 december 2009, zal vanaf zomer 2010 in beperkte aantallen geleverd worden aan onderzoekinstellingen. De energieconsumptie is 25 tot 125 Watt, afhankelijk van het gebruik. Elk paar cores van de chip heeft een eigen, variabele klokfrequentie. Bron: <http://techresearch.intel.com>

de klok letterlijk terug te draaien: de hoge kloksnelheid van de chip moet weer naar beneden. De 4,7 Gigahertz van Huygens is wel het maximum bereikbare, met zo'n 5 miljard rekenoperaties per seconde. Een groter aantal operaties moeten we niet halen uit de klok, maar uit de multicore architectuur: meer rekenkernen, maar elk wat langzamer, zie Figuur 10. Dit vereist meer parallelisme, en dat komt goed uit, want daar hebben we de afgelopen jaren al veel ervaring mee opgedaan: als intellectuele uitdaging aan het front van de supercomputing, en in onze collegezalen waar we dit de afgelopen decennia al hebben onderwezen. Wie weet zorgt parallelisme als technologie ervoor dat we computerchips met een te hoog wattage kunnen verbieden, net zoals de LED-lamp en de spaarlamp het einde betekenden voor de veelverbruikende gloeilamp.

Snel

In februari 2007 was het departement wiskunde van de Universiteit Utrecht gastheer van de Studieweek Wiskunde en Industrie (SWI), een jaarlijks evenement waarin zo'n 60 wiskundigen van junior tot vergevorderde senior, van toegepast wiskundige tot zuiver wiskundige, zich werpen op een zestal problemen uit de omringende maatschappij. Samen met collega's Paul Zegeling, Karma Dajani, Tammam Jan Dijkema en Johan van de Leur heb ik deze week georganiseerd. Eén van de problemen werd aangedragen door het Universitair Medisch Centrum (UMC) in Utrecht. Dit academisch ziekenhuis had een nieuwe MRI-scanner aangeschaft met een magnetische veldsterkte van 7 Tesla, ruim meer dan de 3 Tesla van de vorige generatie. Daarmee kunnen betere beelden gemaakt worden van het menselijk lichaam, en bijvoorbeeld tumoren beter opgespoord worden. De scanner heeft 16 antennes die elk afzonderlijk afgesteld kunnen worden, zowel voor de fase als voor de amplitude, zie Figuur 11(a)–(b). Maar hoe moet dat? Het elektromagnetisch veld moet wel gelijk blijven op alle plaatsen in het onderzochte gebied van het lichaam.

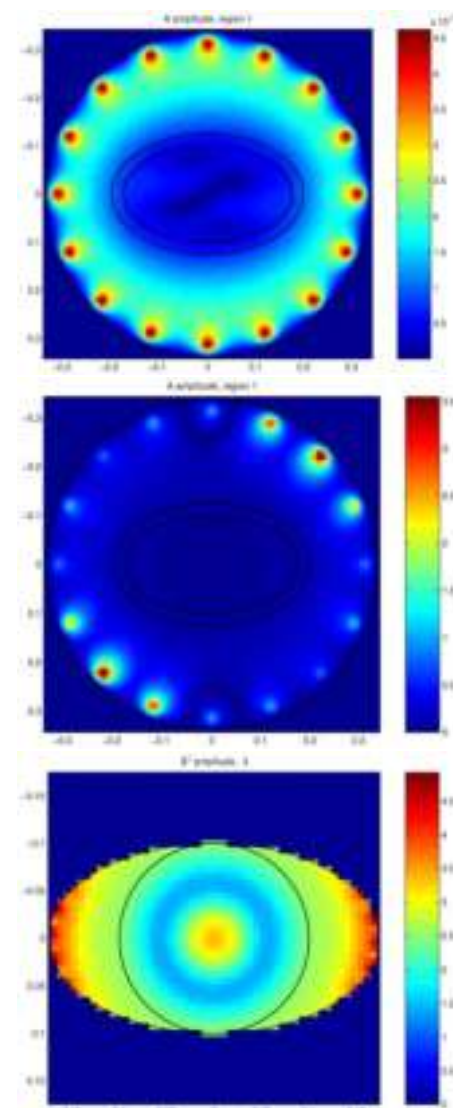
De onderzoeksgroep van Nico van den Berg in het UMC had numerieke software om de afstelling te optimaliseren voor elke specifieke patiënt en om tegelijk binnen de strenge veiligheidsregels te blijven die plaatselijke opwarming van de patiënt moeten voorkomen. De numerieke methode heet *Finite-Difference Time-Domain* (FDTD) en leverde een behoorlijke verbetering op door de personalisering van de antenneafstelling. De bestaande methode was echter toch onbruik-

baar in de praktijk omdat het zo'n 5 uur reken-tijd op een pc kostte. Artsen hebben meestal niet zo veel geduld, en patiënten trouwens ook niet. Dat moest veel sneller. Een groep wiskundigen ging aan de slag en bedacht een snellere benaderde oplosmethode met behulp van Besselfuncties, goed genoeg qua optimalisering, maar met een oplossing binnen een halve minuut, zie Figuur 11(c). Dit werk is beschreven in de SWI-proceedings [18] en een populaire versie [12]. De studieweek had nog een nasleep: er verscheen een gezamenlijk wetenschappelijk artikel [19] in het tijdschrift *Physics in Medicine and Biology*, en uit de vervolgcontacten ontstond het afstudeeronderzoek van Alessandro Sbrizzi van de master Scientific Computing in Utrecht, begeleid door Gerard Sleijpen. Alessandro ontving in december 2009 zijn *bul* en is inmiddels begonnen aan een promotieonderzoek in het UMC, om daar zijn numerieke kennis in te zetten voor verdere verbeteringen en wie weet ook verdere versnellingen.

De maatschappij vraagt om wiskundige bijdragen. Zij heeft ons hard nodig. Tegelijk is ons werk niet altijd even zichtbaar. Een druk op de knop, de numerieke software doet zijn werk, de inwendige opwarming blijft minimaal en er komt een scherp plaatje uit de scanner. Bedenk bij het bekijken van dit soort plaatjes hoe groot de bijdrage van de scientific computing hieraan is geweest!

Ik wil u nog een ander voorbeeld geven waarbij snelheid een cruciale rol speelt, namelijk *matching*, het vinden van een geschikte partner voor alle leden van een groep. Denk aan de Joodse gemeenschap in het dorp Anatevka waar Hodel, de dochter van melkman Tevje, aan matchmaker Yente vraagt om in haar boek een perfecte match te vinden. De wensenlijst: allereerst moet het een *scholar* zijn, een geleerde. Maar liefst ook nog eens rijk.

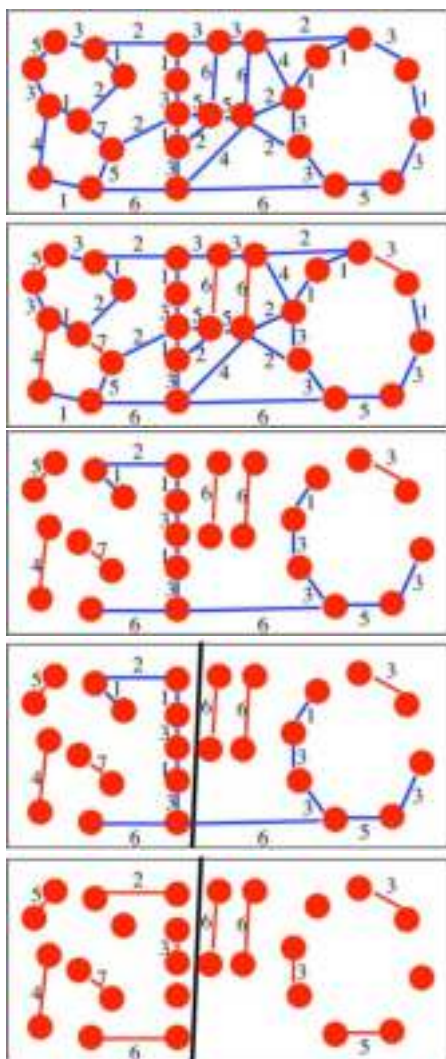
Laten we als wiskundigen even de rol van koppelaar spelen. In ons boek staan alle beschikbare kandidaten met hun gegevens en wensen. Als eerste stap kunnen we voor iedere kandidaat de lijst van mogelijke partners maken. Aantrekking die niet wederzijds is, gooien we uit de lijst. We houden zo wiskundig gezien een *graaf* over, een netwerk, met *knopen* (de kandidaten), en met *takken* ofwel verbindingen die de wederzijdse aantrekking representeren. Nu gaan we deze graaf wegen: op grond van de wensen en gegevens van elk mogelijk paar bepalen we een gewicht, de score die uitdrukt hoe goed de match is. Hoe hoger het gewicht, hoe beter de partners bij elkaar passen.



Figuur 11 Optimalisatie van het elektromagnetisch veld in de 7 Tesla MRI-scanner van het Universitair Medisch Centrum Utrecht [18].
(a) 16 antennes rond een elliptisch model van een buik;
(b) afzonderlijk afgestelde antennes;
(c) optimaal uniform geïnduceerd veld B^+ : weinig warmte-ontwikkeling en minder artefacten in de MRI-beelden

Deze gewogen graaf, met n knopen en m verbindingen is de invoer van onze berekening. De graaf is ijl, want kandidaten hebben ieder een beperkt aantal mogelijke partners. Er moet immers liefde kunnen ontvlammen! Er zijn misschien $m = 10n$ verbindingen, maar zeker niet $m = n^2/2$, het maximaal mogelijke aantal. Als $n = 1000$ maakt dit al een verschil van 10.000 te verwachten versus 500.000 maximaal mogelijke verbindingen, wat dus een factor 50 scheelt. Voor een voorbeeld van een mogelijke graaf, zie Figuur 12(a).

Wat is een optimale oplossing voor Yente? Zoveel mogelijk personen aan de man of vrouw proberen te brengen? Dat is een simpeler probleem, waarbij de weegfactoren genegeerd worden, en het gebruik van de op-



Figuur 12 Ongerichte gewogen graaf met $n = 26$ knopen en $m = 38$ verbindingen. Elke verbinding heeft een gewicht dat de wederzijdse aantrekking representeert. Het totale gewicht is 120.
 (a) De originele graaf;
 (b) vijf (rode) verbindingen zijn dominant;
 (c) gedomineerde verbindingen (buren van gekoppelde knopen) zijn verdwenen;
 (d) een parallel algoritme voor twee processoren [11] veroorzaakt communicatie over de grens;
 (e) een matching met totaal gewicht 50 berekend door het parallelle algoritme.

lossing daarvan belooft niet veel goeds voor de toekomst. De gewichten moeten echt meegenomen worden in de berekening. We willen een matching met het maximale totale gewicht. Dus de som van alle gewichten voor de paartjes die gekoppeld worden moet maximaal zijn. Dit probleem is in 1990 opgelost door Gabow [4], en kost aan rekentijd $O(mn + n^2 \log n)$. In die rekentijd krijg je een oplossing die aantoonbaar de beste is. We willen echter problemen oplossen met miljoenen knopen. Voor $n = 10^6$, en $m = 10^7$, is deze rekentijd ongeveer 3×10^{13} operaties. Op een moderne dual-core pc die 1 miljard operaties per seconde uitvoert op iede-

re core, kost dit 15.000 seconden rekenen, dus 4 uur en 10 minuten: veel te lang. Hier is grotere snelheid geboden. Dit ondanks de polynomiale tijd waarin de oplossing gevonden kan worden, het kost immers nooit meer dan $O(n^3)$. Er zijn moeilijker problemen zoals het handelsreizigersprobleem met n steden die bezocht moeten worden, en waarbij het aantal mogelijke volgordes gelijk is aan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. Dat groeit als $O(n!)$, dus veel harder.

In de praktijk stellen we ons tevreden met een oplossing die goed is maar niet optimaal. Algoritmen die een bepaalde kwaliteit garanderen heten *approximatie-algoritmen* of *benaderingsalgoritmen*. Robert Preis uit Paderborn bedacht in 1999 een algoritme dat gegarandeerd minstens de helft van het optimale gewicht oplevert in lineaire rekentijd, dus in $O(n)$ operaties [14]. In 2004 verbeterden Drake en Hougardy [3] en daarna Pettie en Sanders [13] dit naar een garantie van tweederde van het optimale gewicht, dus meer goede matches in dezelfde tijd, en wellicht betere huwelijken gearrangeerd door Yente.

Samen met Fredrik Manne van de universiteit van Bergen in Noorwegen heb ik gewerkt aan een parallel benaderingsalgoritme voor matching [11]. Het resultaat is gebaseerd op dominante verbindingen. Als jij mij het aantrekkelijkst vindt, en ik jou, dan kunnen wij het grote boek van Yente vergeten en hebben we een match, zie Figuur 12(b). De anderen hebben het nakijken en moeten verder in hun zoektocht, zie Figuur 12(c) Om dit herhaaldelijk uit te voeren hoeven we alleen naar onze mogelijke partners te kijken, en niet verder. Deze eigenschap bevordert parallelisatie. We doen dit op een zogenaamd bulk-synchrone manier. Iedere processor van onze computer heeft de verantwoordelijkheid voor n/p kandidaten, waarbij p het aantal processoren is. Als $p = 2$, dan is dat de helft van de kandidaten, zie Figuur 12(d). Iedere processor zoekt lokaal naar dominante verbindingen, koppelt paren, en wisselt daarna informatie uit met andere processoren. Dit betreft de afwijzingen ('niet meer beschikbaar'). Het proces herhaalt zich tot er niets meer te koppelen valt. Het eindresultaat is te zien in Figuur 12(e).

U ziet, wij gebruiken hierbij terminologie en methoden uit de combinatoriek en in het bijzonder de grafentheorie. Er is ook veelvuldige interactie met de theoretische informatica, een vakgebied dat voor ons van groot belang is. In de combinatorische scientific computing is er echter ook altijd een toepassingsaspect. Hier willen we de matchingsmethode toepassen, maar misschien niet direct voor

Yente, want ze deed al goed werk. In onze moderne tijd zou u in de romantische sfeer blijvend aan online dating-services kunnen denken, maar ook aan medische toepassingen zoals het matchen van donoren en patiënten, of aan terreurbestrijding via het zoeken naar relevante verbindingen in grote sociale netwerken. In de Verenigde Staten is het Department of Homeland Security een drijvende kracht achter onderzoek naar netwerken. Als wetenschappers kunnen we hieraan bijdragen, maar zullen we ons ook bewust moeten zijn van de privacy-aspecten.

Een totaal ander vakgebied, de epidemiologie was recent veelvuldig in het nieuws door de nieuwe influenza H1N1, beter bekend als de Mexicaanse griep. De auteur is gespaard gebleven, behoorde niet tot een risicogroep, en is daarom niet gevaccineerd. Zo'n beslissing zou gebaseerd kunnen worden op netwerksimulaties die laten zien hoe je het beste bepaalde mensen (knopen in het netwerk) kunt vaccineren om de hele bevolking te beschermen, in beperkte tijd en met een beperkt aantal beschikbare vaccins. Hier ligt nog een mooi toepassingssterrein voor de scientific computing.

Doen wij in onze onderzoeksgroep op korte termijn nog iets met onze matchingsmethoden? Promovendus Albert-Jan Yzelman ontwikkelt dergelijke methoden met het oog op toepassing binnen Mondriaan. Het blijkt dat het grootste deel van de rekentijd in Mondriaan opgaat aan het kleiner maken van de matrix, voordat we deze splitsen. We matchen kolommen die nogal op elkaar lijken, vanwege hun niet-nullen in dezelfde rijen, of vrijwel in dezelfde rijen. Als dat sneller en beter kan, dan kan Mondriaan ook sneller en beter worden. En dan kunnen we parallelle programma's zoals het osteoporose-programma uit Zürich op hun beurt weer sneller maken!

Toegepaste wiskunde

Buiten de academische wereld heb ik contacten met bedrijven zoals Keygene, NXP, Ortec, Philips en VORtech, in het kader van stagebegeleiding, advieswerk, of onderzoekssamenwerking. Bij Shell heb ik in het verleden zes jaar gewerkt. Toepassingen in bedrijven zijn belangrijk voor ons. Het geeft een goed gevoel als je niet alleen een wiskundige methode bedenkt, maar ook ziet dat die direct van nut is. De toepassingen helpen onze studenten interessante banen te vinden. En de studenten helpen die bedrijven weer vooruit via hun analytisch vermogen.

Rond de financiering van onderzoek waait een gure wind. De overheid wil wel geld spen-

deren aan het hoger onderwijs en het universitaire onderzoek, maar ziet een groeiend begrotingstekort. Het bedrijfsleven merkt de gevolgen van de kredietcrisis, maar zal er na een tijdelijk dipje vast weer bovenop komen. Ik roep het bedrijfsleven op om de universiteiten meer te steunen. Wees niet zuinig, stel beurzen in voor masterstudenten, betaal eens mee aan een promovendus. Bent u tevreden over al die afgestudeerden in de scientific computing die bij u werken? Stel beurzen voor getalenteerde studenten in om die opleiding te versterken. En dat geldt natuurlijk ook voor andere masteropleidingen, hier en elders in het land.

De toegepast wiskundige wordt gedreven door dezelfde nieuwsgierigheid als beoefenaars van de zuivere wiskunde. Toch wordt deze nieuwsgierigheid in de zuivere wiskunde vaak anders beleefd. Godfrey Harold Hardy, de grote Britse getaltheoreticus uit het Cambridge van de vroege twintigste eeuw, die niets moest hebben van toepassingen van

de wiskunde, en ze nogal saai en elementair vond, schreef in 1940 in *A Mathematician's Apology* [5] onder andere

"I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world."

Vrij vertaald: "Ik heb nooit iets 'nuttigs' gedaan. Geen enkele van mijn uitvindingen heeft enig verschil uitgemaakt of zal dat doen, direct of indirect, in positieve of negatieve zin, voor het gemak van de wereld"

Dat was aan het begin van de Tweede Wereldoorlog die enkele jaren later mede door wiskundigen zoals Alan Turing werd gewonnen. Zijn toegepast onderzoek was het helpen ontwerpen van een machine, de Colossus, de voorloper van de moderne computer, zie Figuur 13, met als doel de Duitse geheime codes te breken. Laten we de geest van Hardy, die hier en daar nog waart, verjagen en laten we vooral de geest van Turing volgen,



Figuur 13 Replica van de Colossus, voorloper van de moderne computer, 1943–44, ontworpen door Alan Turing c.s. in Bletchley Park, VK. Zie [7] voor een biografie van Turing.

door spannende wiskunde te bedrijven, met een oog voor mogelijke toepassingen, soms met behulp van de computer. Laten we vooral niet proberen onszelf te verkopen als kunstenaar, als *dandy* of als *man of leisure* op afstand van de werkelijke wereld, maar juist als wiskundigen die volop in de moderne maatschappij staan, hun steentje bijdragen aan de leniging van menselijke noden waar dat kan, en tegelijk een prachtig vak beoefenen. ☞

Referenties

- 1 C. Bekas, A. Curioni, P. Arbenz, C. Flaig, G.H. van Lenthe, R. Müller, and A.J. Wirth, 'Extreme scalability challenges in micro-finite element simulations of human bone', *Proceedings International Supercomputing Conference (ISC 2008)*, Dresden, Germany (2008).
- 2 R.H. Bisseling, *Parallel Scientific Computation: A Structured Approach using BSP and MPI*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2004.
- 3 D.E. Drake and S. Hougardy, 'A linear-time approximation algorithm for weighted matchings in graphs', *ACM Transactions on Algorithms*, **1** (2005), pp. 107–122.
- 4 H.N. Gabow, 'Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking', *Proceedings First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (1990), pp. 434–443.
- 5 G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1940.
- 6 B. Hendrickson and A. Pothen, 'Combinatorial scientific computing: The enabling power of discrete algorithms in computational science', *VECPAR 2006, Lecture Notes in Computer Science* **4395** (2007), pp. 260–280. Springer-Verlag, Berlin.
- 7 A. Hodges, *Alan Turing: The Enigma*, Burnett Books, London, UK, 1983.
- 8 G. Karypis, V. Kumar, 'A parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering', *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **48**(1) (1998), pp. 71–95.
- 9 B.W. Kernighan, S. Lin, 'An efficient heuristic procedure for partitioning graphs', *Bell System Tech. J.*, **49** (1970), pp. 291–307.
- 10 A.N. Langville, C.D. Meyer, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- 11 F. Manne, R.H. Bisseling, 'A parallel approximation algorithm for the weighted maximum matching problem', *Proceedings Seventh International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics (PPAM 2007), Lecture Notes in Computer Science* **4967** (2008), pages 708–717. De getoonde graaf werd voor het eerst gepresenteerd op de SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing, 25–27 februari 2004, San Francisco, USA.
- 12 B. Mols, 'Minder verstoringen in MRI-beelden', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **9**(1) (2008), pp. 58–59.
- 13 S. Pettie, P. Sanders, 'A simpler linear time $2/3 - \epsilon$ approximation for maximum weight matching', *Information Processing Letters*, **91** (2004), pp. 271–276.
- 14 R. Preis, 'Linear time $1/2$ -approximation algorithm for maximum weighted matching in general graphs', *Proceedings STACS '99, Lecture Notes in Computer Science* **1563** (1999), pp. 259–269. Springer-Verlag, Berlin.
- 15 Een lagere kloksnelheid betekent dus *veel minder* elektriciteitsverbruik. Het dynamische deel van het verbruik schaalst als $O(CV^2 f)$ [16], met C de capaciteit, V het voltage en f de frequentie (kloksnelheid). Verlaging van de frequentie maakt het mogelijk ook het voltage te verlagen en zo meer dan proportioneel te besparen in het verbruik. We hebben dus liever 2 cores met de halve kloksnelheid dan 1 core met de hele kloksnelheid.
- 16 J.M. Rabaey, A. Chandrakasan, B. Nikolic, *Digital Integrated Circuits*, Prentice Hall, US, second edition, 2003.
- 17 M.A. Stijnman, R.H. Bisseling, G.T. Barkema, 'Partitioning 3D space for parallel many-particle simulations', *Computer Physics Communications*, **149**(3) (2003), pp. 121–134.
- 18 J.B. van den Berg, N. van den Berg, B. van den Bergen, A. Boer, F. van de Bult, S. Dahmen, K. Frederix, Y. van Gennip, J. Hulshof, H. Meijer, P. in 't Panhuis, C. Stolk, R. Swierstra, M. Veneroni, E. Vondenhoff, 'Understanding the electromagnetic field in an MRI scanner', *Proceedings 58th European Study Group Mathematics with Industry Utrecht 2007*, pp. 69–90. Universiteit Utrecht, 2007, editors: R.H. Bisseling, K. Dajani, T.J. Dijkema, J. van de Leur, P.A. Zegeeling.
- 19 B. van den Bergen, C.C. Stolk, J.B. van den Berg, J.J. Lagendijk, and C.A. van den Berg, 'Ultra fast electromagnetic field computations for RF multi-transmit techniques in high field MRI', *Physics in Medicine and Biology*, **54**(5) (2009), pp. 1253–1264.
- 20 A. van Heukelum, G.T. Barkema, R.H. Bisseling, 'DNA electrophoresis studied with the cage model', *Journal of Computational Physics*, **180**(1) (2002), pp. 313–326. De cage matrices zijn verkrijgbaar via de University of Florida Sparse Matrix Collection van Tim Davis, www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/vanHeukelum.
- 21 B. Vastenhouw, R.H. Bisseling, 'A two-dimensional data distribution method for parallel sparse matrix-vector multiplication', *SIAM Review*, **47**(1) (2005), pp. 67–95. De Mondriaan software is vrij te verkrijgen via www.math.uu.nl/people/bisseling/Mondriaan.
- 22 A.N. Yzelman, R.H. Bisseling, 'Cache-oblivious sparse matrix-vector multiplication by using sparse matrix partitioning methods', *SIAM Journal on Scientific Computing*, **31**(4) (2009), pp. 3128–3154. Matrixpermutaties en matrixvisualisaties zullen onderdeel uitmaken van Mondriaan versie 3.0, verwacht in het voorjaar van 2010.

Bennie Mols*Kijkduinstraat 121-2**1055 XW Amsterdam**benniemols@gmail.com***Maatschappij Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2008**

Klaar voor vertrek

Hoe zet je treinstellen 's nachts handig op rangeersporen neer, zodat 's morgens alle treinen weer op tijd kunnen vertrekken? Deze vraag stelde NS aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. Voor dit optimalisatie-probleem is geen snelle oplosmethode bekend, dus er moet slim gemodelleerd en gerekend worden.

Dagelijks vervoeren de Nederlandse Spoorwegen (NS) gemiddeld 1,1 miljoen reizigers. Dat gebeurt in 4.500 treinritten over één van de drukst bereden spoornetwerken van Europa. Daarnaast beheert NS alle 377 stations in Nederland. Hoeveel treinen en treinstellen er op een bepaald moment van de dag nodig zijn, varieert sterk. Tijdens de spitsuren wordt vrijwel al het materieel gebruikt. In de daluren is dat veel minder, en 's nachts rijden er nauwelijks treinen. De niet gebruikte treinstellen moeten 's nachts en tijdens de daluren geparkeerd worden op rangeerterreinen.

Het rangeren van treinstellen op diverse rangeersporen gebeurt niet willekeurig. NS wil er namelijk voor zorgen dat, zodra de treinstellen weer nodig zijn, er zo min mogelijk tijd verloren gaat door het ophalen van de treinstellen. Het is uiterst onhandig als er eerst zes treinstellen van een rangeerspoor weg moeten om bij het een zevende treinstel te kunnen. Hoe zet je treinstellen zo efficiënt mogelijk op een serie rangeersporen neer, gegeven de NS-dienstregeling en het aantal perrons en rangeersporen van een station? Dat is de vraag die door NS aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie werd voorgelegd.

“Nu wordt de rangeerplanning nog volledig handmatig opgesteld, aan de hand van een grafisch planbord”, vertelt Leo Kroon, als onderzoeker werkzaam bij NS Reizigers, en daarnaast hoogleraar kwantitatieve logistiek aan de Erasmus Universiteit in Rotterdam. “Ik schat dat er zo’n honderd mensen bij de NS-rangeerplanning betrokken zijn, verdeeld over verschillende locaties. In de toekomst willen we de planners ondersteunen met een wiskundig model. Maar omdat er altijd praktische details zijn die niet in de modellen meegenomen kunnen worden, zullen de planners de oplossingen van het model in de praktijk moeten bijslijpen.”

Het aantal benodigde rangeerbewegingen varieert per station. Op grote stations, zoals Utrecht, en belangrijke knooppunten, zoals Zwolle, kan het om vijftig tot zelfs een paar honderd rangeerbewegingen per dag gaan.

Samen met een NS-collega en met Lex Schrijver van het CWI heeft Kroon het rangeerprobleem zelf ook al wiskundig aangepakt. “Ons model is gebaseerd op geheeltallig Lineair Programmeren”, zegt Kroon. “Op een aantal rangeerlocaties wordt het ook al met succes toegepast. Maar het model kent twee na-

delen. De rekentijd loopt snel uit de hand, en sommige details zijn lastig te modelleren, terwijl we ze wel zouden willen meenemen. Wij gaan er bijvoorbeeld vanuit dat het rangeren van een treinstel meteen gebeurt nadat een trein op een station is aangekomen en voorlopig niet meer gebruikt gaat worden. Maar soms is het handiger om een treinstel even te laten wachten, zodat je een ander treinstel dat later binnenkomt eerder weg kunt rangeren, bijvoorbeeld als het tweede treinstel pas later nodig is voor vertrek en dus beter achteraan op het rangeerspoor kan staan.” De specifieke vraag aan de wiskundigen van de studiegroep was dan ook om een alternatieve methode te bedenken, die flexibeler is en die dit soort mogelijkheden wel toelaat.

Gretig algoritme

Marjan van den Akker (Universiteit Utrecht), Hilbrandt Baarsma, Johann Hurink, Jacob Jan Paulus, Jan Schreuder (Universiteit Twente), Maciej Modelski, Dan Roozmond en Ingrid Reijnen (Technische Universiteit Eindhoven) werkten aan het probleem. “Om een gevoel te krijgen voor de rangeerproblematiek, kregen we van NS de rangeergegevens van Alkmaar, een middelgroot station”, vertelt Marjan van den Akker, wiskundige en universitair docent bij Informatica aan de Universiteit Utrecht. Zij zat in de studiegroep die het NS-probleem een week lang

heeft bestudeerd. “Vervolgens hebben we het probleem generiek aangepakt: voor een willekeurige layout van rangeersporen, en dus voor een willekeurig station.”

Rangeersporen kunnen van twee kanten toegankelijk zijn, of slechts van één kant. In het laatste geval is het rangeerspoor aan één kant afgesloten door een stootblok. Als één rangeerbeweging telt het voor- of achteruit bewegen van een treinstel. Het wiskundige probleem komt nu neer op het minimaliseren van het aantal rangeerbewegingen. In de besiskunde staat dit probleem bekend als een zogeheten NP-moeilijk probleem: een probleem waarvan gemakkelijk te testen is of een gegeven oplossing klopt, maar waarvoor geldt dat als een algoritme wordt ontdekt dat het probleem ‘snel’ kan oplossen (in ‘polynomiale tijd’), dan kunnen meteen *alle* NP-problemen snel worden opgelost. Men beschouwt het daarom als onwaarschijnlijk dat ooit een snel algoritme voor een NP-moeilijk probleem wordt gevonden. Wie er toch in slaagt een snelle methode te vinden om NP-moeilijke problemen op te lossen, kan van het Clay Mathematics Institute een prijs van een miljoen dollar tegemoet zien. Dit instituut stelde in 2000 een lijst van zes fundamentele wiskundige problemen op: millenniumproblemen, die een uitdaging zijn voor de 21ste eeuw. De studiegroep onderzocht twee heuristische oplossingsmethoden. Van den Akker: “De eerste is een *greedy algorithm* — een gretig algoritme. Dat is een bekend princi-

pe om NP-moeilijke problemen op te lossen. Het is een benaderende methode, die via enkele vuistregels op elk moment probeert te doen wat op dat moment het beste lijkt, zonder verder vooruit te kijken. De tweede oplossingsmethode is gebaseerd op dynamisch programmeren. Dit is in principe een exacte methode, die de beste oplossing vindt, maar daar wel veel rekentijd voor nodig heeft.”

Bij het rangeren wordt ook rekening gehouden met de lengte van treinstellen en het treintype: bijvoorbeeld een stoptrein, een sprinter of een intercity dubbeldekker. De dienstregeling van NS schrijft precies voor hoeveel treinstellen van welk type op welke traject moeten rijden om de verwachte passagiersaantallen te kunnen vervoeren.

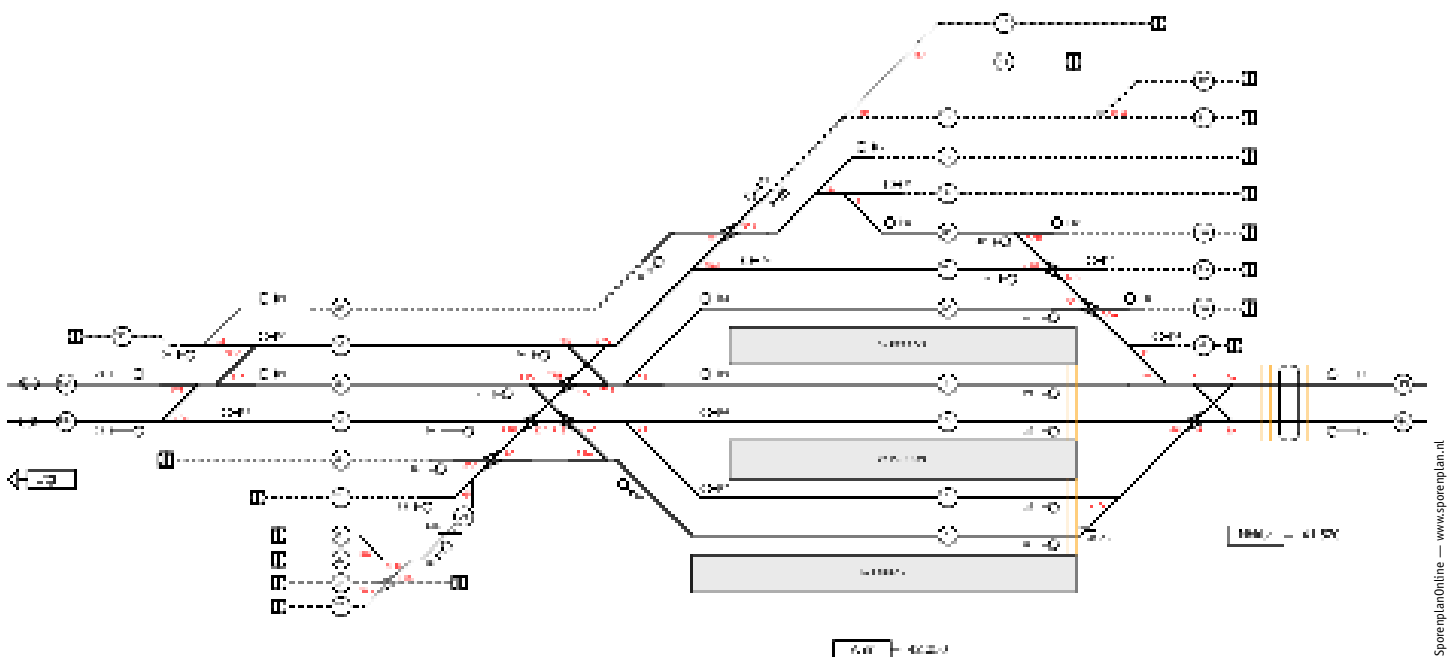
In de NS-praktijk blijkt vooral het aantal rangeerbewegingen dat nodig is om een trein vlak voor vertrek klaar te maken cruciaal, vanwege de beperkte tijd. Het rangeren van treinstellen nadat een trein is aangekomen, is van minder belang. Als uitgangspunt bij de benaderende methode kozen de wiskundigen van de studiegroep daarom voor het gereed hebben van een trein op het moment van het geplande vertrek. Met dat uitgangspunt wordt teruggerekend in de tijd waar de diverse treinstellen moeten staan om dat voor elkaar te krijgen. Vervolgens weet je dan ook welke rangeerbewegingen nodig zijn nadat een trein is aangekomen op een station. Met deze benaderende methode vindt de computer binnen een minuut een vrij goede oplossing, hoewel

in het algemeen niet de beste. “We hebben de benaderende methode ook nog wat intelligenter gemaakt door twee of drie stappen vooruit te kijken”, zegt Van den Akker. “Zo kunnen we bijvoorbeeld enkele vuistregels meenemen die de rangeerplanners in de praktijk gebruiken.”

De benaderende methode is flexibeler dan de methode die NS zelf had ontwikkeld. Zo laten de resultaten zien dat het inderdaad beter kan zijn om een treinstel nog even op een peron te laten wachten, en eerst de treinstellen weg te rangeren van een trein die nog in aan- tocht is.

Kosten-batenanalyse

Waar de greedy methode juist terugreken- t in de tijd, rekent de exacte methode met de methode van het dynamisch programmeren vooruit in de tijd. De methode doorloopt stap voor stap de aankomst- en vertrekbewegingen op het station. Uitgaande van welk materieel er op een bepaald moment een station staat en op welke plek, onthoudt deze methode de efficiëntste serie rangeerbewegingen om deze situatie te bereiken. Telkens als er weer een trein aankomt of vertrekt, bekijkt de methode alle mogelijkheden om te rangeren. Op deze manier wordt voor elke mogelijk nieuwe opstelling van materieel op het station de efficiëntste serie rangeerbewegingen om deze opstelling te bereiken bepaald. Van den Akker: “Omdat het aantal mogelijkheden snel uit de hand loopt, moeten we dat



Figuur 1 Het station van Alkmaar met doorgaande sporen, perronsporen en rangeersporen

aantal inperken door extra eisen op te leggen. Bijvoorbeeld dat we maar maximaal drie of vier rangeerbewegingen toestaan. En soms beperkt de symmetrie van het probleem het aantal benodigde rekenoperaties. Voor een relatief klein voorbeeld hebben we de exacte methode getest.” De twee ontwikkelde methodes benaderen hetzelfde probleem als het ware van twee verschillende kanten. Je kunt de benaderende methode exacter maken; dat kost dan weer iets meer rekentijd. En je kunt de exacte methode meer heuristisch maken, waarmee je rekentijd wint. Welke van de twee methodes NS zou willen gebruiken, is een afweging tussen de kosten van de rekentijd en de kwaliteit van de oplossing.

Een andere mogelijkheid is om beide methodes te combineren. Van den Akker: “Je kunt de *greedy* methode als een soort filter gebruiken voor de exacte methode. In principe rekent de exacte methode alle mogelijke opties door. Maar stel dat hij een optie doorrekent die bij een bepaalde tussenstop al een slechter resultaat scoort dan de oplossing die de *greedy* methode geeft, dan weet je dat de exacte methode die optie niet nog verder hoeft door te rekenen. Dan stop je met het berekenen van die optie en win je rekentijd.”

Minder rangeerbewegingen

“De resultaten van de studiegroep zijn voor ons een eerste aanzet tot een alternatief rangeermodel”, reageert Leo Kroon op het werk van de wiskundigen. “We hebben de voorgestelde methoden nog niet uitgetest in de praktijk, maar ik zie wel de toegevoegde waarde. De studiegroep heeft voor een aantal voorbeelden laten zien dat er minder rangeerbewegingen nodig zijn dan ons op geheeltallig lineair programmeren gebaseerd model suggereert. Het zijn geconstrueerde voorbeelden, maar toch. Ze geven ons een andere kijk op het rangeerprobleem dan we zelf al hadden.”

Voor NS is het rangeerprobleem een onderdeel van een veel groter informatiseringsproject. “Alle informatiesystemen die bij de NS-planning betrokken zijn, moderniseren we momenteel”, vertelt Kroon. “We steken de klassiek gebruikte planborden in een modern, grafisch jasje op de computer. Op termijn willen we die planborden koppelen aan een model voor het rangeerprobleem. Het rangeerprobleem is een van de hardst te kraken noten in ons totale planningsprobleem. Het is veel moeilijker dan te bepalen welke treinstellen we op welke trajecten moeten inzetten en ook moeilijker dan te bepalen op welke trajecten we het personeel het beste kunnen inzetten.”



Arjeh Cohen*Faculteit Wiskunde en Informatica**Technische Universiteit Eindhoven**Postbus 513**5600 MB Eindhoven**amc@win.tue.nl***Overzichtsartikel**

Een korte geschiedenis van de computeralgebra in Nederland

Computeralgebra is het rekenen aan wiskundige expressies volgens algebraïsche regels. Deze tak van sport wordt sinds de jaren zestig beoefend en kent vele toepassingen, variërend van het automatisch primitiveren van reële functies tot het berekenen van het bereik van een robotarm. In dit artikel geeft Arjeh Cohen een persoonlijke impressie van wat zich de afgelopen decennia op het gebied van de computeralgebra in Nederland heeft afgespeeld.

De allereerste computers rekenden tot op zekere hoogte exact: ze konden vrijwel uitsluitend overweg met gehele getallen die niet boven een door de machine bepaalde grootte uitkwamen. Al gauw werden numerici de grootste gebruikers en was het zwevende-komma-getal (floating-point number) het object waarmee het meest gerekend werd. Pas in de jaren zestig, toen er voldoende vertrouwen ontstond in de groei van geheugens en de kracht van computers, kwam de exactheid weer terug. Om te beginnen kwamen er pakketten uit waarin gehele getallen als objecten behandeld werden zoals wiskundigen dat gewend zijn: ofwel het geheugen van de machine liep over, ofwel het getal werd fatsoenlijk behandeld, zonder afkappingen en zonder modulair rekenwerk. Het werd mogelijk om te rekenen met gehele getallen zoals wij dat zelf ook zouden doen als we onvermoeid konden blijven werken. Dan moest het ook mogelijk zijn om andere wiskundige uitdrukkingen als veeltermen, integralen, differentiaalvergelijkingen en logische formules te manipuleren volgens bekende algebraïsche regels, zonder toevlucht tot benaderingen. Inderdaad werd

ook dit gerealiseerd. Zo is op verschillende plaatsen in de wereld symbolisch rekenen ontstaan.

Veltman en Vermaseren

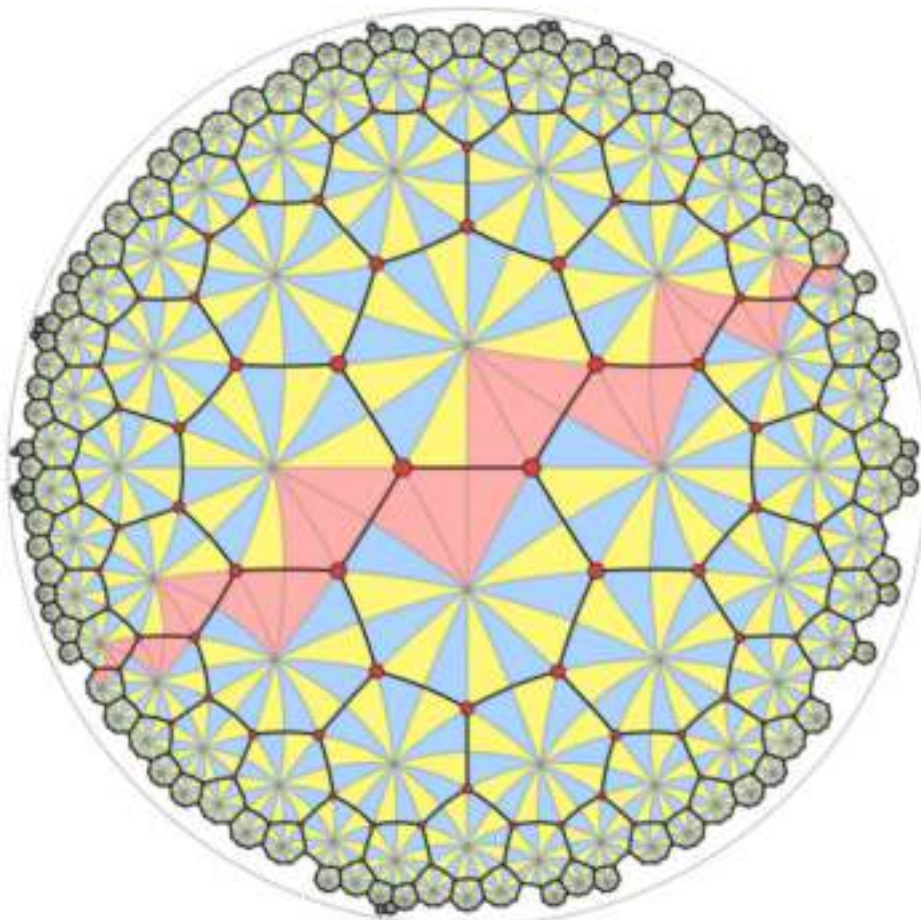
De behoefte om exact te rekenen was al vroeg gesignaleerd door fysici die allerlei exacte, dat wil zeggen precies in wiskundige formules gevatte, uitdrukkingen wilden manipuleren. Een prominent voorbeeld is de Nederlandse Nobelprijswinnaar Martinus Veltman. Hij had behoefte aan software om met veeltermen en integralen te werken zonder op benaderingen over te gaan. In 1963 begon hij aan zijn symbolische rekenprogramma *Schoonschip*, vooral gedreven door berekeningen die nodig waren bij een neutrino-experiment. Volgens zijn eigen woorden leidde de benodigde algebra voor de vector-boson-productie tot een frustrerende hoeveelheid rekenwerk die moeilijk foutloos te krijgen was. Zijn programma *Schoonschip* heeft model gestaan voor *Symbolic Manipulation Program*, of kortweg *SMP*. Dat was een computer-algebrasysteem dat rond 1979 voornamelijk ontwikkeld werd door de op Caltech werkende fysicus Stephen

Wolfram. Het werd in 1981 commercieel verspreid, en is feitelijk de voorloper van het overbekende systeem *Mathematica* [21].

Minder bekend is misschien dat Jos Vermaseren (Nikhef, Amsterdam) een direct vervolg op *Schoonschip* gemaakt heeft: een programma dat uiterst efficiënt met veeltermen en integralen om kan gaan. De motivatie lag voor een groot deel in Feynmans diagramcalculus. Het is bekend dat daarin evaluatie van de som van een stel bepaalde integralen over alle toestanden in een gegeven configuratie tot een zinvol resultaat leidt, terwijl evaluatie van individuele summanden in die som plus of min oneindig kan opleveren. Die som kan echter alleen met grote exacte rekenkracht bepaald worden. Het programma van Jos Vermaseren heet *FORM* en wordt nog steeds (voornamelijk door fysici) gebruikt om spectaculaire berekeningen uit te voeren. Zie bijvoorbeeld het arti-



Martinus Veltman (l) en Jos Vermaseren



Gebruik van groepentheoretische computeralgebra voor het genereren van de gekleurde driehoeken in een uitvouwing van een Riemannoppervlak van geslacht 14. $R_{14,3'} \{7,3\}$: orde 2184, 156 septagons, 546 takken, 346 knopen

Illustratie: Jack van Wijk

Buchberger algoritme

Het Buchberger algoritme is in de jaren tachtig sterk onder de aandacht gekomen. Dit komt doordat het algoritme voor veel problemen met betrekking tot veeltermen een effectieve oplosmethode levert, en het op het juiste moment ter beschikking kwam voor de computeralgebrapakketten in opkomst.

Veel wiskundige problemen zijn te vertalen in zoektochten naar oplossingen van stelsels veeltermvergelijkingen. Het Buchberger algoritme helpt exacte oplossingen te vinden, onder andere door een systematische eliminatie van variabelen mogelijk te maken.

Hoewel de methode effectief is, loopt het Buchberger algoritme al gauw vast als het aantal variabelen of de graad van de veeltermen groot wordt.

De beste implementatie voor praktische problemen is van Faugère; zie zijn website www-calfor.lip6.fr/~jcf, waar mooie voorbeelden staan.

kel [31], waarin veel complexe invarianten van Liegroepvoorstellingen worden uitgerekend.

Intermezzo: Formele bewijsvoering

Soms wordt symbolisch rekenen op één hoop gegooid met computeralgebra, dan weer wordt computeralgebra gezien als een deel maar niet het totaal van deze activiteiten. Enerzijds is het uitvoeren van operaties op symbolen een definitie van algebra, en ligt het dus voor de hand de wiskundig georiënteerde algoritmische handelingen als algebra te betitelen—zelfs als ze een vak als analyse of statistiek betreffen. Anderzijds wordt een formeel beschreven stelling en/of bewijs niet vaak als computeralgebra gezien, maar wel als invoer voor symbool-manipulatie, wat als synoniem voor symbolisch rekenen gebruikt wordt.

De formele bewijsvoering en automatische verificatie van een formeel bewijs heeft een grootse Nederlandse geschiedenis, die begint met het Automath project van Dick de Bruijn in Eindhoven en doorloopt tot werk van Henk Barendregt en zijn groep in Nijmegen. De geïnteresseerde lezer raadplege het artikel [35] van Freek Wiedijk over dit onderwerp,

dat ook wel computerwiskunde gedoopt is en veel interessante software heeft opgeleverd. Maar het is niet het onderwerp van dit artikel, want dat richt zich op de eigenlijke computeralgebra.

De eerste computeralgebra pakketten

Aan het eind van de jaren zestig was er dus software voor exacte berekeningen in de fysica; na Schoonschip kwam al snel het commerciële pakket REDUCE [30]. In de jaren zeventig verschenen er ook exacte pakketten voor zeer specifieke onderwerpen als groepentheorie. Op dat laatste gebied waren er twee concurrenten: GAP uit Aken (van Joachim Neubüser) en Cayley uit Sydney (van John Cannon). Dit soort software maakte het bijvoorbeeld mogelijk om een groep bestaande uit permutaties van een gegeven verzameling (in den beginne altijd weergegeven als $\{1, \dots, n\}$ voor een niet al te grote n) door te rekenen. De groep zelf wordt hierbij vastgelegd door enkele permutaties die de groep voortbrengen. Voorbeelden van vragen die dan redelijk efficiënt (maar niet polynomiaal) beantwoord kunnen worden zijn: hoeveel elementen heeft de groep? En: geef een stel voortbrengers voor de ondergroep van alle elementen van de gegeven groep die het element 1 behouden. GAP [8] bestaat, groeit en bloeit nog steeds als gratis beschikbare software; Cayley is uitgedroogd tot het zeer krachtige en zeer veel wiskunde omvattende, commerciële pakket MAGMA [19]. We komen hier later op terug.

In de jaren tachtig kwamen algemene softwarepakketten als Maple [20] en Mathematica op de markt. Eerst (1968–1982) was er nog Macsyma, een experiment op MIT, waarvan een nazaat tegenwoordig gratis beschikbaar is onder de naam Maxima [24]. Dit pakket is gebaseerd op de programmeertaal Lisp. Maple en Mathematica daarentegen zijn geschreven in C. Oorspronkelijk was Maple minder commercieel van opzet dan Mathematica. Het kwam voort uit de symbolic computation group in Waterloo die geleid werd door Keith Geddes en Gaston Gonnet.

In Nederland was de informaticus Hans van Hulzen (UT) er vroeg bij. Hij hield zich bezig met code-optimalisatie en was als een van de eerste Nederlanders actief betrokken bij ISSAC, de grote jaarlijkse conferentie op het vakgebied. Hij droeg bij aan het pakket REDUCE, dat destijds redelijk wijd verspreid was, maar in de commerciële strijd met Maple, MATLAB [23] (een minder exact maar veel gebruikt pakket) en Mathematica ten onder is gegaan. REDUCE is tegenwoordig gratis verkrijgbaar.

Specialistische software en algoritmen

In het kielzog van de opkomst van de algemene computeralgebra-programma's zijn in de jaren tachtig en negentig twee exact-wiskundige activiteiten te onderscheiden. Enerzijds de opkomst van meer specialistische software, anderzijds de aandacht voor algoritmen. Om een indruk te krijgen van de hoeveelheid specialistische softwaresystemen, is het goed de Oberwolfachse website [29] te raadplegen.

Een prominent voorbeeld van de aandacht voor wiskundige algoritmen is de vooruitgang in het exact oplossen van stelsels veeltermvergelijkingen. Er ontstonden veel varianten van wat uiteindelijk bekend is geworden als het Buchberger-algoritme (voor de aanmaak van een Gröbner-basis). Een bescheiden Nederlandse bijdrage in dit verband is het pakket voor een niet-commutatief analogon van het Buchberger-algoritme (wezenlijk anders omdat de theorie hier niet garandeert dat het algoritme eindigt), het in GAP geschreven pakket GBNP [9].

Maar ook het primitiveren, het vinden van een gesloten formule voor een onbepaalde integraal, kreeg veel aandacht. Oude ideeën van mensen als Robert Risch wer-

den uit de kast gehaald en bewerkt tot methoden waarmee ofwel een gesloten formule voor een primitieve van een functie gevonden kan worden, ofwel vastgesteld kan worden dat er, binnen een gegeven klasse functies, geen primitieve bestaat. De meeste primitieveropdrachten op het niveau van de eerste jaren in het universitair onderwijs konden door deze algoritmen aangepakt worden, met als gevolg dat de leerstof anders, meer algoritmisch, onderwezen werd. Primitiveren van de functie f kan gezien worden als het oplossen van de differentiaalvergelijking $y' = f$. Aan de algemene vraag naar het oplossen van differentiaalvergelijkingen, in de zin van het vinden van oplossingen binnen een bepaalde klasse van functies, heeft onder anderen Marius van der Put (Rijksuniversiteit Groningen) met succes gewerkt; zie bijvoorbeeld [27]. Andere bijdragen kwamen uit Nijmegen; hier gaan we later op in.

Algebraïsche getaltheorie, LLL

Hoewel er een duidelijk onderscheid te maken valt tussen de bouw van een computer-algebrapakket en het ontwerp van een algoritme, zagen veel nieuwe algoritmen het daglicht bij de opkomst van meer specialistische

software. Het werd in de jaren tachtig ook erg aantrekkelijk om wiskundige software te ontwikkelen. Twee belangrijke beweegredenen waren het uitvoeren van experimenten waar de theorievorming stopt en het vullen van gaten in bewijzen waarvan de basis van de inductie niet met de hand lukt. Naast de groepentheorie liep de getaltheorie voorop. Henri Cohen bracht rond 1985 in Parijs de eerste versie van het inmiddels klassiek geworden pakket PARI [26] op dit gebied uit. Interessant genoeg gebruikte het (onder meer) zwevende-komma-getallen om exacte objecten uit de algebraïsche getaltheorie te berekenen. In Nederland had Hendrik Lenstra toen al contact met Henri Cohen; hij hield zich vooral met de algoritmische vragen bezig. Eén van zijn promovendi, René Schoof, ontwierp in die tijd een beroemd geworden algoritme om het aantal punten van een elliptische kromme over een eindig lichaam uit te rekenen in polynomiale tijd [34]. Sindsdien speelt Nederland (vooral vanuit Leiden, maar ook vanuit Groningen, Nijmegen, en Utrecht) een vooraanstaande rol in de algoritmische algebraïsche getaltheorie en de daarmee verbonden effectieve aspecten van aritmetische algebraïsche meetkunde.

Kostants vermoeden

Complexe Liegroepen zijn boeiende wiskundige objecten. Het zijn zowel complexe variëteiten als groepen. De enkelvoudige Liegroepen (feitelijk de kleinste bouwstenen) zijn ruim een eeuw geleden geïnclassificeerd. De grootste die niet in een oneindige serie past heeft dimensie 248 en heet E_8 in de door Cartan gegeven codering.

De bepaling van eindige ondergroepen van een complexe Liegroep, die niet in een Lie-ondergroep van positieve dimensie passen, kreeg een grote stimulus toen Kostant het vermoeden uitsprak dat E_8 een bepaalde enkelvoudige eindige ondergroep van orde 113460 (de fractionele lineaire groep over het lichaam van 61 elementen) zou hebben.

Dit vermoeden konden Robert Griess en ik vertalen naar het probleem een oplossing te vinden van een stelsel van veeltermvergelijkingen in acht onbekenden over de gehele getallen modulo 1831. Van dit stelsel was één veelterm van graad 2, één van graad 3, één van graad 4, et cetera. De Gröbner basis algoritmen die me des-

tijds ter beschikking stonden, waren niet voldoende krachtig om een oplossing te vinden. Toen ik Jos Vermaseren om een oplossing vroeg, heeft hij modulaire aritmetiek in FORM gezet, en vele gegeneraliseerde resultantenregels uitgevonden en geïmplementeerd om het stelsel op te lossen. Als er niet wat onduidelijkheden (verdachte asymmetrieën) in mijn data hadden gezeten, had hij het karwei waarschijnlijk helemaal geklaard. In die tijd koos ik een andere benadering: vervang 240 monomen in de acht onbekenden door nieuwe onbekenden om zo een stelsel van vele *lineaire* vergelijkingen in 240 onbekenden te verkrijgen. Dit stelsel was makkelijk op te lossen. Door de monomen weer terug te zetten kon ik gauw een oplossing in termen van de 8 onbekenden vinden.

Bert Lisser hielp me met de programmering van het probleem in Maple, en zo is de vondst bekendgemaakt in een artikel van Griess, Lisser en mezelf. Er was enige controverse over de geloofwaardigheid van het antwoord, omdat het im-

mers op computerberekeningen steunde. We verdedigden ons door te wijzen op het feit dat het resultaat onafhankelijk van onze berekeningen te testen was door een overzichtelijk aantal elementaire rekenkundige operaties (maar teveel voor een normaal mens om met de hand uit te voeren). Moreel was ik hier zekerder van dan van vele lange klassieke bewijzen: het kon geen toeval zijn dat het overbepaalde systeem vergelijkingen ineens een oplossing blootgaf (orde in de chaos!) en elke test die ik met mijn resultaten deed, goed uitkwam.

Nadien is het stelsel veeltermvergelijkingen door zowel Singular als Macaulay opgelost. Nog later gaf Serre een bewijs voor dit resultaat dat geen computer gebruikte, maar wel een met veel technisch rekenwerk gevonden 3-dimensionale algebraïsche ondergroep van de algebraïsche groep van type E_8 over het lichaam met 61 elementen. Het vermoeden van Kostant is overigens door deze en volgende berekeningen juist gebleken.



André Heck (l) en Leendert van Gastel

In het begin van de jaren tachtig was computeralgebra ook onder de aandacht van het CWI gekomen. Vooral bij informatica, waar Arjen Lenstra zich bezig hield met algoritmen voor het ontbinden van veeltermen met gehele coëfficiënten in irreducibele factoren. Zijn broer Hendrik en diens regelmatige en graag geziene gast László Lovász bogen zich mede over het complexiteitsprobleem. De uitdaging was te bewijzen dat er een polynomiaal algoritme is. De gebruikelijke methode van factorisatie komt daar dicht bij maar is exponentieel op één onderdeel. Die methode begint met de factorisatie van de veelterm modulo een geschikt priemgetal p en probeert vervolgens het resultaat te liften naar een resultaat over de gehele getallen. Daarbij wordt eerst een oplossing modulo p^2 gezocht, en steeds verder modulo hogere machten van p totdat er zekerheid is dat de gevonden oplossing ook over de gehele getallen werkt. Het eigenaardige aan de complexiteit is dat het theoretisch tijdrovend is uit te zoeken welke irreducibele modulaire factoren fuseren tot een irreducibele factor over de gehele getallen. Zonder verder inzicht zou dit neerkomen op het aflopen van een aantal gevallen dat exponentieel groeit met het aantal irreducibele modulaire factoren. Dat was het grote theoretische obstakel voor een polynomiaal algoritme. De drie vonden een uitweg met behulp van een zeer algemeen toepasbaar algoritme voor roosters. Zo ontstond het waarschijnlijk beroemdste algoritme voor computeralgebra van Nederlandse bodem: het LLL-algoritme [17]. Trouwens, een van de beste praktische methoden om veeltermen te factoriseren [13] is ook van Nederlandse bodem; zie hieronder.

LiE

Naast FORM van Jos Vermaseren ontstond nog een Nederlands pakket, en wel op het CWI: LiE [18], bedoeld voor berekeningen aan matrixvoorstellingen van Liegroepen, zoals tensordecomposities en restricties van voorstellingen tot ondergroepen. Het beantwoordde veel vragen van fysici, die telkens meer expliciete

gegevens wilden dan waar wiskundigen om vroegen. Het pakket, dat heden ten dage nog gebruikt wordt, was onder andere behulpzaam in het werk van Nguyen en Van der Put [25]. Een integrale (maar minder snelle) versie van het pakket is opgenomen in MAGMA. Dit systeem bevat trouwens meer specialistische pakketten, zoals KANT [16], voor algebraïsche getaltheorie.

Levelt

In Nijmegen was Ton Levelt zeer actief in de computeralgebra. Enkele algoritmen van zijn hand (in samenwerking met Thom Mulders), zoals een fraaie methode om de rationale Jordan-normaalvorm van een vierkante matrix te vinden, zijn geïmplementeerd in Maple. Nijmegen was ook zeer actief in het Europese project CATHODE ('92-'95), een van de eerste pogingen om differentiaalvergelijkingen met computeralgebra aan te pakken. Twee Nijmeegse studenten hebben het zeer ver gebracht in de algoritmische wiskunde: Harm Derksen (Ann Arbor) en Mark van Hoeij (Tallahassee). Derksen heeft algoritmen ontwikkeld voor algebraïsche groepen, bijvoorbeeld voor het bepalen van de kleinste algebraïsche groep om een stel inverteerbare matrices [6–7]. Van Hoeij heeft zeer krachtige factorisatiealgoritmen geschreven, zowel voor veeltermen als voor differentiaaloperatoren [13–14]. Levelts computeralgebrawerk in Nijmegen is overgenomen door Wieb Bosma, wiens aandacht vooral naar algoritmische algebraïsche getaltheorie en het systeem MAGMA gaat. Daarvoor had hij al enige jaren in Sydney aan de totstandkoming van MAGMA meegewerkt (zie [2]). Ook droeg de in Nijmegen werkzame Bernd Souvignier bij aan MAGMA met algoritmen voor roosters.

Expertisecentrum CAN, RIACA

Eind jaren tachtig zag het CWI, in het bijzonder wetenschappelijk directeur Cor Baaijen, kans om met behulp van een expertisecentrum de introductie van computeralgebra in Nederland te bevorderen. Zo'n expertisecentrum, zo was de gedachte, zou zich zodanig commercieel ontwikkelen dat het zichzelf in leven zou kunnen houden. In Nederland bestond wel een ruime belangstelling voor de nieuwe ontwikkelingen, maar waren weinig computeralgebra-specialisten te vinden. Een vijftal onderzoekers met die inslag vormde het bestuur van de nieuwe Stichting Computer Algebra Nederland, die als voornaamste praktisch doel had het in 1989 opgerichte expertisecentrum CAN te begeleiden. Andere doelen van de stichting en het expertise-

centrum waren het snel toegankelijk maken van computeralgebra-software in Nederland en de toepassingen ervan in industrie en onderwijs bevorderen.

De doelstellingen van het expertisecentrum zijn grotendeels bereikt. Een hoogtepunt was het verschijnen van de eerste goede handleiding voor Maple door André Heck, de leider van het expertisecentrum. Een ander hoogtepunt was de serie studies naar het gebruik van computeralgebra voor industrieel onderzoek. De resultaten van het werk SCAFI (Studies in Computer Algebra for Industry) zijn in twee boeken [4–5] verwerkt. Maar ook de levering van software-pakketten als Maple en Mathematica aan universiteiten werd ondergebracht in een contract met SURF.

Het expertisecentrum werd in 1993 uitgebreid met het instituut RIACA (Research Institute for Applications in Computer Algebra) en is in 1996 geïntegreerd in het Amstel Instituut van de Universiteit van Amsterdam. De commerciële poot is op dat moment zelfstandig geworden onder de naam CAN Diensten bv, en de onderzoekspoot RIACA is verhuisd naar de Technische Universiteit Eindhoven. De experts André Heck en Leendert van Gastel van het expertisecentrum CAN hebben zich in het Amstel Instituut gestort op innovatie van onderwijs in exacte wetenschappen. CAN Diensten bv distribueert, naast financiële en statistische software, nog steeds veel computeralgebrasoftware in Nederland.

Het instituut RIACA heeft zich na de verhuizing naar Eindhoven voornamelijk gericht op interactieve wiskundige documenten; hoewel enkele activiteiten voort bleven bestaan, is de naam langzamerhand op de achtergrond geraakt. Er zijn bijdragen geleverd aan OpenMath [28], een manier om wiskunde semantisch veel preciezer en rijker dan in $\text{\LaTeX}$ weer te geven, zo rijk dat twee systemen via deze taal met elkaar kunnen spreken (dat wil zeggen, op een bepaalde manier elkaars uitvoer als invoer kunnen lezen). OpenMath is op zijn beurt weer grotendeels terecht gekomen in MathML3 [22], de nieuwe XML-standaard voor de representatie van wiskunde op het web. Verder is in Eindhoven vooral gewerkt aan algoritmen voor het exact werken met algebraïsche groepen en de bijbehorende Liealgebra's. De resulterende algoritmen zijn opgenomen in de pakketten GAP en MAGMA. Van de betrokkenen is Willem de Graaf een actief onderzoeker in de computeralgebra geworden (zie [10–11]), is Erik Postma bij MapleSoft, de producent van Maple, gaan werken, en gaat Dan Roozmond binnenkort bij de Magmagroep in Sydney werken.

Primitiveren via OpenMath in Mathematica en Maxima

De volgende code illustreert hoe OpenMath code in een webpagina gebruikt wordt om een primitieve van de functie $x \mapsto x^2 e^x$ te berekenen in Mathematica.

De OpenMath code voor de primitieve wordt vertaald in een commando in Mathematica taal en ingevoerd in Mathematica. De Mathematica respons wordt afgevangen, weer terugvertaald in OpenMath en tenslotte weer in leesbare vorm gepresenteerd. De terugvertaling vanuit Mathematica in OpenMath wordt vergemakkelijkt door gebruik van het Mathematica commando FullForm dat de wiskundige expressieboom uitschrijft.

Mathematica

The input is $\int x^2 \cdot e^x dx$.

The corresponding OpenMath is

```
<OMOBJ xmlns='http://www.openmath.org/OpenMath'
version='2.0' cdbase='http://www.openmath.org/cd'>
```

```
<OMA> <OMS cd='calculus1' name='int'/>
<OMBIND> <OMS cd='fns1' name='lambda'/>
<OMBVAR> <OMV name='x'/> </OMBVAR>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='times'/>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='power'/>
<OMV name='x'/> <OMI>2</OMI> </OMA>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='power'/>
<OMS cd='nums1' name='e'/> <OMV name='x'/>
</OMA> </OMBIND> </OMA> </OMOBJ>.
```

The corresponding input to Mathematica is

```
Function[List[x],
Evaluate[Integrate[Times[Power[x,2],Power[E,x]],x]]].
```

The response from Mathematica is

```
Function[List[x], Times[Power[E, x],
Plus[2, Times[-2, x], Power[x, 2]]]].
```

The corresponding OpenMath is

```
<OMOBJ> <OMBIND> <OMS name='lambda' cd='fns1'></OMS>
<OMBVAR> <OMV name='x'></OMV> </OMBVAR>
<OMA> <OMS name='times' cd='arith1'></OMS>
<OMA> <OMS name='power' cd='arith1'></OMS>
<OMS name='e' cd='nums1'></OMS>
<OMV name='x'></OMV> </OMA>
<OMA> <OMS name='plus' cd='arith1'></OMS> <OMI>2</OMI>
<OMA> <OMS name='times' cd='arith1'></OMS> <OMI>-2</OMI>
<OMV name='x'></OMV> </OMA>
<OMA><OMS name='power' cd='arith1'></OMS>
<OMV name='x'></OMV> <OMI>2</OMI>
</OMA> </OMBIND> </OMOBJ>.
```

The result is $x \mapsto e^x \cdot (2 + -2 \cdot x + x^2)$.

Dezelfde code kan, na vervanging van een enkele verwijzing naar Mathematica door Maxima, gebruikt worden om met Maxima in plaats van Mathematica te rekenen. Maar Maxima vindt de primitieve niet en spuit een kleine variatie op de oorspronkelijke beschrijving terug.

Maxima

The input is $\int x^2 \cdot e^x dx$.

The corresponding OpenMath is

```
<OMOBJ xmlns='http://www.openmath.org/OpenMath'
version='2.0' cdbase='http://www.openmath.org/cd'>
```

```
<OMA> <OMS cd='calculus1' name='int'/>
<OMBIND> <OMS cd='fns1' name='lambda'/>
<OMBVAR> <OMV name='x'/> </OMBVAR>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='times'/>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='power'/>
<OMV name='x'/> <OMI>2</OMI> </OMA>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='power'/>
<OMS cd='nums1' name='e'/> <OMV name='x'/>
</OMA> </OMBIND> </OMA> </OMOBJ> .
```

The corresponding input to Maxima is

```
block( [temp], temp:integrate( ((x^2)*(%e^x)) , x ),
buildq( [temp:temp], lambda( [x] , 'temp ) ) ).
```

The response from Maxima is

```
((LAMBDA SIMP) ((MLIST) $X) ((%INTEGRATE SIMP) ((MTIMES SIMP)
((MEXPT SIMP) $E $X) ((MNCXPT SIMP) $X 2)) $X)).
```

The corresponding OpenMath is

```
<OMOBJ> <OMA> <OMS cd='calculus1' name='int'></OMS>
<OMBIND> <OMS name='lambda' cd='fns1'></OMS>
<OMBVAR> <OMV name='x'></OMV> </OMBVAR>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='times'></OMS>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='power'></OMS>
<OMS cd='nums1' name='e'></OMS>
<OMV name='x'></OMV> </OMA>
<OMA> <OMS cd='arith1' name='power'></OMS>
<OMV name='x'></OMV> <OMI>2</OMI>
</OMA> </OMBIND> </OMA> </OMOBJ>.
```

The result is $\int e^x \cdot x^2 dx$.

Ten slotte

In de laatste jaren komt het einde van de periode in zicht waarin de wet van Moore voor processoren geldt. De snelheid wordt meer en meer gezocht in het combineren van meerdere processoren. In de computeralgebra wordt daarom veel aandacht besteed aan de steeds betere communicatiemogelijkheden tussen softwaresystemen onderling. Een bijkomend voordeel is dat specialistische pakketten veel toegankelijker worden. De Europese projecten Intergeo [15] en SCIENCE [33], waar Nederland bij betrokken is, zijn twee voorbeelden hiervan. SCIENCE maakt het mogelijk om bijvoor-

beeld vanuit GAP een groepenberekening in MAGMA te laten verrichten en een Gröbnerbasisberekening in Maple. Een ander voorbeeld van het bijeenbrengen van verschillende kleinere systemen is het van oorsprong Amerikaanse project SAGE [32], dat overigens gebaseerd is op Python, een taal die ooit op het CWI door Guido van Rossum is ontworpen. Ook de interactie tussen de eerder genoemde formele wiskunde-software en de computer-algebrasystemen is begonnen (zie bijvoorbeeld [1, 3]) en heeft een grote toekomst.

Een andere tendens in de computeralgebra, of eigenlijk daarbuiten, is dat algoritmen

steeds meer tot de wiskundige discipline gerekend worden waarvoor ze zijn ontwikkeld. De computationele aspecten worden steeds meer door het oorspronkelijke vakgebied omarmd. Zo kan het gebeuren dat de computationele groepentheorie eerder een onderdeel van de groepentheorie dan van de computeralgebra is, en dat algoritmische getaltheorie tot de getaltheorie en niet tot de computeralgebra gerekend wordt. Maar ook disciplines als topologie en polytopentheorie hebben computeralgebra omarmd. Hierdoor beperkt de reikwijdte van het vak computeralgebra zich meer en meer tot softwaresystemen. En daarvan zijn er maar weinig

van Nederlandse oorsprong. Hier staat tegenover dat veel systemen wel Nederlandse bijdragen kennen.

Anders gezegd, de computeralgebra heeft voor een algoritmische inslag van de wiskunde gezorgd. Veel vermoedens kunnen en *moeten* tegenwoordig zelfs getest worden op een groot bereik van de parameters, voordat ze serieus genomen worden. Dit wijst er op dat computeralgebra standaardgereedschap van de wiskundige geworden is. Verder is er meer erkenning gekomen voor de ontwikkelaars van algoritmen, zoals blijkt uit woorden als ‘Experimental’ of ‘Computational’ in tijdschrifttitels.

De computeralgebra heeft ook geleid tot grotere aandacht voor effectiviteit, het daadwerkelijk vinden van objecten waarvan welis-

waar bekend is dat ze bestaan, maar waarvan niemand er een heeft aangewezen. Als er eenmaal zo’n algoritme is, verschuift de aandacht naar het zoeken van een efficiënte versie. Derksens algoritme voor de bepaling van de kleinste algebraïsche groep om een stel inverteerbare matrices is een voorbeeld van effectiviteit voor een probleem waarvan bekend was dat er een oplossing voor bestond maar waarvoor nog niet eerder een algoritme was gevonden—het algoritme is ook niet efficiënt. Van Hoeij schreef een van de meest efficiënte algoritmen voor veeltermfactorisatie, waarvan de effectiviteit altijd al buiten kijf stond.

De algoritmische inslag klinkt door in het Nederlandse wiskunde-cluster DIAMANT (Discrete, Interactive & Algorithmic Mathematics,

Algebra & Number Theory), dat vijf jaar geleden tot stand is gekomen. In deze samenwerking, maar ook in vele andere verbanden, wordt dankbaar gebruik gemaakt van de aan de computeralgebra te danken verworvenheden.

Dankwoord

Met dank aan Wieb Bosma, Ton Levelt en Hans Sterk voor verbeteringen van eerdere versies, en aan Jan Willem Knopper voor de hulp bij aanmaak van de OpenMath voorbeelden.

Referenties

- H. Barendregt en A.M. Cohen, ‘Electronic communication of mathematics and the interaction of computer algebra systems and proof assistants’, *J. Symbolic Computation* **32** (2001), pp. 3–22.
- W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, ‘The Magma algebra system. I. The user language’, *Journal of Symbolic Computation* **24** (1997), pp. 235–265.
- O. Caprotti, M. Oostdijk, ‘Formal and efficient primality proofs by means of computer algebra oracles’, *Journal of Symbolic Computation* **32** (2001), pp. 55–70.
- A.M. Cohen (ed.), *Computer Algebra in Industry, Problem Solving in Practice*, Wiley, 1993.
- A.M. Cohen, L. van Gastel, S. Verduyn Lunel (eds.), *Computer Algebra in Industry 2, Problem Solving in Practice*, Wiley, 1995.
- H. Derksen, E. Jeandel, P. Koiran, ‘Quantum automata and algebraic groups’, *Journal of Symbolic Computation* **39** (2004), pp. 357–371.
- H. Derksen, G. Kemper, *Computational Invariant Theory*, Springer, 2002.
- GAP, *Groups, Algorithms and Programming*, Aachen, St Andrews, available at www-gap.dcs.st-and.ac.uk/gap
- GBNP, www.mathdox.org.
- W. de Graaf, *Lie algebras: theory and algorithms*, Elsevier, 2000.
- W. de Graaf, A. Pavan, ‘Constructing arithmetic subgroups of unipotent groups’, *J. Algebra* **322** (2009), pp. 3950–3970.
- A. Heck, *Introduction to Maple*, 1st edition, Springer, 1993; 3rd edition Springer, 2003.
- M. van Hoeij, ‘Factoring polynomials and the knapsack problem’, *Journal of Number Theory* **95** (2002), pp. 167–189.
- M. van Hoeij, ‘Factorization of differential operators with rational functions coefficients’, *Journal of Symbolic Computation* **24** (1997), pp. 537–561.
- Intergeo, Interoperable Interactive Geometry for Europe, izgeo.net
- KANT, www.math.tu-berlin.de/~kant
- A.K. Lenstra, H.W. Lenstra, L. Lovász, ‘Factoring polynomials with rational coefficients’, *Mathematische Annalen* **261** (1982), pp. 515–534.
- M.A.A. van Leeuwen, A.M. Cohen, B. Lisser, *LiE Manual*, manual for the software package LiE for Lie group theoretical computations, CWI/CAN, 1992. Zie www-math.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE
- MAGMA, Computational Algebra System, magma.maths.usyd.edu.au/magma
- Maple, www.maplesoft.com/products/Maple
- Mathematica, www.wolfram.com/products/mathematica
- MathML, Mathematical Markup Language, version 3, www.w3.org/Math
- MATLAB, www.mathworks.com/products/matlab
- Maxima, <http://maxima.sourceforge.net>
- K.A. Nguyen, M. van der Put, ‘Solving linear differential equations’, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **6** (2010), pp. 173–208.
- PARI, pari.math.u-bordeaux
- M. van der Put, M. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328**, Springer, 2003.
- OpenMath, An extensible standard for the semantics of mathematical objects, www.open-math.org
- ORMS, Oberwolfach References on Mathematical Software, orms.mfo.de
- REDUCE, reduce-algebra.com
- T. van Ritbergen, B. Schellekens, J. Vermaseren, ‘Group theory factors for Feynman diagrams’, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** (1999), pp. 41–96.
- SAGE, A Computer System for Algebra and Geometry Experimentation, www.sagemath.org
- SCIence, Symbolic Computation Infrastructure for Europe, www.symbolic-computation.org
- R. Schoof, ‘Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod p ’, *Mathematics of Computation* **44** (1985), pp. 482–494.
- F. Wiedijk, ‘Formal proof – getting started’, *Notices of the AMS*, **55** (2008), pp. 1408–1414.

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

Boekbespreking Yuri Manin: *Mathematics as Metaphor*

"Ik loop blootsvoets over worstenbroodjes"

Wie durft het nog aan zijn vakspecialisme te verlaten? Zijn er in de wiskunde nog 'vogels' met overzicht en visie, of enkel 'kikkers' in de modder met technische brillen, om met Freeman Dyson te spreken? Gunther Cornelissen beschrijft hoe Manin zich in een selectie van zijn essays laat kennen als een echte vogel, die tussen wiskunde, natuurkunde, psychologie en literatuur wisselt alsof het de gewoonste zaak van de wereld is.

Hier zijn twee gedachten naar aanleiding van het lezen van dit boek.

Eén. Het is mogelijk ongelofelijk lange, en ongelofelijk saaie teksten te produceren over wiskunde. Sterker nog, het merendeel van teksten over wiskunde is van zulk allooi. Een paar boekenkasten vol van dit gekweel (gekwel?), mocht u ze bezitten, kunnen met een gerust hart worden vervangen door deze 250 pagina's korte parel van Manin.

Twee. Als jong mens keek ik wel eens 's avonds laat naar de VPRO, en zag toen Wim Kayser's TV-reeks *Van de schoon-*

heid en de troost, een verzameling lange monologen door beroemde kunstenaars en wetenschappers. Gelukkig was ik onlangs jarig, en gelukkig is de VPRO nu ook in het DVD-tijdperk aangekomen [1]. De natuurkundigen van dienst zijn Dyson, Lederman, Weinberg, en Witten. Wiskundigen ontbreken helemaal in de reeks (ik doe voor het gemak maar of Dyson —begonnen in de transcendentietheorie—, Witten —Fields medaille— en Coetzee —wiskundestudie— geen wiskundigen zijn). En toen wist ik ineens: Manin was de perfecte wiskundige ge-

weest om in dit programma te zetten. Hij had gewoon wat uit z'n boek kunnen voorlezen.

Ver boven het vakgebied

Waarom is dit boek zo interessant? Vooral omdat Manin niet alleen een groot en bijzonder invloedrijk wiskundige is in zijn specialismen (een combinatie van getaltheorie, algebraïsche meetkunde en mathematische fysica) [2], maar een eruditie bezit die ver boven zijn vakgebied uitstijgt [3]. Hij runde in Moskou een tijd lang een seminarium over psycho-linguïstiek, schreef een aantal artikelen over de archetype-theorie van Jung, produceert veel poëzie (de titel van dit stuk is de markante titel van een verzameling limericks van Manin, en met zijn toestemming staat bij dit artikel één van zijn verzen met Engelse vertaling van eigen hand).

Пространство-время как диагноз

Межреберная ностальгия:

тоска по времени, когда
я тосковал по пространству.

Пространство было закрыто.

Сейчас

пространство открылось, но почти закрылось
время.

Spacetime as diagnosis

Thoracic nostalgia:

longing for time
when I was longing for space.

Space was closed.

Now
space is open
but time

is almost closed.

Een van de verzen met Engelse vertaling van Manin.

Hiermee komen we meteen bij een tekortkoming van het boek aan: het is de vertaling van de gelijknamige Russische versie, maar de selectie uit Manins literaire werk is in de vertaling verdwenen. Freeman Dyson stelt dat er wel tien hoofdstukken zijn weggelaten: "The American Mathematical Society decided that these chapters would not be of interest to English language readers." [4] Helaas is zo het plaatje van Manin als universele mens niet meer volledig. Kortom, wie Russisch begrijpt, zorgt ervoor dat hij het origineel te pakken krijgt. Niettemin is de vertaling nog steeds extreem interessant.

Manins denkwereld

Het boek heeft drie delen. Het eerste deel bestaat uit vier essays over culturele en sociale aspecten van de wiskunde-beoefening, een doordacht stuk over Cantor (een van Manin's favoriete wiskundigen), en twee uiteenzettingen van de stelling van Gödel, waaronder het stuk waarin Manin de quantumcomputer bedenkt. Het heeft weinig zin dat ik hier de inhoud van de stukjes bespreek, maar ze ademen duidelijk een denksfeer die anders is dan veel van de gebruikelijke visies op wiskunde. Als u niks kunt met zinnen als "Probably the most interesting intracultural interactions involving mathematics are those that are not direct, but rather proceed via the mediation of value systems", dan is dit deel niet echt aan u besteed.

De stelling van Gödel parafraseert Manin met de volgende zin uit een gedicht van Tsjoetstjev: *Een gedachte die onder woorden wordt gebracht, wordt een leugen* [5].

Voor diegenen onder ons die zich betrokken voelen bij het wiskundeonderwijs, is heel wat te leren van Manins gedachten over het bedrijven van wiskunde. Zo vinden we op pagina 32 van dit boek de pedagogische conse-

quenties van zijn uitspraak dat "een bewijs [slechts] een genre van wiskundige tekst is".

Het tweede deel gaat over mathematische fysica, en begint met een herdruk in 50 gekte pagina's van zijn boek "Mathematics and Physics", dat als typoscript in 1981 bij Birkhäuser verscheen. De eerste zinnen zetten al meteen de toon, met een citaat van een numerieke formule uit een artikel van Fermi en Analdi, en de problematische wiskundige inhoud daarvan. Hierop volgt ook het stuk "Reflections on Arithmetical Physics", waar Manin speculeert over een diepere relatie tussen getaltheorie en natuurkunde, n.a.v. zijn adellijke berekening van de partitiefunctie van de Polyakovsnaar.

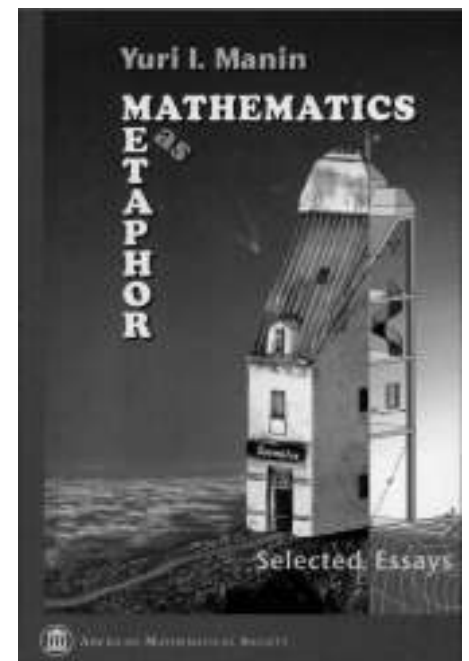
In deel drie staan twee van zijn artikelen over de archetypes 'de lege stad' en 'de mythische schelm'; een stuk over de vroege ontwikkeling van taal ("a particular attempt to consider the glottogenesis problem in light of psycholinguistic data"); en twee boekbesprekingen, van *Triangle of Thought* [6] en van een boek over autisme. Het boek eindigt met het interview "Good proofs are proofs that make us wiser". Het interview is een goede inleiding in de denkwereld van Manin, en misschien een mooie aanzet om te beslissen of dit boek iets voor u is [7].

Elitaire mening

Ik kan me zomaar voorstellen dat de stijl van Manin als hij reflecteert over wiskunde, maatschappij en natuurkunde, door sommigen als storend, elitair of pretentius wordt ervaren. Het is zeker zo dat hij over alles een uitgesproken, onderbouwde, maar soms controversiële, en inderdaad vaak elitaire mening heeft. In het novembernummer van de Notices of the American Mathematical Society was het weer raak met zijn bewering dat als er iemand komt met een bewijs voor de Rie-

mannhypothesen dat geen deel uitmaakt van een 'programma', hem dat nauwelijks zou interesseren. Op de blog van Emmanuel Kowalski ging het meteen loos [8], om nog maar te zwijgen van de "Opinion" van Doron Zeilbergers alter ego Shalosh B. Ekhad [9].

Waarom bent u deze bespreking nog aan het lezen? Het spotgoedkope boek van Manin zal u veel uren lees- en denkplezier verschaffen, en de andere honderd "Opinions" van Zeilberger zijn ook veel leuker dan dit stuk. Manin zelf zou denk ik onder de leeslamp gaan zitten met het boek uit voetnoot [5].



Yuri Manin, *Mathematics as Metaphor – Selected Essays*, AMS, 2007, 232 p., hardcover, ISBN-10: 0-8218-4331-1, ISBN-13: 978-0-8218-4331-4, € 32, AMS-leden € 26, www.ams.org
Russische uitgave bij MTsNMO (Moskou, 2008), 400 p., hardcover, ISBN 978-5-94057-287-9, € 17 bij www.ruslania.com

Noten

- <http://www.vpro.nl/programma/schoonheidentroost>
- Selected papers of Yu. I. Manin, World Scientific Series in 20th Century Mathematics, vol. 3, 612 p., 1996 ISBN: 978-981-02-2498-1, ca. € 60, <http://www.worldscibooks.com/mathematics/2966.html>
- Zie zijn CV op www.mpim-bonn.mpg.de/digitalAssets/5017.CV.updated.February.2008.pdf
- Birds and Frogs*, Notices A.M.S. vol. 56, no. 2, p. 212–223).
- Laatste Liefde*; Tjoetstjev, dichter, denker, minnaar, vertalingen en biografie door Frans-Joseph van Agt en Nina Targan Mouravi, Uitgeverij Azazello, ISBN 90-808825-4-2 360 p., incl. audio-CD met tweetalige voordracht van 20 gedichten, € 33,50.
- door Alain Connes, Andre Lichnerowicz en Marcel Paul Schutzenberger, A.M.S. (2001).
- Het interview staat bijvoorbeeld op www.wisdom.weizmann.ac.il/~borisl/4lj/manin.pdf.
- <http://blogs.ethz.ch/kowalski/2009/10/15/bluntness-is-all-or-a-valiant-attempt-at-flamethrowing/>
- <http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion105.html>

De derde wet

| Solicited Comments

Het onderstaande is een reactie op de artikelen 'Hans Freudenthal als docent en collega' en 'Wiskunde opstuwen in de vaart der volkeren – interview met Chris Zaal' uit het NAW-maartnummer.

Slordige wiskundigen

Het jubileumnummer van maart 2010 heb ik met veel plezier gelezen, maar wat kunnen wiskundigen toch slordig zijn.

Op pagina 55 heeft Stienstra het over Freudenthal's college 'Structuren van de Wiskunde', dat moet zijn 'Structuren'. Op pagina 56 merkt Duistermaat op dat Freudenthal naar Nederland kwam voor de topologie. Dit is onjuist: in Van Dalen's biografie van Brouwer kun je lezen dat hij aangetrokken werd door het intuïtionisme. Later werd hij natuurlijk topoloog. Lemmens zegt op dezelfde pagina dat Freudenthal bij Hopf promoveerde op topologische groepen. De titel van dat proefschrift is 'Über die Enden topologischer Räume und Gruppen'. Toch even wat anders en gemakkelijk na te zoeken.

In het interview met ijdeltuit Chris Zaal spreekt deze op pagina 40 naar aanleiding van de periode rond 2000 over de "tachtigjarige T.A. Springer". Nu is Springer geboren in 1926, hij was dus 74 in 2000. Maar misschien is voor iemand die niet van realistisch rekenen houdt een dergelijk sommetje te moeilijk.

Pieter Lommerse, Hillegom

Het onderstaande is een reactie op het redactioneel uit het NAW-maartnummer.

NAW nieuwe stijl

Graag reageer ik op het redactionele artikel '10 jaar' in het maart nummer van het NAW. Ik ben zeer ingenomen met de nieuwe stijl die tien jaar geleden werd geïntroduceerd. Wellicht is de volgende achtergrond informatie interessant voor u.

Van 1944 tot 1949 bezocht ik het Christelijk Lyceum te Dordrecht. Als wiskunde leraar had ik daar S.C. van Veen die later (ik meen in 1948) werd benoemd tot hoogleraar wiskunde aan de toenmalige Technische Hogeschool Delft. Als student Vliegtuigbouwkunde (1949–1954) kreeg ik weer met hem te maken. Met een aantal medestudenten, die net als ik een meer dan gemiddelde belangstelling voor wiskunde hadden, volgde ik een aantal colleges 'bijzondere onderwerpen' bij hem. Het zal in het college jaar 1952–1953 zijn geweest dat hij een aantal van ons overhaalde student-lid van het WG te worden. Mijn latere echtgenote woonde bij het echtpaar Van Veen in de buurt en had daardoor ook een goed contact met hen. Na mijn afstuderen hebben wij samen nog een aantal jaren contact met hen onderhouden, ook na hun verhuizing naar een appartement in Hillegersberg. Ik ben tot op de huidige dag lid gebleven van het WG.

Ik moet echter toegeven dat (tot tien jaar geleden) het NAW voor mij weinig interessant was. Ik besteedde eigenlijk nog de meeste aandacht aan de boekbesprekingen. Tien jaar geleden is dit geheel veranderd. Ik lees met belangstelling het grootste gedeelte van het blad. Mijn complimenten met deze geslaagde nieuwe vorm.

J. van Ingen, Apeldoorn

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

Marja van den Heuvel-Panhuizen

Adri Treffers

Freudenthal Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 9432

3506 GK Utrecht

m.vandenheuvel@fi.uu.nl

Onderwijs

Cijfer positieve prestaties in rekenen niet weg

Het rekenen in het basisonderwijs is al geruime tijd het onderwerp van discussie. In onderstaand artikel betogen Marja van den Heuvel-Panhuizen en Adri Treffers van het Freudenthal Instituut, dat als er geen methodevernieuwing had plaatsgevonden, de uitkomsten van het rekenwiskundeonderwijs thans lager zouden zijn geweest. Ze baseren zich op periodieke peilingen van het onderwijsniveau, uitgevoerd door het Cito.

Een halve eeuw geleden typeerde het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen rekenen doodgemoedereerd als 'een stervend vak'; een vak met weinig aandacht voor hoofdrekenen, schatten en praktische toepassingen, een vak dat onder het geestdoden de cijferen dreigde te bezwijken. Rekenmethodes als *Functioneel rekenen* en *Boeiend rekenen* die kolomsgewijs rekenen, handig (hoofd)rekenen en schatten voorop stelden kregen weinig aftrek, dit in tegenstelling tot cijfermethodes als *Naar aanleg en tempo* en *Naar zelfstandig rekenen* die de onderwijsmarkt volledig domineerden.

Pas in de loop van de jaren 80 veranderde deze situatie. Uit raadplegingen van ouders, leraren, docenten, onderzoekers en onderwijsbegeleiders kwam toen naar voren dat men meer tijd voor hoofdrekenen, schatten en praktische toepassingen wilde reserveren, en het cijferen een minder overheersende positie wenste toe te kennen — een internationale trend die mede door de beschikbaarheid van rekenmachines werd ingegeven [2, 6].

In Nederland was ook de opkomst van het zogenoemde realistische rekenen debat aan die accentverschuiving. Omstreeks 1980 ver-

schenen de eerste reken-wiskundemethodes die op deze realistische visie waren geënt. Het gevolg van een en ander was echter dat zich een tweedeling in het methodenbestand begon af te tekenen. De noodzaak van een nationale consensus over de (in)richting van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool deed zich steeds sterker gevoelen. In 1984 nam de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO) het initiatief om een nationaal leerplan te ontwikkelen. In 1989 verscheen de 'Proeve van een Nationaal Programma' waaraan door tientallen deskundigen na consultatie van honderden betrokkenen, leraren basisonderwijs, pabo-docenten, onderwijsbegeleiders, onderzoekers, was gewerkt [16]. Dit baken voor leerboekenschrijvers en toetsontwikkelaars ging vanaf 1990 als officieus leerplan fungeren.

De voorlopige eindtermen en wat later de kerndoelen die begin jaren 90 door de overheid voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool werden vastgesteld, sloten naadloos bij de Proeve-doelen aan. Wat was er in deze kerndoelen wat betreft 'getallen en bewerkingen' nieuw ten opzichte van het tradi-

tionele cijferonderwijs? Om deze vraag te beantwoorden kan het volgende voorbeeld uit groep 6/7 als model fungeren.

De Lieke-som

Lieke wil 4 broden kopen van €1,98.

Ze heeft een tientje. Is dat genoeg?

De leerlingen lossen deze opgave op verschillende manieren op.

- Kolomsgewijs, splitsend via $4 \times 100 + 4 \times 90 + 4 \times 8$
- Cijferend via $198 + 198 + 198 + 198$
- Cijferend via 4×198
- Hoofdrekenend via $4 \times 200 - 4 \times 2$
- Schattend via 4×200 , zonder precieze uitkomst.

Deze manieren van rekenen bieden goede aangrijpingspunten voor het onderwijs om de relaties tussen de verschillende berekeningen te laten zien en vooral ook om de handigste aanpakken klassikaal aan de orde te stellen.

Algemeen geldt dat leerlingen aan het einde van groep 8 in principe alle genoemde strategieën van gevarieerd rekenen en schatten dienen te beheersen en in praktische situaties moeten kunnen toepassen [9]. De Lieke-som zou dan globaal rekenend opgelost moeten worden en niet (hoofd)cijferend. Maar in een andere opgave zou het merendeel van de leerlingen, waar nodig, ook 4×198 cijferend moeten kunnen berekenen. Kortom, veelzijdig en inzichtelijk leren rekenen, met cijfe-

ren als één onderdeel daarvan, dat was het nieuwe kerndoel van 'getallen en bewerkingen' anno 1990. Hoe pakte deze vernieuwing uit?

In het volgende zal deze vraag worden beantwoord via een serie stellingen die onderbouwd worden met resultaten uit de zogenoemde periodieke peilingen van het onderwijsniveau (PPON) die in 1987, 1992, 1997 en 2004 door het Cito werden uitgevoerd.

De marktaandelen van de realistische methodes liepen in die periode achtereenvolgens op van 15 via 35 en 75 naar 100 procent. Deze rekenrevolutie maakt het mogelijk om de opbrengsten van de traditionele methodes met de vernieuwde, realistische methodes te vergelijken [1].

Is het correct, zoals de voorstanders van het eenzijdige accent op cijferen beweren, dat de oude rekenmethodes beter waren dan de nieuwe? Of nog specifiek: scoren cijfermethodes die geen aandacht aan veelzijdig rekenen waaronder hoofdrekenen en schatten besteden, maar slechts één standaardprocedure per bewerking hanteren, beter dan de rekenmethodes die niet volgens dit cijferconcept zijn opgezet?

Over deze kernvragen gaan de eerste twee stellingen. De derde stelling gaat over vergelijkende scores van voorbeeldopgaven, de vierde over de basisautomatismen en de vijfde over het kolomsgewijs rekenen. We besluiten met een conclusie.

Stelling 1

De invoering van de vernieuwde rekenmethodes heeft een positieve invloed op de rekenprestaties gehad.

Door de opzet van de periodieke peilingen heeft het Cito de effecten kunnen onderzoeken van de verschuivingen in het marktaandeel van de methodes. In de PPON-rapporten van de peiling halverwege de basisschool (2003) en aan het einde ervan (2004) worden de methode-effecten met die van 1992 en 1997 vergeleken.

De uitkomsten van deze vergelijking zijn zowel voor de mediopeiling als de eindpeiling positief voor de nieuwere methodes. Dat wil zeggen dat de methodewisseling die in de periode 1992–2004 plaatsvond een generaal positief effect op de rekenprestaties heeft gehad.

Nader gespecificeerd ziet dit effect er als volgt uit. Voor het domein *Bewerkingen* (1) — basisautomatismen, getalrelaties, hoofdrekenen en schatten — is het effect van de methode positief. Bij *Bewerkingen* (2) — cijferen



Bente maakt vermenigvuldigssommen op het digitale schoolbord.

en rekenmachine — is het effect vrijwel neutraal. Bij *Verhoudingen*, *Breuken* en *Procenten* is het methode-effect licht positief. En ook in het domein *Met en Meetkunde* is sprake van een klein positief effect.

Algemeen geldt dat bij alle onderdelen in deze vier domeinen de methodewisseling een neutrale dan wel positieve uitwerking heeft gehad. Dit betekent dat de rekenrevolutie die zich in dit tijdvak voltrok van een methodebestand dat voor tweederde traditioneel was naar een volledig vernieuwd methodebestand, de rekenprestaties ten goede is gekomen. Of anders geformuleerd: indien er geen methodevernieuwing had plaatsgevonden, zouden de uitkomsten van het rekenwiskundeonderwijs thans lager zijn geweest; de afname van de cijfervaardigheid bij met

name vermenigvuldigen en delen kan derhalve niet aan de toename van de nieuwe rekenmethodes worden toegeschreven.

Met dit resultaat worden uitspraken over de vermeend slechte kwaliteit van de realistische rekenmethodes door de onderzoeksgegevens van het Cito weerlegd. "Men moet zich echter realiseren dat het hier summatieve effecten betreft en dat daarmee niet gezegd is dat alle nieuwe rekenmethodes een positieve bijdrage leveren aan het rekenwiskundeonderwijs." [12] Deze kanttekening brengt ons bij de tweede stelling.

Stelling 2

De kwaliteit van de rekenmethodes in de periode 1987–1997 varieert sterk: eensporige cijfermethodes scoren het slechtste, veelzijdige

Acht ankersommen	'87	'04
1. Wilma is 153,6 cm lang. Vorig jaar was haar lengte 146,7 cm. Hoeveel is Wilma sinds vorig jaar gegroeid?	60%	69%
2. 2 Kilo kuikenbouten kosten €8,98. De chef van een restaurant koopt 10 kilo kuikenbouten in. Hoeveel moet hij betalen?	60%	69%
3. Yvonne rekent uit op haar rekenmachine $715,347 + 589,2 + 4,553 = 13091$ Bij het opschrijven van het antwoord is ze de komma vergeten. Wat moet het antwoord zijn?	27%	71%
4. In de prijzenpot zit €6327,75. Er zijn 8 winnaars die dit met elkaar moeten delen. Hoeveel geld moet ieder dan ongeveer krijgen? Rond af op honderd euro.	35%	66%
5. Hiemden heeft ruim 50.000 inwoners. Een 1/2% van die inwoners is ouder dan 80 jaar. Dat zijn ongeveer ... mensen.	41%	58%
6. Ongeveer 3/4 deel van de leerlingen van de Plerikschool komt lopend naar school. Van de rest wordt de helft gebracht en komt de helft op de fiets. Welk deel van de leerlingen van deze school komt op de fiets?	43%	75%
7. De ijscoman heeft berekend dat hij per 10 ijsjes het volgende verkoopt: - 2 bekertjes - 3 hoorntjes - 5 waterijsjes Hij bestelt 700 ijsjes. Welke verdeling houdt hij aan? ...bekertjes ...hoorntjes ...waterijsjes	56%	76%
8. Koptelefoons van €60,- nu met 30% korting. Hoeveel moet je nu voor een koptelefoon betalen?	42%	71%
9. Een boekhandelaar verkocht het afgelopen jaar 704 boekenbonnen van 25 euro. Voor hoeveel euro is dat?	-	71%
10. De Meibloem heeft 32 nieuwe geschiedenisboeken gekocht voor €736,-. Hoeveel is de prijs per boek?	-	84%
11. De handbalvereniging verzamelt iedere maand oud papier. Vorig jaar verzamelde men 7849 kg. Papier. Hoeveel kg. Is dat gemiddeld per maand? Rond je uitkomst af op een heel getal.	-	60%
(Alleen de eerste vier opgaven moesten uit het hoofd berekend worden.)		

komt? Ondersteunt deze hoge positie niet de zojuist geponeerde stelling dat je aan beide kanten goede, matige en slecht scorende methodes hebt, ook buiten het cijferen? Het antwoord op deze vragen is ontkennend. NWR volgt namelijk niet de eensporige rekenlijn die de 'mechanisten' uitzetten. Enkele citaten uit de handleiding van NWR tonen dit overtuigend aan.

"Inzicht in de structuur van de getallen, hoofdrekenen en schatten (met inzicht) nemen in alle deeltjes een ruime plaats in. Hoofdrekenen is altijd functioneel, inzichtelijk rekenen. Hoofdrekenen is niet: cijferen uit het hoofd, of het toepassen van foeftjes. Hoofdrekenen vraagt altijd inzicht in de structuur van de getallen. Hoofdrekenen wil zeker niet zeggen, dat nooit papier mag worden gebruikt. Bij een som als $8 \times 22,50$ bijvoorbeeld mag zeker opgeschreven worden $45 - 90 - 180$; of $200 - 20$; of $160 + 20$." [5]

Als voorbeeld van hoofdrekenen kiezen we de volgende drie opgaven uit groep 6 (Handleiding 4b):

- $5 \times 98 = 5 \times 90 + 5 \times 8 = .. + .. =$
maar ook $5 \times 100 - 5 \times 2 = ..$
en ook de helft van $10 \times 98 = .. : 2 = ..$
en ook $5 \times 50 + 5 \times 48 = .. + .. = ..$
- Bereken op verschillende manieren:
 7×98 4×98 3×96
 2×98 9×98 5×97
- Bereken op de eenvoudigste manier:
 6×94 8×97 8×98
 5×96 9×95 9×94

Cijferen wordt inzichtelijk onderwezen via kolomsgewijs splitsend rekenen. De staartdeling verschijnt in NWR in de volgende drie fasen van schematisering.

rekenmethodes het beste, of ze nu traditioneel dan wel vernieuwd zijn.

Bij de toelichting van deze stelling laten we het volgende citaat als leidraad fungeren:

"Het tweede punt dat de aanhangers van het realistische rekenen vaak naar voren brengen, is dat uit het eerdere PPON-onderzoek in 1997 zou blijken dat de realistische methodes bij cijferen beter scoren dan de traditionele methodes. Dat de zaken, juist bij het cijferen, heel wat genuanceerder liggen, kan iedereen constateren die het rapport van dat onderzoek, dat op het internet vrij beschikbaar is, raadpleegt [11]. Van de destijds in gebruik zijnde rekenmethodes, zijn er drie traditioneel: *Nieuw Rekenen* (NWR), *Naar Zelfstan-*

dig Rekenen (NZR), en *Niveaucursus Rekenen* (NCR). NWR scoorde goed, NZR scoorde matig en NCR scoorde slecht. Ook aan de realistische kant waren er methodes die goed, matig of slecht scoorden. Kennelijk kun je aan beide kanten goede, matige en slecht scorende methodes vinden." [7]

Wat het cijferen betreft is deze conclusie correct. Maar rekenen is meer dan cijferen: wij schreven over alle 24 onderdelen van dit vak en niet alleen over de 3 onderdelen van het cijferen. En laat nu uitgerekend op bijna alle onderdelen de traditionele cijfermethodes NZR en NCR het slechtste scoren!

Hoe zit het dan met de traditionele methode NWR die na de realistische methode *Wereld in getallen* (WIG) als beste uit de bus

9	9	
30	30	
100	100	
6/837\139	6/837\139	6/837\139
<u>600</u>	<u>6</u>	<u>6</u>
237	23	23
<u>180</u>	<u>18</u>	<u>18</u>
57	57	57
<u>54</u>	<u>54</u>	<u>54</u>
3	3	3
(1)	(2)	(3)

Tot zover de korte impressie van NWR, een traditionele rekenmethode met een — op het

punt van het rekenen — hoog realistisch gehalte. Gelet op de veelzijdige aanpak van NWR, wekt het geen verbazing dat deze methode op vrijwel alle rekenonderdelen — inclusief verhoudingen, breuken en procenten — hoger scoort dan de cijfermethodes NZR en NCR. Uit het voorgaande kan men concluderen dat een terugkeer naar het traditionele rekenen volgens het concept van het eenzijdige cijferen geen wetenschappelijk verantwoord optie is. Traditioneel rekenen gelijkstellen aan ‘de methode van opa’, zoals Van de Craats doet, is niet in overeenstemming met de historische feiten, aangezien er ook altijd een veelzijdige ‘methode van oma’ heeft bestaan, die zoals de periodieke peilingen laten zien, betere resultaten boekte. De huidige realistische methodes passen binnen deze vakdidactische traditie en zijn eveneens van een betere kwaliteit dan de genoemde cijfermethodes.

WIG scoort van alle methodes het hoogste en is op 19 van de 24 onderdelen het beste en op de resterende 5 eindigt ze ook hoog. Deze score krijgt vooral reliëf als we hem vergelijken met de resultaten van de cijfermethode NZR. Op het domein cijferen zijn de verschillen te verwaarlozen. Maar bij basisautomatismen, getalinzicht, hoofdrekenen en schattend rekenen scoort WIG gemiddeld ruim 15 procentpunten hoger dan deze ‘methode van opa’. En bij verhoudingen, breuken en procenten is dat eveneens het geval.

Maar ook het nieuwe realistische methodebestand vormt geen eenheid. Met name de plaats en de betekenis van het cijferen verschilt per methode aanzienlijk. Bij de methodekeuze kan men zich mede door dit gegeven laten leiden. Het is echter de vraag of dit ook werkelijk is gebeurd. Feit is in ieder geval dat het marktaandeel van de methode Pluspunt, die relatief weinig tijd aan het aanleren van de cijferprocedures besteedt, tot de ongekende hoogte van 45 procent steeg. Terwijl WIG dat betrekkelijk veel tijd voor cijferen reserveert op 25 procent bleef steken.

Stelling 3

De prestaties van het niet-cijferende rekenen zijn in 2004 aanzienlijk beter dan die uit 1987.

We beschikken over de scores van acht opgaven die zowel in 1987 als in 2004 via een individuele toetsafname in de periodieke onderzoeken van het Cito zijn gepeild. Dus in de periode dat het rekenonderwijs eerst nog voor 85 procent door de traditionele leerboeken bepaald was en aan het eind toen de zogenoemde realistische methodes volledig

waren ingevoerd. De voorbeelden zijn ankersommen die model kunnen staan voor het rekenonderdeel dat ze representeren: hoofdrekenen, schatten, breuken, verhoudingen en procenten.

Niet alleen de goedscores blijken aanzienlijk te verschillen maar vooral ook de oplossingsmethoden zijn anders. In de peiling van 2004 rekenen de kinderen handiger, met meer inzicht en minder hoofdcijferend. In opgave 3 bijvoorbeeld, de Yvonne-som, gaven in 1987 één op de drie leerlingen het antwoord 13,091 omdat de meeste getallen drie cijfers achter de komma hebben, terwijl in 2004 nog maar één op de tien zo redeneerde. En bij opgave 8, de kortingsom, rekenden in 2004 twee van de drie leerlingen via ‘10% is gelijk €6’. Dat deed in 1987 (met gulden) bijna geen enkele leerling. Toen werd nog klakkeloos het 1%-pad gevolgd, dat leidde naar $30 \times 0,60 = \dots$, wat vaak fouten tot gevolg had.

Al met al geeft dit achttal voorbeelden een behoorlijke indruk hoe het rekenonderwijs er op de betreffende onderdelen voor staat in vergelijking met het ‘traditionele’ tijdperk van de jaren 80 en ervoor. Helaas ontbreken vergelijkende opgaven over inzicht in getallen en getalrelaties, een nieuw rekenonderdeel waarop sinds 1987 samen met schattend rekenen de grootste vooruitgang is geboekt, namelijk van ongeveer 25 procentpunten. In de lijst staan ook geen vergelijkende scores van cijferopgaven uit 1987 en 2004. Wel beschikken we over de gegevens van drie toetsitems die in 2004 bij een vergelijkbare groep leerlingen individueel zijn afgenomen.

In de klassikale afname van de periodieke peiling bleken de scores echter aanzienlijk lager. Bijna de helft van de leerlingen berekende deze opgaven uit het hoofd. In de individuele peiling werden de leerlingen echter aangezet om de uitwerking op te schrijven, met het gevolg dat de resultaten ruim 25 procent hoger lagen.

Dit wordt ook door Van Putten en Hickendorff opgemerkt [14,p.23].

“Ondersteuning voor de interpretatie dat vooral het maken van opgaven zonder uitwerking bepalend is voor de daling in prestaties, kan ook ontleend worden aan de resultaten van de individuele afnamen. Bij deze individuele afnamen maakten leerlingen de opgaven wél met behulp van het opschrijven van een uitwerking. De geleverde prestaties waren aanzienlijk beter, terwijl de strategieën afzonderlijk niet succesvoller waren. Het lijkt er dus op dat zodra de leerlingen een uitwerking

opschrijven bij een oplossing van een deelopgave, waartoe ze goed in staat lijken te zijn, de prestaties vanzelf beter uitpakken.”

Op dit punt hebben de critici van het bestaan van het rekenonderwijs het gelijk aan hun kant: de leerlingen moeten vaker hun berekening noteren; de leraar dient daarop nauwlettend toe te zien. Dit gebeurt echter steeds minder nu het onderwijs in toenemende mate op zelfstandig werken wordt ingericht, en de leraar een meer begeleidende in plaats van een sturende functie gaat vervullen.

Stelling 4

Eén van de belangrijkste kritiekpunten van de ‘mechanisten’ op de ‘realisten’, namelijk dat aan het oefenen van de basale vaardigheden onvoldoende aandacht wordt besteed, is aantoonbaar onjuist.

Uit de periodieke rekenpeiling halverwege de basisschool blijkt dat de basale rekenvaardigheden in 2003 beter worden beheerst dan in 1997 en 1992. Deze verbetering is veroorzaakt door de nieuwe rekenmethodes:

“Nieuwere methoden bleken in de vergelijking met oudere methoden veelal effectiever en we zien dat de effectgrootten duidelijk positiever uitvallen: dat is al enigszins het geval in de vergelijking 1997-1992, maar sterker in de vergelijking van 1992 en 1997 met 2003.” [13]

Over de eindpeiling van 2004 schrijven de Cito-onderzoekers met betrekking tot de beheersing van de basisautomatismen:

“In hun totaliteit zijn de effecten op het gebied van de basisoperaties klein. Het is niet onwaarschijnlijk dat dit mede wordt veroorzaakt door het basale karakter van dit onderwerp waardoor relatief veel opgaven door de meeste leerlingen goed worden beheerst en er dus sprake is van een plafondeffect.” [12]

De cijferaars willen ons doen geloven dat de ‘realisten’ het inoefenen van de basale rekenvaardigheden niet belangrijk vinden en dat de realistische methodes in dit opzicht tekortschieten. Deze kritiek wordt echter door de bovengenoemde onderzoeksgegevens in algemene zin weersproken. Dit betekent echter niet dat die kritiek ten aanzien van een bepaalde methode onterecht zou zijn. De verschillen tussen de methodes wat betreft de parate kennis van de tafels bijvoorbeeld, zijn halverwege groep 5 betrekkelijk groot. En men

kan een laag scorende methode daar uiteraard op aanspreken. Maar dat is iets anders dan alle realistische methoden kritiseren. Want de basisautomatismen blijken eind groep 8, zoals gezegd, voldoende beheerst te worden.

Stelling 5

De voorstelling die Van de Craats van het kolomsgewijs rekenen geeft, is niet in overeenstemming met de onderwijspraktijk.

In de rekendidactische richting wordt het cijferen van oudsher via kolomsgewijs splitsend rekenen aangeleerd [8]. De leerlijn die men daarbij volgt zal hier kort aan de hand van cijferend vermenigvuldigen worden beschreven.

Neem als voorbeeld de Lieke-som uit de inleiding. Eén van de oplossingen ging als volgt: $4 \times 198 = 4 \times 100 + 4 \times 90 + 4 \times 8 = \dots$. Met zo'n voorbeeld kunnen we eenvoudig laten zien hoe het standaardalgoritme stapsgewijs wordt opgebouwd, tenminste als de leerlingen het cijferende optellen al beheersen.

	3 3	3 3	3 3	
198	198	198	198	198
$\underline{4 \times}$	$\underline{4 \times}$	$\underline{40 \times}$	$\underline{44 \times}$	$\underline{43 \times}$
32	792	7920	792	...
360			7920	...
400			8712	...
792				
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

Dit is de leerlijn die in de traditionele 'methodes van oma' globaal wordt getrokken. Ook de meeste realistische methodes volgen, op een enkele uitzondering na, dit oefenspoor [17].

De voorstelling die Van de Craats van dit kolomsgewijs rekenen geeft, is zonder meer misleidend. Hij laat namelijk zien hoe ingewikkeld '729 $\times$ 345' kolomsgewijs berekend wordt: je krijgt dan 9 deelproducten in plaats van 3 zoals bij de standaardprocedure. Tevens gaat hij er bij het optellen van die deelproducten nog eens vanuit dat de leerlingen op dat moment niet cijferend kunnen optellen. Dit betekent dat dan ook die optelling weer kolomsgewijs moet worden uitgevoerd, hetgeen de rekenkolom uiteraard nog langer maakt — zodoende moet men voor het opschrijven van de berekening maar liefst 18 regels reserveren! Zo'n dubbele kolomsgewijs berekening zal men om de redenen die zojuist zijn aangegeven in geen enkel leerboek aantreffen.

Kolomsgewijs rekenen is naast een doel op zich ook een middel om het standaardalgoritme van een 'éencijfergetal maal een meercijfergetal' inzichtelijk te onderbouwen, of beter gezegd, te laten ontwikkelen. Pas als deze kernvaardigheid van één-keer-meer wordt beheerst, ligt de weg naar complexere vermenigvuldigingen en delingen open, al kan men die natuurlijk al wel eerder verkennen.

Ook hier past echter weer een nuancering. Want niet iedere methode besteedt voldoende aandacht aan het inoefenen van de basale vaardigheid één-keer-meer. Dus waarom zou men haar op dit punt niet mogen kritiseren?

Maar, nogmaals, dat is iets anders dan in al gemene zin het kolomsgewijs rekenen aan de kaak stellen, of sterker, zelfs op te roepen om het te verbieden. Dit betekent zoveel als een verbod op een klassieke rekenaanpak. Tal van vermaarde reken- en wiskundendidactici en leerboekauteurs uit de vorige eeuw zouden daar met terugwerkende kracht toch wel even van opkijken om dan schouderophalend hun werk te vervolgen.

Conclusie

Wat de empirische gegevens betreft, hebben we ons voornamelijk op het gedegen periodieke peilingsonderzoek van het Cito gebaseerd. Met name de gegevens over methodes werpen een schril licht op de boude bewering dat de realistische methodes niet zouden deugen. De claim over de didactische superioriteit van de aloude cijfermethodes wordt op geen enkele wijze door de beschikbare onderzoeksresultaten gerechtvaardigd — integendeel. De resultaten op alle niet-cijferonderdelen zijn in die traditionele methodes niet goed. Speciaal bij basisautomatismen, getalrelaties, hoofdrekenen en schatten scoren ze ver onder de maat, terwijl ze bij het cijferen evenmin excelleren [10].

Dit alles maakt de aanschaf van een nieuwe cijfermethode op school tot een risikante onderneming. Het kan immers niet de bedoeling zijn om van rekenen weer 'een stervend vak' te maken!

Naschrift

Dit artikel is eerder verschenen in Tijdschrift voor Orthopedagogiek, jaargang 49, nr. 2, pp. 53–62.

Referenties

- 1 Van de Craats merkt in de NRC van 30-09-08 over de realistische rekenmethodes op: 'Ze zijn alle zes even slecht, dus wat heeft het dan voor zin ze te gaan vergelijken.'
- 2 Ahlers, J. (1987), 'Grote eensgezindheid over basisonderwijs', *Onderzoek onder leraren en ouders*, *School*, **15**(4), p. 5–10
- 3 Bokhove, J. & J. Janssen (1987), 'Periodiek peilingsonderzoek in het basisonderwijs', *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, **6**(1), p. 3–6
- 4 Bokhove, J., F. van der Schoot & Th. Eggen (1996), *Balans van het rekenonderwijs aan het einde van de basisschool 2*, Arnhem: Cito
- 5 Bruinsma, B. (red.) (1969), *Nieuw Rekenen voor het basisonderwijs. Algemene Inleiding*, Baarn: Bosch en Keuning
- 6 Cadot, J. & D. Vroegindewij (1986), *10 voor de basisvorming, rekenen-wiskunde onderzocht. Op weg naar een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en het gebruik van de computer daarbinnen*, Utrecht: OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht
- 7 Craats, J. van de (2009), 'Hoe Daan en Sanne leren rekenen', *Tijdschrift voor Orthopedagogiek*, **48**(5), p. 196–203
- 8 Goeij, E. de & J. Nelissen (1999), 'In gesprek met schoolteams. Kolomsgewijs rekenen en cijferen', *Willem Bartjens*, **19**(1), p. 34–36
- 9 Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buijs & A. Treffers (red.) (2001), *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*, Groningen: Wolters-Noordhoff
- 10 Heuvel-Panhuizen, M. van den (2009), *Hoe rekent Nederland?* (oratie), Utrecht: Freudenthal Instituut
- 11 Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker & N. Verhelst (1999), *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3*, Arnhem: Cito
- 12 Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005), *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het eind van de basisschool 4*, Arnhem: Cito
- 13 Kraemer, J.M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005), *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4*, Arnhem: Cito
- 14 Putten, C.M. & M. Hickendorff (2006), 'Strategieën van leerlingen bij het beantwoorden van deelopgaven in de periodieke peilingen aan het eind van de basisschool van 2004 en 1997', *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, **25**(2), p. 16–25
- 15 Schoot, F. van der (2008), *Onderwijs op peil? Een samenvattend overzicht van 20 jaar PPON*, Arnhem: Cito
- 16 Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989), *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen*, Tilburg: Zwijssen
- 17 Treffers, A. & E. de Moor (1990), *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en Cijferen*, Tilburg: Zwijssen
- 18 Wijnstra, J.M. (red.) (1968), *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool 1*, Arnhem: Cito

Karim Zahidi

Dept. Wijsbegeerte
Universiteit Antwerpen
Stadscampus, S.D.314
Grote Kauwenberg 18
2000 Antwerpen, België
karim.zahidi@ua.ac.be

Cultuur

Wiskunde en muziek: een eeuwig misverstand

Robert Ainsley, auteur van *Bluff your way in Mathematics* (Ravette Books 1988), zegt dat hij na zijn wiskundestudie is gaan schrijven voor een muziekblad, “proving that ability in music and maths are often absent in equal proportions...” Je hoort wel vaker over een verband tussen muziek en wiskunde. Maar is dit verband er echt? Karim Zahidi, filosoof, wiskundige en bariton in het Brusselse Brecht-Eislerkoor, gaat op verkenning.

“Van alle kunstvormen leunt muziek het dichtst aan tegen de wiskunde” is een gemeenplaats die door de eeuwen heen door verschillende auteurs is verkondigd. In dit stuk wil ik kort enkele van deze argumenten bespreken.

De eerste verbanden tussen wiskunde en muziek gaan terug op de Griekse wijsgeer en wiskundige Pythagoras. Het gehele filosofische leerstelsel van de Pythagoreïsche school is sterk geïnspireerd door wiskunde en meer bepaald door de rekenkunde van natuurlijke getallen. Het is dan ook niet te verwonderen dat Pythagoras een wiskundige theorie van muziek (een belangrijk onderdeel van het Griekse cultuurleven) ontwierp. Zijn theorie was gebaseerd op de eenvoudige observatie dat toonhoogtes in ‘welluidende’ intervallen zich verhouden als natuurlijke getallen. Preciezer geformuleerd ontdekte hij dat de lengtes van twee trillende snaren, die een ‘welluidend’ interval opleveren, zich verhouden als natuurlijke getallen. Voor een octaaf interval is de verhouding $1/2$ (als een snaar van lengte L een bepaalde toonhoogte voortbrengt dan brengt de snaar met een lengte $1/2 L$ een toon voort die één octaaf hoger ligt), voor een kwint is de verhouding $2/3$ en voor een kwart

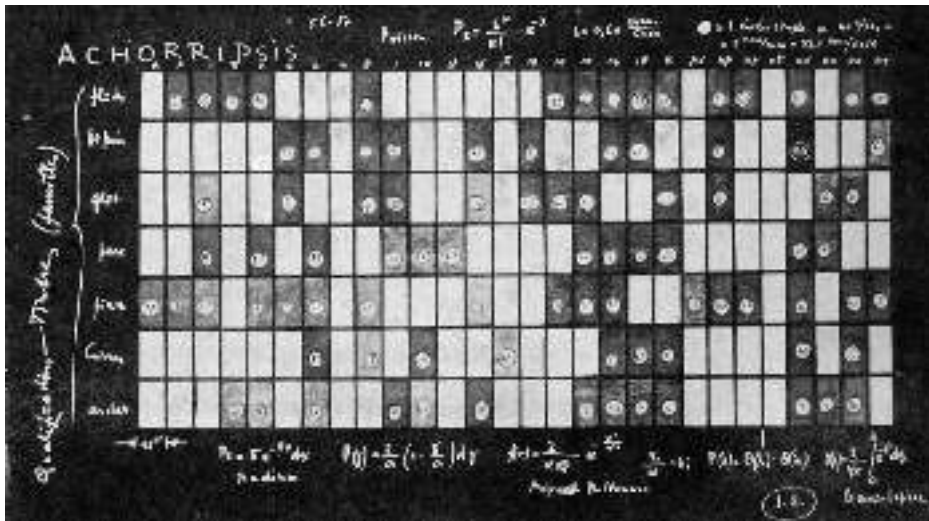
$3/4$. Deze ontdekking was en is nog steeds de basis voor de harmonieleer. Het feit dat de ‘welluidende’ intervallen een zekere wiskundige symmetrie vertonen, maakte enorm veel indruk op Pythagoras en was één van de oorzaken die leidde tot de overtuiging dat de wereld was opgebouwd aan de hand van natuurlijke getallen [1] en dat het esthetische in de wereld precies haar oorsprong vond in het feit dat deze de patronen van de natuurlijke getallen volgt. Alhoewel deze ontdekking schijnbaar voldoende grond geeft aan de bewering dat muziek intiem verbonden is met wiskunde, is het zinvol om er even bij stil te staan. Veeleer lijkt deze ontdekking grond te geven aan de relatie tussen natuurkunde en wiskunde. De ontdekking van Pythagoras zegt namelijk alleen iets over de fysische processen die het geluid voortbrengen vanuit het standpunt dat muziek niets meer is dan de fysische processen die er aan ten grondslag liggen dan geldt de stelling. Maar deze veronderstelling is naar mijn gevoel sterk reductionistisch (het is zoals een schilderij bestuderen door enkel naar de eigenschappen van de gebruikte materialen te kijken). Een ander zwak punt is de karakterisatie van ‘welluidende’ toonintervallen. De Grieken kenden enkel

octaaf, kwint, kwart. De terts (één van de dominante toonintervallen in de Westerse klassieke muziek) was hen bijvoorbeeld onbekend, maar kan nochtans als de verhouding van twee natuurlijke getallen worden uitgedrukt. Volgens de overtuiging van Pythagoras zou deze toonafstand ook als ‘welluidend’ moeten beschouwd worden, hetgeen niet het geval was.

Wanneer twee disciplines nauw met elkaar verbonden zijn, betekent dit onder meer dat er een zekere wisselwerking bestaat tussen de evolutie in beide disciplines. Als standaardvoorbeeld kunnen we verwijzen naar de relatie tussen wiskunde en natuurkun-

Révész in 1946

Een interessante referentie over de relatie tussen wiskundig en muzikaal talent is te vinden op pagina 489 van David Bensons *Music: a Mathematical Offering* [4], eerder besproken in het NAW door Derk Pik (juni 2009). Benson verwijst naar een boek van de psycholoog Géza Révész uit 1946 [5]: “This book contains an interesting discussion (pages 160–167) of the question of whether mathematicians are more musically gifted than exponents of other branches and professions. The author gives evidence for a negative answer to this question, in sharp contrast with widely held views on the subject.”



Schema voor de compositie *Achorripsis* van de Griekse componist Iannis Xenakis (1922–2001). Verticaal staan de verschillende instrumentgroepen, horizontaal verloopt de tijd in blokken van 15 seconden. Het aantal muzikale 'events' in iedere cel bepaalde Xenakis aan de hand van kansverdelingen. Zie [7] voor meer uitleg.

de (Newton vond de differentiaalrekening uit om de klassieke mechanica te beschrijven, de theorie van Hilbertruimten was een geschikt formalisme om de quantummechanica te beschrijven, problemen uit de conforme veldentheorie leidden tot interessante vraagstukken in de algebraïsche meetkunde, etcetera — zie [2] voor een uitgebreide beschrijving van de wisselwerking tussen wiskunde en natuurkunde). Deze wisselwerking is vruchtbaar gebleken voor beide disciplines. Echter, de wisselwerking tussen muziek en wiskunde is vrijwel verwaarloosbaar. Het is wel zo dat sommige auteurs in bepaalde muziekstukken een zekere wiskundige structuur herkennen, of de structuur van bepaalde muziekwerken beschrijven aan de hand van wiskundige structuren (zie bijvoorbeeld [6] voor een vergelijking tussen de structuur in de muziek van Bach en bepaalde structuren die opduiken in de wiskundige logica). Het punt is dat dergelijke beschrijvingen a posteriori zijn en dergelijke analyses waarschijnlijk niet gemaakt zijn door de componisten als ze het werk componeerden. (Twee muziektheoretici maakten ooit een analyse van een compositie van de Oostenrijkse componist Schönberg. Er was echter één noot die niet in hun analyse van het muziekstuk paste. Overtuigd dat het om een drukfout ging in de partituur, gingen

ze naar Schönberg toe en vroegen of die noot geen andere noot moest zijn. De componist antwoordde hoofdschuddend dat het muzikaal toch duidelijk was dat de enige noot die op die plaats paste, de noot was die er stond.) Het enige wat dergelijke analyses bewijzen is dat bij elke menselijke creatie er een zekere drang naar ordening en symmetrie aanwezig is, en wiskunde is een ideale taal om symmetriën te beschrijven.

Een van de redenen dat muziek nog steeds beschouwd wordt als zijnde nauw verbonden met de wiskunde, is dat de syntax van de muziek een wiskundige indruk maakt. Met syntax bedoelen we de regels die vastleggen hoe muziek genoteerd wordt. Mensen die ooit muziek gestudeerd hebben, herinneren zich meestal dat er ergens rekenen met breuken aan te pas kwam en ze kregen zo de indruk dat er wel degelijk wiskunde in muziek zit en dat mensen die goed zijn in wiskunde ook goed zijn in muziek. Dit blijft een vreemde gevolgtrekking, zeker als we de vergelijking maken met literatuur. Het syntaxniveau is hier het niveau van de spellen en de grammatica. De grammatica van een taal is meestal sterk logisch gestructureerd, het is dus evident dat mensen met een 'logische geest' minder problemen hebben met de grammatica van een taal. Maar dit betekent niet dat zij meer gevoel hebben voor

taal, betere poëzie schrijven enzovoort. Een bewering die trouwens nooit gehoord wordt, is dat een wiskundige (veronderstellend dat die een 'logische geest' heeft) beter zou zijn in literatuur. Nochtans is dit dezelfde redenering die gevolgd wordt als wanneer die bewering gemaakt wordt in verband met wiskunde en muziek. De twee niveaus, het syntax-niveau enerzijds en het artistieke niveau anderzijds, die bij taal duidelijk gescheiden blijven, worden blijkbaar bij muziek veel minder apart gehouden. Eén van de redenen daarvoor is waarschijnlijk dat iedereen veel meer vertrouwd is met taal dan met muziek. Iedereen is een dagelijks gebruiker van taal en kan daardoor beide niveaus duidelijk onderscheiden (vermoedelijk wordt dit onderscheid onbewust gemaakt). De kennis van muziek is bij de meeste mensen veel beperkter en dit maakt dat beide niveaus in een zekere nevel gehuld zijn en dus de verwarring tussen beide niveaus ontstaat (men zou zich de vraag kunnen stellen of in een maatschappij waar muziek als dagelijks communicatiemiddel gebruikt zou worden eenzelfde verwarring zou optreden in verband met taal). Dat het syntax-niveau een duidelijke invloed heeft op het artistieke niveau is duidelijk (zoals Weyl in [3] zegt: "Alle Musiker sind sich darin einig, dass dem Gefühlselement der Musik ein starkes formales Element unterbaut ist."), maar het lijkt dat een goede kennis van het syntax-niveau enkel een nodige voorwaarde is.

In het bovenstaande heb ik getracht een aantal argumenten te geven om de verleidelijke, maar naar mijn mening verkeerde conclusie over het verband tussen wiskunde en muziek, te ontcrachten of toch sterk te relativiseren. Ik heb getracht aan te tonen dat het verband veel minder voor de hand liggend is dan het op het eerste gezicht lijkt. Ik hoop dan ook dat, zelfs al is de lezer niet akkoord met mijn argumenten, hij er toch voldoende door geraakt is om over het hele probleem na te denken.

Naschrift

Deze tekst is het eerste deel van een groter artikel, dat eerder is verschenen in *Wiskunde en Onderwijs*, 23 (1997), pp. 170–183.

Noten

- Het feit dat zelfs de meest eenvoudige constructie (een rechthoekige driehoek met lengte van de rechthoekszijden 1) leidt tot 'onmeetbare' getallen (de lengte van de schuine zijde is $\sqrt{2}$ en dus irrationaal) was dan ook een grote schok voor de fundamentele van de filosofie van Pythagoras.
- Y. Manin, *Mathematics and Physics*, Birkhäuser, Boston.
- H. Weyl, *Symmetrie*, Birkhäuser, Basel.
- D. Benson, *Music: a Mathematical Offering*, Cambridge University Press, 2006.
- G. Révész, *Einführung in die Musikpsychologie*, A. Francke, Amsterdam 1946. Translated by G.I.C. de Courcy as *Introduction to the psychology of music*, University of Oklahoma Press, 1954, and reprinted by Dover, 2001.
- D.E. Hofstadter, *'Gödel, Escher en Bach: een eeuwige gouden band'*, uitgeverij Contact, Amsterdam.
- E. Childs, 'Achorripsis: A sonification of probability distributions', Proceedings of the 2002 International Conference on Auditory Display, 2002.

In de verdediging

| In defence



Multi-scale Riemann-Finsler geometry

Laura Astola

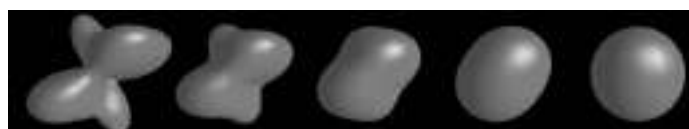
The cover of Laura Astola's thesis shows the everyday life that helped to inspire her research on medical image analysis to study the brain white matter. It is an interpretation of Astola's work by her 15-year-old daughter Mandi. In reality, her mathematical work has applications to Diffusion Tensor Imaging and to High Angular Resolution Diffusion Imaging. These rather novel, noninvasive medical imaging methods are used to discover the anatomical structure of inhomogeneous tissue such as brain white matter or muscle.

Diffusion tensor imaging

On January 27, 2010, Laura Astola successfully defended her Ph.D. thesis *Multi-scale Riemann-Finsler geometry, applications to diffusion tensor imaging and high angular resolution diffusion imaging*, written under supervision of Luc Florack. Her research mainly concerns some basic methods in differential geometry, namely in Riemann- and Finsler-geometry. These may be used in the development of robust ways to reveal the architecture of the neural fibers in brain white matter.

White matter is composed of bundles of neural axons, which connect various grey matter areas (the locations of nerve cell bodies) of the brain to each other, and carry nerve impulses between neurons. Astola was interested in the structure of this tissue, and specifically in its directions of elongation and the connectivity of the subregions in the tissue. She aimed to recover this information from noisy, diffusion weighted magnetic resonance images (MRI) of the brain. Such images roughly measure the displacements of water molecules (undergoing random thermal motion) in several spatial directions. The water displacements differ from place to place according to the structure of the surrounding fibrous tissue of the axons.

In standard diffusion tensor imaging (DTI), the data is described by a second order positive tensor. More specifically, the tensor represents a level set of water molecules, and the simplest model to describe an anisotropic diffusion profile that is symmetric with respect to the origin, is a second order tensor. The level sets are level sets of diffusion time; particles that have diffused for an equal time interval. This time interval is typically around 30 milliseconds, during which the average displacements of the molecules in the white matter depend on the surrounding tissue and therefore also on the spatial direction. An illustration that is often used, is to compare the motion of water molecules in a glass of water with those in a glass of water filled with a



A higher order tensor level set evolves under Laplace-Beltrami regularization; this can be useful in noise-reduction.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl



These curves that model the real neural fibers were found using streamline tracking and Finsler-metric. This allows a voxel to contain also fiber bundles with different orientations, which was not possible in the standard DTI streamline method.

bunch of spaghetti. Clearly the elongated structures affect the movement of molecules, favouring migration along the spaghetti and hindering the motion across them.

Riemann and Finsler geometry

Being a mathematician, Astola of course focused on the mathematical side of the imaging methods. The standard modelling with a second order tensor naturally leads to a Riemannian framework. Hence local properties of a diffusion tensor image, such as curvatures, and the behaviour of geodesics, can be studied with Riemann geometry.

If the average displacements are measured only in, say, 6-30 spatial directions, the angular resolution is rather low. Measuring in 80-130 directions is still in the range that is comfortable for the patient, but gives a much higher angular resolution. Such a large amount of spherical data can be modelled more accurately using higher order tensors (homogeneous polynomials on the sphere). But such models no longer allow a Riemannian approach. By making the higher order tensors properly homogeneous and convex, they may be seen as defining Finsler norms, so that Finsler geometry provides the natural geometric generalisation. This way, Astola obtained a consistently generalised framework to analyse diffusion weighted images, that exploits the well-established and rich set of tools from differential geometry. According to her, the derivation of a systematic way to apply Finsler geometry using the tensor notation is the most important result in her thesis.

The geometric viewpoint indeed proved fruitful. By attaching geometric meaning to the physical properties represented by data, measures and algorithms to extract information from images could be de-

rived. This resulted, among others, in a novel, yet simple algorithm for tracking neuronal fibers.

Happy moments with pencil and paper

On the one hand, Astola's research was very applied. The applications in medical image analysis played an important role, and methods she developed were tested and demonstrated on both analytic and real High Angular Resolution Diffusion Imaging (HARDI) data. She joined a couple of medically inclined conferences and also visited a hospital, to get an idea of the very many practical challenges. The main challenges she encountered were to deal with the huge amount of medical data and in circumventing the problems due to the discrepancy between required and available memory capacity.

However, in her daily life she only had rather loose ties with the medical community, via colleagues at the biomedical engineering department. She herself is first and foremost an applied mathematician, who particularly liked the hours spent doing calculations by pencil and paper and who produced quite a pile of full notebooks in the past four years. Other happy moments were the moments of succeeding in programming new procedures.

A Finnish woman in the Netherlands

At the TU/e, Astola was member of a very active research group. They had at least two regular meetings per week, one with a group of people working on a similar subject and a weekly seminar combined with a coffee break for the whole research group/laboratory. Astola really enjoyed being a student in the Netherlands. One big difference she observed between this country and Finland, her home-country, is that the Dutch have many more social occasions that are also genuinely valued. She felt that it is, much more than in Finland, essential to be an active member of the community. And even though her life differed a lot from that of most Ph.D. students – with three children she had to go home early on two to three days per week and continue her work at night – she managed to really participate in the group's activities and to finish her research within four years. So it is not surprising that she chose to continue her academic career as a post-doc at the Scientific Computing group of the Center of Analysis, Scientific Computing and Applications (CASA) at the TU/e.



Image courtesy Koninklijke Philips Electronics N.V.

Diffusion weighted image acquisition is done with an MRI-scanner.

Rob van Oord

Coenecoopcollege
Dreef 2, 2741 SR
Waddinxveen
robvanoord@tiscali.nl

Evenement 16de Nationale Wiskunde Dagen

Pleidooi voor de praktische opdracht

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen (NWD), jaarlijks georganiseerd door het Freudenthal Instituut, kunnen wiskundeleraren uit het voortgezet onderwijs ideeën opdoen en creatief met wiskunde bezig zijn. De sprekers zijn wiskundigen die over hun vak praten, maar ook niet-wiskundigen die laten zien hoe wiskunde in hun beroep wordt toegepast. Docent Rob van Oord doet verslag van de 16de NWD en breekt een lans voor de praktische opdracht.

Wat een voorrecht om weer deel te nemen aan dit jaarlijkse hoogtepunt op mijn vakgebied. De openingslezing door Johan van Benthem ging over Logic in Action. Deze tak van wiskunde is relevant voor veel maatschappelijke processen: het benoemen en beheersen van informatiestromen met logica helpt bij het effectief omgaan met gegevens. Leerlingen van een basisschool moesten in een project met vragen achter de waarheid zien te komen, zoals bij drie kabouters die de kleur van elkaars muts wel, maar van zichzelf niet kunnen zien. Bijzonder hoe je informatie haalt uit het weten dat een ander het antwoord niet weet.

Ik woonde diverse workshops bij, onder meer over het getal 16 (passend bij de 16de editie van de NWD), over het rekenen aan de tijden van zonsopkomst en -ondergang, en over de strijd tussen de rekenmeesters Van Ceulen, Petri en Goudaen.

Over wiskunde en kunst waren er lezingen door zoon Tom van wiskunstenaar Koos Verhoeff, en door Theo Jansen uit Delft. De kunstwerken van Koos Verhoeff waren in de grote zaal te bewonderen. Verstek zagen om

een fraai ruimtemodel te krijgen, het klinkt eenvoudig maar vereist heel wat denkwerk.

Op de NWD-poster staat een aantal beesten van Theo Jansen afgebeeld. Het is fascinerend om deze, slechts aangedreven door wind, te zien bewegen over het strand. De beesten evolueren van het glutonium (met plakband) door het gordatijdperk (met ti wraps) naar het vaporum (druk die door de wind wordt opgebouwd in petflessen van cola). Jansen liet een computer dagen lang rekenen om de ideale lengte per aandrijfbuis te vinden. De 'leugenaartjes' vormen een belangrijk onderdeel van zijn constructies. Als in een van de buisjes water komt slaat er een klep dicht, andere gaan open waardoor het beest de andere kant op gaat lopen. Dit gebeurt wanneer het beest in het water komt, of bij opkomend hoog water. Jansen creëert nu een hele kudde die zelfregulerend over het strand moet gaan wandelen.

Mijn eigen workshop heb ik gewijd aan het belang van het behoud van de Praktische Opdracht (PO) in het voortgezet wiskunde-onderwijs, gebaseerd op de bestaande PO:

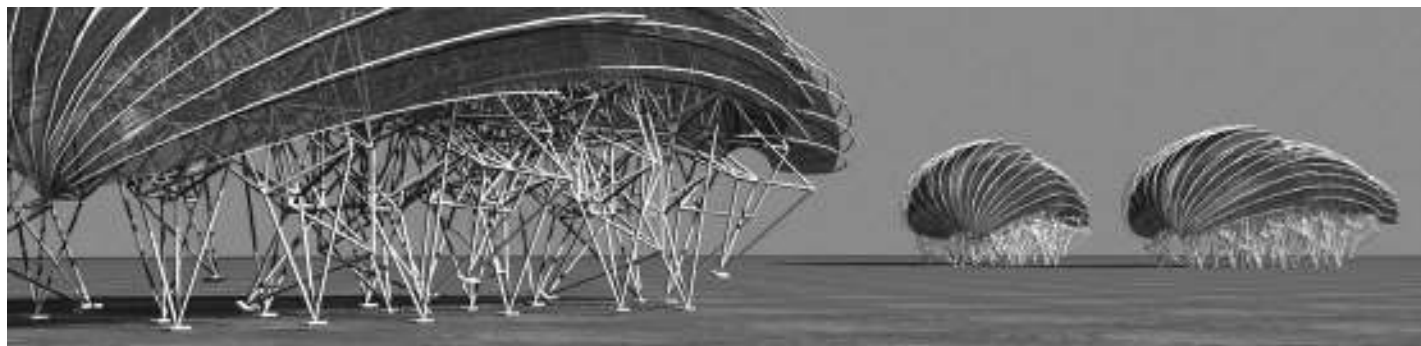
wanneer is 'parabool' gelijk aan 'lijn' $\times$ 'lijn'? De deelnemers onderzochten wat er gebeurt bij 'parabool' $\times$ 'lijn' en 'parabool' / 'lijn'.

De PO-werkvorm geeft wiskunde-onderwijs een extra dimensie en leerlingen een extra goede voorbereiding op hun vervolgstudie. Natuurlijk is het begin moeilijk en eng, maar met positieve stimulans en prikkelende vragen die hen op weg helpen, zijn ze uiteindelijk trots op het resultaat. In de onderbouw kan op kleine schaal met dergelijke opdrachten geoefend worden. Ik denk dan aan GWA's en bijvoorbeeld statistiek met smarties.

In een handout (zie www.fi.uu.nl/nwd) is te lezen hoe men een PO organiseert, en wat er allemaal bij komt kijken. Wilt u meer informatie over de PO, laat het me weten.

In de afsluitende lezing vertelde Natasha Maurits over het afleiden van een diagnose uit zeer veel meetgegevens. Door metingen wordt een normaal beeld van bijvoorbeeld een spier vastgelegd in getallen, en weergegeven in één grijs tint per getal. Dan wordt de echografie van een patiënt vergeleken met de grijs tinten van de normale spier. De mate van vlekkerigheid kan een aanwijzing zijn voor een spier- of zenuwziekte. Wiskunde helpt hier bij het opsporen van ziektebeelden.

Samenvattend: deze NWD was zeer geslaagd. Hopelijk zien wij wiskundigen en wiskundedocenten elkaar volgend jaar weer! $\leftarrow$



Wandelende beesten van kunstenaar Theo Jansen

Manfred Lehn

*Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
55099 Mainz, Duitsland
lehn@mathematik.uni-mainz.de*

Wiskundig werktuig

Hoe houd je een goede seminariumvoordracht?

In december 2001 dicteerde Klaas Landsman het NAW-lezerspubliek hoe een wiskundige voordracht gegeven wordt. In de Duitse wiskunde-wereld circuleert sinds enige jaren het advies van Manfred Lehn, hoogleraar meetkunde te Mainz, voor het houden van een seminariumvoordracht. In onze minireeks 'Wiskundig Werktuig' geven we een vertaling van Lehns tekst: een pleidooi voor de klassieke, tot in de puntjes voorbereide krijtbord-voordracht. Om studenten voor te bereiden op af te schrikken.

Het doel van een seminariumvoordracht is tweeledig. Aan de ene kant moet de spreker iets leren door zich een min of meer vastomlijnd wiskundig thema eigen te maken. Aan de andere kant moeten de andere deelnemers iets opsteken doordat de spreker hen zijn verworven inzicht in hapklare brokken voorschotelt. De docent ervan te overtuigen dat het tentamenbriefje verdiend wordt moet niet de drijfveer van zo'n voordracht zijn, hooguit een neveneffect. Dit moet een spreker zich van tevoren goed realiseren, vooral als dit briefje de belangrijkste motivatie voor deelname zou zijn.

Een mondelinge voordracht biedt diverse mogelijkheden die een tekst mist. Een goede spreker is zich hiervan bewust en buit deze mogelijkheden uit. Een slechte voordracht is slechts georganiseerde tijdverspilling en ook onbeschaafd tegenover het publiek.

Ik beschrijf hieronder een aantal aandachtspunten die kunnen helpen bij de voorbereiding en uitvoering van een seminariumvoordracht. Niet alles wat ik te berde

breng zal door iedereen omarmd worden. Anderen zullen misschien de nadruk anders leggen. Hoewel sommige zaken voor de hand liggend of zelfs banaal lijken is het toch goed om er even bij stil te staan.

Neem de voorbereiding serieus, maar houd de voordracht luchtig!

Tijdens de voorbereiding van een voordracht moet aandacht worden besteed aan inhoudelijke en voordrachttechnische aspecten. Het is evident dat een goede lezing alleen gegeven kan worden als de spreker begrijpt waar hij het over heeft. Een goede inhoudelijke voorbereiding is daarom een essentiële voorwaarde voor elke voordracht. Begin op tijd met deze voorbereiding. Twee weken van tevoren is meestal te krap.

De inhoudelijke voorbereiding

Waar moet de lezing over gaan? Stem de vraagstelling op tijd af met de begeleider om te voorkomen dat de voordracht over een verkeerd thema gaat, of dat de nadruk verkeerd wordt gekozen. Vaak kunnen zinvolle vragen

pas gesteld worden nadat een deel van het onderwerp bestudeerd is. Belangrijk is ook om te weten hoe het onderwerp in de samenhang van het hele seminarium is ingebed.

Welke literatuur is er beschikbaar? Vaak wordt een seminarium gehouden aan de hand van een boek of artikelen. Probeer altijd om nog extra literatuur te vinden voor een goede beeldvorming over het onderwerp.

Hoe lees je wiskundige teksten? Iemand die een seminariumvoordracht houdt heeft tijdens zijn studie al verschillende boeken gelezen en weet dat er in essentie twee manieren zijn om een wiskundige tekst te bekijken:

- Het vogelperspectief: Wat zijn de grote lijnen? Waar gaat de tekst over? Wat zijn de belangrijke begrippen en uitspraken? Wat zijn de ideeën van de bewijsstructuren? Wat is het doel?
- Het kikkerperspectief: Hoe wordt dit in detail gedaan? Hoe werkt een bewijs? Waar zijn de voorwaarden in een bewijs voor nodig? Wat gebeurt er als je ze weg laat?

Tussen deze twee perspectieven moet geregeld heen en weer worden geschakeld. Zonder overzicht kun je gemakkelijk in het eerste het beste technische lemma vast komen te zitten. Bij eerste lezing sla je alle bewijzen over en concentreer je op de beweringen.

Dan komt er een moment waarop de beweringen moeilijker te doorgronden worden als je niet meer begrip voor de gebruikte terminologie ontwikkelt. Dan wordt het tijd om beter naar de bewijzen te kijken. Als je vervolgens meer technische details begrijpt is het goed om weer even te reflecteren over de samenhang, enzovoort.

In grote lijnen is dit ook een goede aanpak om individuele stellingen en voorbeelden te bestuderen. Bij een nieuwe stelling kun je je voor, tijdens en na het bestuderen vragen van de volgende soort stellen: Zijn er eenvoudige voorbeelden of speciale gevallen? Zijn er eenvoudige tegenvoorbeelden waarbij niet aan voorwaarden is voldaan? Zijn er aanknopingspunten met bekende begrippen of uitspraken? Is er een karakteristiek voorbeeld dat alle wezenlijke aspecten illustreert?

als vraag uit het publiek opduiken.

Deze schriftelijke uitwerking hoeft niet overeen te komen met de tekst van de voordracht. Vaak worden tijdens de voordracht bepaalde bewijsstappen of saaie berekeningen weggelaten. Toch moet juist alles wat wordt weggelaten wel goed voorbereid klaarliggen voor het geval dat. Houd tijdens het uitwerken altijd de volgende gezichtspunten in het oog:

- De auteur heeft het niet bij het rechte eind. Bekijk de argumenten met een gezonde dosis argwaan. Een bewering is niet waar omdat hij gedrukt staat. In wiskundige teksten kunnen ook fouten staan, zelfs in teksten die al door velen zijn bekeken. Deze instelling is ook een psychologische truc om jezelf te dwingen nauwkeurig en kritisch te blijven werken.

is een boek. Een tekst heeft heel andere mogelijkheden dan een voordracht en vice versa. Een bewijsvoering uit een boek waarvoor flink gebladerd moet worden kan minder geschikt zijn tijdens een voordracht omdat dan rekening moet worden gehouden met de beperkte capaciteit van het korte termijngeheugen van de toehoorders. Probeer een vorm te vinden die beter bij de presentatie past. Laat bijvoorbeeld referentiemateriaal op een apart bord of scherm staan. Praat nooit over dingen die je niet helemaal begrijpt, al is de verleiding nog zo groot. Het zal je net gebeuren dat iemand uit het publiek, vaak zonder kwade opzet, een vraag stelt, precies over deze zwakke plek in je verdediging. Als dit toch gebeurt, geef dan ruiterlijk toe dat je hier nog vraagtekens hebt. Het punt kan dan mogelijk in de groep besproken worden. Dit moet natuurlijk niet



Vogel- en kikkerperspectief



De uitwerking op papier

Wie een globaal begrip van het onderwerp heeft kan beginnen met een schriftelijke uitwerking. Daarin moeten alle zaken staan die met de voordracht te maken hebben. Werk alle (!) details uitgebreid uit op papier. Dat geldt in het bijzonder voor opmerkingen van de vorm "Het is triviaal om in te zien dat...". Struikelpunten die tijdens de voorbereiding optreden kunnen ook tijdens het seminarium

- De argumenten zijn in te korten. Probeer altijd om de bewijsvoering te vereenvoudigen. Als dat lukt, moet je je wel meteen afvragen waarom de auteur daar niet op is gekomen. Vaak ligt het eraan dat de vereenvoudiging domweg onjuist is. Het is heel leerzaam om de fout te ontdekken en het kan zelfs illustratief zijn om dit tijdens de voordracht ter sprake te brengen.

Een voordracht is een voordracht en een boek

te vaak gebeuren omdat dan pijnlijk duidelijk wordt dat je voorbereiding onvoldoende was.

Tijdens de voorbereiding is het raadzaam om gebruik te maken van de begeleiding van de docent. Natuurlijk zal niet elke epsilon worden voorgerekend, want de voorbereiding is juist een wezenlijk onderdeel van de te verrichten inspanning. Het is echter ook niet effectief om wekenlang tegen een knelpunt aan te hikken als een eenvoudige opmerking mis-

schien al opheldering geeft. In ieder geval moeten het thema en de samenhang met het seminarium worden doorgesproken.

De voordracht

Naarmate je je meer thuis gaat voelen in het onderwerp gaat het werk allengs over in de voorbereiding van de voordracht. Daartoe moeten alle tot dan toe vergaarde kennis en inzichten worden samengeballd tot een presentatie. Hoewel maar een deel van deze inzichten in de lezing terecht zullen komen moet je altijd iets meer weten, of voorbeelden achter de hand hebben, in verband met mogelijke vragen.

Voor de voordracht moet aantal veelvoorkomende stereotypen worden vermeden:

- De autistische voordracht. De spreker is zich er niet van bewust dat hij niet alleen in de zaal is. Hij spreekt meer met zichzelf en het bord dan tot het publiek en laat het publiek liever niet aan de voordracht deelnemen.
- De Ik-weet-het lezing. De spreker is er op uit om het publiek te bewijzen dat hij het onderwerp uitstekend beheerst. In een adembenemend tempo rijgen definities, stellingen en bewijzen zich als parels aan een ketting, zonder dat het publiek de kans krijgt om de details of de samenhang echt te begrijpen. Dat is dan ook niet de bedoeling omdat dit het kennismonopolie van de spreker zou aantasten.
- De kneuslezing. De spreker heeft zich slecht voorbereid en begrijpt het onderwerp niet. Slechte formuleringen en een onleesbaar handschrift verhinderen tussentijdse vragen. Veel tijd wordt verspeeld aan eenvoudige dingen en de moeilijker onderwerpen komen niet meer aan bod.

Een goede lezing onderscheidt zich vanaf het begin doordat communicatie van het thema naar het publiek in het middelpunt staat. Uit dit basisprincipe zijn andere eigenschappen af te leiden. Bij de keuze van de inhoud van de lezing moet rekening worden gehouden met de beschikbare tijd en het absorberend vermogen van het publiek. Het lijkt wel eens of sprekers per definitie tijd tekort komen. En dat terwijl tijdsoverschrijding een doodzonde is. Het is onhoffelijk naar het publiek en leidt tot afraffelen van onderwerpen. Bij twijfel moet er worden ingekort, uiteraard wel met overleg. Welke onderdelen zijn essentieel omdat ze net de crux van de zaak bevatten of typisch voor de aanpak zijn, welke stukken zijn minder belangrijk of lijken op andere onderdelen en kunnen zonder verlies van begrip wegge laten worden? Sneller schrijven op het bord

of klikken in Power Point lijkt een oplossing, maar dit helpt het publiek niet, en dus ook de spreker niet. Die wordt namelijk beoordeeld op hoe zijn voordracht bij het publiek overkomt. Bedenk goed dat argumenten die voor de spreker na weken noeste arbeid triviaal lijken te zijn geworden bij het publiek misschien niet direct landen. Noem nooit dingen triviaal die dat niet zijn, daarmee beledig je het publiek.

Spreek altijd naar het publiek, want van het bord valt weinig interesse en interactie te verwachten. Richt je tot individuele luisteraars, zoek oogcontact en praat niet uitsluitend voor de docent. Het publiek bestaat uit je medestudenten. Spreek luid en duidelijk, maar zonder te forceren. Onduidelijk gemompel, snel en zacht praten en voorlezen versterken de indruk van onzekerheid. Oriënteer je vooraf op de zaal. Hoeveel borden zijn er ter beschikking, is er een overheadprojector, werken de computerfaciliteiten/beamer en is het de bedoeling dat die gebruikt worden? Plan van tevoren goed hoe deze audiovisuele hulpmiddelen worden ingezet. Plan precies wat er gezegd wordt en wat wordt opgeschreven en markeer dit in je manuscript. Zinnen op het bord moeten volledig uitgeschreven en grammaticaal correct zijn. Dat is vermoeiend en tijdrovend. Strategisch ingezette symbolische notatie kan verhelderend werken. Maar hier geldt ook dat overdaad schaadt. Persoonlijk heb ik een hekel aan logische operatoren als 'en/of/niet' en aan opeenhopingen van kwantoren.

Gebruik figuren en schetsen met overleg. Een goede figuur zegt soms meer dan vele regels tekst. Veel mensen zijn visueel ingesteld en snappen een goede figuur sneller dan een paar regels tekst. Ontwerp de plaatjes van tevoren. Wat moet de figuur duidelijk maken? Welke informatie hoort erin? Welk gezichtspunt kies je? Hoeveel plaats heeft de figuur nodig en waar begin je zodat alles op het bord past? Teken netjes en precies.

Bij schrijven op een schoolbord is een leesbaar handschrift belangrijk. Vooral bij formules is het belangrijk dat symbolen duidelijk en ondubbelzinnig zijn. Een α mag niet op een a lijken, een z moet te onderscheiden zijn van een 2 , een ξ en een ζ moeten duidelijk verschillen, een l kan snel op een e lijken, een Σ is geen zigzaglijn. Bij een schoolbord hoort een ongemarkeerde schrijfrichting. Die loopt horizontaal van links naar rechts en niet schuin naar boven of beneden. Breukstrepen bevinden zich op dezelfde hoogte als het = teken. Een karakteristiek handschrift is zeker mooier dan kinderlijke blokletters, maar die

zijn altijd nog te prefereren boven een onleesbaar gekrabbel. Voor artsen mag het voldoende zijn dat ze hun eigen handschrift kunnen lezen, maar voor een spreker op een seminarium telt alleen het publiek.

Naar mijn mening moet een wiskundige voordracht voor het schoolbord plaatsvinden. Overhead sheets zijn alleen bij hoge uitzondering toegestaan en dan alleen als snelle illustratie. Ze zijn zeer geschikt voor samenvattingen, om tussenresultaten te presenteren voor later gebruik, of om complexe plaatjes of grafieken snel weer te geven. Sheets hebben het nadeel dat ze het publiek tot passiviteit verleiden:

- De ruimte wordt vaak verduisterd, omdat de sheets ander niet leesbaar zijn. Dit veroorzaakt bijna automatisch een slaapreflex bij veel toehoorders.
- Het meeschrijven vanaf sheets is veel lastiger. Dat komt omdat het menselijk oog problemen heeft zich om te stellen van sheet naar donker papier. Verder staat er vaak teveel informatie op sheets en is er te weinig tijd om alles over te schrijven. Als er sheets worden getoond is de eerste reactie van het publiek vaak dat pennen worden neergelegd.

Met sheets kun je informeren, maar niet argumenteren. Gebruik je ze toch, dan gelden de volgende gedragsregels:

- Gebruik weinig sheets en laat ze zo lang mogelijk liggen.
- Een sheet mag niet teveel tekst bevatten en moet in juiste volgorde worden besproken.
- Het schrift op een sheet moet nog duidelijker zijn dan op het bord. Let bij gedrukte tekst op het lettertype. Schreefloze (sans serif) lettertypen zijn beter leesbaar dan bijvoorbeeld Times. Een zinvolle toepassing van kleuren kan de leesbaarheid enorm ten goede komen.
- Nooit mag een deel van de sheet worden afgedekt en dan in de loop van het verhaal zichtbaar gemaakt worden. Het papier waarmee dat gebeurt ligt vaak scheef en heeft de neiging om op de grond te vallen. Dat leidt in ieder geval tot onrust.
- Op een sheet mag alleen tekst staan die tijdens de lezing wordt gebruikt.
- Het is onhoffelijk om sheets te hergebruiken die voor andere doeleinden hebben gediend. Een sheet moet voor elke voordracht weer opnieuw zo gemaakt worden als hij wordt gebruikt.
- Sheets moeten in de taal van de voordracht zijn gesteld. Het gebruik van Engelstalige sheets tijdens een anderstalige le-



A Serious Man, Copyright 2009, Focus Features

zing is helaas een toenemende onhebbelijkheid.

De rol van overhead sheets is inmiddels grotendeels overgenomen door Power Point presentaties. Deze beamerpresentaties hebben dezelfde problemen als sheetpresentaties, en daarnaast nog meer: de spreker is helemaal aan het medium gebonden en kan fouten niet meer corrigeren of flexibel op vragen vanuit het publiek reageren. Beamerpresentaties zijn dan ook principieel verboden, tenzij er zeer goede redenen zijn. Maar die kan ik mij nauwelijks voorstellen.

Als je nog niet eerder een lezing in deze vorm hebt gehouden dan loont het zeker de moeite om te oefenen voor een lege zaal, of liever nog, voor iemand die feedback kan geven. Hierdoor kun je een gevoel krijgen voor de hoeveelheid tijd die nodig is. Verder is het goed om je eigen stem te horen en om beweringen een keer duidelijk hardop te formuleren. Een proeflezing geeft meer zekerheid en kan plankenkoorts verminderen. Na een proeflezing moet het manuscript altijd kritisch worden herzien.

Spreek ongedwongen! Dat is een grote uitdaging en tegelijk een moeilijke hindernis die zelfs docenten niet altijd nemen. Dit vergt natuurlijk oefening. Maar neem je in ieder geval voor het te proberen. Belangrijk is natuurlijk dat je inhoudelijk goed bent voorbereid. Er kunnen altijd stukken zijn waarover je je onzeker voelt, maar het is belangrijk dat deze

onzekerheid binnen de perken blijft, dat je niet van je apropos raakt. Het voordeel van het herhaald herschrijven van het manuscript (je wil ten slotte een optimale presentatie geven) is dat je na verloop van tijd waarschijnlijk de halve voordracht uit het hoofd kent. Dit is geen doel op zich. Het is belangrijker om het overzicht te bewaren, om op elk moment te weten waar je bent en waar je heen wil. Het publiek moet daar trouwens ook geregeld aan herinnerd worden. Denk na over de volgende vraag: Hoe moet een volledig onvoorbereid publiek een lezing begrijpen als de spreker zelfs na uitvoerige voorbereiding niet buiten zijn manuscript kan? Er is niets op tegen om lange berekeningen met een blik in het manuscript te controleren, of om stellingen met ingewikkelde voorwaarden over te schrijven. Probeer echter de bewijzen ongedwongen te formuleren en gebruik het manuscript meer als leidraad. Een goed begin is om het manuscript geregeld neer te leggen. Niets is minder inspirerend dan eerst een bewijs over te schrijven en vervolgens met de rug naar het publiek te gaan bedenken waarom de opgeschreven argumenten nu eigenlijk kloppen. Alle begin is moeilijk. Als je je zekerder voelt met een stuk papier in de hand, probeer het dan steeds vaker weg te leggen. Je zult merken: dat werkt bevrijdend.

Nabespreking

Eigenlijk zou er na de voordracht gelegen-

heid moeten zijn om inhoudelijk en over de vorm te discussiëren en te reflecteren, maar daar is niet altijd voldoende tijd voor. Sommige docenten willen fouten en kritiekpunten ook niet in het openbaar bespreken. Probeer in ieder geval feedback te krijgen over manier van voordracht, bordgebruik etcetera en spreek medestudenten en begeleiders hierop aan. Alleen zo kun je toekomstige lezingen verbeteren.

Na de voordracht is het seminarium nog niet voorbij. Volg de lezingen van je medestudenten opmerkzaam en probeer daar iets van te leren. Begrijp je iets niet, wees dan niet bang het te vragen. Denk aan de hoofdregel. Nu zijn alleen de rollen omgedraaid en ben je onderdeel van het publiek, de lezing wordt nu voor jou gehouden. Zie niet af van vragen uit misplaatste solidariteit tegenover je medestudenten. Het begrip van de wiskunde staat centraal en niet de schijnwinst op korte termijn. Alleen zo is een seminariumvoordracht geen slechte theatervoorstelling waarbij publiek, spreker en docent naar het einde smachten. Natuurlijk beperk je je niet tot het volgen van het voorgeschreven minimale aantal lezingen. Hopelijk heeft de lezing je zoveel voldoening gebracht dat je steeds weer opnieuw de uitdaging van nieuwe onderwerpen wil aangaan. Veel succes en veel plezier! ➡

Vertaling: Hans Melissen

Hans van Maanen

Fokke Simonszstraat 92

1017 TK Amsterdam

hans@vanmaanen.org

Maatschappij

Worden baby's door ooievaars gebracht?

De statistici onder ons worden er op feestjes vast dikwijls mee geconfronteerd: het wijdverbreide misverstand dat de toename van het ene fenomeen wordt verklaard door de gelijktijdige toename van iets anders. Een klassiek voorbeeld wordt in dit artikel ontzenuwd door wetenschapsjournalist Hans van Maanen.

De klassieke manier om studenten duidelijk te maken dat er een verschil is tussen een statistisch verband en een oorzakelijk verband maakt gebruik van ooievaars en baby's. Als er in een dorp meer ooievaars komen en het aantal geboorten gaat eveneens omhoog, dat betekent dat nog niet dat ooievaars de baby's brengen. Er is slechts sprake van correlatie, niet van causaliteit.

Het voorbeeld duikt, voor zover valt na te gaan, het eerst op in het invloedrijke Amerikaanse statistiekboek van Box, Hunter en Hunter, *Statistics for experimenters*, gepubliceerd in 1978 [2]. Meteen op pagina 8 waarschuwen de auteurs tegen het verwarren van correlatie en causaliteit en geven zij een 'plot van de bevolking van Oldenburg aan het eind van het jaar afgezet tegen het aantal waargenomen ooievaars in dat jaar, 1930–1936', hier weergegeven als figuur 2.

Oldenburg is een stadje in Noord-Duitsland. Als bronnen geven de schrijvers de *Ornithologische Monatsberichte* 44 (1936) en 48 (1940) en het *Statistisches [sic] Jahrbuch Deutscher Gemeinde* 27–33 (1932–1938). Het voorbeeld

en de grafiek zijn inmiddels gereproduceerd door andere leerboeken, en het thema wordt bijna achteloos en vanzelfsprekend gebruikt in talloze artikelen en statistiekboeken [2, 7], die op hun beurt ook weer achteloos en vanzelfsprekend worden geciteerd. Dat geeft ons genoeg reden om dit voorbeeld eens precies na te lopen.

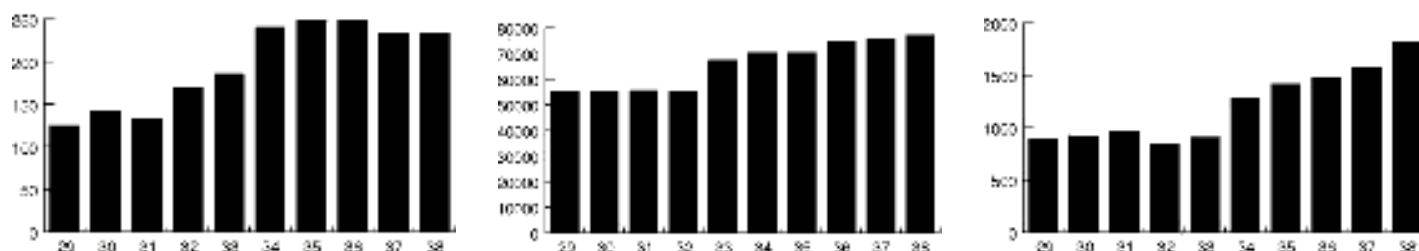
De artikelen in de *Ornithologische Monatsberichte* zijn van de hand van Ernst Schüz van de Vogelwarte Rossitten. Het is meteen al onduidelijk waarom het eerste artikel, uit 1936, wordt genoemd: het tweede artikel, 'Bewegungen im Bestand des Weissen Storchs seit 1934', bevat alle relevante gegevens en wat verbeteringen ten opzichte van het eerste. Het *Statistisches Jahrbuch* is een jaarlijkse productie van het Duitse bureau voor statistiek; tot 1934 heette het *Statistisches Jahrbuch Deutscher Städte*.

De grafiek van figuur 2 is lastig te interpreteren. In de eerste plaats is de hypothese niet dat ooievaars inwoners brengen, maar dat zij baby's brengen. Hiermee wordt de oorspronkelijke theorie in het geheel niet ge-

toetst. In de tweede plaats spreekt het artikel van Schüz over 'nestparen' en niet over 'ooievaars'. Dat maakt natuurlijk geen verschil in de correlatie, maar het is onduidelijk waarom de Amerikaanse auteurs het aantal ooievaars in Oldenburg halveren. In de derde plaats loopt de tabel die Schüz geeft van 1928 tot 1939, niet van 1930 tot 1936, en het is, al-



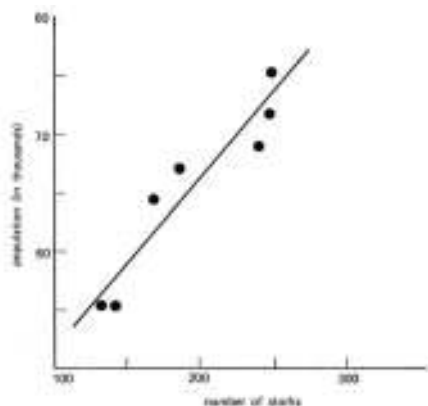
Ooievaar van glas door Ed Haasbroek (www.glasblazerijhaasbroek.nl)



Figuur 1 Aantallen ooievaarsparen (links), inwoners (midden) en geboorten (rechts) in Oldenburg (1929–1938)

weer, onduidelijk waarom hier data zijn weggegooid.

In de vierde plaats is het goed om, voordat er een correlatie wordt vastgesteld, de afzonderlijke gegevens te bekijken. In figuur 1, geven wij links de tabel van Schüz, voor het gemak als staafdiagram, in het midden de aantallen inwoners van Oldenburg uit de oude



Figuur 2 Het verband volgens Box et al.

statistische jaarboeken. Van 1928 waren de inwonertallen niet meer te achterhalen, vandaar dat we beginnen bij 1929. In beide bestanden lijkt een duidelijke cesuur op te treden rond 1934, en dan is een lineaire regressie misschien niet zo geschikt. Die breuk blijft enigszins verborgen in de data van alleen 1930 tot 1936, en al helemaal in een regressieanalyse. De sprong in aantallen ooievaarsparen is raadselachtig, zoals Schüz zelf ook zegt in zijn artikel. Maar hij voegt eraan toe dat ook elders in Duitsland de ooievaarspopulaties nog wel eens met horten en stoten groeien en slinken.

De plotse groei in het aantal inwoners in 1934 is eenvoudiger, maar onprettiger te verklaren. De nazi's waren toen net een paar maanden aan de macht, en om hun vernietigingsmachine zo efficiënt mogelijk te laten draaien, organiseerden zij alvast in juni 1933 een Volkszählung. Dit leidde in Oldenburg tot een bovenwaartse correctie van ongeveer 12000 inwoners.

Vóór 1933 waren de bevolkingsaan-

tallen van Oldenburg stabiel terwijl de ooievaarspopulatie groeide, na 1933 groeide de bevolking maar bleef de ooievaarspopulatie stabiel. Doordat Box en zijn co-auteurs alleen de correlatie en de regressielijn tonen, en alleen de zes datapunten van 1930 tot 1936, wordt de argeloze lezer op het verkeerde been gezet. Het voorbeeld, beschouwd als grappig en aansprekend, hoort op deze manier verteld eigenlijk in geen enkel statistiekboek thuis.

Voor de volledigheid geeft het rechter diagram in figuur 1 het aantal geboorten in Oldenburg van 1929 tot 1939. Het aantal baby's steeg sterk na 1933 door het aanmoedigingsbeleid van het regime. Met ooievaars had het inderdaad bitter weinig te maken.

Dankwoord

Met dank aan Klaus Wodarzik van de Statistikstelle Oldenburg.

Referenties

- G.E.P. Box, W.G. Hunter en J.S. Hunter (1978), *Statistics for Experimenters: An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, New York: John Wiley, p. 8
- G.V. Glass (1984), *Statistical Methods in Education and Psychology*, New York: Prentice-Hall, pp. 104–105
- R.D. De Veaux, P.F. Velleman en D.E. Bock (2006), *Intro Stats*, Boston: Pearson, p. 153
- T. Höfer, H. Przyrembel en S. Verleger (2004), 'New evidence for the theory of the stork', *Paediatric and perinatal epidemiology* **18**(1), pp. 88–92
- R.M. Matthews (2000), 'Storks deliver babies ($p = 0.008$)', *Teaching statistics* **22**(2), pp. 36–38
- S. Wirth (2000), 'King Kong, storks and birth rates', *Teaching statistics* **25**(1), pp. 29–32
- H. Sies (1988), 'A new parameter for sex education', *Nature* **332**(6164), p. 495

Henk Broer

Johan Bernoulli Instituut voor Wiskunde en Informatica
 Rijksuniversiteit Groningen
 Postbus 407
 9700 AK Groningen
 h.w.broer@rug.nl

Boekbespreking Mark Levi: *The Mathematical Mechanic*

Using physical reasoning

Op het vruchtbare grensvlak tussen wis- en natuurkunde ontstaan reeds millennia lang diepe inzichten. Henk Broer bespreekt een boek waarin Mark Levi natuurkundige oplossingen geeft voor wiskundige problemen.

*La Meccanica è il paradiso
 della scienze matematiche,
 perché con quella si viene
 al frutto matematico*

Leonardo da Vinci

Veel van de wiskunde die wij kennen is ontwikkeld in nauwe samenhang met natuurkunde, waarbij later ook allerlei andere toepassingsgebieden werden gevonden of waarbij onderdelen in de zuivere wiskunde zijn beland. In ieder geval geldt deze sterke samenhang voor calculus, waarbij we natuurlijk niet voorbij kunnen gaan aan Newton. De traditie om wiskundige uitspraken af te leiden via natuurkundige inzichten, zoals de balanswetten, gaat al terug op Archimedes.

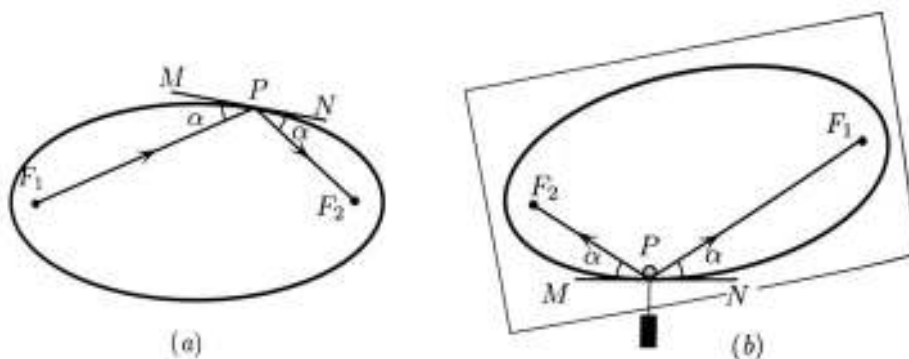
Ook na Newton is het grensvlak van wiskunde en natuurwetenschappen zeer vruchtbaar gebleken [5]. Vaak is dat eenrichtingsverkeer in de zin dat men toepassingen vindt van wiskunde in de natuurwetenschappen en de benodigde wiskunde verder ontwikkelt. Veel ideeën worden echter geboren uit een fysisch inzicht, waarbij de waarheid geopenbaard wordt op een heuristische manier en vaak niet met een schools bewijs. Het hier besproken boek gaat over natuurkundige oplossingen van wiskundige problemen en het geeft hiervan een groot aantal voorbeelden. Het is onderhoudend geschreven en zeer geschikt voor ieder die wel eens wis- en natuurkundige onderwerpen doceert. De mechanica, de optica, de theorieën van elektrische netwerken en eenvoudige vloeistofmechanica leveren geschikte contexten waarbinnen

allerlei wiskundige uitspraken kunnen worden ingezien. Dit betreft veel meetkundige stellingen zoals die van Pythagoras en Ceva, maar ook de stelling van Gauß-Bonnet aan de hand van de beweging van een fiets, en de complexe getallen eenvoudig(er) ingevoerd via vlakke vloeistofstromingen, de Cauchy Integraalformule inclusief. Verder worden calculus formules zoals de som van Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

en enige integraalformules uit de natuurkunde tevoorschijn getoverd. De appendix bevat een overzichtelijke weergave van de benodigde natuurkunde betreffende koppels, spanning, veren, slingers, traagheidsmomenten, elektrische stroom, etcetera.

Laat mij, ter bepaling van de gedachten, iets vertellen over de optica zoals die in het boek behandeld wordt. Hierin postuleert men het principe van Fermat dat zegt dat een lichtstraal tussen twee punten (lokaal) het pad van de kortste tijd volgt. Hieruit volgen de bekende kaatsings- en brekingwetten (respectievelijk Hero van Alexandrië en Snellius). Over dit principe geeft het boek een interessante discussie weer, onder meer verwijzend naar Feynman [4]: Wat gebeurt er met al die andere lichtstralen die vanuit een puntbron vertrekken en wat is de relatie met golffronten? Aardig is ook het voorbeeld van de ellips waarin alle lichtstralen vanuit één der brandpunten convergeren naar het andere. In Figuur 1 wordt deze situatie geschetst, waarbij links de optische eigenschap wordt weergegeven



Figuur 1 Een figuur uit het besproken boek. Links de optische eigenschap en rechts een analyse vanuit de mechanica.

to solve problems

en rechts een mechanische tegenhanger die het mogelijk maakt de kaatsingswet te controleren. Dat laatste kan als volgt. Stel je voor dat we twee spijkers F_1 en F_2 in een verticaal vlak slaan en dat we een katrol-met-gewicht laten rollen langs een koord als aangegeven. Door de ellips geschikt te draaien kunnen we zorgen dat het gekozen punt P het laagste punt is zodat de raaklijn horizontaal is. Als we de katrol naar links of rechts bewegen, terwijl het koord strak blijft, dan beschrijft de katrol de ellips: dit is precies de bekende tuinmanseigenschap. Nu kunnen we inzien waarom het koord gelijke hoeken maakt met raaklijn, immers de drie krachten (de twee spanningen en het gewicht) die op de katrol werken moeten in evenwicht zijn en in het bijzonder is daarom de netto horizontale kracht gelijk aan nul, waaruit het gestelde eenvoudig volgt.

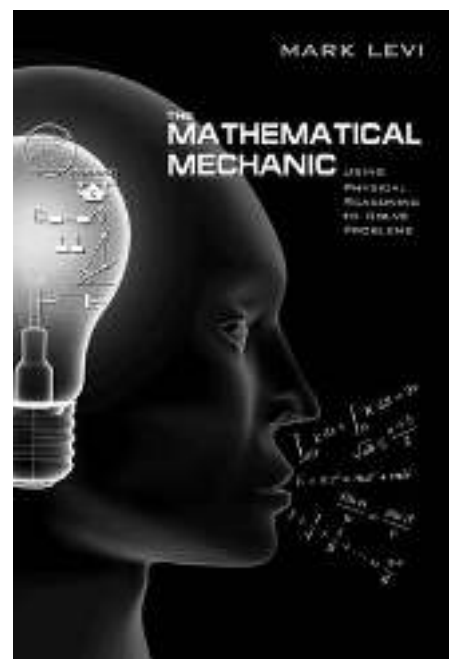
Een dergelijk bewijs zou natuurlijk ook gegeven kunnen worden met nogal wat analytische meetkunde, door de auteur bestempeld als een 'finger breaking calculation'. Mark Levi nodigt zijn lezers uit om zelf het arsenaal van voorbeelden verder uit te breiden en geeft hiertoe in de tekst een groot aantal vraagstukken en andere uitdagingen. Eigenlijk houdt hij ons een manier van kijken voor die enerzijds

amusant is, maar die anderzijds ook tot een beter en wellicht 'dieper' inzicht in de wiskundige materie kan leiden. Ik moest hierbij denken aan de Johann Bernoullilezing die Robert Dijkgraaf in 2003 te Groningen hield onder de titel "The unreasonable effectiveness of physics in mathematics" [3], een persiflage op het inmiddels klassieke artikel van Eugene Wigner [5].

In deze tijden zijn op het vwo de banden tussen de wiskunde en de natuurkunde op betreurenswaardige wijze doorgesneden, in mijn ogen als onderdeel van een veel bredere demathematiserings-trend [1–2]. Dit alles tot verdriet van velen en gelukkig zijn er discussies gaande om het tij enigszins te doen keren. Het onderhavige boek biedt in deze situatie een welkom soelaas. Als gezegd is het onderhoudend geschreven met veel humor en het is zeer geschikt voor ieder die wel eens doceert over de besproken of verwante onderwerpen; in het bijzonder denk ik ook aan leraren wis- of natuurkunde op het vwo. Wellicht een goed idee om een Nederlandse vertaling op de markt te brengen. 

Dankwoord

Met dank aan Ferdinand Verhulst en Gert Vegter voor zinnige discussie.



Mark Levi, *The Mathematical Mechanic: Using Physical Reasoning to Solve Problems*, 2009, 196 pp., ISBN-13: 978-1-4008-3047-3, € 14

Referenties

- 1 H.W. Broer, 'Computergebruik en demathematisering', *Nieuw Arch. Wisk.* **8** (3) (2007), pp. 201–206.
- 2 H.W. Broer, 'Kenteringen?', *Nieuw Arch. Wisk.* **9** (3) (2008), p. 3.
- 3 R.H. Dijkgraaf, 'The unreasonable effectiveness of physics in mathematics', Johann Bernoulli-lezing, Groningen, 2003. Zie <http://bernoulli.math.rug.nl/vorige.php>
- 4 R.P. Feynman, *QED*, Princeton University Press 1985.
- 5 E. Wigner, 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Communications in Pure and Applied Mathematics* **13**(1) (1960), pp. 1–14.

Jan Hogendijk

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

3508 TA Utrecht

J.P.Hogendijk@uu.nl

Geschiedenis

Lijfrentes in de zeventiende en achttiende eeuw

Is het financiële product nu winstgevend voor de koper of de verstrekker? Welke berekening ligt eraan ten grondslag? Jan Hogendijk legt uit hoe het product lijfrente vanaf de zeventiende eeuw werd toegepast, en in welke mate de wiskunde erachter toentertijd werd doorgrond.

Geld speelt in de geschiedenis van de wiskunde een belangrijke rol. In de Renaissance bleken de Hindoe-Arabische cijfers het beste systeem te zijn voor het rekenen met grote sommen geld. Sindsdien worden deze cijfers in de Westerse cultuur gebruikt. In de eeuwen daarna leidden geldzaken tot interessante problemen, die met wiskunde doeltreffender opgelost konden worden dan zonder wiskunde. De berekening van lijfrentes is hiervan een mooi voorbeeld. Belangrijke basisideeën zijn in de zeventiende en achttiende eeuw ontwikkeld, onder meer door Nederlandse wiskundigen, met methodes die niet uitgaan boven het niveau van het huidige VWO. Het nu volgende historische verhaal kan wellicht de interesse wekken van leraren, leerlingen en anderen voor een toepassingsgebied van de wiskunde dat actueler is dan ooit.

Al sinds de dertiende en veertiende eeuw probeerden overheden (zoals steden) in het huidige Nederland en Vlaanderen aan geld te komen door het op de kapitaalmarkt te lenen. Voor het lenen van het geld betaalden de overheden een vergoeding. Daarbij waren twee systemen in gebruik [1].

Losrentes

In het systeem van 'losrentes' betaalde de overheid elk jaar een constant rentepercentage,

bijvoorbeeld 4 procent, van het geleende kapitaal. Om een jaarlijkse uitkering van 1000 gulden rente te krijgen moest een persoon, die we in de rest van het verhaal Jantje zullen noemen, 25.000 gulden aan de overheid uitlenen. Dit systeem was ook in de handel gebruikelijk. Deze rente moest elk jaar weer betaald worden, en de enige manier om hiervan af te komen was door het aflossen van het hele beginkapitaal. Dit aflossen kon in één keer gebeuren maar ook in gedeelten, en zo ontstond een wiskundig probleem, dat aan het eind van de zestiende eeuw werd opgelost.

Als Jantje een beginkapitaal inlegt en de overheid bijvoorbeeld 30 jaar lang elk jaar een rente en aflossing van totaal 1000 gulden uitbetaalt, waarna het beginkapitaal helemaal afgelost is, hoeveel was dan dit beginkapitaal, als we uitgaan van een losrente van 4 procent per jaar en samengestelde interest? De oplossing berust op de volgende gedachte. Als de overheid over één jaar 1000 gulden moet uitbetalen, dan moet zij nu beschikken over $100/104 \times 1000$ gulden, dat is afgerond 961 gulden en 11 stuivers. Dit bedrag heet de contante waarde van een uitkering van 1000 gulden over één jaar. Over twee jaar moet weer 1000 gulden worden betaald: de contante waarde van deze uitkering is $(100/104)^2 \times 1000 = 924$ gulden en 11

stuivers. Het beginkapitaal is de som van de contante waarden van alle 30 uitkeringen. We vinden hiervoor c maal 1000 gulden met $c = (100/104) + (100/104)^2 + \dots + (100/104)^{30}$, afgerond 17.292 gulden. Wij kunnen c gemakkelijk uitrekenen met behulp van de somformule voor een eindige meetkundige rij, in moderne notatie $c = (x - x^{31})/(1 - x)$ met $x = 100/104$. Aan het eind van de zestiende eeuw was deze methode wel beschreven in sommige boeken (bijvoorbeeld de *Elementen* van Euclides), maar lang niet bij alle rekenmeesters bekend, en meestal werden de 30 machten gewoon uitgerekend en gesommeerd. Ook werden ertabellen aangelegd met de resultaten van zulke berekeningen (vaak als bedrijfsgeheim) zodat met de cijfers gemanipuleerd kon worden. Om een eind te maken aan deze praktijken publiceerde Simon Stevin (1548–1620) in 1582 rentetabellen. Zie Tabel 1 voor zijn Tafel van Interest voor een rente van 4 procent per jaar [2].

Bij jaar n staat in kolom I de (afgeronde) contante waarde van een uitkering van 10.000.000 gulden na n jaar en in kolom II de som van de contante waardes van n uitkeringen van 10.000.000 gulden waarvan de eerste na 1 jaar wordt uitbetaald, de tweede na 2 jaar, enzovoort, tot en met de laatste na n jaar. De contante waarde van een uitkering van a guldens na 30 jaar krijgen we door het desbetreffende getal 3.083.185 in de tabel te vermenigvuldigen met a en het product te delen door 10.000.000.

Lijfrentes

Wiskundig interessanter is het tweede systeem dat door overheden gebruikt werd om geld te lenen: de lijfrente. Jantje legde een beginkapitaal in en wees iemand aan ('het lijf'), meestal een jong kind. De overheid betaalde dan rente aan Jantje of zijn nabestaanden, of eventueel aan een andere persoon die door Jantje werd aangewezen, zolang het lijf leefde. Men kon tegen een hogere inleg ook lijfrentes sluiten op twee lijven, waarbij de rente doorliep totdat beide lijven waren overleden. Het systeem van lijfrentes kon aantrekkelijk zijn voor Jantje, omdat hij een hogere rente ontving, en ook voor de overheden, omdat op een gegeven moment de verplichtingen ophielden zonder dat het beginkapitaal hoefde te worden afgelost.

In het begin werd het verband tussen inleg en uitkering bepaald met natte-vingerwerk. Meestal was de inleg laag, met als waarschijnlijk gevolg dat de overheden op langere termijn in financiële problemen kwamen. Het was een normale zaak om met 10.000 gulden inleg (op één lijf) een jaarlijkse lijfrente van 1000 gulden te krijgen. Vanaf 1670 werd over dit onderwerp gecorrespondeerd door Christiaan Huygens (1629–1695), Johannes Hudde (1628–1704), en de eerste hoofdpersoon van dit verhaal: Johan de Witt (1625–1672), sinds 1653 raadspensionaris van Holland.

Johan de Witt

De oudste theoretische analyse van lijfrentes is Johan de Witt's pamflet *Waerdije van lijfrenten naar proportie van Los-renten* uit 1671. Omdat er oorlog dreigde, hadden de Verenigde Nederlanden veel geld nodig. Daarom werden lijfrentes uitgegeven, en De Witt wilde nagaan wat het tarief moest zijn. Zijn pamflet is in de zeventiende eeuw niet wijd verspreid, maar het was in de achttiende eeuw wel bekend onder deskundigen [3].

De Witt gaat uit van de volgende aannames. De losrente is 4 procent per jaar, en Jantje wil op het lijf van een kind dat nu precies 3 jaar is, een lijfrente sluiten die per jaar 1.000.000 gulden oplevert. Dit bedrag moet uitbetaald worden in twee halfjaarlijkse termijnen zoals destijds gebruikelijk was. Als Jantje nu 25.000.000 gulden zou inleggen [4], zou er tot in eeuwigheid elk jaar 1.000.000 gulden rente kunnen worden uitbetaald. Voor de lijfrente zal Jantje dus in elk geval fors minder hoeven te betalen dan 25.000.000 gulden. De Witt komt uit op een bedrag van 16.110.607 gulden. Dit betekent dat Jantje voor een jaarlijkse rente-uitkering van a gulden in twee halfjaarlijkse termijnen



Figuur 1 Johan de Witt (1625–1672)

iets meer dan $16a$ gulden zou moeten inleggen. Het natte-vinger bedrag van $10a$ was dus in elk geval zeer nadelig voor de overheid.

De redenering van De Witt is als volgt. Als het kind $3\frac{1}{2}$ jaar geworden is, moet er 500.000

gulden, dat is 10.000.000 stuivers, worden uitgekeerd. Dit leidt tot de vraag, hoeveel geld we nu op rente moeten zetten om over een half jaar 10.000.000 stuivers te kunnen uitkeren, bij een rente van 4 procent per jaar.

Jr	I	II	Jr	I	II	Jr	I	II
1	9.615.385	9.615.385	11	6.495.808	87.604.757	21	4.388.335	140.291.574
2	9.245.562	18.860.947	12	6.245.969	93.850.726	22	4.219.553	144.511.127
3	8.889.963	27.750.910	13	6.005.739	99.856.465	23	4.057.262	148.568.389
4	8.548.041	36.298.951	14	5.774.749	105.631.214	24	3.901.213	152.469.602
5	8.219.270	44.518.221	15	5.552.643	111.183.857	25	3.751.166	156.220.768
6	7.903.144	52.421.365	16	5.339.080	116.522.937	26	3.606.890	159.827.658
7	7.599.177	60.020.542	17	5.133.731	121.656.668	27	3.468.163	163.295.821
8	7.306.901	67.327.443	18	4.936.280	126.592.948	28	3.334.772	166.630.593
9	7.025.866	74.353.309	19	4.746.423	131.339.371	29	3.206.512	169.837.105
10	6.755.640	81.108.949	20	4.563.868	135.903.239	30	3.083.185	172.920.290

Tabel 1 Stevins Tafel van Interest van 4 ten 100

Men zou kunnen zeggen: 4 procent per jaar is 2 procent per half jaar, dus het benodigde bedrag is $100/102 \times 10.000.000 = 9.803.921$ stuivers. Sinds het eind van de zestiende eeuw was al bekend dat dit antwoord fout is als men met samengestelde interest rekent, omdat $\frac{100}{102} \times \frac{100}{102}$ niet hetzelfde is als $\frac{100}{104}$. Het goede antwoord is $\sqrt{\frac{100}{104}} \times 10.000.000 = 9.805.807$ stuivers. Vier procent rente per jaar blijkt ongeveer gelijk te zijn aan 1,98 procent rente per half jaar. Om de tweede uitkering van 10.000.000 stuivers over één jaar te kunnen doen, moeten we nu beschikken over $100/104 \times 10.000.000 = 9.615.385$ stuivers, dat is het eerste getal in de tabel van Simon Stevin. Om het hele eerste jaar te dekken hebben we nu dus nodig: $9.805.807 + 9.615.385 = 19.421.192$ stuivers, uitgaande van de veronderstelling dat het kind op zijn of haar vierde verjaardag nog leeft. Op dezelfde manier kunnen we uitrekenen hoeveel we nu op 4 procent rente moeten uitzetten om 10.000.000 stuivers te kunnen uitbetalen op het moment dat het kind $79\frac{1}{2}$ jaar wordt, namelijk $(\frac{100}{104})^{\frac{153}{2}} \times 10.000.000$. De Witt vindt hiervoor 497.679 stuivers.

In de eerste helft van de zeventiende eeuw was het begrip kans ontwikkeld in verband met dobbelspelen. Christiaan Huygens had hier in 1657 een standaardwerkje over geschreven, en rond 1669 introduceerde hij kansen ook op het gebied van leven en sterven [5]. De aanleiding hiervoor was het verschijnen van een primitieve sterftetabel in Londen, waarop we later terugkomen. De Witt gaat in zijn pamflet verder met deze nieuwe toepassing van kansrekening. Zijn uitleg is niet helemaal duidelijk, omdat hij geen onderscheid maakt tussen voorwaardelijke en onvoorwaardelijke kansen [6], maar zijn berekening berust in moderne termen op het volgende model. Hij neemt aan dat het kind voor zijn tachtigste verjaardag zal overlijden. Dan zal precies één van de volgende 154 gebeurtenissen optreden. 1: het kind overlijdt voordat het 3,5 jaar oud is; 2: het kind wordt 3,5 jaar oud, maar het overlijdt voordat het 4 jaar oud wordt; et cetera., tot gebeurtenis 154: het kind wordt 79,5 jaar oud, maar het overlijdt voordat het 80 jaar oud wordt. De Witt kent aan elk van deze gebeurtenissen kansen toe, en hij onderscheidt daarbij vier perioden in het menselijk leven: van 3 tot 53 jaar, van 53

tot 63 jaar, van 63 tot 73 jaar, en van 73 tot 80 jaar. Als twee van de 154 gebeurtenissen in dezelfde periode liggen, hebben zij gelijke kansen. De kansen op een gebeurtenis in de achtereenvolgende perioden verhouden zich volgens De Witt als $1 : \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$. Dit houdt in moderne termen in dat de kans op elk van de gebeurtenissen 1 tot en met 100 gelijk is aan $\frac{6}{768}$ ($=\frac{1}{128}$). De kans op elk van de gebeurtenissen van 101 tot en met 120, van 121 tot en met 140 en van 141 tot en met 154 is respectievelijk $\frac{4}{768}$, $\frac{3}{768}$, en $\frac{2}{768}$.

Bij elke gebeurtenis hoort een aantal uitkeringen, en de contante waarde van deze uitkeringen kan worden uitgerekend zoals hierboven. Bij gebeurtenis 1 is nu 0 stuivers nodig, bij gebeurtenis 2 zijn nu 9.805.807 stuivers nodig, bij gebeurtenis 3 is dit bedrag 19.421.192 stuivers, enzovoort. De Witt berekent nu in moderne termen de verwachtingswaarde van het beginkapitaal dat nodig is om alle uitkeringen te financieren. Dit getal is de som van de producten van de kans dat een gebeurtenis optreedt maal de contante waarde van alle uitkeringen die horen bij die gebeurtenis: $(0 + 9.805.807 + 19.421.192 + \dots + \frac{1}{3} \cdot 479.820.563)/128 = 40.964.113.736/128 = 320.032.139$ stuivers = 16.001.607 gulden. De inleg voor een lijfrente op het lijf van een kind van 3 jaar oud is dus volgens De Witt iets meer dan 16 keer de jaarlijkse uitkering.

Voordat het werk van De Witt in de Staten Generaal besproken werd, waren in april 1671 al lijfrentes uitgegeven, namelijk 700.000 gulden tegen de penning 14 voor één lijf (d.w.z. voor elke 14 gulden ingelegd kapitaal een jaarlijkse uitkering van 1 gulden), en 300.000 gulden tegen de penning 17 op twee lijven. De Witt toonde in zijn document dus aan, dat de eerste mogelijkheid in elk geval een voordelige zaak was voor de lijfrenteniers, die zelf het lijf konden uitkiezen waarop de lijfrente gesloten werd. De overheid zou daarom op den duur waarschijnlijk verlies leiden. Destijds maakte dit weinig indruk. In het rampjaar 1672 was veel meer geld nodig dan met lijfrentes binnengehaald kon worden, en er werden drastischer maatregelen genomen, zoals een extra belasting. De oorlogen begonnen inderdaad, en door de verliezen aan Nederlandse zijde ontstond een hetze tegen de broers Cornelis en Johan de Witt. Op 20 augustus 1672 werden zij gruwelijk vermoord [7].

De rekenmethode van Johan de Witt kan ook worden gebruikt om de inleg uit te rekenen als het lijf ouder is dan 3 jaar, en als de rentestand anders is. Moderne schrijvers hebben gesuggereerd dat zijn aannames over de kans om in een bepaald jaar te sterven onrealistisch zijn [8], en misschien gemotiveerd door de wens om een uitkomst te krijgen die niet te veel afweek van de gangbare praktijk en daardoor politiek acceptabel was [9]. Ik denk dat deze suggestie niet waarschijnlijk is, omdat De Witt geen illusies had over de overtuigingskracht van een wiskundige redenering. Hij zegt dat "... de dagelijkse ondervindinghe openbaer maeckt, dat veele Menschen of niet genegen of niet bequaem zijn haer begrip op eenige aen een geschaeckelde, al-hoewel onfeylbare raisonnementen, soodanigh te appliceren, dat zy de kracht van de selve te rechte kunnen vatten om daer door tot haer volkomen vergenoegen overtuycht te worden; en dat derhalve by haer de exempelen meer vermogen als alsulcke raisonnementen" [10]. Daarom heeft hij naar eigen zeggen ook een voorbeeld doorgerekend. Deze berekening is niet bewaard, maar we kunnen een indruk krijgen uit een soortgelijke berekening door Johannes Hudde, sinds 1672 burgemeester van Amsterdam. Tussen 1586 en 1590 waren te Amsterdam lijfrentes uitgegeven door de Regering van de Verenigde Provinciën, en Hudde had uit de registers een tabel samengesteld met de leeftijden van de (1495) lijven waarop de lijfrentes gesloten werden, en de periode dat elk lijf daarna nog leefde. De tabel is bewaard in een brief van Hudde aan Christiaan Huygens van 18 augustus 1671 [11]. Hudde kon dus uitrekenen hoeveel de inleg geweest had moeten zijn om in dit geval alle uitkeringen te financieren bij een rente van 4 procent. Voor de lijven van kleine kinderen bleek de hiervoor noodzakelijke inleg gemiddeld 18 maal de jaarlijkse uitkering te zijn. De berekening moet een gigantisch karwei geweest zijn [12].

Sterftetabellen

Ook in andere landen hield men zich aan het eind van de zeventiende eeuw met theorievorming over lijfrentes bezig. Om de kans te bepalen dat een mens in een bepaald levensjaar zou komen te overlijden, gebruikten sommigen een sterftetabel (ook wel eufemistisch 'tafel van levenskracht' genoemd). Een van de eerste sterftetabellen is in 1662 samengesteld door John Graunt (1620–1674), op basis van gegevens over geboorte en sterfte die in Londen waren verzameld, onder andere vanwege een dreigende pestepidemie [13] (zie Ta-

Jaar	0	6	16	26	36	46	56	66	76	86
In leven	100	64	40	25	16	10	6	3	1	0

Tabel 2 Sterftetabel uit 1662 door John Graunt

bel 2). Deze tabel was overigens bekend aan Christiaan Huygens.

In de tabel is te zien dat van 100 babies er gemiddeld 64 zes jaar oud zullen worden, 40 zestien jaar oud, et cetera. Graunts sterftetabel was grotendeels giswerk omdat in London niet werd geregistreerd op welke leeftijd mensen stierven. De leeftijden eindigen op 6 omdat men geïnteresseerd was in het aantal 'weerbare' mannen van 16 tot 56, die soldaat zouden kunnen worden.

Het samenstellen van een sterftetabel is niet eenvoudig. Men zou met een voldoende willekeurige populatie van bijvoorbeeld 1000 babies kunnen beginnen, en dan registreren hoelang elke baby leeft. Het duurt dan een eeuw totdat de sterftetabel klaar is. Daarom zocht men naar populaties die min of meer constant waren (geen immigratie en geen emigratie) en waar geen bijzondere gebeurtenissen zoals oorlogen en epidemieën plaatsvonden. Als het aantal geboortes en de leeftijd van de overledenen een paar jaar lang geregistreerd worden, kunnen de gemiddelden gebruikt worden voor een sterftetabel. In 1693 publiceerde de Engelsman Edmund Halley (1656–1742) een sterftetabel die hij op die manier had afgeleid uit bevolkingsgegevens uit de stad Wroclaw in Polen tussen 1687 en 1691. Halley begint met 1000 kinderen van één jaar oud en hij geeft bij elk volgend jaar het aantal dat nog in leven is (zie Tabel 3).

Met zo'n tabel berekende Halley de inleg voor lijfrentes op ongeveer dezelfde manier als Johan de Witt, wiens werk hij overigens niet kende. Als de lijfrente wordt afgesloten op de derde verjaardag van het lijf, is volgens Halley de kans dat dit kind op de vierde verjaardag nog leeft $\frac{760}{798}$, op de vijfde verjaardag $\frac{732}{798}$, et cetera. De berekening wordt daardoor moeizamer dan bij De Witt. Daarbij is het niet zeker dat een tabel voor Wroclaw ook gebruikt kan worden voor andere plaatsen en landen.

In 1725 vereenvoudigde Abraham de Moivre (1667–1754) de berekening door aan te nemen dat de getallen in een sterftetabel voor leeftijden boven 12 een lineaire functie van de leeftijd zijn. Dit betekent dat van een vaste beginpopulatie van lijven van twaalf jaar oud elk jaar gemiddeld hetzelfde aantal mensen zullen sterven. Bij De Witt was dit het geval voor lijven tussen 3 en 53 jaar. De berekening kan nu verder worden vereenvoudigd. We nemen aan dat de losrente $100i$ procent per jaar is (dus bij een rente van 4 procent geldt $i = 0,04$), en dat de maximumleeftijd ω is [14], en dat we een populatie van lijven hebben die nu hun $\omega - n$ -de verjaardag vieren, zodat ze nu nog maxi-



Figuur 2 Nicolaas Struyck (1687–1769)

maal n jaren kunnen leven tot de maximumleeftijd.

Om een jaarlijkse lijfrenteuitkering van a gulden te kunnen financieren moet nu een beginkapitaal beschikbaar zijn van a maal $\frac{n-1}{n}x^1 + \frac{n-2}{n}x^2 + \dots + \frac{1}{n}x^{n-1}$ waarbij x gegeven wordt door $x = 1/(1+i)$. Deze som kan na enige algebraïsche manipulaties eenvoudiger geschreven worden [15] als a maal $\frac{1}{i}(1 - \frac{1+i}{n}(1 - (1+i)^{-n}))$. De formule is mooi maar door latere auteurs weinig toegepast omdat de sterftetabellen in de praktijk niet voldoende lineair bleken te zijn.

Nicolaas Struyck

We komen nu bij de tweede hoofdpersoon van dit verhaal. Nicolaas Struyck (1687–1769) verdiende de kost als rekenmeester en onderwijzer in wiskunde en sterrenkunde te Amsterdam. Hij had een bijzondere belangstelling voor kansrekening, was goed op de hoogte van de buitenlandse literatuur op dit gebied, en had contacten met buitenlandse wiskundigen. Hij werd gekozen tot lid van de Royal Society in Londen en de Académie des Sciences in Parijs. Hij kende de sterftetabel van Halley maar besloot om zijn eigen sterfteta-

Jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	...
In leven	1000	855	798	760	732	710	692	680	...

Tabel 3 Sterftetabel uit 1693 door Edmund Halley

Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz
5	710	20	607	35	474	50	313	65	142	80	33
6	697	21	599	36	464	51	301	66	132	81	29
7	688	22	591	37	454	52	289	67	123	82	25
8	681	23	583	38	444	53	277	68	114	83	22
9	675	24	575	39	434	54	265	69	105	84	19
10	670	25	567	40	424	55	253	70	97	85	16
11	665	26	558	41	414	56	241	71	89	86	13
12	660	27	549	42	404	57	229	72	82	87	10
13	654	28	540	43	393	58	217	73	75	88	8
14	648	29	531	44	382	59	206	74	68	89	6
15	642	30	522	45	371	60	195	75	61	90	4
16	635	31	513	46	360	61	184	76	54	91	3
17	628	32	504	47	349	62	173	77	48	92	2
18	621	33	494	48	337	63	162	78	43	93	1
19	614	34	484	49	325	64	152	79	38	94	..

Tabel 4 Tafel van de Mannelyke uit 1740 door Nicolaas Struyck

Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz	Jaar	Perz
5	711	20	624	35	508	50	373	65	205	80	55
6	700	21	617	36	500	51	362	66	194	81	47
7	692	22	610	37	492	52	351	67	183	82	40
8	685	23	603	38	484	53	340	68	172	83	34
9	679	24	596	39	476	54	329	69	161	84	29
10	674	25	588	40	468	55	318	70	150	85	24
11	669	26	580	41	459	56	306	71	140	86	20
12	664	27	572	42	450	57	294	72	130	87	17
13	660	28	564	43	441	58	282	73	120	88	14
14	656	29	556	44	432	59	271	74	110	89	11
15	652	30	548	45	423	60	260	75	100	90	8
16	647	31	540	46	414	61	249	76	90	91	6
17	642	32	532	47	404	62	238	77	81	92	4
18	636	33	524	48	394	63	227	78	72	93	2
19	630	34	516	49	384	64	216	79	63	94	1

Tabel 5 Tafel van de Vrouwelyke uit 1740 door Nicolaas Struyck

bellen samen te stellen op basis van registers over lijfrentes die in 1672–1673 en 1686–1689 in Amsterdam waren uitgegeven, toen Hudde daar burgemeester was. Struyck had gegevens over 1670 lijven, en hij bekeek de gegevens over mannen en vrouwen apart. Hij ontdekte dat de levensduur van mannen en vrouwen verschilt, en dat dit verschil zo belangrijk is, dat het effect moet hebben in de berekening voor lijfrentes.

Struyck publiceerde de tabellen voor mannen en vrouwen in zijn *Aanhangsel op de Gissingen over den Staat van het Menschelyk Geslacht en de Uitrekening der Lyfrenten*, dat in 1740 verschenen is [16]. In de tabel met 876 “Vrouwsperzoonen” staat dat lijfrentes waren afgesloten op 77 lijven tussen 0 en 4 jaar, 110 tussen 5 en 9 jaar, etc. Van deze 77 meisjes tussen 0 en 4 jaar bereikten 72 de leeftijd van 5 jaar, 66 de leeftijd van 10 jaar, et cetera. Van de 110 meisjes tussen 5 en 9 jaar bereikten er 107 de leeftijd van 10 jaar, et cetera. Struyck

geeft een soortgelijke tabel van 794 Mansperzoonen. Toen hij in 1738 zijn tabellen opstelde waren er nog een paar lijven in leven, en daarvoor heeft hij de sterfdatum geschat. Uit deze twee tabellen leidde hij zijn sterftetabellen voor vrouwen en mannen af (zie Tabel 4 en Tabel 5). Daarna berekende hij nieuwe tarieven voor lijfrentes op mannelijke en vrouwelijke lijven. Een uittreksel hiervan staat in Tabel 6. Hier staat in de eerste rij de leeftijd van het lijf bij het begin van de lijfrente. In de tweede rij de inleg in guldens als het lijf een vrouw is, in de derde rij de inleg voor een mannenlijf, voor een jaarlijkse uitkering van 100 guldens en een ‘gewone’ rente van 2,5 procent per jaar. Het verschil in levensverwachting tussen mannen en vrouwen was in het eind van de zeventiende eeuw in Amsterdam nog niet bekend. Struyck zegt: “t Schynt dat de Menschen toen liever op jonge Kinderen van de mannelyke zoort lyfrenten namen, dan op de Vrouwelyke van de zelfde ouderdom; daar nogtans het

Leeftijd	5–9	10–14	15–19	20–24	25–29	30–34	35–39	...
Vrouw	1931	1840	1733	1630	1533	1438	1328	...
Man	1823	1714	1608	1504	1401	1291	1181	...

Tabel 6 Tarieven voor lijfrentes door Nicolaas Struyck

laatste voor de Koopers veel voordeliger is.”

In een eerder geschriftje, de *Uitrekening van de Lyfrenten* (1738) [17] behandelt Struyck de berekening van lijfrentes. Hij bespreekt eerst de methode van De Witt en vereenvoudigt deze door handig sommeren, zoals we hierboven hebben gezien bij De Moivre. Struyck legt de berekening van zijn eigen sterfte- en lijfrentetabellen nogal vaag uit, zonder details en voorbeelden. Het zou voor een wiskundestudent een interessant scriptieonderwerp zijn om na te gaan hoe Struyck zijn tabellen in de praktijk berekend heeft.

De vaagheid van Struyck was een welkome aanleiding voor zijn aartsvijand Willem Kersseboom (1691–1771), ook een grootheid op lijfrente-gebied, om Struyck te bekritisieren. Kersseboom publiceerde zelf een sterftetabel zonder onderscheid tussen mannen en vrouwen, die in de negentiende eeuw nog gebruikt is. Struyck reageerde niet op de kritiek, en zijn werk werd snel vergeten, maar in de twintigste eeuw is hij gerehabiliteerd [18].

Weduwenbeurs en woekerpolis

De meeste tijdgenoten van Struyck en Kersseboom hadden te weinig wiskundige kennis om het belang van hun werk te kunnen appreciëren. Natte-vingerwerk bleef de norm voor het berekenen van lijfrentes, en ook in andere financiële contracten die te maken hadden met levensduur. We bespreken twee amusante voorbeelden, die vermoedelijk voor de betrokkenen wat minder amusant waren.

Figuur 3 is onderdeel van een publicatie over weduwenbeursen, waarvan er in het jaar 1749 een groot aantal werd opgericht. De weduwenbeurs van Alkmaar is een interessant voorbeeld [19]. Deze werd door 9 mannen opgericht in mei 1749, en mocht maximaal 75 leden (mannen) hebben. Het entreegeld was 20 guldens, en de vaste contributie 10 guldens per jaar. Op leeftijd werd niet gelet. Als de man zou overlijden zou de weduwe in elk geval 75 guldens pensioen krijgen in de eerste jaren. Later zou dit zelfs kunnen oplopen tot 200 guldens. Deze financiële opzet doet niet erg solide aan. Met 75 leden zijn de jaarlijkse inkomsten 750 guldens, en tien weduwen zijn daarom al genoeg om de kas te ruïneren. Latere auteurs vermelden dat als een weduwenbeurs dreigde leeg te raken, de jongere leden meestal ophiielden met het betalen van contributie. Als gevolg daarvan zagen veel mensen nooit iets terug van hun geld [20].

Het fenomeen woekerpolis was ook al bekend in de achttiende eeuw, zoals blijkt uit mijn tweede voorbeeld. Onder de naam “De tijd baard roozen” werden rond 1770 contrac-

ten aangeboden door ene Jacobus Laban te Amsterdam. Men kon deelnemen door een of meer maal 10 gulden te storten. Het geld werd op rente uitgezet, en de rente werd jaarlijks verdeeld onder de deelnemers die nog in leven waren, volgens een zogenaamd Tontine-systeem (naar de Italiaanse bankier Lorenzo di Tonti, die het systeem in de zeventiende eeuw in Frankrijk invoerde). Waren er deelnemers doodgegaan, dan kreeg de rest een hogere uitkering. Om dit voor alle leeftijden aantrekkelijk te houden werden de deelnemers in klassen van ongeveer gelijke leeftijd verdeeld. Wanneer er in één klasse nog maar één deelnemer over was, werd die (tegen betaling) in een andere klasse ingedeeld, waarin veel meer werd uitgekeerd. Laban beweerde dat men met een inleg van 10 gulden misschien wel een uitkering van 1000 gulden zou kunnen krijgen. Ging men dood, dan zagen de erfgenamen niets terug van het ingelegde geld.

Het venijn zat hem verder in de vele 'kosten' die door Laban en consorten in rekening werden gebracht. Van de ontvangen rente werd een deel ingehouden, en verder werden er allerlei bedragen in rekening gebracht voor intekening, jaarlijkse administratiekosten, aankoop van obligaties, schrijffloot, enzovoort. Over het verdere verloop van dit initiatief is niets bekend maar het is aan te nemen dat het niet lang heeft bestaan [21].

In 1775 publiceerde Dr. A. Gallas zijn *Kortbondige en stelkonstige Verhandeling over den aart der Lyfrenten, Tontinen, Weduwenbeursen en andere Negotiatiën*. Gallas verzucht in zijn voorwoord: "het is jammer dat de [...] zo nuttige wijze van rekenen met tiendelige breuken zo weinig in zwang is; [...] niet alleen de Tafels, maar al hetgeen in deze verhandeling voorkomt, kan voor hem, die in het minste geen denkbeeld van derzelver behandeling heeft, van weinig nut zijn." Behalve decimaalbreuken waren ook logaritmen essentieel om het rekenwerk binnen de perken te houden, en ook gebruikte Dr. Gallas de 'stelkonst' (algebra), zodat zijn analyses vermoedelijk weinig effect hadden op de vele mensen in het veld die niet bekend waren met decimaalbreuken. Het duurde tot de negentiende eeuw totdat lijfrentes en soortgelijke producten in Nederland op wiskundig onderbouwde manier werden aangeboden. In 1807 werd de Hollandsche Sociëteit van Levensverzekeringen opgericht te Amsterdam [22], en de hoogleraar Jan Hendrik van Swinden (1746–1823) werd benoemd tot wiskundig adviseur. In 1830 verscheen het eerste, nog steeds goed leesbare, leerboek over de be-



Figuur 3 Een man en vrouw komen om zich in te tekenen bij een weduwenbeurs.

rekening van levensverzekeringen en aanverwante zaken, speciaal geschreven voor "on-geoefenden in de wiskunde". [23]

Tot besluit

De wiskundige problemen die we behandeld hebben zijn tegenwoordig nog steeds actueel. Een huis kan worden aangekocht met een hypotheek, waarbij de bank een begin-

kapitaal verschaft en de huiseigenaar dit gedurende 30 jaar afbetaalt met een constant maandbedrag dat uit rente en aflossing bestaat. Een pensioen is een vorm van lijfrente op het lijf van de persoon zelf, waarbij de uitkering wordt uitgesteld totdat het lijf 65, 66 of 67 jaar oud is. Tegenwoordig worden geavanceerde wiskundige methoden gebruikt bij de berekening van hypotheeken en pensioe-

nen, maar de oudere methoden die we hebben behandeld geven een eerste benadering, en ze zijn hopelijk niet te hoog gegrepen voor geïnteresseerde middelbare scholieren in de bovenbouw. De geschiedenis van deze problemen kan hen duidelijk maken dat wiskunde niet alleen interessant is, maar dat er ook veel geld mee verdiend kan worden [24].

Nawoord

Dit artikel is een herziene versie van een lezing in de vakantiecursus voor wiskundeleraren met thema 'Tel Uit je Winst', georganiseerd in augustus 2009. Ik dank Jantien Dopper, Ida Stamhuis en Steven Wepster voor hun kritisch commentaar op een eerdere versie van dit artikel.



Figuur 4 Jan Hendrik van Swinden (1746–1823)

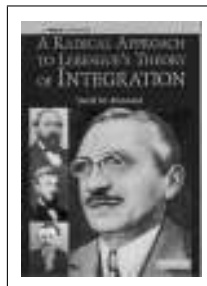
Noten

- 1 Voor voorbeelden en historische context zie Ida Stamhuis, *Levensverzekeringen 1500–1800*, p. 141–156 in J. van Gerwen, M.H.D. van Leeuwen, ed., *Studies over Zekerheidsarrangementen: Risico's, risicobestrijding en verzekeringen in Nederland vanaf de Middeleeuwen*, Amsterdam en Den Haag: Nederlands Economisch Historisch Archief en Verbond van Verzekeraars, 1998.
- 2 Simon Brugghelinck, *Tafelen van interest, midtsgaders de constructie der selver*. Antwerpen: Christoffel Plantijn, 1582. De tekst is uitgegeven in D.J. Struik, ed., *Principal Works of Simon Stevin*, Vol. IIA, Mathematics, Amsterdam 1958, digitale versie op www.historyofscience.nl. Zie ook C.M. Waller Zeper, *De oudste interestafels in Italië, Frankrijk en Nederland met een herdruk van Stevin's "Tafelen van Interest"*, Amsterdam 1937.
- 3 Voor een digitale versie zie www.dbnl.org. Het pamflet is opgenomen in de verslagen van de vergaderingen van de Staten van Holland en West Friesland. De tekst is gepubliceerd in *Feest-Gave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam ... ter gelegenheid der viering van zijn honderdjarig bestaan*. Haarlem: Joh. Enschedé en zonen, 1879.
- 4 Dit bedrag is nodig bij een jaarlijkse betaling: de lezer wordt uitgenodigd zelf na te gaan dat voor twee halfjaarlijkse betalingen van 500.000 gulden bij een rentestand van 4 procent een beginkapitaal van 25.247.549 gulden nodig is.
- 5 Zie Ida Stamhuis, Christiaan Huygens correspondeert met zijn broer over levensduur. Hoe wetenschappelijke begrippen kunnen ontstaan. *De zeventiende eeuw. Cultuur in de Nederlanden in interdisciplinair perspectief* 12 (1996), pp. 161–170.
- 6 Zie Ida Stamhuis, Radeloos, redeloos noch reddeloos: Jan de Witt's lijfrenteberekeningen rond het rampjaar, *Nieuw Archief van Wiskunde, Fourth Series*, 17, 1999, pp. 439–452.
- 7 Zie verder Ida Stamhuis, De ontwikkeling van de actuariële theorie tot de zeventiende en achttiende eeuw, pp. 157–174 in: J. van Gerwen e.a., *Studies over Zekerheidsarrangementen*, zie [1]; en *Bouwstoffen voor de Geschiedenis van de Levensverzekeringen en Lijfrenten in Nederland*. Bijgebracht en bewerkt door de Directie van de Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente gevestigd te Amsterdam. 1897, pp. 14–28.
- 8 We kunnen dit illustreren aan het volgende voorbeeld: Stel dat het lijf de leeftijd van $52\frac{1}{2}$ jaar heeft bereikt. Nu is de kans om voor de 53e verjaardag te overlijden gelijk aan $\frac{1}{29}$, dat is $\frac{1}{128}$ (de onvoorwaardelijke kans op gebeurtenis 100) gedeeld door de totale kans $\frac{1}{128} + \frac{28}{128}$ op één van de gebeurtenissen 100 tot en met 154. Als het lijf op de 53e verjaardag nog leeft, is de kans om in het eerste halfjaar daarna te overlijden $\frac{1}{42}$. Wanneer het lijf 53 jaar wordt, zou dus een plotselinge verbetering van de gezondheid optreden.
- 9 Andreas Hald, *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, New York: Wiley, 1990, p. 130.
- 10 Zie p. 23 van de *Feest-gave* in [3] hierboven.
- 11 Zie *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Tome septième: Correspondance 1670–1675. Amsterdam: Swets and Zeitlinger, reprint ed., 1978, tussen p. 96 en 97, digitale versie op <http://gallica.bnf.fr>. Om de tabel te zien kan men het beste eerst p. 96 of 97 opvragen en dan één pagina vooruit of achteruit bladeren.
- 12 Later is opgemerkt dat deze rekenmethode van Hudde beter is dan het gebruiken van gemiddelde gegevens over sterfte van de bevolking. Mensen die een lijfrente namen, kozen daarvoor een gezond en jong lijf, zodat ze langer rente konden trekken, en de lijven waren daarom geen gemiddelden.
- 13 Zie b.v. E.S. Pearson, *The History of Statistics in the 17th and 18th centuries*, p. 39.
- 14 De Moivre veronderstelde $\omega = 86$, dat wil zeggen dat er zo weinig mensen ouder worden dan 86 dat we hun aantal in de lijfrenteberekening kunnen verwaarlozen. Zie verder Hald [9], pp. 131–140, 508–525, en J. du Saar, De betekenis van de Moivre's werk over lijfrenten voor de ontwikkeling van de verzekeringswetenschap, *Het Verkeers-Archief* 4 (1923), pp. 28–45.
- 15 Stel $f(x) = x + x^2 + \dots + x^n$. Dan geldt $f(x) = (x - x^{n+1})/(1 - x)$. Nu is $\frac{n-1}{n}x^1 + \frac{n-2}{n}x^2 + \dots + \frac{1}{n}x^{n-1} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - \frac{x}{n}(1 + 2x + \dots + nx^{n-1}) = f(x) - \frac{x}{n}f'(x)$. Hieruit volgt de formule met standaard rekenwerk.
- 16 Ook gedrukt als pp. 362–392 van de *Inleiding tot de Algemeene Geographie, benevens eenige sterrekundige en andere verhandeligen*, Amsterdam: Tirion, 1740. Digitale versie op books.google.com. De geciteerde tabellen staan op pp. 363–368, 377.
- 17 Herdrukt in pp. 345–360 van de *Inleiding*, zie [16] hierboven.
- 18 Zijn werken zijn in het Frans vertaald in *Les Oeuvres de Nicolas Struyck (1687–1769), qui se rapportent au calcul des chances, à la statistique générale, à la statistique des décès et aux rentes viagères tirées des oeuvres complètes*, traduites du Hollandais par J.A. Vollgraff. Amsterdam 1912. Daarna is Struyck met Kersseboom vergeleken in M. van Haaften, *Nicolaas Struyck en zijne sterftetafels*, 's Gravenhage 1925.
- 19 Zie *Bouwstoffen* [7], pp. 292–297.
- 20 Voor meer gegevens over weduwenbeurzen zie Sandra Bos en Ida H. Stamhuis, *Begravenissen en weduwenfondsen, en prebende sociëteiten*, pp. 175–182 in *Studies over Zekerheidsarrangementen* [1].
- 21 Zie *Bouwstoffen* [7], pp. 336–345.
- 22 Deze organisatie heeft tot 1967 zelfstandig bestaan, is toen gefuseerd met een andere, en in 1969 opgegaan in de Delta Lloyd Groep.
- 23 Rehuel Lobatto, *Beschouwing van den aard, de voordeelen en de inrigting der Maatschappijen van Levensverzekering ... bijzonderlijk opgesteld ten dienste der ongeoeffenden in de Wiskunde*, Amsterdam 1830, digitale versie beschikbaar op books.google.com. Zie Ida Stamhuis, De actuariële theorie en de ontwikkeling van het beroep van actuaaris in de negentiende eeuw, pp. 403–423 in *Studies over Zekerheidsarrangementen* [1].
- 24 Voor verdere literatuur over het onderwerp zie Ida Stamhuis, 'Cijfers en Aequaties' en 'Kenis der Staatskrachten': *Statistiek in Nederland in de negentiende eeuw*, Amsterdam 1989, pp. 19–41, en Danny Beckers, 'Het despotisme der Mathesis': *Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750–1850*, Hilversum 2003, pp. 130–132.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Adres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: reviews@nieuwarchief.nl



David Bressoud

A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration

Cambridge University Press, 2008

329 p., prijs £26.99

ISBN 0-521-71183-8

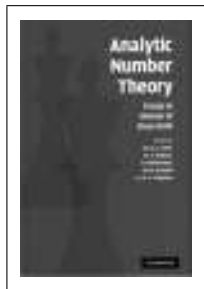
De maat- en integratietheorie die zich in de 20ste eeuw uit het gedachtegoed van Lebesgue ontwikkelde, is een mooi en nuttig stuk wiskunde dat naar mijn mening in iedere bacheloropleiding wiskunde thuishoort. Helaas beperkt men zich vaak tot een korte training met voornaamste begrippen en eigenschappen, waarbij ideeën en methoden niet of nauwelijks uit de verf komen, of juist tot historische kanttekeningen in het kader van wiskundegeschiedenis, waarbij de wiskundige opbouw van het vak geen aandacht krijgt. Bressoud kiest in zijn 'radical approach' een tussenweg: hij komt weliswaar alleen voor de reële getallen (en niet altijd onder de meest algemene voorwaarden) tot de voornaamste basissettingen, maar gaat uitvoerig in op de onderliggende fundamentele problemen en op de wijze waarop wiskundigen in een periode van 50 jaar (groveweg van 1870 tot 1920) daarmee omgingen.

Het hier besproken boek kan gezien worden als een vervolg op *A Radical Approach to Real Analysis* van dezelfde auteur en begint daar waar het eerdere boek eindigt, namelijk met Riemann's definitie van integraal. Aan de hand van heel concrete voorbeelden komen allerlei tekortkomingen van deze integraal aan de orde; problematisch zijn bijvoorbeeld de relatie tussen integreren en differentiëren (Hoofdstelling van de integraalrekening), verwisseling van limiet en integraal, en het voorstelbaar zijn van een functie door zijn Fourierreeks. Vervolgens wordt uiteengezet dat aan de basis van Lebesgue's oplossing een nauwkeurig onderzoek ligt van de topologische eigenschappen van de reële rechte; zo wordt 'Heine-Borel' wel gezien als de 'eerste fundamentele stelling van de maattheorie'. De auteur vermeldt ook een paar leerzame historische fouten zoals *Harnack's mistake* uit 1885: van het interval $[0, 1]$ blijft niets over wanneer er, bij een gegeven aftelling $\{r_1, r_2, \dots\}$ van de rationale getallen tussen 0 en 1, achtereenvolgens intervallen verwijderd worden van lengte $\frac{1}{2}$ rond r_1 , van lengte $\frac{1}{4}$ rond r_2 , van lengte $\frac{1}{8}$ rond r_3 enzovoort.

Bressoud heeft mijns inziens het onderwerp op een heel onderhoudende, zij het wat academische wijze aan de orde gesteld. Hij is daarbij niet altijd even zorgvuldig; zo blijft het onduidelijk of de te integreren functies ook de waarden $\pm\infty$ mogen aannemen, en de verschillende meetbaarheidsdefinities voor functies lopen nogal door elkaar heen. Een positief punt zijn de in 8 van de 9 hoofdstukken voorkomende paragrafen met opgaven, die de lezer uitdagen zelf de grenzen op te zoeken van wat mogelijk is; voor een aantal ervan zijn achterin het boek aanwijzingen opgenomen. De literatuurlijst bevat 89 titels.

Als leidraad voor een gedegen bachelorcursus 'Maat en integraal' zou ik Bressoud's boek niet willen gebruiken, niet zozeer vanwege de historische omwegen en uitweidingen, maar vooral omdat het in het begin van de 20-ste eeuw blijft steken en geen opening biedt naar algemenere ruimten (dan $\mathbf{R}$) en daarmee naar de kansrekening. Als aanvullende literatuur daarentegen is het boek zeker aan te bevelen.

Klaas van Harn



William Chen, Timothy Gowers, Heini Halberstam, Wolfgang Schmidt, Robert Vaughan (eds.)

**Analytic Number Theory
Essays in Honour of Klaus Roth**

Cambridge University Press, 2009

491 p., prijs £60.00

ISBN 0-521-51538-2

Klaus Roth ontving in 1958 de Fieldsmedaille voor zijn werk aan rationale benaderingen van algebraïsche getallen, aan rekenkundige deelrijen in dichte rijen van natuurlijke getallen, en aan gelijkverdeling. Een indrukwekkende groep wiskundigen eert hem ter gelegenheid van zijn 80ste verjaardag met deze proceedings. In de vele overzichtsartikelen geeft het boek een prachtig beeld van de ontwikkelingen in de achterliggende vijftig jaar die deels op het werk van Roth voortbouwen.

Zannier behandelt de Stelling van Roth (de basis voor Wolfgang Schmidts Subspace Theorem) en haar toepassingen. Zelf schrijft Schmidt over de toepassing van Laurent's versie van de Subspace Theorem op de vergelijking $\alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ met $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}^*$ en $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Bugeaud bestudeert convergenten van algebraïsche getallen. Metrische diophantische aspecten worden behandeld door Laurent en door Beresnevich, Bernik, Dodson en Velani.

Het werk van Roth over rekenkundige rijen van lengte 3 was het startpunt van het werk van Szemerédi, later van Gowers, en nog later van Green en Tao. Laatstgenoemden geven in deze proceedings een nieuwe grens voor rijen van lengte 4. Ook Sárközy and Stewart bouwen verder op het werk van Roth. Additieve getaltheorie is verder het onderwerp van bijdragen van onder anderen Bourgain (som-product verschijnselen), Browning en Heath-Brown (gehele punten op kubische oppervlakken), Brüdern (binaire additieve problemen), Katz (karakter-sommen), Maier en Vaughan (beiden exponentiaalsommen).

Ideeën van Roth over gelijkverdeling vormen het onderwerp van artikelen van Chen en Travaglini en van Chazelle. Gelijkverdeling is ook het hoofdthema van bijdragen van onder meer Helfgott en Venkatesh, en van Konyagin.

Van de in totaal 32 artikelen gaan sommige nog over niet genoemde onderwerpen zoals getallen met een grote priemfactor (Baker en Harman), lineaire homogene congruenties (Schinzel) en woorden en transcendentie (Waldschmidt). Kortom, dit boek is een schatkist voor getaltheoretici.

Rob Tijdeman



Pelham Wilson
**Curved Spaces
From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry**

Cambridge University Press, 2008

186 p., prijs £25.99

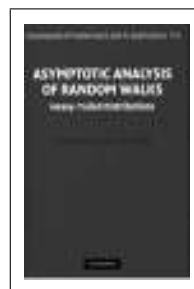
ISBN 0-521-71390

Dit boek is een uitgebreide versie van Wilsons lecture notes voor een tweedejaars cursus meetkunde. In het voorwoord schrijft de auteur dat meetkundige ideeën nog altijd een belangrijke rol spe-

len in de wiskunde en theoretische natuurkunde. Dit boek is bedoeld om studenten kennis te laten maken met enkele van deze ideeën. Het moet een brug vormen tussen elementaire vakken, zoals (complexe) analyse en algebra, en meer geavanceerde cursussen over thema's als Riemann-oppervlakken, differentieerbare variëteiten, algebraïsche topologie en differentiaalmeetkunde. Het boek is dus geen leerboek differentiaalmeetkunde. Standaardbegrippen als tensorvelden, Levi-Civita-connecties, Christoffel-symbolen en de Gauss-afbeelding komen dan ook niet voor.

Het boek begint met een studie van eenvoudige oppervlakken als het Euclidische vlak, de sfeer en de vlakke torus. (De spaces uit de titel zijn vrijwel altijd oppervlakken.) Hierop volgt een topologisch getint hoofdstuk over triangulaties, Euler-getallen en oppervlakken van geslacht g . Vervolgens worden Riemannse metrieken geïntroduceerd op open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$. Na een lokale studie van booglengte en oppervlakte bespreekt de auteur drie modellen van het hyperbolische vlak. In de laatste drie hoofdstukken wordt naar abstracte oppervlakken toegewerkt. Eerst komen oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ aan bod. De Gauss-kromming wordt gedefinieerd met behulp van de eerste en tweede fundamenteelvorm. Het voorlaatste hoofdstuk behandelt de lokale theorie van geodeten. Het eindigt met de existentie van lokale geodetische poolcoördinaten. Deze worden in het laatste hoofdstuk gebruikt om de Gauss-kromming voor een abstract (niet ingebed) oppervlak te definiëren. Het theorema egregium (kromming is intrinsiek) volgt eenvoudig. Het boek eindigt met Gauss-Bonnet voor abstracte, gesloten oppervlakken.

In mijn ogen is Wilson in zijn opzet geslaagd. Het boek bereidt de lezer inderdaad voor en motiveert tot verdere studie in genoemde richtingen. De benodigde voorkennis is zeer bescheiden, want de bewijzen worden in detail uitgewerkt en alle begrippen zorgvuldig geïntroduceerd. Door de opbouw van concreet naar abstract en de concentratie op een beperkt aantal thema's (isometrieën, krommen, triangulaties) zit er een duidelijke lijn in het boek. De opgaven zijn maakbaar en sluiten goed aan bij de behandelde stof. Ik kan dit boek dan ook van harte aanraden. Voor lezers met meer tijd en belangstelling voor de geschiedenis van de differentiaalmeetkunde is het ruim 50 procent dikkere boek *Geometry from a differentiable viewpoint* van John McCleary (Cambridge University Press, 1995) een interessant alternatief. Jeroen Spandaw



Aleksandr Borovkov, Konstantin Borovkov
**Asymptotic Analysis of Random Walks
Heavy-tailed Distributions**

Cambridge University Press, 2008

Encyclopedia of Math. and its Appl. 118

625 p., prijs £99.00

ISBN 0-521-88117-3

Random walks form a key subject in probability theory, with applicability in a wide range of fields: physics, sequential analysis, queueing theory, risk theory. The strong interest in random walks with heavy-tailed step sizes of the past two decades was triggered by measurements on data in finance, insurance, and communications. For example, the famous Bellcore measurements of 1989 on traffic characteristics in their Ethernet local area network revealed that this traffic exhibited features like self-similarity and long-

range dependence, leading to the study of traffic and queueing models with heavy-tailed service requirements.

Alexander Borovkov and his son Kostya have written a lengthy monograph on the asymptotic behaviour of random walks with heavy-tailed (in particular: regularly varying, sub- and semi-exponential) jump distributions. More precisely, the main objects of study are the tail probabilities of the sum S_n of n independent, identically distributed random variables (jump sizes), and of $\bar{S}_n = \max_{k \leq n} S_k$ and $\bar{S}_n(a) = \max_{k \leq n} (S_k - ak)$. They present a unified exposition of the theory, based on a common probabilistic approach. The book is much more than an expository survey; many of the results are new.

The book is organized as follows. After a preliminary chapter, Chapters 2, 3 and 4 are, respectively, devoted to random walks with jumps having no finite first moment, having a finite first but infinite second moment, and having zero mean and finite variance. Subsequent chapters consider various classes of heavy-tailed jump size distributions. Chapter 8 studies the asymptotics of the first hitting time of a particular level. Chapters 9, 10 and 11 are concerned with various large deviations issues. Chapters 12-16 consider generalizations of the previous theory to cases like: non-identically distributed jump sizes, dependent jumps, continuous-time random processes, and generalized renewal processes.

Throughout the book, an exceptionally strong mastery of probabilistic techniques for sums of random variables is demonstrated. Due to its technical nature, this is no easy read. However, the book is well written and its encyclopedic nature and wealth of new results make it a precious possession. The authors announce a companion volume on random walks with fast decaying jump size distributions — something to look out for. *Onno Boxma*



Alexander Kechris, Benedikt Löwe, John Steel

Games, Scales and Suslin Cardinals. The Cabal Seminar, Vol. 1

Cambridge University Press, 2008

Lecture Notes in Logic 31

447 p., prijs £ 45.00

ISBN 0-521-89951-2

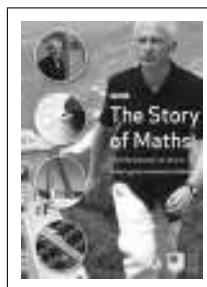
Tijdens mijn studie zag ik in de bibliotheek in de gele reeks Lecture Notes in Mathematics ook delen staan met als titel *Cabal Seminar*; ik bladerde er wel eens in maar was nog niet voldoende bekend met beschrijvende verzamelingenleer om te waarderen wat in deze boeken te vinden was. Tegenwoordig weet ik wat meer en kan beter begrijpen/waarderen waar het in dat seminar over ging: de structuur van deelverzamelingen van de reële rechte.

De meesten van ons kennen de Borelverzamelingen wel: die vormen de kleinste σ -algebra waartoe alle open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ behoren. Voor een nauwkeurige studie van die verzamelingen is deze definitie niet echt handig. Het centrale idee van een expliciete beschrijving is dat van een boom en wel een boom op $X \times Y$ is een verzameling T van geordende paren (s, t) van eindige rijtjes met hetzelfde domein en waarbij s waarden in X heeft en t waarden in Y . Wat T tot een boom maakt is dat als $(s, t) \in T$ en als s' en t' even lange beginstukken van s en t zijn dan $(s', t') \in T$. Zo'n boom T dient als beschrijving van een deel-

verzameling A_T van $X^{\mathbb{N}}$, als volgt: $x \in A_T$ dan en slechts dan als er een $y \in Y^{\mathbb{N}}$ bestaat zodanig dat alle paren even lange beginstukken van x en y tot T behoren. Het topologische product $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is homeomorf met de verzameling der irrationale getallen en voor de beschrijvende verzamelingenleer is er geen echt verschil tussen die verzameling en $\mathbb{R}$ zelf. Dit maakt duidelijk waarom voornamelijk het geval $X = \mathbb{N}$ bekeken wordt. De 'klassieke' beschrijvende verzamelingenleer neemt $Y = \mathbb{N}$ maar voor verzamelingen van hogere complexiteit dan de Borelverzamelingen worden ook andere verzamelingen gebruikt.

Dit boek, het eerste van vier, doet wat sommigen (wellicht velen) van ons wel eens met ons eigen werk zouden willen doen: de oude artikelen uit de gele deeltjes opnieuw opmaken in $\text{\TeX}$. De artikelen zijn nu gegroepeerd naar onderwerp in plaats van chronologie en aangevuld met ongepubliceerd en nieuw materiaal. De drie termen uit de titel slaan op stukken gereedschap die zijn ontwikkeld om via de boomrepresentaties meer vat op de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ te krijgen.

Het zou te ver voeren hier uit de doeken te doen wat die gereedschappen precies doen. Pak het boek eens van zijn plank in de bibliotheek, blader er in en lees vooral de inleidingen van Steel (Games and Scales) en Jackson (Suslin cardinals) om te zien hoe ingewikkeld die goede oude reële rechte kan zijn. *Klaas Pieter Hart*



Marcus du Sautoy
The Story of Maths (DVD)

BBC / The Open University, 2008

Distributie via cannyminds.com

6 uur, prijs £18.49

The Story of Maths is een vierdelige documentaire over de geschiedenis van de wiskunde, gepresenteerd door Marcus du Sautoy, getaltheoreticus en hoogleraar in Oxford. De documentaire is een co-productie van de BBC en Open University en om diverse redenen het bekijken meer dan waard.

Wij volgen Du Sautoy op een wereldreis waarbij hij in chronologische volgorde die plaatsen bezoekt waar belangrijke gebeurtenissen in de geschiedenis van de wiskunde plaatsvonden. Alle middelen worden ingezet om uit te leggen wat er zich heeft afgespeeld. Zo zien we in het eerste deel, gewijd aan de oude Egyptische en Babylonische wiskunde, Du Sautoy bovenop een zijvlak van een reusachtige in de ruimte zwevende piramide staan. In de beeldvullende animatie wordt de piramide — zo een waarvan de top zich loodrecht boven een hoekpunt van het vierkante grondvlak bevindt — met twee andere samengevoegd tot een kubus. Zo zie je dat elk van die drie congruente piramides een volume heeft gelijk aan één derde van dat van de kubus. In Egypte kenden ze die formule ver voor Christus al en wie weet zagen ze dat wel op deze manier in. In dezelfde aflevering stapt de presentator in een luchtballon. Om te rekenen aan een grote rechthoekige akker kun je de zaak inderdaad het beste vanuit de lucht bekijken.

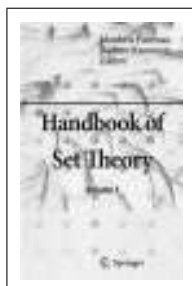
De overige drie delen van de serie zijn gewijd aan de Chinese en Indiase wiskunde, aan de Europese ontwikkelingen tot en met de 19de eeuw en aan hoogtepunten uit de 19de en 20ste eeuw.

De serie is zeer onderhoudend en de beelden zijn prachtig. Er zijn opnames van de Chinese muur, van Kerala in Zuid-Oost India, van het Griekse eiland Samos, van Alexandrië, van Toulouse, van het geboortedorp van Newton, van Göttingen, van het voormalige Königsberg, nu Kaliningrad geheten, van Sint Petersburg, van Basel, Hannover, Halle, Wenen, Parijs, Princeton, Berkeley en van nog ettelijke andere locaties. En u kunt het voor een deel raden, daarbij komt het werk van Madhava, Pythagoras, Euclides, Fermat, Gauss, Bolyai, Riemann, Hilbert, Euler, de Bernoullis, Leibniz, Hilbert, Galois, Cantor, Poincaré, Perelman, Gödel, Julia Robinson, Matiyasevich en nog ettelijke anderen aan de orde.

Overall maakt de presentator gebruik van lokale vervoermiddelen, zo zien we hem in Leiden fietsen langs de gracht. Du Sautoy heeft ook de juiste gesprekspartners. In Halle spreekt hij met Joseph Dauben, een Cantor-specialist, in Hannover met Leibniz-specialist Herbert Breger, enzovoort. In Leiden is dat Descartes-specialist Henk Bos, die kort uitlegt wat analytische meetkunde is en dat Descartes geen aardige man was. Het lukt niet altijd; in Petersburg blijkt Perelman niet te spreken. Dat is niet verbazingwekkend. Een gesprek met Matiyasevich lukt dan gelukkig wel.

Kortom, een mooie documentaire en heel geschikt om te tonen bij een cursus geschiedenis van de wiskunde. *Teun Koetsier*

Recent verschenen publicaties (suggesties naar reviews@nieuwarchief.nl)



Matthew Foreman, Akihiro Kanamori (eds.)

Handbook of Set Theory

Springer Verlag, 2010

ISBN: 978-1-4020-4843-2

www.springer.com/mathematics/book/978-1-4020-4843-2



Terence Tao

Poincaré's Legacies, Part I & Part II

Amer. Math. Soc., 2009

ISBN 0-8218-4883-6, 0-8218-4885-2)

www.ams.org/bookstore-getitem/item=mbk-66,

www.ams.org/bookstore-getitem/item=mbk-67



Barry Koren, Kees Vuik (eds.)

Advanced Computational Methods in Science and Engineering

Springer Verlag, 2010

ISBN: 978-3-642-03343-8

www.springer.com/mathematics/numerical+and+computational+mathematics/book/978-3-642-03343-8



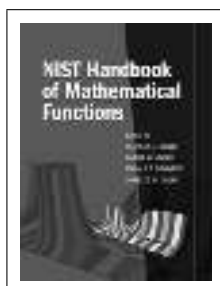
Tonny A. Springer, Dirk van Dalen (eds.)

Hans Freudenthal: Selecta

European Math. Soc., 2009

ISBN 978-3-03719-058-6)

www.ems-ph.org/books/book.php?proj_nr=108



Frank W.J. Olver et al. (eds.)

NIST handbook of Mathematical Functions

Cambridge University Press, 2010

ISBN-13: 9780521140638)

www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521140638



Michel Broué

Introduction to Complex Reflection Groups and Their Braid Groups

Springer Verlag, 2010

ISBN: 978-3-642-11174-7

www.springer.com/mathematics/algebra/book/978-3-642-11174-7

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is September 1.

Problem A (proposed by Gabriele Dalla Torre)

Show that for every positive integer n and every integer $m \geq 2$, we have

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ m \nmid i}} \lfloor \log_m(n/i) \rfloor = \lfloor n/m \rfloor.$$

Problem B (folklore)

Let $b \geq 2$ be an integer. We let $\sigma_b(n)$ denote the sum of the digits in base b of the integer n . Show that we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_b(n!) = \infty.$$

Problem C (folklore)

Two players play a game of n -in-a-row on an infinite checkerboard. The first player plays with white pieces, the second with black pieces. On each move they place one piece on an empty square. The first player to have n consecutive pieces in a row or column wins. For which values of n is there a winning strategy for one of the players?

Edition 2009-4 We received submissions from Pieter de Groen (Brussel) and Thijmen Krebs (Nootdorp).

Problem 2009-4/A Is there a polynomial with rational coefficients whose minimum on the real line is $\sqrt{2}$?

Solution This problem was solved by Pieter de Groen and Thijmen Krebs. Pieter de Groen receives the book token.

We will show that Krebs' polynomial $f(x) = g(x^2)$ with

$$g(x) = \frac{1}{8}(3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x + 12)$$

is such a polynomial. Indeed, note that the derivative of g satisfies $4g'(x) = 3(x^2 - 2)(2x - 1)$, so that $g(x)$ has local minima at $x = \pm\sqrt{2}$ and a local maximum at $x = \frac{1}{2}$. From $g(0) > g(\sqrt{2})$ we conclude that the minimum of g on the interval $[0, \infty)$ equals $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. It follows that the minimum of $f(x) = g(x^2)$ on the real line equals $\sqrt{2}$ as well. ■

Problem 2009-4/B Are there infinitely many positive integers whose positive divisors sum to a square?

Solution Suppose there are only finitely many such integers and let $N > 1$ be a common multiple. For any $x \in \mathbf{R}$, let $S(x)$ denote the set of all prime powers p^r with $p \leq x$ prime and $r \geq 1$ the smallest integer for which p^r does not divide N .

For every integer n , let $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ be the sum of the divisors of n . The function σ is

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

weak multiplicative, meaning that $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ whenever m and n are coprime. Let q be any prime larger than $\sigma(m)$ for all $m \in S(N)$ and let t denote the number of primes up to and including q . For all t prime powers $m = p^r \in S(q)$ with p prime, the prime divisors of $\sigma(m)$ are smaller than q ; for $p \leq N$ this follows by definition of q , while for $p > N$ it follows from the fact that $\sigma(m) = p + 1$ is even, so all its prime divisors are at most $(p + 1)/2 < q$.

We conclude that the $\mathbf{F}_2$ -subspace of $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$ generated by the elements $\sigma(m)$ for all $m \in S(q)$ is contained in the subspace generated by all primes smaller than q , which has dimension $t - 1$. This implies that the t elements $\sigma(m)$ for $m \in S(q)$ are linearly dependent, so there exists a nonempty subset $T \subset S(q)$ such that for $n = \prod_{m \in T} m$ the weak multiplicativity of σ yields $\sigma(n) = \prod_{m \in T} \sigma(m) = 1 \in \mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$. Therefore $\sigma(n)$ is a square, which contradicts the fact that n is not a divisor of N . This proves that there are infinitely many integers whose divisors sum to a square. ■

Problem 2009-4/C For which odd positive integers n do there exist an odd integer $k > n$ and a subset $S \subset \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ of size n such that for every non-zero element $r \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ the cardinality of the intersection $S \cap (S + r)$ is even? What about even n ?

Solution This problem was solved by Thijmen Krebs, who receives the book token. The following solution of the problem is based on his solution.

We claim that for $n \equiv 2 \pmod{4}$ and for $n \equiv 3 \pmod{4}$ there does not exist any odd integer k with the requested property, whereas for $n \equiv 0 \pmod{4}$ and for $n \equiv 1 \pmod{4}$ there exists such an odd integer k .

We denote by $\bar{r}$ the residue class of the integer r in $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Firstly, we suppose $n \equiv 2 \pmod{4}$ or $n \equiv 3 \pmod{4}$. For any candidates k and S and any $r \in \mathbf{Z} \setminus k\mathbf{Z}$ we have

$$|S \cap (S + \bar{r})| = |S \cap (S - \bar{r})| \equiv 0 \pmod{2}.$$

By summing over all $r \in 1, \dots, k - 1$ we get

$$n(n-1) = \sum_{r=1}^{k-1} |S \cap (S + \bar{r})| = \sum_{r=1}^{(k-1)/2} (|S \cap (S + \bar{r})| + |S \cap (S - \bar{r})|) \equiv 0 \pmod{4}.$$

This proves the first part of our claim.

Now we will show that for $n \equiv 0 \pmod{4}$ and for $n \equiv 1 \pmod{4}$ there exists such an odd integer k . Let A be the set $\{0, 1, 2, 4\}$. If $n = 4$ then it is easy to check by hand that for $k = 7$ the subset $\bar{A}$ of $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ satisfies the requested property.

If $n \equiv 0 \pmod{4}$ we pick any odd integer h greater than $n/4$ and any subset $B \subseteq \{0, \dots, h-1\}$ of cardinality $n/4$. We claim that we can choose $k = 7h$ and $S = \{ha + b \pmod{7h} : a \in A, b \in B\}$. For any $r \in \mathbf{Z}/7h\mathbf{Z}$ we have

$$\begin{aligned} |S \cap (S + r)| &= \sum_{(b,c) \in B \times B} \left| (\bar{hA}) \cap (\bar{hA} + r + b - c) \right| = \\ &= \sum_{\substack{(b,c) \in B \times B \\ r \equiv c - b \pmod{h}}} \left| (\bar{hA}) \cap \left(hA + h \frac{(r+b-c)}{h} \right) \right| \end{aligned}$$

All the terms in the last sum are even and equal to either 2 or 4, because it is equal to what we have computed in the case $n = 4$ and $k = 7$, namely the cardinality of the intersection between the sets $\bar{A}$ and $A + \frac{(r+b-c)}{h}$ in $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

Now we suppose $n \equiv 1 \pmod{4}$ and let A and B be the sets $\{0, \dots, (n-1)/2\}$ and $\{1, 2\}$, respectively. We claim that we can choose $k = \frac{3(n+1)}{2}$ and $S = \{3a + b \pmod{k} : a \in A, b \in B\} \setminus \{1 \pmod{k}\}$. For any $r \in \mathbf{Z} \setminus k\mathbf{Z}$ we have

$$|S \cap (S + \bar{r})| = \sum_{(b,c) \in B \times B} \left| \overline{3A} \cap (\overline{3A} + r + b - c) \right| - |S \cap (\overline{1} + \bar{r})| - |S \cap (\overline{1} - \bar{r})|.$$

Note that the sum $\sum_{(b,c) \in B \times B} |\overline{3A} \cap (\overline{3A + r + b - c})|$ is equal to $(n+1)$ if $r \equiv 0 \pmod 3$ and to $(n+1)/2$ if $r \not\equiv 0 \pmod 3$. We can conclude by observing that in the first case $\overline{1+r} \in S$ if and only if $\overline{1-r} \in S$ and in the second case $\overline{1+r} \in S$ if and only if $\overline{1-r} \notin S$. ■

Star Problems. In the June 2008 issue, we revisited a selection of unsolved star problems. The first correct solution submitted before July 1, 2009 would earn a book token. In this issue, we publish the last solution that we have received.

Problem (Star) 2008-2/7 For $n = 1, 2, 3, \dots$ we define the function $\Phi_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ by

$$\Phi_n(x) = (2n)^x - (2n-1)^x + (2n-2)^x - (2n-3)^x + \dots + 2^x - 1.$$

Prove or disprove that for all $x \in \mathbf{R}$ and for all n

1. $\Phi'_n(x) > 0$;
2. $\Phi''_n(x) > 0$.

What can be said about higher derivatives?

Solution We received an ingenious solution from Juan Arias de Reyna and Jan van de Lune, who are awarded the prize. They show that Φ'_n and Φ''_n are strictly positive, but that there is an x so that $\Phi'''_n(x) < 0$. We limit ourselves to giving a sketch of their solution.

Proof that Φ'_n and Φ''_n are strictly positive.

First of all, we may restrict ourselves to $x < 0$, since for $x \geq 0$ it is clear that all the derivatives of $\Phi_n(x)$ are positive.

Denote the first derivative of $-\Phi_n(-x)$ by ϕ_n and the second derivative of $\Phi_n(-x)$ by ψ_n . We need to show that

$$\phi_n(x) = \frac{\log 2}{2^x} - \frac{\log 3}{3^x} + \dots - \frac{\log(2n-1)}{(2n-1)^x} + \frac{\log(2n)}{(2n)^x} > 0$$

and

$$\psi_n(x) = \frac{(\log 2)^2}{2^x} - \frac{(\log 3)^2}{3^x} + \dots - \frac{(\log(2n-1))^2}{(2n-1)^x} + \frac{(\log(2n))^2}{(2n)^x} > 0$$

for all n and for all $x > 0$.

The theory of Dirichlet series gives an entire function $\eta(s)$ so that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s) = \eta'(s)$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(s) = -\eta''(s)$$

for all positive real s . (For $s > 1$ this is trivial, by the absolute convergence of the series $\sum_n (-1)^n n^{-s}$.) In fact $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, where $\zeta(s)$ is the Riemann zeta function.

Assume that there exists an n and an $x > 0$ so that $\phi_n(x)$ (resp. $\psi_n(x)$) is non-positive. It is not too hard to show that this implies that

$$\eta'(x) \leq 0$$

respectively

$$\eta''(x) \geq 0.$$

It therefore suffices to show that $\eta'(x) > 0$ and $\eta''(x) < 0$ for all $x > 0$.

First, one shows that for all x such that

$$x > 2 \frac{\log(\log(3)) - \log(\log(2))}{\log(3) - \log(2)} \approx 2.2718$$

and all $k > 0$, one has

$$\frac{(\log(2k))^2}{(2k)^x} \geq \frac{(\log(2k+1))^2}{(2k+1)^x}.$$

It follows that $\eta''(x)$ is negative for all $x > 2.2718$.

The rest of the argument depends on the following inequality

$$|\eta'''(x)| \leq B(s) := \frac{3+6s}{(1+s)^3} \quad (x \geq s > 0), \quad (1)$$

the proof of which we postpone.

Now one verifies numerically that

$$\eta''(0) \approx -0.06103 < 0,$$

so that by the maximal slope principle and the inequality (1) one finds

$$\eta''(x) < 0, \text{ for all } x < \frac{-\eta''(0)}{B(0)} \approx 0.020343$$

Repeating this about 20 times one finds $\eta''(x) < 0$ for all x between 0 and 2.28, from which we conclude that $\eta''(x) < 0$ for all positive x , this finishes the proof for the second derivative.

For the first derivative, observe that since $\eta'' < 0$ we have that η' is strictly decreasing. But it is easy to check that $\eta'(x)$ is positive for all x sufficiently large, therefore $\eta'(x) > 0$ for all x .

Proof of (1). We now sketch how to prove the crucial inequality (1).

Let $E: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be the “triangle wave” function of period 2 which satisfies $E(x) = \frac{2x-1}{4}$ for $0 \leq x \leq 1$ and $E(x) = \frac{3-2x}{4}$ for $1 \leq x \leq 2$. One shows that

$$\eta(s) = \frac{1}{2} + \frac{s}{4} + s(s+1) \int_1^\infty \frac{E(x)}{x^{s+2}} dx.$$

Computing the third derivative of this, and using $|E(x)| \leq \frac{1}{4}$ one finds

$$|\eta'''(s)| \leq \frac{3+6s}{(1+s)^3}$$

and the desired inequality follows by noting that the right-hand side is decreasing for $s > 0$.

Higher derivatives. If Φ_n''' were strictly positive for all $x > 0$ then it would follow that $\eta'''(x) \geq 0$ for all $x \geq 0$. But one can verify numerically that

$$\eta'''(0) \approx -0.02347468,$$

a contradiction. ■

