

Inhoud | Contents

- 2 Colofon
- 3 Redactioneel *Wil Schilders*
- 4 Agenda
- 6 Nieuws
- 11 BètaMentality *Gert Vegter*
- 12 Van het KWG

Interview | Interview

- 39 Wiskunde opstuwen in de vaart der volkeren – Interview met Chris Zaal *Rainer Kaenders, Klaas Landsman*

Onderzoek | Research

- 46 Transitiegedrag van de Atlantische Oceaancirculatie *Henk Dijkstra*
- 57 Bij benadering optimaliseren *Erik Jan van Leeuwen*

Onderwijs | Education

- 28 Presentatie rapport rekencommissie KNAW *Martinus van Hoorn*
- 33 Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo *Geeke Bruin-Muurling, Koeno Gravemeijer, Michiel van Eijck*

Evenementen | Events

- 19 Honderdste Eurandom workshop *Connie Cantrijn*

Geschiedenis | History

- 20 Wiskunstige Verlostiging *Gerard Alberts, Danny Beckers*
- 50 De Boekerij van het Koninklijk Wiskundig Genootschap *Herman te Riele*
- 54 Hans Freudenthal als docent en collega *Nellie Verhoef, Ferdinand Verhulst*
- 63 Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen *Steven Wepster*

Boeken | Books

- 30 An Outer View of the Inner World *Derk Pik*
- 70 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 27 De derde wet *Ferdinand Verhulst*
- 43 Verdediging *Geertje Hek*
- 61 Column: Wiskundigen in den vreemde *Nellie Verhoef*
- 74 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
redactie@nieuwarchief.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Judi Romijn (judi@nieuwarchief.nl)

Bladmanager/Advertenties

Fred Drissen (fred@nieuwarchief.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (charlenekalle@gmail.com)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureau redactie

Floris Olsthoorn
Harm de Vries

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Hans Cuyppers (TU/e),
Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Teun
Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van
Luik (UL), Hans Melissen (TUD), Derk Pik (JSG Mai-
monides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL),
TeX-ondersteuning
Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aan-
melding ontvangen wordt. De opzegtermijn is
twee maanden vóór het verstrijken van de abon-
nementsperiode. / The subscription starts on the
day that your application is received. The term of
notice is two months before the end of the current
subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt €70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen €35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor €25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van €50.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay €50 instead of the full membership fee of €70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of €5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of €7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor €90 respectievelijk €105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Drukkerij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), Rob van der Mei (CWI, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Jenneke Kruger (SLO), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
2	07-06-2010	verstreken
3	06-09-2010	26-04-2010
4	06-12-2010	26-07-2010
1	07-03-2011	25-10-2010

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum Wiskunde
& Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

De huidige serie van het NAW bestaat tien jaar: een tinnen jubileum. De koerswijziging van de vierde serie naar de vijfde kan worden opgevat als een terugkeer naar de wortels van het KWG. Lees het artikel van Gerard Albers en Danny Beckers op pagina 20.

10 jaar!

We hebben wat te vieren: NAW-nieuwe-stijl bestaat tien jaar! Aan het begin van de 21ste eeuw startte het Koninklijk Wiskundig Genootschap de vijfde serie van haar tijdschrift. Jan Karel Lenstra, toenmalig KWG-voorzitter, opende met een welgemeend ‘Lectori Salutem’, en lichtte de koerswijziging toe.

We namen dus afscheid van het bekende blauwe boekje, en dat was zeker niet onomstreden: verschillende KWG-leden verzetten zich hevig, onder meer om de ruilovereenkomsten met buitenlandse wiskunde-organisaties. Tot in verre uithoeken van de wereld werd het NAW gelezen! Immers, de meeste artikelen waren in het Engels. Feitelijk was het NAW een mengvorm: een internationaal wetenschappelijk tijdschrift met daarnaast bijdragen die een nationale functie dienden.

Mede door dit hybride karakter concludeerde het KWG-bestuur eind jaren '90 dat het NAW internationaal een marginale positie innam. Bovendien vroeg men zich af of het tijdschrift in voldoende mate de belangen van de leden diende. De vijfde serie moest een echt vakblad worden voor de Nederlandse wiskunde, bedoeld voor studenten, leraren, toepassers, onderzoekers, amateurs en ieder ander die de wiskunde een warm hart toedraagt.

Een andere ontwikkeling droeg ook bij aan de koerswijziging. Rond 1990 was er binnen het KWG discussie over zuivere versus toegepaste wiskunde. Er werd geconcludeerd dat toegepaste wiskunde een eigen plaats moest krijgen in de organisatie. Op verzoek van KWG-voorzitter Bram van der Sluis richtten Bob Mattheij en ondergetekende rond 1994 de Stichting Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW) op. Een enthousiaste club, die regelmatig symposia organiseerde en een eigen blad uitgaf. Het ITW Nieuws, Nederlandstalig en eigentijds vormgegeven, bevatte leuke interviews, interessante toepassingen en historische artikelen. In dit kwartaalblad werd wiskunde met succes op een andere manier onder de aandacht gebracht.

In maart 2000 zag het eerste nummer van de nieuwe serie NAW het licht. Onder de bezielende leiding van Chris Zaal en Joop Kolk ontstond een blad voor een breed wiskundig geïnteresseerd publiek, niet slechts voor specialisten. Natuurlijk kon niet elke lezer iedere bijdrage doorgronden, maar dat is inherent aan de vele kanten van wiskunde. In de loop der jaren hebben we veel positieve reacties gekregen op de nieuwe koers.

Tien jaar is een mooie periode om op terug te kijken, vandaar het speciale jubileumtintje van dit nummer. Zo hebben we een

interview met Chris Zaal, en zijn onze historici Gerard Alberts en Danny Beckers wat dieper in het verleden gedoken voor een overzicht van de publicaties van het Wiskundig Genootschap door de jaren heen. De bijdragen over de boekerij van het KWG en over Hans Freudenthal sluiten hier mooi bij aan.

Een andere KWG-uitgave viert ook feest: Het tijdschrift Pythagoras beleeft haar 50ste verjaardag! Onze gelukwensen gaan uit naar de redactie, en we hopen dat leerlingen nog lang mogen genieten van dit prachtige blad. Als traktatie is de eerste jaargang 1961–1962 online geplaatst (zie <http://www.pythagoras.nu>).

Lenstra besloot zijn ‘Van de voorzitter’ in 2000 als volgt: “Het bestuur van het Wiskundig Genootschap beraadt zich over meer zaken die, naar wij hopen, de beoefening van de wiskunde en de appreciatie daarvan in de maatschappij zullen bevorderen en die ertoe mogen bijdragen dat onze leden waar voor hun lidmaatschapsgeld krijgen.” Ik denk dat deze woorden na tien jaar nog steeds actueel zijn. Het is belangrijk voor de wiskunde om naar buiten te treden en te tonen waartoe ons vak in staat is. Het Platform Wiskundig Nederland (zie <http://www.wiskengenoot.nl/PWNblueprint.pdf>) is al druk doende de aanbevelingen uit het Masterplan Toekomst Wiskunde in daden om te zetten. Hopelijk leidt dit tot waardering van de sleutelrol van wiskunde in bredere kring.

Terug naar het NAW: Aarzelt U niet om de hoofdredactie Uw mening over het blad te geven, om suggesties te doen voor bijdragen of op andere wijze Uw hulp aan te bieden. Wij hebben het liefst een brede redactie en verwelkomen altijd wiskundigen die daadwerkelijk mee willen werken aan dit blad. Het is fijn om een constante stroom bijdragen te ontvangen en het enthousiasme voor wiskunde te ervaren. Laat U ook niet uit het veld slaan als wij een bijdrage eens minder geschikt vinden voor publicatie, of de resultaten al bekend blijken te zijn.

Rest mij, ook namens mede-hoofdredacteur Ferdinand Verhulst en de overige redactieleden, U allen hartelijk te danken voor Uw belangstelling en bijdragen in de afgelopen tien jaar. Ook in de toekomst mag U rekenen op onze onvermoeide arbeid, tenslotte komt deze alles te boven!

Wil Schilders, Hoofdredacteur

NXP Semiconductors & TU Eindhoven

Agenda

Upcoming Events

maart 2010

– 12 september 2010

NewtonMania

Tentoonstelling over de invloeden van Newton in de Nederlanden van de 17de eeuw

plaats Museum Boerhaave, Leiden

info www.museumboerhaave.nl/newtonmania

8 – 13 maart 2010

YEP VII

7de editie van de workshop voor jonge Europese kansrekenaars over kansrekening en algoritmes

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events

12 maart 2010

Algebra- en meetkundedag

Ter gelegenheid van het verblijf van Spencer Bloch in Nederland als Stieltjes professor 2010

plaats UvA, Amsterdam

info www.few.vu.nl/jeu/Stieltjes-professor-schedule-2010.html

12 – 13 maart 2010

Finaleweekend Wiskunde A-lympiade

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats Garderen

info www.fi.uu.nl/alympiade

18 maart 2010

Kangoeroewedstrijd

Reken- en wiskundewedstrijd voor alle leerlingen in het basis- en voortgezet onderwijs (vanaf groep 5)

plaats Deelnemende scholen

info www.math.ru.nl/kangoeroe

18 – 19 maart 2010

Nationale Rekendagen

Ontmoetingsplaats voor leerkrachten basisonderwijs

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

23 maart 2010

NWO talentendag

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl

25 maart 2010

Afscheidscollege Peter van Emde Boas

Afscheidscollege en colloquium ter gelegenheid van het emeritaat van Peter van Emde Boas

plaats Aula UvA, Amsterdam

info www.science.uva.nl

26 maart 2010

Halve Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, de jaarlijkse wiskundewedstrijd voor havo- en vwo-scholieren

plaats regionale locaties

info www.wiskundeolympiade.nl

april 2010

7 april 2010

Netwerkdag voor coördinatoren rekenen

Netwerkdag met als speciale thema's: toetsing, doorlopende leerlijnen en het opzetten van het werkplan voor de schoolorganisatie

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.coördinatorenbasisonderwijs.nl/mambo/index.php

12 – 16 april 2010

European Study Group with Industry 2010

Europese wiskundigen komen samen om te brainstormen over industriële problemen

plaats University of Warwick, UK

info miis.maths.ox.ac.uk

13 – 16 april 2010

Nonlinear Dynamics of Natural Systems

Workshop ter gelegenheid van het vijfjarig bestaan van het cluster NDNS+

plaats TU/e, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events/workshops/2010/NDNS.htm

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: agenda@nieuwarchief.nl

15 april 2010

Opening Applied Mathematics Institute

Opening van het nieuwe AMI onder de 3TU paraplu. Met keynote toespraken van Volker Mehrmann (Mattheon, Berlijn), Huib de Vriend (Deltares) en Robbert Dijkgraaf (KNAW)

plaats TU Delft, Auditorium

info ami.3tu.nl

19 – 23 april 2010

Educational Interfaces between Mathematics and Industry

Bijeenkomst over de connecties tussen wiskunde en industrie en mogelijkheden om onderwijs hierop af te stemmen

plaats Lissabon, Portugal

info eimi.mathdir.org

21 april 2010

Grote Rekendag 2010

Landelijke dag voor basisscholen waarop alles in het teken staat van rekenen

plaats Deelnemende scholen

info www.rekenweb.nl/groterekendag

22 – 23 april 2010

46ste Nederlands Mathematisch Congres

Dit jaarlijkse congres is de ontmoetingsplek bij uitstek van wiskundig Nederland

plaats Utrecht

info www.fi.uu.nl/nmc2010/welcome.html

24 april 2010

HKRWO 2010

16de symposium over de geschiedenis van het reken- en wiskundeonderwijs, getiteld 'Bloed, Zweet en Tranen...! Examens als spiegel van veranderingen in het reken- wiskundeonderwijs'

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.fi.uu.nl/hkrwo

mei 2010

17 – 19 mei

Dynamical Systems and Number Theory

Europese workshop voor jonge onderzoekers over het grensgebied tussen dynamische systemen en getaltheorie

plaats Edinburgh, Schotland

info www.icms.org.uk/workshops/euyam

31 mei – 4 juni 2010

EIDMA/DIAMANT minicourse

Minicursus door Pablo Parrilo, getiteld 'Algebraic Optimization and Semidefinite Programming'

plaats CWI, Amsterdam

info www.win.tue.nl/math/eidma

juni 2010

7 – 18 juni 2010

Numeration

Een week van minicursussen, gevolgd door een workshop van een week over verschillende aspecten van getalsystemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

21 juni – 10 juli 2010

PIMS Summer School

5de editie van de zomerschool over kansrekening voor jonge onderzoekers

plaats University of Washington, US

info pims2010.web.officelive.com/default.aspx

23 – 25 juni 2010

Onderwijsresearchdagen 2010

Onderzoekspresentaties over onderwijs, met als thema: De lerende leraar als onderzoeker en ontwerper

plaats Universiteit Twente, Enschede

info www.utwente.nl/onderwijs/ord2010

24 – 25 juni 2010

Stochastic models of manufacturing systems

Workshop over recent onderzoek op het gebied van prestatieanalyse van productieprocessen met nadruk op stochastisch modelleren

plaats TU/e, Eindhoven

info www.eurandom.nl/events/workshops/2010/SMMS.dwt

28 juni – 2 juli 2010

GQT-conferentie

Conferentie ter gelegenheid van het vierjarig bestaan van het GQT-cluster

plaats Nijmegen

info www.gqt.nl

juli 2010

11 – 16 juli 2010

ICOTS8

8ste internationale conferentie over statistiekonderwijs, getiteld 'Data and context in statistics education: towards an evidence-based society'

plaats Ljubljana, Slovenië

info cots8.org

19 – 23 juli 2010

6th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education

6de editie van deze conferentie over geschiedenis en kennisleer in het wiskundeonderwijs

plaats Wenen, Oostenrijk

info www.clab.edc.uoc.gr/HPM/ESU6-1stAnnouncement.pdf

24 – 28 juli 2010

Bridges Pécs 2010

13de editie van deze jaarlijks terugkerende conferentie over wiskunde in relatie tot kunst, muziek en wetenschap

plaats Pécs, Hongarije

info pecsikult.hu/en/bridges2010

augustus 2010

18 – 25 augustus 2010

YESS-5 Summer School

5de editie van de zomerschool van de Young European Researchers in Mathematics Education.

plaats Palermo, Italië

info yerme.eu

19 – 27 augustus 2010

International Congress of Mathematicians 2010

Internationaal congres voor wiskundigen

plaats Hyderabad, India

info www.mathunion.org/ICM/PC/2010.html

Nieuws

| News

Een langdurig lemma

Wiskunde heeft de top tien gehaald van belangrijkste wetenschappelijke ontdekkingen in 2009 volgens het Amerikaanse tijdschrift *Time*. Op de zevende plaats staat het Fundamentele Lemma.

Het Fundamentele Lemma komt uit het Langlandsprogramma. Robert Langlands, een Canadese wiskundige, begon in 1967 met het opschrijven van een serie vermoedens, die nu samen bekend staan als het Langlandsprogramma. De vermoedens leggen allerlei verbanden tussen verschillende gebieden binnen de wiskunde, als getaltheorie, analyse, algebraïsche meetkunde en groepentheorie. Toen hij zijn vermoedens formuleerde, vermoedde Langlands ook al dat het hem niet zou lukken om alles zelf uit te werken.

Eén van de onderdelen van het programma is het Fundamentele Lemma. Aanvankelijk dacht Langlands dat het bewijzen daarvan niet al te moeilijk zou zijn en het lukte hem en een aantal van zijn studenten dan ook vrij snel om een paar speciale gevallen te bewijzen. Het algemene geval bleek echter veel lastiger dan gedacht. Pas in 2006 slaagde de Vietnamese wiskundige Ngô Bao Châu, werkzaam aan de Universiteit Paris-Sud en het Institute for Advanced Studies in Princeton, erin het bewijs te leveren en in 2009 waren de experts het erover eens dat het bewijs klopt.

Bron: www.kennislink.nl

Goede prestaties 6vwo-leerlingen

Nederlandse bètaleerlingen hebben goed gepresteerd op een internationale test naar het niveau van vwo-leerlingen op de gebieden wiskunde en natuurkunde. Dat is gebleken uit de resultaten van de TIMSS-Advanced 2008 naar het niveau van leerlingen in de laatste klas van het voortgezet onderwijs, die op 9 december 2009 bekend gemaakt werden.

Voor de test werden bijna veertig duizend leerlingen uit tien landen onderzocht die op pre-universitair niveau wiskunde en natuurkunde volgen. In Nederland zijn leerlingen getest uit 6 vwo met wiskunde B1,2 en/of natuurkunde 1,2 in hun pakket. In Nederland werd het onderzoek uitgevoerd door de Universiteit Twente, er deden in totaal 228 scholen mee.

De Nederlandse leerlingen deden het vooral goed bij de natuurkundetoets en haalden daar een gemiddelde score van 582, wat ver boven het schaalgemiddelde van de TIMSS van 500 was. Een vijfde van de leerlingen haalde zelfs het hoogst haalbare aantal punten, 625. Nederland stond dan ook bovenaan de natuurkunderanglijst. De gemiddelde score bij wiskunde was 552 punten en hier haalde zes procent van de leerlingen het hoogste niveau. Zeven van de tien landen zat onder dit schaalgemiddelde.

Wel moet opgemerkt worden dat in Nederland slechts een kleine groep leerlingen getest is, omdat slechts 3,5 procent van alle 18-jarigen eindexamen doet in wiskunde en/of natuurkunde op pre-universitair niveau. In de meeste andere landen is dit aandeel flink hoger. In Slovenië is dit voor wiskunde zelfs veertig procent. Hierdoor zijn in de meeste landen de verschillen tussen de leerlingen groter.

Buiten het niveau, werden ook het zelfvertrouwen van de leerlingen op het gebied van wiskunde en natuurkunde en hun interesse voor deze vakken onderzocht. Hieruit bleek dat de Nederlandse meisjes die meededen aan de test net zo veel vertrouwen hebben in hun wiskundevaardigheden als de Nederlandse jongens en het vak ook net zo aantrekkelijk vinden. Wel valt op dat er veel minder meisjes dan jongens wiskunde op dit niveau volgen. Het aandeel meisjes is minder dan een kwart. Samen met Libanon heeft Nederland ook het laagste

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

percentage vrouwelijke wiskundedocenten dat aan deze leerlingen les geeft, vijftien procent van alle wiskunde B2-docenten.

Bij natuurkunde liggen deze percentages ook lager dan in de andere landen. Negentien procent van de natuurkunde 2 leerlingen is een meisje en het aandeel vrouwelijke docenten is vijf procent. Bovendien hebben deze meisjes bij natuurkunde slechter gepresteerd dan de jongens, vinden ze het vak minder aantrekkelijk en hebben ze minder vertrouwen in hun eigen kunnen. Wel hebben de Nederlandse meisjes het voor natuurkunde gemiddeld beter gedaan dan jongens en meisjes uit andere landen.

Als laatste viel op dat de Nederlandse bètameisjes minder geïnteresseerd zijn in een bètastudie dan de bètajongens. Minder dan de helft van de onderzochte wiskunde B2-meisjes wil een bètatechnische studie gaan doen, 37 procent geeft de voorkeur aan een medische studie. Van de natuurkunde 2-meisjes is dit 26 procent. Van de jongens kiest bijna driekwart voor een bètatechnische studie.

Tijdens het onderzoek zijn ook de docenten ondervraagd. Hieruit bleek dat de Nederlandse docenten zich goed toegerust voelen om de vakken te geven en weinig belemmeringen ervaren in hun werk. Alleen het ontbreken van een eigen werkplek was een serieus probleem voor veertig procent van de docenten.

Bron: www.nwo.nl

Hoe je een slimme meid op haar toekomst voorbereidt

Er is haast geen verschil tussen hoe goed jongens en meisjes in wiskunde zijn. Dit is de conclusie van Nicole Else-Quest en haar collega's van de University of Villanova na het bestuderen van testdata uit 2003.

De resultaten van twee onderzoeken werden gebruikt: de Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) en het Programme for International Student Assessment (PISA). Hierin zijn totaal 493.495 leerlingen in de leeftijd van veertien tot zestien jaar getest uit 69 verschillende landen. De TIMSS onderzoekt vooral wiskundige basisvaardigheden en de PISA onderzoekt of leerlingen in staat zijn om hun wiskundevaardigheden toe te passen in het dagelijks leven.

De belangrijkste conclusie uit hun onderzoek was dat jongens en meisjes op het zelfde niveau kunnen presteren, mits gebruik gemaakt wordt van de juiste educatieve middelen en er voor de leerlingen zichtbare vrouwelijke rolmodellen zijn die goed zijn in wiskunde. Het grote verschil tussen jongens en meisjes op het gebied van wiskunde is dat meisjes minder zelfvertrouwen hebben op dit gebied. De onderzoekers stelden vast dat in landen waar meer vrouwen onderzoekachtig werk doen, meisjes vaak beter presteerden op het gebied van wiskunde en ook meer zelfvertrouwen hadden.

Deze resultaten zijn begin dit jaar in de *Psychological Bulletin* van de American Psychological Association verschenen.

Bron: www.sciencedaily.com

Hard van stapel

In het decembernummer van het Nieuw Archief berichtten we al over een nieuw record tetraëders stapelen van Salvatore Torquato en Yang Jiao. Het is hierbij de bedoeling om de ruimte zo ver mogelijk op te vullen met tetraëders. Sinds toen zijn er nieuwe vorderingen gemaakt op verschillende plaatsen.

Ten eerste door Elizabeth Chen, een promovenda aan de University of Michigan. Haar promotor, Jeffrey Lagarias, daagde haar uit om de stapeling van Torquato en Conway uit 2006, met een dichtheid van 72 procent, te verslaan. Chen vond een stapeling van 78 procent, wat betekent dat deze stapeling de ruimte beter opvult dan de beken-

de optimale bolstapeling, waarbij bollen als kanonskogels gestapeld worden. Chen maakte haar resultaten vorig jaar augustus bekend.

Ondertussen ging ook Sharon Glotzer van University of Michigan aan de slag. Op zoek naar een nieuwe materialen voor de luchtmacht met bijzondere optische eigenschappen vond ze een tetraëderstapeling van maar liefst 85 procent. Eigenlijk was ze op zoek naar een periodieke stapeling, maar de stapeling die ze vond had de complexe structuur van een quasikristal. En net nadat dit resultaat klaar was om gepubliceerd te worden in het tijdschrift *Nature* in december vond een groep onderzoekers aan Cornell University met andere methodes een even dichte stapeling. Verrassend was dat deze stapeling een veel eenvoudigere structuur heeft dan die van Glotzer.

En ook hier bleef het niet bij, want een paar dagen voor de Kerst maakten Torquato en Jiao bekend dat ze de stapeling van de groep in Cornell een beetje hadden aangepast en zo een stapeling hadden gekregen van 85,55 procent. In een interview eind december zei Torquato dat het hem zou verbazen als dit de dichtst mogelijke stapeling zou zijn. En inderdaad, begin januari zette Chen nieuwe artikel op het internet waarin ze een familie van stapelingen omschrijft die de stapeling van Cornell bevat, maar ook een nog betere stapeling. Het record voor tetraëderstapelen staat nu weer op naam van Elizabeth Chen en is 85,63 procent.

Bron: www.nytimes.com

Niet sporen?

Een groep theoretische natuurkundigen en scheikundigen uit de Verenigde Staten en Israël hebben het gedrag van bacteriën onder moeilijke levensomstandigheden onderzocht. Ze zeggen daardoor meer inzicht te hebben gekregen over hoe mensen beslissingen zouden moeten nemen die te maken hebben met hun gezondheid, welzijn en het lot van anderen. De onderzoekers in kwestie zijn José Onuchic, Peter Wolynes en Daniel Schultz van de University of California en Eschel Ben Jacob van de University of Tel Aviv in Israël. Hun resultaten zijn begin december in het tijdschrift *Proceedings of the National Academy of Sciences* verschenen.

Eén bacteriekolonie kan meer dan honderd keer het aantal mensen op aarde bevatten. Als bacteriën zich in een levensbedreigende situatie bevinden, hebben ze twee belangrijke strategieën voor handen. Ten eerste kunnen ze een endospore maken: deze bevat een kopie van het DNA van de moeder cel en bevindt zich in slapende toestand om beter bestand te zijn tegen temperatuurschommelingen en voedseltekort. Onder betere omstandigheden kan deze spore ontkiemen tot volwaardige bacterie. Het nadeel is dat de moeder cel sterft als deze een spore produceert. In plaats van een spore te produceren, kunnen bacteriën er tijdens het overgangsproces ook voor kiezen om te ontsnappen en in een andere toestand over te gaan, zogenaamde competentie, waarbij de bacterie zijn membraan aanpast om makkelijker materiaal van de stervende cellen uit zijn omgeving op te kunnen nemen en zo te kunnen blijven leven in de onvriendelijke omstandigheden. De cel zelf blijft zo in leven en keert terug tot zijn normale toestand als omstandigheden verbeteren. Het nadeel is dat de bacterie zeer waarschijnlijk sterft als de omstandigheden verder verslechteren en dat het overgaan in deze toestand alleen helpt als de meeste andere bacteriën dit niet doen. In een dergelijke situatie staat een bacterie dus voor een keuze en onder tijdsdruk om deze keuze te maken. Bovendien hangt de keuze van één bacterie af van de beslissing van alle andere bacteriën in de kolonie.

Bacteriën gebruiken chemische boodschappen om met elkaar te communiceren en zijn op ieder moment op de hoogte van de intenties van alle andere leden van de kolonie. Ze nemen beslissingen op ba-

sis van een gespecialiseerd netwerk van genen en proteïnen. In hun artikel beschrijven de onderzoekers in een model hoe bacteriën dit gen-proteïne netwerk gebruiken om risico's te berekenen. Ook kijken ze naar de speltheorie die bacteriën gebruiken bij het maken van hun uiteindelijke beslissing.

Het dilemma van de bacteriën is enigszins te vergelijken met het bekende prisoner's dilemma. Hierin krijgen twee personen die zijn opgepakt voor dezelfde misdaad door de politie het volgende voorstel. Als ze allebei niet bekennen, dan worden ze bij gebrek aan bewijs vrijgelaten. Als één van beiden bekend, dan wordt deze persoon vrijgelaten en de ander krijgt tien jaar gevangenisstraf. Als ze allebei bekennen, dan krijgen ze allebei vijf jaar gevangenisstraf. In het algemeen zijn bacteriën eerlijk tegenover elkaar over hun bedoelingen. Daardoor is hun dilemma een zeer ingewikkelde versie van het prisoner's dilemma. Het is voor iedere afzonderlijke bacterie alleen aantrekkelijk om te ontsnappen aan het maken van een spore als de meeste andere bacteriën dat niet doen. Maar als dat zo is, dan is het niet verstandig om deze gok te nemen, omdat de andere bacteriën waarschijnlijk tot dezelfde conclusie zijn gekomen.

Een belangrijk verschil tussen het prisoner's dilemma en het dilemma van de bacteriën is dat de bacteriën maar beperkt de tijd hebben om een beslissing te nemen. Ben Jacob zegt dat ze tijdens het onderzoek ontdekt hebben dat iedere bacterie een interne klok heeft, die sneller gaat tikken naar mate het beslissingsproces langer duurt. En, iedere bacterie stelt de beslissing zo lang mogelijk uit, probeert zo veel mogelijk informatie te verzamelen voordat het de levensbelangrijke beslissing neemt.

Volgens de onderzoekers zijn er directe relaties tussen dit onderzoek en menselijke beslissingen. Bijvoorbeeld als we beslissen om ons ergens voor te laten inenten. Vanwege eventuele risico's zou het voor ieder individu beter zijn om zich niet te laten inenten, maar alleen als de meeste anderen zich wel laten inenten. Ook zouden er toepassingen zijn in de economie en politieke wetenschappen, waarin menselijke beslissingen een grote rol spelen.

Bron: www.sciencedaily.com



Bacteriën

Fermat Prize voor Lindenstrauss en Villani

Elon Lindenstrauss en Cédric Villani hebben de Fermat Prize 2009 uitgereikt gekregen.

De Franse prijs is vernoemd naar de legendarische wiskundige Pierre de Fermat, vooral bekend om zijn beroemde 'Laatste Stelling' waarvan het bewijs niet in de kantlijn paste. De prijs wordt elke twee jaar uitgereikt door het Institut de Mathématiques van de Université Paul Sabatier in Toulouse en bedraagt 20.000 euro. Het is de bedoeling om onderzoek uit gebieden waar Fermat zelf actief in was in het zonnetje te zetten en dan vooral onderzoek dat toegankelijk is voor veel wiskundigen die werkzaam zijn in deze gebieden.

Elon Lindenstrauss is hoogleraar in de wiskunde aan Princeton University en heeft aanzienlijke bijdragen geleverd in de getaltheorie. Hij doet veel onderzoek op het gebied van ergodentheorie en dynamische systemen en de toepassingen hiervan op het gebied van getaltheorie.

Cédric Villani is directeur van het Institut Henri Poincaré aan de Université Pierre et Marie Curie in Parijs. Hij doet onderzoek naar onder andere beweging en optimaal transport en de toepassingen hiervan.

De prijswinnaars krijgen de gelegenheid om in Toulouse over hun onderzoek te komen praten en hun resultaten te publiceren in het wiskundetijdschrift van de universiteit.

Bron: math.suite101.com

Een kleurtje krijgen

Onderzoeker Fernando de Oliveira Filho van het Centrum Wiskunde & Informatica (CWI) in Amsterdam verbeterde de ondergrenzen van het chromatisch getal. Hij promoveerde op 1 december op zijn proefschrift 'New Bounds for Geometric Packing and Coloring via Harmonic Analysis and Optimization'.

Het probleem dat De Oliveira Filho bestudeerde, werd in 1950 door de wiskundige Nelson geformuleerd. Die vroeg zich af hoeveel kleuren er nodig zijn om alle punten in het vlak te kleuren, op zo'n manier dat punten die op afstand 1 van elkaar liggen niet dezelfde kleur krijgen. Het minimale aantal kleuren dat hiervoor nodig is wordt het 'chromatisch getal' van het vlak genoemd. Hoewel het eenvoudig klinkt, is het probleem onopgelost en zeer moeilijk. Men weet dat het getal tussen vier en zeven ligt.

Voor hoger dimensionale ruimtes kan dezelfde vraag gesteld worden. De Oliveira Filho verbeterde met nieuwe optimalisatiemethodes de ondergrenzen van de chromatische getallen voor ruimtes van dimensie drie en hoger. Hiervoor gebruikte hij Lebesgue meetbare verzamelingen. Hoe hoger de dimensie, hoe groter de verbetering is die de methodes van De Oliveira Filho opleveren. De optimalisatiemethodes van De Oliveira Filho kunnen waarschijnlijk toegepast worden op tal van andere gebieden. Dit soort kleurproblemen wordt bijvoorbeeld gebruikt bij het toewijzen van frequenties aan mobiele telefoons.

Bron: www.cwi.nl

Stuk voor stuk

In december verscheen op de website van NewScientist een artikel over de 15 jaar durende zoektocht van Rick Mabry en Paul Deiermann naar het bewijs van de Pizzastelling. In mei 2009 verscheen het artikel van Mabry en Deiermann hierover in de American Mathematical Monthly.

Mabry en Deiermann beantwoordden de volgende vraag. Stel dat je met zijn tweeën een pizza besteld en die pizza verschijnt voorgesneden op tafel. De pizza wordt door een aantal rechte lijnen die van kant tot kant lopen in stukken gedeeld. Deze lijnen hebben allemaal één punt gemeenschappelijk, maar dat punt is niet het middelpunt van de pizza. Verder zijn de hoeken tussen de lijnen hetzelfde. Stel dat je om en om een stuk pakt. Krijg je dan allebei evenveel en zo niet, wie krijgt er meer pizza?

Het is makkelijk te zien dat als één van de lijnen door het midden van de pizza gaat, je dan allebei evenveel pizza krijgt, ongeacht het aantal keer dat gesneden is. Maar wat als dit niet gebeurt? Bij één keer snijden is het antwoord ook duidelijk. Degene die het stuk eet waar het midden van de pizza op ligt, eet het meest. Hetzelfde geldt voor twee keer snijden, maar dat blijkt een uitzondering op de regel te zijn. In artikelen uit 1967 en 1968 in het *Mathematical Magazine* over dit probleem werd namelijk bewezen dat als de pizza een even aantal

keer en meer dan twee keer gesneden is, dat dan beide eters evenveel pizza krijgen.

In 1994 gaf Deiermann een herziene versie van één van deze artikelen aan Mabry. Het vermoeden was dat voor een oneven aantal keer snijden het volgende geldt. Als het aantal keer snijden 'e'en van de volgende getallen is: 3, 7, 11, 15, ..., dan eet de persoon die het midden van de pizza krijgt het meest. Als het aantal keer snijden 5, 9, 13, 17, ... is, dan geldt het omgekeerde. In de herziene versie van het artikel werden de lezers uitgedaagd om een bewijs te geven voor drie en voor vijf keer snijden.

Deiermann en Mabry begonnen enthousiast en hadden al snel de twee vragen uit het artikel beantwoord. Ze dachten een manier te hebben die zou werken voor alle oneven aantallen. Helaas leverde hun methode ingewikkelde reeksen op met goniometrische functies. En hoewel ze alleen maar hoefden te weten of het uiteindelijke resultaat positief of negatief was om te bepalen wie het grootste deel van de pizza kreeg, lukte het hen niet om deze laatste stap te zetten.

Meer dan elf jaar later was Mabry op vakantie in het zuiden van Duitsland, toen hij ineens zag hoe hij de formules kon versimpelen. Terug thuis zette hij de computer aan het werk en dook in de archieven om te kijken of er al resultaten bekend waren over de formules die hij nu had gekregen. In een artikel uit 1999 vond hij wat hij zocht en daarna was hij met Deiermann in staat om het bewijs af te ronden.

Natuurlijk zijn er veel manieren om dit onderzoek voort te zetten. Bijvoorbeeld door te kijken naar wie de meeste korst eet of naar vierkante pizza's. Of naar hogere dimensies. Een calzone zou bijvoorbeeld opgevat kunnen worden als een driedimensionale pizza. Mabry en Deiermann hebben een hoop vragen in deze richtingen ondertussen ook al opgelost, maar er blijft nog genoeg te doen. *Bron: www.newscientist.com*



Meer wiskunde-rekenonderwijs op pabo

In december werd bekend dat pabo-studenten meer uren per week les zullen krijgen in taal en wiskunde-rekenen. Het aantal lessen zal flink opgekrikt worden, tot vijf uur per week per vak. Op sommige pabo's is het nu minder dan een uur per week.

Deze nieuwe eisen staan in de *Kennisbasis*, een document waarin vastgelegd is wat een leraar moet kennen en kunnen en dat op 7 december werd gepresenteerd door de hbo-raad. Deze basis werd vastgelegd naar aanleiding van de aanhoudende kritiek op de lerarenopleidingen.

Pabo-studenten zullen in de toekomst op taal- en wiskunde-rekenvaardigheid getoetst worden na de propedeuse en aan het einde van de opleiding. Uiteindelijk is het de bedoeling dat de instaptoets zal worden afgeschaft, ook omdat de verscherpte exameneisen vanaf 2014 ervoor zullen zorgen dat studenten met een hoger ingangsniveau

van de middelbare school zullen komen.

Door de nieuwe eisen zal het curriculum aangepast moeten worden. Er worden nu verschillende mogelijkheden overwogen, zoals het verlengen van de opleiding met een jaar, het schrappen van vakken of een specialisatie van onder- en bovenbouw op de pabo. *Bron: www.nrc.nl*

Meer π

Op 31 december 2009 heeft Fabrice Bellard het wereldrecord bekende decimalen van π verbroken en nog verrassender: hij heeft dit gedaan op een doodgewone pc. Er zijn nu bijna 2,7 biljoen decimalen van π bekend, om precies te zijn 2699999990000. Om het resultaat op te slaan is 1137 GB aan opslagruimte nodig.

Om de decimalen te vinden heeft Bellard de computer eerst een boel binaire cijfers achter de komma laten berekenen. Dat duurde 103 dagen en daarna nog dertien dagen om het resultaat te controleren. Voor de omzetting van binair naar decimaal waren twaalf dagen nodig en daarna nog eens drie dagen voor de controle. In totaal is de computer van Bellard, die minder dan twee duizend euro heeft gekost, dus 131 dagen aan het rekenen geweest.

Het vorige record stond op ongeveer 2,577 biljoen decimalen. Ze werden berekend door Daisuke Takahashi, die ze op 17 augustus 2009 bekend maakte. *Bron: bellard.org/pi/piz700e9*

Anderhalf miljoen voor focus en massa in stochastische wiskunde

NWO trekt de komende twee jaar 1,5 miljoen euro uit voor de stochastiek, de tak van de wiskunde die zich bezighoudt met kansrekening, statistiek en stochastische besliswiskunde. Van het geld worden hoofdzakelijk posities gecreëerd voor aio's, postdocs en universitair docenten. NWO steunt hiermee het wiskundecluster *Stochastics - Theoretical and Applied Research* (STAR), dat op 15 mei 2009 werd opgericht als vierde loot aan de stam van wiskundeclusters. De clusters zijn vijf jaar geleden ontstaan om tegenwicht te bieden aan de teruglopende aantallen studenten en staf aan de wiskundeopleidingen.

Het wiskundecluster STAR wil de samenwerking tussen Nederlandse onderzoekers in de stochastiek bevorderen en hen internationaal beter op de kaart zetten. De zo belangrijke financiële stochastiek en de biostochastiek, die beide nu te weinig massa hebben, zullen ook een impuls krijgen uit de nieuwe financiële ondersteuning. Een speciale commissie zal het onderwijs regionaal en landelijk beter op elkaar afstemmen.

De drie andere clusters zijn *Discrete, Interactive and Algorithmic Mathematics, Algebra and Number Theory* (DIAMANT), *Non-linear Dynamics of Natural Systems* (NDNS), en *Fellowship of Geometry and Quantum Theory* (FGQT). In het Masterplan Toekomst Wiskunde is voor de vier clusters tezamen een jaarlijks bedrag van 4,5 miljoen euro beoogd. *Bron: Annemarijke Jolmers, NWO*

De sleutel tot succes

Onderzoekers van de Cryptology and Information Security groep van het Centrum Wiskunde en Informatica (CWI) in Amsterdam hebben in samenwerking met groepen uit Duitsland (BSI en de Universität Bonn), Frankrijk (INRIA Nancy), Japan (NTT) en Zwitserland (EPFL) een RSA-sleutel van 232 decimale cijfers gebroken door de priemfactoren hiervan te vinden.

Het cryptosysteem RSA wordt onder andere gebruikt om gegevens te versleutelen die over het internet worden verstuurd. Het idee erachter

is dat het heel moeilijk is om een groot getal in zijn priemfactoren te ontbinden. Daarom wordt voor dit grote getal het product genomen van twee grote priemgetallen. Als je erachter kunt komen wat deze twee priemgetallen zijn, dan kun je de gegevens die met dit getal zijn versleuteld ontcijferen.

Het getal dat werd gekraakt heet RSA-768 en kwam uit de lijst van de RSA Factoring Challenge. In 1991 publiceerde de RSA Laboratories een lijst met getallen en loofde een geldprijs uit voor de factorisatie van deze getallen in priemfactoren. Het doel was om het onderzoek in computationele getaltheorie en het factoriseren van grote getallen in priemfactoren te stimuleren. Het kleinste getal uit deze lijst werd al in april 1991 gefactoriseerd, maar veel getallen uit de lijst zijn nog steeds niet gekraakt. In 2007 besloot de RSA Laboratories met de uitdaging te stoppen.

Om RSA-768 te factoriseren werd gedurende 2,5 jaar gerekend op vele duizenden computers op verschillende locaties. Het CWI heeft een lange traditie in dit soort rekenprojecten. In 1999 speelde het een belangrijke rol bij het voor het eerst breken van een 512-bits RSA-sleutel en in 2008 werd het MD5 internet-beveiligingssysteem 'gekraakt' waarmee de kwetsbaarheid in de infrastructuur van digitale certificaten werd aangetoond.

Bron: www.cwi.nl

Newton aan het werk

Dit jaar staat Museum Boerhaave in Leiden in het teken van Sir Isaac Newton met een grote tentoonstelling genaamd *NewtonMania*. In een aantal zalen is een tentoonstelling opgezet over de invloed van Newton in de Nederlanden van de zeventiende eeuw. Het topstuk hiervan is zijn beroemde boek *Principia Mathematica* uit 1687. In een aantal andere zalen kun je zelf aan de slag met allerlei experimenten die laten zien hoe de wetten van de natuur werken.

Bij de tentoonstelling zijn onderwijsprogramma's gemaakt voor zowel het basisonderwijs als het voortgezet onderwijs. Ook staat er een quiz online met vragen over 10 van de 22 experimenten.

Ter gelegenheid van deze tentoonstelling geeft Epsilon Uitgaven een stripboek uit, getiteld *Newton in Nederland*.

Bron: www.museumboerhaave.nl/newtonmania



Kwadrateren en parkeren

Afgelopen november werd Simon Blackburn, wiskundeprofessor aan de University of London benaderd door Vauxhall Motors met de vraag

of hij een rapport wilde schrijven over de wiskunde achter parkeren. Blackburn besloot dat dit een mooie gelegenheid was om te laten zien wat je met simpele wiskunde kunt doen en ging aan de slag.

Blackburn besloot zich te richten op fileparkeren. Hij bedacht een definitie voor perfect parkeren, namelijk in 1 keer achteruit insteken en dan op de juiste plek terecht komen zonder eindeloos heen en weer te moeten manoeuvreren. Hij berekende hoe lang de parkeerplaats dan moet zijn en het resultaat was de volgende formule:

$$\sqrt{(r^2 - l^2) + (l^2 + k^2)} - (\sqrt{r^2 - l^2} - w)^2 - l - k.$$

Hierin is r de straal van de draaicirkel van de auto, l is de afstand tussen het middelpunt van een voorwiel en het middelpunt van het achterwiel aan dezelfde kant, k is de afstand van het middelpunt van een voorwiel tot aan de voorkant van de auto en w is de breedte van de auto die voor je staat als je eenmaal ingeparkeerd bent. De lengte van de parkeerplaats is de som van het getal dat uit de formule komt en de lengte van je auto.

Bron: news.cnet.com



Onvoldoende voor vmbo-t

Een kwart van de vmbo-t scholen van Nederland presteert onder de maat volgens het dagblad *Trouw*, dat ieder jaar een onderzoek uitvoert naar de prestaties van middelbare scholen. *Trouw* gebruikte dit jaar een nieuwe manier om de prestaties van scholen te meten. De methode is ontwikkeld door Jaap Donkers, hoogleraar aan de Universiteit Maastricht, en maakt vooral gebruik van de prestaties van de geslaagde leerlingen in de kernvakken Nederlands, Engels en wiskunde.

Uit het onderzoek bleek dat bijna vijftig van de bijna achthonderd vmbo-t scholen die ons land rijk is, gemiddeld voor minstens twee van de drie kernvakken een cijfer haalde dat lager is dan een zes. Voor tien scholen gold dat zelfs voor alle drie de vakken. In veel gevallen compenseren leerlingen van deze scholen een onvoldoende voor hun eindexamen met een veel hoger cijfer voor hun eerder gemaakte schoolonderzoeken.

Hetzelfde onderzoek wees uit dat havo's juist goed scoren. Veertig procent van de scholen blonk uit met een score van een zeven of meer voor minstens één van de kernvakken.

Bron: www.trouw.nl

Van de voorzitter van het KWG

BètaMentality

We blijven dingen naar de gunst van vwo-ers bij het werven voor het hoger onderwijs: we organiseren voorlichtingsbijeenkomsten, masterclasses, meeloopcolleges, sturen promoteteams naar scholen, bouwen vrachtwagens om tot rijdende collegezalen, kortom, we deinzen nergens voor terug. We proberen zelfs in de onderbouw de profielkeuze te beïnvloeden. Maar we tasten ook in het duister, wat betreft de effecten van al dit moois. De vraag blijft of we de hele doelgroep bereiken en of we ze op de juiste manier aanspreken.

“Nog geen 20% van de Nederlandse jongeren maakt na de middelbare school de keuze voor een technische of bètastudie. Onze kennisgedreven samenleving vraagt echter om meer.” Aldus het document *BètaMentality: Jongeren boeien voor bèta en techniek*, waarin het Platform Bèta Techniek (PBT) in 2007 de resultaten publiceerde van een onderzoek naar wat jongeren beweegt om een exacte vervolgopleiding te kiezen. Er blijken nieuwe doelgroepen te zijn: jongeren die nu niet voor een exacte opleiding kiezen, maar er wel belangstelling voor hebben, en jongeren die goed zijn in de exacte vakken maar een negatief beeld hebben van bèta en techniek.

Niet alleen bij wiskunde voelen we de urgentie de universitaire instroom en uitstroom te vergroten. Zo zijn de recente sectorplannen natuur- en scheikunde niet alleen ingegeven door de noodzaak te investeren in het onderzoek in deze disciplines, maar ook door de groeiende behoefte van de industrie aan academisch geschoolde bèta's. Het kabinet heeft voor beide disciplines — helaas niet voor het Masterplan Wiskunde — in de komende tijd miljoenen euro's beschikbaar gesteld, met als tegenprestatie de verplichting om de komende jaren de instroom en de uitstroom sterk te vergroten.

Wat kunnen we nu nog meer doen om de instroom in de wiskunde-opleidingen te vergroten? Hoe ziet onze doelgroep er eigenlijk uit? Het PBT-rapport onderscheidt bij de groep middelbare scholieren vier BètaMentality-milieus, en kijkt daarbij naar hun gerichtheid op het heden (hoe interessant is de opleiding?) of op de toekomst (wat kan ik ermee worden?), en naar hun motivatie. De *concrete bèta's*, 36% van de populatie, zijn vooral

intrinsiek gemotiveerd, en vinden een interessante opleiding van belang. In deze groep vinden we waarschijnlijk de meeste universitaire wiskundestudenten. Van de overige drie BètaMentality-milieus vormen de *geïnteresseerde generalisten* (21% van alle jongeren) wellicht een nieuwe doelgroep voor onze academische wiskunde-opleidingen. Zij zijn veelal extrinsiek gemotiveerd, en hoewel ze meestal geen problemen hebben met de exacte vakken, kiezen ze nu vaak niet het profiel Natuur & Techniek. Ze zijn heel bewust bezig met hun beroepsmogelijkheden. Onze natuurkunde- en scheikundecollega's lijken te werven in deze doelgroep met bredere opleidingen. Ook voor wiskunde ligt daar een kans. We zullen dan meer aandacht moeten besteden aan de context van de wiskunde, aan de toepassingen in aanpalende wetenschappen en in de samenleving, en aan het beroepsperspectief. Durven we het aan onze curricula op te rekken en een breed en flexibel aanbod in de markt te zetten? Met stagnerende financiële middelen wordt dat zeer lastig, maar het is wel de moeite waard.

Bij de aanbevelingen in het PBT-rapport voor de PR zelf, is het vooralsnog niet duidelijk wat de effecten daarvan zijn. Uit recent onderzoek aan de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen in Groningen blijkt met name bij de wiskundestudenten dat de rol van de leraar bij zo'n 50% doorslaggevend is geweest, in deze gevallen dus in positieve zin. Maar in het PBT-rapport staan ook veel anekdotes over 'didactische frustratie' waardoor leerlingen juist niet voor een bèta-opleiding kiezen. Belangrijk is dus al in het voortgezet onderwijs via goede leraren het imago van de wiskunde te verbeteren. Daarvoor moeten ook vwo-docenten affiniteit hebben met academische wiskunde en 'universiteitswiskundigen' zich bewust worden van het imago van hun vak bij jongeren. Laten we in het hoger onderwijs de handen ineen slaan bij de opleiding en nascholing van leraren. Hopelijk biedt het toekomstige Platform Wiskunde Nederland een koepel voor zulke activiteiten.

Gert Vegter, voorzitter KWG

Van het KWG

| KWG activities

Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

De 233ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op donderdag 22 april 2010 tijdens het 46ste Nederlands Mathematisch Congres te Utrecht.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 232ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap van 15 april 2009 in Groningen
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2009. De hier ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van de Stichting Epsilon
 - e. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
 - f. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - g. Verslag van de Publicatiecommissie
 - h. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
 - i. Verslag van de Archivaris
 - j. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - k. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begrotingen 2010 en 2011
- 6 Vaststelling contributie voor 2010 en voor 2011
- 7 Samenstelling Kascommissie 2010
- 8 Samenstelling van het Bestuur

Dr. I. van Gulik-Gulikers en Dr. A. Sevenster treden statutair af. Dr. Sevenster stelt zich beschikbaar voor een tweede termijn. Het bestuur heeft drs. Jenneke Krüger (SLO Enschede) bereid gevonden om de plaats van Dr. van Gulik-Gulikers in het bestuur (met portefeuille: 'contact met leraren') in te nemen.

De overige leden van het bestuur zijn:

 - dr. S. Bhulai (VUA en CWI), penningmeester
 - dr. W. Bosma (RU en CWI), webmaster
 - prof.dr. H.W. Broer (RUG), lid
 - dr. K.P. Hart (TUD), publicaties
 - prof.dr. R. van der Mei (CWI en VUA), secretaris
 - dr.ir. H.J.J. te Riele (CWI), archivaris en Inspecteur der Boekerij
 - prof.dr. G. Vegter (RUG), voorzitter
- 9 Professionalisering van het KWG
- 10 Rondvraag
- 11 Sluiting

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de 232ste Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen (voorzover ze niet eerder in het Nieuw Archief voor Wiskunde gepubliceerd zijn): het financieel verslag over 2008 en de begroting 2009 en de verslagen van de Kascommissie over 2006, 2007 en 2008. Het verslag van de Kascommissie over 2009 zal tijdens de ALV van 22 april 2010 worden bekend gemaakt.

2.1 Concept Notulen van de 232ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden op 15 april 2009 tijdens het 45ste Nederlands Mathematisch Congres te Groningen

1. Opening.

De voorzitter opent de vergadering om 14.00 uur en heet allen welkom, en meldt dat agendapunt 11 (Statutenwijziging) komt te vervallen.

Rubriek met mededelingen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Tevens worden hier de notulen van de Algemene Ledenvergadering gepubliceerd.

2. Verslag van de 231ste Algemene Ledenvergadering van 17 juni 2008.

Dit verslag wordt goedgekeurd.

3. Verslag van de Extra Algemene Ledenvergadering van 2 oktober 2008.

Dit verslag wordt goedgekeurd. Tom Koornwinder merkt op dat de opkomst te genviel.

4. Mededelingen.

Er zijn geen mededelingen.

5. Bespreking jaarverslagen.

Tom Koornwinder doet mondeling verslag namens kascommissie en de commissie van goede diensten betreffende de financiën. Hij dringt aan op het versterken van de kascommissie, en ziet als haar primaire taak het leveren van structureel commentaar op de financiële stukken.

Financiële jaarverslagen 2006 en 2007: De kascommissie is akkoord met de financiële jaarverslagen van 2006 en 2007, maar maakt wel de aantekening dat van een aantal debiteurenposten uit 2003-2007 de ondersteunende stukken ontbreken of onvolledig zijn, hetgeen het onwaarschijnlijk maakt dat de verschuldigde bedragen nog geïnd kunnen worden. De jaarverslagen geven daardoor een te rooskleurig beeld van de financiële situatie van het KWG en van het desbetreffende boekjaar. Het voorstel is om dat in het jaarverslag van 2008, of op zijn laatst 2009, te verwerken en de betreffende posten òf alsnog te innen òf als verlies te nemen. De financiële jaarverslagen van 2006 en 2007 worden ter goedkeuring voorgelegd aan de ALV, die unaniem akkoord gaat.

Financiële jaarverslag 2008: Koornwinder merkt op dat de versie van 15 april 2009 nog niet voldoende is. Met name de uitgaven aan Pythagoras blijken in 2008 dramatisch te zijn gestegen. De kosten van ca. € 33k aan salarissen en ca. € 11k aan PR- en promotiekosten waren niet begroot in 2008, en lijken structureel. Daartegenover staan te weinig inkomsten uit de instituutslidmaatschappen, die al jaren lang niet meer zijn geïnd. Koornwinder merkt op dat het bestuur is tekortgeschoten door de betreffende debiteurenposten zonder enige actie zo lang open te laten staan, en door niet met de instituten te onderhandelen over vernieuwing van contracten. Wel wordt opgemerkt dat de instituten een morele plicht hebben mee te werken aan de reparatie hiervan, zo mogelijk met terugwerkende kracht.

Verder valt op dat de advertentie-inkomsten voor het NAW (en mogelijk Pythagoras) de laatste jaren sterk zijn teruggelopen, vooral omdat niemand meer de acquisitie van advertenties als speciale taak heeft. Al met al staan er in 2008 tegenover de inkomsten van ca. € 100k uitgaven van ca. € 190k, waarvan € 43k incidenteel. Koornwinder merkt op dat dit gat te groot is om weg te werken m.b.v. de instituutslidmaatschappen en een contributieverhoging, en dat de kosten van Pythagoras drastisch omlaag zullen moeten. Ook merkt hij op dat grote bedragen aan liquide middelen van het KWG lange tijd renteloos op een betaalrekening hebben gestaan, waardoor enige duizenden euro's aan rente-inkomsten zijn misgelopen.

	€
Kapitaal begin 2008	197.487,89
Resultaat boekjaar 2008	-4.895,68
Kapitaal eind 2008	192.592,21

Tabel 1 Resultatenrekening 2008

	€
Aandelen begin 2008	4.318,54
Bij: dividend en herwaardering	-1.951,45
Aandelen eind 2008	2.367,09

Tabel 2 Mutaties aandelenportefeuille

De kascommissie en de commissie van goede diensten presenteren een lijst van 14 aanbevelingen ter verbetering van de financiën van het KWG.

De voorzitter biedt namens het bestuur zijn excuses aan voor de problemen in de financiële gang van zaken van de laatste jaren. Het bestuur komt voor de zomer met een goed plan waarin de aanbevelingen van de kascommissie en de commissie van goede diensten nauwkeurig zullen worden geïmplementeerd, en zal een extra ALV plannen voor goedkeuring van het op basis van de aanbevelingen verbeterde jaarverslag 2008 en begroting 2009.

7. Vaststelling contributie voor 2009 en 2010.

Het bestuur brengt een contributieverhoging van € 10 met ingang van 2010 in stemming. De ALV gaat akkoord (met twee onthoudingen).

8. Samenstelling Kascommissie.

Dit onderdeel komt op de agenda voor de volgende ALV.

9. Samenstelling van het bestuur.

Het bestuur draagt vice-voorzitter prof.dr. G. Vegter voor als voorzitter, als opvolger van prof.dr. H. Broer, die bereid is nog een jaar lid te blijven van het bestuur. Wieb Bosma treedt statutair af, maar is graag bereid nog een termijn te dienen als bestuurslid. De benoemingen van Gert Vegter tot voorzitter en de verlenging van Wieb Bosma als bestuurslid worden per acclamatie aangenomen.

10. Platform Wiskunde Nederland.

Frank den Hollander geeft een uiteenzetting van de plannen van het PWN, en brengt een voorstel in stemming voor de invulling van het oprichtingsbestuur voor het PWN: Arjeh Cohen, Swier Garst, Jan van Mill, Gert Vegter, Jan Wiegerinck, Frank den Hollander en Marian Kollenveld. Het voorstel wordt in stemming gebracht in de ALV en aangenomen met 1 onthouding.

Jan van Maanen uit zijn zorg over de beperkte inbreng vanuit het basisonderwijs in het PWN, waardoor het draagvlak voor PWN in gevaar kan komen. Joseph Steenbrink merkt op dat er weinig plek lijkt te zijn voor didactisch onderwijs.

De financiering van PWN is nog punt van zorg. De geschatte kosten van PWN bedragen ca. € 100k per jaar. Daartegenover staan € 60k structurele inkomsten vanuit NWO GBE, een eenmalige bijdrage van de Stichting Compositio (van € 50k) en van het Stieltjes Instituut (€ 50k).

12. Rondvraag.

Er zijn geen vragen voor de rondvraag.

13. Sluiting.

De nieuwe voorzitter Gert Vegter bedankt Henk Broer voor enorme inspanningen die hij namens het KWG geleverd heeft. Applaus.

2.2 Financieel verslag 2008 en begroting 2009 (en 2010)

Het jaarverslag over 2008 is op dezelfde manier tot stand gekomen als dat over voorgaande jaren. Dit jaarverslag heeft betrekking op de financiën van het KWG en, daarbinnen, het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW).

Balans begin 2008

De beginbalans 2008 is identiek aan de eindbalans 2007, zoals gepubliceerd in het financieel jaaroverzicht 2007.

Balans eind 2008

Tabel 4 geeft de balans eind 2008.

Resultatenrekening

Het eigen vermogen van het KWG is in 2008 met € 38.697,16 afgenomen. Echter, het 5ECM congres is door het Lekkerkerker legaat gefinancierd, waardoor de feitelijke daling in het eigen vermogen € 4.895,68 bedraagt.

Ten opzichte van het jaar 2007, waarin een positief resultaat van € 4.489,72 werd behaald, is dit jaar het resultaat negatief. De afname was reeds begroot in het jaarverslag van 2007 (in het jaarverslag van 2007 werd er een afname van € 18.150,00 begroot).

Toelichting bij de balanspost aandelen.

- De totale waarde van de aandelenportefeuille bedraagt per ultimo 2008 € 2.367,09, zie Tabel 2.

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Debiteuren	109.058,40	Crediteuren	30.779,36
<i>Liquide middelen:</i>			
Postbank	129.452,92		
ABN AMRO	13.561,99		
Vaste activa		Eigen vermogen	
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	4.318,54		
Postbank Rentemeerrekening	38.773,05	Legaat Lekkerkerker	140.207,48
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	73.309,83	Kapitaal eind 2007	197.487,89
	368.474,73		368.474,73

Tabel 3 Beginbalans

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Debiteuren	141.500,61	Crediteuren	48.452,78
<i>Liquide middelen:</i>			
Postbank	71.695,46		
ABN AMRO	15.980,96		
Vaste activa		Eigen vermogen	
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	2.367,09		
Postbank Rentemeerrekening	39.810,26	Legaat Lekkerkerker	106.406,00
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	76.096,61	Kapitaal eind 2008	192.592,21
	347.450,99		347.450,99

Tabel 4 Eindbalans

Begrote en werkelijke kosten 2008 en begrote kosten 2009 en 2010

Tabel 5 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2008, en de begrote kosten voor 2009 en 2010.

Toelichting bij Tabel 5:

- Ad 4125: In het boekjaar 2008 werden t.b.v. het NAW de volgende betaalde functies vervuld:
 - Eindredacteur NAW, 0,2 fte
 - Bureau redactie NAW, drie maal 0,2 fte
 - Bladmanager NAW, 0,3 fte

In de resultatenrekening zijn dit jaar ook salariskosten voor Pythagoras terug te vinden. Deze salariskosten werden voorheen betaald uit gelden van instituutsliden. Dit is echter geleidelijk niet meer ontvangen. In voorgaande jaren is dit onder de post debiteuren op de balans geboekt. Dit jaar is er voor gekozen om deze kosten expliciet in de resultatenrekening op te nemen om tot een zuiverder beeld te komen van de kosten. De functies die vervuld

werden t.b.v. Pythagoras betreffen:

- Hoofdredacteur Pythagoras
- Eindredacteur Pythagoras
- Bladmanager Pythagoras

Een dergelijke opmerking geldt ook voor Stichting Epsilon. Echter, deze kan men niet terug vinden in de resultatenrekening, omdat de salariskosten van Epsilon bij Epsilon Uitgaven terugggevorderd worden. Het betreft hier de functie:

- Redacteur Epsilon Uitgaven
- Ad 4151: Het betreft hier het netto door het KWG aan portokosten bestede bedrag. Het CWI vergoedt de voor ruilabonnementen gemaakte portokosten. In 2008 ging het hierbij om € 2467,52. Voor 2008 vallen de kosten hoger uit, omdat NAW nr. 1 een extra oplegger had, en NAW nr. 3 een bijlage van 76 gram had. Deze kosten zijn verrekend met de opdrachtgever en uiten zich in lagere drukkosten (ad 4152).
 - Ad 4164: De PR- en promotiekosten van Pythagoras worden door het KWG

GrBk Nr.	Omschrijving	begroot 2008 (€)	werkelijk 2008 (€)	begroot 2009 (€)	begroot 2010 (€)
4125	Salarissen NAW	40.000	37.467,58	40.000	40.000
4125	Salarissen Pythagoras	–	33.120,80	37.800	37.800
4126	PR-Taakgroep	0	–403,45	–	–
4151	Porti	4.500	6.138,91	5.000	5.000
4152	Drukkosten	30.000	22.365,36	30.000	30.000
4153	Ontwerpkosten	4.500	3.704,47	4.000	5.000
4155	Vergaderkosten	2.000	3.384,78	3.500	3.500
–	Activiteiten ism SBW	3.000	1.043,30	–	–
4160	Overige kosten	5.000	2.163,69	2.500	2.500
4164	Pythagoras	–	11.266,70	11.000	11.000
4170	Sponsoring	3.000	3.785,17	2.000	2.000
4171	Sponsoring 5ECM	50.000	33.801,48	–	–
4171	Sponsoring IMO2011	–	–	16.500	16.500
4171	Brouwerlezing	10.000	9.653,76	3.400	3.400
4171	EMS council meeting	10.000	9.056,32	–	–
4726, 4729	KWG activiteiten	5.000	1.040,87	4.000	4.000
4200	Verzekering	400	403,12	400	400
4251	Afdracht EMS	1.250	4.956,00	1.500	1.500
4252	Afdracht IM	1.900	1.806,24	2.000	2.000
4253	Afdracht IMU	750	0,00	8.000	8.000
4980, 9152	Bankkosten	50	108,49	100	100
Totaal		171.350	184.872,59	171.700	172.700

Tabel 5 Resultatenrekening 2008 en begrotingen 2009 en 2010: kosten

GrBk Nr.	Omschrijving	begroot 2008 (€)	werkelijk 2008 (€)	begroot 2009 (€)	begroot 2010 (€)
5150, 5121, 5251, 5252	Contributies KWG-leden	85.000	82.000,00	81.000	81.000
5150, 5121, 5251, 5252	Contributies Pythagoras	–	45.000,00	40.000	40.000
5151	Legaten en donaties	200	222,12	225	225
5151	Legaat Lekkerkerker	–	–135,00	–135	–135
5153	Advertenties	2.000	2.087,16	2.000	2.000
5154, 5155, 5160	Overige baten	500	2.141,32	500	500
5156	Contributies inst. leden	10.000	10.000,00	50.000	50.000
5157	Contributies bedrijfsleden	1.000	1.000,00	–	–
9052, 9090	Rente	4.500	3.859,83	4.000	4.000
Totaal		103.200	146.175,43	177.590	177.590

Tabel 6 Resultatenrekening 2008 en begrotingen 2009 en 2010: baten

vergoed. Hiervoor geldt dezelfde opmerking als voor de salariskosten van Pythagoras ad 4125. Er zal in 2009 met Pythagoras een plan worden opgesteld om Pythagoras financieel zelf-onderhoudend te maken.

4. Ad 4170: Het KWG heeft in 2007 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:

- Studiereis DESDA: € 500
- ITW: € 235,17
- LIMO 2008: € 250
- Symposium DESDA: € 500
- Symposium FMF: € 250
- A-eskwadraat: € 300
- Studiereis Iguazu: € 250
- Subsidiegarantie Kaleidoscoopdag 2008: € –500

In de voorgaande jaren was er een lening aan Stichting Wiskunde Olympiade verstrekt. Het restant bedrag van € 2000 was als subsidie bedoeld en is

dit jaar na de laatste aflossing in die hoedanigheid verstrekt. Voor 2009 worden vergelijkbare uitgaven voorzien. Twee jaar geleden werd voor het eerst een studiereis gesponsord, waarbij de gesponsorde deelnemers als tegenprestatie KWG lid worden. Dit principe is dit jaar aangehouden.

5. Ad 4726, 4729: Het KWG heeft in 2008 de volgende activiteiten georganiseerd:

- Brouwerlezing: € 9.653,76
- EMS council meeting: € 9.065,32
- Wintersymposium 2008: € 1.040,87

Een deel van de kosten (circa € 4000,00) voor de Brouwerlezing wordt teruggevorderd bij de KNAW. De Brouwerlezing vindt eens per drie jaren plaats. Er wordt hiervoor al een reservering gemaakt ter grootte van een derde van het totaalbedrag.

6. Ad 4251: De post voor de afdracht aan het EMS is dit jaar hoger uitgevallen door achterstallige rekeningen van 2004–2007.

7. Ad 4253: De KNAW heeft aangegeven de verdeling van de kosten van het Nederlandse lidmaatschap van de International Mathematical Union te veranderen. In de begroting is daarom een bedrag van € 8000 gereserveerd.

Begrote en werkelijke baten 2008 en begrote baten 2009 en 2010

Tabel 6 toont de begrote en werkelijke baten over het boekjaar 2008, en de begrote baten voor 2009 en 2010.

Toelichting bij Tabel 6:

- Ad 5150: De inkomsten uit contributies vertonen een daling.
- Ad 5151: Alleen de structurele inkomsten uit het structurele Godefroy legaat zijn begroot. Voor het Lekkerkerker legaat zijn er onderhoudskosten voor het graf.
- Ad 9090: De rente wordt geboekt in het jaar waarin deze binnenkomt, niet in het jaar waarop deze betrekking heeft.

Samenvatting en aanbevelingen

Het financieel overzicht over 2008 laat een negatief resultaat zien. Dit resultaat was in het jaarverslag van 2007 reeds ingecalculeerd. Dit jaar zijn de kosten van Pythagoras expliciet gemaakt in de kosten en baten-analyse. Het is gebleken dat in het verleden de kosten van Pythagoras niet geheel gedekt werden, als gevolg van het uitblijven van gelden uit Instituutslidmaatschappen. Deze inkomsten zijn van essentieel belang voor het Genootschap. Dit is een aandachtspunt van het bestuur.

Amsterdam, 16 december 2009
Sandjai Bhulai, penningmeester

2.3 Verslagen van de Kascommissie over 2006, 2007 en 2008

Hiervoor zij verwezen naar Sectie 2.1 (Notulen van de 232ste ALV van 15 april 2009, punt 5).

3 Ad punt 4 van de Agenda

3.1 Verslag van de Secretaris

3.1.1 Leden Het genootschap had op 1 januari 2010 acht ereleden (P.C. Baayen, F. van der Blij, N.G. de Bruijn, J.C. van de Craats, D. van Dalen, J. Korevaar, J.A.F. de Rijk en F. Verhulst) en 1329 leden, van wie 217 gebruik maakten van het tarief voor gepensioneerden, 167 van het reciprociteitstarief en 149 van het studenttarief. 44 leden waren tevens lid van de European Mathematical Society.

3.1.2 Verslag van de Kaleidoscoopdag Op 15 april 2009 vond in de faculteit EWI van de TU Delft de Kaleidoscoopdag plaats, met als thema 'Wiskundig Spectrum'. De dag werd georganiseerd door de Wiskunde en Informatica Studievereniging 'Christiaan Huygens'. Sprekers en hun onderwerpen waren:

- Ronald Meester (Vrije Universiteit Amsterdam), *De statistiek en kansrekening in het proces tegen Lucia de B.*
- Sjoerd Verduyn Lunel (Universiteit Leiden), *Modellen, analyse en simulatie van complexe, dynamische biologische systemen*
- Rens Dullaart (Air Traffic Control Nederland), *De wiskunde achter de luchtverkeersleiding*
- Jos Leys *Visualisatie van de vierde dimensie: de 'Dimensions' film*
- Jan Brandts (Universiteit van Amsterdam), *Google's PageRank middels Goozles: Perron-Frobenius Theorie voor Dummies*

3.1.3 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium, georganiseerd door Iris van Gulik-Gulikers, werd gehouden op 10 januari 2009 in het Academiegebouw bij de Dom in Utrecht. Het thema was 'Wiskunde een Kunst'. Sprekers en hun onderwerpen waren:

- Ferdinand Verhulst (Universiteit Utrecht), *Vruchtbaar misverstand of onverwachte dwarsverbinding?*
- Aline Honingh (City University, London), *Geometrische structuren in muziek: convexe toonladders en gelijkzwevende tori*

- Albert van der Schoot (Universiteit van Amsterdam), *De mythe van de Gulden Snede*

Het aantal deelnemers bedroeg bijna 200.

3.1.4 Wiskunde Persdienst De Wiskunde Persdienst (www.wiskundepersdienst.nl) is een initiatief uit 2002 van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren en het KWG.

De WPD verzamelt en verspreidt wiskundig geïntereerd nieuws en publiceert een agenda van Wiskunde-activiteiten. Het KWG en Bauke Conijn (TU/e) verzorgen de website. Het beheer van de berichten is in handen van de TU/e, het Centrum Wiskunde & Informatica en leden van de Wiskunde Webmasters. Op dit moment worden nieuwsberichten van (c.q. links naar) de Wiskunde Persdienst gepubliceerd op de websites van de Wiskunde Persdienst, het KWG, de NVvW, Pythagoras, Digischool, WiskundeE-brief en het Freudenthal Instituut. In 2009 verschenen 34 nieuwsberichten.

3.1.5 PR-activiteiten Het Genootschap heeft bij verschillende gelegenheden PR-activiteiten ontplooid, zoals tijdens het 45ste Nederlands Mathematisch Congres, bij evenementen zoals de Jaarvergadering/Studiedag en de Nationale Wiskunde Dagen van de NVvW, het Wintersymposium van het KWG, de vakantiecursussen van het CWI, de Wetenschapsdag en de Kaleidoscoopdag. Dit gebeurde veelal in samenwerking met het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras. Ter ondersteuning van de PR-activiteiten werd promotiemateriaal gebruikt, bestaande uit de KWG-poster, een in 2009 vernieuwde KWG-folder, en WG-ansichtkaarten.

3.1.6 Landelijke taakgroep wiskunde PR Deze groep bestond tot/met augustus 2009 uit Jan van de Craats (OU en UvA), Vincent Jonker (Freudenthal Instituut, UU), Marian Kollenveld (NVvW), Tom Koornwinder (UvA), Arjen Sevenster (KWG), Ionica Smeets (UL) en Chris Zaal (UvA), en opereerde onder auspiciën van het KWG. Adviserend lid was Carl Koppeschaar (hoofdredacteur van Kennislink, www.kennislink.nl/pagina/redactie). Tom Koornwinder fungeert als contactpersoon voor de taakgroep.

De groep beschikt sinds 1 december 2004 over een parttime PR-medewerker (0.2 fte). Van oktober 2007 tot/met augustus 2009 vervulde Charlotte Vlek deze functie. Zij had als algemene taak om zich actief in te zetten voor een positieve beeldvorming met betrekking tot de wiskunde, met name bij scholieren. Als concreet project heeft zij de website 'wiskunde in perspectief' (www.wiskundeinperspectief.nl) verder ontwikkeld. Deze website brengt het beroepsperspectief na een wiskundestudie onder de aandacht door middel van interviews met afgestudeerde wiskundigen in een grote verscheidenheid van beroepen. Een stagiaire Gonny Hauwert heeft mede bijgedragen aan de interviews. De website is verder onder de aandacht van docenten en scholieren gebracht door een breed verspreide klassenposter waarvan een eerste exemplaar gepresenteerd is tijdens de Nationale Wiskundedagen 2009. Een ander project waar Charlotte Vlek aan gewerkt heeft, is het project Eureka: 'Wiskundestudenten laten scholieren in een gastles het Eureka-gevoel beleven'. De Universiteit Groningen is begonnen met deze formule van promotieteams van wiskundestudenten die de scholen langsgaan om daar een gastles te geven. In 2009 is er in Utrecht en Amsterdam voortgang geboekt met deze formule.

Verder worden via de taakgroep de werkzaamheden voor Kennislink Wiskunde (www.kennislink.nl/web/show?id=100552) van Alex van den Brandhof (redacteur van de vakpagina Wiskunde) gesponsord. Deze was gedurende het gehele jaar 2009 actief.

De activiteiten van de taakgroep staan sinds september 2009 op een laag pitje in afwachting van het instellen van een publiciteitscommissie binnen WisNed. Jan van de Craats, Ionica Smeets en Chris Zaal zijn afgetreden als lid. Er is geen Nationale PR-medewerker meer actief in afwachting van het aanstellen van een publiciteitsmedewerker bij WisNed.

De genoemde activiteiten werden gedurende de eerste 8 maanden van 2009 financieel mogelijk gemaakt door de onderzoekscholen Stieltjes en MRI, de Stichting Compositio en het KWG, terwijl het Freudenthal Instituut immateriële bijstand gaf door het beheer en onderhoud van de website www.wiskundeinperspectief.nl. De werkzaamheden voor Kennislink Wiskunde

worden gedurende het academisch jaar 2009-2010 geheel door het KWG gesponsord.

Tom Koornwinder, contactpersoon

3.2 Verslag van de Penningmeester over 2009

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 22 april 2010 uitgereikt.

3.3 Verslag van de Kascommissie over 2009

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 22 april 2010 uitgereikt.

3.4 Verslag van de Stichting Epsilon

Het bestuur van de Stichting bestond in 2009 uit dr. G.M. Hek (IL, Geneve): voorzitter, dr. S. Bhulai (VU): secretaris/penningmeester, dr. K.P. Hart (TUD), drs. F.L.J.M. van den Heuvel (Meridiaan College 't Hooghe Landt), dr. A. Sevenster (voorheen Elsevier). Per 1 januari 2010 zal de voorzittershamer worden overgenomen door dr. T. Koetsier (VU).

Voor de dagelijkse werkzaamheden in de uitgeverij is een 'managing director', in de persoon van drs. C. Boss-Reus, in dienst. Al in 2008 was besloten verbetering te brengen in de fragiele situatie met slechts één werknemer voor alle dagelijkse zaken. Sinds mei 2009 wordt Carolien Boss bijgestaan door de freelance-kracht Barbara Harzevoort, die tevens als haar eerste vervanger optreedt.

De redactie van de wetenschappelijke reeks wordt voorgezeten door prof.dr. G. Vegter (RUG); de voorzitter van de Zebra-redactie is drs. P.M.G.M. Kop (ICLON).

De belangrijkste activiteit van Epsilon Uitgaven is natuurlijk het uitgeven en de verkoop van boeken. In 2009 zijn er diverse teksten uitgegeven: vijf nieuwe delen en twee herdrukken in de wetenschappelijke reeks en twee nieuwe delen in de Zebra-serie. Het laatste nieuwe deel in de wetenschappelijke reeks was een bijzonder project, een stripboek over Newton in Nederland dat is uitgegeven in samenwerking met het Museum Boerhaave. Ook is een eerste boek in het Engels verschenen. Tot slot is een hele nieuwe serie gestart: de zeven Spijkers behandelen de onderwerpen van de basiswiskunde in een doorlopende leerlijn, maar de delen zijn ook prima afzonderlijk te gebruiken.

Tot slot zijn in 2009 de eerste twee delen van het pakket 'Epsilon Online' opgeleverd, zodat nu de belangrijkste werkzaamheden in de uitgeverij geautomatiseerd zijn en daardoor ook eenvoudiger overdraagbaar zijn.

Geertje Hek, voorzitter Stichting Epsilon

3.5 45e Nederlands Mathematisch Congres

Hiervoor zij verwezen naar het NAW van juni 2009, p. 83, waar een verslag staat van de hand van Nellie Verhoef en Ferdinand Verhulst.

3.6 Verslag van de Inspecteur der Boekerij

In 2009 is een totaal van 81 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

De volgende ruilvereenkomsten zijn beëindigd, vooral doordat de tijdschriften elektronisch beschikbaar zijn:

Journal of Applied Mathematics and Computing was ruil met: Korean Society for Computational and Applied Mathematics, Chungnam, Korea
Rocky Mountain Journal of Mathematics was ruil met: Rocky Mountain Mathematics Consortium

Mathematica Scandinavica was ruil met: University of Copenhagen

Nagoya Journal of Mathematics was ruil met: Nagoya University

Proceedings of the Estonian Academy of Sciences: Physics Mathematics was ruil met: Estonian Academy of Sciences

Van de Boekerij van het Genootschap zijn in het verleden vijf catalogi uitgegeven. De laatste dateert uit 1907 en kan worden geraadpleegd via de website van het KWG: <http://www.wiskgenoot.nl/watis/SysCatBoekerijWG1907.pdf>.

Herman te Riele, Inspecteur der Boekerij

3.7 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het

bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties, en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2009 uit Sandjai Bhulai, Klaas Pieter Hart (voorzitter), Gert Vegter, Rob Schrauwen en Chris Zaal. De commissie heeft haar werk voornamelijk via e-mail en telefoon afgehandeld.

Het instandhouden van de voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* in de huidige opzet en van *Pythagoras* blijft een belangrijke en soms moeilijke taak van de commissie.

Een blijvend punt van zorg is het feit dat, omdat het KWG niet als werkgever wil optreden, wij onze medewerkers met behulp van tijdelijke contracten, en met medewerking van diverse wiskunde-instituten moeten bezoldigen. De hoop is dat via het Platform Wiskunde Nederland voor een betere regeling gezorgd kan worden.

Van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verscheen in 2009 deel 10 van de vijfde serie. De redactie heeft, onder leiding van hoofdredacteurs Wil Schilders en Ferdinand Verhulst, weer vier fraaie nummers van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* weten uit te brengen. De oude en nieuwe eindredacteur, Derk Pik en Judi Romijn, en de bureauredactie verdienen alle lof voor de wijze waarop de productie tot stand komt.

Om het blad aantrekkelijk te houden is en blijft een ruime hoeveelheid goede kopij nodig; de oproep uit vorige jaren de redactie te overstelpen met artikelen blijft onverminderd van kracht.

Van *Pythagoras* verschenen in 2009 zes nummers, drie in de jaargang 48 en drie in de jaargang 49. Hoofdredacteur Arnout Jaspers en eindredacteur Alex van den Brandhof hebben samen met hun redactie een mooie jaargang met als thema *Discrete Wiskunde* afgesloten; jaargang 49 heeft als thema *Beroepen van Wiskundigen*. De volgende jaargang zal de vijftigste zijn; de redactie is druk aan het nadenken hoe dit in 2010/2011 te vieren. Verder zijn alle jaargangen van *Pythagoras* gedigitaliseerd: mettertijd zullen deze via www.pythagoras.nu te raadplegen zijn.

Klaas Pieter Hart, voorzitter Publicatiecommissie

3.8 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

3.8.1 Samenstelling Commissie De commissie bestond in 2009 uit de volgende leden (in alfabetische volgorde): F. Beukers, T. Goris (penningmeester), C.P. Hoogland, mev. I. van Gulik, mev. M. Kamminga, mev. M. Kollenveld, J. van Maanen, D. Siersma (voorzitter), mev. M. Steentjes (secretaris), J. Wiegerinck, B. Zwaneveld. J. Wiegerinck is sinds begin 2009 lid.

3.8.2 Activiteiten in het algemeen De NOCW wil fungeren als platform voor alles wat met de rol van wiskunde in het onderwijs te maken heeft. De volgende onderwerpen kwamen aan de orde:

- Wiskunde in de beroepskolom vmbo-mbo-hbo en advies Onderwijsraad over examens in het vmbo,
- Experimentele examenprogramma's 2014 voor havo en vwo,
- Doorlopende leerlijnen rekenen,
- Versterking onderbouw havo-vwo,
- Inpassing van de NOCW in de plannen rond Platform Wiskunde Nederland,
- In kaart brengen van acties in Nederland om het wiskunde- (en reken-) onderwijs te verbeteren.

Verder had de voorzitter contact met de hbo-raad over beheersing van algebraïsche vaardigheden en versterking van wiskunde D.

3.8.3 Nederlandse Wiskunde Olympiade In 2009 hebben er 4379 leerlingen deelgenomen aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Dat betekent dat in drie jaar tijd het aantal deelnemers is verdubbeld. Op 230 scholen hebben de leerlingen in januari meegespeeld aan de eerste ronde. De scholenprijs is, net als vorig jaar, gewonnen door het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Om ook leer-

lingen uit lagere klassen te stimuleren om mee te doen aan de eerste ronde is voor de tweede maal een klasafhankelijke cesuur ingevoerd. Ruim 130 leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die, zoals gebruikelijk, in september in Eindhoven is gespeeld. De prijsuitreiking heeft in november plaatsgevonden aan de TU Eindhoven. Dit jaar is voor het eerst een Beneluxolympiade georganiseerd. Dit evenement heeft Nederland georganiseerd. België, Luxemburg en Nederland mochten ieder tien leerlingen voor dit evenement afvaardigen. Nederland won overtuigend, de top drie bestond geheel uit Nederlanders. Naast de betaling van de kosten van deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade door OC&W, zijn er verder bijdragen geleverd door All Options, CBS, Cito, het tijdschrift Natuurwetenschap en Techniek, NS, Ortec, Stichting Compositio Mathematica, Transtrend, TU Eindhoven en Universiteit Utrecht. Voor verdere informatie zie www.wiskundeolympiade.nl.

3.8.4 Internationale Wiskunde Olympiade Bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Duitsland zijn door het Nederlands team twee medailles behaald: een zilveren en een bronzen. In het officieuze landenklassement kwam Nederland op de 47ste plaats.

3.8.5 Wiskunde A-lympiade en Wiskunde B-dag De A-lympiade wordt in het schooljaar 2009-2010 voor de 21e keer gehouden, de Wiskunde B-dag voor de 11e keer. De voorronde van dit door het Freudenthal Instituut georganiseerde evenement vond plaats op vrijdag 20 november 2009. In Nederland deden aan de voorronde van de A-lympiade ongeveer 160 scholen mee. Verder wordt er meegedaan in Duitsland, Denemarken, Sint Maarten, Aruba, Japan en Iran. Uit de voorronde worden 15 teams geselecteerd: negen uit Nederland, twee uit Duitsland, twee uit Denemarken, een team uit Aruba, een team uit St Maarten en (vorig jaar voor het eerst!) twee teams uit Iran. Japan vaardigt (nog) geen team(s) af naar het finaleweekend, dat dit jaar gehouden wordt op 12 en 13 maart 2010. Afgelopen schooljaar (2008-2009) was het Bonhoeffer College uit Castricum de trotse winnaar van de (internationale) finale. De Wiskunde B-dag kent alleen een voorronde, die tegelijk met de A-lympiade wordt gehouden. Veel scholen doen overigens aan beide evenementen mee. Aan de Wiskunde B-dag deden vorig schooljaar 166 Nederlandse, 23 Vlaamse en 24 Duitse scholen mee. Het Vossius Gymnasium uit Amsterdam bleek van alle deelnemers uiteindelijk het winnende werkstuk te hebben geleverd.

3.8.6 Kangoeroe Wedstrijd Kangoeroe W4 (WereldWijde WiskundeWedstrijd) wordt in Nederland georganiseerd door Stichting Wiskunde Kangoeroe, vanuit de Radboud Universiteit Nijmegen, onder auspiciën van het KWG. De wedstrijd is bestemd voor alle leerlingen vanaf groep 5 van het basisonderwijs en alle leerlingen in het voortgezet onderwijs. In 2009 deden 86.000 leerlingen mee aan de Kangoeroewedstrijd. Er zijn vier verschillende versies: wizKID, wizSMART, wizBRAIN en wizPROF. Voor verdere informatie, zie <http://www.math.ru.nl/kangoeroe>.

3.8.7 Vertegenwoordiging in ICMI Het KWG wordt door de voorzitter van de NOCW, D. Siersma, vertegenwoordigd in de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). *Melanie Steentjes, secretaris NOCW*

3.9 Verslag van de Archivaris

Het archief van het Koninklijk Wiskundig Genootschap was ook in 2009 in goede handen bij het Noord-Hollands Archief (voorheen het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland), Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Het archief is ontsloten via de uitgebreide 'Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven", opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991)' door S. Neugebauer (Haarlem, 1995). Deze inventaris kan worden geraadpleegd op <http://www.wiskgenoot.nl/watis/geschiedenis.html>. *Herman te Riele, archivaris KWG*

3.10 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

3.10.1 Algemeen De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland

te Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven: Arch. 2 H.B.A. Bockwinkel (1881-1960); Arch. 3 R. Lijdsman; Arch. 4 G. Röhrman; Arch. 5 W.H.J. van der Stok; Arch. 6 H. Nyon; Arch. 7 L.W. Nieland (1901-1945); Arch. 8 T. van Aardenne-Ehrenfest (1905-1984), C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880-1933); Arch. 9 D.N. van der Neut (1904-1985); Arch.10 een 60-tal foto's van wiskundigen; Arch.11 C.G.G. van Herk (1900-1982); Arch.12 J.H. Wansink (1894-1985); Arch.14 H. Freudenthal (1905-1990); Arch.15 D. van Dantzig (1900-1959); Arch.16 N.H. Kuiper (1920-1994). Arch.1 W. Kapteyn (1849-1927) berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371). Arch. 13 M.J. van Uven (1878-1959) berust nog bij het CWI.

3.10.2 Activiteiten In 2009 zijn geen interessante archieven beschikbaar gekomen.

3.10.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2009 T. Koetsier (VU), voorzitter; R. van Rooijen (CWI), secretaris; G. Alberts (RU); D. Beckers (VU); G.J.A.M. Bolten (Rijksarchief Noord-Holland, Haarlem); H.W. Lenstra, jr. (UL).

Miente Bakker is i.v.m. zijn pensionering per 1 nov. teruggetreden als secretaris. Hij is opgevolgd door Rob van Rooijen (CWI). *Rob van Rooijen, secretaris CPAW*

3.11 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW, www.itw.nl)

3.11.1 Bestuur Gedurende het verslagjaar had het bestuur van ITW de volgende samenstelling: prof.dr.ir. E.R. Fledderus (TNO ICT, TU/e) voorzitter; dr. F.P.H. van Beckum, secretaris/penningmeester; prof.dr. R.D. van der Mei (CWI, VU); prof.dr. J.M. Schumacher (UvT).

3.11.2 Symposia ITW heeft op 27 februari een workshop over 'The Theory and Practice of Auctions' georganiseerd op de Universiteit van Tilburg. Gastsprekers waren Eric van Damme, UvT (Auctions and procurement mechanisms), Jean-Jacques Herings, UM (On the fastest Vickrey algorithm), Sven de Vries, Univ. Trier (Combinatorial auctions), en Emiel Maasland, EUR (The Dutch 2.6GHz auction). De organisatie was in handen van Hans Schumacher (UvT en ITW). We kunnen terugkijken op een zeer geslaagde dag. *Rob van der Mei*

Connie Cantrijn

EURANDOM

Faculteit Wiskunde & Informatica

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

cantrijn@eurandom.tue.nl

Evenementen

Honderdste Eurandom workshop

Het instituut Eurandom is er in elf jaar in geslaagd maar liefst honderd workshops te organiseren. Het NAW doet verslag van een feestelijke gelegenheid voor de stochastici.

Op 14 december 2009 startte de honderdste Eurandom workshop: 'Dynamic Random Environments'. Een zeer toepasselijke titel die in de letterlijke zin ook—onbedoeld—refereert aan het karakter van het instituut. Meer dan 4000 deelnemers, uit de gehele wereld, bezochten de ruim 1700 lezingen, verspreid over 318 dagen. Bijna een geheel jaar vol kennisuitwisseling! Genoeg aanleiding dus om dit te vieren met de deelnemers aan deze honderdste workshop, de onderzoekers van het instituut en iedereen die op enigerlei wijze betrokken is bij Eurandom. Zo'n honderd mensen genoten van de speciale taart en luisterden naar de woorden van wetenschappelijk directeur Onno Boxma. Deze werden gevolgd door op video vastgelegde bijdragen

van Mike Keane, Mor Halchor-Balter en twee promovendi van Eurandom.

Hoewel Eurandom af en toe ook een conferentie organiseert, gaat in de regel de voorkeur uit naar workshops, met een veertigtal deelnemers op een nauw omschreven onderzoeksgebied.

Het samenbrengen van de meer dan 4000 onderzoekers, die met elkaar actuele kennis en resultaten uit eigen onderzoeken op het gebied van stochastiek delen, leidde tot vruchtbare samenwerking en nieuwe wetenschappelijke contacten. "Daar gaan we de komende tijd ook zeker mee door. Komend jaar leggen we een extra accent op workshops voor en door jonge onderzoekers", vertelt Onno Boxma. Deze serie begon zes jaar geleden als een workshop voor en door Young European Probabilists (YEP). Het door YEP gestelde voorbeeld werd enkele jaren later gevolgd door een YES workshop voor statistici en een YEQT workshop voor jonge Europese 'queueing theorists'. Volgend jaar vindt de eerste workshop in dit kader plaats binnen de nieuwe onderzoeksgroep Multivariate Risk Modelling, YEFM.

De eerste van de honderd workshops vond plaats op 14 november 1998, ander-

half jaar na de formele start van het instituut Eurandom. Deze workshop werd georganiseerd door Mike Keane. De 50ste workshop in januari 2005 was toevalligerwijs ter ere van het emeritaat en georganiseerd rondom de uitreiking van een Koninklijke onderscheiding aan dezelfde Mike Keane.

Een lijst van alle workshops is te vinden op www.eurandom.tue.nl/100.

Eurandom is een internationaal instituut, gespecialiseerd in kansrekening en statistiek. Het onderzoek is fundamenteel met oog voor toepassingen zowel in de natuurkunde, biologie, beeldverwerking, communicatie en risicomanagement als in de industrie. Eurandom maakt deel uit van de faculteit Wiskunde en Informatica van de TU/e. In de ruim 11 jaar van haar bestaan heeft het instituut wereldwijd een uitstekende naam opgebouwd onder meer door haar workshops- en bezoekersprogramma en door een uitgebreid postdoc programma.



Gerard Alberts

FNWI

Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248

1090 GE AMSTERDAM

g.alberts@uva.nl

Danny Beckers

FEW — AV

Vrije Universiteit Amsterdam

De boelelaan 1081

1081 HV Amsterdam

d.beckers@few.vu.nl

Geschiedenis De tijdschriften die het genootschap wel en niet uitgaf

Wiskunstige Verlostiging

Wat betekent het dat het Wiskundig Genootschap van het Nieuw Archief voor Wiskunde alweer de vijfde serie uitgeeft? Als uitgever heeft het genootschap zich een groot aantal malen vernieuwd. Minder bekend is dat hetzelfde genootschap een aantal tijdschriften niet heeft uitgegeven. Het waren keuzes, al dan niet overwogen.

Het Wiskundig Genootschap geeft nu een tijdschrift uit dat gericht is op de cohesie van zijn gemeenschap. Precies zo is het ruim twee eeuwen geleden ook begonnen, een tijdschrift om wiskundigen bijeen te brengen. De constante in de publicaties van het genootschap is het voorleggen van opgaven. In de achttiende eeuw was het publiceren van opgaven met uitwerkingen voor rekenmeesters een gerespecteerde manier van 'geleerd vermaak': enerzijds bedoeld om elkaar de maat te kunnen nemen en iets te leren, anderzijds als aanleiding voor sociabiliteit.

Intekenlijst

Het was niet met het Wiskundig Genootschap dat het publiceren van opgavenbundels begon. Reeds voordien was er Jacob Oostwouds *Mathematische Liefhebberijen*. Dit verscheen maandelijks tussen april 1754 en december 1769. Vijftien jaar lang verschenen er vrijwel iedere maand drie katernen druk, waarop kon worden ingetekend. Het tijdschrift werd door verschillende boekverkopers in Holland verspreid. Het bevatte naast opgaven en uitwerkingen tevens schoolnieuws en korte stukjes theorie. De vraagstukken waren elementair van aard, bedoeld voor de schoolmeesters om het verstand te scherpen en tegelijkertijd af en toe iets nieuws te leren. De sommen werden ingekleed met gezochte—soms scabreuze—verhaaltjes en gedichten om het

geheel een minder droge aanblik te geven. Zo schreef in 1761 een collega en vriend van Oostwoud een lofdicht op de recent overleden vrouw van de redacteur. Aan het gedicht was een vraagstuk gekoppeld dat de lezer uitdaagde een derdegraadsvergelijking op te lossen om te kunnen bepalen hoe lang de dierbare overledene met Oostwoud getrouwd was geweest [1].

Het was een Europese traditie om opgavencollecties, zoals die van het Hamburgse wiskundig genootschap, uit te geven. Het Britse periodiek *The ladies' diary* was wel de bekendste in deze categorie [2]. Een groot verschil met deze periodieken was dat de *Mathematische Liefhebberijen* sterk door één persoon werden gedragen. Oostwoud droeg de redactie in 1765 over aan zijn collega Louis Schut, maar de laatste moest na een paar jaar constateren dat het werk hem boven het hoofd groeide. Hij vond geen opvolger en de uitgevers deden daar ook geen moeite voor. Het laatste nummer verscheen in december 1769.

De teloorgang van dit tijdschrift op intekening was voor Arnoldus Strabbe aanleiding om direct vanaf februari 1770 zijn *Oeffenschool der mathematische Wetenschappen* het licht te doen zien [3]. Dit werd twee maandelijks aan de intekenaren toegezonden. Strabbe had als rekenmeester te Amsterdam een aantal wiskundeboeken uit het

Frans en Engels vertaald en hij had goede connecties in het uitgeverwereldje. Strabbe was ook lid van het Hamburgse genootschap en wist de opgaven-series die van daaruit werden gepubliceerd, te waarderen. Hij meende met zijn netwerk het initiatief van de *Liefhebberijen* te kunnen voortzetten. In plaats van schoolnieuws liet hij zijn opgaven vergezeld gaan van een leerboek dat stukje bij beetje verscheen—het grootste stuk verzorgde hij zelf, onderdelen liet hij anderen schrijven. Voor de uitgevers die zijn *Oeffenschool* verspreidden waren de inkomsten echter te laag en binnen twee jaar werd de productie gestaakt. Toen bedacht Strabbe een list. Hij gokte erop dat een genootschap naar voorbeeld van het Hamburgse ook in Amsterdam de geschikte financieringsstructuur voor zo'n publicatie zou bieden: het genootschap als voortzetting van de intekenlijst.

Tijdschriften voor liefhebbers

Het mathematisch gezelschap te Amsterdam bestaat sinds 1778 onder de zinspreuk "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" en heeft naast lesboeken en verhandelingen, van meet af aan opgavenverzamelingen uitgegeven. Het waren prettige publicaties, met titels als *Wiskunstige verlostiging*, of *Kunstoefeningen*. Deze verschenen niet, zoals de bedoeling was geweest, elke twee maanden, maar per 'stukje', een katern oftewel één vel druks, zodra de kas van het gezelschap dit toeliet. Na twaalf stukjes werd een titelblad gedrukt en zo vindt men ze in de bibliotheken—en tegenwoordig deels ook bij googlebooks—terug.



Van links naar rechts: Jacob de Gelder (1765–1843), David Bierens de Haan (1822–1895), Pieter Schoute (1846–1913), Diederik Korteweg (1848–1941) en Fred Schuh (1875–1966)

Onder Strabbes aanvoering ontplooidde de lezerskring zich allengs van intekenlijst tot een echt gezelschap. Ondanks de geografische spreiding van de leden waren er jaarlijks bijeenkomsten te Amsterdam waar een substantieel deel van de leden zich graag vertoonde. Daar luisterde men naar voordrachten en smeedde men nieuwe plannen. In mensen als Laurens Praalder, Johannes te Veltrup en Coenraad Wertz vond Strabbe bondgenoten. De activiteiten van het genootschap breidden zich uit met projecten om een boek over fluxierekening en een vertaling van Montucla's geschiedenis van de wiskunde uit te brengen. Met name dat laatste project was geldverslindend: het bestond uit vier grote boekdelen met platen en werd deel voor deel geproduceerd tussen 1782 en 1804. Arnold Strabbe was een ondernemend man en had aanvankelijk dergelijke projecten voor eigen rekening uitgevoerd. Deze projecten werden echter opgezet voor rekening van het genootschap, maar waren natuurlijk nog steeds 'van' Strabbe, zoals het hele gezelschap van hem was. Onder de Amsterdamse rekenliefhebbers werd er geroddeld over de succesvolle Strabbe, die aan zijn eigen opgaven en oplossingen – of die van zijn vrienden – de voorkeur zou geven boven die van nieuwkomers. Met het succes van het genootschap en de waardering voor haar publicaties bleek de wijze waarop het genootschap bestuurd werd een niet voor altijd houdbare structuur.

Met de politieke omwentelingen braken nieuwe tijden aan voor het genootschap en ook binnen het genootschap. Het was de cholische Jacob de Gelder die de omwenteling aanvoerde; zijn collegae Obbe Sikkes Bangma, Ulrich Huguenin en Isaak Riewert Schmidt droegen zijn ideeën mede. Enerzijds was De Gelder het boegbeeld van een nieuwe generatie. Hij was begonnen als rekenmeester en schoolmeester in Rotterdam en had in de Franse tijd en daarna het tij mee. Anderzijds was hij concurrent van Strabbe en vernieuwer.

De Gelder publiceerde ook lesboeken over rekenkunde en meetkunde, maar dan wel in een nieuwe stijl: boeken die uitdrukking gaven aan een veranderende opvatting van wiskunde, waarin de structuur van definitie-stellingbewijs opnieuw werd doordacht en op alle deelgebieden werd toegepast. Het doel van de wiskunde was erin gelegen zo algemeen mogelijke uitspraken te doen.

De Gelder en zijn volgelingen stelden zich expliciet ten doel de wiskundebeoefening op een hoger plan te brengen, minder afhankelijk van traditie, minder afhankelijk van de luimen van één persoon. In een speciaal bijeengevoerde vergadering in april 1804 pleegden De Gelder en een groot aantal medestanders een coup: ze kozen ervoor om de publicaties van het genootschap voortaan te laten redigeren door een commissie. De macht van Strabbe werd danig beknot. Deze ontstak in woede toen hij hiervan in kennis werd gesteld. Hij keerde het genootschap de rug toe en stierf een jaar later, verbitterd over het onrecht dat hem in zijn ogen was aangedaan [4].

Onderwijshervormingen

De Gelder bracht ook de invloed van de wiskunde op een hoger plan. Niet alleen maakte hij carrière als leraar en hoogleraar, hij verwierf ook invloed op de nieuwe landsregering en bewerkstelligde dat in Nederland de nieuwe wiskunde een verplicht vak werd in het secundair onderwijs en wezenlijk bestanddeel werd van de, korte tijd bestaande, industrieelcolleges. Speciaal op de Latijnsche school, de voorloper van het gymnasium, was de verplichting van wiskunde-onderwijs onderwerp van strijd.

Met Jacob de Gelder werd het Wiskundig Genootschap van een gezelschap dat zich laafde aan de wiskunde, de hoeder van een nieuwe, gezuiverde, wiskunde die een nieuwe maatschappelijke positie opeiste. Qua publicatie uitte dit zich in het uitgeven van een geredigeerd tijdschrift, althans een aantal op-

eenvolgende uitgaven. Deze series vormden weliswaar een voortzetting van de opgaven en het mengelwerk, maar nu met een wiskundige 'redactie'. De strekking van de uitgaven van het genootschap was nu veeleer een standaard te zetten voor 'goede wiskunde'. Die wiskunde functioneerde vooral in een onderwijscontext en droeg daar ook de sporen van [5].

Tijdschriften die het genootschap publiceerde hadden minder inspirerende titels dan in de eerdere periode. *Wiskundige Oefeningen* (1806–1809) en *Verzameling van Wiskunstige Voorstellen* (1820–1836) werden gevolgd door het obligate *Nieuwe Verzameling van Wiskunstige Voorstellen* (1841–1846) en de weinig verrassende titel *Verzameling van Wiskunstige Opgaven* (1850–1854). De wijze van publicatie veranderde niet ingrijpend: de stukjes verschenen iedere keer wanneer er voldoende kopij was, en na ongeveer 12 stukjes werd er weer een titelblad gedrukt. Het laatste initiatief in deze reeks was het *Archief, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap* (1859–1875).

De poging om met regelmaat een tijdschrift met wiskundige artikelen te laten verschijnen slaagde niet echt. Binnen het bestuur bestond consensus over het idee dat Nederland daarvoor toch te klein was. Wel bleef het genootschap de rol vervullen die het zich had aangemeten, om de standaard voor het onderwijs te bewaken, door de uitgave van een aantal leerboeken.

Professionalisering

Internationaal professionaliseerde de wiskundebeoefening veel verder. In het algemeen werd de beoefening van wetenschap een beroep en dit weerspiegelde zich ook in de wiskunde. Crelle's *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, dat sinds 1826 verschijnt, staat symbool voor het nieuwe bedrijf. De Franse pendant, het *Journal de mathématiques pures et appliquées*, volg-



Van links naar rechts Nieuw Archief voor Wiskunde: Deel 1 (1875), Tweede reeks (1895), Derde serie (april 1953), Vierde serie (maart 1983) en Vijfde serie (maart 2000)

de in 1836. De wetenschappelijke wiskundebeoefening manifesteerde zich in de publicatie van originele bijdragen. Op dat niveau begaven zich de *Voorstellen*, de *Opgaven* en het *Archief* niet [6]. In Nederland kwam de cultuur die een dergelijke publicatie-activiteit kon onderhouden, eerst in het midden van de negentiende eeuw tot ontwikkeling. Een nieuwe paleisrevolutie zorgde voor de doorbraak. De aflossing van het *Archief*, uitgegeven door het *Wiskundig Genootschap* door het *Nieuw Archief voor Wiskunde* was de omwenteling waarmee het wetenschappelijk tijdschrift zijn intrede deed in de Nederlandse wiskunde.

David Bierens de Haan (1822–1895) was in dit geval de coupplager. Toen het genootschapsbestuur in 1874 geen opvolger kon vin-

den voor de redactie van haar tijdschrift, gaf hij aan dit onder voorwaarden wel te willen doen. Hij weigerde zich met de redactie van de opgaven en oplossingen bezig te houden en hij wilde de vrije hand om de inhoud van het tijdschrift te moderniseren. Hij dacht daarbij met name aan korte bijdragen over nieuwe vondsten. Met zijn titelkeuze, het *Nieuw Archief voor Wiskunde*—en niet het *Nieuw Archief uitgegeven door het Wiskundig Genootschap*—maakte hij kenbaar dat dit niet de zoveelste opvolger was van een genootschapstijdschrift, dat alleen voor de leden relevant was. Hier kreeg de lezer een tijdschrift in handen dat voor iedere wiskundige van belang was. Met het weglaten van de naam van het genootschap in de hoofdtitel van het periodiek liet Bierens de Haan zien dat er een professioneel vakgebied werd bediend. Na crisisberaad accepteerde het bestuur de ingreep. Er werd een aparte redacteur aangesteld voor de *Wiskundige Opgaven*. In 1875 ging Bierens de Haan van start. Hij realiseerde zich dat de nieuwe onderneming niet automatisch succesvol zou zijn. In het eerste nummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* riep hij zijn lezers dan ook op tot medewerking:

“Slechts door krachtige samenwerking van allen toch zal het mogelijk zijn, in ons land een orgaan voor de Wiskunde met levensvatbaarheid staande te houden. En dan zal het blijken, naar ik hoop, dat het werkelijk aan eene bestaande behoefte zal voldoen.”

Het ledental, dat vanaf het begin van de eeuw tussen de 125 en 130 had geschommeld, steeg met de publicatie van het *Nieuw Archief* naar 171. De ‘wiskunde’ van Bierens de Haan voorzag blijkbaar in een behoefte, en het genootschap kon daarvan meeprofiteren. De *Wiskundige Opgaven* verschenen als afzonderlijk katern met het *Nieuw Archief* en kregen een eigen titelblad (zie Figuur 1) [7].

Bierens de Haan was wegbereider voor een nieuwe generatie wiskundigen. Hij creëerde

een nieuwe afbakening van de wiskunde met zijn literatuuroverzichten, aanvankelijk overzichten van integralen en vervolgens van Nederlandse bijdragen aan de wiskunde in de loop der geschiedenis. Deze laatste bibliografieën maakten deel uit van een internationale onderneming onder leiding van de Italiaanse prins Boncompagni. Achteraf kan het als een onderdeel gezien worden van de professionalisering van de wiskunde, dat een internationaal gezelschap zich zette aan een opsomming van wat er aan wiskunde ooit was geschreven: de zuivere wiskunde werd gecanoniseerd. Dit gebeurde door voor ieder land een opsomming per eeuw te maken. De resultaten werden gepubliceerd in het *Bullettino di bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche*. Bierens de Haan deed dit voor Nederland en de bundeling van zijn bibliografie is nog altijd het gezaghebbende overzicht [8]. Met deze canon was de ruimte voor de wiskunde afgebakend. Pieter Schoute (1846–1913) in Groningen, Diederik Korteweg (1848–1941) in Amsterdam en in Delft Gerrit Schouten (1844–1933) en Jacob Cardinaal (1848–1922) gaven invulling aan de ruimte die Bierens de Haan had gecreëerd. Het genootschap verschoof zijn aandacht van het zetten van een standaard voor het onderwijs op nationaal vlak, naar deelname in een internationale herdefinitie van de discipline.

Volgens den ‘Grondslag’

Rond 1900 verschenen de *Wiskundige Opgaven* nog steeds, maar nu met duistere symbolen. Het meest curieus zijn de indexen op de opgaven. Het lijkt een symbolenwereld die helemaal genoeg heeft aan zichzelf en juist dit was het uiterste van moderne wiskundebeoefening. Het ging om indexen volgens den ‘Grondslag’ en daarin had de Nederlands wiskundige gemeenschap, het Wiskundig Genootschap in het bijzonder, internationaal het voortouw.



Figuur 1 Wiskundige Opgaven

Boncompagni's internationale poging om tot een allesomvattende lijst van wiskundige literatuur te komen, was vastgelopen bij de 19e eeuw. Het lukte niet meer om binnen een decennium alles wat in een eeuw was verschenen, op te sommen en die eeuw was nog niet eens afgelopen. Er zat niet anders op dan dynamisch de productie van wiskundig werk te volgen wanneer dat verscheen, niet langer te streven naar een definitieve bibliografie, maar naar een periodiek met verwijzingen, een referaattijdschrift. Het referaattijdschrift hoorde bij de professionalisering van de wetenschap en een eerste voorbeeld was het *Pharmaceutisches Central-Blatt* dat reeds in 1830 verscheen. In de wiskunde had het *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (1855) sinds 1868 een bibliografische bijlage; Eneströms *Bibliotheca Mathematica* (1884) daarentegen ontwikkelde zich veeleer tot historisch tijdschrift en was in de gegeven situatie niet echt bevredigend. In 1889, als onderdeel van de wereldtentoonstelling bij de honderdste verjaardag van de Franse revolutie, kwamen wiskundigen bijeen in Parijs om te overleggen over een internationale bibliografische uitgave. Zo'n uitgave, gericht op het scheppen van een overzicht, vereiste een systematiek: een indeling van de wetenschappen, in dit geval van de wiskunde en daar zette men zich toe. Het resultaat was een eerste ontwerp voor zo'n indeling, 'projet d'un répertoire bibliographique des sciences mathématiques'. Na nieuw overleg in Parijs twee jaar later, zetten de Nederlanders Bierens de Haan, Schoute en Korteweg hun zinnen op dit initiatief. In december 1891 en februari 1892 oordeelde het bestuur van het Wiskundig Genootschap in principe positief over het idee. Voorzitter Korteweg en bestuurslid Schoute waren ook degenen die zorg droegen voor de vertaling van het 'projet d'un répertoire' tot *Grondslag van een Bibliographisch Repertorium der Wiskundige Wetenschappen*. Toen enkele weken later het WG een aanzienlijk legaat toeviel van Franciscus Johannes van den Berg, kon men op 30 april besluiten in Parijs het voorstel te doen tot het uitgeven van een bibliografisch tijdschrift [9]. Zo kon vanaf 1893 de *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques* (zie Figuur 2) verschijnen, uitgegeven door het genootschap onder hoofdredactie van Schoute en met medewerking van een verrassend lange lijst van Nederlandse wiskundigen. De *Revue* was ingedeeld, en geïndexeerd met een drieplaatsige index, naar dat Parijse repertoire. Natuurlijk voorzag het genootschap ook al haar andere publicaties, ook *Wiskundige*

Opgaven, van deze rubricering "volgens den 'Grondslag'".

Schoute mobiliseerde in de *Revue Semestrielle* een aanzienlijk deel van de Nederlandse gemeenschap van wiskundigen, ook velen van wie men verder geen publicaties aantreft, en kweekte hiermee een grondige kennis van de wiskundige literatuur. Zo groeide dankzij het voorbereidend werk van Bierens de Haan en het initiatief van de volgende generatie de wiskunde mee in de 'Tweede Gouden eeuw' in de Nederlandse wetenschapsbeoefening [10].

Systematiek

Inhoudelijk viel op die indeling wel iets af te dingen. De wiskunde als wetenschap was juist rond diezelfde tijd heftig in beweging; de groei en de behoefte aan systematiek was daar zelf een uiting van. Fundamentele echter was de inhoudelijke verandering in het begrip van de wiskunde. De meetkunde was geen meten van een beeld van de aarde meer, geen geo-metrie, maar een abstracte theorie, zo had men sinds Riemann en Klein begrepen. Dedekind en Cantor hadden met een nieuw getalbegrip de getaltheorie een nieuw aanzien gegeven en dankzij Frege en Cantor werd een bepaalde versie van de logica ook wiskunde. Dit riep nieuwe specialisaties op in de wiskunde en een nieuwe indeling van het vak. Het *Répertoire*, de *Grondslag*, stak daar echter zo volstrekt traditioneel bij af dat ze zich ook niet liet aanpassen aan de inhoudelijke vernieuwingen. Was de *Revue Semestrielle* dus naar soort van onderneming en naar manier van werken een uiterst moderne bijdrage aan de wiskunde-beoefening, naar de inhoud van haar indeling was ze, paradoxaal genoeg, traditioneel. Dat doet niets af aan het gegeven dat het Wiskundig Genootschap veertig jaar lang een tijdschrift aan het front van de wiskundebeoefening uitgaf.

Het was een bewuste keuze van het genootschap zich te roeren aan het internationale wetenschappelijke front. Eenmaal aan dat front, wilde het bestuur zich ook niet meer terugtrekken. Toen de kosten van de uitgave van het *Revue* in de jaren 1920 te hoog begonnen te worden, werden in eerste instantie pogingen ondernomen om financiën van elders aan te trekken. Een suggestie van één van de leden om de samenvattingen weg te laten—waarmee een enorme kostenbesparing op het *Revue* mogelijk was—werd niet in overweging genomen. Het genootschapsbestuur voelde heel goed aan, dat het juist de samenvattingen waren die hun onderneming waardevol maakten.



Figuur 2 Revue Semestrielle

In plaats daarvan werden alle subsidiemogelijkheden aangeschreven—van Ministerie tot provincie tot gemeente Amsterdam—en werd de prijs van het tijdschrift een beetje verhoogd [11]. Het Wiskundig Genootschap was één van de eerste leden van de *Union Mathématique Internationale* dat in 1920 werd opgericht. Uit interne bestuursberichten is duidelijk dat men met dit lidmaatschap—dat natuurlijk kosten met zich meebracht—hoopte extra financiering te kunnen verwerven voor de *Revue*. Na een aantal jaren bleek dat de internationale wiskundige gemeenschap de Nederlanders financieel niets opleverde [12].

In 1931 was het initiatief van het *Revue* uitgeput. Door een fusie met het concurrerende *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* kon de *Revue* nog tot 1934 voortbestaan, maar toen werd ze definitief afgelost door het modernere *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* dat de Deutsche Mathematiker-vereinigung sinds 1931 uitgaf.

Korteweg als bruggenbouwer

Rond 1900 was het genootschap niet alleen hoeder van een nieuwe, zuivere wiskunde, het vak had ook aan de universiteiten een vaste plaats verworven en het genootschap speelde internationaal een rol in deze hergedefinieerde wetenschap. Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* kreeg een nieuwe impuls met het starten van een *Tweede Serie* in 1895. Dit maakte dat het genootschap ook

Overzicht tijdschriften van het Wiskundig Genootschap

1. *Kunstoefeningen over verscheide nuttige onderwerpen der wiskunde uitgegeven door het genootschap der mathematische wetenschappen, onder de spreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1782)–2 (1788)
2. *Wiskunstige Verlostiging, in eene aaneenschakeling van uitgelezenen voorstellen met derzelve ontbindingen door het genootschap der mathematische wetenschappen, onder de spreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1793)–2 (1795)
3. *Mengelwerk van uitgelezenen en andere wiskundige verhandeligen* 1 (1796)–2 (1816); verscheen gedeeltelijk als titeluitgave van (5).
4. *Wiskunstig Mengelwerk in eene aaneenschakeling van uitgelezenen voorstellen met derzelve ontbindingen door het genootschap der mathematische wetenschappen, onder de spreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1798)–2 (1802)
5. *Wiskunstige Oefeningen in eene aaneenschakeling van uitgelezenen voorstellen benevens een mengelwerk van uitgelezenen en andere wiskundige verhandeligen* [door het genootschap der mathematische wetenschappen,] onder de spreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven 1 (1806)–2 (1809)
6. *Wiskundige Verhandeligen van het genootschap te Amsterdam onder de spreuk: een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1817)
7. *Verzameling van Wiskundige voorstellen door de leden van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven elkander tot onderlinge oefening opgegeven* 1 (1820)–6 (1836)
8. *Verzameling van nieuwe Wiskundige voorstellen door de leden van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven elkander tot onderlinge oefening opgegeven* 1 (1841)–2 (1846)
9. *Verslag van het verhandelde op de wetenschappelijke vergaderingen door de leden van het wiskundige genootschap* 1 (1842/44)–6 (1850/51)
10. *Nieuwe wis- en natuurkundige verhandeligen uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam* 1 (1844)–2 (1854)
11. *Verzameling van Wiskunstige opgaven door de leden van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1850)–2 (1854)
12. *Archief, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder de zinspreuk: een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1856/59)–3 (1870/74)
13. *Wiskundige opgaven met hare ontbindingen door de leden van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk een onvermoeide arbeid komt alles te boven* 1 (1855/59)–4 (1874)
14. *Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap ten spreuke voerende: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" elkander tot onderlinge oefening opgegeven* 1 (1875/81)–21 (1960/64).
15. *Nieuw Archief voor Wiskunde*
serie I: 1 (1875)–20 (1893)
serie II: 1 (1895)–23 (1949)
serie III: 1 (1953)–30 (1982)
serie IV: 1 (1983)–17 (1999)
serie V: 1 (2000)–...
16. *Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam, Tome 1 (1893) – Tome 39 (1934)*. Met tienjaarlijks *Tables des matières contenues dans les cinq volumes, suivies d'une table générale par noms d'auteurs*. Met supplement *Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques*. Van t. 37 (1932) – 39 (1934) hierin: *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*
17. *Mededelingen van het Wiskundig Genootschap*, jrg. 1 (1958) – jrg. 44 nr. 6 (sept. 2001), voortgezet als elektronische nieuwsbrief
18. *Pythagoras: Wiskundetijdschrift voor jongeren* 1 (1961/62)–... [vanaf jaargang 38 nr. 1 (oktober 1998) uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse onderwijscommissie van het WG]

sommige dingen niet meer deed. De opgaven die het genootschap publiceerde waren niet meer te doen voor degenen die studeerden voor de lager onderwijs akten. Die studenten grepen inmiddels naar *De vriend der wiskunde*, dat sinds 1886 op commerciële basis werd uitgegeven. Voor de mensen die studeerden voor een akte voor het middelbaar onderwijs waren de opgaven van het genootschap vaak nog wel interessant, maar de artikelen in het *Nieuw Archief* waren voor deze doelgroep vaak veel te hoog gegrepen. Tijdens de jaarvergadering van 1903 stelde F.J. Vaes dit probleem aan de orde met zijn voorstel dat het genootschap een tijdschrift zou gaan uitgeven voor docenten en studerende voor de onderwijsakten. Het bestuur voelde hier niets voor. Tijdens de

jaarvergadering werd Vaes uitgenodigd om zijn plannen nader uit te komen leggen in een bestuursvergadering. In de notulen van die vergadering, in december 1903, staat:

“Uit de bespreking blijkt dat de meeste leden van het bestuur niet wenschen een nieuw tijdschrift in het leven te roepen op grond daarvan, dat het Nieuw Archief beschikbaar is voor ieder die, op welk gebied van wiskunde ook, iets van diergelijke beteekenis heeft medetedeelen, doordat zelfs bij het begin der laatste serie op het inzenden van stukken van eenvoudige aard is aangedrongen. Dat dit geen gevolg heeft gehad, is alleen daaraan te wijten, dat door niemand iets is ingezonden. [13]”

Het was Korteweg, op dat moment bestuurslid, die voorstelde dit initiatief financi-

eel te steunen in ruil voor een voordeel voor de leden. Op die manier liep het genootschap geen risico en konden de leden toch profiteren van zo'n tijdschrift.

Het *Wiskundig Tijdschrift* verscheen van 1904 tot 1923 met steun van het genootschap, dat belang had bij het vasthouden van het contact met de wereld van het onderwijs. Het genootschap kon wel haar activiteit concentreren op de internationale academische wiskunde, maar kon nationaal niet voortbestaan op de academische wiskundigen alleen. Het was Kortewegs diplomatie die in 1903 de band met de beroepsgroep van leraren in stand hield. Met de kleinere beroepsgroep van verzekeringswiskundigen onderhield het genootschap een innige band; per traditie leverden zij de penningmeester in het bestuur. Gezien de kapitaalcracht van hun broodheren hadden de verzekeringswiskundigen bij de oprichting van hun tijdschrift in 1894 genoeg aan de morele steun van het genootschap.

Op een vergelijkbare wijze als Vaes' initiatief kwam in 1913 het *Nieuw tijdschrift voor Wiskunde* (zie Figuur 3) tot stand, zonder directe bemoeienis van het Wiskundig Genootschap. Het wiskunde-onderwijs maakte in het begin van de twintigste eeuw een snelle ontwikkeling door en hoewel genootschapsleden net als honderd jaar eerder een prominente rol vervulden, trad het genootschap zelf nu niet als initiatiefnemer of uitgever naar voren. Naar aanleiding van felle debatten over de positie van de wiskunde in het middelbaar onderwijs, in het bijzonder het mechanica-onderwijs in het HBS-curriculum, verscheen vanaf 1924 een bijlage bij het *Nieuw tijdschrift voor Wiskunde*, genaamd *Bijvoegsel van het Nieuw tijdschrift voor wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen*. Vanaf 1927/28 verzelfstandigde zich dit bijvoegsel tot het tijdschrift voor wiskundeleraren *Euclides*. Ook dit was in eerste instantie een commercieel initiatief van de Groningse uitgever Noordhoff, maar werd geleidelijk aan door de Nederlandse verenigingen voor wiskundeleraren omarmd als huisorgaan [14]. Via de leden hield het genootschap voeling met de verschillende tijdschriften. Zo waren de academische genootschapsleden gewilde auteurs voor bijdragen in de nieuwe wiskundetijdschriften. Daarmee bepaalden ze ook het gezicht van die bladen –en het beeld dat in die bladen van wiskunde werd uitgedragen, al deden ze dat dan vanuit hun hoedanigheid van hoogleraar of docent, en niet als genootschapslid. Vaak hadden zij zitting in de redactie, zoals Eduard Dijksterhuis bij *Euclides* en



Figuur 3 Nieuw tijdschrift voor wiskunde

Fred Schuh bij het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. De band was nog inniger. Voor de Nederlandse wiskunde was tot na de Tweede Wereldoorlog *Euclides* het tijdschrift waar oraties van aantredende hoogleraren en necrologieën van vooraanstaande wiskundigen verschenen. Het blad gaf zelfs als bijlage een reeks portretten van zittende hoogleraren uit. De academische wiskunde was zo in meest letterlijke zin gezichtsbepalend voor het middelbaar onderwijs en omgekeerd was *Euclides* het huisorgaan voor de hele Nederlandse wiskundige gemeenschap, ook voor de gemeenschap van het genootschap.

Na 1950 veranderde dit opnieuw in hoog tempo. *Euclides* specialiseerde zich tot didactiek-tijdschrift. In 1953 verschenen zowel het laatste 'In Memoriam' dat niet per se aan de onderwijsgemeenschap gerelateerd was, als de laatste niet didactiek-gerelateerde inaugurale rede [15]. Sindsdien was de functie van huisorgaan van de Nederlandse wiskundige gemeenschap vacant. Sterker nog, de notie dat er één Nederlandse wiskundige gemeenschap was, vervaagde langzamerhand. Het beeld van de wiskunde dat in *Euclides* werd uitgedragen zong zich in de loop van de jaren '60 en '70 los van de academische wiskunde.

Niet op internationaal topniveau

In de generaties na Korteweg figureerden Nederlandse wiskundigen prominent op het internationale toneel. Mensen als Bertus Brouwer, Johannes van der Corput, Hans Schouten, Bartel van der Waerden zaten in redac-

ties van tijdschriften. Brouwer zette zelfs een eigen tijdschrift op, *Compositio Mathematica* [16]. Het genootschap maakte weliswaar in haar gelederen veel van de turbulenties rond dergelijke tijdschriften mee, maar trad niet op als uitgever. Het slaagde er ook niet in om met het *Nieuw Archief* een plaats te verwerven tussen de generalistische toptijdschriften voor wiskunde. Na de Tweede Wereldoorlog was ook internationaal het tijdperk van de algemene wiskundige tijdschriften voorbij en op de markt van specialistische tijdschriften heeft het genootschap zich nooit begeven. *North Holland*, de uitgever die voortkwam uit de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, slaagde daar na zelfstandiging wel in met het algemene *Indagationes Mathematicae* en enkele specialistische *journals*. Wat het Wiskundig Genootschap wel lukte op het vlak van congressen en conferenties, met als hoogtepunt de organisatie van het International Congress of Mathematicians in Amsterdam in 1954, kwam op publicatiegebied niet tot stand. Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* startte in 1953 de derde en in 1983 de vierde serie, de taal verschoof naar het Engels, maar als tijdschrift bereikte het geen internationaal topniveau. Dat is niet erg, maar binnen een gemeenschap van professionele onderzoekers gericht op presenteren op internationaal niveau was het een punt van terugkerende wrevel dat het eigen genootschap ternauwernood een tijdschrift in de lucht wist te houden.

Wetenschapsbeoefening had na de Tweede Wereldoorlog de gestalte van georganiseerd onderzoek, ook in de wiskunde. De universiteiten creëerden Mathematisch Instituuten, het Mathematisch Centrum werd opgericht en de onderzoekers specialiseerden zich [17]. De wereld van het onderzoek en die van het onderwijs groeiden ieder afzonderlijk en groeiden uit elkaar. Kenmerkend was dat rond 1980 enerzijds de universitaire lerarenopleidingen praktisch geen studenten meer trokken en anderzijds het genootschap zich aansloot bij de koepel van beroepsverenigingen in de beta-wetenschappen. Voor het Wiskundig Genootschap en het *Nieuw Archief voor Wiskunde* betekende dit dat in steeds sterkere mate nog slechts de gemeenschap van academische wiskundigen bediend werd. En dat ze binnen die steeds nauwer omgrensde cultuur geen bloeiend blad uitbrachten, was een punt van zorg.

In het laatste decennium van het vorige millennium hebben opeenvolgende besturen van het genootschap gepoogd beweging in de publicatie te brengen, maar geheel in tradi-



Figuur 4 Archief voor Wiskunde, 1^e deel, 1859

tie van het Wiskundig Genootschap was het wachten op een coup.

Geen nieuwe coup

Het bestuur van het genootschap onder Jan Karel Lenstra pleegde op het eind van het millennium niet een coup, het was immers zelf aan het bewind, maar forceerde een sprong naar voren. De oplossing voor het *Nieuw Archief* werd niet gevonden in een vijfde poging tot een wetenschappelijk tijdschrift, maar in een tijdschrift dat de eigen gemeenschap bediende. Lenstra zette Chris Zaal aan het werk om tot een complete restyling van het blad te komen. Het innerlijk en uiterlijk van de *Vijfde Serie van het Nieuw Archief voor Wiskunde* zijn overduidelijk gericht op het onderhouden van de identiteit van de gemeenschap van academisch wiskundigen. De cover van het blad heeft inmiddels een naam te verliezen. De inhoud beschrijft wiskunde veel meer dan dat het wiskunde biedt. Het is een toegankelijk, bijna glossy blad geworden en eigenlijk verwonderen wij ons erover dat het nog niet naast *Psychologie Magazine* en *Historisch Nieuwsblad* in de kiosk ligt.

De afbakening van de wiskunde en de plaats van de wiskunde in de samenleving waar de negentiende-eeuwse wiskundigen hard aan werkten, hebben veel van hun zelfsprekendheid verloren. De functie van een op zuivere wiskunde georiënteerde schoolwiskunde, door De Gelder en tijdgenoten met succes bepleit, stond rond het jaar 2000 ter discussie. Het Wiskundig Genootschap



Figuur 5 Het laatste nummer van de *Revue Semestrielle* gefuseerd met het *Jahrbuch*

reageerde met een herbevestiging van haar identiteit in het nieuwe *Nieuw Archief*. Het werd het huisorgaan van een gemeenschap die haar identiteit ontleent aan een academische notie van wiskunde. Hier was weer ruimte voor oraties, herdenkingen, en—constante in deze hele publicatiegeschiedenis—wiskundige opgaven.

Geheel in lijn met deze beleidswijziging verwierf het genootschap het predikaat

Koninklijk. Ook op publicatiegebied roerde het zich opnieuw. Om te beginnen nam het genootschap het tijdschrift *Pythagoras*, erop gericht om middelbare schoolleerlingen te voeden met een notie van wiskunde, onder zijn vleugels. Twee jaar geleden nam het de uitgeverij Epsilon, met een fonds gericht op verbreiding van diezelfde notie van wiskunde, over en stelde zich op als uitgever. Daarmee is het gezelschap onder de zinspreuk "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" wat publicaties betreft teruggekeerd tot haar wortels in de late Verlichting.

Conclusie

Het Wiskundig Genootschap belichaamde in de loop van zijn bestaan verschillende visies op de wiskunde en vervulde de functies en verrichtte de publicaties die daarmee in overeenstemming waren. Dit betekent in elk geval dat het genootschap zich als uitgever succesvol heeft vernieuwd: het illustreert dat het genootschap met de tijd en omstandigheden is meegegroeid. Voor een gezelschap van 'kunst-liefhebbers' was de wiskunde een middel om de geest te scherpen. Strabbe en zijn bentgenoten hadden de opgaven nodig om elkaar te overtuigen van hun inventiviteit. Voor de volgende generatie was wiskunde een middel om de hele natie te verheffen. De Gelder en zijn tijdgenoten schiepen een genootschap dat wiskunde koesterde als een autonome activiteit met eigen kwaliteitsmaatstaven en droegen deze succesvol uit in de sa-

menleving, in het bijzonder in het onderwijs. Vanaf het midden van de negentiende eeuw bakenden Bierens de Haan en zijn navolgers een gebied af voor zuivere wiskunde, met opsommingen, canoniserings en een referaat-tijdschrift.

Qua publicaties is dit laatste, de *Revue Semestrielle*, de meest vooraanstaande prestatie geweest van het Wiskundig Genootschap. Tegelijkertijd begon de notie van wiskunde scheuren te vertonen, die zich rond 1900 nog niet maar in het midden van de twintigste eeuw wel uitten in een uiteengroeien van wiskundige gemeenschappen. Op het hoogtepunt van haar publicatie-activiteit deed het genootschap sommige dingen niet en dat had een betekenis. Zo trok het genootschap zich terug uit publicaties ten behoeve van onderwijzers. Het genootschap koos voor een exclusieve focus op de academische wiskundebeoefening, en liet daarmee ruimte voor het ontstaan van onafhankelijke visies op wiskunde binnen de gelederen van bijvoorbeeld wiskunde-onderwijzers en actuarissen. Dat ze vervolgens met die nieuwe beelden in concurrentie moest treden, was een onverwacht neveneffect dat decennialang niet herkend leek te worden.

In publiceren en andere activiteiten keerde het Koninklijk Wiskundig Genootschap het afgelopen decennium terug tot haar wortels. Het koestert haar gemeenschap en bedient deze met een huisorgaan.

Referenties

- 1 *Mathematische Liefhebberijen*, 9 nr. 5 (mei 1761), p. 228 van het liefhebberij-deel
- 2 Teri Perl, 'The Ladies diary or womans almanack 1704–1841' in: *Historia Mathematica* 6 (1979), pp. 36–53.
- 3 A.B. Strabbe (red.), *Oeffenschool der Mathematische wetenschappen* (1770–1771)
- 4 S.B. Engelsman, Het Wiskundig Genootschap en eerste secretaris Strabbe, in: R.H. de Jong e.a. (red.), *Tweehonderd jaar onvermoeide arbeid* [tentoonstellingscatalogus], Amsterdam: WG, pp. 9–20.
- 5 Danny Beckers, "Untiring labour overcomes all!" The Dutch mathematical society in comparison to its various counterparts in Europe, in: *Historia Mathematica* 28 (2001), pp. 31–47.
- 6 Danny Beckers, *Het despotisme der mathesis*, Hilversum: Verloren (2003).
- 7 Wijnand Rekers, *Een nieuw archief voor een nieuwe wiskundige* (2003) [ongepubliceerde doctoraalscriptie, TU Twente].
- 8 Bierens de Haan, *Bibliographie néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques, avec leurs applications* [= *Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*; 14–16], Rome: Impr. des Sciences Mathématiques et Physiques, 1883; reprint: Nieuwkoop: B. de Graaf, 1965.
- 9 Rijksarchief Kennemerland, Archief WG, inv.nr. 6, notulen 2 april en 30 april 1892.
- 10 Bastiaan Willink, *De tweede gouden eeuw: Nederland en de Nobelprijzen voor de natuurwetenschappen, 1870–1940*, Amsterdam: Bakker (1998).
- 11 Rijksarchief Kennemerland, Archief WG, inv.nr. 6, notulen 30 april 1921.
- 12 Rijksarchief Kennemerland, Archief WG, inv.nr. 237.
- 13 Rijksarchief Kennemerland, Archief WG, inv.nr. 6, notulen d.d. 19 december 1903.
- 14 Klaske Blom, *Van de Acten van Bekwaamheid* (1998) [ongepubliceerde doctoraalscriptie Universiteit Utrecht]
- 15 Respectievelijk: 'In memoriam dr. C.F.G. Griss' in *Euclides* 29 (1953–1954) nr. 1, pp. 42–45; prof.dr. P. Mullender, "Over enige principes in de mechanica" [rede uitgesproken bij de aanvaarding van zijn hoogleraarsambt aan de VU], in: *Euclides* 29 (1953/54) nr. 3, pp. 103–115
- 16 D. van Dalen en V. Remmert, The birth and youth of *Compositio Mathematica*: 'Ce périodique foncièrement international', in: *Compositio Mathematica* 142 (2006), pp. 1083–1102
- 17 Gerard Alberts, *Jaren van berekening*, Amsterdam: AUP, 1998.

De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.
Redacteur: Ferdinand Verhulst
e-mail: f.verhulst@uu.nl

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'De vrije wil-stelling van Conway en Kochen' van Klaas Landsman uit het NAW-decembernummer.

Over de vrije wil

In de afgelopen eeuwen is honderduit gepubliceerd over de vrije wil door filosofen, mystici, theologen en ook door wetenschappers. Nauw gerelateerd aan dit onderwerp is de mogelijkheid van goddelijk ingrijpen. Ik noem slechts de strijd tussen Gomaristen en Arminianen, maar er is veel, veel meer. Na Newton en het resulterende causale, deterministische wereldbeeld, deed ook de wetenschap een duik in het zakje. Men denke slechts aan de discussie van Napoleon met Laplace naar aanleiding van diens *Mécanique Céleste*. Hier vraagt de eerste waarom goddelijke verwijzing in dit werk geheel ontbreekt, waarop het fameuze antwoord "Je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse" volgt. In de 19de en 20ste eeuw ging de gedachtenwisseling verder. Brouwer mengde zich in de discussie vanwege het begrip 'vrije keuze'. Ook de fysici lieten zich niet onbetuigd, zie de voordracht 'Vom Wesen der Willensfreiheit' van Planck uit 1936. Ook mensen als Minnaert hebben zich hier uitvoerig tegenaan bemoeid. Aardig is een serieuze theologische stroming die de mogelijkheid van goddelijk ingrijpen als volgt verklaart: Het begint bij de kieren in de quantummechanica op grond van Heisenberg's onzekerheidsrelatie en de chaostheorie blaast de zaak dan op tot waarneembare grootte. Uiteraard bestaan er ook stromingen die deze verklaring willen weerleggen. Klaas Landsman heeft in zijn artikel de vrije wil zo ongeveer gereduceerd tot gebrek aan determinisme bij elementaire deeltjes. Hierop zou ik gelaten willen antwoorden met de Goethe-uitspraak "Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so Übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes."

Henk Broer, Groningen

Het onderstaande is een reactie op het redactioneel van Ferdinand Verhulst uit het NAW-decembernummer en op het artikel 'Dr. Pangloss neemt de maat' van Eduard Looijenga uit het NAW-septembernummer.

Citatie-analyse

Er heeft tweemaal iets over citatie-analyse in uw tijdschrift gestaan en ik heb me beide keren verbaasd. Eduard Looijenga maakt een aantal kanttekeningen waaronder de vaststelling dat de *h*-index niet deugt, maar welke zijn concrete aanbevelingen zijn ontgaat me. Uw hoofdredacteur is nauwelijks duidelijker en mist helaas de essentie: citatie-analyse heeft voor theoretische vakgebieden als wiskunde (en theoretische fysica) geen enkele zin. Wat je met zo'n analyse vaststelt is dat groepjes wetenschappers bepaalde kanten ophollen en elkaar veel citeren. Is dat van belang? Gaat het om de waan van de dag of is er werkelijk een belangrijke doorbraak in de wetenschap? Dat blijkt pas in de toekomst en die kan behoorlijk ver weg liggen. Daar zijn vele voorbeelden van. Zelfs als je enige waarde zou hechten aan citatie-analyse, dan is de moeilijkheid dat manipulatie en misbruik in de praktijk al voorkomt. Het SIAM NEWS van december 2009 heeft hierover een opmerkelijk artikel van Douglas Arnold. Verder worden boeken niet betrokken in citatie-analyse. Nee, want de citatie-onderzoekers kunnen niet onderscheiden of het gaat om een standaard studieboek of een belangrijke herschrijving van de literatuur met spannende nieuwe inzichten en vergezichten. Het zijn maar armzalige tellers. Ondertussen wordt door gemakzuchtige bestuurders citatie-analyse als beoordelingsinstrument gebruikt. Wordt het niet tijd dat de wiskundigen deze praktijken goed gedocumenteerd en voorzien van voorbeelden gaan bestrijden?

Marinus de Goede, Leiden

Martinus van Hoorn

Voormalig hoofdredacteur Euclides

mc.vanhoorn@wxs.nl

Onderwijs Presentatie rapport rekencommissie KNAW

“Elke positieve actie

In november vorig jaar verscheen het rapport van de KNAW-commissie die het rekenonderwijs op de basisschool heeft bestudeerd. Dit rapport haalt volgens Martinus van Hoorn, voormalig hoofdredacteur van Euclides, de angel uit het immer voortdurende debat over realistisch versus traditioneel rekenen.

De rekenvaardigheid, of het gebrek daaraan, van de leerlingen in het Nederlandse onderwijs staat volop in de belangstelling. Aansluitingsproblemen zijn misschien van alle tijden, maar nu schijnt er meer aan de hand. Bij de rekendiscussie valt allicht de naam van Jan van de Craats, die op vele plaatsen zijn opvatting over rekenvaardigheid heeft uitgedragen. Het is goed dat hij dat gedaan heeft, zonder zijn actieve opstelling was er misschien niet zo'n degelijk rapport verschenen: het rapport [1] van de KNAW-commissie die zich onder leiding van Jan Karel Lenstra over het rekenonderwijs op de basisschool heeft gebogen.

Presentatie van het rapport

Op 10 november 2009 presenteerde Lenstra het rapport voor een publiek van 120 mensen bestaand uit rekendidactici en andere betrokkenen, op een bijeenkomst van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO) [2]. Lenstra hield een glashelder betoog, vertelde onomwonden welke conclusies de commissie had getrokken en ook waarover de commissie geen conclusie meende te kunnen trekken. Opvallend was dat velen direct hun instemming met het rapport betuigden. Dat gold met name voor vier mensen die tevoren uitgenodigd waren te reageren. Jan van de

Craats, eerder genoemd, prees de commissie voor haar degelijke werk. Jan van Maanen, hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut te Utrecht, sprak de hoop uit dat op een breed front aan verbetering van het rekenonderwijs kon worden gewerkt. Vertegenwoordigers van de onderwijsinspectie en van de PO-raad [3] reageerden eveneens instemmend. Bovendien hadden een week eerder de beide staatssecretarissen van onderwijs al gezegd de aanbevelingen in het rapport te zullen overnemen. Bemoedigend nieuws, kun je zeggen. Eén kanttekening is al meteen nodig. Enkele aanbevelingen in het rapport gaan over de pabo's, welke behoren tot het hoger beroepsonderwijs, verenigd in de Hbo-raad. Deze raad laat zich niet graag de kaas van het brood eten. Maar hopelijk is een compromis mogelijk, gezien de ontwikkeling van een kennisbasis waaraan de hbo-instellingen werken.

Rekenvete zinloos

Het persbericht bij de verschijning van het rapport had de kop 'Rekenvete zinloos'. Daarmee werd benadrukt dat claims over de effectiviteit van een realistische dan wel een traditionele didactiek niet worden gesteund door voldoende onderzoek. Zelfs bleken de verschillen in rekenopbrengst *binnen* de beide rekendidactieken groter dan onderling. De

leraar is de cruciale factor. De commissie is van mening dat het onderwijs op de pabo's en de nascholing voor basisschoolleraars dringend tegen het licht moeten worden gehouden, en dat daar de sleutel ligt tot verbetering van het rekenonderwijs. Met name door de fusie van lagere scholen en kleuterscholen in 1984 zijn vakkennis en vakdidactiek ernstig in het gedrang gekomen, terwijl daarnaast de instroom aan de pabo's aan kwaliteit heeft ingeboet. Sommige media interpreteerden deze conclusies als 'de leraar krijgt de schuld'. Maar dát concludeerde de KNAW-commissie nu juist niet. De commissie was er niet op uit om schuldigen aan te wijzen. Het gaat erom de blik op de toekomst te blijven richten. Wat kan en moet er, gegeven de huidige situatie, gedaan worden om het rekenonderwijs te verbeteren? De commissie wilde zich uitsluitend baseren op wetenschappelijk gefundeerde bevindingen. Zo werden de internationaal uitgevoerde TIMMS-onderzoeken bekeken [4]. Het enige dat daaruit blijkt, stelt de commissie, is dat de rekenvaardigheid van de Nederlandse deelnemers aan de TIMMS-onderzoeken gestaag dalende is. Wat uiteraard reden tot zorg is.

Realistisch naast traditioneel

De KNAW-commissie wilde de verschillen tussen realistisch rekenen en traditioneel rekenen in beeld brengen. Dat bleek niet eenvoudig. Voor realistisch rekenen bestaat weliswaar een grondslag — vastgelegd in het proefschrift van Adri Treffers [5] — maar de metho-

begint met kritiek"

des die in naam realistisch zijn hebben deze grondslag soms op belangrijke onderdelen niet overgenomen. Traditioneel rekenen heeft zich in de loop van de jaren ontwikkeld, in onderling verschillende methodes [6]. Binnen beide didactieken komen verschillen tussen theorie en praktijk voor. Er zijn uiteraard ook verschillen tussen de didactieken. Ik kan zulke verschillen niet zorgvuldiger verwoorden dan de commissie deed. In het rapport staat kritisch commentaar op elk van de didactieken. Het lijkt erop dat realistisch rekenen een groter beroep op de leraar doet dan traditioneel rekenen. Bij beide didactieken is interactie tussen leraar en leerling nodig, stelt de commissie, en dit staat onder druk doordat zelfstandig werken ook in de basisschool zijn intrede heeft gedaan. De commissie verwacht dat beide didactieken zowel in methode als

uitvoering in de klas, naar elkaar toegroeien. Men bedenke hierbij dat in de praktijk de leraar alles bepaalt, bijvoorbeeld in hoeverre didactische hulpmiddelen worden gebruikt, bij welke soort methode dan ook. Verschillen van opvatting zullen altijd blijven bestaan, maar misschien daagt een eind aan de rekenvete. Dat zou goed zijn. Immers, momenteel is de vraag naar nascholing op het gebied van het rekenen opvallend gering. Jan van Maanen merkte op dat door de verdeeldheid onder reken- en wiskundigen men zich liever verdiept in andere disciplines. Of, omgekeerd, eenheid in de gelederen van de reken- en wiskundigen zou een succesfactor kunnen zijn voor de zo dringend noodzakelijke nascholing. De sleutel tot verbetering van het rekenonderwijs blijft bij degenen die het onderwijs dagelijks gestalte geven.

Ten slotte

De commissie noemt in haar rapport het werk van de commissie-Meijerink ten behoeve van doorlopende leerlijnen [7]. Mocht over het rekenen in de basisschool een redelijke consensus ontstaan, dan zou het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs daarbij verstandig moeten aansluiten. Allereerst zal dan de blik worden gericht op de algebra. Maar men mag hopen dat het gehele reken- en wiskundeonderwijs voor 4- tot 18-jarigen in een doordachte sequentie kan worden opgezet. Dat zou een zeer positieve actie zijn. 

Nawoord

Titel ontleend aan: Sacha la Bastide-van Gemert, "Elke positieve actie begint met kritiek" — Hans Freudenthal en de didactiek van de wiskunde (Uitgeverij Verloren, 2006).

Noten

- 1 *Rekenonderwijs op de basisschool – Analyse en sleutels tot verbetering*, KNAW, 2009. Te vinden op www.knaw.nl/cfdata/publicaties/publicaties.cfm
- 2 Deze vereniging werd opgericht in 1982 door E. de Moor en pa-docenten W. Faes en H. Heidenrijk, uit zorg over de kwaliteit van het rekenonderwijs, onder meer vanwege de vorming van de nieuwe pabo's in 1984.

- 3 De branche-organisatie voor primair onderwijs waarbij (driekwart van) alle basisscholen is aangesloten.
- 4 Zie: Jan van de Craats, 'TIMMS 2007 — Feiten en meningen.' NAW 5/10 3 (2009) 165-167.
- 5 A. Treffers, *Wiskobas doelgericht. Een methode van doelbeschrijving van het wiskundeonderwijs volgens wiskobas* (IOWO 1978)

- 6 De commissie baseerde zich voor het traditioneel rekenen op recente publicaties, zoals van Van de Craats en T. Braams & M. Milikowski, *De gelukkige rekenklas* (Uitgeverij Boom, 2008).
- 7 Het eindrapport van de expertgroep en ook het rapport *Over de drempels met rekenen* zijn te vinden op www.slo.nl/nieuws/dll

Derk Pik

JSG Maimonides

Postbus 87058

1080 JB Amsterdam

drpik@xs4all.nl

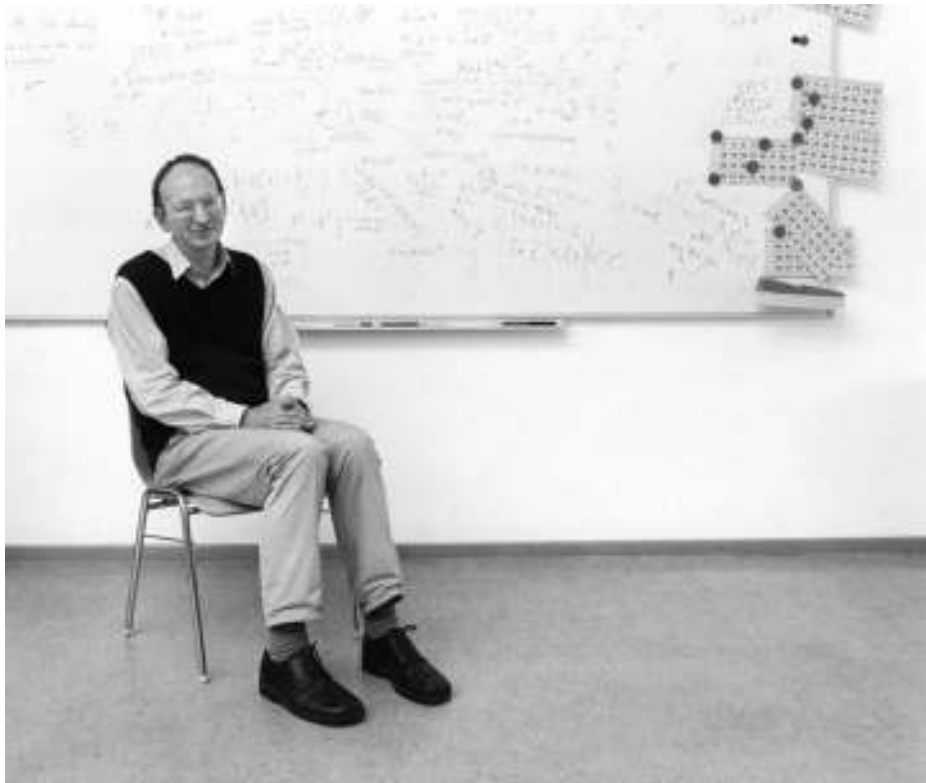
Boekbespreking Mariana Cook: Mathematicians

An Outer View of the Inner World

Recent verscheen bij Princeton een fotoboek met 92 portretten van bekende wiskundigen van deze tijd. Deze hommage door de Amerikaanse fotografe Mariana Cook roept ook vragen op. **Waarom wiskundigen? We kunnen de wiskundige gedachten niet van de foto's aflezen. Waarom zijn deze mensen dan wel geportretteerd?** Derk Pik, reviewredacteur van het Nieuw Archief voor Wiskunde, legt het boek onder de loep.

Het is bekend dat hondenbezitters na verloop van tijd op hun hond gaan lijken. In het hier besproken boek vertoont de wiskundige gelijkenis met zijn verzameling, tenminste, als we kijken naar het portret van Mandelbrot. Zijn streepvormige mond zien we op kleiner niveau twee keer terug in de iets donkerder,

kleine streepjes van zijn ogen en de bolle vorm van zijn gezicht keert terug in de rondingen van zijn krullen en nog eens, vier keer kleiner op fractaal niveau, in de sproeten van zijn gezicht. De prachtige scherpe, groot formaat, 20 bij 24 centimeter zwart-wit foto's nodigen uit tot observatie van het detail.



Gerd Faltings. Merk rechts de getallenkaarten op, die gebruikt worden bij een goocheltruc voor kinderen om een getal te raden dat iemand in gedachten houdt.

Het is een enorme aanwinst voor de wiskundige gemeenschap dat deze portretten gemaakt zijn. Van nogal wat beroemde wiskundigen is eigenlijk geen fatsoenlijk portret te vinden, geen foto die het niveau van het familiekiekje overstijgt. Weliswaar bestaan er de rijke fotodatabases van Oberwolfach en van een paar Amerikaanse universiteiten, maar portretten zoals in dit boek zijn nog niet eerder verschenen. Om een voorbeeld te noemen, van Jean-Pierre Serre zijn maar een paar goede foto's beschikbaar, waardoor nieuwsartikelen over hem telkens weer met het zelfde portret worden geïllustreerd. Van hem bevat dit boek een werkelijk schitterend portret. Informeel, van dichtbij genomen, een beetje melancholiek, maar ook artistiek ongewoon met een aparte uitsnijding, de ogen een beetje bovenin het beeld. Toch zou mijn bewondering voor het boek niet minder groot zijn als het portretten van negentig Franse brugwachters zouden zijn geweest. Wat heeft dit met wiskunde te maken? Is het wiskundige leven op een of andere manier van de portretten af te lezen? Zien we iets van het harde werk terug, of juist van het geluk van het succes of misschien alleen, zoals vele geportretteerden verklaren, het geluk om een wiskundige te mogen zijn? Wat heeft de fotograaf bewogen om juist wiskundigen te kiezen als onderwerp voor haar portretten?

Mariana Cook

Toen de wiskundige, biotech-hedegefundeigenaar en mecenas Brandon Fradd het boek *Scientists* van Mariana Cook onder ogen kreeg, vatte hij meteen het idee op om ook iets op het gebied van de wiskunde te laten verschijnen. Mariana Cook, leerling en protégé van de fotograaf Ansel Adams, heeft

een groot deel van haar artistieke loopbaan gewijd aan het maken van portretten. Deze portretten zijn gerubriceerd in *Generations of Women, Mothers and Sons, Fathers and daughters*, waarin een portret van generaal Colin Powell met vrouw en dochter is te vinden en *Couples*, waar het inmiddels beroemde portret van de jonge Barack and Michelle Obama in Hyde Park in staat. Dit interview, waarvan een stuk te lezen is in de New Yorker [1], laat zien hoe ver een kunstenaar vooruit kan kijken.

De hierboven genoemde werken hebben veel gemeenschappelijke stijlkenmerken. Vaak is de achtergrond van de foto egaal diepzwart, waardoor niets de aandacht kan afleiden van de geportretteerde. Deze is zeer gedetailleerd gefotografeerd en bij portretfoto's vaak in close-up. Elke foto gaat vergezeld van een persoonlijk verhaal, een klein interview, of een fragment dat door de geportretteerde is geschreven. Verhaal en foto zijn dus niet los van elkaar te zien en geven het portret een zekere intimiteit. De verhalen zijn dus belangrijk en vormen een integraal onderdeel van het geheel. In eerder werk zoals *Generations of Women* zijn deze verhalen soms schokkend. In het hier besproken boek is dat natuurlijk niet zo.

Verhalen

In *Mathematicians* [2] zijn de verhalen ook steeds persoonlijk en intiem, een heel enkele keer platvloers (Edward Nelson), maar altijd een essentieel onderdeel vormend van het portret. Opvallend en telkens terugkerend is de grote liefde waarmee de geportretteerden over wiskunde en de wiskundige arbeid spreken. Soms heeft dit een bijna religieus karakter. Op diverse plaatsen spreekt de geportretteerde de wens uit iets voor de samenleving te mogen doen voor de genoten vrijheid.

Van veel oudere wiskundigen is de levensloop bepaald door de tweede wereldoorlog. Er zijn tragische verhalen te lezen, steeds in enkele alinea's beschreven. De invloed van de massale migratie van joodse wetenschappers vanuit Europa naar de Verenigde Staten komt uit diverse interviews met Amerikaanse wiskundigen naar voren. John Milnor vertelt hoe destijds de internationale atmosfeer van de wiskundeafdeling van Princeton tot uitdrukking kwam in de bijnaam 'Department of Broken English'.

De ontdekking

Het mooist zijn de momenten waar de geportretteerde het gevoel beschrijft bij het doen van een ontdekking. Dit geeft aan-



De meetkundige William Thurston tussen boomstronken

leiding tot lyrische passages. John Horton Conway schrijft: "I am proudest, though, of discovering a whole new world of numbers, which Donald Knuth named 'surreal numbers'. I wish I'd invented that name. [...] When I discovered them, I went around in a permanent daydream for six weeks thinking about how the explorer Hernando Cortez looked out over the Pacific and saw a world that no Westerner had ever seen before. Nobody had ever seen what I saw before. Although it was totally abstract, it was very real. Abstract things can be real. Numbers can be more real than physical objects. It was an amazing new world of numbers that I discovered, more than numbers." Deze evocatieve uitbarsting contrasteert op komische wijze met zijn beschrijving van zijn puberteit, die hij in Liverpool doorbracht, met de door hem zogenaamde 'interessante figuren' achter in de klas. Hij voerde er niets uit en kreeg telkens preken van de leraren voor zijn kiezen.

Zo'n karakteristiek verhaal brengt de persoon Conway een stuk dichterbij. Je kijkt daarna anders naar de scherpe foto van een ontspannen in de camera glimlachende figuur. De foto is zo scherp dat je de textuur van zijn jas en trui draad voor draad kan zien.

Portretten

De presentatie, met zwarte portretachtergrond en een verhaal, heeft Cook vaak toegepast. De fotografie is prachtig sober en de personages op de foto's kijken allemaal alsof er geen fotograaf in de buurt is.

Er zijn echter ook portretten met een andere achtergrond. János Kolár zit temidden van de klimop, David Mumford staat aan de kade, Mikhael Gromov zit op de grond in een tuin tussen stervormige, zevenhoekige plantenbladeren. In zijn verhaal beschrijft hij de onbewuste onmiddellijke behoefte van de mens om symmetrie te herkennen. Volgens hem is het moment dat je dergelijke structuur onder



Copyright Mariana Cook

Portret van de Japanse wiskundige Heisuke Hironaka

woorden brengt het moment waar de wiskunde begint.

Ook zitten of staan sommige geportretteerden voor borden met formules, die vast vanwege de zwierigheid op de foto zijn gezet. Simon Donaldson zit voor een kast met preprints en stapels tijdschriften en Curtis McMullen, Gerd Faltings en Ingrid Daubechies staan elk voor een bord met hun favoriete formules. Grappig zijn de getallenkaarten, rechts op het bord van Faltings, die gebruikt worden bij een goocheltruc voor kinderen om een getal te raden dat iemand in gedachten houdt.

Sommige foto's zijn raadselachtig: waarom staan er Afrikaanse maskers boven het hoofd van Don Zagier? Zijn verhaal heeft er niets mee te maken. We lezen hoe hij zichzelf als kind ontwikkelde door het ene na het andere wiskundeboek te verslinden en zijn PhD behaalde op negentienjarige leeftijd. Net als de andere verhalen is ook dit geschreven in een persoonlijke, intieme stijl. We leren over zijn voorliefde voor het concrete en zijn verbazing over de diepe interpretaties die aan het concrete vastzitten.

Een machtige foto is van William Thurston naast een ontwortelde en deels ontschorste boomstam. De boomstam vult de gehele foto en is om hem heen gedrapeerd. Wat een ruimtelijke suggestie! Net zo suggestief als zijn beschrijving van zijn driedimensionale universa.

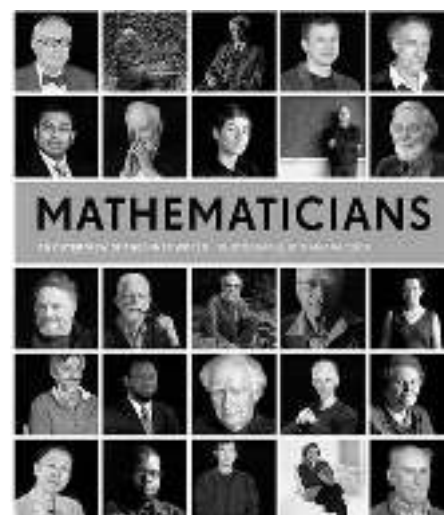
Gelukkig is er ook een aantal jonge wiskundigen geportretteerd. Zij kijken weer heel anders tegen hun wiskundige leven aan.

De uit Iran afkomstige Princeton-hoogleraar Maryam Mirzakhani schrijft openhartig over hoe het is om een vrouw te zijn in een door mannen gedomineerde wereld. Er staan in het boek flink wat vrouwen geportretteerd. Echt een contrast met de Nederlandse situatie.

Conclusie

Wat begon als een eerbetoon aan knappe wiskundigen blijkt een verzameling van verrassend echte portretten van menselijke figuren. Het is een schitterend koffietafelboek waar al-

le vormen van werken aan wiskunde aan bod komen. Je kunt er ook in op zoek naar allerlei persoonlijk advies, bijvoorbeeld: "The key step is to realize you have to stop reading books" (Alain Connes). Je kunt er inspiratie in zoeken, maar ook kennis nemen van de kleurrijke geschiedenis van vele wiskundigen. Als geheel is het een fraai portret van de wiskundige beroepsgroep. 



Mariana Cook, *Mathematicians: An Outer View of the Inner World*, 18 juni 2009, Princeton University Press, € 20,51.

Referenties

- 1 Mariana Cook, 'A Couple in Chicago', in *The New Yorker*, januari 2009, reprint van een interview van mei 1996, <http://www.newyorker.com/reporting/2009/01/19/090119fa.fact.cook>
- 2 Mariana Cook, *Mathematicians: An Outer View of the Inner World*, 18 juni 2009, Princeton University Press

Geeke Bruin-Muurling*Eindhoven School of Education**Postbus 513**5600 MB Eindhoven**g.bruin@tue.nl***Koeno Gravemeijer***Eindhoven School of Education**Postbus 513**5600 MB Eindhoven**k.gravemeijer@tue.nl***Michiel van Eijck***Eindhoven School of Education**Postbus 513**5600 MB Eindhoven**m.w.v.eijck@tue.nl***Onderwijs**

Aansluiting schoolboeken basisschool en havo/vwo

In de immer voortwoekerende discussie over het rekenonderwijs op de Nederlandse scholen mag de wetenschap een duit in het zakje doen. Dit artikel doet verslag van promotie-onderzoek van Geeke Bruin-Muurling onder begeleiding van Michiel van Eijck en Koeno Gravemeijer. Bruin-Muurling analyseerde schoolboeken van groep 8 (primair onderwijs) en klas 1 (havo/vwo) en keek daarbij naar de coherentie van het lesmateriaal voor het werken met breuken.

In Nederland is er op dit moment nog steeds veel onrust over het rekenniveau van leerlingen. Verschillende partijen, zoals universiteitsdocenten, pabobesturen, de media en ouders signaleren veranderingen die ze niet wenselijk vinden. Ook in Nieuw Archief voor

Wiskunde verschijnen met regelmaat artikelen over de reken- en algebraïsche vaardigheden van Nederlandse leerlingen. In de discussie worden basale vaardigheden op het gebied van rekenen en wiskunde als het centrale probleem genoemd. Daarbij wordt een relatie gelegd met de veranderingen die de afgelopen jaren in de didactiek van de basisschool en in het curriculum van de onderbouw van het voortgezet onderwijs hebben plaatsgevonden. In dit verband wordt ook de aansluiting tussen de basisschool en het voortgezet onderwijs als een mogelijke oorzaak van problemen in de rekenvaardigheden genoemd. De veranderingen die in beide onderwijstypen hebben plaatsgevonden lijken door verschillende visies op wiskunde en wiskundeonderwijs te zijn beïnvloed. Dit roept de vraag op, of er inderdaad sprake is van een aansluitingsprobleem in de overgang van de basisschool naar het voortgezet onderwijs en waar dat probleem dan uit bestaat. Om te onderzoeken of de veranderingen gevolgen hebben gehad voor de coherentie van het curriculum hebben we een analyse van de rekenwiskundemethoden uitgevoerd, waar we in dit artikel verslag van doen. Het betreft vier methoden voor groep 8 van de basisschool en twee methoden voor klas 1 havo/vwo, waarbij we ons richten op het gebied van breuken. Op basis van een analyse van vormkenners en een meer inhoudelijke analyse komen

we tot de conclusie dat de overgang van primair onderwijs naar voortgezet onderwijs (havo/vwo), in dit domein, niet coherent is. Dit illustreren we aan de hand van de thema's getalspecifieke procedures en formaliseren en expliciteren.

Veranderingen in het rekenonderwijs

In het primair, voortgezet en hoger onderwijs wordt verschillend naar het wiskundeonderwijs gekeken. De visies verschillen zowel voor de doelen van het primair en voortgezet onderwijs als voor de didactiek. De veranderingen in het basisonderwijs bij het vak rekenen-wiskunde komen voort uit de realistische onderwijstheorie (ook wel aangeduid als RME, realistic mathematics education). Hoewel het Freudenthal Instituut in het project W12-16 samen met de SLO de basis heeft gelegd voor de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in de basisvorming, kunnen we toch constateren dat er in de vormgeving van het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs ook andere invloeden een rol spelen. Dit betreft met name het vervolgonderwijs en de lerarenopleidingen.

Onze hypothese is dat deze verschillen ongemerkt de coherentie van het curriculum kunnen verstoren, vooral bij onderwerpen waar het voortgezet onderwijs voortbouwt op het primair onderwijs. Dit zou dus het geval kunnen zijn bij een onderwerp als breuken. De basis van breuken wordt al vroeg in de basisschool gelegd met activiteiten als het verdelen en benoemen van verdeel resultaten. In groep 6 wordt geleidelijk de notatie van een breuk met de breukstreep ingevoerd, waarna het rekenen met breuken volgt. Aan

Het **Freudenthal Instituut** (Faculteit Bètawetenschappen, Universiteit Utrecht) houdt zich bezig met onderzoek naar en ontwikkeling van reken-wiskundeonderwijs in de traditie van het realistisch rekenen (RME).

De **SLO** (Stichting Leerplanontwikkeling) is het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling.

Het **TAL-project** werd in 1997 door het ministerie van onderwijs geïnitieerd. TAL staat voor Tussendoelen Annex Leerlijnen. Inmiddels zijn er voor vijf subdomeinen leerlijnen uitgewerkt, zie www.fi.uu.nl/talbovenbouw.

In 1986 stelde toenmalig staatssecretaris Ginjaar-Maas vast dat er dringend een nieuw wiskundeprogramma voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs ontwikkeld moest worden. De projectgroep **W12-16**, een mix van medewerkers van het Freudenthal Instituut en van het SLO, gaf invulling aan dit verzoek.

methode	opgave		tekst		aantal eenheden
	met illustratie	zonder illustratie	met illustratie	zonder illustratie	
<i>groep 8</i>					
AT	76%	24%	0%	0%	94
PP	81%	19%	0%	0%	74
RR	68%	32%	0%	0%	111
WG	72%	28%	0%	0%	165
<i>klas 1</i>					
GR	34%	51%	14%	2%	95
MW	30%	53%	9%	8%	74

Tabel 1 Percentage illustraties in Nederlandse schoolboeken

boek	Type illustratie		
	zonder didactische functie	met functie	rest
<i>groep 8</i>			
AT	14%	69%	17%
PP	53%	29%	18%
RR	8%	81%	11%
WG	34%	42%	24%
<i>klas 1</i>			
GR	25%	66%	9%
MW	10%	87%	3%

Tabel 2 Percentages per type illustratie in Nederlandse schoolboeken (per jaar)

het eind van groep 8 is deze leerlijn echter nog niet afgerond, er wordt niet van de leerlingen verwacht dat ze het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met breuken op een formeel niveau uitvoeren. Het niveau van het rekenen met onbenoemde of kale getallen wordt volgens de kerndoelen niet nagestreefd op de basisschool. Dit wordt overgelaten aan het voortgezet onderwijs, waar de leerlijn daarnaast doorgezet moet worden naar de algebraïsche vaardigheden. In de TAL brochure [11] wordt er overigens wel voor gepleit de leerlingen in het primair onderwijs kansen te bieden om een hoger niveau te bereiken.

De methoden in het primair onderwijs zijn gebaseerd op de realistische benadering. In de praktijk betekent dit dat de auteurs zich laten inspireren door prototypische leergangen, en leerlijnbeschrijvingen. Deze invloed zien we terug in de rol van contexten en modellen. Het idee daarbij is dat geschikte contexten aangrijpingspunten bieden voor informele, model-ondersteunde oplossingsmethoden, die in het vervolg van het onderwijs verder gemathematiseerd worden. In het voortgezet onderwijs zijn de RME-invloeden veel moeilijker vast te stellen, zo verschillen de methoden 'Getal en Ruimte' en 'Moderne Wiskunde' op belangrijke punten. Binnen de hervormingen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs is het werk van het project W12-16 belangrijk geweest, maar vinden we ook invloeden van 'traditioneler' opvattingen over wiskundeonderwijs. Ook gaat in het voortgezet onderwijs, zelfs in de onderbouw, invloed uit van zowel het Centraal Examen

(CE) als de wensen van het hoger onderwijs. Contexten hebben hier dan ook vaker de functie van toepassingen en modellen dienen eerder ter oplossing van het probleem of ter illustratie van een formele regel of bewijs.

Verschillen in de ideeën over de doelen van het wiskundeonderwijs, het inrichten daarvan, en in de visie op wat wiskunde is, komen terug in de didactische keuzes die worden gemaakt. We kunnen stellen dat argumenten rond 'uitstroom-relevantie' in het basisonderwijs over het algemeen zwaarder wegen dan in havo en vwo - waar meer aandacht is voor 'doorstroom-relevantie'. In havo en vwo is de voorbereiding op de doorstroom naar het vervolgonderwijs een belangrijke factor in beslissingen binnen het curriculum. Op de basisschool wordt rekening gehouden met de diversere groep leerlingen en is het uitstroomniveau met het oog op toepasbare kennis in het dagelijks leven belangrijk. In dit kader past ook dat er in het primair onderwijs voor een onderwerp als breuken meer aandacht voor begrip lijkt, terwijl in het voortgezet onderwijs een tendens is naar meer aandacht voor de vaardigheden.

In ons onderzoek gaan we na of er aanwijzingen zijn dat deze verschillen van invloed zijn op onderwerpen die in het basisonderwijs worden aangezet en die hun vervolg krijgen in het voortgezet onderwijs. We hebben ons daarbij gericht op breuken, en meer specifiek op het vermenigvuldigen van breuken. Om de overgang te onderzoeken hebben we reken-wiskundemethoden van eind basisschool (groep 8) en begin voortgezet onderwijs (leerjaar 1 van havo en vwo) geanaly-

seerd, omdat we deze als goede indicator zien voor hoe de feitelijke onderwijspraktijk eruit ziet.

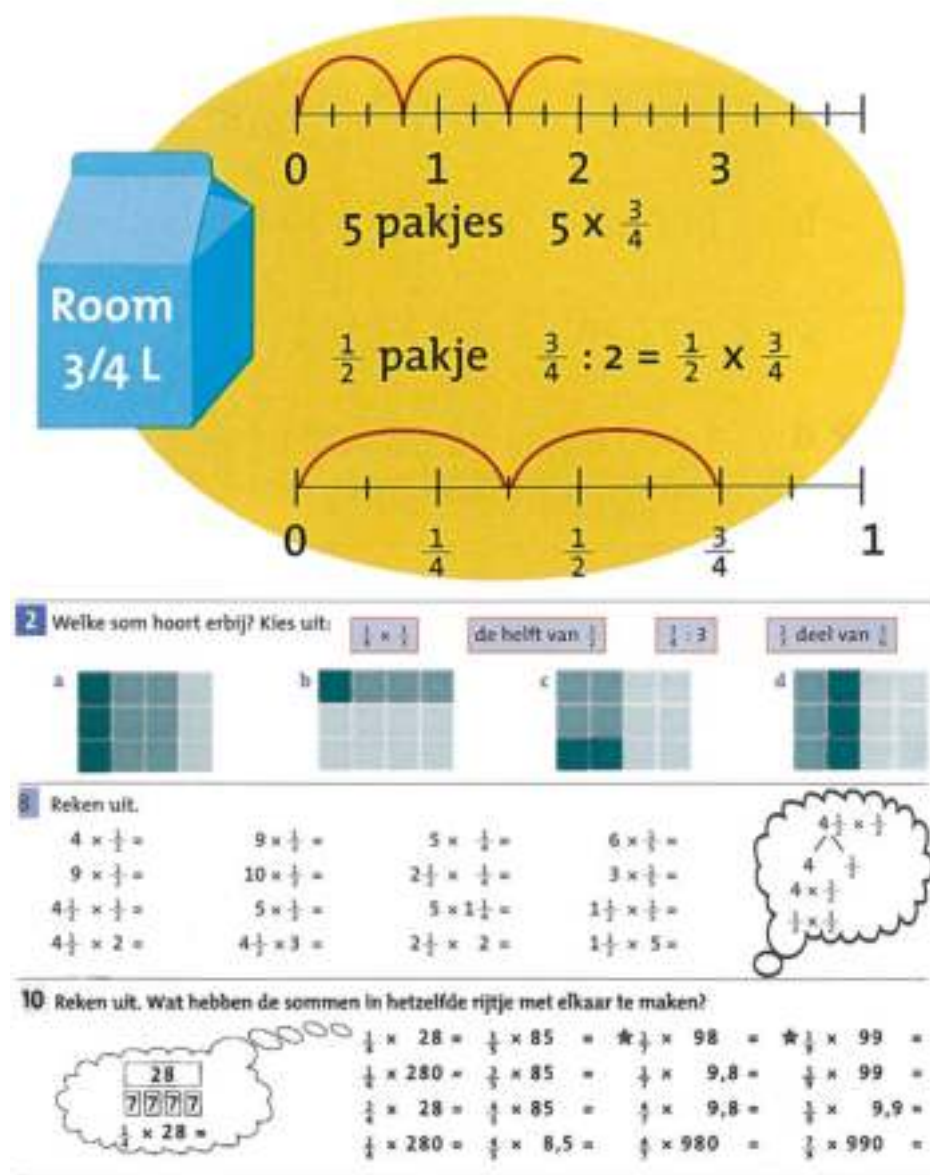
Het onderzoek

Schoolboeken hebben over het algemeen grote invloed op de uitvoering van het curriculum, zeker ook in Nederland. Voor veel docenten is een schoolboek maatgevend voor zowel de te behandelen onderwerpen als de didactiek daarvan [7]. In ons onderzoek maken we gebruik van de lesboeken voor groep 8 van vier grote methoden (Alles Telt (AT), Pluspunt (PP), Rekenrijk (RR) en De wereld in getallen (WG) [1-4]) en de lesboeken voor klas 1 havo/vwo van twee grote methoden (Getal en Ruimte (GR) en Moderne Wiskunde (MW) [5-6]). Daaruit hebben we alle opgaven en stukken theorie genomen die in het domein breuken passen. Het gaat daarbij dus zowel om 'aanvankelijk breukbegrip' als het rekenen met breuken. Omdat ons perspectief de aansluiting op havo en vwo betreft, hebben we procenten, verhoudingen en kommagetallen niet meegenomen — tenzij het rekenen met breuken daarin werd verwacht.

Globale analyse van vormkenmerken

In ons onderzoek hebben we ons eerst gericht op deze complete verzameling teksten en opgaven. Daarin vielen een aantal zaken op. Ten eerste zijn de boeken van primair en voortgezet onderwijs anders georganiseerd. In het voortgezet onderwijs wordt een indeling per onderwerp (per hoofdstuk) gehanteerd, met aan het eind van deze hoofdstukken een samenvatting. Ook wordt er tussen de opgaven aandacht besteed aan theorie of uitgewerkte voorbeelden. In het primair onderwijs daarentegen worden onderwerpen in een doorlopende leerlijn behandeld. Verschillende onderwerpen worden door elkaar behandeld. De schoolboeken zijn per dag, week en periode van weken georganiseerd. In de boeken voor de basisschool vinden we alleen opgaven terug en geen samenvattingen of theoretische stukken tussen de opgaven. Een tweede punt dat opvalt is het gebruik van illustraties bij stukken tekst. In het basisonderwijs wordt hier veel meer gebruik van gemaakt (Tabel 1).

In de analyse hebben we verder gekeken naar de functie van de illustraties. Daarvoor hebben we de illustraties ingedeeld in een aantal categorieën. We kunnen daarbij onderscheid maken tussen illustraties die geen wiskundige of wiskundig didactische functie hebben en illustraties die dat wel hebben. In de eerste groep vinden we vooral illustraties die de context verduidelijken. Ook reke-



Figuur 1 Voorbeeld opgaven primair onderwijs (Alles Telt [2])

nen we hier de illustratie onder die een deel van de benodigde numerieke informatie bevat voor het oplossen van een opgave. Binnen de tweede groep horen de uitgewerkte voorbeelden en hints in bijvoorbeeld tekst ballonnetjes en ook de al eerder genoemde didactische modellen. We zien dat van het grotere aantal illustraties in basisschool boeken een relatief groter deel geen wiskundige of didactische functie heeft (Tabel 2).

Verschillen in Tabel 1 en Tabel 2 kunnen we voor een deel verklaren uit de verschillende visies die er op het reken - wiskundeonderwijs bestaan. Zoals eerder aangegeven is het idee in het primair onderwijs dat geschikte contexten aanknopingspunten bieden voor informele, model-ondersteunde oplossingsmethoden. Aan de docent wordt een

centrale rol toegekend om de oplossingsmethoden met de leerlingen te bespreken en samen met de leerlingen theorie te ontwikkelen. In het voortgezet onderwijs is het gebruikelijker dat de theorie wordt opgenomen in de leerboeken. In Getal en Ruimte is er daarbij veel aandacht voor voorbeelden [10]. Moderne Wiskunde laat leerlingen daarentegen meer zelf ontdekken. Moderne Wiskunde maakt dan ook meer gebruik van modellen waar Getal en Ruimte vooral hints en uitgewerkte voorbeelden als illustratie heeft.

Inhoudelijke analyse

De globale analyse heeft laten zien dat er verschillen zijn in de vormkenmerken van de leerboeken in primair en voortgezet onderwijs, die we terug kunnen voeren naar verschil-

lende visies op het leren van wiskunde. In een meer gedetailleerde inhoudelijke analyse proberen we daar nog meer vat op te krijgen. We hebben ons daarom op een kleiner deel van ons bestand gericht, namelijk op de onderdelen waar het vermenigvuldigen van breuken een rol speelt. Bij deze analyse hebben we gekeken naar de oplossingsstrategie waar leerlingen naartoe worden geleid, naar het soort opgave dat daarbij wordt gebruikt en naar welke modellen worden aangeboden. Typische voorbeelden hiervan zijn opgenomen in Figuur 1 en 2.

De resultaten van deze analyse kunnen we toespitsen op twee belangrijke onderwerpen: enerzijds getspecifieke procedures en anderzijds formaliseren en expliciteren.

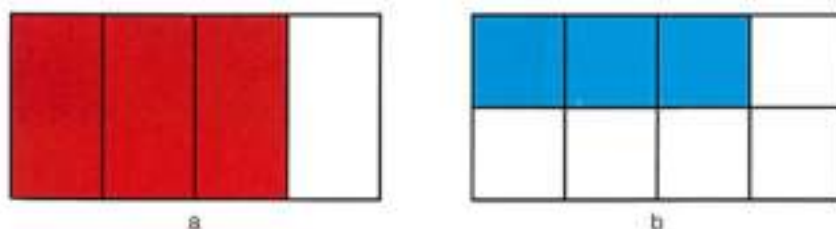
Getspecifieke procedures

De voorbeelden in Figuur 1 illustreren een fenomeen dat we in alle boeken voor de basisschool aantreffen. Startend vanuit contexten en gebruik makend van de informele strategieën van leerlingen is er een opdeling ontstaan in verschillende soorten opgaven. Deze opdeling is weliswaar voor elke methode weer net anders, maar globaal gesproken kunnen we vier situaties onderscheiden:

1. Het vermenigvuldigen van een (klein) geheel getal met een breuk wordt benaderd vanuit 'vermenigvuldigen als herhaald optellen'. Het gaat hier dan in het algemeen om lengtematen.
2. Vanuit het 'eerlijk delen' is het vermenigvuldigen van een breuk met een groot geheel getal ontstaan. Daarin wordt leerlingen de strategie aangeleerd om eerst naar het 'eenheids-deel' te kijken, door het grote geheel getal, dat in het algemeen een hoeveelheid voorstelt, eerlijk te delen. Opvallend is verder dat opgaven van dit type, die in de onderzochte basisschoolmethoden voorkomen steeds een geheel getal als antwoord te hebben.
3. Het vermenigvuldigen van twee 'echte breuken' (breuk tussen 0 en 1) wordt gevisualiseerd met behulp van een rechthoek met de eenheid als oppervlakte (het rechthoek model).
4. Los hiervan wordt voor gemengde getallen (bijvoorbeeld $3\frac{2}{3}$) een splits-strategie aangeleerd (dus gebruik makend van de distributieve eigenschap, zonder deze formeel te noemen).

Deze getspecifieke beïnvloedt om twee redenen de aansluiting met het vervolgonderwijs negatief. Ten eerste is er een aansluitingsprobleem als het gaat om de complexiteit van opgaven. In het primair onder-

- 038 In figuur 2.13a is $\frac{3}{4}$ van de rechthoek rood.
In figuur 2.13b is $\frac{1}{2}$ van dit rode deel blauw.



figuur 2.13

- a Het hoeveelste deel van de rechthoek is blauw?
b Hoeveel is $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$?

Theorie C

In opgave 38 heb je gezien $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

En zo is $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ en $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Je ziet: bij het vermenigvuldigen van breuken moet je de tellers vermenigvuldigen en de noemers vermenigvuldigen.

Vermenigvuldigen van breuken

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Bij $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$ krijg je $1\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Bij $3 \times \frac{2}{3}$ krijg je $3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

$3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3}$
mag zonder
tussenstap.



Figuur 2 Voorbeeld tekst voortgezet onderwijs (Getal en Ruimte [5])

wijs maar ook in Moderne Wiskunde zien we slechts een beperkt aantal typen opgaven. Deze zijn gekoppeld aan de eerder genoemde aangeleerde procedures en de bijbehorende context of model die telkens voor een bepaald type opgave gelden. De opgaven worden per type aan de leerling aangeboden. Het kan zijn dat leerlingen daardoor vast blijven houden aan het bijbehorende model en niet op het formele niveau komen. Bovendien worden niet alle mogelijkheden van het vermenigvuldigen van breuken behandeld. Zo is het vermenigvuldigen van een echte breuk met een geheel getal waar geen geheel antwoord uit komt, geen onderdeel van de basisschoolmethoden. Er kunnen ook problemen ontstaan met de overgang naar algebra, waar er vanzelfsprekend geen onderscheid tussen de verschillende soorten breuken wordt gemaakt. Getal en Ruimte maakt dit onderscheid tussen typen getallen niet: het vermenigvuldigen van breuken wordt aangeboden aan de hand van één regel.

Ten tweede zal de overgang van een conglomeraat van getalspecifieke oplossingsstrategieën naar het vermenigvuldigen van breuken als onbenoemde getallen voor velen niet vanzelfsprekend zijn. De stap die moet worden genomen lijkt ons te groot. In het primair onderwijs wordt de term breuk vooral gebruikt voor breuken tussen 0 en 1. In het voortgezet onderwijs zal dit moeten worden uitgebreid naar alle rationale getallen. Het keer-teken heeft in het primair onderwijs nog de betekenis van een handeling die kan variëren afhankelijk van zijn context, bijvoorbeeld 'herhaald optellen' of 'deel van'. In het primair onderwijs hebben de operanden dan ook een aparte betekenis, afhankelijk van of ze voor of na het 'keerteken' staan (vermenigvuldiger en vermenigvuldigd). Op formeel niveau moet dit onderscheid zijn verdwenen.

Formaliseren en expliciteren

Een groot verschil tussen de boeken in het primair en voortgezet onderwijs is het for-

maliseren en expliciteren van het geleerde. Dit zien we onder andere terug in de structuur van de schoolboeken, waar in het voortgezet onderwijs samenvattingen en stukken theorie worden geïntroduceerd. Een regel als $\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$ komt niet in de basisschool-boeken voor. Ook de stap hiernaartoe vanuit bijvoorbeeld het rechthoekmodel (zie Figuur 1) voor echte breuken naar het besef dat de tellers en de noemers met elkaar vermenigvuldigd worden, wordt niet in de primair onderwijs boeken gemaakt. Deze regel wordt niet expliciet gemaakt. Het valt te betwijfelen of veel leerlingen deze stap zelf maken.

De leerlingen rekenen in het basisonderwijs steeds met breuken als benoemde getallen. Dat wil zeggen, getallen die gebonden zijn aan een of andere maateenheid ($6\frac{1}{2}$ meter of $\frac{3}{4}$ chocoladereep). De breuken functioneren niet als onbenoemde getallen, het zijn nog geen op zichzelf staande objecten geworden die je los van een context kunt manipuleren. Bij het aanbieden van de formule ' $\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$ ', wordt daar wel van uitgegaan. Ook de stappen die Getal en Ruimte als vanzelfsprekend beschouwt bij het omwerken van een geheel getal of een gemengd getal naar een onechte breuk (Figuur 2), zullen voor de meeste leerlingen niet vanzelfsprekend zijn. Daarvoor moeten de breuken functioneren als onbenoemde rationale getallen. Bovendien vraagt het rekenen met breuken inzicht in eigenschappen en structuren. Voorbeelden daarvan zijn: inzien dat vermenigvuldigen met een breuk hetzelfde is als achtereenvolgens vermenigvuldigen met de teller en delen door de noemer, inzien dat $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, begrip van de inverse van een breuk en zijn eigenschappen. Uiteindelijk zullen niet alleen de breuken zelf, maar ook vermenigvuldigingen, zelfstandige wiskundige objecten moeten worden waar havo/vwo leerlingen mee kunnen redeneren. Een product van twee rationale getallen, zou door de leerling moeten (kunnen) worden opgevat als een object waarmee je redeneert, zonder dat je daarbij bewust hoeft te denken aan de handeling die je moet uitvoeren om dit product te verkrijgen. Dit zou betekenen dat ze de commutatieve eigenschap niet bewust hoeven toe te passen om zich te realiseren dat het bij ' $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ ' en ' $\frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ ', om hetzelfde product gaat. We hebben de indruk dat dit aspecten zijn waar (ook) in het voortgezet onderwijs te weinig aandacht aan wordt besteed.

Conclusies

In dit onderzoek hebben we een discon-

tinuïteit gezien tussen de praktijk in basisschool methoden en die in het voortgezet onderwijs waar het gaat om het vermenigvuldigen van breuken. In het primair onderwijs zien we dat informele strategieën als startpunt worden genomen. De leerlijn wordt echter niet doorgevoerd tot het formele niveau en de verschillende perspectieven, zoals ‘herhaald optellen’ en ‘deel van’, worden niet met elkaar in verband gebracht. Dit wordt vervolgens niet opgepakt in het voortgezet onderwijs. Hier worden leerlingen voor het onderwerp breuken vrijwel direct geconfronteerd met de formele benadering van breuken als objecten/rationale getallen. In feite wordt hiermee geen recht gedaan aan de uitgangspunten van de realistische benadering. Een van de componenten van de realistische onderwijstheorie is het zogeheten ‘emergent modelleren’ [8]. Uitgangspunt van RME is dat de leerlingen informele strategieën — met hulp van de leraar — uitbouwen tot meer formele wiskunde via een proces van progressief mathematiseren. De gedachte achter het emergent modelleren is nu dat modellen, die eerst naar voren komen als modellen van contextgebonden activiteiten en zich geleidelijk aan kunnen ontwikkelen tot modellen voor meer formeel wiskundig redeneren, dit proces kunnen faciliteren. Hierbij zou het karakter van de modellen moeten veranderen van een model dat zijn betekenis (voor de leerling) ontleent aan de context van de opgave

naar een model dat zijn betekenis ontleent aan de wiskundige relaties die in het spel zijn. Daartoe moet de leraar ervoor zorgen dat de leerling zijn of haar aandacht gaat richten op deze wiskundige relaties. Op die manier kunnen getallen zich bijvoorbeeld ontwikkelen van benoemde getallen tot getallen als wiskundige objecten die het karakter hebben van knooppunten in een netwerk van getalrelaties [9]. De beoogde verschuiving van de aandacht van betekenisgeving vanuit contexten naar een focus op wiskundige structuur ontbreekt in de onderzochte basisschoolmethoden. Voor de meeste leerlingen blijft beoogde objectvorming naar alle waarschijnlijkheid dan ook uit, terwijl er in het voortgezet onderwijs vanuit wordt gegaan dat de leerlingen op een dergelijk abstract niveau met breuken kunnen redeneren.

Bovendien worden er in de methoden in het primair onderwijs een aantal getalspecifieke oplossingsprocedures aangeleerd, die een barrière kunnen opleveren wanneer je in het voortgezet onderwijsd naar één algemene regel toe wilt. Voor alle duidelijkheid merken we op dat we geen bezwaar hebben tegen verschillende oplossingsstrategieën. Situatiespecifieke oplossingen die door betekenisvolle contextopgaven worden opgeroepen zijn heel waardevol als leerlingen al redenerend tot een oplossing komen. Dergelijke oplossingen kunnen een basis leggen voor verdere generalisering en formalisering. Onze

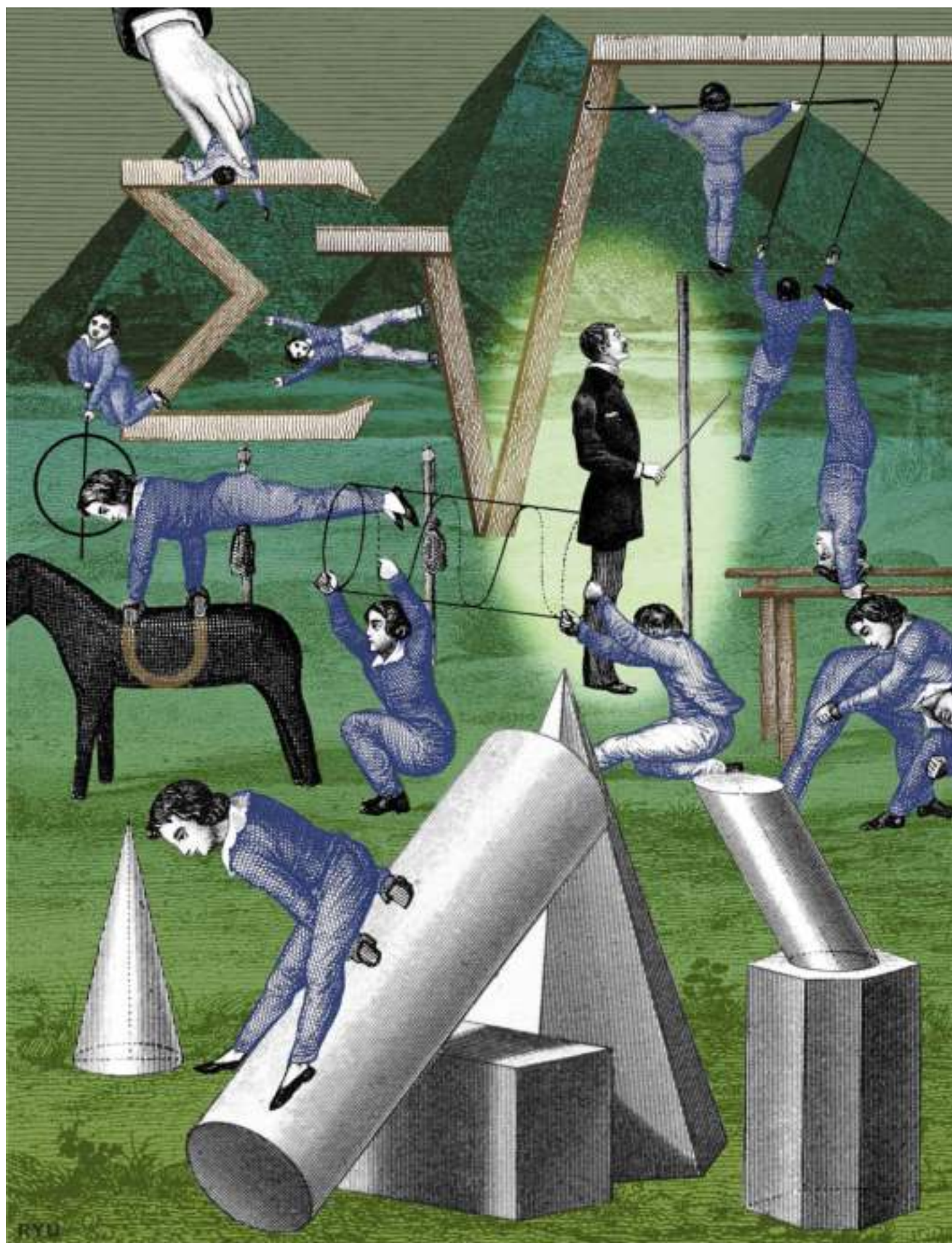
analyse van het vermenigvuldigen van breuken in basisschoolmethoden laat echter zien dat ze worden aangeleerd als standaardprocedures voor gestandaardiseerde situaties. Dat wil zeggen dat de basisschoolmethoden niet zozeer ruimte laten voor verschillende strategieën, maar eerder getalspecifieke procedures aanleren. Dit lijkt ons niet alleen ongewenst voor de leerlingen die doorstromen naar havo/vwo, maar ook voor de overige leerlingen. Er zou meer aandacht moeten zijn voor verbanden tussen de verschillende strategieën — als opstap naar generaliseren en formaliseren — en meer aandacht voor het zelf bedenken hoe je een breukenprobleem in een toepassingssituatie kunt oplossen.

Naast een bewustwording van de geschetste problemen bij zowel basisschool docenten als docenten in het voortgezet onderwijs pleiten we ook voor een verandering op langere termijn. Onze aanbeveling aan ontwikkelaars van primair- en voortgezet onderwijsmethoden is dan ook om een gezamenlijke leerlijn voor breuken te ontwikkelen.

Daarnaast zouden we in het algemeen willen pleiten voor meer aandacht voor de coherentie in de doorlopende leerlijnen van primair naar voortgezet onderwijs. Niet alleen de doelen zouden beter op elkaar afgestemd moeten worden, maar ook de didactiek en de beoogde strategieën zouden beter op elkaar aan moeten sluiten. 

Referenties

- 1 Nico van Beusekom, Lilian Schuffelers, Gerard Boersma, Anneke van Gool, Jan Groen, Hein van der Straaten, Anke de Weerd-Fourdraine, *Pluspunt – reken-wiskundemethode voor de basisschool*, Malmberg (2000)
- 2 Jaap Boerema, Wim Sweers, Brugt Krol, Sandra Hessing, Jeannette Nijs-van Noort, Els van den Bosch-Ploegh, Ad Plomp, Petra Sniijders, *Alles Telt – Reken-wiskundemethode voor het basisonderwijs*, Thiememeulenhoff (2001)
- 3 Joop Bokhove, Keimpe Kuipers, Jan Postema, Fred Baas, Nico Eigenhuis, Roel Roelofs, Ans Veltman, *Rekenrijk – tweede editie*, Wolters-Noordhoff (1999)
- 4 S. Huitema, A. van der Klis, M. Timmermans AN L. Erich, P. Man, *De wereld in getallen*, Malmberg (2000)
- 5 Reichard, L.A., Rozemond, S., Dijkhuis, J.H., Admiraal, C.J., Vaarwerk, G.J. te, Verbeek, J.A., Jong, G. de, Brokamp, N.J.J.M., Houwing, H.J., Vroome, R. de, Kuis, J.D., Klooster, F. ten, Leeuwen, F.G. van, Waal, S.K.A. de, Braak, J. van, *Getal en Ruimte 1 havo/vwo 1*, EPN, Houten (2004)
- 6 Emile van der Eijk, Anne van der Horst, Albert Koning, Douwe Kok, Geertrui Schaberg, *Moderne Wiskunde – Editie 8 – 1a havo vwo*, Wolters-Noordhoff (2002)
- 7 K. Gravemeijer, M. Van den Heuvel-Panhuizen, G. Van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. Te Woerd, D. Van der Ploeg, *Methoden in het Reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek*, Technipress, Culemborg (1994)
- 8 Koeno Gravemeijer, ‘How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics’, *Mathematical Thinking, Learning* 1(2) (1999), pp. 155–177
- 9 P.M. van Hiele, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend (1973)
- 10 Nellie Verhoef, ‘Hoe ontstaat een wiskundemethode?’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/10(2) (2009), pp. 132–133
- 11 Frans van Galen, Els Feijs, Nisa Figueiredo, Koeno Gravemeijer, Els van Herpen, Ronald Keijzer, *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen – tussendoelen annex leerlijnen*, Wolters Noordhoff (2005)



Rainer Kaenders

Universität zu Köln,
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
r.kaenders@uni-koeln.de

Klaas Landsman

Radboud Universiteit Nijmegen,
Institute for Mathematics,
Astrophysics and Particle Physics
landsman@math.ru.nl

Interview Chris Zaal

Wiskunde opstuwten in de vaart der volkeren

Chris Zaal stond aan de basis van de huidige serie van het NAW. Hij stak drie jaar lang ziel en zaligheid in het blad en kent bovendien het Nederlandse wiskundewereldje als geen ander. Rainer Kaenders en Klaas Landsman vragen hem naar verleden, heden en toekomst.

In het eerste nummer van de vijfde serie van het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW) schreef Jan Karel Lenstra, de toenmalige voorzitter van het Wiskundig Genootschap:

‘Zolang ik lid ben van het WG heeft het NAW een hybride karakter gehad. Een deel van de inhoud deed denken aan een internationaal wetenschappelijk tijdschrift. Andere bijdragen dienden een nationale functie en waren gericht op de lering en het vermaak van de leden van het WG. Een jaar of vijf geleden [...] werd besloten het NAW om te vormen tot een informatief vakblad. Dit leidde tot succesvolle veranderingen in de opzet van het blad. Begin vorig jaar werd de transformatie met kracht doorgezet. Het resultaat ligt voor u.’

De man achter de ‘succesvolle veranderingen’ was Chris Zaal. “Het NAW was een tijdschrift met wetenschappelijke pretenties die het niet meer waar wist te maken. Voorafgaand aan de vijfde serie werden regelmatig vernieuwingen aangekondigd, zoals een nieuwe kافت. Daar kwam dan niets van terecht. Op zeker moment had Jan Karel een bestuur van jonge honden om zich heen verzameld, waarin onder andere Peter Stevenhagen. Peter kende mij van de UvA en wist van mijn werk voor Pythagoras, het wiskundetijdschrift voor jongeren dat ik in 1996 van de grond af aan weer had opgebouwd, samen met Erjen Le-feber en K.P. Hart. Via hem ben ik door het bestuur van het WG benaderd om het NAW

nieuw leven in te blazen. In feite kreeg ik een blanco cheque. ‘Aan de slag!’, dacht ik.”

Per september 1999 werd Zaal in Leiden redacteur van zowel Pythagoras als het NAW. Zijn aanstelling werd aangevuld met de functie van studievoorzitter en de mogelijkheid om onder begeleiding van Hendrik Lenstra (broer van) zijn promotieonderzoek in de algebraïsche meetkunde af te ronden. Waar komt zijn ambitie vandaan om een blad te maken? “Ik voel me geen journalist, eerder een bladenmaker. Vanuit het niets een heel blad neer te zetten, dat vormt voor mij de uitdaging.”

Zou Zaal ook de Linda. in elkaar kunnen zetten? Of moet het wiskunde zijn? “Het moet wel ergens over gaan. Het toenmalige WG-bestuur had duidelijke doelstellingen voor het NAW die ik deelde. We wilden er een ‘algemeen vakblad’ voor een breder wiskundig publiek van maken. Minder wetenschappelijk, met meer uitstraling naar buiten. De rubriek ‘De Overval’, na mijn tijd opgezet door Gerard Alberts, is daarvan een goed voorbeeld. Het blad zou niet alleen door academische wiskundigen gelezen moeten worden, maar ook door leraren en toegepast wiskundigen die in het bedrijfsleven werken. Eigenlijk door iedereen die wiskunde heeft gestudeerd.”

Elektronische drukproeven

De nieuwe opzet had twee kanten. Hoogwaar-

dige kopij was in het begin niet overvloedig voorhanden. Zaal vond dat de belangrijkste taak van een hoofdredacteur het vinden van kopij was: een hoofdredacteur publiceert niet in zijn eigen blad—op een enkele editorial na. De nieuwe kopij bestond enerzijds uit gespecificeerde artikelen onder noemers als onderzoek, onderwijs en geschiedenis, anderzijds uit vaste rubrieken zoals oraties, ‘In Memoriam’, ‘Boek van de eeuw’ en uiteraard de al bestaande ‘Boekbesprekingen’.

Minstens zo belangrijk waren de vormgeving en de techniek. “Ik bemoei me in principe overal mee, maar trek vakmensen aan voor zaken waar ik niet echt verstand van heb. De ontwerpster Kitty Molenaar, die ik kende van Pythagoras, speelde in het begin een sleutelrol. Zij heeft de huidige vormgeving ontworpen. Vervolgens heeft Taco Hoekwater het papieren ontwerp vertaald in ConTeXt, een Nederlands macropakket zoals L^AT_EX. L^AT_EX als opmaakprogramma heeft zijn beperkingen. Essentieel aan de opzet was dat elk artikel op een hele pagina begint en eindigt. Een artikel van anderhalve pagina kan natuurlijk niet met een halve pagina wit eindigen. De vormgeving moest daarom flexibel zijn. De oplossing was te spelen met paginawit: meer of minder wit onder de titel, of tussen het einde van de tekst en de referenties.

Annelies Hafkenscheid was de eerste bureauredacteur. Haar heb ik ‘ontdekt’ toen ik aantal eerstejaars wiskundestudenten optrommeld had voor een inpakklusje voor Pythagoras. De rest van de studenten maakte er een potje van, maar Annelies viel mij op

door de liefdevolle nauwgezetheid waarmee ze werkte. Die moet ik voor het NAW hebben, dacht ik. Annelies is in de eerste jaren heel belangrijk geweest. Ze was op een prettige manier heel betrokken bij het blad. Zo kan ik mij de levendige en uitgesponnen discussies over spelling nog goed herinneren.

Mede dankzij al deze mensen heeft het blad de uitstraling van een glossy magazine gekregen, al ging dat niet zonder slag of stoot. Met de ontwerpster nam ik per nummer het beeldmateriaal door. 'Er staan alleen maar oude mannen in', was de reactie van Kitty Molenaar op de kopij van het allereerste nummer. Daarom voorziet haar NAW-ontwerp in verschillende trucs om te voorkomen dat er op de foto's alleen maar hoofden van wiskundigen te zien zijn. Foto's worden bij voorkeur op een verrassende manier uitgesneden en Ryu Tajiri ontwierp voor elk nummer een originele illustratie. Op weg naar een redactievergadering zat ik een keer met Ger Koole in de trein. We hadden een exemplaar van het NAW bij ons liggen. Een vrouw naast ons vroeg toen: 'Mag ik dat blad van jullie even inkijken?' Voor ons was dat een van de mooiste complimenten over het uiterlijk van het NAW. Ze gaf het wel binnen een minuut terug, toen ze door kreeg waar het over ging.

Innovatief was het gebruik van pdf in de aanlevering aan de drukker. Daarin waren we met het NAW een van de eersten. De drukproeven waren vanaf het begin elektronisch. We vroegen ons wel af of alle auteurs daar mee uit de voeten konden. Maar toen we de drukproeven van het eerste nummer de deur uit deden, was de eerste reactie die van de

tachtigjarige T.A. Springer. Per kerende e-post ontvingen we keurig zijn correcties. Toen wisten we dat we wel goed zaten.

Aan lezen kom ik niet toe

Maar staan wiskundigen niet bekend als enigszins conservatieve figuren, die allerminst op nieuwlichterij zitten te wachten? "Ik kan me een bestuursvergadering van het WG herinneren waarin ik het concept voor de nieuwe vormgeving presenteerde. Het bestuur kreeg een paar proefartikelen te zien die in het nieuwe format opgemaakt waren. In mijn herinnering was de respons erg vlak, maar dat kan ook aan mijn door oververmoeidheid beperkte waarnemingsvermogen gelegen hebben. Achteraf gezien begrijp ik het zo: het blad als geheel was nog niet zichtbaar, en wiskundigen zijn vooral met wiskunde bezig en niet met vormgeving. Vanuit het WG-bestuur is het vooral Jan Karel Lenstra zelf geweest die zich in positieve zin met de vormgeving bemoeit heeft."

Welke mentaliteit heb je nodig om een blad zoals NAW te maken? "Ik ben een perfectionist, dat is het belangrijkste als je een blad wil maken. En een doener, dat ben ik ook. Het plezier haalde ik uit het máken van het blad." Dat laatste is debat aan het feit dat Zaal het nu zelf nauwelijks meer leest. "Ik kan het NAW niet meer als een normale lezer lezen. Meestal maak ik het niet eens open. Als ik dat wel doe, lees ik het als maker. Ik kijk bijvoorbeeld of de schrijver van het redactioneel niet de inhoudsopgave opsomt en of de agenda zinvol gevuld is. Ik check het aantal nieuwsberichten (tegenwoordig heel veel,

dat is een goed teken) en de redactionele intro's. En ik zie alle taalfouten, opmaakfouten en zetfouten. Daardoor kom ik niet aan lezen toe."

Kleine oplage

Een dergelijk perfectionisme voor een blad met een zo kleine oplage; had Zaal nooit de ambitie dat aanzienlijk meer lezers van zijn werk zouden kunnen genieten? "Inderdaad heb ik een bevriende collega die blijft herhalen dat dit NAW veel te goed is voor Nederland. Desondanks houdt het concept zich goed: de huidige vorm van het blad bestaat al tien jaar en daar ben ik best trots op."

Dezelfde vraag leidt tot een breder onderwerp: of de doelgroep eigenlijk niet veel groter zou moeten zijn. De huidige doelgroep—leden van het Koninklijk Wiskundig Genootschap—bestaat voornamelijk uit academisch wiskundigen. Maar er zijn meer wiskundigen dan de academici en ook voor hen zou het NAW interessant kunnen zijn. Deze niet-academische wiskundigen zouden zich dan wel in het Wiskundig Genootschap moeten herkennen en dat vereist misschien een professionelere organisatie dan de huidige verenigingsvorm. In dit verband lanceerde Zaal het idee voor een koepelorganisatie genaamd *wiskunde.nl*, ook bekend als het *Wiskundebureau*. Dit idee had dezelfde achtergrond als zijn missie voor het NAW: "de Nederlandse wiskunde opstuwen in de vaart der volkeren, maar dan breed."

Inmiddels lijkt dit idee te worden uitgevoerd in de vorm van het Platform Wiskunde Nederland, dat momenteel door het KWG, de



Klaas Landsman (l) en Rainer Kaenders interviewen Chris Zaal



NVW en de sectie wiskunde van de KNAW op poten wordt gezet. “Prachtig! Het idee heeft dankzij Rob Tijdeman inhoud gekregen en is in die context van hem geërfd door Frank den Hollander. Tot nu toe lijkt het echter vooral op een hervervorming van commissies en voorzitters. Verbreden ze ook de basis, dat is de vraag. Ik hoop in ieder geval dat er nu een professioneel bureau komt, waar iemand namens wiskundig Nederland de telefoon aanneemt. Met een professioneel bestuur, dat tevens voor politieke representatie zorgt. Waarom zijn met de herziening van de tweede fase de uren van natuurkunde en wiskunde wel, en die van biologie niet gekort? Omdat de biologen een politieke lobby hadden in de vorm van het NIBI. De enige manier waarop de wiskunde nu in de pers komt is met ruzies over het onderwijs. Dit zie ik ook als een opdracht voor het Platform: de fundamentele kloof te overbruggen die er heerst tussen universitaire wiskundigen en de leraren in het voortgezet onderwijs. Beide hebben een zeer negatief beeld van elkaar. Op bestuursniveau is er zelfs sprake van grondig wantrouwen jegens de ander en dat hangt niet af van de specifieke personen die er zitten.”

Tevreden over één opgave

Toen Zaal zijn missie bij het NAW na bijna drie jaar als voltooid beschouwde, wilde hij een positieve bijdrage leveren aan het wiskundeonderwijs. Hij solliciteerde daarom midden 2002 naar een baan op het Freudenthal Instituut. “Ik werd zowaar aangenomen, waarschijnlijk omdat het FI dacht met mij geld binnen te kunnen halen. Maar ik kom uit Friesland, ik loop niet voor andere meesters. Ik begon vol goede moed, maar na 2,5 jaar bleek ik niets opgeschoten, ik had geen enkel wapen-



feit. Of eentje dan. Ik herinner me één door mij gemaakte realistische wiskundesom waar ik trots op was: een opgave met een goede wiskundige inhoud, eentje waarvan de context de inhoud nu eens niet versluierte en die in de klas ook goed functioneerde. Maar dat was één som in een van de vele lespakketjes. Toen ben ik maar weer vertrokken.”

Wat ging er mis? “Het FI is op zich een sterk instituut, een leuke club mensen ook. Hun missie vloeit voort uit de ‘geniale’ greep van Hans Freudenthal dat inzicht bij leerlingen voorop moet staan en niet het mechanistisch leren rekenen. Deze visie hebben ze omgezet in een product, het realistische wiskundeonderwijs. Dit is zeer succesvol, ook in het buitenland, omdat werken met contexten bij leerlingen aanslaat.”

Zijn we hier per ongeluk Jan de Lange aan het interviewen? “Jan heeft met wiskunde A goed werk geleverd, dat is zijn geesteskind. Maar wiskunde B ging steeds meer op A lijken, de abstractie verdween gaandeweg ook uit dat vak. B-leerlingen worden niet aangesproken op hun talent en dat vind ik jammer. Het hele probleem met het realistische wiskundeonderwijs zoals het FI dat maakt, is hun idee dat de abstractie wel vanzelf komt als je maar genoeg contexten aanbiedt. Al-

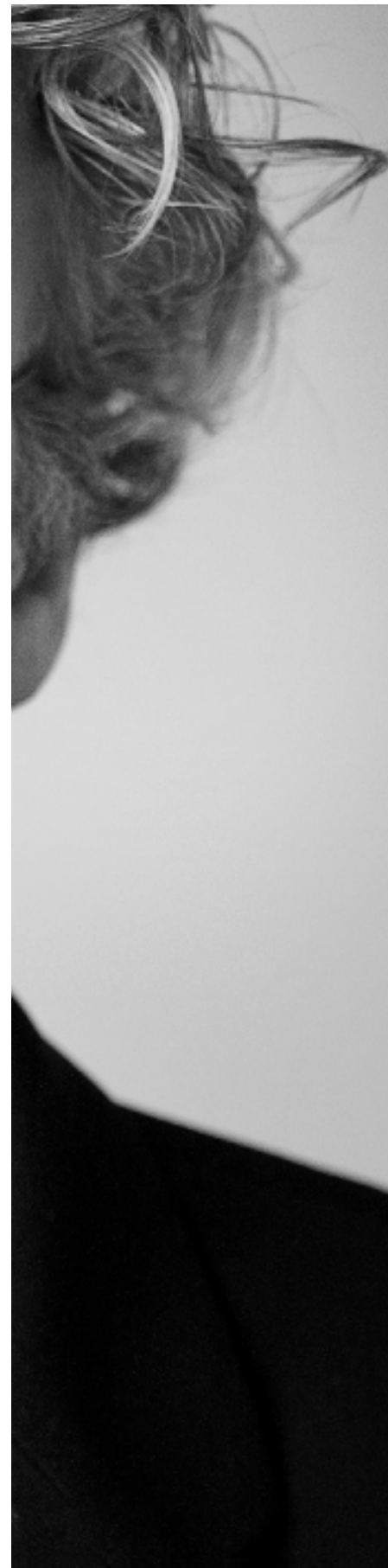


Foto: Dick van Aalst

“Ik kom uit Friesland. Ik loop niet voor andere meesters.”



Foto: Dick van Aalst

maar aansluiten bij de gedachtenwereld van de leerlingen. B-leerlingen vragen dan na een tijdje: 'Waarom zeggen ze niet gewoon wat ze bedoelen?' Dit zie je ook terug in de les-pakketjes van het FI: daarin wordt eindeloos verkend, maar het gewenste einddoel blijft achter de horizon. De zogenaamde 'didactische modellen' maken het nog erger. Een 'verhoudingstabel' geeft de leerling in het begin steun, maar blokkeert uiteindelijk de wiskundige ontwikkeling omdat de vervolgstap van verhoudingstabel naar algebraïsch rekenen niet gemaakt wordt. Al heet het instituut naar Freudenthal met zijn Mathematik als pädagogische Aufgabe — het pedagogisch inzicht ontbreekt. Door de realistische didactiek blijft de ontwikkeling van de leerling in een initieel stadium steken."

Oefenmaffia

Hoe reageren de mensen van het FI op dergelijke kritiek? Zaal is tenslotte niet iemand die zijn mening voor zich houdt. "Op het Freudenthal Instituut vormde ik samen met Ed de Moor de zogenaamde 'oefenmaffia': op het hele instituut waren wij de enige twee die opkwamen voor het oefenen. We ondervonden eigenlijk alleen maar tegenstand: oefenen is ouderwets; leerlingen moet je niet lastig vallen met oefenopgaven; het gaat toch om het aanbrengen van begrip. Kernprobleem is dat dat laatste argument in bijna elke discussie wint. Dat is de reden waarom ik Freudenthals bijdrage als 'geniaal' betitel: 'begrip' is voor het FI altijd een geweldig verkoopargument geweest, zowel in de Tweede Kamer als in discussies met collega-wiskundigen: want wie is nou tegen begrip?"

"De mensen op het Freudenthal Instituut zijn niet kritisch genoeg, niet op zichzelf en niet op elkaar. Iedereen is bezig met zijn eigen project. Daar zijn ze ook bijna toe gedwongen: het leven draait ook daar voornamelijk om geld en bijna al het geld op het FI is

projectgeld—zowel onderzoek als onderwijs zijn marginaal. Als het ene project afgelopen is, begint het volgende alweer. Voor onafhankelijk denken is gewoon geen tijd. Maar dat probleem geldt niet alleen voor het FI. Je wil niet weten hoe veel overheidsgeld er gaat naar instituten als FI, SLO en APS, die clubs leven van projectfinanciering. Al dat geld komt niet op de werkvloer terecht."

Naïviteit

Met zijn FI-achtergrond, een verleden als wiskundedocent en vooral natuurlijk als bekende en geziene figuur in het Nederlandse wiskundelandschap, kwam Zaal als vanzelf in de Vernieuwingscommissie cTWO terecht: de commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. "cTWO was een initiatief van Dirk Siersma. Dirk is een ondernemend politicus en een geslepen tacticus. Veel wiskundigen zitten op bestuurlijk gebied te slapen, hij is iemand die actie ondernemeet. Dirk zag dat Gerard van Koten bezig was met de vernieuwing van het scheikunde-onderwijs en Chris Van Weert met natuurkunde. In feite liepen die vakken achter bij wiskunde, want ze hadden beide nog nooit een didactische vernieuwing ondergaan. Dirk onderkende het gevaar dat de wiskunde straks door het ministerie zou worden verteld hoe het moest, en nam daarom zelf het heft in handen."

De commissie cTWO stond voor een lastige opgave. De samenstelling was er een van uiteenlopend pluimage: de wiskundedidactiek, de academische wereld en de wiskundeleraars waren vertegenwoordigd. Bovendien werd cTWO als enige Vernieuwingscommissie onder toezicht gesteld van een door het ministerie op last van de Tweede Kamer ingestelde Resonansgroep. "Ik begon bij cTWO net zo naïef als bij het FI, zeg maar met het doel om de wereld te verbeteren. Het begon me in de loop van de tijd steeds meer op te vallen dat er wei-

nig toenadering was. Het leek me dat bij iedereen goed wiskundeonderwijs voorop zou moeten staan. Dat was natuurlijk ook zo, maar in de praktijk bereden veel leden slechts hun stokpaardje. Er was weinig gemeenschappelijkheid, er werd vooral hard geroepen. Dirk Siersma speelde de rol van een poldervoorzitter in een krachtenveld van meningen. Medecommissielid Mark Peletier heeft regelmatig aangedrongen op het voeren van fundamentele discussies met het doel het eens te worden, maar daar was helaas weinig belangstelling voor."

Lange adem

Zaal stapte voortijdig uit cTWO. "Wat ik vooral geleerd heb is dat je een heel lange adem nodig hebt om iets te veranderen in het onderwijs." Is hij toch tevreden over zijn rol? "Het visiedocument heeft veel tijd gekost: daar is veel en lang over gediscussieerd. Maar maatgevend vind ik de examenprogramma's. Voor het nieuwe programma dat in 2014 ingevoerd gaat worden, zat ik in de programmacommissie vwo B. Ik sta voor honderd procent achter het programma dat daar is neergezet: differentiaal- en integraalrekening en een deel analytische meetkunde. Tezamen garandeert dat voldoende ruimte voor en oefening in algebraïsche vaardigheden. Op de verdere regie en de klasse-experimenten had ik geen invloed en ik voelde dat mijn batterijen leeg waren. Voor mij was het maximale bereikt dat er te halen viel."

Momenteel is Zaal opleidingsdirecteur van de wiskundebachelor en docent aan de UvA. Behalve wiskundevakken geeft hij ook Journalistiek schrijven en Wiskundedidactiek. Daarnaast is hij namens het KWG uitgever van Pythagoras. Wat zal de toekomst hem brengen? "Ik heb het aan de UvA prima naar mijn zin. Maar tenzij zich nog een uitdagende functie in de wiskunde aandient, ligt mijn toekomst misschien wel in heel iets anders."

In de verdediging

| In defence



Volatility Proxies and GARCH Models

Marcel Visser

Het afgelopen jaar is er menig kritisch verhaal geschreven over het gebruik van wiskundige modellen in de financiële wereld. Als je zulke verhalen leest, kan het bijna niet anders, of de financiële wiskunde ondervindt invloed van de huidige crisis. Voldoende reden om eens een kijkje in de keuken van de financiële wiskunde te nemen. Marcel Visser, die op 8 september 2009 aan de Universiteit van Amsterdam promoveerde, vertelt over zijn werk en zijn proefschrift *Volatility Proxies and GARCH Models*. Eén ding is zeker: het woord crisis komt er niet in voor.

Heilige graal

“Volatiliteit is de heilige graal van de financiële wiskunde”, aldus Visser. Een gebruikelijk uitgangspunt is dat de richting van koersveranderingen onvoorspelbaar, en dus onzeker is. Volatiliteit kwantificeert de mate van die onzekerheid; volatiliteit is de mate van beweeglijkheid van de koers van een aandeel of een ander financieel product. Stabiele beursfondsen hebben een vrij lage volatiliteit, terwijl aandelen die vaak en extreem bewegen een hoge volatiliteit hebben. Ook op marktniveau wordt de term gebruikt. Op financiële markten bestaan volatiele perioden met heftige koersfluctuaties en ook rustiger perioden. Het losbarsten van de kredietcrisis op de beurs in september 2008 luidde een periode van extreem hoge volatiliteit in.

GARCH modellen

De financiële wiskunde is dus grotendeels gebaseerd op de aanname dat de *richting* van koersveranderingen onvoorspelbaar is. De *structuur* van de beweeglijkheid wordt echter verondersteld wel voorspelbaar te zijn. Als er al voorspelbaarheid in de richting van beurskoersen zit, is die klein vergeleken met de beweeglijkheid (het kanselement). De meeste greep krijgt men op koersprocessen door die beweeglijkheid te modelleren.

Er bestaat een bekende klasse van modellen waarmee volatiliteit van dag tot dag wordt beschreven op basis van van slotkoersen. Dit zijn zogeheten Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) modellen. Simpel gezegd beschrijven ze verwachte fluctuaties in termen van fluctuaties in het verleden.

Een probleem is dat deze modellen de koersbewegingen op de dag zelf niet benutten als informatiebron. In zijn proefschrift ontwikkelt Visser een kansmodel en de bijbehorende statistiek om het koersverloop gedurende de dag te kunnen benutten in het GARCH model. De GARCH modellen zelf zijn discreet; de ‘gaten’ worden opgevuld door tussen de slot-rendementen dagprocessen (in continue tijd) te hangen. Aan deze dagprocessen stelt Visser weinig eisen. Wel legt hij op dat de gestandaardiseerde dagprocessen voor verschillende dagen onafhankelijk zijn. Dit blijkt goed bij de bestudeerde data te passen. De aanpak leidt in theorie en in praktijk tot aanzienlijke verbeteringen in het schat-

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

ten van de GARCH parameters, en tot verbeteringen in het meten en voorspellen van volatiliteit.

Het was verrassend hoe weinig aannames soms nodig bleken om interessante vragen te kunnen beantwoorden. Zo biedt het proefschrift een formule om verschillende schatters (proxies) voor volatiliteit tot een betere schatter te combineren; die formule geldt zonder aannames over het volatiliteitsproces en zonder modelbeperkingen op te leggen aan het koersverloop binnen de dag. Bovendien is hij eenvoudig toe te passen in de praktijk.

Bril van discrete tijdmodellen

Visser is vooral tevreden met een inzicht dat zijn onderzoek heeft opgeleverd: het inzicht dat je heel goed door de bril van discrete-tijd modellen naar continue-tijd financiële processen kunt kijken. De aanpak brengt met zich mee dat je op een andere manier tegen volatiliteit kunt aankijken dan gebruikelijk is in de financiële wiskunde. Normaal gesproken speelt de zogenaamde kwadratische variatie een belangrijke rol, in het proefschrift van Visser daarentegen staat een schaalfactor centraal. Die schaalfactor bepaalt wat voor uitslagen voor een bepaalde dag verwacht kunnen worden. In Visser's model is iedere beursdag namelijk in kantheoretisch opzicht gelijk, op de genoemde stochastische schaalfactor na. De schaalfactor verheft (dan wel dempt) alle prijsbewegingen gedurende de dag.

Korte afstand tot de weerbarstige praktijk

Marcel Visser stond met één been in de academische en met het andere been in de financiële wereld. Hij werkte aan de UvA onder begeleiding van promotor Chris Klaassen en co-promotores Guus Balkema en Robin de Vilder. Samen met De Vilder werkte hij echter een groot deel van zijn tijd ook bij Deep Blue Capital, waar ze algoritmes ontwikkelen en automatiseren die op de beurs handelen. Hij denkt dat de combinatie met de praktijk van belang is geweest. "De korte afstand tot de weerbarstigheid van de beurshandel maakt het onaantrekkelijk om te werken met esthetisch verantwoorde, maar empirisch onrealistische aannames", aldus Visser. Veel bestaande modellen laten bijvoorbeeld geen dagstructuur toe. In de praktijk zijn er echter heel duidelijk activiteitspatronen binnen de dag, zoals veel ochtendfluctuaties en een rustig middenstuk van de dag. Een onderscheidend kenmerk van Visser's aanpak is dat zulke patronen wel worden toegelaten.

Aan het begin van zijn aio-tijd was het lastig op een goede eerste vraag te komen, een vraag die interessant is, beantwoordbaar, maar nog niet beantwoord. Het duurde even voordat Visser het geluk had om op zo'n vraag te komen, maar dat is naar zijn eigen zeggen gecompenseerd door de mate van geluk: zoals gezegd bleek zijn aanpak erg vruchtbaar. Het uitpluizen van de openstaande vragen gaf en geeft hem veel plezier. Dat is ook een belangrijk onderdeel bij het ontwikkelen en onderzoekswerk bij Deep Blue Capital, waarmee hij na zijn promotie is doorggegaan. Het bleek wel lastiger dan gedacht om resultaten over te brengen: "Hoe krijg je lezers zover dat ze bij een nieuw model denken: ja, zo zou ik het ook doen?" Hij denkt dat hij hierin met zijn proefschrift wel is geslaagd en hoopt dat toekomstige lezers het daarmee eens zijn. De verdediging van het proefschrift vond hij erg leuk: "Het is een hele eer om met voorbeelden uit het vakgebied op zo'n dag het debat aan te gaan." Guus Balkema had hem meegegeven dat de aanval soms de beste verdediging is; die raad heeft hij ter harte genomen.

Toch nog even de crisis

Hoewel het woord crisis niet voorkomt in zijn proefschrift, heeft Visser zeker geen gebrek aan realiteitszin. De recente gebeurtenissen waren

een belangrijke reden om de gebruikte dataset uit te breiden en het model ook daarop onder de loep te nemen. Het ontwikkelde model, dat tamelijk algemeen geformuleerd is, doorstaat ook de test van deze woelige beursperiode.

Visser is zich zeer bewust van het probleem dat in zijn vakgebied exacte methoden worden toegepast in een niet-exacte, niet-experimentele omgeving. Economische processen kunnen onvoorzien van structuur veranderen en in de praktijk dient een financieel wiskundig model dus met de nodige bescheidenheid worden toegepast. Een crisis zul je er niet mee voorspellen. Ook niet met GARCH modellen, ook al staan die dicht bij de realiteit dan de welbekende optiewaarderingstheorie van Black, Scholes en Merton uit 1973 waarmee Brownse beweging groot werd in de financiële wereld. 



Analytic parameter dependence in Harish-Chandra modules for real reductive Lie groups — a family affair

Vincent van der Noort

Maandag 21 december 2009 was een van de dagen waarop Nederland zuchtte onder een dik pak sneeuw. Veel mensen bleven noodgedwongen thuis en allerlei bijeenkomsten werden afgelast. Gelukkig lukte het Vincent van der Noort en zijn promotiecommissie wel om het Utrechtse Academiegebouw te bereiken en ging de verdediging van zijn proefschrift door. De sneeuw droeg bij aan een extra sprookjesachtige sfeer.

Sommige lezers kennen Van der Noort wellicht van de Vierkant zomerkampen, anderen van het hilarische filmpje 'Wiskundige zoekt vrouw' waarin hij een karikatuur van zichzelf speelt (zie <http://vimeo.com/1373331>). "Een absoluut hoogtepunt in mijn acteerscarrière", aldus Van der Noort, die in zijn vrije tijd aan improvisatietoneel doet. Bij wiskunde kun je willekeurig lang over iets nadenken, bij deze toneelvorm moet je meteen zeggen wat in je opkomt. Ook kan de acteervaring helpen bij het geven van voordrachten.

Een raar stelletje nerds

Van der Noort vertelt beeldend over zijn ervaringen als wiskundig onderzoeker. Op een gegeven moment had hij vanuit zijn kamer uitzicht op wegwerkzaamheden waarbij een grote asfaltweg met stoplichten een paar meter werd verplaatst. Toen de eerste zandhopen onder zijn raam verschenen, werkte hij aan een bepaald probleem waar hij niet uitkwam. Een tijd later was de weg opeens verlegd terwijl Van der Noort nog steeds met hetzelfde probleem zat waar hij niet uitkwam. Dat was wel deprimerend: "Sommige mensen verleggen een hele asfaltweg, anderen komen in dezelfde tijd geen millimeter verder met hun stomme lambda's en zeta's."

Een hoogtepunt in zijn aio-carrière was een zomerschool in Utah waar hij aan het eind van zijn eerste jaar naartoe ging. Opeens was hij omringd door zo'n honderd andere promovendi die net als hij de le-

zingen wilden begrijpen. Ze waren vastbesloten alles echt te doorgronden en zaten vaak tot diep in de nacht in de π -pizzeria uit te werken wat ze overdag gehoord hadden. De hele zomerschool had iets van een schoolreisje. Op een goed moment omzeilden ze zelfs de drankwetten door, heel stoer, stiekem drank naar hun hotelkamer te smokkelen. En ondertussen maar discussiëren of twee typen geïnduceerde representaties al dan niet aan elkaar gelijk zijn. Van der Noort: “Het bewijst vooral dat we een raar stelletje nerds bij elkaar waren, maar het was precies wat ik nodig had op dat moment.” Door al het inlezen en in zijn eentje worstelen met moeilijke dingen die hij moest begrijpen was hij gaan twifelen of hij wiskunde eigenlijk wel leuk vond. Hier ervoer hij weer dat hij juist heel veel van wiskunde houdt, als hij zijn enthousiasme maar met anderen kan delen. Dat is echt een belangrijke les uit zijn promotietijd: niet alleen vindt hij wiskunde leuker, maar hij is er ook beter in als hij er met andere mensen over praat.

Representaties van groepen

Van der Noort promoveerde bij Erik van den Ban op het proefschrift getiteld *Analytic parameter dependence in Harish-Chandra modules for real reductive Lie groups — a family affair*. Zijn vakgebied is de representatietheorie van Liegroepen. Voor hij uitlegt waar zijn proefschrift over gaat, geeft hij de volgende motivatie voor het werken aan representaties van groepen. Een representatie van een groep is een werking van de groep op een vectorruimte door middel van lineaire transformaties. Stel nu dat je een interessant meetkundig object hebt. Dat object heeft dan uiteraard een rijke symmetriegroep, anders zou het tenslotte niet interessant zijn. Ook zit er veel informatie over het object gevangen in de verschillende vectorruimtes van functies (continu, L^2 , analytisch, ...) op het object. De symmetriegroep van het object werkt op deze vectorruimtes, dus als je in het algemeen iets weet over hoe groepen op vectorruimtes werken kun je allerlei interessants over je meetkundige object zeggen zonder iets van meetkunde te hoeven weten.

Dezelfde groep kan een heleboel verschillende representaties hebben op verschillende maar soms zelfs op dezelfde vectorruimte. Als de groep niet compact is treden representaties vaak op in zogenaamde ‘analytische families’: een verzameling representaties van dezelfde groep op dezelfde vectorruimte waarbij de groepsactie op een holomorfe manier afhangt van een complexe parameter. Van der Noort geeft een voorbeeld voor de groep $\mathbf{R}$: voor ieder complex getal λ geeft de afbeelding $x \mapsto e^{\lambda x}$ een representatie van de groep $\mathbf{R}$ op de 1-dimensionale vectorruimte $\mathbf{C}$. Al deze representaties vormen samen een analytische familie omdat de afhankelijkheid van de parameter λ analytisch is.

Een algebraïsch gadget

In zijn proefschrift bestudeert Van der Noort deze families. Aan de ene kant kun je je afvragen in hoeverre het feit dat representaties samen een familie vormen, dicteert dat de familieleden op elkaar lijken. Aan de andere kant is het interessant of je op ‘infinitesimaal niveau’ kunt aflezen of representaties al dan niet elkaars familie zijn.

Aan een representatie kun je een algebraïsch gadget toekennen, het Harish-Chandra moduul uit de titel van zijn proefschrift. Het HC-moduul is een dichtliggende deelruimte van de representatie die niet de hele groepsactie voelt, maar wel de actie van de bijbehorende Lie-algebra en de actie van een maximaal compacte ondergroep van de groep. Daarmee vangt het moduul een hoop informatie over de representatie — wat je weggooit is vooral informatie die te maken heeft met de topologie op je vectorruimte. De belangrijkste vraag in Van der Noorts proefschrift is de vraag of iedere analytische familie van HC-

modulen afkomt van een familie van representaties. Helaas kon hij die alleen in speciale gevallen beantwoorden.

De vraag in hoeverre familieleden op elkaar lijken, beantwoordt hij vooral voor een traditioneel belangrijk aspect in representatietheorie: irreducibiliteit. Een representatie heet irreducibel als er geen kleinere representaties ‘in’ zitten. Hij laat zien dat bijna alle familieleden irreducibel zijn als één familielid dat is. De parameterwaarden waar de bijbehorende representaties *niet* irreducibel zijn, blijken een mooie meetkundige structuur te hebben. Vervolgens bewijst hij (onder bepaalde technische voorwaarden waar hij ooit nog vanaf hoopt te komen) dat voor dit type bijna overal irreducibele families inderdaad geldt dat alle families van Harish-Chandra modulen afkomen van families van groepsrepresentaties. Dit laatste is waarschijnlijk het belangrijkste resultaat in zijn proefschrift.

Het is ons toch maar mooi gelukt

Nu alles af is, is Van der Noort zelf echter het meest tevreden over een ander resultaat: de subrepresentatiestelling voor families. De subrepresentatiestelling is een beroemd resultaat van rond 1980 dat zegt dat ieder Harish-Chandra moduul kan worden ingebed in een geïnduceerde representatie: een oneindigdimensionale representatie die gemaakt wordt uit een eindigdimensionale representatie van een kleinere groep. Van den Ban en Van der Noort generaliseren dit resultaat naar families: iedere familie van Harish-Chandra modulen is in te bedden in een familie van representaties die afkomt van een familie van eindig dimensionale representaties van een kleinere groep. Het bewijs volgt in principe het bewijs van de klassieke subrepresentatiestelling, maar als je alles met holomorfe parameterafhankelijkheid wilt doen, ontstaan er opeens duizend-en-één subtiele technische problemen. Telkens als ze dachten te begrijpen hoe het zat, bleek er toch weer één specifieke parameterwaarde te zijn waarvoor er iets mis ging. Van der Noort heeft om deze reden zijn vakgebied vaak vervloekt en zich afgevraagd waarom de dingen die intuïtief gezien duidelijk moeten gelden niet gewoon eens een keer waar kunnen zijn zonder al die mitsen en maren. Maar nu het gelukt is, is hij toch erg tevreden dat hij het voor elkaar heeft gekregen alle technische problemen te overwinnen. De meeste andere argumenten in zijn proefschrift zijn eleganter of aantrekkelijker om te lezen dan het bewijs van de subrepresentatiestelling maar dit laatste geeft hem toch het beste gevoel: “Het is ons toch maar mooi gelukt.”

Jeugddroom

Sinds februari van dit jaar werkt Van der Noort aan de lerarenopleiding van de Hogeschool Utrecht. Hij geeft wiskunde aan tweedegraadsleraren die een masteropleiding doen om hun eerstegraadsbevoegdheid te halen. Op dit werk heeft hij zich erg verheugd. Aan de UU vond hij lesgeven altijd al erg leuk en omdat zijn nieuwe studenten aan de hogeschool zelf allemaal ervaren leraren zijn verwacht hij ook van hen nog veel te kunnen leren.

Daarnaast werkt Van der Noort aan een boek. Ongeveer een jaar geleden kreeg hij namelijk een e-mail van uitgeverij Atheneum. Ze hadden wat dingen op zijn website gelezen en vroegen of hij er ooit over gedacht had een boek over wiskunde te schrijven voor een breed publiek. Eerlijk gezegd had hij wel eens met die gedachte gespeeld, maar ook gedacht: “Er zijn al zoveel goede boeken over wiskunde, wat kan ik daar nog aan toevoegen?” Na een paar leuke gesprekken met de uitgeverij besloot hij het toch te doen. Nu is hij dus aan het schrijven en in de herfst ligt zijn boek als alles goed gaat in de winkel. Een soort jeugddroom die uitkomt, maar ook wel een beetje eng — hij moet het nog wel waarmaken!



Henk Dijkstra

IMAU

Universiteit Utrecht

Princetonplein 5

3584 CC Utrecht

H.A.Dijkstra@uu.nl

Onderzoek

Transitiegedrag van de Atlantische Oceaan

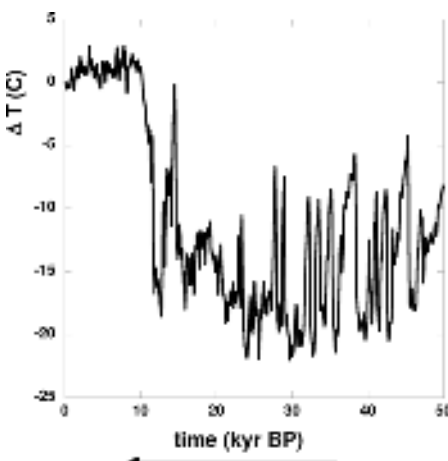
Naast de veelbeproken opwarming van de aarde bestaat er ook een mogelijkheid dat Europa relatief snel kan afkoelen. Dit komt omdat het warmtetransport door de Atlantisch oceaancirculatie gevoelig is voor zoetwaterverstoringen. Henk Dijkstra schetst de ontwikkelingen in het oceanografisch onderzoek en evalueert de resultaten van de huidige modellen.

Op 1 december 2005 verschijnt in het tijdschrift *Nature* een artikel [2] dat onmiddellijk veel reacties in de pers veroorzaakt. BBC news opent met "Ocean changes will cool Europe" en vat het resultaat als volgt samen: "Researchers say currents derived from the Gulf Stream are weakening, bringing less heat north." In het artikel staat een analyse van resultaten van vijf research cruises, over een sectie van Florida naar de Canarische eilanden in de Atlantische Oceaan, uitgevoerd in de periode 1957-2004. De conclusie is dat het

transport van warmte door oceaanstromingen in de Noord Atlantische Oceaan over deze periode met ongeveer 30% is afgenomen. Hoe komt men aan dit resultaat, en hoe betrouwbaar is het?

Temperatuurfluctuaties

Eén van de grote doorbraken in het klimaatonderzoek van de afgelopen vijftig jaar is de reconstructie van de temperatuur uit een ver verleden door sedimentkernen (op de oceaانبodem) en ijskernen te bestuderen. Isotopenanalyse van materiaal uit ijskernen op Groenland geeft inzicht in de lokale temperatuur aldaar over de laatste 50 duizend jaar. De afwijkingen van de temperatuur ΔT ten opzichte van het gemiddelde van de laatste 100 jaar zijn te zien in Figuur 1. Langzame variaties hangen samen met de ontwikkeling van de laatste ijstijd waarvan het maximum ongeveer 25 duizend jaar geleden optrad. Fascinerend zijn de relatief snelle transitie (bijvoorbeeld tussen de vijftigduizend en twintigduizend jaar geleden) met een amplitude van wel 10°C. Deze fluctuaties treden ongeveer elke 1500 jaar op en worden de Dansgaard-Oeschger oscillaties genoemd. Wat heeft deze oscillaties veroorzaakt? Wat is de kans dat dit soort transitie in het huidige klimaat kunnen optreden?



Figuur 1 Temperatuurafwijking t.o.v. het gemiddelde over de laatste 100 jaar op een lokatie in centraal Groenland, zoals gereconstrueerd uit ijskernen (1 kyr = 1000 jaar).

Eén van de hypothesen is dat de Dansgaard-Oeschger oscillaties worden veroorzaakt door verandering van stromingen in de Atlantische Oceaan. De oceaancirculatie wordt aangedreven door atmosferische winden, bijvoorbeeld door de westelijke winden op gematigde breedten en door passaatwinden nabij de equator. De circulatie wordt tevens beïnvloed door gradiënten in de dichtheid van het oceaanaanwater die veroorzaakt worden door verschillen in temperatuur en zoutgehalte. Een karikatuur van de circulatie is te zien in Figuur 2. De Golfstroom blijft nabij de oostkust van de VS tot ongeveer 40°N en buigt dan scherp af naar het oosten. Met de Golfstroom wordt ongeveer 60 Sv (1 Sv(erdrup) = 10⁶ m³/s) water naar het noorden getransporteerd. Een deel daarvan recirculeert (in rood aangeven) en de rest van dit relatief warme en zoute water (in geel aangeven) bereikt de gebieden nabij IJsland en koelt stroomafwaarts af. Heel eenvoudig gezegd wordt het water daarmee zwaarder; uiteindelijk 'zinkt' het als het ware naar beneden en stroomt weer terug op diepte naar de equator (in blauw aangeven). Onder de Golfstroom zit dus een diepe stroming en het leuke is dat het bestaan van deze stroming was voorspeld uit theorie en pas later werd gemeten; helaas is het meestal andersom.

Als we het totale transport van water over elke sectie bekijken dan stroomt er ongeveer 20 Sv warm water noordwaarts over de bovenste 1000 m in de Atlantische Oceaan. Dit volume transport veroorzaakt een warm-

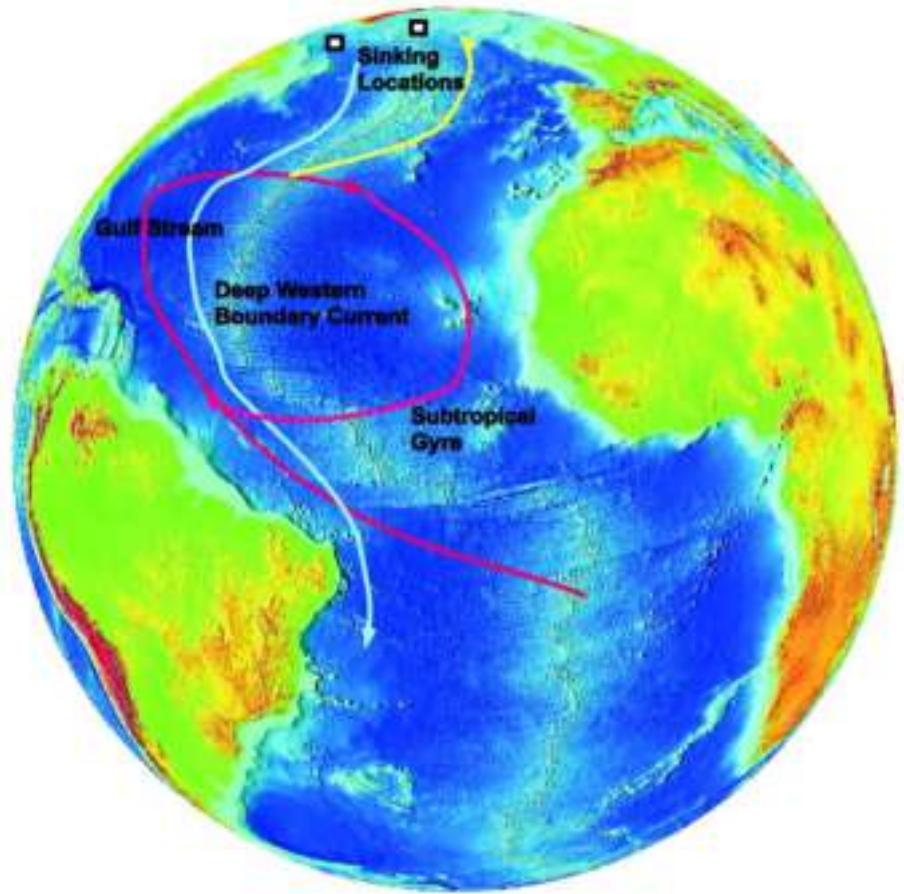
tetransport van ongeveer 10^{15} W op 25°N . Deze warmte wordt op hogere breedtegraden afgegeven aan de atmosfeer en zorgt in Europa voor een mild klimaat (in vergelijking met het klimaat in Alaska). Als we op elke breedtegraad de oceaancirculatie middelen over een west-oost sectie over het Atlantisch bekken, dan vinden we de Meridionale Overturning Circulatie (MOC). De MOC meet het netto noord-zuid volume transport op elke breedtegraad en diepte en de sterkte ervan is rechtstreeks gekoppeld aan het noordwaartse warmtetransport.

MOC: warmtetransport in de oceaan

In tegenstelling tot de Golfstroom is de MOC een gevoelige schakel in het klimaatsysteem. De Golfstroom is voornamelijk windgedreven en is alleen te stoppen door de rotatie van de Aarde naar nul te schroeven of de winden stil te laten vallen. De MOC wordt echter grotendeels bepaald door dichtheidsverschillen en is gevoelig wegens het bestaan van een positieve terugkoppeling (Figuur 3): de zout-advectie terugkoppeling. Als er een zoetwaterverstoring optreedt (door ijsbergen, afsmelten van ijskappen of extra regenval) in het noorden van de Atlantische Oceaan, dan wordt het water daar minder zwaar. Er zinkt dan minder water en de MOC wordt zwakker en voert dus ook minder zout naar het noorden. Dit laatste veroorzaakt dat de originele zoetwaterverstoring wordt versterkt en de MOC wordt dus nog zwakker, etcetera. Tijdens de laatste ijstijd zijn er perioden geweest waarin grote hoeveelheden ijsbergen de Noord-Atlantische Oceaan in dreven. Door de zout-advectie terugkoppeling nam de MOC in relatief korte tijd af en daarmee het noordwaartse warmtetransport met als gevolg dat het op Groenland kouder werd.

Twee-reservoir model

De zout-advectie terugkoppeling werd al beschreven in 1961 in een artikel van Stommel [6]. Het theoretisch model dat Stommel gebruikte was dat van twee goed gemengde reservoirs (Figuur 4a), een equatoriaal reservoir met volume V_e en een polair reservoir met volume V_p , die met elkaar verbonden zijn aan het oppervlak en in de diepzee. De circulatie wordt aangedreven door het dichtheidsverschil van het water in beide reservoirs. Deze dichtheden worden bepaald door de uitwisseling van warmte en zoetwater tussen de oceaan en de atmosfeer. De sterkte van de MOC is Ψ en voor $\Psi > 0$ is de oppervlakte-circulatie van het equatoriale naar het polaire reservoir (Figuur 4a).



Figuur 2 Schets van de circulatie in de Atlantische Oceaan met de Golfstroom en de locaties waar het zware water naar beneden zinkt. De MOC is de circulatie die resulteert door de oceaanstromingen over een west-oost sectie te middelen.

In het twee-reservoir model kunnen de (dimensieloze) vergelijkingen die de zout- en warmtebalansen representeren in beide reservoirs worden gereduceerd tot

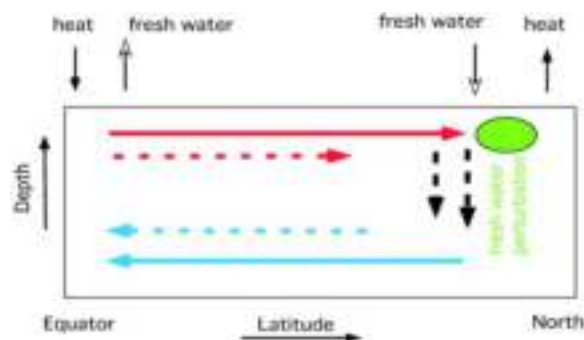
$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \eta_1 - T(1 + f(\Psi)), \\ \frac{dS}{dt} &= \eta_2 - S(\eta_3 + f(\Psi)), \end{aligned} \quad (1)$$

waarbij $T = T_e - T_p$ het dimensieloze verschil is tussen de temperatuur in het equatoriale re-

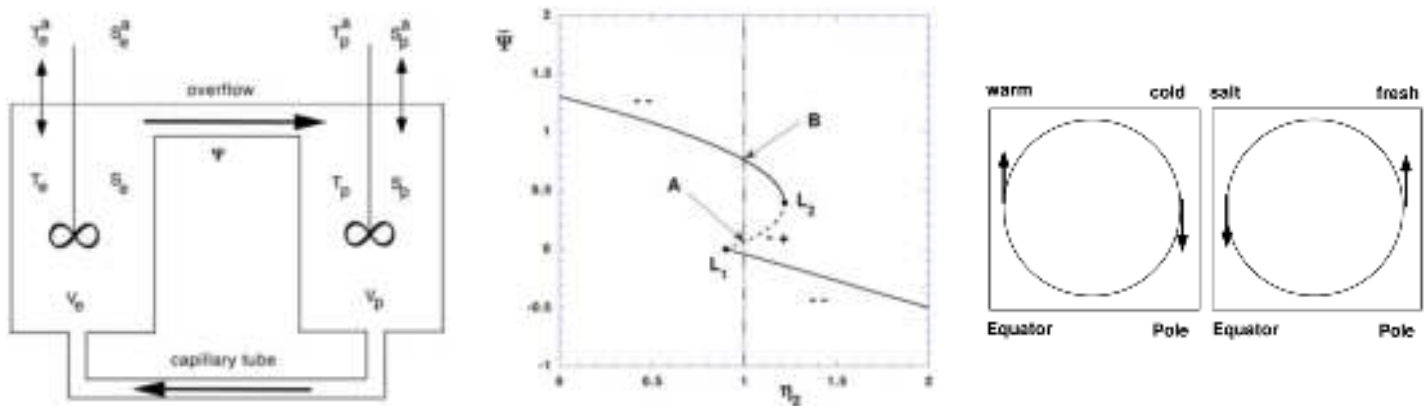
servoir en het polaire reservoir. $S = S_e - S_p$ is het zoutverschil tussen beide reservoirs en $\Psi = T - S$; verder is $f(x) = 1/(2(1 + \tanh x/\epsilon))$.

Er zijn dus vier parameters: η_1 is een maat voor de sterkte van de warmteforcering, η_2 van de zoetwaterforcering en η_3 is de ratio van de dempingstijdschalen van warmte- en zoetwaterverstoringen door de atmosfeer; daarnaast is ϵ een kleine parameter.

Het bifurcatiediagram in Figuur 4b van het twee-dimensionale dynamische systeem



Figuur 3 Schets om de zout-advectie terugkoppeling te verduidelijken. Een zoetwaterverstoring in het noorden veroorzaakt een verzwakking van de MOC (doorgetrokken naar onderbroken pijlen). Daardoor wordt er minder zout aangevoerd uit tropische gebieden hetgeen de zoetwater anomalie in het noorden versterkt.



Figuur 4 (a) Schets van het twee-reservoir model. (b) Bifurcatiediagram (Ψ versus η_2) van het model (1) voor $\eta_1 = 3.0$, $\eta_3 = 0.3$ en $\epsilon = 10^{-3}$. De $\pm$ geven het teken aan van de eigenwaarden van de Jacobiaan voor elke stationaire toestand; een doorgetrokken respectievelijk onderbroken lijn representeert stabiele (respectievelijk instabiele) stationaire toestanden. (c) Schets van de patronen van de temperatuur- (TH, links) en zoutgedreven (SA, rechts) toestanden van de MOC in het twee-reservoir model.

in (1) laat zien dat er een parameterinterval bestaat waarin er twee toestanden stabiel zijn. De ene toestand (TH in Figuur 4c) is temperatuurgedreven en $\Psi > 0$ terwijl voor de andere toestand (met $\Psi < 0$) de MOC zoutgedreven is. De sterkte van de MOC neemt langzaam af als de zoetwater forcering toeneemt tot een bepaald punt L_2 . Als de zoetwater forcering vanaf L_2 iets toeneemt dan stort de MOC als het ware in en ontstaat een patroon waarbij het zinken van het water in het noorden tot nul is gereduceerd. Deze SH toestand wordt ook wel de 'off-state' genoemd in tegenstelling tot de (TH) 'on-state'. Het leuke is dat als we vanaf de 'off-state' de zoetwater forcering weer laten afnemen, dat de 'off-state' blijft bestaan tot het punt L_1 . Als dan

de forcering iets wordt verkleind herstelt de MOC zich weer en in een paar honderd jaar is de 'on-state' weer bereikt. De punten L_1 en L_2 zijn voorbeelden van zogenaamde zadelknoop bifurcaties en er moet dus een instabiele tak van evenwichten bestaan zoals de onderbroken curve in Figuur 4b.

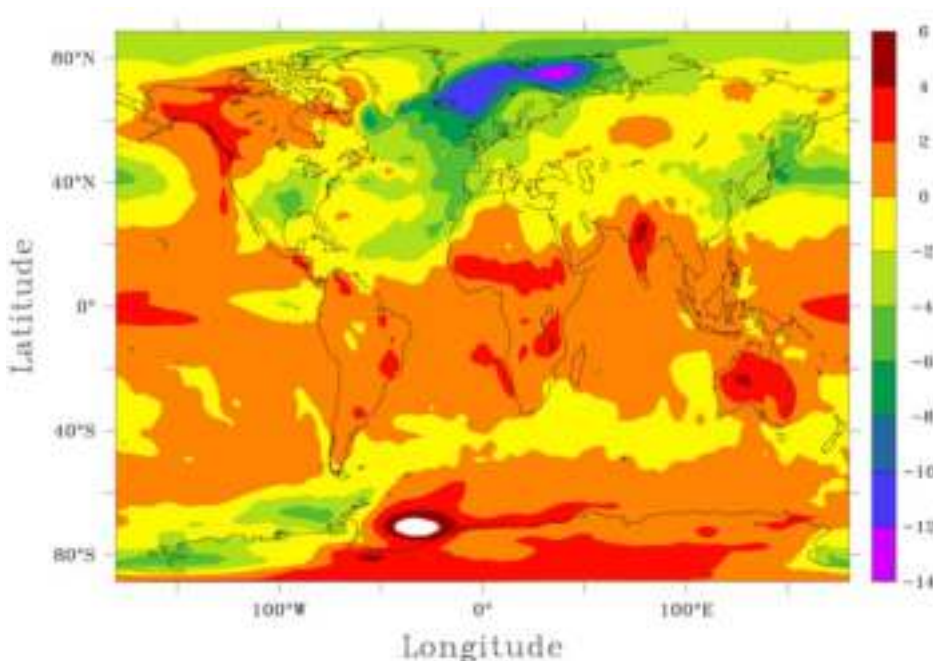
Het artikel van Stommel werd lange tijd genegeerd door de oceanografische gemeenschap mede omdat het twee-reservoir model zo eenvoudig is. In 1986 waren supercomputers snel genoeg om deze twee MOC toestanden te vinden in een 'acceptabel' oceaanmodel, gebaseerd op de basisvergelijkingen uit de stromingsleer. Het resultaat werd gepubliceerd in *Nature* [1] door de jonge promovendus Frank Bryan die daarmee meteen

grote bekendheid kreeg. Ook het artikel van Stommel [6] werd in het juiste perspectief geplaatst en is nu één van de meest geciteerde artikelen in het klimaatonderzoek.

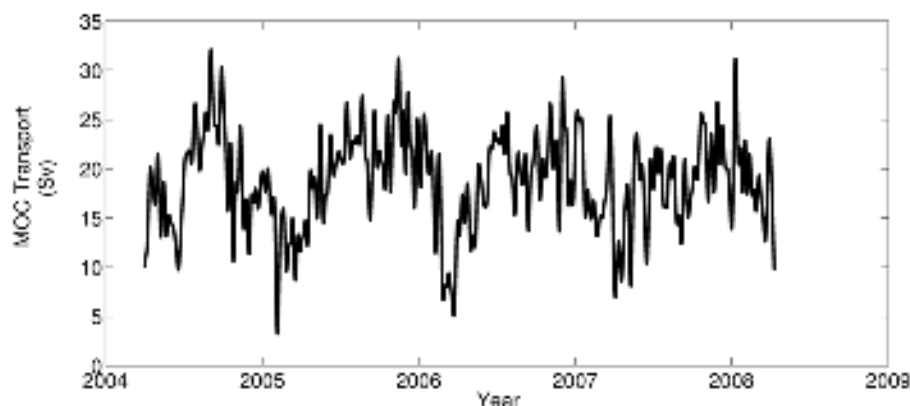
Voorspellen en meten

In een hiërarchie van oceaan- en klimaatmodellen worden de parameter regimes waar de meervoudige evenwichten optreden relatief snel gevonden [4]. Alleen in de meest geavanceerde klimaatmodellen (die gebruikt zijn in het 4de assessment report van het Intergovernmental Panel of Climate Change (IPCC)) blijkt het moeilijk om 'off-states' te vinden. Wel is het mogelijk om de 'on-state' van de MOC zwakker te maken door een grote hoeveelheid zoetwater neer te leggen onder Groenland. In het ESSENCE project zijn deze simulaties gedaan met het zogenaamde ECHAM5-OM1 model (van het Max Planck Instituut voor Meteorologie in Hamburg) in een vijftal klimaatsimulaties over de periode 2001–2100. De zoetwater anomalie is 1 Sv (ongeveer het volumetransport van alle rivieren op aarde) en de MOC neemt sterk af over een periode van 30 jaar. In Figuur 5 is de afwijking van de oppervlakte temperatuur na 25 jaar ten opzichte van 2000 te zien en het blijkt dat het inderdaad 10 graden kouder wordt in een groot deel van het Noord-Atlantisch gebied. Hoewel dit niet de transitie van de 'on-state' naar de 'off-state' is omdat er in de resulterende MOC nog steeds noordwaarts transport van warmte plaatsvindt geeft het toch een indicatie van het effect van het afzwakken van de MOC.

Vooral de grote potentiële impact van het afzwakken van de MOC op het klimaat in het Verenigd Koninkrijk heeft geleid tot een groot project om de sterkte van de MOC op 26°N (ter hoogte van Florida) continu te meten. Deze RAPID array van meetinstrumenten



Figuur 5 Het verschil van de jaargemiddelde oppervlaktetemperatuur (°C) tussen de jaren 2025 en 2000 in één van de simulaties van het ECHAM-OM1 model [5]. In deze 25 jaar is de MOC afgenomen van 20 Sv (in 2000) naar 5 Sv (in 2025).



Figuur 6 Resultaten van de RAPID metingen [3] van de sterkte van de MOC (in Sv) op een breedtegraad van 26°N over de periode april 2004 tot maart 2008.

geeft sinds 2004 resultaten en heeft meteen een ander beeld van de MOC opgeleverd. Het blijkt dat de MOC sterke variaties vertoont (Figuur 6) met veranderingen van maar liefst 20 Sv over enkele maanden [3]. Deze grote variaties komen vermoedelijk door de aanwezigheid van 10-50 km wervels (de hoge en lage drukgebieden van de oceaan) die overal in de oceaan aanwezig zijn en die nog niet in de IPCC klimaatmodellen worden gerepresenteerd. Onmiddellijk werden de resultaten van het Nature artikel [2] niet meer zo serieus genomen: dat waren maar 5 metingen van de MOC over een periode van 50 jaar en ook nog eens op verschillende tijden in het jaar.

Aanwijzingen voor een afname van de huidige MOC vanuit observaties zijn er dus absoluut (nog) niet!

Wervels modelleren

De RAPID metingen bieden een ideale gelegenheid voor model-observatie confrontatie mits er met oceaanmodellen gerekend wordt die de wervels representeren. De huidige supercomputer Huygens in Amsterdam (SARA) heeft ongeveer 3000 processoren met een kloksnelheid van 4,5 GHz. Deze computer kan ongeveer 60000 miljard berekeningen per seconde doen (60 Tflop/s). In samenwerking met de Climate Simulation groep op het Los

Alamos National Laboratory (waar op dit moment één van de snelste computers ter wereld staat) doen we op dit moment simulaties op Huygens met een oceaanmodel dat een horizontaal oplossend vermogen heeft van 10 km, zodat de wervels worden gerepresenteerd. Het duurt 1 dag om het oceaanmodel 1 jaar te laten simuleren op ongeveer 1/4 van de capaciteit van Huygens (700 processoren). Op dit moment berekenen we de ontwikkeling van de MOC als gevolg van zoetwater verstoringen ten zuiden van Groenland die het effect van afsmelten van de ijskap aldaar representeren.

Uit dit onderzoek willen we uiteindelijk een schatting maken van de kans dat er een sterke afname van de MOC zal optreden voor het jaar 2100. De resultaten van IPCC modellen wijzen op een kleine kans, maar niemand weet nog hoe dat gaat veranderen als oceaanwervels meegenomen worden. Onlangs is het RAPID programma verlengd: de meetinstrumenten op 26°N blijven zeker tot 2014 in het water liggen. Misschien kunnen we straks online zien hoe de MOC instort; dat zou spectaculair zijn. Maar ook als er niets schokkends gebeurt zullen de RAPID observaties een prachtige dataset vormen om, samen met modelresultaten, de fysica van de oceaancirculatie te doorgronden.

Referenties

- 1 Bryan, F. O., *High-latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulations*, *Nature*, **323**, 301–304, 1986.
- 2 Bryden, H. L., H. R. Longworth, and S. A. Cunningham, *Slowing down of the Atlantic meridional overturning circulation at 25°N*, *Nature*, **438**, 655–657, 2005.
- 3 Cunningham, S. A. et al., *Temporal Variability of the Atlantic Meridional Overturning Circulation at 26.5°N*, *Science*, **317**, 934–938, 2007.
- 4 Dijkstra, H. A., *Nonlinear Physical Oceanography: A Dynamical Systems Approach to the Large Scale Ocean Circulation and El Niño*, 2nd Revised and Enlarged edition. Springer, New York, 532 pp., 2005.
- 5 Sterl, A., C. Severijns, H. A. Dijkstra, W. Hazeleger, G. J. Van Oldenborgh, M. Van den Broeke, G. Burgers, B. Van den Hurk, P. J. Van Leeuwen, and P. Van Velthoven, *When can we expect extremely high surface temperatures?* *Geophys. Res. Letters*, **35**, L14703, doi:10.1029/2008GL034071, 2008.
- 6 Stommel, H., *Thermohaline convection with two stable regimes of flow*, *Tellus*, **2**, 244–230, 1961.

Herman te Riele

Centrum Wiskunde & Informatica

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

Herman.te.Riele@cw.nl

Geschiedenis

De Boekerij van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het KWG bezit al sinds haar ontstaan diverse boeken, tijdschriften en andere wiskundige naslagwerken. Op het beheer van deze collectie wordt toegezien door de Inspecteur der Boekerij. Herman te Riele, de huidige inspecteur, vertelt in dit artikel over de geschiedenis, inhoud en toegankelijkheid van de collectie.

Volgens Artikel 6 van de Statuten [7] van het Koninklijk Wiskundig Genootschap is een van de middelen waarmee het Genootschap de beoefening van de wiskunde wil bevorderen: het in stand houden en uitbreiden van een *Boekerij* ofwel, in moderne taal, een bibliotheek. Artikelen 26–28 gaan hier nader op in:

“Art. 26: De door het Bestuur te maken bepalingen omtrent de plaatsing en bewaring der Boekerij zijn aan de goedkeuring van de Algemene Vergadering onderworpen;
Art. 27: De leden van het Genootschap hebben recht van gebruik van de Boekerij, onder bepalingen door het Bestuur vast te stellen;
Art. 28: Ter uitbreiding der Boekerij kan het Bestuur ruilovereenkomsten aangaan met anderen.”

Deze artikelen stammen uit het einde van de 18de eeuw, toen er nog weinig wiskundebibliotheken in Nederland waren. Toentertijd voorzag de Boekerij in een duidelijke behoefte: tegenwoordig is de Boekerij vooral van belang door de historische werken die daarin zijn opgenomen.

In deze bijdrage zal ik als ‘Inspecteur van de Boekerij’ van het Genootschap nader ingaan op de geschiedenis van de Boekerij en op vragen als: wat omvat deze Boekerij, waar

bevindt hij zich en hoe kan men toegang daartoe krijgen?

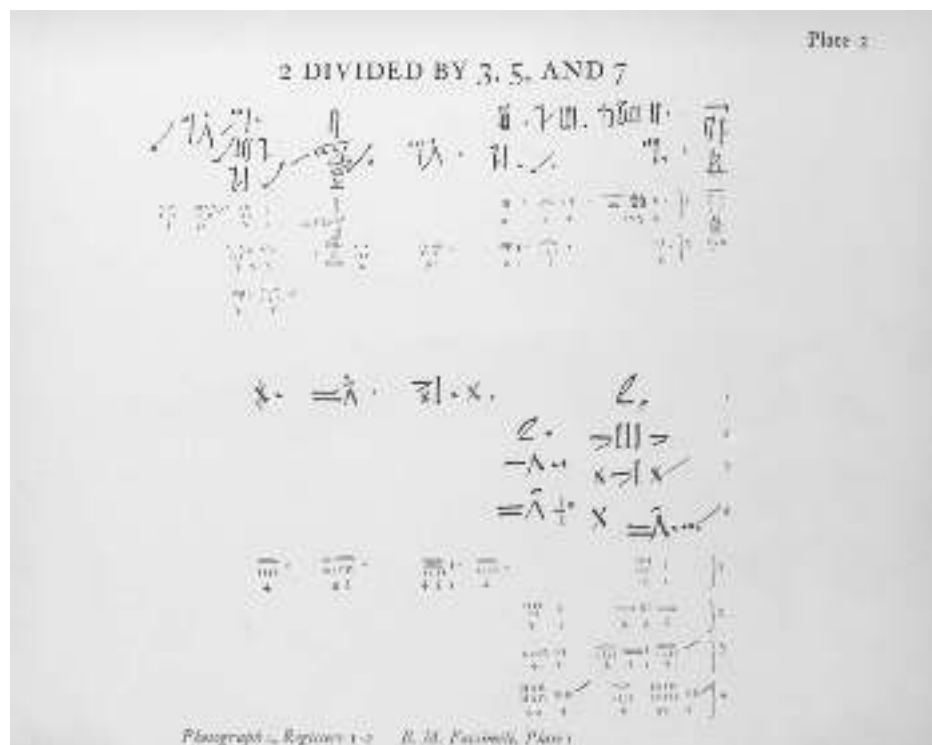
Geschiedenis

Van Haaften heeft in 1923 de vroegste geschiedenis van de Boekerij beschreven [4, pp. 82–89]. Oud-voorzitter, oud-Inspecteur der Boekerij en erelid Baayen heeft hier in 1978 het nodige aan toegevoegd in een historisch overzicht, geschreven ter gelegenheid van het 200-jarig bestaan van het Genootschap [1, p. 188]. Ik vat hier de belangrijkste punten samen.

Het belang van een bibliotheek van wiskundige werken werd door het Genootschap erkend toen in 1813 de eerste Bibliothecaris, Jacob de Gelder, werd aangesteld. Enkele van de oudste boeken werden verkregen als gift van het Wiskundig Genootschap uit Hamburg. Veel andere werken werden door de auteurs van deze werken aan het Genootschap geschonken en verscheidene vooraanstaande leden, zoals A.N. Godefroy (1822-1899) en D.J. Korteweg (1848-1941), vermaakten (een deel van) hun privé-bibliotheek aan het Genootschap. Tot 1880 was het gebruik dat de Boekerij was ondergebracht ten huize van de Bibliothecaris, wat steeds de verhuizing van de hele verzameling tot gevolg had bij het

aantreden van een nieuwe Bibliothecaris. Dat is acht keer het geval geweest totdat in 1880 een overeenkomst werd gesloten met de in 1876 gestichte Universiteit van Amsterdam waarin werd bepaald dat de Boekerij werd ondergebracht bij en beheerd door de Universiteitsbibliotheek (UB) van de UvA, maar eigendom bleef van het Genootschap. De Boekerij valt nu binnen de UB onder Bijzondere Collecties, waarvan de UB er ongeveer 1200 onder haar beheer heeft. Het WG was een van de eerste genootschappen waarmee de UB een bruikleenovereenkomst heeft afgesloten. Dat gebeurde in 1880: voor de UvA werd de overeenkomst ondertekend door de universiteitsbibliothecaris H.C. Rogge en voor het Bestuur van het WG door de voorzitter A.J. van Pesch en de tweede secretaris N.P. Kapteyn.

De overeenkomst is nadien twee keer gewijzigd: in 1934 en in 1965. In 1934 werd bepaald dat het Genootschap zorg draagt voor het binden van de tijdschriften in de Boekerij, dat bij gelijktijdige aanvraag van een boek de leden van het Genootschap voorrang genieten, en dat de overeenkomst wordt aangegaan voor de tijd van 99 in plaats van 30 jaar. Deze overeenkomst werd ondertekend door het *hele* 12-koppige bestuur, onder wie coryfeeën als J.C. van der Corput, D. Korteweg en L.E.J. Brouwer. Van de overeenkomst uit 1965 is bij mijn weten geen afschrift bekend. In elk geval wilde het WG op dat moment weer van de tijdschrift-bindverplichting af. De toenmalige Inspecteur der Boekerij, P.C. Baayen,



Figuur 1 Een bladzijde uit het "uitleg"-deel van de uitgave van Chase van de Rhind Papyrus

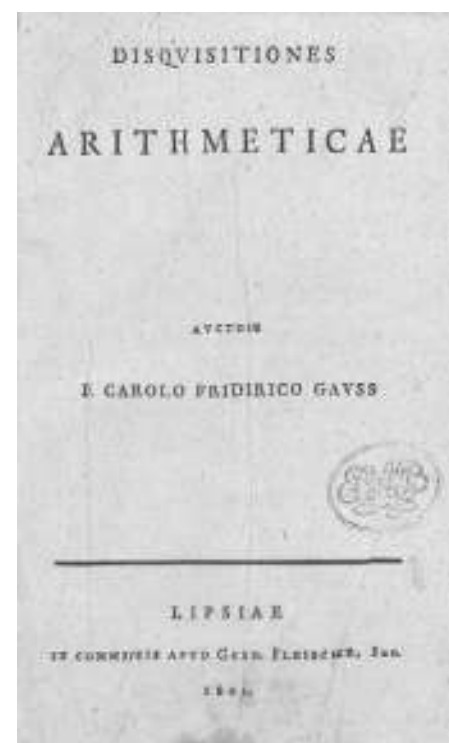
schreef mij hierover: "... Vóór 1965 werden de jaargangen van de door het WG verworven tijdschriften in opdracht van de UB gebonden; de rekening werd aan het WG gepresenteerd. Dat werd een steeds zwaardere financiële last. Het WG verkreeg bijna alle tijdschriften in ruil, waarbij onzerzijds als ruilobject niet alleen het Nieuw Archief werd aangeboden, maar ook de *Indagationes Mathematicae* (een reprint van het wiskundedeel van de *Proceedings* van de KNAW). Op de bibliotheek werkte toen mevrouw Monasch, die zich vooral sterk aangetrokken voelde tot de Sovjetwereld en zijn ideologie. Ze probeerde met iedere universiteit of academie in iedere sovjetrepubliek, die een tijdschrift publiceerde (zelfs al was dat onleesbaar of anderszins niet van belang), een ruilovereenkomst te sluiten (ze beschouwde dit als ontwikkelingshulp, denk ik). Mevrouw Monasch had veel succes, en het aantal tijdschriften dat de UB via het WG ontving steeg jaarlijks – en zodoende ook de boekbindersrekening. Het was voorzitter Freudenthal die vond dat het zo niet langer kon.". De vorm waarin de WG-tijdschriften door de UB werden opgeslagen kwam voortaan geheel voor rekening van de UB.

Van de Boekerij zijn vijf catalogi uitgegeven, en wel in 1831 (met 435 titels), in 1862 (met 1053 titels), in 1874 (met 1251 titels), in 1883 (met 1619 titels) en in 1907 [5] (met 4305

titels). De catalogus uit 1907 bevat niet alleen een inventaris van de werken van het Genootschap, maar ook van de wiskundige werken die eigendom zijn van de UB. De eerste drie catalogi bevatten een 'Reglement voor de leden'.

Van de werken die na 1907 aan de Boekerij zijn toegevoegd is geen gedrukt overzicht bekend. Via de jaarverslagen van de Inspecteur der Boekerij, die opgenomen zijn in de verslagen van de jaarlijkse Algemene Ledenvergaderingen van het Genootschap, kan men een deel van de boeken vinden welke door het Genootschap in bezit werden verkregen: dat kon zijn door schenking, door aankoop, en door via de 'Publications non-périodiques' van de *Revue Semestrielle* [6] besproken werken die men van de uitgever ontving en mocht behouden als tegenprestatie voor bespreking in dit tijdschrift. Waarschijnlijk werden deze naar de UB doorgestuurd, na voorzien te zijn van een stempel van het Genootschap. Zie figuur 2. Een door de auteur uitgevoerde kleine steekproef bevestigt deze aanname. Zo lezen we in het 'Verslag van den Inspecteur der Boekerij, Prof. G. Mannoury' van 30 april 1932:

"1^o, (ontvangen) van den Heer WIJDENES: „The Rhind Papyrus, British Museum.", 2 volumes, zijnde een uiterst kostbaar en fraai uitgevoerde reproductie van dit beroemde manuscript."



Figuur 2 Titelblad van de *Disquisitiones* van Gauss; het genootschapsstempel bevat de beginletters *EOATB* van de spreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

Deze facsimile-uitgave van het Rhind Papyrus met uitleg is in de UB aanwezig [2] (zie Figuur 1).

Elk jaar vermeldt de Inspecteur der Boekerij in zijn verslag hoeveel nieuwe werken aan de boekencollectie van het Genootschap zijn toegevoegd: series monografieën, dissertaties en rapporten die als geschenk of in ruil werden ontvangen. In 1970 waren dat 148 titels, in 1980: 72, in 1990: 51 en in 2000: 31. Men kan stellen dat er sinds het verschijnen van de catalogus van Mannoury in 1907 tweehonderd drieduizend werken aan de Boekerij zijn toegevoegd.

In 1968 is een catalogus verschenen van 17e-, 18e- en 19e-eeuwse handschriften van het Genootschap [3]. Hierover schrijft de Inspecteur der Boekerij in zijn jaarverslag over de periode april 1969 – maart 1970:

"Bijzonder vermelding verdient de studie van mevr. Yv. Dold-Samplonius "Die Handschriften der Amsterdamer Mathematischen Gesellschaft" gepubliceerd in het tijdschrift *JANUS* (Brill, Leiden) vol. 55 (1968) 241–303, waarvan de boekerij een overdruk ten geschenke ontving. Deze studie betreft 65 in de U.B. aanwezige manuscripten (bezit van het W.G.) uit de 17e, 18e en 19e eeuw, waaronder nagelaten papieren van Thomas Jan Stieltjes, een handschrift van A.B. Strabbe (de op-richte(r) van het W.G.) en de feestrede van A.

van der Swan op de 50e algemene vergadering van het W.G. (22 april 1829). Het oudste manuscript is uit 1603 (Jan Pietersz. Dou: "Den Hutspot der Geometrie"). Van alle manuscripten wordt uitvoerig titel en inhoud vermeld, met commentaar en bibliografische gegevens."

De meeste tijdschriften van het Genootschap worden verkregen in ruil met het Nieuw Archief voor Wiskunde. Tot 1986 zijn deze onder beheer geweest van de UB van de UvA. Vanaf 1986 heeft het Centrum Wiskunde & Informatica het beheer overgenomen voor wat betreft de toen lopende tijdschriften.

Inhoud van de Boekerij

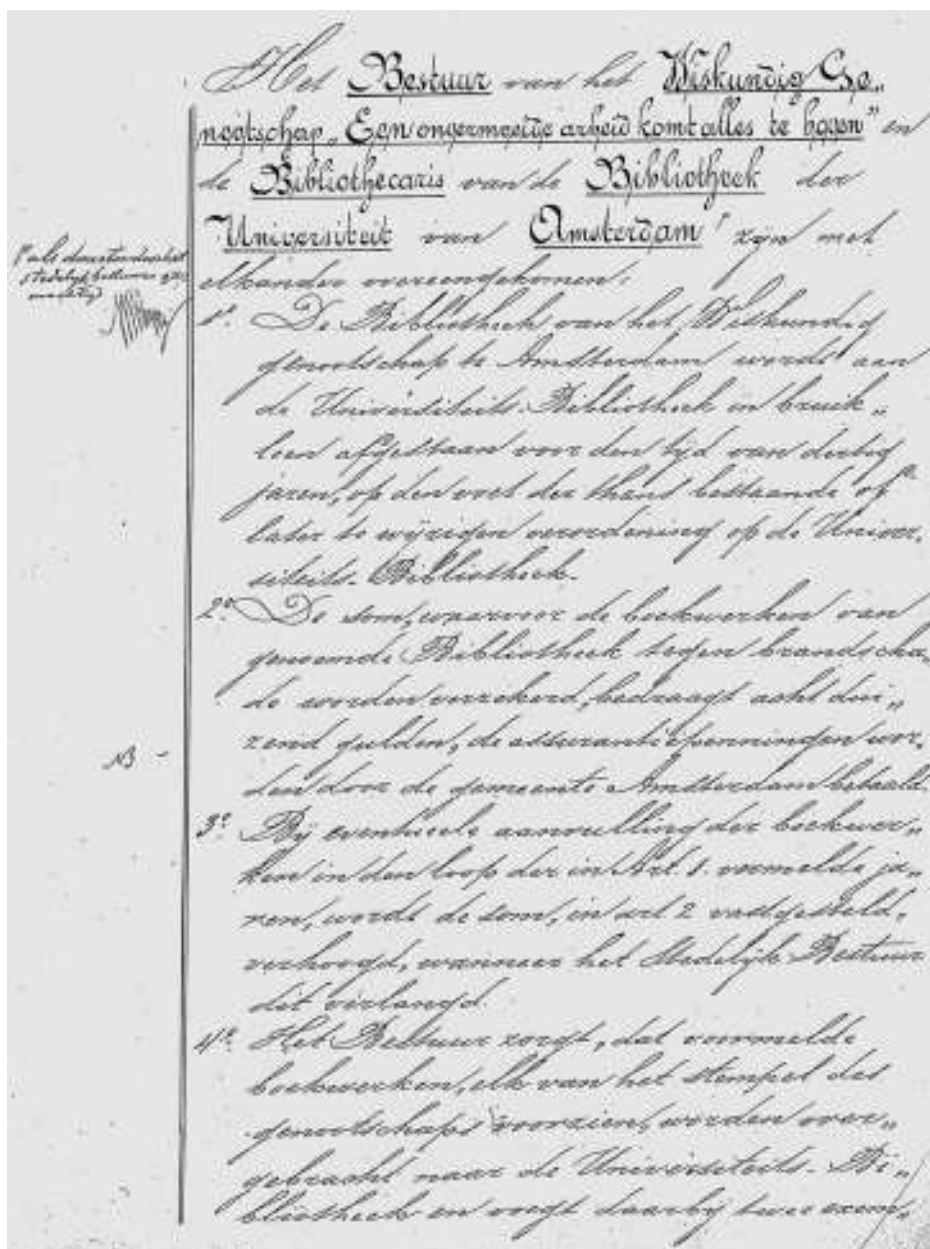
Volgens de Catalogus van Mannoury [5] was de Boekerij toentertijd opgesplitst

- Wiskunde in het algemeen
- Geschiedenis der wiskunde
- Philosophie der wiskunde
- Rekenkunde en getallenleer
- Stelkunde
- Differentiaal- en integraalrekening
- Functietheorie
- Bewerkingen met eenheden van algemeen aard
- Meetkunde (synthetisch)
- Analytische en infinitesimaalmeetkunde
- Andere soorten van meetkunde
- Werktuigkunde
- Natuurkunde
- Sterrekunde
- Toegepaste wiskunde
- "Niet-wiskundige werken, aan het Genootschap toebehorende"

Het eerste hoofdstuk bevat op pagina 20–27 verzamelde werken van o.a. Vieta, Archimedes, Simon Stevin, Descartes, Wallis, Christiaan Huygens, Johan Bernoulli, Newton, Euler, Abel, Lagrange, Riemann, Galilei, Fermat, Weierstrass, Galois, Laguerre, Tchebycheff, Beltrami en Sylvester. Deze volgorde van namen is bepaald door het jaar van verschijnen van de genoemde werken: die van Vieta zijn in 1646 verschenen, die van Sylvester in 1904.

In het hoofdstuk Rekenkunde vindt men een eerste druk van de "Disquisitiones arithmeticae" van Carl Friedrich Gauss (Leipzig, 1801) (figuur 2). In het Hoofdstuk Stelkunde vindt men Euler's Algebra in het Nederlands (in twee delen uitgekomen in 1773 en 1807). In het hoofdstuk Meetkunde vindt men vele uitgaven van de "Elementen" van Euclides en werken van Apollonius. Een deel van dit hoofdstuk is gewijd aan "Quadratuur van den cirkel" en "Driedeeling van den hoek". Het hoofdstuk "Toegepaste Wiskunde" bevat

- Assurantiewezen



Figuur 3 De overeenkomst uit 1880 tussen het Wiskundig Genootschap en de bibliotheek van de Universiteit van Amsterdam

- Handels- en politieke rekenkunde
- Interestrekening
- Lengte-, vlak- en inhoudsmaten
- wijnroei- en peilkunde
- Meetwerktuigen
- Schriftkunde

In Schriftkunde, tegenwoordig *Cryptologie* genoemd, wordt slechts één werk genoemd, nl.:

Buck, Fried. Joh., *Mathematischer Beweiss: dass die Algebra zur Entdeckung einiger verborgener Schriften bequem angewendet werden könne*, Königsberg 1772, 4^o. (U.B.)

De aanduiding "(U.B.)" geeft aan dat het werk eigendom is van de Universiteitsbibliotheek. Werken die eigendom zijn van het Genoot-

schap worden in Mannoury's Catalogus aangeduid met '(W.G.)'.

Toegankelijkheid van de Boekerij

De Boekerij wordt in de UB van de UvA bewaard, onder meer in het UB-magazijn (aan het Singel) en het IWO-magazijn (achter het AMC). Boeken van vóór 1900 kunt u alleen inzien op de prachtige locatie Oude Turfmarkt 129 in Amsterdam, schuin tegenover de Munt, waar de UvA sinds twee jaar haar Bijzondere Collecties heeft gehuisvest. Werken van na 1900 kunt u veelal op de verschillende andere locaties van de UvA lenen, al bestaan ook hierop weer uitzonderingen zoals tijdschriften, kranten en naslagwerken.

Het Bestuur van het Wiskundig Genootschap “Een onvermoeide arbeid komt alles te boven” en de Bibliothecaris van de Bibliotheek der Universiteit van Amsterdam als daartoe door het Stedelijk Bestuur gemachtigd zijn met elkander overeengekomen:

- De Bibliotheek van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam wordt aan de Universiteits-Bibliotheek in bruikleen afgestaan voor den tijd van dertig jaren, op den voet der thans bestaande of later te wijzigen verordening op de Universiteits-Bibliotheek.
- De som, waarvoor de boekwerken tegen brandschade worden verzekerd, bedraagt acht duizend gulden, de assurantiepenningen worden door de gemeente Amsterdam betaald.
- Bij eventuele aanvulling der boekwerken in den loop der in Art. 1 vermelde jaren, wordt de som, in art. 2 vastgesteld, verhoogd, wanneer het Ste-

delijk Bestuur dit verlangd.

- Het Bestuur zorgt, dat voormelde boekwerken, elk van het stempel des Genootschaps voorzien, worden overgebracht naar de Universiteits-Bibliotheek en voegt daarbij twee exemplaren van den gedrukten en geschreven catalogus, waarin alle werken zijn aangehaald, die in bruikleen worden overgedragen, waarvan één exemplaar, door het Bestuur geteekend, op de Bibliotheek, het andere, door den Bibliothecaris geteekend, bij het Bestuur blijft berusten.
- De Bibliothecaris draagt zorg, dat de boeken van voornoemde Bibliotheek zoodanig bij elkander worden geplaatst, dat deze Boekerij een afzonderlijk geheel blijve.
- In en buiten de lokalen van de Universiteits-Bibliotheek wordt het gebruik der boeken aan ieder vergund. De leden van het Genootschap behouden

hunne rechten op het gebruik der Boekerij, hun bij de statuten van het genootschap verzekerd.

- Deze overeenkomst wordt na afloop van den in Art. 1 bepaalden termijn, telkens voor een gelijk aantal jaren vernieuwd, indien er een jaar te voren geen opzegging heeft plaats gehad.
- Het Bestuur verklaart, dat het van de bepalingen in de Art. 1783 en 1788 van het burgerlijk wetboek afstand gedaan heeft.

Aldus in duplo geteekend

Amsterdam, den ?? October 1800 en tachtig

De Bibliothecaris (was getekend) H.C. Rogge

Het Bestuur van het Wiskundig Genootschap (was getekend) A.J. van Pesch Voorzitter en N.P. Kapteyn Secretaris

Tekst van de overeenkomst van het toenmalige WG met de Bibliotheek van de Universiteit van Amsterdam betreffende plaatsing van de Boekerij bij de Bibliotheek van de Universiteit van Amsterdam (Figuur 3).

Voor inzage en lenen dient men over een bibliotheekpas te beschikken. Deze kost 25 euro per jaar, maar is gratis voor studenten en medewerkers van Nederlandse universiteiten en de KNAW. Het KWG onderzoekt de mogelijkheid om ook zijn leden die niet tevens lid zijn

van een universitaire gemeenschap gratis toegang te geven tot de UB en daarmee tot de Boekerij.

Dankwoord

Ik ben Hendrik Lenstra erkentelijk voor zijn wiskundig-

bibliotheekadviezen en dank Cor Baayen, Astrid Balsem (adjunct-conservator van de Bijzondere Collecties van de Universiteitsbibliotheek van de UvA) en Ay Ong (bibliothecaris van de Bibliotheek van het Centrum Wiskunde & Informatica), voor informatie en ondersteuning bij het schrijven van deze tekst.

Referenties

- 1 Cor Baayen, “WISKUNDIG GENOOTSCHAP” 1778-1978: some facts and figures concerning two centuries of the Dutch Mathematical Society “Een onvermoeide arbeid komt alles te boven”, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) 26(1978)177-205. (Beschikbaar via www.wiskgenoot.nl onder “Wat is het KWG” – “Geschiedenis”.)
- 2 Arnold Buffum Chase [with contributions by Henry Parker Manning et al.], *The Rhind mathematical papyrus: free translation commentary and selected photographs, transcription, transliterations, literal translations*, 2 delen, Oberlin: Mathematical Association of America, 1927-1929.
- 3 Yvonne Dold-Samplonius, *Die Handschriften der Amsterdamer Mathematischen Gesellschaft, Janus* (Brill, Leiden), 55(1968)241-303.
- 4 Marius van Haaften, *Het Wiskundig Genootschap, zijn oudste geschiedenis, zijn werkzaamheden en zijn beteekenis voor het verzekeringswezen*, P. Noordhoff, Groningen, 1923.
- 5 Gerrit Mannoury, *Systematische Catalogus van de Boekerij van het Wiskundig Genootschap “Een onvermoeide arbeid komt alles te boven” te Amsterdam tevens bevattende de wiskundige werken toebehoorende aan de Universiteits-Bibliotheek der Gemeente Amsterdam*, Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1907. (Beschikbaar via www.wiskgenoot.nl onder “Wat is het KWG” – “Geschiedenis”. De Catalogus is 50MB groot.)
- 6 *Revue semestrielle des publications mathématiques*: rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap, 1(1893)-39(1934). Omstreeks 1932 opgegaan in het “Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik”, het latere *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*.
- 7 De Statuten van het KWG zijn beschikbaar via www.wiskgenoot.nl onder “Wat is het KWG” – “Statuten”.

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragswetenschappen, Instituut ELAN,
Universiteit Twente,
Postbus 217
7500 AE Enschede
n.c.verhoef@utwente.nl

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut
Universiteit van Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
F.Verhulst@uu.nl

Geschiedenis

Hans Freudenthal als docent en collega

Hans Freudenthal heeft een belangrijke invloed gehad op de ontwikkeling van het basis wiskundeonderwijs. Niet minder belangrijk was zijn activiteit als docent en onderzoeker gedurende tientallen jaren op het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Hoe waren toen zijn ideeën over onderwijs, hoe was hij als collega en hoe waren zijn colleges? Nellie Verhoef en Ferdinand Verhulst interviewden voormalige collega's en studenten van Freudenthal.

Freudenthal is in Nederland vooral bekend om zijn ideeën over wiskundendidactiek. Sprak hij er alleen over of handelde hij er ook naar?

Docent en didacticus

Sprak Freudenthal met wiskundigen over zijn opa-ervaringen? Wat bracht hem tot zijn didactische ideeën?

Duistermaat: Toen hij rond 1970 gegrepen werd door het onderwerp wiskunde in het basisonderwijs sprak hij er ook meteen veel over.

Van der Kallen: Vermoedelijk kwam die onderwijsfilosofie pas veel later in zijn carrière.

Kalmijn: Op het Mathematisch Instituut gebeurde dat niet, maar wel aan tafel en bij feestjes. Hij vertelde dan over zijn wandelingen met kleinzoon Bastiaan langs het Amsterdam-Rijnkanaal. Ook discussieerde hij veel met zijn vrouw die zich bezig hield met het Jenaplanonderwijs. Freudenthal vertelde me rond 1970 dat hij dacht "Mijn wiskunde droogt op, zal ik geschiedenis van de wiskunde gaan doen of didactiek." Het werd didactiek, daar had hij al tientallen jaren eerder belangstelling voor getoond. Zo was hij betrokken bij de opzet van de lerarenopleiding. Lemmens: Ik leerde Freudenthal pas goed kennen tijdens mijn promotie-onderzoek vanaf

1965. Bij etentjes met binnen- en buitenlandse bezoekers sprak hij niet over wiskunde, maar over andere onderwerpen. Vanaf de jaren zestig vertelde hij heel enthousiast over zijn ideeën en ervaringen aangaande de didactiek van de wiskunde.

Springer: Met mij heeft hij nooit over die ervaringen gesproken, maar ik weet dat hij in Amsterdam in de jaren dertig al geïnteresseerd was in onderwijs kwesties. Hij kwam er bij zijn kinderen mee in aanraking, zijn vrouw speelde misschien ook een rol als voorvechtster van Jenaplanonderwijs.

Stienstra: Naar mijn weten begon hij rond 1970 over deze ervaringen te praten. Ik herinner me een lezing in het Akademigebouw over het getalbegrip waarbij vertelde over vogels die een idee leken te hebben over het (juiste) aantal eieren in hun nest en ook sprak over het rekenen van zijn kleinzoon.

Checkte hij bij wiskundigen zijn ideeën over wiskundeonderwijs?

Kalmijn: Nee, dat waren gescheiden werelden, hij stapte zo van de ene in de andere. Springer: Daar heeft hij met mij nooit over gesproken.

Probeerde hij zijn onderwijsfilosofie ook te implementeren in het onderwijs op de univer-

siteit? Hoe gaf hij zelf onderwijs, waren zijn colleges te volgen?

Duistermaat: Nee, van dat implementeren was niets te merken, maar zijn stijl van college geven was prachtig. Zijn college Lineaire Algebra won mij voor de wiskunde (in die tijd hadden we meerdere hoofdvakken en kozen pas later). Het was axiomatisch opgebouwd en mooi van structuur. Ik denk dat dat voor de gemiddelde student wel moeilijk was. Het bijbehorende dictaat was glashelder. Ik heb het idee dat de stof voor Freudenthal een grote vanzelfsprekendheid had. Hij was zo gewend aan bepaalde inzichten en ook basisvaardigheden dat hij zich niet kon voorstellen dat iemand die niet had. Rekentafels oefenen, niet nodig. Die kende je gewoon. Toch is het de vraag of hij het met de huidige ontwikkeling van het rekenonderwijs eens zou zijn geweest. Begrip stond bij hem bovenaan en ook dat het begrip aansluit bij de beleavingswereld van het kind. Er moest echter wel feedback zijn, hij voerde niet voor niets werkcollege's in, er moest interactie met de practicumleiders komen. Een stelregel van hem was: wiskunde is een doevak.

Van der Kallen: Eind jaren zestig was ik zijn assistent en later een collega. Hij vond het practicum bij zijn colleges erg belangrijk, daar stond hij helemaal achter. Voor het nakijken van werk zorgde hij dat er mankracht beschikbaar was, zijn opgaven voor studenten klopten altijd prima. Het was duidelijk dat hij bij zijn onderwijs van te voren het niveau gekozen had met een constante,



Foto: Jan Stegeman, 17 januari 1963

Figuur 1 Freudenthal houdt een toespraak bij ingebruikname van de computer op de rekenafdeling, Boothstraat 1c, Utrecht

tamelijk hoge moeilijkheidsgraad. Hij stond ver boven de stof en ook het dictaat was voor een groot deel moeilijk.

Kalmijn: Nee, die didactiek kwam pas later. Als je een goede student was kon je hem volgen, voor de gemiddelde studenten was hij al zeer moeilijk. Zulke studenten waren ook bang om met hem te praten. Als student-assistent merkte ik dat als hij op het practicum kwam en rondliep, een aantal studenten ging werken aan een vraagstuk dat ik al besproken had. Als hij bij college vragen aan de zaal stelde, gaf meestal niemand antwoord, men was geïntimideerd. Wat bij hem als triviaal werd gepresenteerd vergde vaak twee bladzijden uit een boek. Freudenthal had uitgesproken ideeën over de eisen waaraan studenten moesten voldoen en hij stelde snel vast: die is knap, die is dom. Dat deed hij trouwens met iedereen, ook met ministers en hoge ambtenaren. Interessant is dat bij een mondeling tentamen, de student geen idee had of het goed of slecht ging. Het ging hem niet om de antwoorden, maar om het mee kunnen denken van de student. Zo waren een aantal standaardvragen van hem bekend. Ik maakte hem daarop attent, waarop hij zei: "Ik varieer niet de vragen, maar de antwoorden." Lemmens: Nee, hij implementeerde zijn onderwijsfilosofie niet. Actieve studenten die vragen stelden, die hadden wat aan zijn colleges. Uit zichzelf zou hij niet door herhaling iets verduidelijken. Overigens gaf hij in mijn tijd geen verplichte colleges. In mijn eerste jaar (1960–1961) was hij gastdocent in de VS. Stienstra: Zijn colleges 'Structuren van de Wiskunde' in het eerste en tweede jaar wa-

ren prachtig, voor de gemiddelde student mischien aan de moeilijke kant, maar wel een geweldige uitdaging. Van een speciale didactische aanpak was niets te merken, maar hij heeft wel een voor die tijd nieuw iets ingevoerd: practica en proefwerken die voorafgingen aan de tentamens. Het was levendig. Ik herinner me hoe we bij het laatste werkcollege werden overvallen met de opdracht dat iedere student een kort praatje moest houden over zijn favoriete stelling. Daarvoor kregen we een paar minuten voorbereidingstijd. Strooker: In zijn colleges en zijn dictaten zaten zeer grote gaten die je dan zelf moest invullen. Dat was voor veel studenten te moeilijk, maar als je dat lukte werd je daar een echte wiskundige van.

Gaf hij wel eens les op school?

Kalmijn: Hij gaf een aantal lessen op een basisschool.

Lemmens: Hij bezocht basisscholen en dan leek het of hij dat al jaren gedaan had.

Springer: Hij hield voordrachten voor leraren, ging later naar scholen toe, maar stond nooit echt voor de klas in basisschool of vwo.

Bestuurder

Waarover maakte hij zich druk in de wandelingen?

Duistermaat: Hij was zeer betrokken bij wat er op de universiteit en maatschappelijk gebeurde en verbond daar ook activiteiten aan. Zo schreef hij jarenlang columns voor De Groene en NRC Handelsblad.

Van der Kallen: Hij vond dat hij overal verstand van had.

Kalmijn: Buiten het Mathematisch Instituut

Hans Duistermaat (1942) studeerde van 1959–65 wis- en natuurkunde aan de UU en was student-assistent. Hij deed promotie onderzoek bij Günther Klaus Braun; promoveerde na het onverwachte overlijden van Braun bij Freudenthal in 1968. Hij is hoogleraar aan de UU sinds 1974.

Piet Lemmens (1943), student UU 1960–65, was student-assistent en hierna tot zijn pensioen in dienst van de UU; hij promoveerde in 1969 bij Freudenthal op een onderwerp uit de topologie.

Wilberd van der Kallen (1947), student UU 1965–69, was in zijn 2e studiejaar student-assistent bij het college 'Structuren' van Freudenthal, promoveerde bij Tonny Springer in 1973 en van 1969–2009 in dienst van de UU.

Leo Kalmijn (1932), studie wis- en natuurkunde 1951–58, was student-assistent en van 1958–97 in dienst van de UU.

Tonny Springer (1926), studie in Leiden 1945–51, promoveerde in 1951 in Leiden bij H.D. Kloosterman, naar de UU in 1955, eerst als lector, later hoogleraar tot pensioen in 1991.

Jan Stienstra (1950), studeerde van 1969–73 aan de UU, kende Freudenthal als student en promovendus, promoveerde in 1978 bij Jan Strooker en Spencer Bloch.

Jan Strooker (1932) studeerde in Leiden en kwam in 1962 naar de UU. Promoveerde bij Tonny Springer in 1965, hierna in dienst van de UU tot pensioen in 1997. In 1975 lector en daarna hoogleraar.

bemoeide hij zich overal mee, maar daarin was hij zeer zakelijk. Zijn werkkamer had een bureau en een zitje. Bij een bespreking gebruikte hij altijd het zitje, maar de besprekingen waren heel snel voorbij. Hij deed altijd alles tegelijk en doorbrak graag bureaucratische regels.

Lemmens: Over van alles. Wil van Est zei een keer tegen mij: "Freudenthal zoekt de problemen op."

Springer: Hij was altijd met van alles bezig, onderzoek, onderwijs, politiek. Ik had de indruk dat men bij NRC Handelsblad zijn columns over onderwijszaken erg kritisch vond. Strooker: Hij was heel alert op alles wat er binnen en buiten het Instituut gebeurde en speelde daar meteen op in.

Probeerde hij zijn zin door te drijven als hij dat nodig vond?

Duistermaat: Hij was een krachtige tegenstander met veel flair.



Foto: Jan Stegeman, 1 mei 1966

Figuur 2 Bouw van het Mathematisch Instituut, Utrecht, De Uithof

Van der Kallen: Hij was een dominante persoonlijkheid, maar zijn standpunten en zijn meningen waren wel goed doordacht. Er is een apocrief verhaal over een aangekondigde maatregel van het Ministerie die hem niet beviel. Hij pakte de telefoon en zei: "Dit wijzig jullie of ik kom naar Den Haag."

Kalmijn: Jazeker. Het Mathematisch Instituut zat vroeger, rond 1960, in het centrum van Utrecht (Boothstraat) en had daar zeer weinig ruimte. Er werd bijvoorbeeld college gegeven in een dansschool. De secretaris van de universiteit, Des Tombes, verzekerde Freudenthal dat er voor nieuwjaar in De Uithof met de bouw van een andere, grotere ruimte voor het Instituut zou worden begonnen. Freudenthal antwoordde daarop dat als de belofte niet waargemaakt zou worden, hij met een deel van het Instituut in de kanunnikentoren (rond 1400 achter de Dom gebouwd, nu Facultyclub) zou trekken. De bouw was op 1 januari 1960 nog niet begonnen, die begon pas in 1966, en Freudenthal verhuisde samen met de bibliotheek van zijn Instituut naar de kanunnikentoren.

Lemmens: Hij was gewend gelijk te krijgen, hoogleraar zijn in die tijd was natuurlijk ook iets anders. Wat hem misschien ook overwicht gaf was dat niets hem moeite scheen te kosten.

Springer: Dat viel mee. Hij schoot wel eens uit zijn slof, maar hij dacht en handelde niet hiërarchisch.

Strooker: Op hoofdpunten, ja, maar hij liet je het zelf invullen. Hij had bijvoorbeeld jarenlang groepentheorie gegeven en daar ook een

dictaat over geschreven. Toen ik ook over dat onderwerp college wilde geven kwam ik bij hem om inlichtingen en gaf hij me zijn dictaat mee. Ik zag daar wel wat in, maar wilde ook heel andere dingen doen. Weer bij Freudenthal vroeg hij naar mijn plannen en ik vertelde die. "Dat bijt elkaar niet," zei hij, "ga je gang." Dat was voor mij als jonge docent heel prettig en we gaven toen parallel college in dezelfde maanden onder dezelfde college titel.

Onderzoeker

Waar ging zijn hart naar uit in de wiskunde?

Duistermaat: Hij kwam uit Berlijn naar Nederland voor de topologie, later deed hij belangrijk werk op het gebied van Lie-algebra's en Liegroepen. Zijn breedheid blijkt ook uit een prachtig college Banach- en Hilbertruimtes dat hij gaf. Heel opmerkelijk is zijn activiteit als student toen hij voor de *Fortschritte der Mathematik* artikelen recenseerde. Hij besprak een moeilijk en grensverleggend artikel van Hermann Weyl zeer helder en met aandacht voor alle essentiële punten. Heel knap! Toen hij didactiek ging doen wuifde hij soms zijn wiskundige verleden een beetje weg. "Het was niet zo belangrijk wat hij daar in gedaan had." Dat is niet juist. Hij kon snel tot de kern van een onderwerp doordringen en dan een aantal nieuwe resultaten vinden. Van der Kallen: Hij hield zich met veel dingen bezig, maar gaf dan aan de verschillende onderwerpen een beperkte tijd. Aan dat plan hield hij zich.

Kalmijn: Liegroepen vooral, maar ook de grondslagen van de wiskunde. Later bedacht

hij een kosmische taal waarbij logica een belangrijke rol speelde. Zijn belangstellingen wisselden sterk. Over zijn wiskundig werk was hij in elk geval te bescheiden.

Lemmens: Hij promoveerde bij Hopf op topologische groepen. Later leek het alsof hij wiskunde erbij deed, zijn hart lag bij zoveel dingen. Bij een tv-interview vroeg Netty Rosenfeld hem: "Wat is uw belangrijkste werk?" Toen liet hij een foto van zijn gezin zien.

Springer: Hij was in de eerste plaats meetkundige. Hij keek niet neer op het handwerk, het rekenen. De studenten vielen daarentegen vaak voor het abstracte en voelden niet zoveel voor het handwerk.

Stienstra: Van oorsprong was hij topoloog, later deed hij Liegroepen, maar hij was vooral breed geïnteresseerd. Zo vond ik in mijn middelbare schooltijd in onze dorpsbibliotheek het boek *Wiskunde in wetenschap en dagelijks leven* van Freudenthal, waarin hij de vraag bekeek of met de toen bekende regels voor het combineren van de vier basisaminozuren in DNA, al die genetische informatie kon worden gecodeerd.

Wie waren zijn echte vrienden op de UU?

Kalmijn: Hij had veel contacten, maar op de UU voorzover ik weet geen vrienden.

Springer: Misschien Minnaert, hij kende echter veel mensen.

Tot besluit

De collega's en oudstudenten van Hans Freudenthal laten een rijk geschakeerd beeld zien van een bevlogen man met passie voor zijn vak, wiskunde. Gedurende zijn leven is zijn belangstelling langzaam verschoven van het beoefenen van wiskunde naar het leren en onderwijzen ervan. Niet voor niets typeert hij zijn gezin als zijn belangrijkste werk, zijn vrouw met haar expertise op het gebied van het Jena-planonderwijs en zijn kleinzoon als een leer gierig kind.

De collega's op het Mathematisch Instituut zijn het er echter over eens dat hij daarbij zijn bijdragen in het verleden aan de wiskunde zelf ging onderschatten. Zowel collega's en wiskundestudenten als wiskundeleraars heeft hij geïnspireerd met zijn visie op betekenisvolle wiskunde.

Tot op de dag van vandaag is zijn invloed onmiskenbaar in binnen- en buitenland. Zo heeft ieder zijn uitgesproken herinnering aan Hans Freudenthal.



Erik Jan van Leeuwen

Faculteit Wiskunde & Informatica

TU Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

e.j.v.leeuwen@tue.nl

Onderzoek

Bij benadering optimaliseren

Het is niet altijd nodig een probleem precies op te lossen: vaak is een benadering van het antwoord goed genoeg. De kunst is om snel en simpel te rekenen, en toch nauwkeurig genoeg te zijn. Erik Jan van Leeuwen won met een voordracht over zijn promotie-onderzoek tijdens het European Congress of Mathematics in 2008 de Philips Wiskundeprijs.

Praktische problemen in bijvoorbeeld draadloze netwerken, computationele biologie, of cartografie kunnen vaak gemodelleerd worden door een combinatorisch optimaliseringsprobleem op een verzameling meetkundige objecten te definiëren. Het berekenen van de optimale oplossing van veel optimaliseringsproblemen is NP-moeilijk en soms is ook een benadering van dit optimum moeilijk te vinden. Echter, als de onderliggende structuur van het optimaliseringsprobleem een verzameling meetkundige objecten is, dan blijkt het probleem meestal makkelijk exact op te lossen of goed te benaderen. In

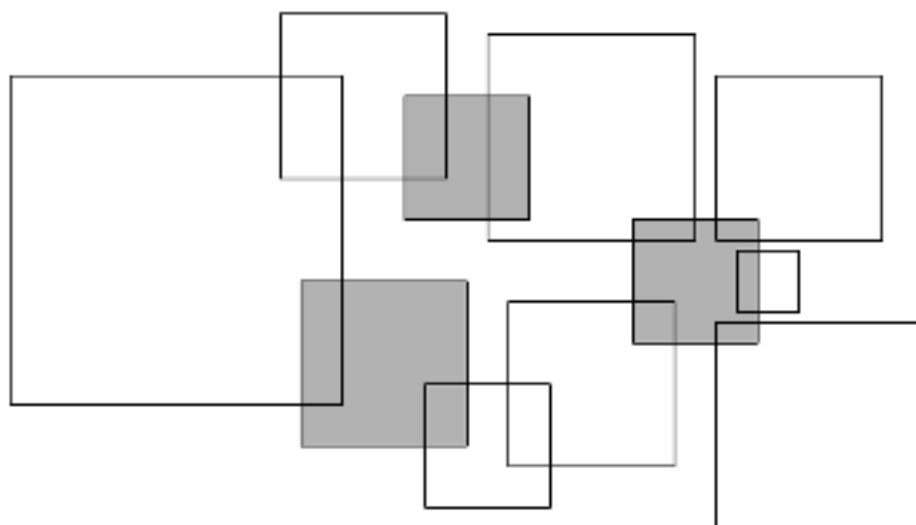
dit artikel bekijken we of het optimum te benaderen is van één van die moeilijke optimaliseringsproblemen op verzamelingen meetkundige objecten, het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem. In het bijzonder onderzoeken we wat de invloed van de vorm en de structuur van de objecten op de benaderbaarheid is.

Meetkundige modellen

Een eenvoudig maar doeltreffend model voor draadloze netwerken ziet iedere zender als een punt in het vlak en het zendbereik van de zenders als een meetkundige vorm rond

dit punt. Idealiter zijn deze vormen schijven, wat leidt tot het populaire schijvenmodel voor draadloze netwerken [11]. Dit meetkundige model is behulpzaam bij het verbeteren en optimaliseren van de configuratie van het netwerk. Klassieke combinatorische optimaliseringsproblemen zoals het kleuringsprobleem, het vinden van een grootste onafhankelijke deelverzameling, et cetera, zijn relevant in deze context om bijvoorbeeld frequentietoekenning of ethertoegang te bestuderen [11]. We zullen laten zien dat het meetkundige model zoals hierboven beschreven zeer handig is bij het vinden van een goede oplossing van dit soort problemen.

Er zijn twee redenen om juist dit probleem te bekijken. Ten eerste is het probleem zeer relevant in draadloze netwerken, bijvoorbeeld omdat een dominerende deelverzameling bij



Figuur 1 Een verzameling vierkanten. De grijze vierkanten vormen een kleinste dominerende deelverzameling van deze vierkanten.

het routeren van berichten in het netwerk kan ondersteunen (zie bijv. [19]). Omdat een bericht routeren een apparaat extra batterijkraft kost, is bij voorkeur een zo klein mogelijk aantal apparaten in het netwerk hier mee bezig. Het berekenen van een kleinste dominerende deelverzameling is in de praktijk dus van groot belang.

De tweede reden om het probleem te bekijken is dat het een interessante wiskundige uitdaging biedt. Zoals zal blijken, hebben zowel de vorm als de structuur van de meetkundige objecten een doorslaggevende invloed op de oplosbaarheid en berekenbaarheid van het probleem.

Benaderbaarheid

Centraal bij het onderzoek naar de oplosbaarheid en berekenbaarheid van combinatorische optimaliseringsproblemen staat vaak de vraag naar polynomiale berekenbaarheid. Dat wil zeggen, de vraag of een optimale oplossing voor het probleem berekend kan worden met een algoritme dat hooguit een polynomiaal aantal stappen nodig heeft (polynomiaal in de grootte van het probleem). Een groot aantal optimaliseringsproblemen heeft inderdaad een dergelijk polynomiaal algoritme, zoals bijvoorbeeld het kortste-padprobleem [18].

Er zijn echter ook veel problemen waarvoor geen polynomiaal algoritme bekend is, maar alleen algoritmen die exponentieel veel rekenstappen vergen. Jarenlang onderzoek naar deze zogenaamde *NP-moeilijke* problemen heeft nog geen hoop gewekt dat een polynomiaal algoritme voor deze problemen bestaat [9]. De NP-moeilijke problemen zijn

zelfs equivalent, want het bestaan van een polynomiaal algoritme voor één NP-moeilijk optimaliseringsprobleem betekent dat er een polynomiaal algoritme bestaat voor *alle* NP-moeilijke problemen. Dit is het befaamde $P=NP$ vraagstuk [10].

Helaas valt ons probleem van de kleinste dominerende deelverzameling ook in de categorie van NP-moeilijke problemen. NP-moeilijkheid kan bewezen worden voor verzamelingen van zelfs de simpelste tweedimensionale meetkundige vormen, zoals elkaar slechts rakende schijven of vierkanten van gelijke grootte [4].

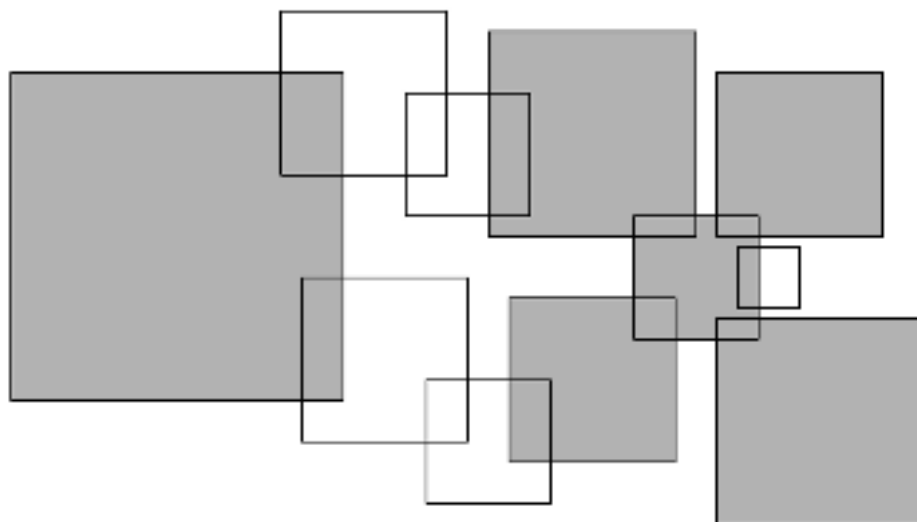
Om dit probleem toch aan te pakken met polynomiale algoritmen, staan we toe dat het door het algoritme gegeven antwoord een (hopelijk kleine) foutmarge kent ten opzichte van het optimale antwoord. De grootte van deze foutmarge noemen we de *benaderingsfactor* van het algoritme en de beste factor die behaald kan worden bepaalt de *benaderbaarheid* van het probleem.

De benaderbaarheid van optimaliseringsproblemen geeft de mogelijkheid om verschillende categorieën van NP-moeilijke optimaliseringsproblemen te onderscheiden (zie [2] voor een overzicht). Zo hebben veel problemen een algoritme met een constante benaderingsfactor. Dat wil dus zeggen, in polynomiaal veel stappen wordt een antwoord gevonden dat hooguit een constante multiplicatieve factor van het optimale antwoord af ligt. Voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op schijven van gelijke grootte bestaat bijvoorbeeld een simpel benaderingsalgoritme dat een benaderingsfactor van 5 haalt [15].

Idealiter kan algoritmisch een oplossing gevonden worden die willekeurig dicht bij het optimum ligt, ofwel een dominerende deelverzameling die minder dan $1 + \epsilon$ keer het aantal objecten bevat dan het optimum, voor iedere willekeurige $\epsilon > 0$. Uiteraard neemt het aantal benodigde rekenstappen (de looptijd) van het algoritme toe naarmate ϵ kleiner gekozen wordt. Is echter voor iedere vaste waarde van ϵ de looptijd polynomiaal, dan hebben we een *polynomial-time approximation scheme* of *ptas* verkregen. Uiteraard heeft ieder optimaliseringsprobleem dat een ptas heeft ook een constante-factor benaderingsalgoritme. Er zijn echter optimaliseringsproblemen die wel een constante-factor benaderingsalgoritme hebben, maar geen ptas, tenzij $P=NP$ [1].

Voor het berekenen van de kleinste dominerende deelverzameling op een verzameling van n schijven of vierkanten van *gelijke grootte* kan daadwerkelijk een ptas gegeven worden [12, 20]. Het betreffende algoritme vindt in $n^{c/\epsilon}$ tijd (voor zekere constante $c > 0$) een oplossing die hooguit een factor $1 + \epsilon$ van het optimum ligt. Onder bepaalde aannamen is de looptijd van deze ptas zelfs aantoonbaar niet meer te verbeteren [16, 20]!

Gezien deze resultaten voor schijven en vierkanten van gelijke grootte ontstaat de hoop dat ook voor schijven en andere objecten van *willekeurige grootte* een constante-factor benaderingsalgoritme of een ptas tot de mogelijkheden behoort. Echter, de technieken die gebruikt worden voor objecten van gelijke grootte blijken niet genoeg om een goed benaderingsalgoritme te krijgen voor objecten van willekeurige grootte, iets



Figuur 2 Dezelfde verzameling vierkanten als in Figuur 1. De grijze vierkanten vormen de kleinste $\leq$ -dominerende deelverzameling van deze vierkanten, waarbij voor de gebruikte relatie $\leq$ geldt dat $u \leq v$ dan en slechts dan als vierkant u even groot of kleiner is (qua oppervlak) dan v .

wat eerder wel voor verscheidene andere optimaliseringsproblemen kon worden aangetoond [6, 20]. Tot voor kort bestonden er zelfs geen specifieke benaderingsalgoritmen voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op objecten van willekeurige grootte. Daar brengen we hier verandering in.

Benaderingsalgoritme voor vierkanten

We tonen aan dat het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op vierkanten van willekeurige grootte een constante-factor benaderingsalgoritme heeft. We nemen aan dat de zijden van de vierkanten α -parallel zijn. Voor het berekenen van de benadering gebruiken we een generieke methode, die ook op andere meetkundige objecten werkt.

Omdat het lastig is om direct een benadering voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem te vinden, bekijken we het algemener. Definieer een binaire reflexieve relatie $\preceq$ op de verzameling vierkanten S . We zeggen dat vierkant v een vierkant $u \preceq$ domineert als $u \preceq v$ en u en v een niet-lege doorsnede hebben. Deze definitie leidt tot het kleinste $\preceq$ -dominerende deelverzamelingsprobleem, een duidelijke generalisatie van ons eerdere probleem (laat de relatie $\preceq$ alle paren van vierkanten bevatten om terug te keren naar de originele definitie).

Wij kiezen hier echter een andere relatie $\preceq$, waarbij voor alle $u, v \in S$ geldt dat $u \preceq v$ dan en slechts dan als vierkant u even groot of kleiner is (qua oppervlak) dan v . Zie Figuur 2. De reden hiervoor zal zo duidelijk worden.

We stellen nu het geheeltallige lineaire programma op van het kleinste $\preceq$ -dominerende deelverzamelingsprobleem:

$$z^* = \min \sum_{u \in S} x_u$$

zodanig dat

$$\sum_{v \in N_{\preceq}[u]} x_v \geq 1 \quad \forall u \in S$$

$$x_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in S$$

Hier is $N_{\preceq}[u]$ de verzameling vierkanten v die $u \preceq$ -domineren en x een $|S|$ -dimensionale vector met één coördinaat voor ieder vierkant in S . Voor iedere $u \in S$ geldt nu dat $x_u = 1$ dan en slechts dan als u deel uitmaakt van de dominerende deelverzameling.

Relaxeer het lineaire programma door de laatste eis ($x_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in S$) te vervangen door

$$x_u \geq 0 \quad \forall u \in S.$$

Los dit lineaire programma op (in polynomiale tijd [14]) en laat x^* een optimale oplossingsvector zijn en z^* het optimum. Merk nu op dat als $v \in N_{\preceq}[u]$, dat v dan tenminste één hoekpunt van u moet bevatten. Door de formulering van het gerelaxeerde lineaire programma betekent dit dat er tenminste één hoekpunt p van u moet zijn waarvoor

$$\sum_{v \in N_{\preceq}[u]: p \in v} x_v^* \geq 1/4.$$

Dat wil zeggen, er is een hoekpunt waar tenminste $1/4$ van x^* 'op' ligt. We noemen een dergelijk punt *zwaar bedekt*. Ieder vierkant bevat dus minstens één zwaar bedekt punt.

We maken nu gebruik van een zogenaamd ϵ -net. Laat een functie $w : S \rightarrow \mathbf{N}$ en een $\epsilon > 0$ gegeven zijn en laat $W = \sum_{v \in S} w(v)$. Dan is $R \subseteq S$ een ϵ -net als ieder punt p waarvoor $\sum_{v \in S: p \in v} w(v) \geq \epsilon W$, bevat is in een vierkant van R . Een reeds bekend resultaat [3, 5, 17] stelt dat voor iedere $\epsilon > 0$ zo'n ϵ -net R in polynomiale tijd gevonden kan worden (polynomiaal in $|S|$, $1/\epsilon$ en $\log \max_{v \in S} \{w(v)\}$), zodanig dat $|R| \leq c/\epsilon$ voor zekere constante $c > 0$.

Wij kiezen $w(u) = x_u^* |S|/z^*$ en $\epsilon = \frac{1}{4z^*}$. Met hulp van bovenstaande stelling berekenen we nu in polynomiale tijd een ϵ -net R . Dit is een dominerende deelverzameling, omdat voor ieder zwaar bedekt hoekpunt p geldt dat

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S: p \in v} w(v) &= \sum_{v \in S: p \in v} x_v^* |S|/z^* \\ &= (|S|/z^*) \cdot \sum_{v \in S: p \in v} x_v^* \\ &\geq |S|/(4z^*) \\ &= \epsilon W. \end{aligned}$$

Ieder zwaar bedekt hoekpunt is dus bevat in een vierkant van R . Ieder vierkant heeft een zwaar bedekt hoekpunt en heeft dus een niet-lege doorsnede met een vierkant uit R . Per definitie is R dan een dominerende deelverzameling.

Door de keuze van w en ϵ bevat het ϵ -net hooguit $4cz^*$ vierkanten. Maar hoe ver ligt z^* van het optimum van het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem? Stel D is een (kleinste) dominerende deelverzameling van S . Voor ieder hoekpunt van ieder vierkant in D identificeren we het grootste vierkant dat dit hoekpunt bevat. Laat D' de verzameling van al deze vierkanten zijn. Nu is het eenvoudig om in te zien dat $D' \cup D$ een $\preceq$ -dominerende deelverzameling is. Hieruit leiden we af dat $z^* \leq |D' \cup D| \leq 5|D|$.

We kunnen dus in polynomiale tijd een oplossing berekenen voor het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op vierkanten van willekeurige grootte die hooguit $20c$ keer zoveel vierkanten bevat als een optimale oplossing.

Uitbreidingen en generalisaties

Het idee om $\preceq$ -dominerende deelverzamelingen te gebruiken in combinatie met lineair programmeren en ϵ -nets is algemeen toepasbaar. 'Slechts' een juiste keuze van de relatie $\preceq$ en een aangetoonde bovengrens op z^* en de grootte van het benodigde ϵ -net volstaan voor het verkrijgen van een benaderingsalgoritme. Dit blijkt in veel gevallen mogelijk [7, 20]. Met dezelfde relatie $\preceq$ als hierboven geeft onze methode direct een $r(r+1)c$ -benadering als de objecten willekeurig grote reguliere veelhoeken met r hoekpunten zijn voor even waarden van r . Als r oneven en tenminste 5 is, dan zijn kleine aanpassingen aan de relatie $\preceq$ afdoende om een $2r(2r+1)c$ -benadering te krijgen. Door gebruik van een geheel andere relatie $\preceq$ te maken, kan zelfs een $(2r(r-2)+1)r^2c$ -benadering gevonden worden voor willekeurige grote convexe veelhoeken met r hoekpunten voor willekeurige waarden van r .

Het is interessant om op te merken dat deze algemene methode een minder goede benadering geeft naarmate het aantal hoekpunten van de veelhoeken toeneemt. Toepasbaarheid op schijven is misschien mogelijk, maar ligt op deze manier niet direct voor de hand. Of dit überhaupt mogelijk is, is een belangrijke open vraag.

Aan de andere kant is de beschreven techniek wel toepasbaar op verzamelingen schijven met een kleine beperking [7]. Stel dat voor ieder punt in het vlak het aantal schijven dat dit punt strikt bevat (d.w.z. het punt is bevat in het object, maar ligt niet op de rand) begrensd is door γ . De kleinste waarde van γ noemt men de *overdekkingsgraad* van de schijven. We kunnen aantonen dat onze methode een $c\gamma$ -benadering geeft, voor zekere constante c . Met een paar aanpassingen kunnen we bewijzen dat $c \leq 54$ en dat deze benadering in lineaire tijd gevonden kan worden. Bij een constante overdekkingsgraad is dit dus wederom een benadering binnen een constante multiplicatieve factor.

Middels geheel andere technieken kan in het geval van begrensde overdekkingsgraad zelfs een $(3+\epsilon)$ -benadering gevonden worden in polynomiale tijd, voor vaste waarden van $\epsilon > 0$ [7]. Dit is bijna de vurige gewenste ptas. Dit algoritme generaliseert eenvoudig tot an-

dere objecten, zolang deze maar voldoende op een schijf 'lijken'. Dit laatste kunnen we preciseren door bijvoorbeeld te eisen dat de ratio tussen de radius van de kleinste cirkel die een object omvat en de radius van de grootste cirkel die in het object bevat is, begrensd is door een constante. Een dergelijk object wordt *dik* genoemd.

Het algoritme geeft dus een benadering met een constante factor mits de objecten dik en convex zijn en begrensde overdekkingsgraad hebben. De restrictie van begrensde overdekkingsgraad is essentieel. Er bestaan namelijk verzamelingen dikke convexe objecten waarvoor onder redelijke aannamen geen polynomiaal algoritme bestaat dat een betere benaderingsfactor geeft dan $\ln |S|$ [7–8]. Zelfs als de vorm van de objecten maar een klein beetje afwijkt van de vorm van een schijf of van een vierkant geldt dit resultaat. Daarentegen is er een simpel polynomiaal algo-

ritme dat voor alle verzamelingen objecten S (ongeacht hun overdekkingsgraad en of ze dik of convex zijn) een benaderingsfactor van $1 + \ln |S|$ geeft [13].

Conclusie

Bovenstaande resultaten geven duidelijk aan dat zowel de vorm van de objecten als hun structuur de benaderbaarheid van het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem sterk beïnvloedt. Voor verzamelingen veelhoeken heeft het probleem een constante-factor benaderingsalgoritme, maar voor verzamelingen schijven is het nog onduidelijk of een dergelijk algoritme bestaat. Is echter de overdekkingsgraad van de schijven begrensd, dan is een constante-factor benadering wel mogelijk. Een duidelijke verklaring voor dit ogenschijnlijke verschil ontbreekt op dit moment. Daarnaast is er nog de grotere open vraag naar het bestaan van een ptas voor het

kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem op objecten van willekeurige grootte.

Zoals eerder gezegd komt de motivatie om naar het kleinste dominerende deelverzamelingsprobleem te kijken uit toepassingen in draadloze netwerken. Het gebruikte model en het gevonden benaderingsalgoritme combineert ideeën uit de meetkunde en de combinatorische optimalisering. Een dergelijke samensmelting tussen deze twee vakgebieden is ook zeer nuttig gebleken in onderzoek in bijvoorbeeld de computationele biologie en de cartografie. Dankzij dit brede scala aan relevante toepassingen zijn er nog veel openstaande vraagstellingen om te verkennen. ◀

Dankwoord

Dit artikel is gebaseerd op gezamenlijk werk met Thomas Erlebach (University of Leicester) [7] en werd deels ondersteund door het BSIC/BRICKS project.

Referenties

- Arora, S., Lund, C., Motwani, R., Sudan, M., Szegedy, M., "Proof Verification and the Hardness of Approximation Problems", *J. ACM* 45:3 (1998), pp. 501–555.
- Ausiello, G., Crescenzi, P., Gambosi, Kann, V., Marchetti-Spaccamela, A., Protasi, M., *Complexity and Approximation – Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- Chazelle, B., Friedman, J., "A Deterministic View of Random Sampling and Its Use in Geometry", *Combinatorica* 10:3 (1990), pp. 229–249.
- Clark, B.N., Colbourn, C.J., Johnson, D.S., "Unit Disk Graphs", *Discrete Math.* 86 (1990), pp. 165–177.
- Clarkson, K.L., Varadarajan, K.R., "Improved Approximation Algorithms for Geometric Set Cover", *Discrete Comput. Geom.* 37:1 (2007), pp. 43–58.
- Erlebach, T., Jansen, K., Seidel, E., "Polynomial-time Approximation Schemes for Geometric Intersection Graphs", *SIAM J. Comput.* 34:6 (2005), pp. 1302–1323.
- Erlebach, T., van Leeuwen, E.J., "Domination in Geometric Intersection Graphs" in Laber, E.S., Bornstein, C., Nogueira, L.T., Faria, L. (eds.) *Proc. LATIN 2008*, LNCS 4957, Springer-Verlag, Berlin, 2008, pp. 747–758.
- Feige, U., "A Threshold of $\ln n$ for Approximating Set Cover", *J. ACM* 45:4 (1998), pp. 634–652.
- Fortnow, L., "The Status of the P versus NP problem", *Comm. ACM* 52:9 (2009), pp. 78–86.
- Garey, M.R., Johnson, D.S., *Computers and Tractability – A Guide to the Theory of NP-completeness*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
- Hale, W.K., "Frequency Assignment: Theory and Applications", *Proc. IEEE* 68:12 (1980), pp. 1497–1514.
- Hunt, III, H.B., Marathe, M.V., Radhakrishnan, V., Ravi, S.S., Rosenkrantz, D.J., Stearns, R.E., "NC-Approximation Schemes for NP- and PSPACE-Hard Problems for Geometric Graphs", *J. Algorithms* 26:2 (1998), pp. 238–274.
- Johnson, D.S., "Approximation algorithms for combinatorial problems", *J. Comput. Syst. Sci.* 9:3 (1974), pp. 256–278.
- Khachiyan, L.G., "A Polynomial Algorithm in Linear Programming", *Soviet Math. Dokl.* 20:1 (1979), pp. 191–194.
- Marathe, M.V., Breu, H., Hunt, III, H.B., Ravi, S.S., Rosenkrantz, D.J., "Simple Heuristics for Unit Disk Graphs", *Networks* 25 (1995), pp. 59–68.
- Marx, D., "On the Optimality of Planar and Geometric Approximation Schemes" in *Proc. FOCS 2007*, IEEE, 2007, pp. 338–348.
- Pyrga, E., Ray, S., "New Existence Proofs for ϵ -nets" in Teillaud, M. (ed.) *Proc. SOCG 2008*, ACM, 2008, pp. 199–207.
- Schrijver, A., *Combinatorial Optimization – Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- Sivakumar, R., Das, B., Bharghavan, V., "An Improved Spine-Based Infrastructure for Routing in Ad Hoc Networks", in *Proc. Intl. Conf. Comput. Comm. Networks*, 1997.
- van Leeuwen, E.J., *Optimization and Approximation on Geometric Intersection Graphs*, Proefschrift, Universiteit van Amsterdam, 2009.

Nellie Verhoef*University of Warwick, Institute of Education**Westwood Campus, Canley**Coventry, CV4 7AL**United Kingdom**N.C.Verhoef@warwick.ac.uk***Column Wiskundigen in den vreemde**

Aan de bron van het wiskundig leren denken

Nellie Verhoef is vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit van Twente. Zij heeft educatief verlof en vult dat in door vier maanden te verblijven op de Universiteit van Warwick om daar samen te werken met David Tall, deskundige op het terrein van het wiskundig leren denken.

Wat zag ik er tegenop om alleen naar Engeland te gaan—vliegen, met de metro diep onder het drukke Londen door, de trein naar Coventry, dan nog een taxi en waar kom je uiteindelijk terecht? Wat viel het mee! Engelsen zijn aardig en vooral beleefd, ze helpen je overal mee, zelfs met het kopen van een kaartje uit de automaat. Op de campus, waar ik een prachtig appartement heb, valt de bewaking op. Overal staan mannen met gele lichtgevende jacks, alleen maar te kijken. In eerste instantie geeft dat een veilig gevoel. In tweede instantie vraag ik me af waarom ze er staan. Zou dat nodig zijn hier? Dubbeldeksbussen rijden af en aan. Bij het instappen doe je (liefst gepast) geld in een blikje en trekt een kaartje alsof je bij de bakker in de rij staat, best wel primitief. Wat betreft de treintarieven heb ik me ook verbaasd: een enkele reis is anderhalf keer duurder dan een retour. Waarschijnlijk wordt ervan uitgegaan dat, als je vertrekt, je op dezelfde manier terugkomt.

Ik ben in Warwick met het doel een artikel te schrijven — met een voldoende impactfactor, een maat die het gemiddelde aantal citaties weergeeft in artikelen die gepubliceerd zijn in sociaal-wetenschappelijke tijdschriften — over de professionele ontwikkeling van wiskundedocenten. Mijn onderzoeksvraag is als volgt. Wat is wiskundig-didactische kennis (*mathematical*

knowledge for teaching) en hoe kun je deze kennis verwerven?

Ik deel mijn werkkamer op de universiteit met Whi-Lie die volstrekt andere gewoontes heeft. De eerste dag dat ik 's morgens vroeg de kamer instap, deins ik terug vanwege de geur: Whi-Lie is op een kookplaatje eten aan het opwarmen, de ramen zijn dicht. Ze lacht vriendelijk en stelt zich voor: Whi-Lie, maar haar Engelse naam is Sarah.

Het Warwickse onderwijsinstituut is in de didactiekwereld van grote betekenis. Hier heeft Richard Skemp in 1971 het bekende Penguinboekje *The Psychology of Learning Mathematics* geschreven. Ik kreeg het ooit nog van mijn vader. In het modernogende instituut vinden internationale studenten en bezoekers probleemloos hun weg. De lerarenopleiding leeft (zoals alle lerarenopleidingen) van subsidies, maar weet op een slimme manier alles te combineren. Colleges zijn modulair van opzet en worden gegeven door gepromoveerde docenten. De studenten zijn behalve reguliere masterstudenten ook docenten die een certificaat willen halen via contractonderwijs. Veel energie wordt gestoken in werving van nieuwe studenten, vooral internationale studenten leveren geld op. Individuele leertrajecten worden digitaal bijgehouden, geëvalueerd en na een plenaire bespreking met betrokkenen bijgesteld. Vanwege de brede combinaties zijn relatief veel mensen bij een leertraject betrokken. In één bijeenkomst trof ik diverse ICT-deskundigen, e-learning deskundigen, mediadeskundigen, pedagogen, vakdidactici wiskunde, tutoeren, een dramadeskundige, een logopedist, een docent wetenschappelijk schrijven, een docent Engels, een bibliothecaris en een mastervoorlichter aan.

In de eerste week woonde ik een tweedaagse *Teacher Advanced Mathematics* (TAM) course bij. Zo'n 30 leraren worden ontvangen in een prachtig computerlokaal met een smartboard. De start van de cursus: sommen maken! Net als in Nederland vinden wiskundedocenten het heerlijk om in groepjes samen sommen te maken. Over de volgorde van de opgaven is goed nagedacht. Eerst moet de vijftigste term van de meetkundige rij (MR) gegeven door $3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, \dots$ worden gevonden. Dan wordt gevraagd de uitkomst van de som $3 + (3 \times 2) + (3 \times 2^2) + (3 \times 2^3) + \dots + (3 \times 2^{40})$ uit te leggen zonder gebruik te maken van de formule. Vervolgens moet je laten zien hoe je aan de formule $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ komt. Wat is de som van alle machten van 2 van 16 tot en met 8192? De serie opgaven eindigt met de vraag naar de uitkomst van de oneindige meetkundige reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{2^n}$. Vanuit het didactische perspectief start de serie met een vraag waar je altijd een antwoord op kunt vinden, bijvoorbeeld door alles uit te schrijven. Bij de tweede vraag word je aangezet tot generaliseren, een eerste stap naar abstractie. De derde vraag is nog abstracter. De vierde vraag is een toepassing en de laatste vraag is een aanzet tot exploratie.

Leuk om het werken van zo'n groep docenten te zien en te vergelijken met een groep Nederlandse wiskundedocenten. Net als in Nederland pakt de één het deductief aan en schrijft alles precies op, terwijl de ander inductief georiënteerd is en met wat losse flodders tot een oplossing komt. In no-time zijn

de rollen in de groep verdeeld. Voor het eerst vraag ik me af waarom dit eigenlijk méétkundige rijen worden genoemd. Het antwoord komt na de pauze vanzelf als de zeef van Sierpiński verschijnt, met de vraag welke rij hierbij (zie de figuur hieronder) hoort. Tot mijn verbazing wordt er niet gezamenlijk gereflecteerd op de opgaven, noch op het verschil in aanpak, noch op de herkenning in het eigen onderwijs.

In de pauze gaan de gesprekken, net als in Nederland, over de lage status van de docent. Ze moeten hard werken, en het aanzien daalt steeds verder. De onderlinge verschillen tussen scholen zijn groot, rijke scholen met in elk lokaal een smartboard tegenover arme scholen waarin 40 leerlingen in één lokaal zitten. De onderlinge contacten lijken bijna belangrijker te zijn dan de aangeboden leerinhoud. Maar ook de universiteit heeft haar belang. De werving vanuit de universiteit klinkt in mijn oren bijna opdringerig. Op de man af wordt gevraagd of docenten niet voelen voor een masterdiploma of, wat minder, een aantal cursussen waarbij weer certificaten gehaald kunnen worden. Ik zie de docenten zuchtend rondkijken: nee, ze hebben het al zo verschrikkelijk druk en hun collega's ook!

Kortom: ik vind in een ander land een instituut dat nauwelijks gericht is op specialisatie, en een TAM-cursus waarbij ik me afvraag wat er van mathematical knowledge for teaching terecht komt. Toch een voorrecht om zo even buiten de normale gang van alledag om, de tijd te krijgen om eens om je heen te kunnen kijken!



Steven Wepster

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

s.a.wepster@gmail.com

Geschiedenis

Ludolph van Ceulen in Hollandse kringen

In december van dit jaar is het vier eeuwen geleden dat rekenmeester Ludolph van Ceulen overleed. Op de webpagina www.ludolphvanceulen.nl is te zien welke activiteiten in het kader van het Van Ceulenaar plaatsvinden. Van Ceulens levensloop en wiskundige carrière worden hieronder beschreven door Steven Wepster.

Het waren roerige tijden in de Lage Landen bij de Noordzee. Het verzet tegen de Spaanse overheersing groeide en leidde op den duur tot de vorming van de Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden. Vooral na de Spaanse Furie te Antwerpen in 1574, maar ook al eerder trokken veel Vlamingen naar het noorden en zorgden daar voor een enorme intellectuele impuls. Leiden kreeg een eigen universiteit in 1575. Prins Maurits, zoon van de in 1584 vermoorde Willem van Oranje, behaalde belangrijke militaire successen met zijn modern geleid leger. Maurits had hierbij veel hulp van zijn vriend en vertrouweling Simon Stevin, een van de geïmmigreerde Vlamingen. Het was ook de tijd waarin de reken- en schermmeester Ludolph van Ceulen zich manifesteerde. Vierhonderd jaar na zijn overlijden blikken we terug.

Op 28 januari 1540 werd Van Ceulen geboren in Hildesheim (in het tegenwoordige Nedersaksen, ongeveer tussen Hannover en Göttingen). Over zijn jeugd en adolescentie weten we niet veel meer dan dat hij met zijn broer enige tijd in Antwerpen verbleef. Lang voor de grote intellectuele uittocht naar het noorden vertrok Van Ceulen al naar Delft. Blijkens een document in het Antwerps stadsarchief heeft Van Ceulen zich al in 1562 in Delft gevestigd als schermmeester;

naar eigen zeggen werd hij een paar jaar later ook rekenmeester [14]. Mogelijk heeft hij in Antwerpen contact gehad met rekenmeesters zoals Michiel Coignet, Jan Pauwels, en Bartholomeus Cloot. Cloot vestigde zich omstreeks 1574 eveneens in Delft. Zestien jaar later trouwde de weduwe van de toen overleden Cloot met Van Ceulen, die inmiddels weduwnaar was na het verlies van zijn eerste vrouw. Uit zijn beide huwelijken had Van Ceulen twaalf kinderen te onderhouden.

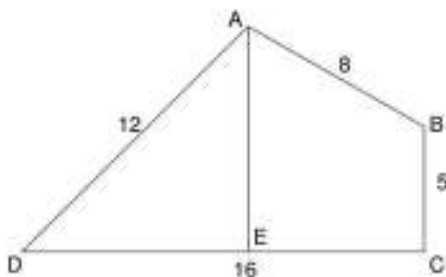
Rekenmeesters

Met een school voor rekenen én schermen in een van de belangrijkste steden van Holland vestigde Van Ceulen al snel de aandacht van kooplieden en regenten op zich. Schermen behoorde met paardrijden, musiceren en dansen tot de essentiële vaardigheden die elke jongeling van goeden huize zich behoorde eigen te maken. Daarnaast had de meester verstand van rekenen en interest (rente) en zodoende kon hij de vaders adviseren bij financiële aangelegenheden.

Rekenmeesters kwamen aan de kost door het geven van rekenles. Om voldoende inkomsten te hebben moest er reclame gemaakt worden. De concurrentie was groot en er waren nog geen algemeen aanvaarde maatstaven voor kwaliteit. Een veelgebruikt middel

in deze competitiestrijd was om aan concurrerende collega's vraagstukken voor te leggen, waarbij je dan hoopte dat je ze zelf wel op kon lossen maar de concurrentie niet. Soms werden zulke vraagstukken zelfs wel aangeslagen op openbare plaatsen. Zo bijvoorbeeld sloeg Willem Goudaen vraagstukken aan de kerkdeur te Haarlem, eenmaal in 1580 en nog eens in 1583. Hierdoor raakte hij verwikkeld in een ruzie met Klaas Pieterszoon van Deventer (ook wel bekend als Nicolaus Petri) en Ludolph van Ceulen. Alledrie hebben ze hun verhaal op schrift gesteld en uitgegeven, maar die van Goudaen is onvindbaar zodat we slechts op de getuigenissen van zijn tegenstanders kunnen afgaan.

Op het eerste pamflet uit 1580 loofde Goudaen een kan wijn uit voor het vinden van de hoogte van een gegeven vierhoek (zie Figuur 1). Op verzoek van de Amsterdamse notaris en poorter Hermannus Grapheus loste Petri het vraagstuk op en deed de uitwerking aan de opsteller toekomen, vergezeld van een vergelijkbare tegenopgave. Goudaen vond de ingediende oplossing onvoldoende, overigens zonder daarvoor inhoudelijke argumenten te geven of zelfs maar te zeggen dat de oplossing fout was. Ook loste hij Petri's tegenvraag niet op: in plaats daarvan nagelde hij die aan de kerkdeur alsof het een vraagstuk van hemzelf was! Dat bracht Petri ertoe om met enkele getuigen (waaronder Grapheus) in Haarlem om opheldering en de uitgelofte kan wijn te gaan vragen. Weer gaf Goudaen geen krimp. Dat kon Petri slecht



Figuur 1 Goudaens opgave. Gegeven: de lengte van de vier zijden, $AE \perp DC \perp BC$. Gevraagd: AE . Hint: het juiste antwoord luidt $AE = \sqrt{25 \frac{44215}{78961}} + 3 \frac{119}{562}$.

verkroppen, en hij merkte op “dattet zijne scherpsinnicheydt ghehelicken niet en betaemt / yemants werck te reproberen oft straffen / dan op conditie / dat hy metterdaet bewijse voor ooghen stelle ende wech neeme de faulten [...] wandt t’betaempt nymandt een ander te straffen in t’ghene hy selfs niet doen en can.” [8]

Aangezien Petri geen hoge pet op had van het oordeel dat Goudaen zelve over deze kwesties zou kunnen vellen, besloot hij zijn verweer met het inroepen van de hulp van de “Mathematische professoren vanden universiteit tot Leyden hoewel my onbekent” en verder van Stevin, Van Ceulen, de Alkmaarse burgemeester en vestingbouwer Adriaan Anthonisz., Coignet, en wie hem maar als gegeden wiskonstenaar voorkwam [8]. De enige die op dat moment voor mathematische professor door kon gaan was de extraordinarius Rudolf Snellius, vader van Willebrord.

Van Ceulens versie van de gebeurtenissen kunnen we lezen in zijn eveneens in 1584 gepubliceerde verslag [9]. Ludolph arriveerde op 21 juni 1583 in Haarlem. Aanvankelijk wilde Goudaen hem het inzien van de aangeslagen opgave beletten, maar de Delftenaar bleef aandringen en kreeg tenslotte vluchtig inzage. ‘s Avonds loste hij de opgave op “also daer weynich constryckheyt in gheleghe was” en de volgende dag wilde hij zijn uitwerking aan Goudaen geven, maar die weigerde het in ontvangst te nemen. Er zat voor Ludolph niets anders op dan zijn oplossing openbaar aan te slaan en vervolgens naar Delft terug te reizen. Goudaen deed daarop zijn best om zijn concurrent zwart te maken. Er schijnt een aantal malen achtereen weer hetzelfde gebeurd te zijn als Petri reeds was overkomen: Goudaen weigerde steeds opnieuw inhoudelijk in te gaan op de aangeboden oplossing.

In zijn boekje behandelde Ludolph beide opgaven: die van Goudaens uit 1580 en ook Petri’s wedervraag die Goudaen in 1583 geplagieerd had. Aan het eind van het boekje vinden we twee nieuwe uitdagingen voor de Haarlemse rekenmeester (zie kader). Zo

Goudaen deze binnen drie maanden oploste, zou hij aanspraak mogen maken op “een fijnen Silveren beker: welcke gratuiteyt ja meerdere hem van rechtsweghen sal toecomen als eenen hoochverstandigen die niet alleen met woorden dan oock met der daet bethoont dat hy is (ghelijck hy hem selven beschrijft) een Correcteur ende restaurateur der erreuren inder vervallen (soo hy seyt) const Algebra, den welcken ick God bevele van soo goeder herten als ick gaerne ware zijnen ende een yder goede vriend.” Het zijn smakelijke verhalen om te lezen, daarnaast leren we er ook iets van. Zo was het blijkbaar gebruikelijk om een vraagstuk te beantwoorden met niet slechts een uitwerking, maar daarbij ook een wedervraag. Verder zien we onze beide verslaggevers morele argumenten gebruiken: ze verwachten een inhoudelijke afhandeling in plaats van gegooi met modder, en ze verwachten dat gemaakte beloften worden waargemaakt.

Regenten

We zagen al dat Petri Van Ceulen in één adem noemde met Stevin. Dat betekent dat Van Ceulen in 1584 een zekere reputatie had die de grenzen van de stad Delft oversteeg. Reeds vier jaar hield hij toen zijn schermeschool in de kapel van het Sint Agathaklooster. Dat deed inmiddels niet meer als klooster dienst maar bood onderdak aan het hof van Willem van Oranje. Vandaar dat het tegenwoordig beter bekend staat als het Prinsenhof. Vermoedelijk heeft Willems zoon Maurits er schermles gekregen van onze schermmeester, die overigens een pensioen van 25 gulden ‘s jaars ontving van het stadsbestuur. In dat stadsbestuur zat een paar jaar later Jan Cornets de Groot, kapitaalkrachtig handelaar, vader van de beroemde Hugo, en goed bevriend met Simon Stevin. De contacten van Stevin en De Groot blijken onder andere uit hun gezamenlijke inspanningen tot het verbeteren van windmolens en het doen van valproeven; bovendien droeg Stevin zijn boek *l’Arithmetique* (1585) aan De Groot op. In datzelfde boek bevestigde Stevin dat Van Ceulen van plan was een verhandeling over algebra te schrijven (het is echter nooit verschenen). Die twee kenden elkaar dus blijkbaar ook, en hoe kan het ook anders: Stevin en Maurits hadden elkaar in 1581 aan de Leidse universiteit ontdekt. Al deze personen zaten dus in hetzelfde netwerk.

Ook De Groot en Van Ceulen konden goed met elkaar overweg, zoals blijkt uit de vriendendienst die de eerste bewijst door voor Van Ceulen de *Circuli dimensio* (cirkelmeting) van

Archimedes te vertalen. Dat is een kort werkje waarin Archimedes de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel (tegenwoordig wel bekend als het getal π) insluit tussen $3 \frac{10}{71}$ en $3 \frac{1}{7}$, verkregen door afschatten van de omtrek van een in- en omgeschreven 96-hoek.

Van Ceulens belangstelling voor cirkelmeting kwam mede voort uit een tweede twist waar hij bij betrokken was. Ditmaal was de wederpartij Simon van der Eycke, oftewel Du Chesne vanwege zijn afkomst uit Frankrijk, Dôle om precies te zijn. Die had in 1584 te Delft (waar hij woonachtig was) een boek doen publiceren *Quadrature du cercle: ou manière de trouver un carré égal au cercle donné* waarin hij verklaarde dat de verhouding van de omtrek en diameter van een cirkel gelijk is aan $(\frac{39}{22})^2 = 3.14256\dots$ Van der Eycke gaf hiermee weliswaar een goede schatting die ook nog tussen de grenzen van Archimedes in ligt (hij had dan ook diens 96-hoeken gebruikt), maar de aanspraak op exactheid kon hij niet waarmaken. Waar hij 91 pagina’s nodig had om dit resultaat wereldkundig te maken, had Van Ceulen er slechts zes nodig (*Kort klaar bewijs dat die nieuwe ghevonden proportie eens cirkels ie gens zyn diameter te groot is ende over zulcx de quadratura circuli des zelve vindens onrecht zy*) om te laten zien dat de omgeschreven 192-hoek al een kleinere waarde voor π impliceert. Onverschrokken publiceerde Van der Eycke daarop in een nieuw boekje (*Claerder Bewys Op De Quadrature Des Cirkels...*) een andere ‘exacte’ waarde voor π namelijk $\sqrt{\sqrt{320} - 8} \approx 3.14460\dots$ Hij zag zelf wel in dat dat buiten de Archimedische grenzen ligt maar dat gaf blijkbaar niets [15]. Van Ceulen tenslotte maakte een eind aan de discussie met de “tot dolen geboren” stadsgenoot van Franse afkomst in het boekje *Proefsteen ende claerder wederleggingh dat het claerder bewijs (so dat ghenaeemt is) op de gheroemde ervindingh vande quadrature des cirkels een onrecht te kennen gheven, ende gheen waerachtich bewijs is*, waarin hij liet zien dat $3.141557587 < \pi < 3.141662746$, wat hij vermoedelijk verkregen had uit een in- en omgeschreven 384-hoek. Het is in deze periode geweest dat Jan Cornets het Archimedes-stuk vertaalde, en het is nu dus duidelijk waarom Ludolph daar blij mee was.

Leiden

We maken een sprong van een kleine tien jaar en landen in 1594. In dat jaar, ongeveer aan het begin van de studie van zijn veelbelovende zoon Hugo, werd Jan de Groot benoemd als

Van Ceulen aan Goudaen

Het eerste probleem dat Van Ceulen aan Goudaen opgeeft betreft een koordenvierhoek $ABCD$ met gegeven zijden van achtereenvolgens 6, 12, 9, en 8 (zie Figuur 2). Vanuit D is de middellijn DF van de cirkel getrokken welke de zijde BC snijdt in E . Gevraagd: de lengte van BE , EC , DE , en EF .

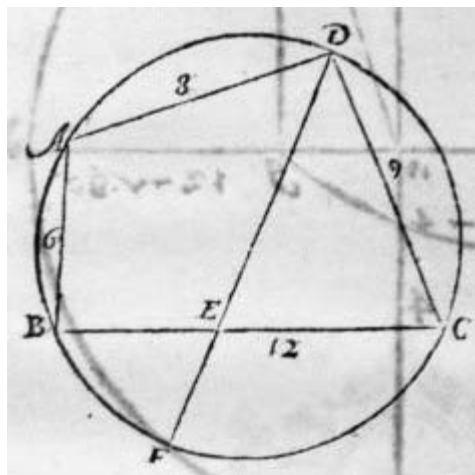
In wezen dezelfde vraag komt voor op p. 210 van [11] (p. 196 in de Latijnse editie [12]). echter met $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 9$ en $AD = 18$; de middellijn BG snijdt de zijde AD in F (ontbreekt in figuur). In Figuur 4 staat zijn uitwerking. De rode draad, zonder in details te treden, is als volgt. Zij H het voetpunt van de loodlijn uit B op AD en

L het voetpunt van de loodlijn uit G . Verder zijn I en K het midden van respectievelijk de cirkel en zijde AD . Al eerder heeft Van Ceulen laten zien hoe de diagonaal BD van de koordenvierhoek uit te rekenen. Daarmee zijn alle zijden van driehoek ABD bekend. Dan is ook BH bekend (bijvoorbeeld via oppervlakte en de stelling van Heron) en dus tevens AH , HD . Door gelijkvormigheid van driehoeken BHD , BAG volgen nu BG en AG , daarna DG uit rechthoekige driehoek BDG . Dan zijn alle zijden van driehoek AGD bekend en dus ook GL , AL , LD . De oplossing volgt tenslotte uit de gelijkvormigheid van de driehoeken GLF , IKF , en BHF .

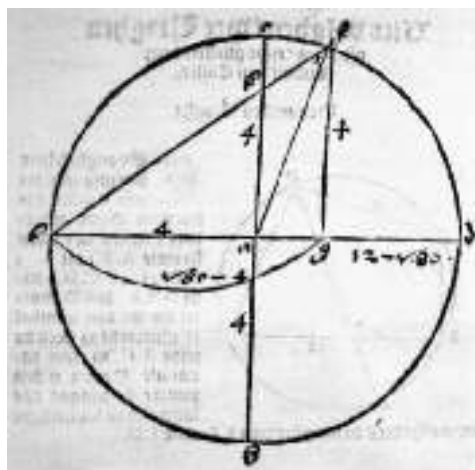
Snellius merkt in zijn commentaar op dat

het korter kan: zodra je de diameter van de cirkel kent, zijn twee zijden in rechthoekige driehoek AKI bekend, etcetera.

De tweede opgave van Van Ceulen aan Goudaen (zie Figuur 3) komt terug op p. 222 van [11]. Gegeven een cirkel met middelpunt A en twee loodrecht op elkaar staande middellijnen $CH = BD = 8$. G ligt op BD zodanig dat $BD : BG = BG : GD$ (zo formuleert hij het niet in 1584 maar wel in de Fondamenten). GF heeft lengte 4 en staat loodrecht op BD . De rechte AF snijdt de cirkel in I ; BI snijdt CH in K . Gevraagd naar BK , IK , CK en HK . Dit vraagstuk lijkt misschien lastiger maar kan bijna helemaal met gelijkvormigheid worden opgelost.



Figuur 2 Van Ceulens eerste opgave voor Goudaen



Figuur 3 Van Ceulens tweede opgave voor Goudaen

Daer zijn 4 linien, als hier geteeckent met $ABCD$, van dese is gemaect een viercant daer om een Cirkel beschreven can werden, ende uyt den winckel B is ghetrocken de rechte BG , doors Centro des Cirkels, welke door-snijdet AD in F , vraghe naer AF , FD , BF , ende FG .

Om dese te beantwoorden,

Doet alfoo:

Maeft het viercant als voor geleert is, ende bereydet de figuer als hier tegē staet: ende merct, dē Tryang. ABD is bekent met alle zijden, daerom is mede bekent de perpendicular BH , AH , en HD . Item, de linie KI ghetrocken uyt den middelpunt des cirkels perpendicularit. op den Basis AD , vvelcke in K ghelijck ghedeelt vverdt, daerom als BH teghen BD , alfoo $A B$ teghen den Diameter BG , comt als hier tegen geteeckent. Nu zijn mede bekent de linien AG en DG , dewijle de winckels BAG ende BDG recht zijn, mede de perpendicular LG , LD ende AL , daerom genomē LD van 9 (als KD) rest KL , dese is ghelijck IM dit quadraet ghenomen vant quadraet des halven Diameters uyt den rest $\sqrt{\quad}$, comt MG , den Tryangel IMG is nu bekent met syn zijden, ende mede ghelijckformich den Tryangel GFL , BHE , ende IFK , als nu MG tegen GI , alfo GL tegen FG , comt $\sqrt{171\frac{1}{2}}$, noch als MG teghen IG , alfo BH tegen BF , comt voor $BF \sqrt{34\frac{1}{2}}$: dese twee liniē tsamen geaddert, comt $\sqrt{358\frac{1}{2}}$ voor den Diameter BG . Item, als MG tegen IM , alfo LG teghen LF , comt $7\frac{1}{2}$. Hier toe LD , comt $11\frac{1}{2}$, noch als MG tegen IM , alfo BH tegen HF , comt $3\frac{1}{2}$, hier toe AH , comt voor $AF 6\frac{1}{2}$: Dit condit ghy prouven.

AC	$\sqrt{169\frac{1}{2}}$
BD	$\sqrt{231}$
AH	$3\frac{1}{2}$
HD	$14\frac{1}{2}$
BH	$\sqrt{23\frac{1}{2}}$
Diameter.	
BG	$\sqrt{359\frac{1}{2}}$
IG	$\sqrt{89\frac{1}{2}}$
AG	$\sqrt{323\frac{1}{2}}$
DG	$\sqrt{128\frac{1}{2}}$
HL	$14\frac{1}{2}$
LD	$3\frac{1}{2}$
LG	$\sqrt{115\frac{1}{2}}$
LK ghelijck IM	doet $5\frac{1}{2}$
MG	$\sqrt{60\frac{1}{2}}$
FL	$7\frac{1}{2}$
FD	$11\frac{1}{2}$
AF	$6\frac{1}{2}$
HF	$3\frac{1}{2}$

Figuur 4 Van Ceulens eerste opgave voor Goudaen met uitwerking in de Fondamenten



Collection Frits Lugr, Institut Néerlandais, Parijs

Figuur 5 De Gheijns schets voor de titelplaat van *Vanden Cirkel*

een der curatoren van de Leidse universiteit — niet zo heel verbazend, aangezien het gebruikelijk was dat een Delftse burgemeester in het universiteitsbestuur zat. Wellicht verbazonder is dat tegelijk Ludolph Van Ceulen verhuisde naar Leiden. In juni opende hij er zijn schermerschool in de Faliebagijnkerk, waar ook de universiteitsbibliotheek en het anatomisch theater werden gevestigd. Ludolph vond een hulpschermmeester in Pieter Bailly, een kleurrijk figuur die tevens schrijfmester en tweede pedel van de universiteit was, althans totdat uitkwam dat hij studenten begeleidde naar dames van lichte zeden. Ook Van Ceulen heeft zich later van hem moeten ontdoen en wel wegens oneerlijke concurrentie op sportschoolgebied.

In 1594 verscheen ook *Cyclometrica elementa duo*, een prachtig boek van de kort tevoren naar Leiden gelokte hoogleraar Jo-

sephus Justus Scaliger, een waarlijk erudiet humanist en filoloog met (helaas voor hem) ietwat minder verstand van *Geometria* en zelfs met een hekel aan Archimedes. Sterker nog: hij was ervan overtuigd dat hij drie klassieke problemen (driedeling van een hoek, verdubbeling van een kubus, en kwadratuur van een cirkel) had opgelost met passer- en lineaalconstructies. In het boek 'bewees' hij beweringen die, modern gezegd, erop neerkomen dat $\pi = \sqrt{10}$ en $\pi = \frac{9}{5}\sqrt{3}$, zonder dat hij in die twee verschillende resultaten een tegenstrijdigheid zag. Volledigheidshalve moeten we er dan wel bij vermelden dat de ene waarde betrekking had op de verhouding tussen omtrek en diameter van een cirkel, en de andere op de verhouding tussen cirkeloppervlak en het vierkant op de straal van de cirkel; Scaliger negeerde dus het door Archimedes bewezen resultaat dat beide ver-

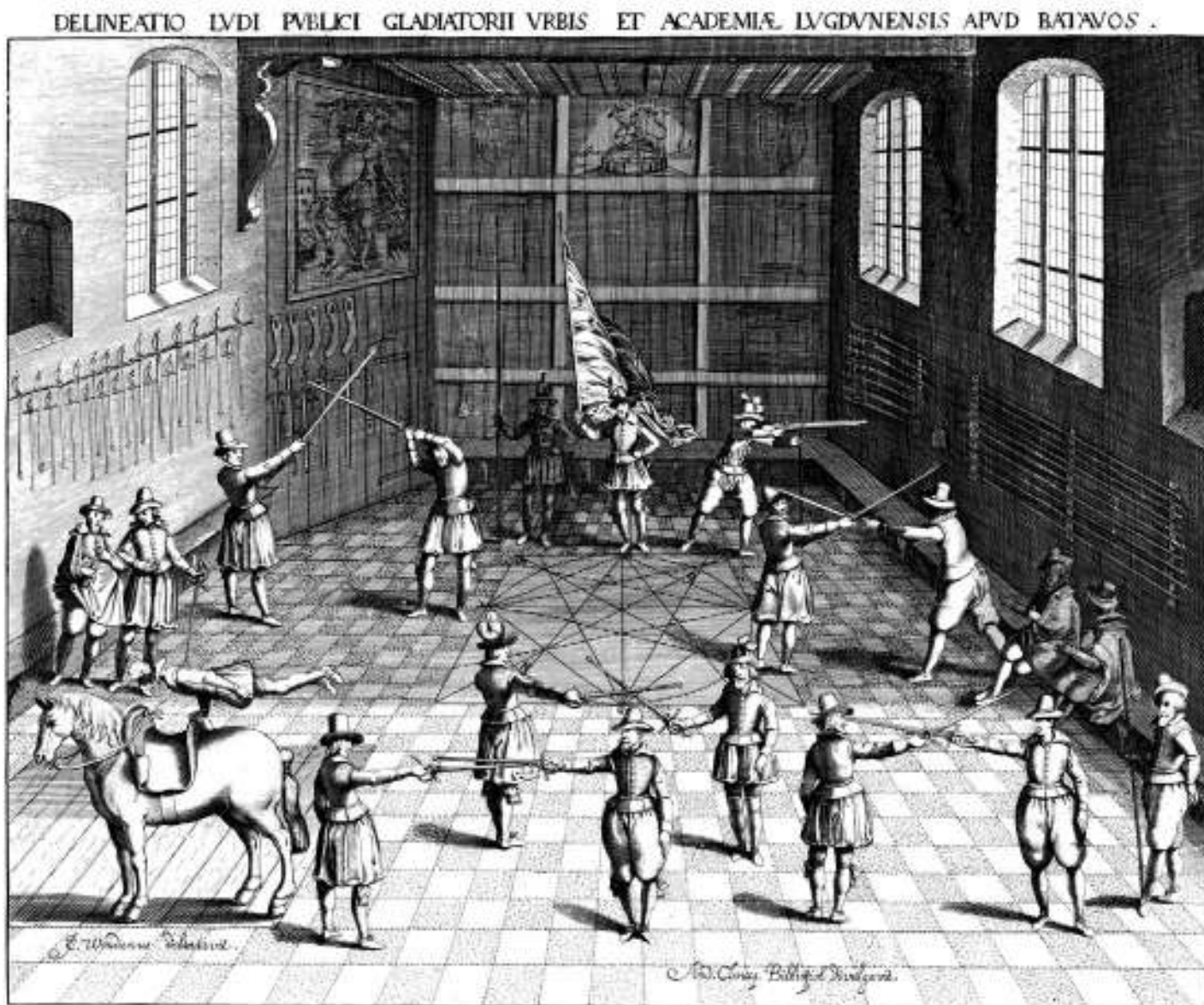
houdingen aan elkaar gelijk zijn [4]. Van Ceulen doorzag de onjuistheid van de beweringen snel en liet de geleerde discreet adviseren (mogelijk via hun beider leerling Willebrord Snellius [3] (p. 199)) om het boek niet in de handel te brengen: het zou schadelijk kunnen zijn voor diens reputatie. Scaliger was echter niet onder de indruk van wat hij noemde een vechtbaas. Hoe zou zo iemand toch in zo korte tijd de diepte van zijn academische inzichten kunnen peilen? Laat hem maar zijn kritiek op papier zetten en publiceren! Aldus nalatende het boek terug te trekken, haalde hij zich de kritiek van François Viète, Adriaan van Roomen en (wat later) Christoph Clavius op de hals, kritiek die hij overigens even licht terzijde wuifde.

Van Ceulen was er zich blijkbaar van bewust dat ook zijn eigen reputatie en daarmee zijn bronnen van bestaan op het spel stonden. Hij bevond zich weliswaar in een uitstekend netwerk, maar als relatieve buitenstaander zonder academische positie en zonder kennis van klassieke talen kon hij niet anders dan eerbied tonen voor de hooggeleerde Scaliger. Dat gold des te meer daar die een van de tutors was van de jonge Hugo de Groot. Ludolph kon dus niet openlijk de toegeworpen handschoenen oppakken. Toch liet hij het er niet bij zitten.

Vanden Cirkel

Nauwelijks twee jaar later verscheen *Vanden Cirkel* [10], het boek waarmee Van Ceulen zich bij latere generaties grote roem verworven heeft. Ludolph droeg het boek op aan Maurits van Oranje. Jacob de Gheijn, die niet veel later zo ongeveer de positie van huiskunstenaar aan Maurits' hof verwierf, tekende de titelplaat (Figuur 5) en Jan Orlers, neefje van de universitair secretaris Jan van Hout, jubelde Van Ceulen dichterlijk toe. Eens te meer zien we hierin bewijzen van het uitstekende netwerk van Van Ceulen.

Nogal wat wiskundegeschiedenissen vermelden meer of minder gedetailleerd dat Van Ceulen in het boek twintig decimalen van π uitrekende. Hij gebruikte daarvoor in wezen dezelfde techniek als Archimedes maar hij kon het rekenwerk makkelijker inrichten omdat hij zich minder gelegen liet liggen aan het klassieke onderscheid tussen meetkunde en rekenkunde. Het nadeel van de methode is dat de convergentie uiterst traag gaat, elke verdubbeling van het aantal zijden levert nog minder dan een decimaal extra op. Van Ceulen had dan ook een 15×2^{31} -hoek nodig voor het resultaat van 20 decimalen (Willebrord Snellius bracht later een verbetering aan



Figuur 7 Deze prent in ets en gravure van de schermeschool, naar een tekening van Jan Cornelisz. Woudanus, geeft de situatie weer in Van Ceulens sterfjaar. Met een toelichting in boekdruk in het Duits, Latijn en Frans.

bij behoefte aan praktisch geschoolde vakmensen op het gebied van landmeten en vestingbouw. Een opleiding hiertoe bestond niet en om in de lacune te voorzien gaf hij Stevin opdracht om het programma voor een dergelijke opleiding op te stellen. Aan die opdracht voldeed Stevin en het programma behelsde, naast grondige beheersing van rekenen (inclusief worteltrekken) en meetkunde, alles wat nodig was om nuttige ingenieurs op te leiden. Ook veldwerk ontbrak niet. De zogenaamde ‘Duytsche Mathematique’ waar in de landstaal werd onderwezen aan gewone lieden, werd in 1600 opgericht en op voordracht van Maurits werden Ludolph van Ceulen en Symon Fransz van Merwen aangesteld als docenten. De school werd gehuisvest in de Faliëbagijnkerk. Enkele jaren later werden de

docenten zelfs benoemd tot professor, hoewel de ‘echte’ professoren van de universiteit schamper op hen neerkeken.

Dat juist Van Ceulen als docent werd aangesteld mag wel enigszins verrassend zijn. Immers, hij was al 60 jaar oud; in de tien laatste jaren van zijn leven bleef hij er lesgeven hoewel hij het veldwerk steeds vaker oversloeg. Symon van Merwen was acht jaar jonger en een leeftijdsgenoot van Stevin. Over hem weten we niet heel veel maar Otterspeer [7] (p. 200) noemt hem “vooral landmeter en inventieveling” en daarnaast iemand die vele functies in de stad vervulde, en verdedigingswerken aanlegde. Toevallig overleed Van Merwen evenals Van Ceulen in 1610 zodat de Duytsche Mathematique in dat jaar zonder docenten kwam te zitten; weldra vulde

hun voormalige student Frans van Schooten senior de leemte.

Waarom waren juist deze twee docenten aangesteld? Waarom niet Simon Stevin zelf? Misschien had Maurits hem te hard nodig. Adriaan Metius zou zeker een goede kandidaat voor het docentschap zijn geweest als hij niet net naar Franeker was vertrokken. Maar waarom niet de 28-jarige Jan Pietersz. Dou, landmeter van de stad Leiden, die samen met zijn collega Johan Sems in 1600 een handboek voor de landmeters het licht liet zien? Dou was trouwens ook al met Van Merwen, Van Ceulen, en Jan van Hout betrokken geweest bij het maken van een belastingtabel plus handleiding (heruitgegeven door het jubilerende Wiskundig Genootschap in 1879 [1]). Ik stel mij voor dat er twee as-

pecten aan de benoeming van Van Ceulen zijn. Enerzijds houdt het een erkenning in door het establishment (lees: Maurits en het bestuur van de Leidse universiteit) van zijn kwaliteiten en van zijn werk, zoals hij dat in Vanden Circkel had vastgelegd en dat van internationaal niveau was; mogelijk zelfs ook een erkenning van zijn 'gelijk' tegenover circkelrechters zoals Scaliger. Maurits lijkt zich over de meester te ontfermen, weliswaar niet geheel volgens het gangbare patronagemodel maar toch ook niet ver daarvanaf. Anderzijds is het niet voor te stellen dat Maurits zijn nieuwe ingenieursschool en het krijgsbelang ervan ondergeschikt zou maken aan vriendjespolitiek. Daaruit zouden we dan kunnen afleiden dat het in zijn ogen een meerwaarde had boven eventuele alternatieven om de oude rekenmeester aan te stellen, en dat hij het zinvol achtte om de jongelieden juist door hem te laten onderrichten. Wellicht speelde hierin ook Van Ceulens expertise in de wapenkunde een rol.

Fondamenten

Van Ceulen overleed op 31 december 1610. Enkele dagen later werd hij begraven in de Pieterskerk, en niet lang daarna werd overeenkomstig de wens van de overledene het graf voorzien van een steen met π in 35 decimalen. Deze steen is bij een renovatie van de kerk verloren gegaan maar inmiddels vervangen door een replica.

Waar kwamen deze 35 decimalen van-

daan? In [10] stonden er slechts 20, en die had de rekenmeester al lang daarvoor berekend. Na 1596 moet hij dus zijn berekeningen hebben voortgezet. Iets hiervan vinden we in de postuum uitgegeven *Fondamenten* [11].

Het boek bevat zes hoofdstukken waarvan de eerste twee handelen over rekenkunde en elementaire meetkunde. In het derde hoofdstuk verbindt Van Ceulen rekenkundige operaties met meetkundige constructies. Hierin staat bijvoorbeeld een op de stelling van Ptolemaeus gebaseerde manier om bij twee (construeerbare) lijnstukken met lengte a en b een lijnstuk met lengte ab te construeren. De laatste drie hoofdstukken bevatten diverse soms erg lastige meetkundige problemen. Waar de eerste hoofdstukken best bruikbaar zijn geweest als studiemateriaal voor de Duitse Mathematique, geldt dit zeker niet voor de laatste.

Deze *Fondamenten* zijn beslist niet het beoefde algebraboek dat Stevin voorzien had (ook Van Ceulen maakte bij herhaling gewag van zo'n boek). Het lijkt erop dat deze publicatie eerder is ingegeven door de financiële noden van de weduwe dan door de cohesie van het materiaal. Hoe dan ook, er staan 32 decimalen van π in en geen 35: de laatste paar decimalen schijnen te stammen uit ongepubliceerde documenten.

Niettemin vormen de *Fondamenten* wel degelijk een belangrijke bron om de wiskunde van Van Ceulen in het bijzonder, en meer in het algemeen de wiskunde van die tijd, te

begrijpen. Dat komt niet alleen door de wijsheid van de inhoud, maar vooral door dat Willebrord Snellius het in het Latijn vertaald heeft [12]. Die vertaling heeft op zich al iets dat de wenkbrauwen doet rijzen: Snellius, klassiek opgevoed en de klassieke talen machtig, vertaalde het werk van een van zijn leermeesters die zelf slechts Nederduitsch sprak. De vertaling is een daad van achting. Extra boeiend is het boek omdat Snellius op veel plaatsen zijn eigen commentaar toevoegde. We kunnen daarin een dialoog zien tussen de rekenmeester en de academicus, tussen iemand die vooral toepassingsgericht is en iemand die zich vooral beladen weet met de erfenis van een traditie. Een van de knelpunten in die dialoog is de kwestie van het samengaan van meetkunde en rekenkunde. In de rekenmeestertraditie was dat al helemaal geen problematisch punt meer. Het meten van velden was zelfs onmogelijk als niet de zijden van dat veld in getallen werden uitgedrukt.

In de *Fondamenten* blijkt dat Ludolph van Ceulen zich wel degelijk bezighield met die kwestie. Het is eens te meer een bewijs dat hij functioneerde op een niveau dat ver uitstak boven dat van de rekenmeesters. Terecht heeft de regentenklasse hem opgemerkt en kansen gegeven. Gezien zijn niet-klassieke achtergrond en onkunde van de klassieke talen is het mooi dat hij langs de omweg van de Duitse Mathematique uiteindelijk toch professor is geworden. Ludolph van Ceulen is duidelijk meer dan louter π . 

Referenties

- David Bierens de Haan, editor. *Feest-gave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven", ter gelegenheid der viering van zijn honderdjarig bestaan*. Haarlem, 1879. Bevat facsimile-herdrukken van Jan van Hout e.a. "Corte onderrichtinge dienende tot het maecken vande reduction vande jaer-custinghen tot gereede penningen" (Leiden 1599) en Johan de Witt "Waerdye van lyf-renten naer proportie van los-renten" ('s Gravenhage 1671).
- Paul P. Bockstaele. *The correspondence of Adriaan van Roomen*. Number 9 in Mededelingen uit het Seminarie voor geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen aan de Katholieke universiteit te Leuven. Katholieke Universiteit Leuven Dept. wiskunde, 1977.
- Liesbeth C. de Wreede. *Willebrord Snellius (1580-1626): a humanist reshaping the mathematical sciences*. PhD thesis, Utrecht, 2007.
- Jan P. Hogendijk. The scholar and the fencing master: the exchanges between Joseph Justus Scaliger and Ludolph van Ceulen on the circle quadrature (1594-1596). to appear in *Historia Mathematica*, 2010.
- Friedrich Katscher. Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl π sowie Leben und Werk von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen. In *Denkschriften der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse*, volume 116, pp. 85-129. Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Wien, 1979.
- Friedrich Katscher. New documents on Ludolph van Ceulen. Regionaal Archief Leiden, G2006A23
- Willem Otterspeer. *Het bolwerk van de vrijheid: de Leidse universiteit, 1575-1672*. Bert Bakker, 2000.
- Nicolaus Petri. *Vanden twee geometrische vraeghen, inden jaren 81. ende 83. by Willem Goudaen binnen Haerlem aenden kercke ghestelt*. Cornelis Claesz, Amsterdam, 1584.
- Ludolph van Ceulen. *Solutie ende werckinghe op twee geometrische vrighen by Willem Goudaen inde jaeren 1580 ende 83 binnen Haerlem aenden kerckdeure ghestelt: mitsgaders propositie van twee andere geometrische vrighen*. Cornelis Claesz, Amsterdam, 1584.
- Ludolph van Ceulen. *Vanden circkel. Daerin gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circels-diameter tegen synen omloop... noch de tafelen sinuum, tangentium ende secantium... ten laetsten van interest...* Jan Andriesz., Delft, 1596.
- Ludolph van Ceulen. *De arithmetische en geometrische fundamenten, van mr. Ludolf van Ceulen; met het ghebruyck van dien in veele verscheydene constige questien, soo geometrice door linien, als arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert*. Joost van Colster en Jacob Marcus, Leiden, 1615.
- Ludolph van Ceulen en Willebrord Snellius. *Fundamenta arithmetica et geometrica cum eorum usu in variis problematis, geometricis, partim solo linearum, ductu, partim per numeros irrationales, & tabulas sinuum, & algebram solutis*. Leiden, 1615.
- Adriaan van Roomen. *Ideae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum, qua laterum, perimetrorum & arearum eujusunque polygoni investigandorum ratio exactissima & certissima; una cum circuli quadratura continetur*. Van Keerbergen, Antwerpen, 1593.
- Antwerps stadsarchief: zie [6]; rekenmeester: zie het voorwoord van [10].
- Nicolaus van Cusa had deze waarde al genoemd, en Regiomontanus had hem weerlegd, zoals postuum gepubliceerd in 1559 [5] (p. 108), [2] (p. 94).

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Adres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: reviews@nieuwarchief.nl



Eli Maor

The Pythagorean Theorem – A 4,000-Year History

Princeton: Princeton University Press, 2007

261 p., prijs \$ 24.95

ISBN 0-691-12526-0

Er zijn veel romantische anekdotes, rariteiten en onwaarheden over Pythagoras te melden. Eli Maor schreef er een boek over. Maor is bekend van een aantal historisch getinte wiskundeboeken waarvan met name *To Infinity and Beyond* mij is bijgebleven. Nu is *The Pythagorean Theorem – A 4,000-Year History* van zijn hand verschenen.

Het boek bestaat uit 16 hoofdstukken, 10 terzijdes en 8 appendices. Dat is nogal wat en zou het geheel fragmentarisch kunnen maken. In het begin is dat zeker niet het geval. Een mooi stuk geschiedenis komt voorbij. De Babyloniërs kenden de stelling wel, maar niet bewezen is dat de Egyptenaren de stelling en zijn toepassingen kenden, hoewel dat wel verwacht zou worden gezien bijvoorbeeld de vorm van de piramides. Op de belangrijkste bron, de papyrus Rhind, zijn daar bijvoorbeeld geen aanwijzingen voor.

Interessant is de sectie waar Maor stilstaat bij propositie I.47 (Pythagoras) van Euclides en waarom de auteur koos voor het daar gegeven bewijs, waarvan Schopenhauer zei dat het didactisch slecht was. Ook Proclus geeft rond 400 na Chr. nog flink wat commentaar op Euclides, maar daarna is het rond de stelling toch wel zo'n 1000 jaar stil, de donkere tijden van de wiskunde.

Maor pakt de geschiedenis weer op bij de bewijzen van Loomis, die een beroemd boek (reprint 1968) schreef waarin hij 370 bewijzen verzamelde. Maor laat daar enige prachtige staaltjes van zien. Op die plaats is ook nogal wat aandacht voor het kortste bewijs, dat berust op gelijkvormige figuren, een belangrijk topic in dit boek. Maar dan verzucht hij: "What else is there to say" nu er al zoveel over bekend is en daar gaat het boek een beetje de mist in, letterlijk en figuurlijk.

Vanaf hoofdstuk 9 gaat Maor steeds vrijer variëren op het thema. Er komen dan veel bijzondere bewijzen die gebruik maken van heel andere gebieden van de wiskunde. Zo is hoofdstuk 11 over vectoren wat mij betreft ernstig naast het thema. Alle metrische ruimten worden daar over je heen gestort. Ook hier gaat het te snel, te vluchtig en wat heeft het met het thema te maken, behalve om te laten zien dat in de wiskunde alles met alles te maken heeft.

Vanaf hoofdstuk 12 herpakt Maor zich wel enigszins en gaat het om de vraag hoe universeel Pythagoras is. Is Pythagoras houdbaar op de bol bijvoorbeeld, of in het ruimte-tijd-continuum van Einstein? Interessant, goed leesbaar en goed gedocumenteerd, ondersteund door fraaie verwijzingen en noten, maar de lezer zal zich wel afvragen waar Pythagoras is gebleven. In die zin is het boek wat los. Er zitten veel korte stukjes in en de samenhang ontbreekt, zij het dat ze allemaal op de een of andere manier over Pythagoras en zijn stelling gaan. Het boek verliest op een gegeven moment zijn doorlopende verhaallijn en dan is het thematisch historisch gezien minder boeiend dan de andere boeken van Maor, die veel meer gingen over de zoektocht naar een idee, de verwondering daarbij en de wiskunde daarachter.

Dit boek heeft dat veel minder. Dat neemt niet weg dat het thuishoort in elke wiskundige boekenkast en in het bijzonder in die van een wiskundeleraar. Het geeft door zijn rijkdom, zowel voor de onder- als de bovenbouw een schat aan aanknopingspunten voor allerlei boeiende wiskunde, bijvoorbeeld als onderwerp bij een praktische opdracht. U doet uzelf (en uw leerlingen) er veel plezier mee.

Hans Krabbendam



Martin Kindt en Ed de Moor
**Wiskunde in een notendop
(bijna) Alles wat je altijd wilde weten**

Uitgeverij Bert Bakker, 2008
208 p., prijs €10.00
ISBN 90-351-3212-2

Voor wie zou dit boek geschreven zijn? Zoals de auteurs in het voorwoord terecht opmerken “zal de attente lezer direct begrijpen dat de ‘hele’ wiskunde niet in een paar honderd bladzijden is te vangen”. Wat zou die attente lezer in dit boek willen vinden? Bijvoorbeeld iets van hetgeen de lezer op school bij wiskunde heeft geleerd?

Het zou kunnen, bijna alle onderwerpen van het wiskunde-programma passeren in dit boekje de revue. Maar de lezer die bijvoorbeeld de goniöformules wil nazoeken, wordt door dit boek teleurgesteld. Om te proberen het begrip van en het inzicht in de wiskunde te versterken kan dit boek wel een goede steun zijn.

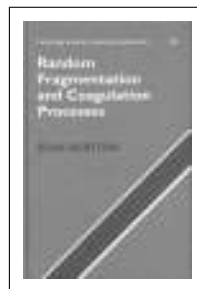
Een wiskundedocent aan de middelbare school kan in dit boek genoeg materiaal vinden om de lessen te verlevendigen door een wiskundig onderwerp van verschillende kanten te bekijken.

Een professioneel wiskundige zal in dit boek waarschijnlijk niets kunnen vinden wat helpt bij lopend onderzoek. Maar voor een andere kijk op middelbare schoolonderwerpen kan het boek een aangename verrassing zijn.

De auteurs, in onderwijzend wiskundig Nederland alom bekend, presenteren in 15 hoofdstukken (ruim 200 bladzijden) een keur van onderwerpen, van algebra en getallenleer tot meetkunde en analyse. Elk hoofdstuk behandelt een ander onderwerp, waarbij het tamelijk gemakkelijk begint, maar gaandeweg lastiger wordt. Veelal wordt het onderwerp chronologisch besproken en afgesloten met een terugblik en/of in een wat breder kader geplaatst.

Om u een indruk te geven bekijken we hoofdstuk 10, getiteld *De ruimte berekend*. Dit opent met het verhaal dat leidde tot het probleem van de verdubbeling van de kubus. Via meetkundig gemiddelde komt men bij de parabool als kegelsnede. Vervolgens kan men deze kromme ook zien als grafiek van een kwadratische functie, waarna men tenslotte de parabool ook kan zien als verzameling punten die even ver liggen van een gegeven brandpunt en richtlijn. Daarna volgen onder meer nog parabolische spiegels en uitstapjes naar de ruimte en de vierde dimensie.

Het boek bevat inderdaad erg veel informatie, maar verveelt toch nooit. Wie de moeite neemt om zich er in te verdiepen, wordt daar zeker voor beloond met onverwachte, wellicht op verrassende wijze samenhangende zaken. In dat opzicht kan iedereen wel iets van zijn gading vinden, zowel de middelbare scholier als de wiskundedocent en de professioneel wiskundige. Ernst Lambeck



Jean Bertoin
Random Fragmentation and Coagulation Processes

Cambridge: Cambridge University Press,
2006
Cambridge studies in advanced mathematics
102
280 p., prijs £44.00
ISBN 0-521-86728-2

Fragmentation and coagulation naturally arise in many applications in the presence of objects of varying mass which can either fall apart or merge. For example, fragmentation is crucial in studies of stellar fragments in astrophysics, the degradation of large polymer molecules, fractures and earthquakes, but also the de-fragmentation of a computer hard disk. Coagulation is crucial in studies of the formation of galaxies, large polymers, or droplets of liquids in aerosols. Furthermore, both also play an important role in various probabilistic problems that can be rephrased as a fragmentation or coagulation process, such as the growth of component sizes in random graphs or the coalescence of ancestral lines in the genealogy of populations. As a result, fragmentation and coagulation processes have received substantial attention in the probability community, where the ground breaking survey by Aldous (1999) played a crucial role in reviewing various aspects of the mean-field theory coalescence for probabilists. Here mean-field refers to the fact that the spatial properties of the mass distribution are ignored, and the particles behave as independently as possible. For example, for mean-field fragmentation processes, each particle breaks independently, while in mean-field coagulation processes, the rates of coalescence only depend on the particles involved in the coalescence, and not on other particles.

This book represents the first systematic study of the mean-field theory for fragmentation and coagulation processes. While intuitively, fragmentation and coagulation can be viewed as each other's time-reversals, due to the simplifications made in the models studied, this is not the case for mean-field fragmentation and coagulation processes. Therefore, distinct theories are developed for both types of processes. The reasons for studying them both in a single monograph is that both types of processes have the same state space and the methodology used is rather similar. The main tools used are continuous-time branching processes, Markov chain techniques, random walks and renewal theory, additive martingales, Poisson measure and stable subordinators.

The book is clearly and concisely written, and is intended for anyone with a decent background in probability. The content is limited to the most relevant theory, while each chapter contains a substantial comments section in which more refined results are discussed with the most recent references. As a result, the book is not too long (270 pages), and each chapter has a clearly defined scope. For a more substantial overview of the book the reader is referred to the excellent MathSciNet review by Nicolas Fournier.

I recommend the book to any probabilist interested in the theory and applications of fragmentation and coagulation processes, as well as in a clear explanation of the methodology used therein. Personally, I find the book less suited for teaching bachelor and master courses, due to the fact that a substantial insight in probability theory is assumed. For a PhD-course on the topic, it is a great source.

Remco van der Hofstad



Thomas Körner
**Naive Decision Making –
 Mathematics Applied to the Social
 World**

Cambridge: Cambridge University Press,
 2008

373 p., prijs £22.99

ISBN 0-521-73163-8

Dit is een curieus boek met een nog curieuzere titel. Het was de titel die me nieuwsgierig maakte naar de inhoud. Ik verwachtte namelijk een praktisch-kwantitatieve kijk op alledaagse beslissingsproblemen. Dit bleek helaas niet het geval te zijn. Het boek is een samenraapsel van wiskundige theorie die min of meer gemotiveerd is door alledaagse problemen, die op vele niet-wiskundigen als niet-alledaags en gekunsteld zullen overkomen. Met andere woorden: het is de wiskunde die centraal staat, niet de 'social world'. 'Mode 1' wiskunde in een 'Mode 2' jasje.

Dat geconstateerd hebbende blijkt het toch een aardig boek te zijn dat bestaat uit vlot geschreven hoofdstukken die elk op zich een mooi beeld geven van allerlei delen van de wiskunde, op een inleidend niveau. Speltheorie, kansrekening, priemfactorontbindingen, combinatoriek, van alles passeert de revue. Al met al leuk om doorheen te bladeren en hier en daar meer in detail te lezen. Je vraagt je echter wel af wie dit boek zou moeten lezen: het is te onsamenhangend om bij een college te gebruiken, te wiskundig om door anderen dan wiskundigen gelezen te worden, en niet diepgaand genoeg voor de specialist. De enige manier waarop het zijn nut kan bewijzen staat op de achterkant: als aanvullend materiaal bij een lagerejaars vak.

Ger Koole



Alexandru Nica en Roland Speicher
**Lectures on the Combinatorics of
 Free Probability**

Cambridge: Cambridge University Press,
 2006

London Mathematical Society Lecture Note
 Ser. 335

417 p., prijs £53.00

ISBN 0-521-85852-6

Vrije stochastiek ('free probability') is een actief onderzoeksgebied, in de jaren '80 ontdekt door Voiculescu, dat een niet-commutatieve vorm van kansrekening bedrijft. Een verrassende toepassing is de spectraaltheorie van willekeurig getrokken matrices, die van belang is in de quantumfysica, waar zij chaotische Hamiltonianen beschrijft.

Men kan de klassieke, commutatieve kansrekening algebraïsch formuleren door C^* -algebra's van functies op een kansruimte te beschouwen. Het begrip onafhankelijkheid wordt daarbij uitgedrukt door het tensorproduct van algebra's. Wanneer dit tensorproduct wordt vervangen door het (gereduceerde) vrije product, dan ontstaat vrije onafhankelijkheid, die de spil is van de vrije stochastiek. Het blijkt dat zelfgeadjungeerde $n \times n$ -matrices, gevuld met onafhankelijke, standaard normaal verdeelde ingangen, in de limiet $n \rightarrow \infty$ vrij onafhankelijk van elkaar worden.

Hoogtepunt van de theorie is de beschrijving van som en pro-

duct van vrij onafhankelijke stochasten met gegeven kansverdelingen μ en ν . Zo is de verdeling van de som het 'vrije convolutieproduct' $\mu \boxplus \nu$. Er is een centrale limietstelling die zegt dat herhaalde vrije convolutie leidt naar een 'vrije normale verdeling', die de vorm heeft van een halve cirkel. Ook zijn er vrije analoga van de Poisson-verdeling en van het begrip 'oneindig deelbaar'.

Er staan een analytische en een combinatorische toegang tot de vrije stochastiek open. De eerste legt de nadruk op C^* -algebra's en complexe analyse, de tweede op momenten en cumulanten. Klassiek worden momenten en cumulanten beheerst door de combinatoriek van partities. Analooq hieraan staan de de momenten van $\mu \boxplus \nu$ en zijn vrije cumulanten in het teken van de 'niet-kruisende' partities, ingevoerd door Speicher. Deze combinatorische toegang tot vrije stochastiek is het thema van dit boek.

Dit heldere en toegankelijke leerboek is verdeeld in 23 'lectures' met opgaven, en zou uitstekend dienst kunnen doen bij een gevorderd mastercollege of een aio-cursus. Pas in de laatste twee 'lectures' komt het verband met stochastische matrices aan de orde, maar de docent zou dit naar voren kunnen halen.

Het boek beschrijft daarnaast ook een aantal recente ontwikkelingen, zoals de resultaten rond R -diagonale elementen en de vrije commutator. Een goed gedoseerd leerboek van twee onderzoekers van het eerste uur.

Hans Maassen



Colin Campbell, Martyn Quick, Edmund Robertson, Geoff Smith (eds.)
Groups St. Andrews 2005

London Mathematical Society Lecture Note Series 339/340

Cambridge: Cambridge University Press,
 2007

Vol. I 355 p., £43.00, ISBN 0-521-69469-8

Vol. II, 346 p., £43.00, ISBN 0-521-69470-8

De groepentheorieconferentie Groups St. Andrews 2005 is de zevende in de reeks die in 1981 begonnen is. Achtereenvolgens vond de conferentie plaats in St. Andrews (3x), Galway, Bath, Oxford, St. Andrews. Bij Cambridge University Press zijn de meeste congresbijdragen uitgegeven; vanwege 'ruimtegebrek' zijn sommige in tijdschriften gepubliceerd. Alle bijdragen zijn gerefereerd.

In 2005 zijn wederom zeer veel aspecten van de ontwikkeling van de moderne groepentheorie aan bod gekomen, aangedragen door 230 deelnemers, in woord en geschrift. De hoofdsprekers waren Cameron, Grigorchuk, Meakin, Seress, die elk in een reeks voordrachten spraken over, respectievelijk: *Aspects of infinite permutation groups*; *Self-similarity and branching in group theory*; *Groups and semigroups: connections and contrasts*; *Towards the classification of s-arc transitive graphs*. Het spreekt vanzelf dat deze artikelen rijklijk voorzien zijn van referentiemateriaal.

In de conferentiebundel zijn, naast de hoofdvordrachten, 52 bijdragen opgenomen. Het is ondoenlijk op de inhoud in te gaan vanwege de grote verscheidenheid aan onderwerpen. Toch wil ik u een drietal bijdragen hier niet onthouden en deze nader voor het voetlicht brengen. Zo wordt in het artikel *Embedding properties in direct products of groups*, van de hand van Brewster, Martinez-Pastor en Perez-Ramos, onder andere een overzicht gegeven hoe normaaldelers in directe producten van groepen kunnen worden opgespoord. Dat klinkt gemakkelijk, maar er staan vondsten vermeld, die elementair zijn, doch pas in de laatste jaren zijn gevon-

den. De intrigerende titel *Finite groups: The shape of solvable groups of odd order*, wordt in het artikel door Glasby volledig waargemaakt. Maar het meest opmerkelijke artikel in de bundel is wel de bijdrage van Kappe en Morse. In 28 bladzijden geven zij een, naar het lijkt volledig, up-to-date overzicht over groepen waarin

elk element van de commutatorondergroep zelf een commutator is. Voor collegegevers en studenten vormt dit artikel (en de hele bundel natuurlijk) een schatkamer aan informatie, lopend over allerlei takken van groepentheorie en toepassingen.

Zeer aanbevolen!

Robert van der Waall

Recent verschenen publicaties (suggesties naar reviews@nieuwarchief.nl)



René Descartes
Meetkunde (vert. Wim W. Wilhelm)

Eburon Delft, 2009
ISBN: 9789059723207 (paperback)
www.eburon.nl/Meetkunde

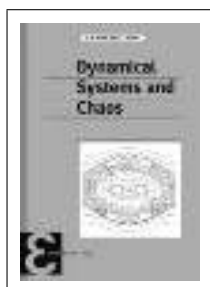


Terence Tao, Van H. Vu
Additive Combinatorics
Cambridge University Press, 2006
ISBN: 9780521136563 (paperback, with corrections, 2010)
www.cambridge.org/



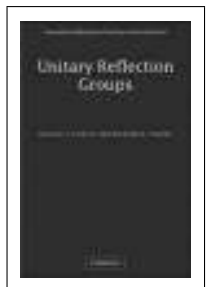
Frans Keune
Getallen van natuurlijk naar imaginair

Epsilon Uitgaven, 2009
ISBN: 978-90-5041-118-9
www.epsilon-uitgaven.nl/E65.php



H.W. Broer, F. Takens
Dynamical Systems and Chaos

Epsilon Uitgaven, 2009
ISBN: 978-90-5041-109-7
www.epsilon-uitgaven.nl/E64.php



Gustav Lehrer, Donald Taylor
Unitary Reflection Groups

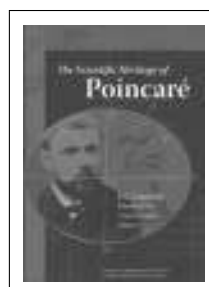
Cambridge University Press, 2009
ISBN: 0521749891
www.cambridge.org/



Apostolos K. Doxiades, Christos H. Papadimitriou
Logicomix

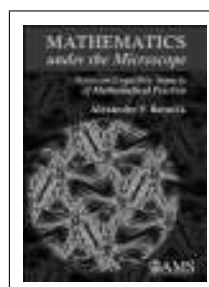
Een epische zoektocht naar de waarheid
(vertaling: Mat Schifferstein)

De Vliegende Hollander, 2009
ISBN: 904950079X
www.uitgeverijdevliegendehollander.nl



Éric Charpentier, Étienne Ghys, Annick Lesne
The Scientific Legacy of Poincaré

American Mathematical Society, 2010
ISBN: 0-8218-4718-X
www.ams.org/bookstore-getitem/item=hmath-36



Alexandre V. Borovik
Mathematics under the Microscope
Notes on Cognitive Aspects of Mathematical Practice

American Mathematical Society, 2010
ISBN: 0-8218-4761-9
www.ams.org/bookstore-getitem/item=mbk-71



Martin Aigner, Günter M. Ziegler
Proofs from the Book

Springer Verlag, 2010 (4th enlarged, revised edition)
ISBN: 978-3-642-00855-9
www.springer.com/math/book/978-3-642-00855-9



Hans van Maanen
Goochelen met Getallen
Cijfers en statistiek in krant en wetenschap

Uitgeverij Boom, 2009
ISBN: 9789085068358
www.uitgeverijboom.nl

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to submit solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution received within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submission of problems and solutions is preferred (problems@nieuwarchief.nl).

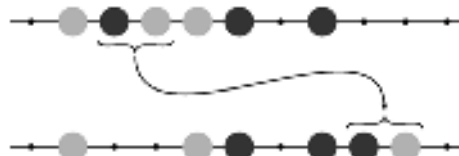
The deadline for solutions to problems in this edition is June 1.

Problem A (proposed by Arne Smeets)

Show that for each positive integer n there exists a sequence of n consecutive integers such that for each k , the k -th term can be written as a sum of k distinct squares.

Problem B (proposed by Jos Brakenhoff)

The integers of the real line mark positions at which we may place chips. We start with $2n + 1$ chips, alternatingly blue and red, at consecutive positions. A *move* is a translation by an integer of a pair of differently coloured chips at adjacent positions to two empty positions, as long as at least one of the new positions is adjacent to one that was already occupied.



Show that it is possible, in a finite sequence of moves, to arrange the chips so that they occupy $2n + 1$ consecutive positions again, but now with all blue chips on one side and all red chips on the other. Give upper and lower bounds for the smallest number of moves required.

Problem C (proposed by Frank Redig)

Does a function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ exist that is everywhere left-continuous, but nowhere continuous?

Edition 2009-3 We received submissions from Daniël Worm (Leiden), Rutger Kuyper (Nijmegen), Thijmen Krebs (Nootdorp), Jaap Spies (Emmen), Sander Scholtus (Den Haag), Pieter de Groen (Brussel), Dan Dima (Bucharest), Wim Schikhof (Nijmegen), and Sep Thijssen (Nijmegen).

Problem 2009-3/A Let k be a non-negative integer. Let $S \subset \mathbf{Z}$ be a set consisting of $2^{k+1} - 1$ integers. Show there exists a subset $T \subset S$ of cardinality 2^k such that the sum of the elements of T is divisible by 2^k .

Solution This problem was solved by Daniël Worm, Thijmen Krebs, Rutger Kuyper, Sander Scholtus, and Sep Thijssen. All submitted essentially the same solution. The book token goes to Rutger Kuyper.

We use induction. For $k = 0$ the statement clearly holds. Suppose the statement holds for some non-negative integer k . Let $S \subset \mathbf{Z}$ be a subset of cardinality $2^{k+2} - 1$. Using the induction hypothesis on two disjoint subsets of S of cardinality $2^{k+1} - 1$ each, we can find

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

disjoint subsets T_1 and T_2 of S of cardinality 2^k , such that the sum of their elements is divisible by 2^k . Now note that the complement of $T_1 \cup T_2$ in S has cardinality $2^{k+1} - 1$, so by using the induction hypothesis once more we find a subset $T_3 \subset S$, disjoint with T_1 and T_2 , of cardinality 2^k and such that the sum of its elements is divisible by 2^k . To conclude, choose $i \neq j$ such that T_i and T_j have the same sum modulo 2^{k+1} and observe that $T = T_i \cup T_j \subset S$ satisfies the requirements.

Problem 2009-3/B Find all functions $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ such that

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) \quad (1)$$

for all x and y in $\mathbf{R}_{>0}$.

Solution This problem was solved by Dan Dima, Pieter de Groen, Thijmen Krebs, Sep Thijssen, and Daniël Worm. The book token goes to Daniël Worm.

The following is essentially the solution by Thijmen Krebs and Daniël Worm.

Suppose such a function f exists. For all $x, y > 0$ we have $f(x+y) > f(x)$, so f is strictly increasing. For fixed x , the right-hand side of (1) is linear in y , so f is unbounded. Therefore, we may choose an $x > 0$ such that $f(f(x)) > 1$ and a $y > 0$ satisfying $y(f(f(x)) - 1) > x + 1$. Then for $z = x + y$ we have

$$f(z) = f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) > yf(f(x)) > x + y + 1 = z + 1.$$

However, from $f(z+1) \geq f(z) + f(f(z)) > f(f(z))$ and the fact that f is increasing, we find $z+1 > f(z)$. From this contradiction we conclude that no such f exists.

Problem 2009-3/C Let V be an infinite-dimensional vector space. Show that the dimension of the dual space V^* equals the cardinality of V^* .

Solution We received no solutions to this problem. Wim Schikhof pointed out that the solution can be found in the literature (G. Köthe, *Topologische Lineare Räume I*, 1960), where it is known as a theorem of Erdős and Kaplansky. Bas Edixhoven communicated the following (folklore) proof.

We denote the cardinality of a set S by $|S|$.

Let V be an infinite-dimensional vector space over a field k . Clearly $|V^*| \geq \dim(V^*)$, so we only need to show $|V^*| \leq \dim(V^*)$.

Choose a basis I of V , using Zorn's Lemma. Let k^I be the set of all functions from I to k and let $k[I]$ be the vector space of all polynomials in the elements of I . Consider the 'evaluation' map

$$e : k^I \rightarrow (k[I])^* : f \mapsto [P \mapsto P(f(i)_{i \in I})].$$

We claim that the images of e are linearly independent. To see this, let $f_1, \dots, f_n$ be distinct elements of k^I and let

$$\alpha_1 e(f_1) + \dots + \alpha_n e(f_n) = 0$$

be a linear relation amongst their images. Note that there is a finite subset $J \subset I$ on which the functions f are already distinct. In particular, for any $1 \leq j \leq n$ we can choose a polynomial $P \in k[J] \subset k[I]$ that evaluates to 1 on f_j and to 0 on all the other f 's, so that

$$\alpha_j = \alpha_1 P(f_1(i)_{i \in I}) + \dots + \alpha_n P(f_n(i)_{i \in I}) = 0,$$

which proves the claim.

Now, as the images of e are linearly independent we have

$$|k^I| \leq \dim(k[I]^*).$$

But k^I is isomorphic to V^* and $k[I]$ is isomorphic to V (since I has the same cardinality as the set of all monomials in I), so we conclude $|V^*| \leq (\dim V^*)$.

Problem (Star) 2008-2/1 Let the continuous function $f_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ be such that

$$\int_0^1 f_1(t) dt$$

exists (and is finite) as an improper Riemann integral. Prove that f_1 has a unique extension to $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ that is

- continuous on $\mathbf{R}^+$,
- differentiable on $(1, \infty)$ and satisfies the differential-difference equation

$$f'(x) = -\frac{1}{x}f(x-1) \quad (x > 1). \quad (2)$$

Also, determine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x).$$

Finally, show that, if $\int_0^1 f_1(t) dt = f_1(1)$, then the series $\sum_{n=0}^{\infty} nf(n)$ and the integral

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

both converge absolutely and have the same value.

Solution We received solutions from Joris Bierkens and J. Arias de Reyna & J. van de Lune. Joris Bierkens will receive the prize.

The following solution is based on the one given by Bierkens.

Define the functions $f_n : (n-1, n] \rightarrow \mathbf{C}$ inductively, by

$$f_n(x) := f_{n-1}(n-1) - \int_{n-1}^x \frac{1}{t} f_{n-1}(t-1) dt,$$

and glue them to a function f on $\mathbf{R}^+$. By the properties of the Riemann integral, this f is continuous on $\mathbf{R}^+$ and differentiable on $(1, \infty)$ and it satisfies the differential-difference equation (2). If $g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{C}$ is another function with these properties, then we see that $g'(t) = f'(t)$ on $(1, 2]$. From $f(1) = g(1)$ we conclude $f = g$ on $(1, 2]$. Repeating this argument it follows that $g = f$ everywhere on $\mathbf{R}^+$.

In order to determine $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$, note that (2) implies

$$(xf(x))' = f(x) - f(x-1). \quad (3)$$

Therefore

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = f(1) + \int_1^{\infty} (xf(x))' dx = f_1(1) - \int_0^1 f_1(x) dx,$$

provided that the limit $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x)$ exists.

For the last part of the problem, integrate (3) to obtain the recursion

$$\int_n^{n+1} f(t)dt = \int_{n-1}^n f(t)dt + (n+1)f(n+1) - nf(n) \quad (n \geq 1).$$

Now suppose $\int_0^1 f_1(t)dt = f_1(1)$. This recursion implies

$$\int_{n-1}^n f(t)dt = nf(n). \quad (4)$$

We have for $n > 1$

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} |f(t)|dx &= \int_n^{n+1} \left| f(n) - \int_n^x \frac{1}{t} f(t-1)dt \right| dx \\ &\leq |f(n)| + \int_n^{n+1} \frac{1}{n} \int_n^{n+1} |f(t-1)|dt dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_{n-1}^n |f(t)|dt + \frac{1}{n} \int_n^{n+1} |f(t-1)|dt = \frac{2}{n} \int_{n-1}^n |f(t)|dt. \end{aligned}$$

So, by the ratio test, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n |f(t)|dt$$

converges. Since we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} |nf(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{n-1}^n f(t)dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t)|dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^n |f(t)|dt,$$

we conclude that both $\sum_{n=0}^{\infty} nf(n)$ and $\int_0^{\infty} f(t)dt$ converge absolutely, and from (4) it follows that they have the same limit.

Problem (Star) 2008-2/4 Let $p: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ be a continuous function with $p(t) \geq 0$ for all $t \in [0, 1]$ and $\int_0^1 p(t)dt = 1$. Does the function $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ given by

$$f(z) = e^z - \int_0^1 p(t)e^{zt}dt$$

have infinitely many zeroes?

Solution We received solutions from R.A. Kortram and J. Arias de Reyna & J. van de Lune. R.A. Kortram will receive the prize.

The following solution is based on the one given by Kortram.

We shall prove that the answer is 'yes'. The function f has a Taylor series expansion given by

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

with $a_n = 1 - \int_0^1 t^n p(t)dt$. The coefficients a_n are real and satisfy $0 < a_n < 1$ so for all $r \in \mathbf{R}_{>0}$ we have

$$M_r(f) := \max_{|z|=r} |f(z)| = f(r) < e^r. \quad (5)$$

This shows that f is of order (at most) 1: the order of the entire function f is the infimum

of all m such that $f(z) = O(e^{|z|^m})$ as $z \rightarrow \infty$.

From now on, assume that f has only finitely many zeroes $z_1, \dots, z_N$ with multiplicities $e_1, \dots, e_N$. Hadamard's factorization theorem tells us how an entire function of given order can be expressed as product in terms of its zeroes and leads in our case to

$$f(z) = \phi(z)e^{\lambda z + \mu} \quad \text{with} \quad \phi(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j)^{e_j}$$

for certain $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. Since the Taylor coefficients of f are real, we have $\phi(z) \in \mathbf{R}[z]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ and $e^\mu \in \mathbf{R}$ and hence there is a real number c with

$$f(z) = c\phi(z)e^{\lambda z}.$$

Now put $g(z) = \int_0^1 p(t)e^{zt} dt = e^z - f(z)$. We have

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!} \quad \text{with} \quad b_n = \int_0^1 t^n p(t) dt > 0.$$

Hence for $r \in \mathbf{R}_{>0}$ we have

$$M_r(g) := \max_{|z|=r} |g(z)| = g(r) = e^r - f(r) = e^r - c\phi(r)e^{\lambda r}.$$

The fact that $f(0) = 0$ implies $\deg(\phi) \geq 1$; combining this with (5) we get $\lambda < 1$. So there is an $R \in \mathbf{R}$ such that for all $r > R$ we have $M_r(g) > e^r/2$.

Choose $\varepsilon < 1/4$ and $\delta \in [0, 1)$ with $\int_\delta^1 p(t) dt < \varepsilon$. Then also $\int_\delta^1 t^n p(t) dt < \varepsilon$. Choose K with $\delta^K < \varepsilon$. For $n \geq K$ we have

$$\int_0^\delta t^n p(t) dt \leq \delta^n \int_0^\delta p(t) dt \leq \delta^n \int_0^1 p(t) dt < \varepsilon$$

and thus $b_n < 2\varepsilon$.

For $r \geq R$ we get the following inequality:

$$e^r/2 < M_r(g) = g(r) < \sum_{n=0}^{K-1} b_n \frac{r^n}{n!} + 2\varepsilon \sum_{n=K}^{\infty} \frac{r^n}{n!} < \sum_{n=0}^{K-1} b_n \frac{r^n}{n!} + 2\varepsilon \cdot e^r,$$

which is a contradiction for large r .

