

Inhoud | Contents

218	Colofon
219	Redactioneel <i>Ferdinand Verhulst</i>
220	Agenda
222	Nieuws

Onderzoek | Research

228	De vrije wil-stelling van Conway en Kochen <i>Klaas Landsman</i>
240	Ode aan het getal 43 <i>Hendrik Lenstra</i>
250	Bottema opende Whitney's paraplu <i>Ferdinand Verhulst, Oleg Kirillov</i>
259	Onderwatergolven <i>Leo Maas</i>

Onderwijs | Education

237	Wiskunde D – nieuw perspectief? <i>Theo van den Bogaart</i>
267	Docenten op pad in de wereld van wetenschappelijk onderzoek <i>Nellie Verhoef, Petra Hendrikse</i>
273	Vakantiecursus: Zwevende getallen <i>Marco Swaen</i>

Samenleving | Society

235	SWI 2008: Sensornetwerk controleert omgeving <i>Bennie Mols</i>
245	De overval: All Options <i>Klaas Landsman, Hans Melissen, Wil Schilders</i>
257	SWI 2008: Micro-elektromechanische schakelaars voor mobiele telefoons <i>Bennie Mols</i>

Boeken | Books

280	Boekbesprekingen
-----	------------------

Rubrieken | Departments

255	De derde wet <i>Ferdinand Verhulst</i>
270	In de verdediging: rubriek voor proefschriften <i>Geertje Hek</i>
284	Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
naw@math.leidenuniv.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Judi Romijn (judi@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@math.leidenuniv.nl)
Fred Drissen (drissen@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (c.c.c.j.kalle@uu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureau redactie

Floris Olsthoorn, Harm de Vries

Medewerkers

Johan Bosman (IEM Essen), Matthijs Coster (Min.Def.), Hans Cuypers (TU/e), Gabriele Dalla Torre (UL), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van Luijk (UL), Hans Melissen (TUD), Derk Pik (JSG Maimonides), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL), Chris Zaal (UvA)

T  X-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementenperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt   70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen   35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor   25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van   50.

Members of *SIAM*, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay   50 instead of the full membership fee of   70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of   5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of   7,50 for members living outside of Europe.

Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor   90 respectievelijk   105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Gert Vegter (RUG, voorzitter), Rob van der Mei (CWI en VU, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Henk Broer (RUG), Iris van Gulik - Gulikers (SLO), Klaas Pieter Hart (TUD), Herman te Riele (CWI), Arjen Sevenster

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	08-03-2010	verstreken
2	07-06-2010	25-01-2010
3	06-09-2010	26-04-2010
4	06-12-2010	26-07-2010

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Een rotor draait rond een vaste as en ondervindt hierbij weerstand, onder meer van de lucht. Al in 1924 werd ontdekt dat rotorsystemen eerder instabiel worden *met* wrijving dan *zonder*; dit heeft te maken met Whitney's paraplu-singulariteit van het stabiliteitsgebied. Lees het artikel van Ferdinand Verhulst en Oleg Kirillov op pagina 250.

Stoute wiskundigen doen niet aan PR

Elke keer als ik een nummer van het NAW doorblader, valt me op hoeveel opwindende dingen er in de wiskunde gebeuren. Zo wordt in dit nummer een stelling besproken over wiskunde en determinisme in verband met de vrije wil, ook blijken golven onder water allerlei verrassingen op te leveren. In het septembernummer ging het over de begaafde maar ook gekwelde Grothendieck, daarnaast het heikele onderwerp van peer review gekoppeld aan citatie-analyse. Bij discussie over dat laatste onderwerp krijg je al snel grimmige gezichten: “Citatie-analyse, publicaties tellen, dat heeft toch geen zin voor wiskundigen!” Daar valt wel een kanttekening bij te maken. Het heeft zin om met citaties na te gaan of bepaalde onderwerpen een belangrijke rol spelen in het internationale wetenschappelijke discours. Ook kun je zo iets zeggen over de rol en invloed van bepaalde wetenschapsteams, maar inderdaad, wat betreft individuen moet je zeer terughoudend zijn met uitspraken gebaseerd op citatie-analyse. Toevallig wordt in dit nummer verteld hoe Bottema in 1956 een excellent artikel schreef, belangrijk voor lineaire algebra, meetkunde en mechanica. MathSciNet en GoogleScholar geven geen enkele citatie van dit artikel voor de periode 1956-2008 (ondertussen is er een kennelijk niet-geregistreerde citatie ontdekt in een AMS publicatie van 1985), het artikel werd gewoon niet opgepikt. Liepen de stijl en de methode te ver vooruit in de tijd? Nee, absoluut niet, de wetenschappers die er hun voordeel mee hadden kunnen doen, hebben het gewoon niet gezien.

Bottema was een stout wiskundige in de middeleeuwse betekenis van het woord: ondernemend en voor geen kleintje verwaard. Ik herinner me dat een tijd geleden een topbestuurder van de UU de plaatselijke wiskundigen ook stout vond, maar dan in de moderne betekenis van het woord: “Ze laten te weinig studenten afstuderen en ze maken te weinig reclame voor hun vak”, zei hij me eens. Nu, het eerste was een bestuurlijk verplicht nummer, maar het tweede was wel waar. Het is in deze tijd van hypes en wisselende geldstromen belangrijk om spannende verhalen te vertellen. Biologen hebben het al vroeg geleerd en sterrenkundigen zijn er meesters in. De maatschappelijke interesse in een vak, het aantal studenten dat ervoor kiest en de

geldstroom richting wiskunde hangen voor een belangrijk deel samen met die verhalen. Helaas zijn er maar weinig wiskundigen goed in dat verhalen vertellen en moeten we het vaak van wetenschapsjournalisten hebben. Opmerkelijk genoeg helpen ook fysici en ingenieurs ons daarbij; de citatie-analyse zegt daar iets interessants over. Je kunt de citaties vergelijken van MathSciNet, dat alleen naar de belangrijkste wiskundetijdschriften kijkt, met die van GoogleScholar, dat veel breder de publicaties volgt maar wat minder zorgvuldig telt. Als we kijken naar de citatiescore sinds 2000 van actieve toegepast wiskundigen dan worden die in GoogleScholar vele malen meer geciteerd dan in MathSciNet.

Is dat niet opmerkelijk? Het gaat hier om wiskunde-artikelen die verre van populair geschreven zijn, maar buiten de wiskunde, bij biologen, fysici en ingenieurs, kennelijk van grote waarde worden geacht en veel gebruikt worden, zelfs beduidend veel meer dan binnen de wiskunde. Dat is in elk geval een expliciete maatschappelijke betekenis al staat het nog wel ver af van spannende verhalen voor het grote publiek. Is MathSciNet een goede bron voor peer review? Misschien. Voor de (ruwweg) helft van de wiskundigen die zich met toepassingen en methoden bezighouden geeft MathSciNet een eenzijdige indruk en heeft voor citaties weinig te betekenen.

Om nu weer terug te komen op het NAW: een belangrijke rubriek is ‘onderzoek’, waarin een overzicht kan worden gegeven van recente ontwikkelingen in een bepaald deel van de wiskunde, maar dan geschreven voor een wat groter publiek dan directe vakgenoten. Op zijn beurt zou deze rubriek dan weer aanleiding kunnen zijn voor verhalen naar buiten toe, meer dan nu het geval is. Dan moet die rubriek echter wel gevuld worden. Ideeën voor het schrijven van artikelen zijn bij de hoofdredactie zeer welkom. Vooral op het gebied van wat de zuivere wiskunde wordt genoemd zijn er te weinig overzichtsartikelen, stoute wiskundigen doen nu eenmaal niet aan PR. Het is voor ons allemaal van groot belang dat daar verandering in komt. 

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Agenda

Upcoming Events

december 2009

7 – 11 december 2009

□ New directions in Dynamical Systems

Workshop over verschillende actieve onderzoeksgebieden binnen dynamische systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2009/363/info.php3?wsid=363

8 december 2009

□ Parallel, groen en snel

Oratie van Rob Bisseling

plaats Aula Academiegebouw, Utrecht

info www.math.uu.nl

10 december 2009

□ Van Hiele middag

Symposium ter ere van de 90ste verjaardag van Van Hiele

plaats Drienenburgh, Universiteit Twente

info <http://www.utwente.nl/elan/nieuws>

10 december 2009

□ Rekenproblemen herkennen, analyseren en oplossen

Cursus van het Freudenthal Instituut

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info <http://www.fi.uu.nl>

14 – 18 december 2009

□ Dynamic Random Environments

Workshop over dynamische stochastische omgevingen

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events/workshops/-2009/DynamicRandomEnvironments

15 december 2009

□ Studiedag voor wiskundeleraren

Studiedag van het Opleidingsinstituut Natuurwetenschappen en Technologie van de Rijksuniversiteit Groningen. Thema: Wiskunde, interessanter als je denkt!

plaats Bernoulliborg, Nijenborg 9, Groningen

info www.rug.nl/wiskunde

15 december 2009

□ Wiskunde als kunst

Met hallucinerende computeranimaties laat Hendrik Lenstra in Spinoza te Paard zien welke wiskundige trucs Escher toepaste in zijn kunstwerken

plaats Paard van Troje, Den Haag

info www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA_7UTCQC

januari 2010

8 januari 2010

□ Onderzoek naar informeel leren van Bèta en Techniek

Wintersymposium en tevens de startbijeenkomst van de themagroep Bèta en Techniek van de Vereniging voor Onderwijs Research

plaats FNWI-gebouw, UvA, Amsterdam

info www.examiner.phys.tue.nl/BenT

12 – 14 januari 2010

□ Lunteren Conferentie Mathematische Beslissingen

35ste editie, georganiseerd door het LNMB. Met een speciale sessie ter gelegenheid van het emeritaat van Lodewijk Kallenberg

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren

info www.lnmb.nl/conferences/lunteren2010

13 januari 2010

□ Netwerkdag voor coördinatoren rekenen

Netwerkdag voor coördinatoren rekenen in het basisonderwijs. De volgende netwerkdag is op 7 april

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.coördinatorenbasisonderwijs.nl/mambo

16 januari 2010

□ Blik op Oneindig

Wintersymposium van het KWG met sprekers Klaas Pieter Hart, Bart de Smit en Dap Hartmann

plaats Academiegebouw, UU, Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

18 – 20 januari 2010

□ 9th Winter school on Mathematical Finance

Jaarlijkse winterschool over financiële wiskunde met dit jaar als speciaal onderwerp 'Numerical methods and illiquid markets'

plaats CongresHotel de Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool.html

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

20 – 22 januari 2010

28ste Panamaconferentie

Jaarlijkse conferentie over rekenonderwijs; met thema 'Waardevol reken-wiskundeonderwijs - Kenmerken van kwaliteit'

plaats Leeuwenhorst congrescentrum, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

25–29 januari 2010

Studiegroep Wiskunde met de Industrie

Een aantal bedrijven presenteert maatschappelijk relevante en wiskundig uitdagende problemen. Wiskundigen gaan de uitdaging aan om deze problemen binnen een week op te lossen

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl

27 januari 2010

8ste wiskundeconferentie voor vmbo en onderbouw havo/vwo

Jaarlijkse conferentie voor leraren

plaats Utrecht

info www.aps.nl/APSSite/Onderwijssectoren/Projecten/Exact/Agenda/Wiskundeconferentie+2010.htm

29 januari 2010

Nederlandse Wiskunde Olympiade 2010

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

februari 2010

1 februari – 5 maart 2010

Math Info 2010

Een maand met lezingen en workshops over nieuwe interacties tussen wiskunde en informatica

plaats CIRM, Marseille

info www.lirmm.fr/MathInfo2010

3 februari 2010

Hoe leren kinderen rekenen?

Eerste bijeenkomst van een scholingstraject voor Speciaal Rekenen en kwaliteitsverbetering van het rekenonderwijs op de eigen school. De andere bijeenkomsten zijn op 3 maart, 31 maart en 1 mei

plaats Utrecht of Zwolle

info www.speciaalrekenen.nl

4 – 5 februari 2010

Actuarial and Financial Mathematics Conference

Conferentie over financiële wiskunde in het bijzonder met betrekking tot verzekeringen

plaats Brussel, België

info www.afmathconf.ugent.be

5 – 6 februari 2010

Nationale Wiskunde Dagen

16de editie van deze dagen voor leraren in het voortgezet onderwijs

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

maart 2010

12 – 13 maart 2010

Finaleweekend Wiskunde A-lympiade

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats Garderen

info www.fi.uu.nl/alympiade

18 maart 2010

Kangoeroewedstrijd

Reken- en wiskundewedstrijd voor iedereen vanaf groep 5

plaats Deelnemende scholen

info www.math.ru.nl/kangoeroe

18 – 19 maart 2010

Nationale Rekenagen

Ontmoetingsplaats voor leerkrachten basisonderwijs

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

april 2010

12 – 16 april 2010

ESGI

Europese wiskundigen komen samen om te brainstormen over industriële problemen. De Europese grote broer van SWI

plaats University of Warwick, UK

info miis.maths.ox.ac.uk

21 april 2010

Grote Rekendag 2010

Landelijk georganiseerde dag voor alle basisscholen waarop alles in het teken staat van rekenen

plaats Deelnemende scholen

info www.rekenweb.nl/groterekendag

mei–juni 2010

31 mei – 4 juni 2010

EIDMA/DIAMANT minicourse

Minicursus over algebraïsche optimalisatie en semidefinite programming, gegeven door Pablo Parrilo

plaats Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

7 – 18 juni 2010

Numerations

Een week van minicursussen, gevolgd door een workshop van een week over verschillende aspecten van getalsystemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info lorentzcenter.nl/lc/web/2010/384/info.php3?wsid=384

21 juni – 10 juli 2010

PIMS Summer School

5de editie van de zomerschool over kansrekening voor jonge onderzoekers

plaats University of Washington, US

info pims2010.web.officelive.com/default.aspx

23 – 25 juni 2010

De lerende leraar als onderzoeker en ontwerper

Onderwijsresearchdagen 2010

plaats Universiteit Twente, Enschede

info www.utwente.nl/onderwijs/ord2010

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

Blik op Oneindig

Het komende Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap staat in het teken van 'Blik op Oneindig', naar het gelijknamige Zebra-boekje van Epsilon Uitgaven (<http://www.epsilon-uitgaven.nl>).

Klaas Pieter Hart, universitair hoofddocent aan de TU Delft, opent het symposium met een voordracht over 'oneindig veel' in de verzamelingenleer. Bart de Smit, wetenschappelijk medewerker aan de universiteit van Leiden, zal spreken over Escher en het Droste-effect. Dap Hartmann, universitair docent aan de TU Delft, sluit het symposium af met een lezing over oneindig in het universum.

Het symposium wordt gehouden op zaterdag 16 januari 2010 van 10:00 uur tot 14:45 uur in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht. Deelnemers wordt verzocht zich van te voren online aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, www.wiskgenoot.nl (kies dan 'wat doet het KWG' en vervolgens 'congressen en symposia'). Nadere inlichtingen: Iris van Gulik, e-mail: gulikgulikers@home.nl.

Bron: www.wiskgenoot.nl

Een goed excuus

De wiskundige Alan Turing heeft postuum excuses aangeboden gekregen van de Britse premier Gordon Brown. Turing slaagde er tijdens de Tweede Wereldoorlog in om de Enigma-code te kraken, waardoor onder andere de locatie van Duitse onderzeeërs bekend werd. Na de oorlog was hij enige tijd verbonden aan de universiteit van Manchester, waar hij werkte aan de ontwikkeling van computers.

Onder andere omstandigheden was Turing na de oorlog waarschijnlijk uitgeroepen tot nationale held. In werkelijkheid werd hij echter vervolgd voor homoseksualiteit. In 1952 werd hij gearresteerd op beschuldiging van 'liederlijk gedrag' en kreeg hij de keuze tussen een gevangenisstraf of chemische castratie. Turing koos voor de tweede optie. Vanwege zijn homoseksualiteit en arrestatie werd hij ontslagen bij het afsluistercentrum GCHQ en kon hij niet langer werkzaam zijn als rijksambtenaar. In 1954 pleegde hij op 41-jarige leeftijd zelfmoord.

Premier Brown schreef op 15 september op de website van 10 Downing Street dat Alan Turing werkelijk op een gruwelijke manier is behandeld en dat hij zoveel meer had verdiend. Op de officiële excuses was eerder door middel van een petitie aangedrongen door duizenden mensen, waaronder schrijvers, wetenschappers en activisten voor homorechten.

Bron: www.kennislink.nl

60% van de statistieken klopt niet

Op 8 oktober is Rink Hoekstra aan de Rijksuniversiteit Groningen gepromoveerd op het gebruik van statistiek in psychologisch onderzoek. Zijn belangrijkste conclusies zijn dat Nederlandse onderzoekers in de psychologie elementaire statistische methodes niet onder de knie hebben en te stellige uitspraken doen. Kortom, in psychologisch wetenschappelijk onderzoek worden ernstige statistische fouten gemaakt.

Bij psychologisch onderzoek worden experimenten vaak met representatieve steekproeven gedaan. In de generalisatiestap van de steekproef naar de hele populatie worden de meeste fouten gemaakt. Meestal wordt een significantietoets gebruikt om een bepaald effect vast te stellen. De significantietoets staat echter al heel lang ter discussie. In plaats van onderzoeken of een effect bestaat, zou je ook kunnen kijken hoe groot het effect precies is. Stel dat je een onderzoek doet naar de lengtes van mannen en vrouwen. Met een significantietoets zou je kunnen laten zien dat mannen gemiddeld langer zijn dan

vrouwen, maar het is misschien beter om je af te vragen hoe groot het lengteverschil tussen mannen en vrouwen is. Op steekproefniveau wordt dit uitgedrukt door de effectgrootte. Met behulp van betrouwbaarheidsintervallen kan de effectgrootte van de steekproef vervolgens gegeneraliseerd worden naar de hele populatie.

Internationaal geldt dat in psychologisch onderzoek een significantietoets niet hoeft, maar het gebruik van effectgrootte is noodzakelijk en betrouwbaarheidsintervallen worden sterk aangeraden. Uit het onderzoek van Hoekstra blijkt echter dat het in de praktijk niet zo nauw genomen wordt met deze nuancerings van de significantietoets. De effectgrootte en betrouwbaarheidsintervallen worden wel meegenomen in de analyse, maar bij het trekken van conclusies spelen ze nauwelijks een rol meer. Volgens Hoekstra vindt een kritische lezer in vrijwel ieder gepubliceerd artikel, ook in gerenomeerde tijdschriften, wel iets wat niet klopt. Uit interviews en tests met Nederlandse promovendi blijkt dat er vaak geen sprake is van onwil, maar meer van onkunde en onwetendheid.

Bron: www.rug.nl

Goede oude Pythagoras

Dit jaar verschijnt de 49ste jaargang van het wiskundetijdschrift voor jongeren, Pythagoras. Ter gelegenheid van deze bijna vijftigste verjaardag is de hele eerste jaargang van het tijdschrift in pdf-formaat beschikbaar gemaakt. Zo is goed te zien hoeveel het tijdschrift in al deze jaren veranderd is. De eerste jaargang bestaat uit vijf nummers, van het oktobernummer van 1961 tot het juninummer van 1962. Op de onderstaande website staan links naar deze nummers.

Tegenwoordig komen er ieder jaar zes nummers van Pythagoras uit. Een jaargang loopt van september tot en met augustus. Iedere jaargang heeft een speciaal thema. In 2009-2010 is dat Beroepen en zal er in ieder nummer zal een wiskundige aan het woord komen die een andere baan heeft dan wiskundeleraar of onderzoeker aan een universiteit.

In de komende maanden zullen nog meer oude jaargangen als pdf op de website verschijnen.

Bron: www.pythagoras.nu/pyth/index.php



Onmisbare basiskennis voor deelnemers Olympiade

Dit jaar was de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade op 18 september. Op de Technische Universiteit Eindhoven verzamelden zich de 150 deelnemers die waren geselecteerd uit de 4400 deelnemers van de eerste ronde.

In de finale werden vijf pittige opgaven gemaakt. Na afloop kreeg iedere deelnemer als prijs het boek *50 inzichten wiskunde: Onmisbare basiskennis* van Tony Crilly mee naar huis. In dit boek worden vijftig belangrijke wiskundige ideeën en begrippen uitgelegd, waaronder fractals en speltheorie.

Aan de dertig deelnemers met de beste resultaten wordt gevraagd om mee te doen aan een uitgebreid trainingsprogramma ter voorbereiding op de Internationale Wiskunde Olympiade van 2010 in Kazachstan (zie ook het bericht hieronder over de editie van dit jaar).

De opgaven en antwoorden zijn te vinden op de onderstaande website.

Bron: www.wiskundeolympiade.nl

Zilver en brons op IMO 2009...

Tijdens de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO 2009) heeft de Nederlandse delegatie dit jaar een zilveren en een bronzen medaille in de wacht gesleept. Deze delegatie bestond uit Wouter Berkelmans, Saskia Chambille en Maarten Roelofsma, allemaal 18 jaar, Raymond van Bommel en Harm Campmans van 17 jaar en David Kok, 16 jaar oud.

De deelnemers moesten ieder voor zich zes moeilijke wiskunde-vraagstukken oplossen en konden voor iedere vraag maximaal zeven punten krijgen. Wouter Berkelmans haalde met 24 punten een zilveren medaille binnen en Raymond van Bommel met 21 punten een bronzen. David Kok en Harm Campmans kregen beiden een eervolle vermelding. In totaal waren er door de Nederlandse deelnemers 79 punten behaald en daarmee is Nederland op de 47ste plaats geëindigd in het officiële landenklassement.

Voorafgaande aan de olympiade hadden de deelnemers een oefenwedstrijd tegen het team uit Nieuw-Zeeland. Zij kwamen naar Apeldoorn om samen opgaven te maken en te bespreken.

De IMO 2009 vond in juli plaats in Bremen, Duitsland, met in totaal 565 leerlingen uit 104 landen.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

... en zilver en brons op IMC 2009

Van 25 tot 30 juli vond dit jaar in Boedapest (Hongarije) de zestiende *International Mathematics Competition for University Students* plaats. Deze competitie is bedoeld om contact tussen wiskundestudenten uit verschillende landen te bevorderen, de vraagstukken bestrijken het volledige spectrum van wiskundige vaardigheden.

Hoewel het een individuele wedstrijd betreft sturen universiteiten traditioneel teams van vier studenten. De wedstrijd is puur voor het plezier en de eer: slechts de winnaars van de *Grand First Prize* krijgen een klein geldbedrag. Toch neemt een aantal universiteiten de wedstrijd bijzonder serieus en vaardigen deze regelmatig winnaars af, zoals de Staatsuniversiteit Moskou.

Vanuit Nederland stuurden twee universiteiten een vier personen tellend team. Dit waren de Universiteit Utrecht (Sjoerd Boersma, Wouter van Limbeek, Leslie Molag en Egbert Rijke) en de Universiteit van Amsterdam (Alexander van Hoorn, Kyndylan Nienhuis, Eddie Nijholt en Tijmen Veltman). De training van de Nederlandse deelnemers werd verzorgd door Sergey Shadrin van de Universiteit van Amsterdam.

De winnaar was dit jaar weer Alexander Efimov (80 punten) van

de Staatsuniversiteit van Moskou, hij won de IMC ook al in de twee voorgaande jaren. De beste Nederlandse deelnemer was Leslie Molag met Zilver (43 punten), gevolgd door Kyndylan Nienhuis met Brons (33 punten). De overige Nederlandse deelnemers hebben alle een eervolle vermelding verkregen. In het teamklassement scoorde de Universiteit Utrecht een 40ste plaats en de Universiteit van Amsterdam was 47ste. Het beste van de 65 teams was de Nationale Taras Shevchenko Universiteit Kiev.

De opgaven, uitwerkingen en volledige uitslag zijn te vinden op: <http://www.imc-math.org.uk>

Bron: Leslie Molag en Jeroen Sijsling, Universiteit Utrecht

Goed gevuld

Het bekende bolstapelingsprobleem luidt: Hoe kun je de ruimte zo efficiënt mogelijk vullen met bollen van dezelfde grootte, of met andere woorden, wat is de grootst mogelijke stapelingsdichtheid van deze bollen? Het vermoeden van Kepler, dat deze maximale dichtheid gelijk is aan $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$, stamt uit 1611. Dit is de dichtheid die je krijgt als de bollen gestapeld worden zoals kanonskogels in een piramide. In 1998 slaagde de Amerikaanse wiskundige Thomas Hales erin om het vermoeden te bewijzen. Het bewijs bestaat uit het doorrekenen van een enorm aantal gevallen en een commissie van twaalf personen besloot na vier jaar controleren dat ze er voor 99% zeker van waren dat het bewijs van Hales correct is.

In augustus verscheen er in *Nature* een artikel van de hand van twee onderzoekers van Princeton, Salvatore Torquato en Yang Jiao, over stapelingsdichtheden van regelmatige veelvlakken. De kubus is niet interessant in dit opzicht, aangezien je daarmee de hele ruimte kunt opvullen. Door middel van computersimulaties hebben ze voor de andere vier regelmatige veelvlakken de dichtste stapelingen ooit gevonden. Deze dichtheden zijn afgerond 0,782 voor de tetraëder, 0,947 voor de octaëder, 0,905 voor de dodecaëder en 0,836 voor de icosaeëder. Nu is het wachten op een echt bewijs.

De optimale bolstapeling is een zogenaamde Bravais roosterstapeling. In 1848 toonde de wiskundige Bravais aan dat er maar veertien fundamenteel verschillende manieren zijn waarop objecten op een regelmatige manier in de ruimte gestapeld kunnen worden, de veertien Bravais roosterstapelingen. De stapelingen die Torquato en Jiao vonden voor de octaëder, de dodecaëder en de icosaeëder zijn allemaal Bravais roosterstapelingen. Die van de tetraëder is dat echter niet. De reden, volgens Torquato en Jiao, is dat de tetraëder niet centraal symmetrisch is en de andere regelmatige veelvlakken wel. Torquato en Jiao vermoeden dat voor centraal symmetrische regelmatige veelvlakken de dichtste Bravais roosterstapeling ook daadwerkelijk de dichtste stapeling is. En ze vermoeden dat hetzelfde geldt voor centraal symmetrische Archimedische veelvlakken. Dat zijn veelvlakken die opgebouwd zijn uit twee of meerdere soorten regelmatige veelhoeken en waarvan alle hoekpunten er hetzelfde uitzien.

Bron: www.nature.com

Russell gestript

Logicomix, het stripboek over wiskunde in de eerste helft van de twintigste eeuw, dat in september werd uitgegeven in Groot-Brittannië en de Verenigde Staten, is een onverwacht groot succes geworden. Het boek stond in oktober in de Amazon top 10 van meest gekochte boeken in de categorieën fictie en stripboeken.

De hoofdpersoon van het stripverhaal is Bertrand Russel, filosoof

en wiskundige die leefde van 1872 tot 1970. Het verhaal vertelt in meer dan 300 pagina's over Russells zoektocht naar de grondslagen van de wiskunde en over andere aspecten van zijn leven. Zo komen de geestelijke problemen van zijn familieleden, zijn relatie met andere grote wiskundigen uit die tijd en twee van zijn vier huwelijken voorbij. Op de achtergrond spelen de grote gebeurtenissen in Europa, zoals de opkomst van het Nazisme. Dit laatste vormde een zeer directe bedreiging voor de hoofdpersoon, die tijdens de eerste wereldoorlog als pacifist werd gearresteerd.

De schrijver, Apostolos Doxiadis, die het boek maakte samen met Christos Papadimitriou, hoogleraar informatica, zegt dat Russell de ideale hoofdpersoon was voor hun verhaal. Russell was op een meer of minder directe manier betrokken bij alle gebeurtenissen waarover ze wilden vertellen. Ook was hij volgens Doxiades de enige kandidaat die niet een mega-nerd was. Hij was een politiek activist en rokenjager, en hield van reizen en avontuur.

Het kostte in totaal zeven jaar om het boek te maken. Twee kunstenaars die betrokken waren bij het boek, Alecos Papadatos en Anni Di Donna, hebben in drie weken tijd alle plekken uit het boek bezocht. Ze reisden van Cambridge naar Londen en via Parijs en Wenen naar Halle in Duitsland, waar de wiskundige Georg Cantor, één van Russells grote helden, de laatste maanden van zijn leven doorbracht.

Het boek kwam al in 2008 uit in Griekenland en de makers waren net zo verbaasd als hun uitgever over het enorme succes. In de laatste dertig jaar is geen enkel boek uit Griekenland in het buitenland zo goed verkocht.

Bron: news.yahoo.com



Copyright: 2009, Logicomix Print Ltd.

Uitmundend

Hoeveel cent moet iedere munt waard zijn om zo efficiënt mogelijk wisselgeld te kunnen geven? Dat vroeg econoom Patrick DeJarnette zich af. Met efficiënt wordt hier bedoeld dat je zo min mogelijk munten terug krijgt.

In de Verenigde Staten worden de penny (1 cent), nickel (5 cent), dime (10 cent) en quarter (25 cent) gebruikt. Voor 1 dollar is er een bankbiljet. Als je iets koopt met een bankbiljet krijg je met dit systeem gemiddeld 4,7 munten terug. DeJarnette schreef een computerscriptje om simulaties uit te voeren met verschillende waardes voor de munten. Hij ging steeds uit van een systeem met vier verschillende munten en deed twee aannames. Ten eerste moest ieder bedrag tussen 0 en 99 cent te maken zijn (dit betekent dat één van de munten de waarde 1 cent moet hebben) en ten tweede nam hij aan dat het bedrag in centen dat je bij een transactie terug krijgt uniform verdeeld is tussen 0,00 en 0,99.

Uit zijn simulaties bleek dat een systeem met munten van 1 cent, 3 cent, 11 cent en 37 cent en het systeem (1,3,11,38) even efficiënt zijn en beiden 4,1 munten per transactie nodig hebben. Maar aangezien deze systemen in de praktijk om andere redenen waarschijnlijk wat onhandig zijn, heeft DeJarnette verder gezocht naar de eerste 'redelijke' oplossing. Dat was (1,4,15,40) met 4,14 munten per transactie. Ook (1,3,10,35) doet het goed met 4,16 munten per transactie. De beste optie met de 1 en verder alleen veelvoud van 5 was (1,5,15,40). Deze geeft 4,4 munten per transactie.

In totaal zijn er 152.096 verschillende mogelijkheden. Het huidige Amerikaanse systeem staat op de 2.952de plaats.

Bron: *freakonomics.blogs.nytimes.com*

Nieuwe minor rekenen-wiskunde

De hogescholen Arnhem Nijmegen en Windesheim ontwikkelen een nieuwe minor, genaamd rekenen-wiskunde 10-14. Deze minor zal in februari 2010 voor het eerst aangeboden worden.

Het onderwerp van de nieuwe minor is de overgang van rekenen-wiskunde in het primair onderwijs (po) naar wiskunde in het voortgezet onderwijs (vo). De minor is geschikt voor studenten van de tweedegraads lerarenopleiding, bovenbouwspecialisten van de pabo en po- en vo-docenten die willen professionaliseren tot rekenexpert op hun school. De minor duurt in totaal een half jaar en bevat een stage.

Bron: *www.rekenen10tot14.nl*

De laatste universalist?

Op 5 oktober 2009 overleed op 96-jarige leeftijd Izrail Moiseevitsj Gelfand. Hij was een even briljant als veelzijdig wiskundige, tevens actief in de mathematische fysica en de mathematische biologie. Behalve een zeer invloedrijk onderzoeker was Gelfand ook een groot leermeester, met als bekendste promovendi Alexandre Kirillov en Joseph Bernstein. Zien vele anderen kwamen tot wasdom in het beroemde Gelfand Seminar, dat oorspronkelijk aan de (Staats-)Universiteit van Moskou plaatsvond, en na Gelfands emigratie naar de V.S. in 1989, achtereenvolgens op Harvard, MIT, en Rutgers University. Zoals een van ons persoonlijk heeft mogen ervaren, was het bij dit seminar Gelfands gewoonte om naast de spreker te gaan staan en vrijwel iedere zin en formule te corrigeren, waardoor de spreker zeker drie uur bezig was en na afloop totaal gefrustreerd naar huis ging. Naast zijn werk op de universiteit schreef Gelfand ook schoolboeken en onderhield hij zowel in zijn Russische als in zijn Amerikaanse tijd een netwerk van getalenteerde scholieren, waar onder meer Maxim Kontsevich van heeft geprofiteerd.

Gelfand werd op 2 september 1913 geboren in de buurt van Odesa. Ondanks het vroegtijdig afbreken van de middelbare school en het ontbreken van een universitaire opleiding promoveerde hij in 1935 bij Kolmogorov in de functionaalanalyse. Zijn vroegste werk gaat over Banach algebra's, culminerend in zijn baanbrekende artikel met Naimark in 1943 over C^* -algebra's. Dit gaf Gelfand tevens een analytisch raamwerk voor de theorie van oneindig-dimensionale unitaire groepsrepresentaties, waarvan hij als een van de grondleggers kan worden beschouwd (met Wigner, Mackey, Harish-Chandra en Selberg). Zijn (met verschillende co-auteurs geschreven) serie van vijf boeken over geeneraliseerde functies (distributies) is mede geïnspireerd door vragen uit de harmonische analyse, evenals zijn latere werk aan automorfe functies (met Graev en Piatetskii-Shapiro). Zo vormt zijn oeuvre één groot continuüm, eindigend met zijn laatste grote bijdrage aan de wis-

kunde in de vorm van een boek over resultanten en discriminanten uit 1994 (met Kapranov en Zelevinsky). Maar zelfs daarna bleef hij nog ruim tien jaar actief als hoogleraar aan Rutgers.

Naar eigen zeggen lag de essentie van zowel goede wiskunde als klassieke muziek voor Gelfand in "beauty, exactness, simplicity, crazy ideas". Daar kunnen we 'The Unity of Mathematics' aan toevoegen, de titel van de conferentie die in 2003 op Harvard werd gehouden ter ere van Gelfands gaste verjaardag. In het voorwoord van de proceedings van deze conferentie plaatst Cartan hem dan ook terecht in de traditie van Poincaré en Hilbert.

Bron: Gert Heckman en Klaas Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen



Izrail Gelfand (1913-2009)

Tekens van leven

Een team van Amerikaanse en Indiase onderzoekers heeft Markovketens ingezet in een poging om het Indusschrift te ontcijferen. Hun resultaten zijn afgelopen augustus gepubliceerd in de *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

In de Indusvallei, in het huidige grensgebied tussen India en Pakistan, bloeide zo'n 4500 jaar geleden een redelijk ontwikkelde beschaving. Het bestaan van deze beschaving werd pas ontdekt in de twintigste eeuw. Tijdens opgravingen zijn kleitabletten, zegels en amuletten gevonden met daarin vreemde tekens gekrast. Ondanks vele pogingen is het nog steeds niet gelukt deze tekens te ontcijferen en hierdoor is veel informatie over deze beschaving nog steeds ontoegankelijk. Het is zelfs niet bekend of het Indusschrift een beeldschrift is (dat voor iedere begrip een ander symbool heeft) of een taalkundig schrift. Er zijn verscheidene pogingen gedaan om de tekens te ontcijferen, maar niet één van deze ontcijferingen is algemeen aanvaard als de juiste. In totaal zijn er 3800 inscripties gevonden. De meeste hiervan bevatten een korte reeks symbolen, gemiddeld zo'n vier à vijf symbolen per inscriptie. De langste bekende inscriptie bevat zeventien symbolen. In totaal zijn er 417 verschillende symbolen geïdentificeerd.

Om te onderzoeken of het Indusschrift een beeldschrift is of niet, hebben de onderzoekers een Markovketen gebruikt. Deze Markovketen bevat voor ieder symbool een toestand, in totaal dus eindig veel. Verder is uit de beschikbare data een overgangsmatrix gemaakt, die voor iedere twee symbolen de kans geeft dat de ene gevolgd wordt door de andere. Oftewel, voor iedere twee toestanden is de overgangskans berekend van de ene naar de andere toestand. Ook is uit de data voor ieder symbool berekend wat de kans is dat een tekst begint of eindigt met dat symbool.

Uit deze berekeningen bleek dat de overgangskansen niet onafhankelijk zijn. Voor de meeste symbolen geldt dat er een aantal symbolen zijn die er vaak na komen, dat er anderen zijn die er vaak voor staan en

voor de overgebleven symbolen geldt dat er een hele kleine kans is om de twee symbolen in een tekst naast elkaar aan te treffen. Hieruit blijkt ook dat bepaalde symbolen vaak twee keer achter elkaar voorkomen, terwijl dat voor de meeste symbolen juist helemaal niet het geval is. Verder hadden symbolen vaak een voorkeur voor een bepaalde positie in de inscriptie. De kans om op een bepaalde positie voor te komen verschilt van symbool tot symbool, wat erop zou kunnen duiden dat de symbolen ook syntactische eigenschappen bezitten. Dit zijn allemaal aanwijzingen dat het Indusschrift waarschijnlijk geen beeldschrift is. Verder kan de Markovketen gebruikt worden om nieuwe stukken tekst te genereren, die voldoen aan de statistische eigenschappen van de bestaande stukken tekst. Ook kunnen gaten in bestaande stukken tekst met grote waarschijnlijkheid correct opgevuld worden door te kijken naar de symbolen die de grootste kans hebben om op de open plek te staan.

In andere gebieden in het westen van Azië zijn ook stukken tekst gevonden met dezelfde symbolen. Dit zijn gebieden waar de Indusbeschaving handel mee dreef. De onderzoekers hebben gekeken naar de waarschijnlijkheid die hun Markovketen aan deze teksten toekent. Er bleek dat de Markovketen aan deze teksten een veel lagere waarschijnlijkheid toekent dan aan de teksten uit de Indusvallei zelf. Volgens de onderzoekers zou dat erop kunnen duiden dat de symbolen van de Indusbeschaving door andere volkeren in hun taal gebruikt werden.

Bron: www.pnas.org

Als ik jou was

Bij de nieuwe editie van het wiskundeboek *Getal en Ruimte*, dat op veel middelbare scholen gebruikt wordt, zal software worden meegeleverd die intelligente feedback geeft. De technologie daarvoor is nu zover ontwikkeld dat het mogelijk is om dit grootschalig in te voeren.

Sinds 2005 wordt er aan de faculteit informatica van de Open Universiteit onderzoek gedaan naar dit soort software. De intelligente feedback is gebaseerd op oplossingsstrategieën. Het programma geeft uitwerkingen en leerlingen kunnen tijdens het maken van een som op verschillende momenten om een hint vragen. Ook herkent het programma veelgemaakte fouten. De software is nu ontwikkeld voor een aantal verschillende onderwerpen, zoals het oplossen van allerlei vergelijkingen en het werken met breuken en matrices. Door nieuwe concepten uit de informatie te gebruiken kan deze software veel gedetailleerdere feedback geven dan de huidige systemen.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Naar de maan

Nieuwe methodes om een computer grote getallen met elkaar te laten vermenigvuldigen hebben voor een doorbraak gezorgd in een oud wiskunde-probleem: het vinden van congruente getallen. Een congruent getal is een geheel getal dat de oppervlakte is van een rechthoekige driehoek, waarvan de lengtes van alle zijden rationale getallen zijn. Het kleinste congruente getal is 5, dat is de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden $3/2$, $20/3$ en $41/6$. Ook 6, 7, 13, 14, 15, 20 en 21 zijn congruente getallen.

Er waren al veel congruente getallen bekend, maar met de vernieuwde vermenigvuldigingsmethode zijn er nog eens 3.148.379.694 nieuwe congruente getallen gevonden. Hierdoor zijn op dit moment meer dan een biljoen congruente getallen bekend. De berekeningen zijn zo lang, dat ze onmogelijk door een mens uitgevoerd of gecontroleerd kunnen worden. Daarom zijn alle getallen op twee verschillende computers be-

rekend met verschillende algoritmen die door verschillende mensen geschreven zijn. De getallen waar het hier om gaat zijn zo groot dat ze, als ze met een normaal handschrift uitgeschreven zouden worden, van de aarde naar de maan zouden lopen en weer terug.

Er wordt al eeuwenlang gezocht naar congruente getallen. Zo zijn ze in verkapt vorm te vinden in een Arabisch manuscript uit de tiende eeuw. Hier wordt gevraagd: Voor welke gehele getallen N bestaat er een kwadraat van een rationaal getal, a^2 , zodanig dat $a^2 - N$ en $a^2 + N$ ook kwadraten van rationale getallen zijn? Veel bekende mensen hebben zich later met het probleem bezig gehouden. Zo toonde Fibonacci in de twaalfde eeuw aan dat 5 en 7 congruente getallen zijn en vermoedde hij dat 1 er geen was. Fermat toonde in de zestiende eeuw aan dat dit vermoeden juist was.

In 1915 waren alle congruente getallen onder 100 bekend en in 1952 bewees Kurt Heegner dat alle priemgetallen uit de rij 5, 13, 21, 29, ... congruent zijn. Maar er bestaat nog steeds geen algoritme om te bepalen of een gegeven getal congruent is of niet.

Bron: www.kennislink.nl

Eredoctoraat Onno Boxma

De Universiteit van Haifa heeft op 2 juni j.l. een eredoctoraat verleend aan Onno Boxma. Boxma is hoogleraar Stochastische Besliskunde aan de Faculteit Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven, en wetenschappelijk directeur van EURANDOM. Onlangs is hij ook voor een periode van drie jaar benoemd tot honorary professor aan de Department of Mathematical Sciences van Heriot-Watt University in Edinburgh. Zijn specialisme is de wachtrijtheorie; hij en zijn groep houden daarbij een open oog voor toepassingen van deze theorie op productie-, computer- en communicatienetwerken.

Bron: Wil Schilders



Onno Boxma

Een bubbelkje op zijn kant

Ruggero Gabbrielli, wiskundige aan de University of Bath, heeft een nieuw tegenvoorbeeld voor het vermoeden van Kelvin gevonden. Kelvin vroeg zich af hoe je de ruimte op kunt delen in objecten met hetzelfde volume, zó dat het oppervlak tussen de verschillende objecten zo klein mogelijk is. Oftewel, wat is de meest efficiënte manier om schuim te maken? Het vermoeden van Kelvin was dat deze optimale opdeling bestaat uit een afgeknotte octaëder, met veertien zijden, waarvan het oppervlak van de zeshoekige zijden licht gekromd is.

In 1994 vonden Denis Weaire en Robert Phelan, twee natuurkundigen van Trinity College in Dublin, door middel van computersimulaties een structuur die een nog kleiner oppervlak geeft. Hun schuim wordt opgebouwd uit onregelmatige twaalfvlakken en tetrakaidecaëders, oftewel veelvlakken bestaande uit twee zeshoeken en twaalf vijfhoeken,

met licht gekromde zijvlakken en met even grote inhoud. De Weaire-Phelan structuur geeft een verbetering van 0,3 procent ten opzichte van de oplossing van Kelvin.

Gabbrielli kwam in aanraking met schuim tijdens zijn promotieonderzoek in de werktuigbouwkunde aan de University of Bath. Hij hield zich bezig met materialen die gebruikt worden ter vervanging van menselijke botten, zoals kunstheupen. Tijdens zijn studie naar deze materialen bedacht hij een nieuwe structuur bestaande uit vier verschillende soorten veelvlakken. Hiervoor gebruikte hij een partiële differentiaalvergelijking die normaal gesproken gebruikt wordt bij tweedimensionale patroonvorming. Gabbrielli heeft deze differentiaalvergelijking nu toegepast op het driedimensionale probleem van schuimvorming. De schuimen die hij op deze manier kon maken lijken veel op schuimen zoals ze in de natuur voorkomen.

Het schuim van Gabbrielli is geen betere oplossing dan die van Weaire en Phelan, maar verslaat wel de oplossing van Kelvin. Voor het maken van zijn schuim heeft Gabbrielli nieuwe technieken gebruikt. Hij vermoedt dat als deze ideeën verder uitgewerkt en beter bestudeerd zullen worden, dat zijn aanpak zal leiden tot een nog efficiënter schuim of anders tot een bewijs dat het schuim van Weaire en Phelan optimaal is. Zijn resultaten zijn in augustus verschenen in het tijdschrift *Philosophical Magazine Letters*.

Bron: www.physorg.com

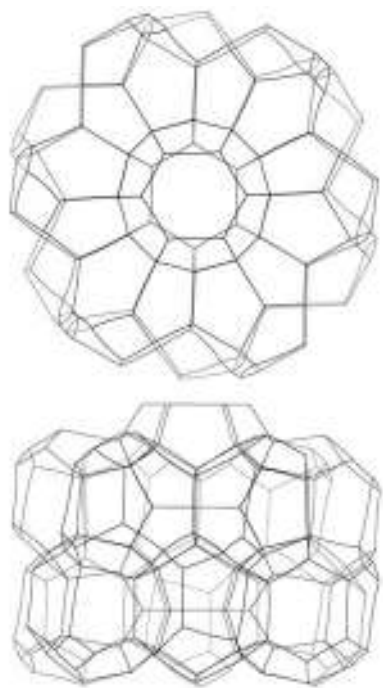


foto: Ruggero Gabbrielli

Het schuim van Ruggero Gabbrielli

Iedereen kan rekenen

Het Bartjens Rekendictee groeit langzaam uit tot een nationaal fenomeen. De organisatie verwachtte dit jaar zo'n 10.000 deelnemers en na de eerste paar dagen van de voorrondes lijkt deze verwachting reëel.

Het rekendictee wordt jaarlijks gehouden. Iedereen kan meedoen aan de voorronde via diverse websites door online een aantal rekenopgaven te maken. De mensen met de minste fouten en de snelste tijden worden daarna uitgenodigd voor de grote finale. Dit jaar werd die gehouden op 20 november. Op het moment dat dit stukje werd geschreven, was nog niet bekend wie de finale heeft gewonnen en nu

de gelukkige eigenaar is van de hoofdprijs, een glazen telraam.

Het dictee werd zes jaar geleden voor het eerst georganiseerd. Marjolein Kool, wiskundedocent uit Schalkwijk, bedacht toen de opgaven als een ludieke omlijsting van de heruitgave van *De Cijfferinghe*, het rekenboek van Willem Bartjens uit 1604 dat zo'n driehonderd jaar leidend is geweest in het rekenonderwijs. Intussen heeft Kool een team van acht mensen om zich heen verzameld die zich bezig houden met het dictee. Kool heeft overwogen om te stoppen met het samenstellen van het dictee omdat het veel tijd kost, maar vindt het zo leuk dat ze het toch nog een jaar doet. Ze wil andere mensen graag laten zien dat rekenen leuk kan zijn en voor iedereen is weggelegd.

Nieuw dit jaar was een aanmoedigingsprijs voor de beste jonge deelnemer. Die mag in 2010 mee met het wiskundezomerkamp van de Universiteit Leiden.

Bron: www.bndestem.nl

Meer studenten bedrijfswiskunde

Het aantal studenten dat bedrijfswiskunde studeert in Nederland neemt toe. In september van het afgelopen jaar zijn 167 studenten begonnen aan een opleiding bedrijfswiskunde in het hbo. Vorig jaar waren dat er nog 141. De Hogeschool van Amsterdam verzorgt op dit moment de grootste opleiding. Hier begonnen dit jaar 50 eerstejaars studenten. Daarna volgt de opleiding van Hogeschool InHolland met 40 eerstejaars. Deze opleiding wordt uitsluitend in het Engels aangeboden. In totaal zijn er vijf hogescholen in Nederland die een opleiding bedrijfswiskunde aanbieden.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Nederlands Mathematisch Congres 2010

Het 46-ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2010) vindt plaats in Utrecht op donderdag 22 en vrijdag 23 april 2010. Dit jaarlijkse congres is de ontmoetingsplek bij uitstek van wiskundig Nederland.

Naast hoofdvoordrachten zijn er minisymposia over verschillende onderwerpen uit de zuivere en toegepaste wiskunde. Zo zullen er minisymposia worden georganiseerd rond Stochastiek, Meetkunde, Analyse en Getaltheorie, maar ook rond De impact van nieuwe ICT-mogelijkheden op wiskundebeoefening, Geschiedenis van de wiskunde en Biowiskunde. Het congres geldt als officiële bijscholing voor leraren van het voortgezet onderwijs.

Bron: *Michiel Doorman*

Hans Kaper en Hendrik Dijkstra SIAM Fellows

In het septembernummer meldden we dat Henk van der Vorst tot SIAM fellow was benoemd. Later bleek ons dat bij dezelfde gelegenheid ook onze landgenoten Hans Kaper (Argonne National Laboratory en Georgetown University) en Hendrik Dijkstra (Universiteit Utrecht) tot SIAM fellow zijn benoemd.

Redactie

Klaas Landsman

IMAPP

Radboud Universiteit Nijmegen

Heyendaalseweg 135

6525 AJ Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Onderzoek

De vrije wil-stelling van Conway en Kochen

Bestaat toeval? Hebben mensen een vrije wil? In 2006 en 2009 verschenen twee opzienbarende artikelen van de bekende wiskundigen John Conway en Simon Kochen uit Princeton, waarin zij onder plausible aannamen – die neerkomen op slechts een klein deel van de kwantummechanica – bewijzen dat als experimentatoren over vrije wil beschikken, elementaire deeltjes in sommige situaties indeterministisch (en daarmee strikt onvoorspelbaar) gedrag vertonen. Klaas Landsman, hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit, legt het bewijs uit, inclusief de historische context.

De vraag of alle gebeurtenissen al bepaald zijn vóór ze plaatsvinden, en dus een noodzakelijk gevolg zijn van eerdere gebeurtenissen, of dat er ook strikt toevallige voorvallen zijn, wordt al sinds de klassieke oudheid gesteld. Presocratische als Democritus en Empedocles zagen toeval als een scheppende kracht, maar Plato achtte dit juist in strijd met de kosmische ordening. Ook de grote islamitische geleerde Omar Khayyam (1048-1123) meende dat “De eerste dag van de Schepping schreef wat de Dag des Oordeels zal lezen”.

De discussie kon echter pas scherp worden gevoerd toen het begrip Natuurwet met Descartes zijn intrede deed. De te beantwoorden vraag is dan of de heersende natuurwetten deterministisch zijn, in de zin dat de toekomst volgens deze wetten geheel door het heden is bepaald.

Volgens de klassieke mechanica van Newton is dat het geval (behoudens pathologische situaties waarin bijvoorbeeld de krachten niet aan een Lipschitz voorwaarde voldoen [14]), omdat de naar hem genoemde bewegingsvergelijkingen in het algemeen een unieke oplossing bij gegeven beginvoorwaarden hebben. Wie kent niet het citaat uit La-

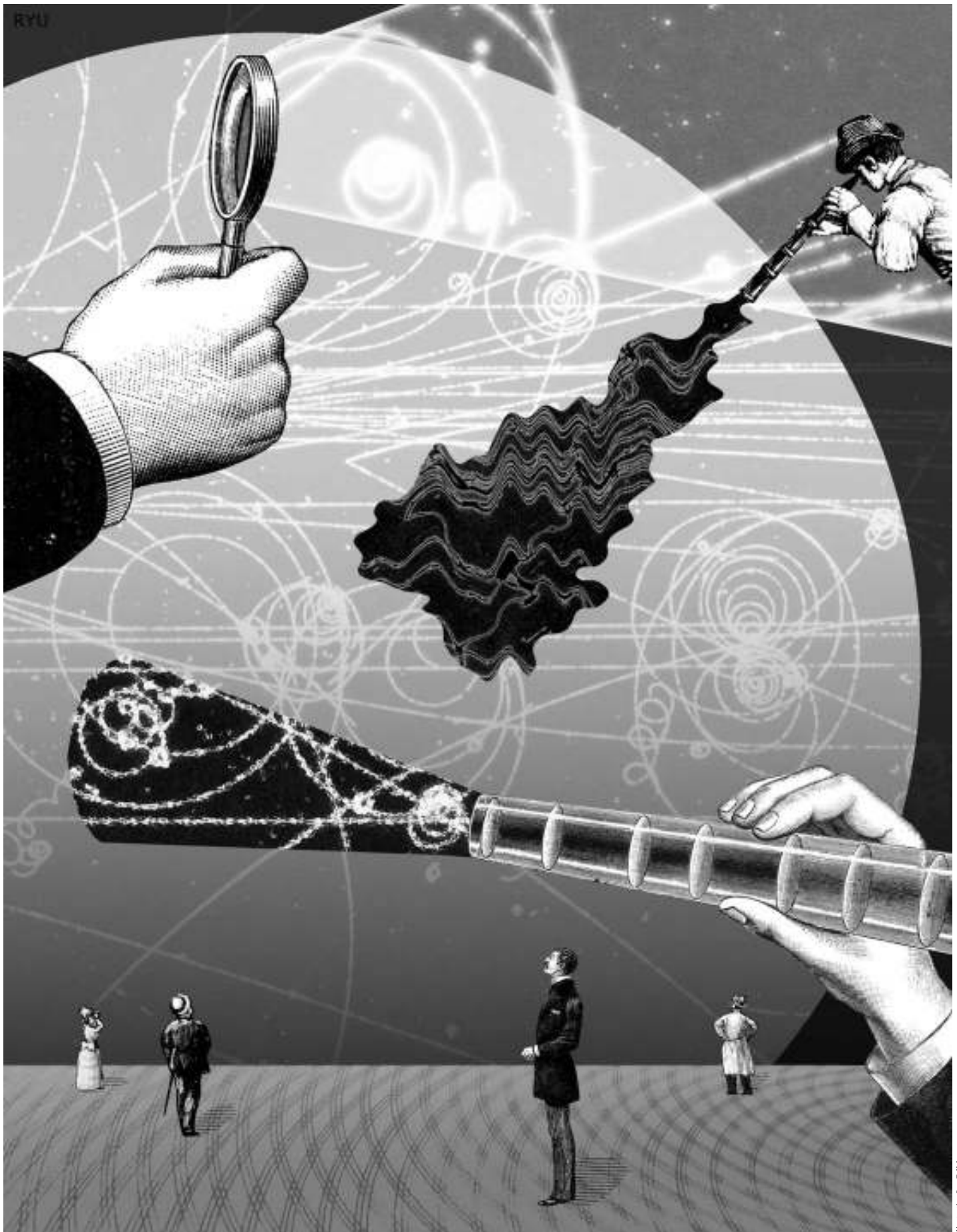
place's *Essai Philosophique sur les Probabilités*, waarin hij zich een superintelligent wezen voorstelt dat op een bepaald moment zowel alle krachten in de natuur kent als de toestand van alle deeltjes, zodat niets voor hem onzeker is en zowel de toekomst als het verleden zich voor hem ontvouwen?

Kwantummechanica

In één van de beroemdste artikelen van de zestiende eeuwse natuurkunde [19] beweerde Werner Heisenberg op grond van de in dat artikel afgeleide (en later naar de auteur genoemde) onzekerheidsrelatie tussen plaats en impuls dat de demon van Laplace de toestand van alle deeltjes volgens de kwantummechanica in principe niet zou kunnen kennen, en dat de natuur daarom indeterministisch was. Een groot logicus was Heisenberg klaarblijkelijk niet (met de ongeldigheid van het antecedent bij Laplace vervalt niet automatisch ook diens conclusie), maar de stemming keerde zich in die dagen duidelijk tegen het determinisme. Zo had Max Born al een jaar eerder in een eveneens beroemd artikel [6] verkondigd dat de kwantummechanica niet de vraag naar de precieze toestand van een sys-

teem van deeltjes na een botsingsproces kan beantwoorden (zoals de klassieke mechanica dat wel kan), maar slechts de vraag naar de kans op een bepaalde eindtoestand. Al spoedig gesteund door Heisenberg en Bohr, zag Born dit niet als een gebrek van deze theorie, maar als een weerspiegeling van een fundamentele eigenschap van de natuur: deze zou op microscopische schaal indeterministisch zijn.

De meeste fysici sloten zich bij deze conclusie aan, behalve Einstein, nota bene een van de grondleggers van de kwantumtheorie (en bovendien de eerste die binnen dat kader probabilistisch redeneerde): hij schreef in 1926 aan Born dat hij er van overtuigd was dat God (“der Alte”) niet dobbelt. Op de Solvay-conferentie van 1927 ging Einstein het gevecht aan met Bohr. In deze eerste fase van wat later het Einstein-Bohr debat zou gaan heten (zie [5, 15] voor primaire bronnen en [20, 25] voor een moderne interpretatie) probeerde Einstein de inconsistentie van de onzekerheidsrelaties van Heisenberg aan te tonen, maar dit lukte hem niet: gesteund door met name Wolfgang Pauli wist zijn opponent in ieder geval op dat moment al zijn argumenten te weerleggen. Daarop veranderde Einstein van strategie: hij accepteerde de *geldigheid* van het formalisme van de kwantumtheorie (waar de onzekerheidsrelaties direct uit volgen), en probeerde in de volgende fase van het debat de *onvolledigheid* van de theorie aan te tonen. Deze fase vond haar hoogtepunt in het artikel van Einstein, Podolsky en Rosen uit



1935 [16], waar we straks op terug komen.

Von Neumann

In de herfst van 1926 nam David Hilbert in Göttingen een nieuwe assistent aan voor zijn grondslagenonderzoek in de wiskunde. Deze assistent was Johann (Janos) von Neumann, die zich al op jonge leeftijd een naam had verworven met werk in de axiomatische verzamelingenleer. Hij zou ook belangrijk werk publiceren over Hilberts bewijstheorie, maar zijn aandacht ging, net als die van Hilbert zelf, toch vooral uit naar de kersverse kwantummechanica (waarvan Göttingen naast Kopenhagen het toonaangevende centrum was). Deze belangstelling leidde uiteindelijk tot het boek *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [26], waarin Von Neumann voor het eerst de moderne definitie van een Hilbert-ruimte geeft, de spectraalstelling voor zowel begrensde als onbegrensde zelfgeadjungeerde operatoren bewijst, en dit formalisme bovendien verbindt met de op dat moment nog nauwelijks begrepen kwantummechanica.

De belangstelling van Von Neumann was allerm minst beperkt tot de wiskundige aspecten van de kwantummechanica; zijn boek bevat uitvoerige discussies over zaken als entropie, metingen, en determinisme. Om de stelling van Kochen en Specker uit 1967 goed te begrijpen is het noodzakelijk om te weten hoe Von Neumann probeerde te bewijzen dat de natuur volgens de kwantummechanica indeterministisch is. Laat A de reële vector-ruimte van hermitische matrices (in het algemeen: begrensde zelfgeadjungeerde operatoren) op H zijn. Iedere toestand ψ als boven definieert een afbeelding $\mathcal{E}_\psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ door middel van $\mathcal{E}_\psi(a) = (\psi, a\psi)$. In het algemeen heeft deze verwachtingswaarde een dispersie $\mathcal{E}_\psi(a^2) - (\mathcal{E}_\psi(a))^2 > 0$ (tenzij ψ een eigenvector van a is, in welk geval de dispersie nul is). Indien men de toestand niet precies kent, maar een rij eenheidsvectoren (ψ_i) heeft met kansverdeling (λ_i) , $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_i \lambda_i = 1$ (zodat λ_i de kans is dat het systeem zich in de toestand ψ_i bevindt), dan verkrijgt men een algemener soort verwachtingswaarde, gegeven door $\mathcal{E} = \sum_i \lambda_i \mathcal{E}_{\psi_i}$, oftewel

$$\mathcal{E}(a) = \text{Sp}(\rho a), \quad (1)$$

waarbij Sp het spoor is (zelfs in het Nederlands ook wel *trace* genoemd), terwijl $\rho = \sum_i \lambda_i p_{\psi_i}$, met p_{ψ_i} de projectie op ψ_i ; dit is een positieve matrix met spoor 1 (omgekeerd is vanwege de spectraalstelling iedere positieve matrix met spoor 1 van de gegeven vorm). Afbeeldingen $\mathcal{E} : A \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

Hilbert-ruimten en kwantummechanica

Het begrip Hilbert-ruimte ontstond tussen 1904 en 1910 uit het werk van Hilbert, Erhard Schmidt, Frederic Riesz, Ernst Fischer, en anderen; de volgende abstracte definitie werd echter pas in 1927 gegeven door Von Neumann. Een (complexe) Hilbert-ruimte is een vector-ruimte over $\mathbb{C}$ met inproduct $(-, -)$ die volledig is in de bijbehorende norm $\|\psi\| = \sqrt{(\psi, \psi)}$. Het eenvoudigste voorbeeld, voldoende om de rest van dit artikel te begrijpen, is $\mathbb{C}^n$ met het standaard-inproduct $(z, w) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$, maar in de functionaalanalyse is men uiteraard vooral geïnteresseerd in oneindig-dimensionale Hilbert-ruimten.

Naast de Hilbert-ruimten zelf gaat het vooral om de operatoren daarop, dus lineaire afbeeldingen. Een operator op een eindig-dimensionale Hilbert-ruimte als $\mathbb{C}^n$ is (uitgedrukt in een bepaalde basis) niets anders dan een matrix; in het algemeen moet men verschil maken tussen begrensde en onbegrensde operatoren (de laatste zijn niet overal gedefinieerd). In beide gevallen wordt het uit de lineaire algebra bekende begrip van een hermitische matrix gegeneraliseerd tot een zelfgeadjungeerde operator.

Het verband tussen Hilbert-ruimten en kwantummechanica is in een notendop als volgt. Ten eerste worden de toestanden van een kwantumsysteem wiskundig beschreven door eenheidsvectoren ψ in een complexe Hilbert-ruimte H (waarbij twee eenheidsvectoren ψ en ϕ dezelfde toestand voorstellen als $\psi = z\phi$ voor een zekere $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$). Ten tweede zijn de observabele grootheden (zoals plaats, impuls, energie, enz.) zelfgeadjungeerde operatoren a op H . In het vervolg nemen we voor het gemak aan dat H eindig-dimensionaal is, zodat $H \cong \mathbb{C}^n$; de observabelen zijn dan dus gewoon hermitische matrices.

Het verband tussen deze twee postulaten is dat de gemiddelde waarde (of verwachtingswaarde) van een observabele a in een toestand ψ gelijk is aan $(\psi, a\psi)$. Een speciale klasse van observabelen correspondeert met zogenaamde ja/nee experimenten: vragen aan het fysische systeem waarop het antwoord van de Natuur slechts 'ja' of 'nee' kan zijn (een voorbeeld is: 'bevindt een deeltje zich in een bepaald gebied van de ruimte?'). Dit zijn de projecties, oftewel de zelfgeadjungeerde operatoren $p = p^*$ die tevens voldoen aan $p^2 = p$. Voor een eenheidsvector ψ wordt het reële getal $(\psi, p\psi)$, dat tussen 0 en 1 ligt, dan geïnterpreteerd als de kans dat het antwoord op de vraag p in de toestand ψ 'ja' luidt. Als $p\psi = \psi$ is die kans dus gelijk aan $(\psi, p\psi) = (\psi, \psi) = \|\psi\|^2 = 1$, want ψ is per definitie een eenheidsvector.

(1) hebben de volgende eigenschappen:

$$\mathcal{E}(1) = 1; \quad (2)$$

$$\mathcal{E}(a^2) \geq 0; \quad (3)$$

$$\mathcal{E}(sa + tb) = s\mathcal{E}(a) + t\mathcal{E}(b), \quad (4)$$

voor alle $s, t \in \mathbb{R}$ en $a, b \in A$.

Met Heisenberg in het achterhoofd zegt Von Neumann nu dat een deterministische theorie tenminste over voldoende veel verwachtingswaarden $\mathcal{E} : A \rightarrow \mathbb{R}$ moet beschikken die dispersievrij zijn, in de zin dat

$$\mathcal{E}(a^2) = \mathcal{E}(a)^2, \quad (5)$$

voor alle $a \in A$. Dergelijke afbeeldingen kan men 'verborgen toestanden' van het systeem noemen; zij zouden onder de kwantumtheorie liggen en de voorspellingen daarvan door uitmiddeling moeten reproduceren.

Welke eigenschappen heeft een verborgen toestand $\mathcal{E}$ nog meer, behalve (5) – en daarmee automatisch (3) – en de onschuldige normalisatie (2)? Nu komt de omstreden stap:

Von Neumann neemt aan dat $\mathcal{E}$ lineair is als in (4), net als in de kwantummechanica en de klassieke mechanica. Dit is voor hem voldoende om te bewijzen dat verborgen toestanden niet bestaan. Eerst bewijst hij dat een afbeelding $\mathcal{E} : A \rightarrow \mathbb{R}$ die aan (2), (3), (4) voldoet van de vorm (1) is, voor een zekere positieve matrix ρ met spoor 1. Een verborgen toestand $\mathcal{E}$ moet dan ook van de vorm (1) zijn. Maar dergelijke toestanden voldoen niet voor alle a aan (5), tegenspraak!

Als een echte wiskundige concludeert Von Neumann: 'Damit ist im Rahmen unserer Bedingungen die Entscheidung gefallen, und zwar gegen die Kausalität' (cursivering toegevoegd). Hij wijst er dus netjes op dat hij slechts onder bepaalde aannamen tot zijn resultaat is gekomen. Niettemin werd de zaak hiermee voor minstens 30 jaar als afgedaan beschouwd.

Kochen en Specker

Ofschoon het EPR-argument (van Einstein, Podolsky en Rosen) eerder verscheen dan dat van Kochen en Specker, is de gang van za-



Foto: Princeton University

Simon Kochen en John Conway. De plaatjes op het bord geven de tien assenstelsels die in het bewijs van de Kochen-Specker stelling hieronder voorkomen.

ken beter te begrijpen als we met het laatste beginnen. Al in 1935 wees de filosofe Grete Hermann op het onbevredigende karakter van Von Neumanns aanname dat $\mathcal{E}$ lineair is [21]. Von Neumann toont in zijn boek aan dat twee observabelen dan en slechts dan commuteren als ze beide een functie van een derde observeerbare zijn, wat fysisch precies het geval is als ze gelijktijdig gemeten kunnen worden en de metingen elkaar niet verstoren. Ook zelf merkt hij overigens op dat de lineariteit $\mathcal{E}(a + b) = \mathcal{E}(a) + \mathcal{E}(b)$ alleen fysisch gemotiveerd kan worden als $ab = ba$, maar hij laat zich toch meeslepen door zijn eigen formalisme van de kwantummechanica door deze eigenschap voor algemene a en b op te leggen. Zijn bewijs sluit daarom niet alle verborgen variabelen uit, maar alleen degene die voldoen aan zijn eis. Het bleek relatief eenvoudig om modellen op te schrijven die daar niet aan voldoen [3], en dit bracht de fysicus John Bell onafhankelijk tot soortgelijke kritiek als Hermann [2]. Bells artikel bevat overigens een primitieve versie van de onderstaande stelling van Kochen en Specker, die Bell afleidt uit een eerdere stelling van Gleason [18] (zodat sommigen van het *Bell-Kochen-Specker Theorem* spreken).

Het artikel van Kochen en Specker uit 1967 [24] lost dit probleem op door middel van de volgende stelling:

Voor Hilbert-ruimten van dimensie ≥ 3 bestaan er geen functies $\mathcal{E} : A \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoen aan de condities (2), (4) voor commuterende operatoren a en b , en (5).

Voor $H = \mathbb{C}^2$ bestaan er expliciete tegenbeelden. Het bewijs (met een vereenvoudiging van de laatste stap door Peres [28]) verloopt als volgt (zie [17] voor een ander eenvoudig bewijs).

De eerste stap is dat het resultaat voor de Hilbert-ruimte $\mathbb{C}^3$ impliceert dat de stel-

ling geldt in alle Hilbert-ruimten van dimensie ≥ 3 ; deze stap komt in een andere context al voor bij Gleason [18]. Neem nu een assenstelsel oftewel orthogonaal (niet noodzakelijk orthonormaal) frame $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ in $\mathbb{R}^3$. Dit correspondeert op de voor de hand liggende manier met een keuze van drie 1-dimensionale projecties (p_1, p_2, p_3) op $\mathbb{C}^3$ die loodrecht op elkaar staan (ofwel $p_1 p_2 = p_1 p_3 = p_2 p_3 = 0$) en voldoen aan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$; hierbij is p_i de projectie op $\mathbf{u}_i$. De standaardkeuze van de x , y , en z -as geeft bijvoorbeeld

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Men kan deze situatie fysisch realiseren door een systeem met spin 1: de matrix p_k is dan de projectie op de eigenvector van J_k met eigenwaarde 0, met

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In het algemeen is $J_{\mathbf{u}}$ de matrix die de component van de spin langs de $\mathbf{u}$ -richting representeert. Met andere woorden, p_k is de ja/nee vraag ' $J_k = 0$ ' of de spin J_k van het systeem in de k -richting gelijk is aan nul; het is hierbij opmerkelijk dat ofschoon de J_k niet onderling commuteren (er geldt immers $[J_1, J_2] = iJ_3$ etc.), de projecties p_k dat wél doen. We kun-

nen de drie vragen ' $J_1 = 0?$ ', ' $J_2 = 0?$ ', ' $J_3 = 0?$ ' voor een gegeven assenstelsel dus tegelijk stellen; dit is echter niet het geval voor vragen die bij verschillende assenstelsels horen.

Nu volgt direct dat voor een functie $\mathcal{E} : A \rightarrow \mathbb{R}$ (waar in dit geval A de ruimte van symmetrische reële 3×3 matrices is) die voldoet aan de aannamen in de stelling van Kochen en Specker, geldt

$$\mathcal{E}(p_1) + \mathcal{E}(p_2) + \mathcal{E}(p_3) = 1, \quad (6)$$

en omdat wegens $p^2 = p$ tevens geldt dat

$$\mathcal{E}(p) = \mathcal{E}(p^2) = (\mathcal{E}(p))^2,$$

kan $\mathcal{E}$ op een projectie p slechts de waarden 0 of 1 aannemen. De functie $\mathcal{E}$ beeldt daarom precies één van de drie projecties (p_1, p_2, p_3) op 1 af, en de andere twee op 0. Met andere woorden, de mogelijke antwoorden op de combinatievraag ' $J_1 = 0?$ ', ' $J_2 = 0?$ ', ' $J_3 = 0?$ ' zijn slechts '(ja, nee, nee)', '(nee, ja, nee)', en '(nee, nee, ja)'.

Bekijk nu de volgende 10 assenstelsels:

$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$
(0, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)
(1, 0, 1)	(-1, 0, 1)	(0, 1, 0)
(0, 1, 1)	(0, -1, 1)	(1, 0, 0)
(1, -1, $\sqrt{2}$)	(-1, 1, $\sqrt{2}$)	(1, 1, 0)
(1, 0, $\sqrt{2}$)	($-\sqrt{2}$, 0, 1)	(0, 1, 0)
($\sqrt{2}$, 1, 1)	(0, -1, 1)	($-\sqrt{2}$, 1, 1)
($\sqrt{2}$, 0, 1)	(0, 1, 0)	(-1, 0, $\sqrt{2}$)
(1, 1, $\sqrt{2}$)	(1, -1, 0)	(-1, -1, $\sqrt{2}$)
(0, 1, $\sqrt{2}$)	(1, 0, 0)	(0, $-\sqrt{2}$, 1)
(1, $\sqrt{2}$, 1)	(-1, 0, 1)	(1, $-\sqrt{2}$, 1)

De bewering is dat er geen $\mathcal{E}$ bestaat die volgens de bovenstaande regel waarden 0 of 1 toekent aan deze vectoren (of beter gezegd, aan de bijbehorende projecties). De essentie van het argument is dat een gegeven vector in meerdere assenstelsels voorkomt. Stel dat er zo'n $\mathcal{E}$ is. Zonder verlies van algemeenheid beelden we in het eerste stelsel (0, 0, 1) af op 1 en de andere twee vectoren op 0. In het tweede stelsel moet dan ofwel (1, 0, 1) ofwel (-1, 0, 1) naar 1 (en de andere naar 0). Het maakt niet uit welke keuze wordt gemaakt; we sturen (1, 0, 1) naar 1. Ook in de derde en vierde rij ligt het beeld van $\mathbf{u}_3$ vast door de eerdere keuzen, en kiezen we er steeds voor $\mathbf{u}_1$ naar 1 te sturen (andere keuzes geven een soortgelijke tegenspraak). Maar daarna ligt alles vast. In de vijfde rij kwam (0, 1, 0) al eerder voor en staat ($-\sqrt{2}$, 0, 1) loodrecht op (1, -1, $\sqrt{2}$) uit

de vierde rij; omdat die laatste naar 1 gaat, moet $(-\sqrt{2}, 0, 1)$ naar 0. Zo voortredenerend moeten alle vectoren $\mathbf{u}_1$ naar 1 en alle $\mathbf{u}_2$ en $\mathbf{u}_3$ naar 0. Nu komt het slotakkoord: de vectoren $(1, 0, 0)$, $(0, \sqrt{2}, 1)$ en $(0, -1, \sqrt{2})$ zijn orthogonaal, en $\mathcal{E}$ zou dus precies één van hen naar 1 moeten sturen. Maar de eerste gaat naar 0 volgens rij 1, de tweede staat loodrecht op $(1, -1, \sqrt{2})$ uit rij 4 en moet dus ook naar 0, terwijl de derde loodrecht staat op $(1, \sqrt{2}, 1)$ uit rij 10 en daarom eveneens op 0 moet worden afgebeeld. Tegenspraak!

Uit dit bewijs volgt dat de stelling van Kochen en Specker in feite sterker is dan de formulering suggereert: niet alleen bestaat er geen functie $\mathcal{E} : A \rightarrow \mathbb{R}$ met de gegeven eigenschappen, er bestaat zelfs geen $\mathcal{E}$ die de verzameling van 33 vectoren uit het bewijs op $\{0, 1\}$ afbeeldt, zodanig dat van ieder orthogonaal tripel precies één vector naar 1 gaat. Fysisch betekent dit dat de vragen ‘ $J_{\mathbf{u}} = 0?$ ’ niet voor al deze 33 vectoren $\mathbf{u}$ op consistente wijze met ja of nee kunnen worden beantwoord.

Er zijn ook diepe verbanden, ontdekt door Roger Penrose in de 80er jaren, tussen dit type bewijs en de meetkunde van polyhedra; zie [1, 8]. Zo is de beroemde lithografie *Waterlerval* van M.C. Escher gemotiveerd door het polyhedron dat door de bovengenoemde 33 vectoren in $\mathbb{R}^3$ wordt opgespannen. Soortgelijke constructies in $\mathbb{C}^4$ blijken verband te houden met het worteltralie van de exceptionele Lie algebra E_8 ; zie [11] (dit was de oorspronkelijke reden dat Conway in deze kwestie geïnteresseerd raakte). Ten slotte is er ook een interessante logische interpretatie van de gegeven redenering [8, 24].

EPR

Na deze sprong voorwaarts in de tijd pakken we nu de draad weer op in 1935. Einstein gaf in dat jaar (met zijn medewerkers Podolsky en Rosen) een totaal nieuwe draai aan zijn debat met Bohr [16]. Opmerkelijk is daarbij dat hun artikel destijds algemeen werd beschouwd als een wanhoopspoging van een achterhaalde figuur om een al verloren discussie nog ten goede te keren [25, 27], terwijl het nu het meest geciteerde werk uit de zoste eeuwse natuurkunde is.

Het oorspronkelijke EPR-argument maakt gebruik van de observabelen plaats en impuls, die fysisch weliswaar aanschouwelijk zijn, maar wiskundig worden gegeven door onbegrensde operatoren die bovendien een continu spectrum hebben. De redenering is duidelijker als met spin wordt gewerkt, zoals we nu (in navolging van velen) zullen doen.

Als een kwantsysteem S_i als toestandsruimte een Hilbert-ruimte H_i heeft, $i = 1, 2$, dan heeft het gecombineerde systeem als toestandsruimte het tensorproduct $H_1 \otimes H_2$. Een paar van kwantumdeeltjes met spin 1 heeft dus als toestandsruimte $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Deze ruimte bevat een bijzondere toestand waarin de totale spin van het systeem gelijk is aan 0; dit is de eenheidsvector

$$\psi_0 = \frac{\mathbf{e}_1^{(1)} \otimes \mathbf{e}_1^{(2)} + \mathbf{e}_2^{(1)} \otimes \mathbf{e}_2^{(2)} + \mathbf{e}_3^{(1)} \otimes \mathbf{e}_3^{(2)}}{\sqrt{3}},$$

waarin $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de standaardbasis van $\mathbb{C}^3$ is, en $\mathbf{e}_k^{(1)}$ en $\mathbf{e}_k^{(2)}$ de kopieën van de basisvector $\mathbf{e}_k$ in respectievelijk de eerste en de tweede factor $\mathbb{C}^3$ in het tensorproduct zijn. Evenzo krijgen de projecties p_k en de spinoperatoren J_k als boven een extra label $p_k^{(i)}$, $J_k^{(i)}$, zodat $p_k^{(1)} = p_k \otimes 1$, $p_k^{(2)} = 1 \otimes p_k$, etc. De projecties $p_k^{(1)}$ en $p_l^{(2)}$ commuteren voor alle $k, l = 1, 2, 3$, zelfs voor verschillende assenstelsels voor deeltje 1 en deeltje 2. We kunnen dus een willekeurige vraag (inclusief toegelaten combinaties van vragen) aan deeltje 1 tegelijk stellen met een andere vraag (of combinatie) aan deeltje 2.

Nu volgt er iets zeer opmerkelijks. In de gegeven toestand is de kans op het antwoord ‘ja’ op ieder van de vragen ‘ $J_k^{(i)} = 0?$ ’, gesteld aan één van de twee systemen, gelijk aan $1/3$. Indien we echter *dezelfde* vraag ‘ $J_k = 0?$ ’ aan de beide deeltjes stellen, en dus de projectie $p_k^{(1)} \otimes p_k^{(2)}$ meten, is de kans op het antwoord ‘(ja, ja)’ gelijk aan $1/3$ en die op ‘(nee, nee)’ $2/3$; de kans op de antwoorden ‘(ja, nee)’ en ‘(nee, ja)’ is nul. Het ene deeltje geeft op *dezelfde* vraag dus altijd *hetzelfde* antwoord als het andere, al is dit antwoord in ieder geval volgens de kwantummechanica onvoorspelbaar. Dit heet tegenwoordig een EPR-correlatie en vormt de basis van de kwantumcryptografie en de kwantum-informatietheorie.

Het trio EPR redeneert nu (geparafraseerd) als volgt. Als we aan deeltje 1 vragen of $J_k = 0$, krijgen we een bepaald antwoord. We hoeven diezelfde vraag dan niet meer aan deeltje 2 te (laten) stellen, want het antwoord is bekend. Als nu de beide deeltjes zeer ver van elkaar verwijderd zijn, mag het voor deeltje 2 niet uitmaken wat we met deeltje 1 doen; dit is Einsteins eis van lokaliteit van de natuurkunde. Daarom moet het antwoord op de vraag aan deeltje 2 sowieso al bekend zijn, of we de vraag aan deeltje 1 stellen of niet. Dit is echter niet wat de kwantummechanica zegt: die beweert dat als we niets aan deeltje 1 vragen, in de gegeven toestand ψ_0 beide ant-

woorden bij deeltje 2 met een bepaalde kans mogelijk zijn, als de vraag daaraan gesteld wordt. De kwantummechanica is volgens EPR dus onvolledig. Het is zelfs nog erger dan het lijkt, want het argument kan herhaald worden met verschillende vragen aan deeltje 1. Daar volgt dan uit dat het antwoord op alle mogelijke vragen aan deeltje 2 in principe al bekend moet zijn, zelfs dat op vragen die corresponderen met niet-commuterende projecties en daarom volgens de kwantummechanica helemaal niet tegelijk gesteld kunnen worden.

Bohr

Niets Bohr publiceerde al na zes weken een antwoord op het EPR-argument [4]. Dit antwoord is, zoals de meeste geschriften van Bohr, nogal wollig, maar een aantal punten zijn toch duidelijk. Ten eerste is Bohr niet onder de indruk van het EPR-argument, hij ziet er eigenlijk niets nieuws in. Dit standpunt zou hij later herhalen [5] en het blijkt ook uit andere bronnen dat hij er zo over dacht [27]. Ten tweede ziet hij de zwakte van hun redenering in het feit dat EPR geen rekening houden met de meetopstelling die nodig is om de vragen aan de deeltjes te stellen. In het bijzonder zegt hij dat de meetopstelling bij deeltje 1 wel degelijk invloed heeft op de gang van zaken bij deeltje 2, en wel op “*the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behavior of the system*”. Boekenkasten zijn volgeschreven over de mogelijke betekenis van dit zinsdeel, waarbij mag worden opgemerkt dat Bohr juist EPR dubbelzinnigheid verwijt.

Hoe dan ook, als Bohr langer had nagedacht over het probleem, Einstein serieuzer had genomen, en wat wiskunde van zijn broer Harald had geleerd, zou hij misschien de stelling van Kochen en Specker hebben gevonden en als onmiddellijke weerlegging van het EPR-argument kunnen publiceren. Dat laatste leidt namelijk precies tot de waardebepaling die Kochen en Specker uitsluiten. Hierbij is het van belang dat Einstein de kwantummechanica in 1935 als een correcte, maar onvolledige theorie zag; hij accepteerde dus integraal de geldigheid van haar voorspellingen.

Het antwoord dat Bohr wél gaf, zou door Einstein aangegrepen hebben kunnen worden om het debat op de volgende wijze voort te zetten (dit gebeurde echter niet; de volgende discussie stamt uit de jaren ‘60 [2]). In de klassiek natuurkunde leest een (goede) meting een al bestaande waarde van een grootte af. Een deterministische theorie voorspelt dergelijke meetwaarden, die samenvallen met werkelijke waarden die niet door de

meting zijn beïnvloed. Dit was de door Einstein in iedere fysische theorie gewenste situatie, maar Kochen en Specker tonen aan dat dit ideaal in ieder geval in de kwantumtheorie een illusie is. Bohr en Heisenberg gaan verder: zij beweren niet alleen dat meetresultaten in zekere zin door de metingen zelf gecreëerd worden en van tevoren nog niet bestonden, maar tevens dat de aldus gevonden meetuitkomsten niet door een deterministische theorie beschreven kunnen worden.

De tweede bewering staat in principe los van de eerste, en een vastberaden determinist zou een positie tussen de klassieke en de kwantummechanica in kunnen nemen door vol te houden dat meetresultaten weliswaar vóór de meting nog niet bestonden, maar wel degelijk voorspeld kunnen worden door middel van een deterministische theorie die dieper graaft dan de kwantummechanica en het meetproces in detail beschrijft (juist dat laatste is volgens Bohr en Heisenberg onmogelijk). Het is deze positie, die men *contextueel determinisme* zou kunnen noemen, die Bohr op een presenteerblad aan Einstein aanbiedt. De stelling van Kochen en Specker sluit deze positie niet uit: hun bewijs loopt direct al spaak op de aanname dat $\mathcal{E}$ een functie van A naar $\mathbb{R}$ is. Een contextuele waarde van een projectie p hangt echter in principe af van de totale meting, en dus van het tripel waar p onderdeel van is (in het algemeen hangt een meting van een observabele a af van de keuze van een maximale commutatieve deelalgebra van A waarin a bevat is; een assenstelsel geeft zo'n keuze).

De ironie van EPR is daarmee tweevoudig. Ten eerste vormen de EPR-correlaties de meest spectaculaire voorspelling van de kwantummechanica. Einstein zag deze correlaties echter als *reductio ad absurdum* argument tegen de theorie, terwijl Bohr, die een gat in de lucht had moeten springen bij deze bijzondere eigenschap van zijn levenswerk, in zijn onvermogen Einstein serieus te nemen het belang ervan totaal over het hoofd zag. Ten tweede gaf het antwoord van Bohr, bedoeld om EPR te weerleggen, Einstein juist een potentiële troef in handen, namelijk het contextueel determinisme (al zou hij deze kaart nooit spelen). En juist de EPR-correlaties maken, als cruciaal ingrediënt van de stelling van Conway en Kochen, ook een einde aan deze hoop.

Conway en Kochen

In [12–13] (zie ook [10]) bewijzen Conway en Kochen dat de conjunctie van de volgende aannamen inconsistent is:

- i. Kwantumtheorie van een spin-1 systeem;
- ii. EPR-correlaties tussen twee spin-1 systemen;
- iii. (Contextueel) determinisme;
- iv. Zwakke lokaliteit;
- v. Vrije wil van de experimentator.

De precieze betekenis van deze termen (met name de laatste!) zal blijken uit het vervolg.

Het argument speelt zich af rond een gelijktijdige (preciezer: ruimteachtig gescheiden) meting aan twee ver van elkaar verwijderde deeltjes met spin 1 in de toestand ψ_0 van totale spin 0, zie boven. Met aanname (iii) wordt dan bedoeld dat er een functie V_i bestaat die de uitkomst van een meting aan deeltje i voorspelt en af mag hangen van de geschiedenis G_i van deeltje i (technisch gesproken: van alles wat zich ooit in de achterwaartse lichtkegel ten opzichte van de plaats en tijd van de meting heeft afgespeeld), van de context bij i , en van de context bij de andere deeltjes. We gebruiken de notatie

$$V_i(p_1^{(i)} | G_i, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}) \in \{0, 1\}$$

voor het resultaat van de meting van p_1 van deeltje i in de context waarin aan deeltje i tevens p_2 en p_3 worden gemeten, met het tripel van projecties (p_1, p_2, p_3) als bij Kochen–Specker (ofwel ieder 1-dimensionaal, onderling orthogonaal, en $p_1 + p_2 + p_3 = 1$). In principe zou deze functie ook af kunnen hangen van de projecties die aan het andere deeltje worden gemeten, maar deze afhankelijkheid wordt per definitie door aanname (iv) uitgesloten: de *uitkomst* van een meting aan deeltje 1 hangt volgens deze aanname niet af van de *context* van mogelijke metingen aan deeltje 2 (maar mogelijk wel van het *resultaat* daarvan), en vice versa. Voor alle duidelijkheid: als bij deeltje i de drie projecties (p_1, p_2, p_3) tegelijk worden gemeten, krijgen we als uitkomst drie getallen (v_1, v_2, v_3) die in bovenstaande notatie worden gegeven door $v_1 = V_i(p_1^{(i)} | G_i, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})$, etcetera. Aanname (i) geeft dan

$$\begin{aligned} &V_i(p_1^{(i)} | G_i, p_2^{(i)}, p_3^{(i)}) + \\ &V_i(p_2^{(i)} | G_i, p_1^{(i)}, p_3^{(i)}) + \\ &V_i(p_3^{(i)} | G_i, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}) = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

Het is nu essentieel dat de keuze om p_1 bij deeltje i te meten niet door de geschiedenis G_i wordt afgedwongen, maar volgens aanname (v) vrij is: de functie V_i moet daarom bij *dezelfde* G_i ook voor willekeurige andere projecties en eventueel daarbij gekozen contexten gedefinieerd zijn. Vgl. (7) geldt dan voor *alle* tripels (p_1, p_2, p_3) als boven. Aanname (ii) impliceert nu

$$\begin{aligned} V_1(p_1^{(1)} | G_1, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}) = \\ V_2(p_1^{(2)} | G_2, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}), \end{aligned} \quad (8)$$

waarbij het tripel (p_1, p_2, p_3) dat aan deeltje 2 wordt gemeten niet identiek hoeft te zijn aan het tripel (p_1, p_2, p_3) bij deeltje 1. Vergelijking (8) is een relatie van de vorm

$$f_1(x, y, \dots) = f_2(x, z, \dots),$$

waaruit volgt dat f_1 en f_2 beide gelijk moeten zijn aan een functie f die slechts af kan hangen van x en mogelijke andere gemeenschappelijke variabelen van f_1 en f_2 . Dus

$$V_1(p_1^{(1)} | G_1, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}) = V(p_1, G_1 \wedge G_2),$$

voor een zekere functie V , waarbij het symbool $G_1 \wedge G_2$ staat voor de gemeenschappelijke geschiedenis van deeltjes 1 en 2 ten opzichte van de tweevoudige meting (dit is de doorsnede van de beide achterwaartse lichtkegels ten opzichte van de metingen). Met de notatie $\mathcal{E}(p) = V(p, G_1 \wedge G_2)$, waarbij $G_1 \wedge G_2$ in het rechterlid als constante wordt beschouwd, volgt dan uit (3) dat $\mathcal{E}$ aan (6) moet voldoen. Dit geeft echter een tegenspraak met Kochen–Specker, volgens welke stelling een dergelijke functie $\mathcal{E}$ niet kan bestaan.

Discussie

Ofschoon Conway en Kochen zeggen tien jaar aan hun stelling gewerkt te hebben, was het stramien van het argument al lang bekend; zie [7, 9, 22, 30] (Kochen antwoordt op dit soort opmerkingen dat hij het basisidee al eerder had bedacht maar nooit gepubliceerd [11]). Hoe dan ook heeft het argument een aangename scherpte die bij andere auteurs op dit terrein nog wel eens ontbreekt. We kunnen ons daarom afvragen welke van de vijf aannamen verworpen moet worden. Gezien de rotsvaste theoretische status en experimentele bevestiging van de eerste twee aannamen, komen daartoe slechts de laatste drie in aanmerking.

Conway en Kochen zijn hier stellig over: determinisme sneuvelt (in de vorm van aanname (iii)). Deze keuze houdt in dat hun stelling wordt geïnterpreteerd als de implicatie *Vrije Wil* $\rightarrow$ *Indeterminisme*, waarbij het linkerlid aan de mens wordt toegeschreven en het rechterlid aan elementaire deeltjes (Conway en Kochen spreken zelfs in het laatste verband van vrije wil). Zoals ze in [12] opmerken (zie ook [23]) kan men de aanname van Vrije Wil echter vervangen door de in de fysica zeer gebruikelijke aanname dat een dynamische theorie gedefinieerd moet zijn voor willekeurige beginvoorwaarden. Een andere her-

formulering van aanname (v) is dat de factoren die (in een deterministische theorie) de instelling van een experiment bepalen (en dat kan zowel via het brein van de experimentator als via een geautomatiseerde opzet verlopen) onafhankelijk zijn van de factoren die de respons op dat experiment bepalen. In beide gevallen is de conclusie feitelijk dezelfde als die uit de beroemde Bell-ongelijkheden, namelijk dat kwantummechanica incompatibel is met de combinatie van determinisme én zwakke lokaliteit [8, 29].

Gerard 't Hooft (en, gezien diens uitgesproken opvattingen over de vrije wil, ongetwijfeld ook Albert Einstein) verwerpt daarentegen de vrije wil; in een deterministisch Universum is tenslotte alles bepaald. Dit standpunt wordt echter meestal als een samenzweringstheorie afgedaan, hetgeen men het duidelijkst ziet uit de tweede herformulering van aanname (v): dergelijke 'superdeterministen' moeten volhouden dat de oorzaken van de keuzes die experimentatoren (of random-generatoren) ma-

ken wel degelijk overlappen met de factoren die het gedrag van elementaire deeltjes in hun experimenten bepalen. Vanuit Kantiaans standpunt tenslotte lijkt het verwerpen van aanname (v) in strijd met een noodzakelijke voorwaarde voor het überhaupt bedrijven van wetenschap: het vrij kiezen van experimenten of 'vragen aan de natuur'.

Volgelingen van de fysicus en mysticus David Bohm geven ten slotte de zwakke lokaliteit op; deze keuze is echter niet in overeenstemming te brengen met de (speciale) relativiteitstheorie van Einstein en heeft dan ook nauwelijks aanhangers. De kwantummechanica is zelf weliswaar niet strikt lokaal vanwege de daarin optredende EPR-correlaties, maar die blijken niet tot een conflict met de speciale relativiteitstheorie te leiden. Zij is wel zwak lokaal in de zin dat de conditionele waarschijnlijkheden W_i (die in de kwantumtheorie de plaats innemen van de functies V_i in de bovenstaande deterministische opzet) niet van de meetcontext bij het andere

deeltje afhangen (deze eigenschap wordt ook wel *parameter independence* genoemd [8]).

Tot slot een filosofische opmerking in de geest van Kant. Zelfs met de positie van Conway en Kochen is niet bewezen dat de natuur in absolute zin, oftewel *an sich*, indeterministisch is. Hun stelling slaat op het (in)deterministische karakter van *meetresultaten*. Deze worden volgens Bohr – en hierin heeft hij het gelijk volledig aan zijn zijde – verkregen door als het ware door een klassieke bril naar de kwantumwereld te kijken [5]. Daarom is de natuur hoogstens indeterministisch zoals zij zich, via het doen van experimenten, *aan ons voordoet*. De Schrödinger-vergelijking van een geïsoleerd kwantumsysteem is (bij een voldoende reguliere potentiaal) minstens zo deterministisch als de bewegingsvergelijkingen van Newton [14]: de eerste heeft *altijd* een oplossing die voor alle tijden is gedefinieerd. Het is de menselijke interventie die de kwantummechanica indeterministisch maakt. 

Referenties

- 1 P.K. Aravind, 'How Reye's configuration helps in proving the Bell-Kochen-Specker theorem: a curious geometrical tale', *Foundations of Physics Letters* **13** (2000), pp. 499–519.
- 2 John S. Bell, 'On the problem of hidden variables in quantum mechanics', *Reviews in Modern Physics* **38** (1966), pp. 447–475.
- 3 David Bohm, 'A suggested interpretation of quantum theory in terms of "hidden variables", Parts I, II', *Physical Review* **85** (1952), pp. 166–170, pp. 180–193.
- 4 Niels Bohr, 'Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?', *Physical Review* **48** (1935), pp. 696–701.
- 5 Niels Bohr, 'Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics', *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp. 201–241, Ed. P.A. Schilpp, Open Court, La Salle, 1949.
- 6 Max Born, 'Quantenmechanik der Stoßvorgänge', *Zeitschrift für Physik* **38** (1926), pp. 803–827.
- 7 Harvey Brown and George Svetlichny, 'Nonlocality and Gleason's lemma. Part I. Deterministic theories', *Foundations of Physics* **20** (1990), pp. 1379–1387.
- 8 Jeffrey Bub, *Interpreting the Quantum World*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- 9 Rob Clifton, 'Getting contextual and nonlocal elements-of-reality the easy way', *American Journal of Physics* **61** (1993), pp. 443–447.
- 10 John Conway, 'Six video lectures on the Free Will Theorem', <http://paw.princeton.edu/issues/2009/07/15/pages/6596/index.xml>.
- 11 John Conway and Simon Kochen, 'The geometry of the quantum paradoxes', *Quantum [Un]speakables: From Bell to Quantum Information*, pp. 257–270, Eds. R.A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer, Berlin, 2002.
- 12 John Conway and Simon Kochen, 'The Free Will Theorem', *Foundations of Physics* **36** (2006), pp. 1441–1473.
- 13 John Conway and Simon Kochen, 'The Strong Free Will Theorem', *Notices of the AMS* **56** (2009), pp. 226–232.
- 14 John Earman, 'Aspects of determinism in modern physics', *Handbook of the Philosophy of Science Vol. 2: Philosophy of Physics, Part B*, pp. 1369–1434, Eds. J. Butterfield and J. Earman, North-Holland, Elsevier, Amsterdam, 2007.
- 15 Albert Einstein, 'Remarks to the essays appearing in this collective volume (Reply to criticisms)', *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pp. 663–688, Ed. P.A. Schilpp, Open Court, La Salle, 1949.
- 16 Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen, 'Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?' *Physical Review* **47** (1935), pp. 777–780.
- 17 Richard Gill and Michael Keane, 'A geometric proof of the Kochen-Specker no-go theorem', *Journal of Physics A* **29** (1996), pp. L289–L291.
- 18 Andrew Gleason, 'Measures on the closed subspaces of Hilbert spaces', *Journal of Mathematics and Mechanics* **6** (1957), pp. 885–893. Het resultaat van dit artikel impliceert de stelling van Kochen en Specker, maar was niet geformuleerd in de context van verborgen variabelen en had geen impact op de fysica.
- 19 Werner Heisenberg, 'Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik', *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), pp. 172–198.
- 20 Carsten Held, *Die Bohr-Einstein-Debatte: Quantenmechanik und Physikalische Wirklichkeit*, Schöningh, Paderborn, 1998.
- 21 Grete Hermann, 'Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik', *Abhandlungen der Fries'schen Schule* **6**(2) (1935), pp. 69–152. De relevante sectie daarvan is te vinden op www.phys.uu.nl/igg/seevinck/trans.pdf. Zie ook Caroline Herzenberg, 'Grete Hermann: An early contributor to quantum theory', [arXiv:0812.3986](http://arxiv.org/abs/0812.3986) en Michiel Seevinck, 'Historical and conceptual aspects of Von Neumann's no hidden variables argument', Utrecht IGG Colloquium 7-10-2004, slides op www.phys.uu.nl/igg/seevinck.
- 22 Peter Heywood and Michael Redhead, 'Nonlocality and the Kochen-Specker paradox', *Foundations of Physics* **13** (1983), pp. 481–499. Michael Redhead, *Incompleteness, Nonlocality, and Realism*, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- 23 Gerard 't Hooft, 'On the free-will postulate in quantum mechanics', [arXiv:quant-ph/0701097](http://arxiv.org/abs/0701097).
- 24 Simon Kochen and Ernst Specker, 'The problem of hidden variables in quantum mechanics', *Journal of Mathematics and Mechanics* **17** (1967), pp. 59–87.
- 25 Klaas Landsman, 'When champions meet: Re-thinking the Bohr-Einstein debate', *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **37** (2006), pp. 212–242.
- 26 Johann von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.
- 27 Abraham Pais, *Niels Bohr's Times: In Physics, Philosophy, and Polity*, Oxford University Press, Oxford, 1991.
- 28 Asher Peres, 'Two simple proofs of the Kochen-Specker Theorem', *Journal of Physics A* **24**, pp. L175–L178 (1991). Asher Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- 29 Abner Shimony, 'Bell's Theorem', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2009 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/bell-theorem/>.
- 30 Allen Stairs, 'Quantum logic, realism, and value definiteness', *Philosophy of Science* **50** (1983), pp. 578–602.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2008

Sensornetwerk controleert omgeving

Vals-positieve en vals-negatieve uitslagen van de sensor: is er nu wel of niet een indringer aanwezig? Thales vroeg voor SWI2008 om wiskundige hulp bij het plannen van een sensornetwerk en het omgaan met de imperfectie van de sensoren.

Een draadloos sensornetwerk een omgeving in de gaten houden, bijvoorbeeld voor de beveiliging van een gebouw of een bedrijventerrein. Het idee is dat een netwerk van tientallen tot duizenden sensoren aan een centrale doorgeeft waar objecten zich op een bepaald moment bevinden en hoe ze vervolgens door de omgeving bewegen.

De sensoren kunnen klein en goedkoop zijn. Ze geven alleen maar door of er zich wel of niet een object bevindt binnen een cirkelvormig gebied rond de sensor. Afhankelijk van de beoogde toepassing, kan de detectietechnologie van een enkele sensor gebaseerd zijn op radarstraling, microgolfstraling, infrarode straling, maar ook op ultrasone geluidsgolven of seismische activiteit. Het bedrijf Thales onderzoekt of zo'n sensornetwerk praktisch realiseerbaar is. Een van de onderwerpen is het reconstrueren van het pad dat het indringende object volgt. Op grond van de signalen van de individuele sensoren die centraal binnenkomen, moet immers een pad worden bepaald van hoe het object beweegt in de omgeving van het netwerk. De padbepa-

ling wordt echter bemoeilijkt door het feit dat sensoren niet perfect werken. Soms geeft een sensor het signaal dat er een object in zijn nabijheid is, terwijl er niets zit: vals alarm dus. Aan de andere kant kan een sensor ook een object in zijn nabijheid over het hoofd zien: een gemiste detectie.

Yvo Boers van Thales vertelt welke problemen dit voor de interpretatie van het sensornetwerk betekent: "Wij hebben een netwerk met honderden sensoren gesimuleerd. Als we aannemen dat de vals-alarmkans 2% is, en de detectiekans 95%, dan laat onze simulatie zien dat je niet op het oog in staat bent om op grond van alle sensormetingen te bepalen hoe het object in het netwerk beweegt en zelfs niet of er een object aanwezig is. Voor de praktijk is de imperfectie van de sensoren dus echt een probleem."

Maar in plaats van kwalitatief betere, en dus duurdere sensoren in te zetten, is het waarschijnlijk goedkoper om met slimme wiskunde het probleem te verhelpen. De belangrijkste doelstelling is dat de detectiekans maximaal moet zijn, en de vals-alarmkans mi-

nimaal. Een deels open probleem voor Thales is hoe je moet beslissen of er wel of niet een object in de buurt van een sensor zit, gegeven een bepaalde detectiekans en een bepaalde vals-alarmkans. Deze vragen legde Thales voor aan de studiegroep wiskunde met de industrie. Een andere vraag van het bedrijf is wat de beste manier is om de sensoren in een gebied neer te leggen.

Hexagonale plaatsing

Elke sensor bewaakt bij benadering een cirkelvormig gebied met straal r om zich heen. Plaatsing van sensoren in een groot gebied komt dan neer op het plaatsen van een heleboel cirkels met eenzelfde straal in een plat vlak. De cirkels kunnen elkaar al dan niet overlappen. In de gebieden waar de cirkels overlappen, is de detectiekans groter, omdat niet één, maar twee of zelfs meer sensoren hetzelfde object kunnen opmerken, wanneer het zich in het gebied van de overlap bevindt.

De studiegroep gebruikte zowel een één- als een tweedimensionaal model voor het onderzoeken wat de beste manier is om sensoren in een gebied te plaatsen. Nelly Litvak, Denis Miretskiy, Michel Vellekoop (UT), Muhammad Umer Altaf, Alina Barbu, Ertan Onur, Julius Harry Sumihar (TU Delft), Sudhir Jain (Aston



Figuur 1 Een sensor die in een draadloos sensornetwerk gebruikt kan worden.

University, UK), Leila Mohammadi (LUMC), Jos in 't Panhuis, Sandra van Wijk (TU/e) en Rob Bisseling (UU) bestudeerden het probleem. Litvak vertelt: “De belangrijkste conclusie uit beide modellen is dat het alleen zin heeft om de sensoren te laten overlappen wanneer de waarschijnlijkheid om het object op een bepaalde plaats te vinden sterk varieert als functie van de plaats. We konden ook een vuistregel afleiden voor hoe onregelmatig deze functie moet zijn voordat het zinvol is om sensoren te laten overlappen.”

Wanneer de a priori kans om een object op een bepaalde plaats te vinden overal even groot is, dan is de optimale plaatsing van de sensoren exact bekend. Litvak: “De optimale plaatsing is dan die van cirkels neergelegd op een hexagonaal grid; dat is een grid bestaande uit zeshoeken. Elke zeshoek heeft zijden met lengten van twee maal de straal van de cirkel. Als je de sensoren precies op de hoekpunten van de zeshoeken plaatst, wordt de ruimte maximaal opgevuld en is de overlap minimaal, namelijk nul.”

Reconstructie

Aan het probleem van de objectdetectie begonnen de wiskundigen met twee statistische methoden: hypothese-testing en een Bayesiaanse aanpak. Hypothese-testing laat zien dat, als sensoren elkaar niet overlappen, het eenmalig aflezen van een enkele sensor niet genoeg is om een object efficiënt op te sporen. Dat kan worden opgelost ofwel door sensoren wel te laten overlappen, ofwel door meerdere waarnemingen achter elkaar te gebruiken.

In de Bayesiaanse aanpak gaan de wiskundigen uit van niet-overlappende sensoren. Deze aanpak drukt de kans dat een object in het sensorbereik zit uit in (1) de a priori waarschijnlijkheid dat het object in het gebied aanwezig is, (2) de detectiekans, (3) de vals-alarmkans en (4) het aantal aanwezige sensoren. Deze aanpak is in principe ook toepasbaar op opeenvolgende sensoraflezingen.

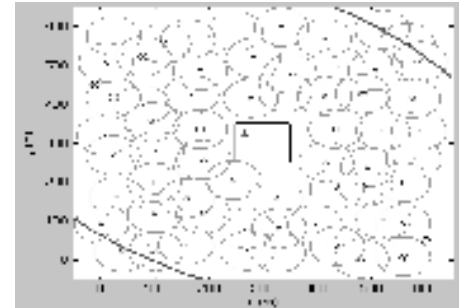
De a posteriori waarschijnlijkheid wordt dan in een volgende afleesstap als nieuwe a priori waarschijnlijkheid gebruikt.

Ten tweede gebruikten de wiskundigen een nieuwe methode voor opeenvolgende observaties van de sensoren: een *hidden Markov model*. Dit is gebaseerd op een stochastisch proces dat gemodelleerd is als een Markovketen waaraan ruis wordt toegevoegd. De ruis is het gevolg van het feit dat de sensoren niet perfect zijn, en zowel een gemiste-detectie- als een vals-alarmkans hebben. Waar in een gewoon Markov-model de volgende toestand in het model alleen afhangt van de vorige, hangt in een hidden Markov model de huidige toestand af van de hele voorgeschiedenis.

Met deze aanpak kan men uit een lange reeks actuele observaties van individuele sensoren — weergegeven als een rij nullen (geen object aanwezig) en enen (object aanwezig) — reconstrueren wat de meest waarschijnlijke reeks van ‘ware’ detecties is. Stel dat een enkele sensor op opeenvolgende afleestijdstippen de reeks 00011101000 geeft, dan is de ‘ware’ reeks waarschijnlijk 00011111000. Als de sensor steeds een object detecteert, opeens een keer niet, en daarna weer wel, dan is er waarschijnlijk een gemiste detectie geweest. Aan de andere kant is de kans groot dat de waargenomen reeks 0001000 eigenlijk alleen maar uit nullen moet bestaan, omdat die ene detectie geheel uit de toon valt. Het bestaande Viterbi-algoritme, gebaseerd op dynamisch programmeren, lost dit reconstructieprobleem in zijn algemeenheid op.

Litvak: “Voor het eenvoudige voorbeeld van een enkele sensor hebben we deze methode uitgewerkt. Voor gecompliceerdere gevallen met meerdere sensoren hebben we aangegeven hoe het probleem in principe opgelost kan worden. Omdat het aantal berekeningen exponentieel toeneemt met het aantal sensoren, hebben we ook een slimme methode bedacht om het aantal berekeningen te beperken. Het voordeel van deze methode is dat je in principe vooraf, en dus offline, al kunt berekenen welke waarnemingspatronen vertellen dat er een object is, en welke niet.”

Ten slotte hebben de wiskundigen een numerieke simulatie ontwikkeld die gebaseerd is op zowel het handig plaatsen van sensoren, als het bepalen of een detectie goed of fout is. Een combinatie dus van beide bestudeerde problemen. In de praktijk van een sensornetwerk moeten beide problemen namelijk tegelijk opgelost worden, meende de studiegroep. Waar mogelijk, zijn de simulatiere-



Figuur 2 Sensornetwerk in een gebied van 650 bij 650 meter.

sultaten vergeleken met de eerder verkregen analytische resultaten voor eenvoudige gevallen. Litvak: “De resultaten laten zien dat we voor een efficiënt sensornetwerk onze oplossingen voor beide problemen succesvol kunnen combineren. Bovendien kan de methode in principe ook worden gebruikt om een object te volgen in het gebied van het sensornetwerk, en dat is toch het ultieme doel van Thales.”

Onverwachte oplossingen

“De studiegroep heeft veel gedaan in een week”, reageert Yvo Boers van Thales op de resultaten van de studiegroep. “Vooraf hoopde ik dat deze week ons een aantal onverwachte methoden of inzichten zou opleveren, en dat is gelukt. Wij zijn er tot nu toe steeds vanuit gegaan dat de plaatsing van de sensoren een gegeven is waar we ofwel helemaal geen controle over hebben, ofwel dat we de sensoren intuïtief neerleggen. De wiskundigen hebben op een formele manier laten zien hoe de verdeling van de sensoren afhangt van het verwachte gedrag van een object. De studiegroep heeft in wiskundige stellingen gevat wat wij alleen ad hoc hadden gedaan.

“De wiskundigen hebben ook een veelbelovende suggestie gedaan waar we zelf niet aan hadden gedacht: de suggestie dat het wel eens handig kan zijn om de sensoren van een klein geheugen te voorzien. Dat geheugen kan bijvoorbeeld de laatste tien waarnemingen opslaan en ze dan eens in de tien tijdstappen in een keer doorgeven aan de centrale. Technisch gezien kan dat. Zeker weten doen we het niet, maar dat zou best een handige aanpak kunnen zijn.” Boers wil met zijn NWO-Casimirsubsidie specifiek deze suggestie verder onderzoeken. Hij verwacht trouwens niet dat een draadloos sensornetwerk al op korte termijn praktijk wordt. Daarvoor moet nog wel extra onderzoek gebeuren. “Maar,” zegt hij, “we weten dat er vraag naar bestaat, en ook andere bedrijven werken aan dit soort netwerken.”

Theo van den Bogaart

Projectteam cTWO

Freudenthal Instituut

Postbus 9432

3506 GK Utrecht

theo@van-den-bogaart.nl

Onderwijs

Wiskunde D – nieuw perspectief?

Het nieuwe vak wiskunde D bestaat nu twee jaar in het voortgezet onderwijs. Bij dit vak is een belangrijke rol weggelegd voor hogescholen en universiteiten. Theo van den Bogaart is op twee manieren bij dit vak betrokken. Vanuit het projectteam van de vernieuwingscommissie cTWO is hij belast met de coördinatie van activiteiten rondom wiskunde D. En als voormalig docent aan College De Heemlanden te Houten heeft hij het afgelopen jaar het vak op zijn school geprobeerd in te voeren. In dit artikel geeft hij zijn impressie van een vak in ontwikkeling.

Aanvankelijk stond ik erg sceptisch tegenover wiskunde D, het nieuwe vak in de bovenbouw van havo en vwo. Door de gekozen structuur leek het vak gedoemd tot een bestaan in de marge met kleine, en dus dure, klassen. Daarom had mijn eigen school bijvoorbeeld al lang geleden besloten het vak niet aan te bieden. Hoewel ik dit probleem zeker niet wil bagatelliseren, blijken er over wiskunde D sinds de invoering juist ook veel mooie dingen te melden. Bij mijn werkzaamheden voor het projectteam van cTWO heb ik te maken met veel enthousiaste wiskunde D-docenten, actieve steunpunten van hogescholen en universiteiten en een gestage groei van inspirerend lesmateriaal. Daarnaast heb ik het afgelopen voorjaar op mijn eigen school bij wijze van experiment toch les mogen geven in twee wiskunde D-modulen: complexe getallen en cryptografie. Hoewel deelname geheel vrijwillig was en leerlingen er in materieel opzicht slechts een certificaat aan overhielden, was de belangstelling groot. Het fanatisme en enthousiasme waarmee deze leerlingen bezig zijn geweest, vormt voor mij de belangrijkste indicatie dat wiskunde D op school een mooie plaats kan en moet innemen. En ook voor mijn schoolleiding is het reden om invoering serieus te heroverwegen. Na een korte beschrijving van wiskunde D, zal ik uitgebreider ingaan op de genoemde positieve en

negatieve aspecten van het nieuwe schoolvak.

Nieuwe vakken

De bovenbouw van het voortgezet onderwijs is opgedeeld in vier profielen. In plaats van de vrije vakkenkeuze van vroeger kiest een leerling nu (ten minste) één profiel. Gekoppeld aan zo'n profiel zijn een aantal verplichte vakken en een aantal vakken waaruit de leerling een keuze moet maken [1]. Voor de exacte studies is het profiel Natuur-en-Techniek het relevantst. Het profielsysteem bestaat vanaf het eind van de jaren negentig, maar in 2007 heeft een herziening plaatsgevonden van deze zogenaamde Tweede Fase, waarbij de vakken en de profielstructuur op de schop zijn gegaan. Op het havo heeft afgelopen jaar de eerste lichter het diploma behaald in dit nieuwe systeem; voor het vwo is dat komend voorjaar het geval.

Wiskunde D is bij de herziening van 2007 ingevoerd. Voorheen kende het Natuur-en-Techniekprofiel het verplichte vak wiskunde B_{1,2}. Dit was een omvangrijk vak met, naast veel analyse, uitgebreid aandacht voor bijvoorbeeld meetkunde, kansrekening en statistiek. Hiervoor in de plaats is het vak wiskunde B gekomen. Dit vak is kleiner: wiskunde B_{1,2} op het vwo telde bijvoorbeeld 720 studielasturen, wiskunde B slechts 600. Boven-

dien werd het vak samengevoegd met het oude B₁, hetgeen betekent dat het nieuwe wiskunde B ook bestemd is voor leerlingen in het minder 'harde' bètaprofiel Natuur-en-Gezondheid. Gevolg van deze urenreductie is dat er in de stof is gesneden [2]. Uiteraard leidde dit tot veel politieke ophef en als 'lapje voor het bloeden' is toen wiskunde D ingevoerd als keuzevak dat leerlingen naast wiskunde B mogen volgen. De totale studielast wiskunde op het vwo komt daarmee op 1040 uren. Anders dan bij B_{1,2} zijn scholen niet verplicht het vak aan te bieden; en leerlingen zijn niet verplicht het vak te kiezen – tenzij de school geen andere keuzevakken aanbiedt.

De klassengrootte van Wiskunde D is in het algemeen klein, omdat het een keuzevak is met een beperkte doelgroep. Om hier aan tegemoet te komen, worden tal van constructies uitgetest, zoals het combineren van jaarlagen of het gemeenschappelijk aanbieden van het vak door meerdere scholen of zelfs aan hogescholen en universiteiten. Voor het vak wiskunde D is het extra nadelig dat er in 2007 nóg een bètavak is ingevoerd: Natuur, Leven en Technologie (NLT). Dit vak is aantrekkelijk voor scholen om in te voeren, omdat het inspeelt op de trend van vakintegratie. Bovendien bedient het een grotere groep leerlingen, omdat het ook een keuzevak voor het profiel Natuur-en-Gezondheid is. We komen later nog op dit vak terug.

Overigens wil ik hier wel een duidelijk positief aspect noemen van de hervormingen uit 2007: in alle wiskundevakken is meer nadruk komen te liggen op algebraïsche vaardigheden. In de praktijk blijkt duidelijk dat dit tot



Foto: Nevit Dilmen

betere resultaten bij leerlingen leidt [4–5]. Ik verwacht dat dit effect op hogescholen en, vanaf volgend jaar, op universiteiten duidelijk zal blijken bij de eerstejaarsstudenten.

Keuze

Gek genoeg is er geen registratie van wiskunde D-scholen, zodat het niet bekend is op hoeveel scholen het vak wordt aangeboden. De enige betrouwbare cijfers komen uit een omvangrijk onderzoek [3] uit 2007, waaruit blijkt dat 70% van de scholen het vak op het vwo aanbiedt en 50% op het havo. Uit de opkomst bij wiskunde D-bijeenkomsten trek ik de voorzichtige conclusie dat dit percentage redelijk constant is gebleven.

Kritiek punt in de keuze van leerlingen is de voorlichting. Vaak moet de keuze voor wiskunde D al in klas 3 gemaakt worden, waar het voor docenten al moeilijk genoeg is om het verschil tussen wiskunde A en B uit te leggen — laat staan dat de decaan (de studievoorlichter), veelal zonder bèta-achtergrond, de opdeling helder voor ogen staat. Boven-

dien ontdekken de meeste leerlingen pas in klas 4 hoe groot hun affiniteit met wiskunde is: het vak wiskunde in de onderbouw is helaas niet substantieel genoeg om goed op niveau te differentiëren. In het experiment op mijn school kozen leerlingen pas halverwege klas 4 of 5 (het was een gemengde groep, die vrijwel geheel bestond uit vwo'ers) voor het vak, na persoonlijk te zijn benaderd door de docent. Achteraf vertelden leerlingen dat ze voor de uitdaging gingen en dat ze nieuwsgierig waren naar wiskunde buiten de “saaie, eentonige stof” uit wiskunde B. Ik vermoed dat de geprivilegieerde status van de door ons gekozen structuur ook een rol heeft gespeeld. De reacties over de inhoud waren na afloop unaniem positief. Wat zeker meehielp was dat sommigen naar een open dag van de TU Delft waren geweest en daar werd hen wiskunde D aangeraden. Zie hier het belang van goede PR.

Naast studievoorlichting vervullen universiteiten nog een mooie rol: de netwerkfunctie. Bijna alle universitaire wiskundefacultei-

ten hebben, soms samen met hogescholen, regionale steunpunten opgezet. Vanuit deze steunpunten worden bijvoorbeeld bijeenkomsten voor docenten georganiseerd, lesmodulen gemaakt en ondersteund, nascholing en gastlessen verzorgd en leerlingactiviteiten aan het instituut aangeboden. Uiteraard zijn er tal van organisatorische obstakels, maar mijn algemene indruk van deze steunpunten is erg positief; iets wat ik ook bij collega-docenten merk. Alleen voor nascholing valt de animo tegen. De activiteiten van steunpunten staan vaak goed weergegeven op hun sites, bereikbaar via de site van cTWO [7]. Op deze site staat ook het overzicht van alle modules die uit de steunpunten komen.

Op het havo is de toestand veel zorgwekkender dan op het vwo. Het vak is bij leerlingen niet populair. Tegenover 20 vwo'ers stonden op mijn school bijvoorbeeld 2 geïnteresseerde havo-leerlingen. Ik zie hier drie redenen voor. Ten eerste spreekt het abstracte, puzzelachtige karakter van wiskunde D de

meeste havo-leerlingen niet genoeg aan. Op het havo lijkt op veel scholen wiskunde D het daarom af te leggen tegen het veel praktischer ingestelde NLT. Ten tweede blijkt dat veel havisten al vastlopen in het overladen wiskunde B-programma (zie een recent onderzoek in [8]). Ten derde valt het hbo veel te verwijten. Anders dan op de universiteiten zijn in het hbo vrijwel alle vakgroepen wiskunde opgedeeld en wegbezuinigd. Hierdoor verloopt inmenging uit het hbo met wiskunde D moeizaam — al zijn er gunstige uitzonderingen. Bovendien zijn in de strijd om de studenten de toelatingseisen zó laag gemaakt, dat er nog maar één hbo-studie is waarvoor wiskunde B verplicht is [9]: de lerarenopleiding wiskunde. Bedrijfswiskunde, bouwkunde, technische natuurkunde, etc., kunnen gewoon gekozen worden met een Natuur-en-Gezondheidsprofiel met wiskunde A, waarbij (op havo) zowat de enige algebraïsche vaardigheid die aan bod komt het oplossen van lineaire vergelijkingen is [10]. Voeg daaraan toe dat ook natuurkunde voor geen enkele opleiding meer als verplichte voorkennis geldt (NLT is voldoende) en het hbo heeft naar mijn mening alle recht van spreken verloren als het gaat om het niveau van eerstejaars bètastudenten.

Lef

Wiskunde D kent geen centraal eindexamen en docenten krijgen daardoor veel vrijheid het vak naar eigen goeddunken in te vullen. Vanuit dit oogpunt zijn de eindtermen in [6] (het bindende document waarin de vakinhoud wordt voorgeschreven) dan ook erg algemeen geformuleerd. Onderwerpen die in ieder geval aan bod moeten komen zijn op het havo kansrekening en statistiek en voortgezette analyse en op het vwo kansrekening en statistiek, coördinaatmeetkunde en dynamische systemen (zowel discreet als continu). Docenten kunnen daarnaast kiezen voor een ‘samenwerkingsmodel’ met het hoger onderwijs. De onderwerpskeuze is dan verder vrij en het is aan de docent hoe hij de samenwerking invult. Een populair onderwerp voor vwo

is bijvoorbeeld complexe getallen (dat overigens een verplicht onderwerp is als niet voor samenwerking wordt gekozen).

Wiskunde D biedt veel vrijheid. Dat is nieuw voor wiskundedocenten en niet iedereen vindt dat even makkelijk. Het is daarom fijn dat de grote methoden schoolboeken voor wiskunde D hebben gemaakt die als leidraad kunnen dienen. Niet alle onderwerpen zijn daar even gelukkig in terecht gekomen. Er is bijvoorbeeld veel kritiek op het te lage niveau van de kansrekening en statistiek. Dit valt de uitgevers en auteurs overigens niet aan te rekenen, want ze moesten werken onder grote tijdsdruk. De uitgevers hebben nieuwe edities aangekondigd en lijken zich de kritiek aan te trekken.

Toch is de charme van wiskunde D juist dat er ook eens buiten het boek gewerkt wordt. Sommige docenten hebben zelfs het boek helemaal aan de kant gezet en werken geheel met losse modules. Gezien de openheid van de eindtermen is dat geen probleem. Het vraagt wel lef en tijd van de docent en een goed overzicht van de onderwerpen. Om hulp te bieden, is er een idee om een centrale databank van schoolexamens voor wiskunde D te maken. Deze schoolexamens zouden gezamenlijk door docenten uit voortgezet en hoger onderwijs gemaakt kunnen worden en kunnen worden gecertificeerd. Met dit idee is tot nu toe nog niets gedaan.

Toekomst

Is wiskunde D relevant voor bètaleerlingen? Ik vind van wel. Ten eerste is basale kennis van bijvoorbeeld statistiek en differentiaalvergelijkingen belangrijk. Daarnaast is het voor leerlingen goed dat ze al eens in contact komen met vervolgstudies; een argument dat overigens ook opgaat voor docenten! Samenwerking tussen voortgezet en hoger onderwijs is een speerpunt in het Nederlandse onderwijsbeleid van de afgelopen jaren en met wiskunde D krijgt dit op een concrete en vruchtbare manier gestalte. Ten slotte heb ik zelf gemerkt hoe leerlingen nieuwsgierig zijn en het leuk vinden om bij een vak eens in het diepe

te worden gegooid met grotere, open problemen. Dat is iets wat het dichtgetimmerde, geheel op het eindexamen gerichte wiskunde B niet kan bieden.

Er bloeien, met name op het vwo, mooie dingen op rondom wiskunde D. Bijeenkomsten voor docenten worden vaak goed bezocht en het lijkt erop dat docenten steeds meer ontdekken wat er allemaal kan met het vak. De klassengrootte is een groot punt van zorg. Veel staat of valt met een goede voorlichting in de derde en vierde klas.

Op dit punt moet de concurrentie met NLT niet worden onderschat. Indien mogelijk lijkt het mij het verstandigst om op twee paarden te wedden: probeer modules te maken die geschikt zijn voor zowel wiskunde D als NLT. De wiskundecomponent in de huidige gecertificeerde NLT-modules is naar mijn oordeel vaak belabberd. Toch biedt NLT voldoende ruimte voor leerzame, toegepaste wiskunde en zijn er ook vaak wiskundedocenten bij het vak betrokken. Nadeel is wel dat NLT ook gekozen kan worden met wiskunde A. Dit maakt het bijna noodzakelijk om de wiskunde in een NLT-module gedifferentieerd aan te bieden: Met B-leerlingen kan dieper op analyse en meetkunde worden ingegaan, terwijl A-leerlingen al kennis hebben van kansrekening en statistiek. Het is maar de vraag of hier een vorm voor kan worden gevonden die ook onderwijsbaar is.

Er is voor hogescholen en universiteiten een belangrijke taak weggelegd: in de studievoorziening, in de contacten met docenten en in de ontwikkeling van lesmateriaal. Ik roep iedereen uit het hoger onderwijs op eens een wiskunde D-bijeenkomst te bezoeken: bijvoorbeeld die van het regionale steunpunt of de landelijke wiskunde D-dag die aan het eind van ieder schooljaar georganiseerd wordt. Alleen met blijvende inzet en enthousiasme van docenten uit het voortgezet én hoger onderwijs, kan wiskunde D uitgroeien tot het ideale vak voor bèta-georiënteerde leerlingen.

Referenties

- 1 Zie ‘Schema’s Vernieuwde Tweede Fase’ op www.tweedefase-loket.nl/downloaden
- 2 Een overzicht van de inhoudelijke wijziging van alle wiskundeprogramma’s havo/vwo staat in het *Verschildocument*, te vinden op www.ctwo.nl onder ‘publicaties’.
- 3 Tweede Fase Adviespunt: ‘Vernieuwde Tweede Fase, de start in cijfers’, december 2007. Te vinden op www.tweedefase-loket.nl
- 4 Projectteam cTWO: ‘Rapport tussenevaluatie van de 2007-programma’s wiskunde havo/vwo’ (februari 2009). Te vinden op www.ctwo.nl onder ‘publicaties’
- 5 Hielke Peereboom: ‘Hoe staat het met de algebraïsche vaardigheden in de Tweede Fase?’ *Euclides* 8, juli 2009, pp. 292–295
- 6 De examenprogramma’s met daarin de eindtermen zijn o.a. te vinden op www.ctwo.nl.
- 7 Kijk op www.ctwo.nl onder het kopje ‘Wiskunde D’
- 8 Gerard Koolstra en Marja Bos: ‘Enquête contacttijd; samenvatting van de resultaten’, *Wiskunde-brief* 496, 31 mei 2009. Te vinden op www.wiskundebrief.nl
- 9 Bijlage D van de *Regeling nadere vooropleidingseisen hoger onderwijs 2007*, laatst gewijzigd op 23 februari 2009. Te vinden op www.cfi.nl onder kenmerk HOenS/BS-2009/104932
- 10 CEVO: *Wiskunde A havo, Syllabus centraal examen 2010*. Te vinden op www.examenblad.nl

Hendrik Lenstra

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
hwl@math.leidenuniv.nl

Onderzoek

Ode aan het getal 43

Ieder mens is uniek, en ieder getal is dat ook. Naast de overvloedige belangstelling voor wereldberoemde getallen zoals π , is er over elk natuurlijk getal wel iets interessants te melden, als men maar goed zoekt. In deze bijdrage zet Hendrik Lenstra het getal 43 uitgebreid in het zonnetje.

In mijn Californische tijd gebeurde het een keer dat het gebied waar ik woonde en werkzaam was een ander netnummer kreeg: in plaats van 415 was het voortaan 510. Deze dramatische ingreep in het leven van miljoenen telefoongebruikers was voor een employé van de *Oakland Tribune* aanleiding ons *Department of Mathematics* te bellen met de vraag wat voor goeds er over het nieuwe nummer te melden viel. Direct greep ik mijn exemplaar van David Wells' *The Penguin dictionary*

of *curious and interesting numbers* [14] van de plank, met het tevreden gevoel dat ik de aanschafprijs van dit speelse boekje terecht bij de beroepsonkosten had gerangschikt. Het stelde mijn verwachtingen echter teleur: het getal 510 stond er niet in, en we moesten zelf wat bedenken. We maakten de reporter gelukkig met de mededeling dat het voor $n = 510$ mogelijk is een regelmatige n -hoek met passer en liniaal te construeren, en dat getallen met deze mooie eigenschap dun gezaaid zijn; dat $n = 512$ en $n = 514$ er ook bij horen, hebben we maar voor ons gehouden.

Het is Wells niet kwalijk te nemen dat niet ieder natuurlijk getal in zijn opus voorkomt. Naar men zegt probeert hij dit goed te maken door het kleinste dat ontbreekt steeds in de volgende druk op te nemen, zodat aan het eind der tijden alle natuurlijke getallen als *curious* of *interesting* te boek zullen staan. Het getal 43 valt de twijfelachtige eer te beurt het kleinste te zijn dat men in mijn eerste druk uit 1986 niet aantreft. Omdat ik het onder mijn persoonlijke vrienden tel, wil ik een poging tot rehabilitatie wagen. Figuur 1 vormt van deze poging een bescheiden begin.

Euclides' recept

Aan het welbekende bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen bestaan (zie Figuur 2), ontleent men het volgende recept om getallen te genereren. Uitgaande van een eindige verzameling S van natuurlijke getallen,

vormt men het product van alle getallen in S , telt hier 1 bij op, en voegt het aldus verkregen getal aan S toe. Met de nieuwe S begint men weer van voren af aan. Neemt men de lege verzameling als startpunt, dan krijgt men volgens dit recept achtereenvolgens de getallen

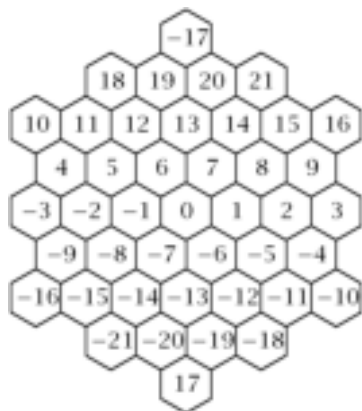
$$2, 3, 7, 43, 1807, 3263443, \\ 10650056950807, \dots$$

We zullen het n de getal in deze rij met E_n aangeven, bijvoorbeeld

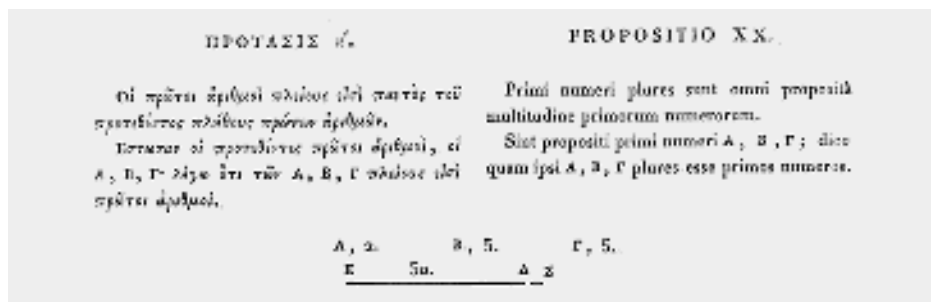
$$E_4 = (1 + 1) \cdot ((1 + 1) + 1) \cdot \\ ((1 + 1) \cdot ((1 + 1) + 1) + 1) + 1 = 43.$$

De lezer die op grond van Euclides' bewijs meent dat de getallen E_n allemaal priem zijn, en de eerste vier inderdaad als zodanig herkent, wordt uitgenodigd het product 13×139 uit te rekenen en te concluderen dat het getal 43 het eind van een illusie markeert. Het getal 3263443 is weer een priemgetal, maar misschien wel het laatste in de rij. De lezer die opmerkt dat E_n voor $n > 2$ alternerend 7 en 43 modulo 100 is, wordt voor meer gegevens naar Tabel 3 verwezen.

Men komt de getallen E_n tegen bij het bestuderen van Egyptische breuken. Een *Egyptische breuk* is een getal dat geschreven is als som van stambreuken, waarbij een *stambreuk* per definitie de inverse van een positief geheel getal is. Een voorbeeld van een Egyptische breuk is $1/4 + 1/5 + 1/120$. Een ander voorbeeld, met dezelfde waarde $11/24$, is $1/3 +$



Figuur 1. Met translaties van deze uit 43 zeshoekjes samengestelde rozet kan men het platte vlak betegelen. Schrijven we $\rho = e^{2\pi i/3}$, dan zijn de middelpunten van deze zeshoekjes de 43 elementen α van de ring $\mathbf{Z}[\rho] = \{a + b\rho : a, b \in \mathbf{Z}\}$ met de eigenschap $\alpha\bar{\alpha} < 13$. Deze 43 elementen representeren de restklassen van $\mathbf{Z}[\rho]$ modulo het ideaal $(6 - \rho)$. De ring $\mathbf{Z}[\rho]/(6 - \rho)$ kan men identificeren met de ring $\mathbf{Z}/43\mathbf{Z}$ van gehele getallen modulo 43; in het zeshoekje met middelpunt α staat de restklasse modulo 43 waar α mee correspondeert.



Figuur 2. Propositie 20 uit het negende boek van de *Elementen* van Euclides en het begin van zijn bewijs, volgens de editie van Peyrard [6]

1/8. In het proefschrift [13] van Kurt Vogel leest men hoe zulke breuken in de rekenkunde van de Egyptenaren figureerden. Het ging hun natuurlijk om *eindige* sommen van stambreuken, maar hier kijken we eerst naar *oneindige*.

Stel dat men 1 wil schrijven als som van een oneindige rij stambreuken $1/m_n$. Dan kan men $m_1, m_2, \dots$ met de volgende 'gretige' methode bepalen: kies steeds, als $m_1, \dots, m_{n-1}$ al gekozen zijn zodanig dat $1/m_1 + \dots + 1/m_{n-1} < 1$, de grootste stambreuk $1/m_n$ waarvoor geldt $1/m_1 + \dots + 1/m_{n-1} + 1/m_n < 1$. Dit geeft achtereenvolgens $1/m_1 = 1/2$, $1/m_2 = 1/3$, $1/m_3 = 1/7$, en met inductie ziet men gemakkelijk in dat de getallen m_n identiek zijn met de getallen E_n . De rij $(E_n)_{n=1}^\infty$ is dus de 'lexicografisch kleinste' oplossing van de vergelijking $1 = \sum_{n=1}^\infty 1/x_n$ in positieve gehele getallen x_n (zie ook Figuur 4).

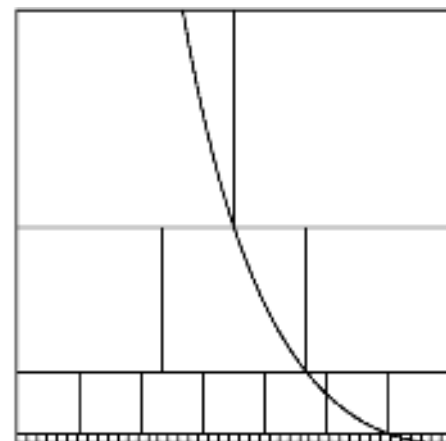
Ook bij *eindige* Egyptische breuken met waarde 1 hebben de getallen E_n een extreme eigenschap. Voor elke positieve gehele t heeft men $1 = (\sum_{n < t} 1/E_n) + 1/(E_t - 1)$, bijvoorbeeld $1 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/43 + 1/1806$. Het is een leerzame opgave om te bewijzen dat voor elke vaste t de vergelijking $1 = 1/m_1 + \dots + 1/m_t$ maar eindig veel oplossingen in stambreuken $1/m_i$ heeft. Veel lastiger is het om aan te tonen dat de grootste m_i die bij deze oplossingen optreedt, gelijk is aan $E_t - 1$. Dus, als $1 = 1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 + 1/m_4 + 1/m_5$, dan is elke m_i ten hoogste 1806. Dit werd bewezen door Curtiss [1].

De net genoemde resultaten hebben een leuke toepassing in de groepentheorie, die het eerst door Landau [3] is opgemerkt. Twee elementen g en h van een groep G noemt men *geconjugerd* als er een x in G is met $g = x \cdot h \cdot x^{-1}$. Het gaat hier om een *equivalentierelatie* op G , waarvan de equivalentieklassen de *conjugatieklassen* van G heten. Stel nu dat de groep G *eindig* is. Dan zijn er ook maar eindig veel conjugatieklassen, zeg $C_1, \dots, C_t$. Op een college groepentheorie leert men dat voor elke i het aantal ele-

menten $\#C_i$ van C_i een *deler* van $\#G$ is, zeg $\#G = m_i \cdot \#C_i$. Omdat de C_i een partitie van G vormen, geldt $\#G = \#C_1 + \dots + \#C_t$. Deelt men deze relatie door $\#G$, dan vindt men $1 = 1/m_1 + \dots + 1/m_t$. Hiermee is 1 geschreven als som van evenveel stambreuken als er conjugatieklassen in G zijn. Omdat één van de C_i alleen uit het eenheidselement van G bestaat, komt $1/\#G$ onder deze stambreuken voor. De zojuist genoemde leerzame opgave impliceert dus dat er voor vaste t maar eindig veel mogelijkheden voor $\#G$ zijn, en vanwege het preciezere resultaat van Curtiss geldt zelfs $\#G \leq E_t - 1$. Voor $1 \leq t \leq 12$ is de grootste $\#G$ in feite gelijk aan

$$1, 2, 6, 12, 60, 168, 360, 720, \\ 2520, 20160, 29120, 443520,$$

respectievelijk, zie [11]. Men krijgt de indruk dat de ongelijkheid $\#G \leq E_t - 1$ nog aanzienlijk verscherpt kan worden. Dat dit inderdaad het geval is, heeft Pyber met behulp van de classificatie van eindige simpele groepen be-



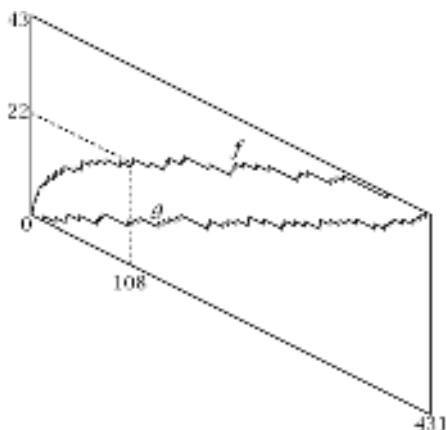
Figuur 4. Nestor Romeral Andres heeft een mooie manier bedacht om de identiteit $\sum_{n \geq 1} 1/E_n = 1$ meetkundig te verbeelden (zie [11]). De linkeronderhoek van het laatste vierkant op elke rij ligt op de grafiek $y = x + x^{-1} - 2$.

wezen [8]. Voor oneindige groepen liggen de zaken heel anders: met resultaten die men bij Serre [9, Ch. I, §1.3 en §1.4] aantreft, kan men voor elke gehele $t \geq 2$ een oneindige groep met precies t conjugatieklassen construeren. Hiermee hebben we het getal 43 echter wel uit het oog verloren.

We keren terug tot de elementaire getaltheorie, en beschouwen een door Birkhoff gesuggereerde vraagstelling [2]. Laat n een positief geheel getal zijn. Als a, b, c, d gehele getallen zijn met $a \equiv b \pmod n$ en $c \equiv d \pmod n$, dan geldt ook $a + c \equiv b + d \pmod n$ en $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod n$. Als gevolg hiervan kan men op zinvolle wijze de som en het product van twee restklassen modulo n definiëren. Kan men ook *machtsverheffing* voor restklassen modulo n definiëren? Met andere woorden, als a ,

n	basis 10	basis 2	basis 5
1	2	10	2
2	3	11	3
3	7	111	12
4	43	101011	133
5	1807	100001111	24212
6	3263443	111010011	313412233
7	056950807	000010111	034411212
8	361000443	111111011	404003233
9	485195807	000011111	202231212
10	645185443	110100011	131413233
11	213920807	000100111	230431212
12	453610443	111001011	111013233
13	545045807	100101111	012431212
14	183235443	101110011	402013233
15	388170807	000110111	332431212
16	018860443	110011011	312013233
17	291295807	000111111	032431212
18	884485443	101000011	412013233
19	994420807	001000111	032431212
20	400110443	101101011	412013233

Tabel 3. Bij het bestuderen van patronen in de eindcijfers van de getallen E_n in het tientallig stelsel, ligt het voor de hand ook naar de eindcijfers in basis 2 en basis 5 te kijken. Beide gevallen tonen een heel verschillend gedrag. De rijen $(E_{2n-1})_{n=1}^\infty$ en $(E_{2n})_{n=1}^\infty$ convergeren 5-adisch naar de beide 5-adische wortels uit -1 , maar 2-adisch zijn de getallen $(E_n)_{n \geq 1}$ gelijkverdeeld over de restklasse 3 mod 4. Voor elke $n > 1$ heeft $E_n + 1$ precies twee factoren 2 meer dan $n - 1$.



Figuur 5. Deze illustratie laat zien hoezeer de ondergroep $\langle 2, 3 \rangle$ van $(\mathbf{Z}/431\mathbf{Z})^*$ uit het lood ligt. In perspectief ziet men de grafiek van $f(x) = \#\{n \in \mathbf{Z} : 0 < n \leq x, (n \bmod 431) \in \langle 2, 3 \rangle\}$ voor $0 < x < 431$. Omdat één op de tien elementen van $(\mathbf{Z}/431\mathbf{Z})^*$ tot $\langle 2, 3 \rangle$ behoort, zou men verwachten dat $f(x)$ dichtbij $x/10$ ligt, waarvan de grafiek door de diagonaal gegeven wordt. De grafiek van $f(x) - x/10$, die men niet-perspectivisch ziet, toont evenwel anders. Het middelste element van $\langle 2, 3 \rangle$ komt men al op een kwart van het interval tegen. Men krijgt $g(x)$ door $\langle 2, 3 \rangle$ te vervangen door zijn nevenklasse $26 \cdot \langle 2, 3 \rangle$, die veel gelijkmatiger verdeeld is.

b, c, d gehele getallen zijn met $a \equiv b \bmod n$ en $c \equiv d \bmod n$, en c en d positief, heeft men dan ook $a^c \equiv b^d \bmod n$? Voorbeelden tonen aan dat men deze conclusie niet in alle gevallen kan trekken, maar er zijn waarden voor n waarvoor dit toch kan, onafhankelijk van de keuze van a, b, c en d . Zulke getallen n zullen we, de betekenis van het woord *δυναμικός* in-dachtig, *dynamisch* noemen. We gaan, in het voetspoor van Dyer-Bennet (zie [2; 10, Ch. VI, §6] maar ook [5]), alle dynamische getallen bepalen.

Neem aan dat n dynamisch is, en laat p een priemdelers van n zijn. Kiezen we $a = b = p, c = n + 1, d = 1$, dan blijkt uit $a^c \equiv b^d \bmod n$ dat n een deler van $p^{n+1} - p$ is, en daarom maar een enkele factor p bezit. Bijgevolg is n kwadraatvrij, dus $n = \prod_{p \in V} p$

voor een of andere eindige verzameling V van priemgetallen. We bewijzen nu de opmerkelijke formule

$$p - 1 = \prod_{q \in V, q < p} q \quad \text{voor elke } p \in V.$$

Hiertoe nemen we voor a een primitieve wortel modulo p , en $b = a, c = n + 1, d = 1$. Uit $a^c \equiv b^d \bmod n$ volgt dan $a^n \equiv 1 \bmod p$, dus $p - 1$ deelt $n = \prod_{q \in V} q$ en daarom $p - 1 = \prod_{q \in V_p} q$ voor een zekere deelverzameling V_p van V . Omdat alle priemdelers van $p - 1$ kleiner dan p zijn, geldt $q \in V_p \Rightarrow q < p$. Om de verlangde omkering hiervan te bewijzen, voor $p, q \in V$, passen we een dubbele inductie toe, die ons in staat stelt aan te nemen dat voor kleinere p de omkering waar is, en ook bij dezelfde p voor kleinere q . Dan bevat V_p om te beginnen alle priemgetallen in V die kleiner dan q zijn, en deze hebben product $q - 1$. Zou q niet in V_p zitten, dan zouden de andere $r \in V_p$ allemaal groter dan q zijn, en wegens $q \in V_r$ zou men dan $r \equiv 1 \bmod q$ krijgen, zodat $p - 1 = (q - 1) \cdot \prod_{r \in V_p \setminus V_q} r \equiv -1 \bmod q$ en $p \equiv 0 \bmod q$, een kennelijke tegenspraak.

Als we met $p_1, \dots, p_t$ de priemfactoren van het dynamische getal n aangeven, stijgend gerangschikt, dan kunnen we de net bewezen opmerkelijke formule ook als volgt uitdrukken:

$$p_i = 1 + \prod_{j < i} p_j \quad \text{voor alle } i \leq t.$$

Met andere woorden: de p_i worden door het recept van Euclides gegeven! Dan moet $p_i = E_i$ voor alle $i \leq t$. Omdat E_5 niet een priemgetal is, geldt dit niet voor $i = 5$, dus we hebben $t < 5$. Voor n blijven er dan maar vijf mogelijkheden over, namelijk de getallen $E_{t+1} - 1$ voor $0 \leq t < 5$:

$$n \in \{1, 2, 6, 42, 1806\}.$$

De lezer mag zelf, met de kleine stelling van

Fermat in de hand, nagaan dat deze vijf getallen inderdaad dynamisch zijn. De conclusie is dat er precies vijf dynamische getallen bestaan. We hadden er zeven gehad als 1807, welbeschouwd een groter ongeluksgetal dan zijn factor 13 (zie [7]), niet samengesteld was geweest. Het heeft in ieder geval niet gelegen aan onze held 43, die hiermee de grootste priemfactor van het grootste dynamische getal is geworden.

Curieuze congruenties

De restklasse $(-2 \bmod 3^3)$ behoort tot de verzameling van 9 restklassen $(a \bmod 3^3)$ waarvoor de congruentie $a \equiv 1 \bmod 3$ geldt. Deze verzameling vormt een groep onder vermenigvuldiging, dus de stelling van Lagrange uit de groepentheorie vertelt ons $(-2)^9 \equiv 1 \bmod 3^3$. Op dezelfde manier toont men aan $(-3)^4 \equiv 1 \bmod 2^4$. Deze beide feiten impliceren dat het getal $2^9 - 3^4 + 1$ deelbaar is door zowel 2^4 als 3^3 , dus eveneens door hun product $2^4 \cdot 3^3$. Omdat $2^9 - 3^4 + 1$ positief is, en wegens $2^9 < 2^5 \cdot 3^3$ ook kleiner dan tweemaal $2^4 \cdot 3^3$, is het *gelijk* aan $2^4 \cdot 3^3$. Zo hebben we de treffende identiteit

$$2^9 - 3^4 = 2^4 \cdot 3^3 - 1$$

geconstrueerd, die het startpunt van onze bespiegelingen vormt. Beide zijden zijn in feite gelijk aan 431. Kennelijk geldt $2^9 \equiv 3^4 \bmod 431$ en $2^4 \cdot 3^3 \equiv 1 \bmod 431$, en deze congruenties schrijven we eenvoudshalve als gelijkheden

$$2^9 \cdot 3^{-4} = 1,$$

$$2^4 \cdot 3^3 = 1,$$

te interpreteren in de ring $\mathbf{Z}/431\mathbf{Z}$, of beter gezegd in de groep $(\mathbf{Z}/431\mathbf{Z})^*$ van inverteerbare elementen van deze ring. Het getal 43 doet nu zijn intrede als de determinant van de exponentenmatrix $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Vermenigvuldigt men de derde macht van de eerste gelijkheid met de vierde macht van de tweede, dan vindt men $2^{43} = 1$, en op vergelijkbare wijze krijgt men $3^{43} = 1$, $2 = 3^{10}$, $3 = 2^{13}$, allemaal in $(\mathbf{Z}/431\mathbf{Z})^*$. In die groep brengen 2 en 3 dus dezelfde ondergroep voort, en die ondergroep, waar Figuur 5 aan gewijd is, heeft orde 43.

Uit $2^{43} \equiv 1 \bmod 431$ kan men snel opmaken dat 431 een priemgetal is. Modulo elke deler d van 431 met $d > 1$ heeft de ondergroep $\langle 2 \bmod d \rangle$ van $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ voortgebracht door $(2 \bmod d)$ namelijk orde 43, zodat geldt $d > 43$; elke deler groter dan 1 van 431 is dus groter dan 43, en wegens $43^2 > 431$ is 431 nu een priemgetal.

De connaisseurs onder mijn lezers weten

n	$\#\{p < 10^9 : i(p) = n\}$	$50847533 \cdot r_n$	$\#\{p < 10^9 : j(p) = n\}$	$50847532 \cdot s_n$
1	19014787	19014730,57	35467375	35466222,65
2	14261183	14261047,93	10430967	10431241,95
3	3381013	3380396,55	2008321	2008979,93
4	2377108	2376841,32	1043450	1043124,20
5	961678	960744,28	355482	355378,72
6	2534422	2535297,41	502717	502244,98
7	454193	454309,14	120982	120692,23
8	1782836	1782630,99	304163	304244,56
9	375048	375599,62	74271	74406,66
10	719997	720558,21	104372	104523,15
11	172816	173005,36	29219	29313,13
12	422427	422549,57	125176	125561,25
≥ 13	4390025	4389822,05	281037	281598,60

Tabel 6. Er zijn 50847534 priemgetallen p met $p < 10^9$. Voor elke $n > 1$ is bij deze priemgetallen de kans op $i(p) = n$ duidelijk groter dan de kans op $j(p) = n$. Beide kansen zijn goed in overeenstemming met het in het kader rechts geformuleerde vermoeden.

misschien wel wat er aan de congruenties

$$2^{43} \equiv 3^{43} \equiv 1 \pmod{431}$$

zo curieus is. Voor een priemgetal p en een getal k dat klein is ten opzichte van p is het niet te verwachten dat 2^k en 3^k allebei congruent met 1 modulo p zijn, en de ontdekking dat dit voor $p = 431$, $k = 43$ toch gebeurt, is bepaald niet alledaags. Ook het geval $p = 3^8 - 2^3 = (2^{15} - 3)/5 = 6553$, $k = \det \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = 117$ is een overdenking waard.

Ter toelichting kijk ik eerst naar machten van 2 modulo priemgetallen. Toen Fermat dit in 1640 ook deed, in de context van volmaakte getallen, ging hem een groot licht op; “mi par di veder un gran lume”, schreef hij aan Mersenne (zie [12, brief XL]). Fermat had ontdekt dat de kleinste positieve k met $2^k \equiv 1 \pmod{p}$, waarvoor we $d(p)$ zullen schrijven, een deler is van $p - 1$. Als men een aantal van deze $d(p)$ uitrekent, bijvoorbeeld

$$d(5) = 4, d(7) = 3, d(23) = 11, d(431) = 43,$$

dan observeert men dat $d(p)$ doorgaans een in multiplicatief opzicht tamelijk grote deler van $p - 1$ is, in de zin dat het getal $i(p)$ gedefinieerd door $d(p) \cdot i(p) = p - 1$ meestal aan de kleine kant is:

$$i(5) = 1, i(7) = 2, i(23) = 2, i(431) = 10;$$

zie ook Tabel 6. Men kan $d(p)$ en $i(p)$ interpreteren als de *orde* en de *index* van de ondergroep $\langle 2 \pmod{p} \rangle$ van $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.

Er zijn niet al te veel heuse stellingen die de timmermanswijsheid onderbouwen dat $d(p)$ groot is en $i(p)$ klein. Uit $2^{d(p)} \equiv 1 \pmod{p}$ volgt $2^{d(p)} \geq p + 1$, dus

$$d(p) \geq \frac{\log(p+1)}{\log 2}.$$

Deze logaritmische ondergrens is voor de meeste p zeer ver van de waarheid, hetgeen niet wegneemt dat het gelijkheidsteken geldt voor vermoedelijk oneindig veel priemgetallen p ; het gaat hier om de notoire *Mersenne-priemgetallen*, die 1 minder zijn dan een macht van 2. Men heeft bijvoorbeeld $d(31) = 5$, $i(31) = 6$ en $d(8191) = 13$, $i(8191) = 630$. Ook zonder naar Mersenne-priemgetallen te kijken, kan men oneven priemgetallen p met $d(p) < i(p)$ bij de vleet vinden, maar dat er oneindig veel dergelijke priemgetallen zijn, is nog onbewezen. Ik vermoed dat ook $d(p) = i(p)$ oneindig vaak voorkomt; alle priemgetallen met die eigenschap zijn van de vorm $p = (16m)^2 + 1$, met m een positief geheel getal, maar $m = 1$ geeft het enige bekende voorbeeld.

Laten we de *kans* dat $i(p)$ gelijk is aan een gegeven positief geheel getal n definiëren als de limiet, voor $x \rightarrow \infty$, van het aantal oneven priemgetallen $p \leq x$ met $i(p) = n$, gedeeld door het totale aantal oneven priemgetallen p met $p \leq x$. Onder aanname van een bepaalde generalisatie van de Riemann-hypothese kan men bewijzen dat de limiet bestaat en gegeven wordt door een gecompliceerde formule; aan de hiertoe benodigde “analytische algebraïsche getaltheorie” heb ik ooit een deel van mijn proefschrift gewijd (zie [4]). De formule, die men in het onderstaande kader aantreft, neemt voor elke n een positieve waarde r_n aan, en er geldt $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = 1$. Met andere woorden, men beschikt over een zeer plausibel vermoeden dat inderdaad uitdrukt dat $i(p)$ doorgaans klein is. Aan de andere kant kan men, zonder enige onbewezen aanname, een formule geven voor de kans dat $i(p)$ *deelbaar* is door een gegeven getal n . Deze op analoge wijze gedefinieerde kans is namelijk gelijk aan $2/(\varphi(n) \cdot n)$ of $1/(\varphi(n) \cdot n)$ al naar gelang n deelbaar door 8 is of niet, waar $\varphi(n)$ de orde van de groep $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ aangeeft.

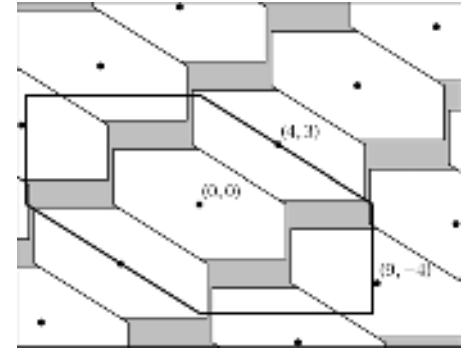
In het bijzonder kan $i(p)$ willekeurig groot zijn, en men kan zelfs afleiden dat er een positieve constante b is met de eigenschap dat voor elke n geldt

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \in \mathcal{P}_x : i(p) \geq n\}}{\#\mathcal{P}_x} \geq \sum_{m=n}^{\infty} r_m \geq \frac{b}{n},$$

waar $\mathcal{P}_x = \{p : p \text{ priem}, 2 < p \leq x\}$. Uit de divergentie van $\sum_{n \geq 1} b/n$ volgt nu dat

Vermoedelijke kansen

Laat $i(p) = \#(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*/\langle 2 \pmod{p} \rangle$ en $j(p) = \#(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*/\langle 2 \pmod{p}, 3 \pmod{p} \rangle$, voor priemgetallen $p > 2$ en $p > 3$, respectievelijk. Voor vaste n voldoet een willekeurig gekozen p vermoedelijk met kans r_n aan $i(p) = n$ en met kans s_n aan $j(p) = n$. Met het getoonde formulairium kan men r_n en s_n uitrekenen. Het getal r_1 staat bekend als de *Artin-constante*. In eerste benadering zijn r_n en s_n proportioneel met respectievelijk $1/n^2$ en $1/n^3$, voor $n \rightarrow \infty$, en er geldt $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$. De correctiefactoren b_d en c_d vinden hun oorsprong in de identiteiten $(\zeta_8 + \zeta_8^{-1})^2 = 2$ en $(\zeta_{12} + \zeta_{12}^{-1})^2 = 3$, waarbij ζ_m een primitieve m de machts eenheidswortel aangeeft.



Figuur 7. Dit is een plaatje van het rooster $L = \{(n, m) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} : 2^n \cdot 3^m = 1 \text{ in } (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*\}$, voor $p = 431$. De determinant $d(L)$ van L , die men kan definiëren als de index van L in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, is gelijk aan de orde van de ondergroep $\langle 2, 3 \rangle$ van $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. De grote zeshoek begrenst de symmetrische convexe open verzameling $V = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : \max\{2^x, 2^{-x}, 3^y, 3^{-y}, 2^x 3^y, 2^{-x} 3^{-y}\} < p + 1\}$, waarvan de oppervlakte opp V gelijk is aan $\frac{3 \cdot (\log(p+1))^2}{(\log 2) \cdot \log 3}$. Men ziet gemakkelijk in dat $L \cap V$ alleen het punt $(0, 0)$ bevat. Volgens Minkowski's roosterpuntenstelling, waarvan het bewijs erop berust dat de translaties $r + \frac{1}{2}V$ van $\frac{1}{2}V$ over de punten $r \in L$ paarsgewijs disjunct zijn, geldt dan $d(L) \geq (\text{opp } V)/4$. De orde van de ondergroep $\langle 2, 3 \rangle$ van $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ is dus tenminste $\frac{3 \cdot (\log(p+1))^2}{4 \cdot (\log 2) \cdot \log 3}$.

de verwachting van $i(p)$ *oneindig* is. Zo extreem klein is $i(p)$ dus helemaal niet!

De situatie verandert als we 3 in het spel brengen, en de ondergroep $\langle 2 \pmod{p} \rangle$ van $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ vervangen door $\langle 2 \pmod{p}, 3 \pmod{p} \rangle$, voor priemgetallen p die groter dan 3 zijn. De orde van die laatste groep, die tevens de kleinste positieve k met $2^k \equiv 3^k \equiv 1 \pmod{p}$ is, geven we aan met $e(p)$, bijvoorbeeld $e(431) = 43$; het is een deler van $p - 1$ die deelbaar is door $d(p)$. De index

$$r_1 = \prod_{p \text{ priem}} \frac{p^2 - p - 1}{p^2 - p} \doteq 0,373955813619$$

$$r_n = \frac{r_1}{n^2} \cdot b_{\text{ggd}(n,8)} \cdot \prod_{p \text{ priem}, p|n} \frac{p^2 - 1}{p^2 - p - 1}$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_4 = \frac{2}{3}, \quad b_8 = 2$$

$$s_1 = \prod_{p \text{ priem}} \frac{p^3 - p^2 - 1}{p^3 - p^2} \doteq 0,697501358496$$

$$s_n = \frac{s_1}{n^3} \cdot c_{\text{ggd}(n,24)} \cdot \prod_{p \text{ priem}, p|n} \frac{p^3 - 1}{p^3 - p^2 - 1}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{120}{119}, \quad c_4 = \frac{96}{119}, \quad c_8 = \frac{32}{17}, \\ c_3 = 1, \quad c_6 = \frac{6}{7}, \quad c_{12} = \frac{12}{7}, \quad c_{24} = 4$$

p	$j(p)$	$e(p)$	$h(p)$
5	1	4	0
23	2	11	0,289065
431	10	43	0,612194
6553	56	117	0,845276
11321831	2834	3995	0,958596

Tabel 8. Schrijf $h(p) = (\log j(p))/\log e(p)$, met $e(p) = \#(2 \bmod p, 3 \bmod p)$ en $j(p) = (p-1)/e(p)$, voor priemgetallen $p > 3$. De tabel toont alle $p < 6 \cdot 10^{11}$ waarvoor $h(p)$ groter is dan alle $h(p')$ met $p' < p$. Een gedurfd vermoeden zegt dat h een maximum aanneemt dat groter dan 1 is, met $\limsup_p h(p) = 1$.

$j(p) = (p-1)/e(p)$ van de ondergroep deelt $i(p)$. In nog sterkere mate dan voor $i(p)$ en $d(p)$ het geval is, lijkt $j(p)$ doorgaans veel kleiner te zijn dan $e(p)$. Tabel 6 spreekt in dezen boekdelen. Tastbare stellingen zijn evenwel opnieuw schaars.

Als analogon van de ondergrens $d(p) \geq (\log(p+1))/\log 2$ heeft men nu de grotere maar nog steeds zwakke ondergrens $e(p) \geq 3 \cdot (\log(p+1))^2 / (4 \cdot (\log 2) \cdot \log 3)$ (zie Figuur 7). Het analogon van de Mersenne-priemgetallen lijkt te ontbreken, in de zin dat een oneindige verzameling priemgetallen p waarop $e(p)/(\log(p+1))^2$ begrensd is, niet voor het oprapen ligt. Wellicht bestaat zo'n verzameling helemaal niet. Voor $p = 431$ is de gegeven ondergrens voor $e(p)$ ongeveer 36,269654, wat goed in de buurt van de juiste waarde $e(431) = 43$ ligt, en voor $p = 6553$ is de ondergrens ongeveer 76,057079, terwijl $e(6553) = 117$.

De beschikbare empirische informatie lijkt te bevestigen dat j gemiddeld duidelijk kleinere waarden aanneemt dan i . Net als in het geval van $i(p)$, heeft men een plausibele formule voor de kans dat $j(p)$ gelijk is aan een gegeven positief geheel getal n (zie kader), en een bewezen formule voor de kans dat $j(p)$ deelbaar is door n . Die laatste kans bestaat en is gelijk aan $a_n/(\varphi(n) \cdot n^2)$, waar a_n het aantal delers van n onder de getallen 1, 8, 12, 24 is. Dit is maar liefst $n/2$ dan wel n keer zo klein als de corresponderende kans voor $i(p)$,

al naar gelang n deelbaar door 12 is of niet. Evenals i is j onbegrensd, maar het argument waarmee men kan bewijzen dat i een oneindige verwachting heeft, blijkt voor j iets heel anders te geven. Men vindt namelijk dat er een positieve c is zodat, met $Q_x = \{p : p \text{ priem}, 3 < p \leq x\}$ en s_m als in het kader, voor alle n geldt

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \in Q_x : j(p) \geq n\}}{\#Q_x} \geq \sum_{m=n}^{\infty} s_m \geq \frac{c}{n^2},$$

en ook

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\#Q_x} \cdot \sum_{p \in Q_x} j(p) \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot s_n = \frac{5 \cdot 59 \cdot \pi^2}{2^6 \cdot 3^3} \doteq 1,684915.$$

Bovendien impliceert de gegeneraliseerde Riemann-hypothese dat de eerste en de laatste van deze drie ongelijkheden gelijkheden zijn, met een $\liminf$ die een limiet is. Als dat klopt, dan heeft $j(p)$ een eindige en zelfs tamelijk kleine verwachting, maar een oneindige spreiding.

We zagen net dat de kans op $j(p) \geq n$ tenminste c/n^2 is. Dit geldt voor vaste n , maar er is ongetwijfeld een vergelijkbaar resultaat waarin n een voldoende langzaam groeiende functie van p is. De avontuurlijke keuze $n = \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ zou dan tot de voorspelling leiden dat er oneindig veel priemgetallen p zijn met $e(p) < j(p)$ (zie Tabel 8). Zelfs met een enkel dergelijk priemgetal heb ik nog nooit kennisgemaakt, maar de gedachte dat het misschien ooit zal gebeuren, is al bijna even opwindend als het curieuze stel congruenties $2^{43} \equiv 3^{43} \equiv 1 \bmod 431$ waar het verhaal mee startte.

Epiloog

Bij het raadplegen van een latere druk van Wells' boekje kwam ik tot mijn verrassing een

10	-20	-3	6	-12	-19	-5
16	11	21	1	-2	4	-8
17	9	-18	-7	14	15	13

Figuur 9. Met behulp van deze tabel kan men gemakkelijk twee elementen van het lichaam $\mathbf{Z}/43\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 21\}$ via vectoroptelling vermenigvuldigen. In het midden van de tabel bevindt zich de oorsprong 1. Ten opzichte van de oorsprong heeft -12 coördinaten $(1, 1)$, en 13 heeft coördinaten $(3, -1)$. Met de x -coördinaat rekent men modulo 7, en met de y -coördinaat modulo 3, dus $(1, 1) + (3, -1) = (-3, 0)$. Op positie $(-3, 0)$ staat 16, en dit betekent $-12 \times 13 = 16$ in $\mathbf{Z}/43\mathbf{Z}$. De benodigde vermenigvuldiging van de tekens doet men uit het hoofd, evenals vermenigvuldigingen met 0. Op analoge manier kan men delingen uitvoeren; uit $(1, 1) - (3, -1) = (-2, -1)$ ziet men bijvoorbeeld $12/13 = -9$. De lezer mag zelf ontdekken hoe de tabel voor het trekken van vierkantswortels te gebruiken is.

oude bekende tegen, die me deed beseffen dat het getal 43 al lang voor ik naar het Wilde Westen vertrok, mijn pad gekruist had. In de jaren '70 definieerde F. Göbel de rij $(x_n)_{n \geq 0}$ door $x_0 = 1$ en $x_n = (1 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2)/n$ voor $n > 0$, en hij vroeg zich na berekening van een aantal beginwaarden zoals

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 10, \\ x_5 = 28, \quad x_6 = 154$$

tevergeefs af of alle getallen x_n geheel zijn. Het antwoord luidt "nee"; in feite is x_n geheel dan en slechts dan als $n < 43$. Wat dit interessant maakt, is dat x_{42} en x_{43} veel te groot zijn om zelfs met moderne hulpmiddelen expliciet uit te rekenen, zodat een indirecte aanpak vereist is. De lezer die met de hand wil verifiëren dat x_{43} niet geheel is, kan daarvoor goed de in Figuur 9 getoonde rekenmachine gebruiken. $\leftarrow$

Nawoord

Met dank aan Peter Kluit, Dirard Mikdad, Willem Jan Palenstijn, Jan Rozendaal en Cameron Stewart.

Referenties

- D.R. Curtiss, 'On Kelllogg's Diophantine problem', *Amer. Math. Monthly* **29** (1922), pp. 380–387.
- J. Dyer-Bennet, 'A theorem on partitions of the set of positive integers', *Amer. Math. Monthly* **47** (1940), pp. 152–154.
- E. Landau, 'Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante', *Math. Ann.* **56** (1903), pp. 671–676.
- H.W. Lenstra jr., 'On Artin's conjecture and Euclid's algorithm in global fields', *Invent. Math.* **42** (1977), pp. 201–224.
- H.W. Lenstra jr., 'Solution of problem 649', *Nieuw Arch. Wisk.* (4) **1** (1983), pp. 97–99.
- F. Peyrard, *Les œuvres d'Euclide*, 3 vols, Patris, Paris, 1814/1816/1818.
- A. Ponsen, E. van der Vlist (red.), *Het fataal evenement. De buskruitramp van 1807 in Leiden*, Uitgeverij Ginkgo, Leiden, 2007.
- L. Pyber, 'Finite groups have many conjugacy classes', *J. London Math. Soc.* (2) **46** (1992), pp. 239–249.
- J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Société Mathématique de France, 1977.
- W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1964.
- N.J.A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, published electronically at www.research.att.com/~njas/sequences/, 2006.
- P. Tannery, C. Henry, *Oeuvres de Fermat*, tome deuxième, Gauthier-Villars, Paris, 1894.
- K. Vogel, *Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik*, Michael Beckstein, München, 1929.
- D. Wells, *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*, Penguin Books Ltd, Harmondsworth, 1986.

Klaas Landsman

IMAPP, FNWI

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld 1

6525 ED Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Hans Melissen

EWI

Technische Universiteit Delft

Mekelweg 4

2628 CD Delft

j.b.m.melissen@tudelft.nl

Wil Schilders

W&I

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

w.h.a.schilders@tue.nl

Maatschappij

De overval: All Options

Het Amsterdamse All Options is een beursbedrijf dat razendsnel en nuchter handelt in opties. Bij algo-trading laat het bedrijf de handel zelfs geheel over aan computers. All Options heeft nogal wat wiskundigen in dienst, en NAW is uiteraard benieuwd wat zij aan methoden en technieken inzetten. Klaas Landsman (RU), Hans Melissen (TUD) en Wil Schilders (NXP, TU/e) overvielen het bedrijf op 2 juli van dit jaar.

Het logo van All Options straalt ambitie, agressie en snelheid uit. Een leeuw springt over een boom heen, ongetwijfeld op jacht naar een prooi. Allard Jakobs, oprichter, CEO en grootaandeelhouder van het bedrijf, nam in januari 2009 na een onderhandeling van twee uur Saen Options over en streeft binnen twee jaar naar wereldwijd marktleiderschap. Alleen al dit jaar wil Jakobs 50 *traders* aannemen. Wie dat wil worden moet, alleen al om enige hoop op een sollicitatiegesprek te koesteren twintig (weliswaar eenvoudige) rekenvragen in maximaal twee minuten uit kunnen voeren (zie kader). De echte snelle jongens, die het later gaan maken bij het bedrijf doen dat in 45 seconden, met alles goed natuurlijk. Tenslotte moet een *market maker* in de optiebeurs te midden van een groot aantal agressieve concurrenten in een paar seconden besluiten wat zijn bied- en laatprijzen zijn. Een vergissing kan het bedrijf zomaar miljoenen kosten. Bovendien moet je in de

ze business de nummer één zijn, degene met de meest aantrekkelijke prijs. Nummer twee of drie is niet goed genoeg, de tegenpartij zal altijd kiezen voor nummer één, er wordt niet meer verdeeld en gegund, zoals vroeger: de markt is hectisch en onverbiddelijk. En daarom worden van de 100 sollicitanten gemiddeld slechts 10 op proef aangenomen, waarvan vervolgens nog eens de helft binnen een half jaar afvalt gedurende de in-house opleiding. Van de 5 overgeblevenen slaagt slechts een enkeling er in om een goede handelaar te worden. Eén op de honderd!

Het bedrijf

Op een bloedhete tweede juli togen we 's morgens vroeg, nieuwsgierig en gewapend met de nodige vragen naar Amsterdam voor een overval op dit bedrijf. Sebastian op het Veld, met wie het NAW contact had gelegd op de Beta Banenmarkt in Leiden eerder dit jaar, was onze gastheer. Voor de zekerheid stuurden we nog een sms'je waar we precies moesten zijn, maar inderdaad, het was Beursplein 5. Dit had in eerste instantie onze verbazing gewekt, aangezien dit toch de locatie was van de Amsterdamse effectenbeurs? Eenmaal aangekomen bleek al snel dat de effectenbeurs hier

niet meer zetelt, en dat werd ons ook verteld door Joost van der Laan, Manager Corporate Affairs. Nu zagen we, niet alleen in een klein hoekje, maar overal waar we keken, werkplekken van *traders* van All Options, sommigen met 9 schermen, anderen met 13 en zelfs een-tje met 16 schermen. Ook dat maakte indruk, zeker omdat de hectiek die we hadden verwacht uit de tijden van 'open outcry' er helemaal niet bleek te zijn. Niemand zat aan de telefoon, niemand rende door de hal, en een enkeling leek zelfs te zitten nadenken. De werkvloer is uitgevoerd in de vorm van een kantoorruimte, zodat er geen barrières zijn voor de broodnodige communicatie tussen *traders* en *quants* (zie onder), zowel onderling als met elkaar. Vooral vanaf de galerij, waar onze gesprekken plaatsvonden, is dit een mooi, ruimtelijk gezicht.

Wat ons ook opviel was dat het tijdperk van de stropdassen en het grijs met bretels voorgoed voorbij is. Hier lopen jonge mensen (onder wie overigens slechts een enkele vrouw) rond in bij de buitentemperatuur passende kleding, en zelfs Joost, die toch gasten ontvangt, is dasloos. De profielen op de website stralen jeugd, dynamiek en sportiviteit uit. Hobbies van de medewerkers zijn *cycle racing*, *paragliding*, *mountain climbing* en *scuba diving*. Er zijn er gratis lunches, koffie en fris, een eigen fitnessruimte en wekelijks komt de masseur langs. Waar vind je nog zulke werkgevers? Voeg dit bij de geweldige werkplek in dit mooie gebouw, met zijn kunst-





Foto: Hans Melissen

Ingang Beursplein 5

voorwerpen en de antieke barbiersstoel, en enige jaloezie borrelt al direct op!

Er is ook veel veranderd, zo betoogt Joost. Waar vroeger alles draaide om de handelaar, gaat het tegenwoordig vooral om een mix van mensen, systemen en software. Ook de bezetting is compleet veranderd. De handelaren van weleer zouden in de moderne computer-gestuurde financiële wereld niet meer kunnen functioneren, zoals ook de nuchtere *traders* van nu niet hadden gepast bij de fysieke hectiek van vroeger. Bovendien zorgt elk zichzelf respecterend bedrijf ervoor dat er 24 uur per dag handel gedreven kan worden. All Options heeft dan ook kantoren in Hong Kong, China en Willemstad. In China wordt de bulk van de software geproduceerd, hoewel de meest vitale onderdelen nog steeds in Amsterdam worden geschreven.

De missie van All Options is “to be a leading global liquidity provider in exchange listed financial products”. Dit houdt in de praktijk in dat All Options optreedt als market-maker op optiebeurzen. Dat is de belangrijkste business van het bedrijf, maar daarnaast doet het aan *algo-trading*, ofwel (‘algoritmi-sche’) statistische arbitrage. Hierbij wordt ingespeeld op bijvoorbeeld het plotselinge ontstaan van grote handelsvolumes of onverwachte prijsverschillen, waardoor bij een juiste aanpak op vrijwel risicoloze wijze geld kan worden verdiend; in de financiële wereld is dat precies de betekenis van het begrip ‘arbitrage’. Omdat de hypothese van de efficiënte markt (die zegt dat alle relevante informatie al verwerkt is in de momentane prijzen) in ieder geval bij benadering geldt, moet daarbij ongelofelijk snel worden gereageerd op nieuwe informatie, zodat de transacties vaak binnen milliseconden moeten worden uitgevoerd om

enig positief effect te hebben. Dit kan uiteraard alleen als de *algo-trading* volledig geautomatiseerd is, maar ook moeten de computers zo dicht mogelijk bij de beurscomputers staan, bij voorkeur zelfs in dezelfde server-ruimte. Met deze activiteit betreedt het bedrijf het terrein van een zware jongen als Jim Simons, wiens bedrijf *Renaissance Technologies* zelfs volledig van dergelijke *algo-trading* leeft (zie *A Random Walk Down Wall Street*, NAW 5/9, 18-23 (2008)).

All Options werkt geheel voor eigen rekening. Er zijn dus geen klanten, en het is ook geen *broker*. De tegenpartij van een market-maker van het bedrijf kan een particulier zijn, die bijvoorbeeld transacties doet via Binck of een andere *broker*, of een bank. Het bedrijf heeft schijnbaar weinig last van de crisis. Integendeel; gisteren zijn weer 6 nieuwe medewerkers aangenomen, die in het zaaltje naast ons een begin maken met hun in-house opleiding. Men selecteert vooral econometristen, hoewel ook toegepast wiskundigen een goede kans maken aangesteld te worden. Joost vertelt dat men een voorkeur heeft voor MSc niveau. Er is geen plaats voor wetenschappers *pur sang* omdat zij vaak te weinig pragmatisch kunnen denken en handelen. Niet de optimale oplossing van een probleem is belangrijk, maar *een* oplossing, zolang deze maar technisch implementeerbaar is en aan de *traders* kan worden uitgelegd. PhD niveau is volgens hem dus minder gewenst, hoewel dit vijf minuten later volledig wordt tegengesproken als we kennismaken met twee gepromoveerde wiskundigen!

Quants

Aangezien het een overval betrof, waren we natuurlijk vooral geïnteresseerd in de meest

waardevolle *assets* van het bedrijf, zo niet om mee te nemen dan wel om aan de tand voelen. Natuurlijk zijn de handelaren cruciaal voor ieder beursbedrijf, maar deze mensen *handelen*, zoals hun naam ook suggereert; in de huidige tijd is ook een voorsprong op het gebied van wiskundig doorwrochte handelsstrategieën essentieel. Een goede *market maker* heeft een strategie voor de lange termijn, die hij moet proberen te volgen door op de korte termijn steeds de juiste beslissingen te nemen. Voor beide termijnen is een gedegen wiskundige onderbouwing nodig. Deze wordt verzorgd door de zogenaamde *quants*, ofwel *quantitative analysts* (sceptici zullen, zeker na de kredietcrisis, wijzen op het Oudnederlandse woord ‘quantelaer’, dat volgens Van Dale’s etymologisch woordenboek “knoeier, bedrieger” betekent). De eerste *quants* werden in de zeventiger jaren in de V.S. aangesteld en waren voornamelijk fysici en toegepast wiskundigen. Er speelden toen drie dingen. Ten eerste kon deze groep na het afkalven van de enorme investeringen in de exacte wetenschap na atoombom en Spoetnik geen vaste baan meer op een universiteit krijgen. Ten tweede zorgde het olie-embargo van 1973 voor grote instabiliteiten op de financiële markten, waardoor bankiers de noodzaak van beter risicomanagement begonnen in te zien (deze les waren ze bij Bear Stearns en Lehman Brothers 35 jaar later kennelijk weer vergeten). Ten slotte publiceerden Black en Scholes in datzelfde jaar hun

De test

Wie bij All Options een kans wil maken moet kunnen rekenen, goed en snel! Enkele voorbeelden:

- $143 : 13 = ?$,
 - $8 * 3 * 2 = ?$,
 - 7% van $300 = ?$
 - Vul aan: 1, 2, 4, 7, 11, 16, ?
 - Een stel heeft twee kinderen die samen 16 jaar zijn, De jongste is 4 jaar jonger dan de oudste. De moeder is 7 jaar jonger dan haar man. De leeftijd van de vader is het kwadraat van de leeftijd van de jongste. Wat is de gezamenlijke leeftijd van de ouders?
 - $(79 - 35) * 12 - 10\% * (169 + 111) = ?$
- Niet echt heel moeilijk, maar het moet foutloos en razendsnel, om ooit op de beursvloer achter twaalf computerschermen te mogen zitten. Hebt u ambities in deze richting? Op www.alloptions.nl kunt u uzelf tegenkomen.

beroemde formule voor de prijsbepaling van opties, zodat er ook daadwerkelijk een theorie was die de *quants* konden gebruiken. Een aardig overzicht van de quantenwereld (niet te verwarren met de kwantumwereld!) is *My Life as a Quant* van Emanuel Derman (Wiley, 2004), helaas enigszins ontsierd door de ijdelheid van de auteur. Een goede *quant* beheerst volgens Derman tenminste drie gebieden: financiële theorie, toegepaste wiskunde en programmeren. Een hele goede heeft daarboven nog gevoel voor de handel zelf, en hoe dan ook moet een *quant* goed kunnen aanvoelen wat een *trader* wil en (al of niet) kan.

Het overvalteam sprak twee *quants* van All Options: François Myburg en Julien Gosme. Myburg studeerde in Potchefstroom in Zuid-Afrika elektrotechniek en toegepaste wiskunde, met een specialisatie in signaalverwerking. Vervolgens kwam hij terecht op het Stan Akkermans Instituut van de TU/e, waarna hij in de groep van Carel-Jan van Driel van Philips Research promoveerde op het gebied van de digitale signaalverwerking. Dit leidde als vanzelf tot een loopbaan bij Philips Applied Technologies, in eerste instantie op het gebied van de *spatial audio coding*, maar de financiële wereld trok Myburg uiteindelijk toch meer aan; eerst bij Saen, en na de overname nu dus bij All Options. Gosme studeerde informatiewetenschappen in Troyes (Frankrijk) en promoveerde daar ook op het gebied van de mathematische signaalanalyse. Ook hij kwam via Saen bij All Options terecht, en gezamen-

Beursplein 5

De term 'Beursplein 5' is nog net niet te vinden in de Dikke Van Dale, maar is zijn oorspronkelijke betekenis inmiddels zo ver overstegen dat weinig mensen hierbij aan een adres of gebouw zullen denken. De oude beurs van Zocher uit 1848, die stond waar nu het gebouw van de Bijenkorf in Amsterdam staat, was bouwvallig geworden en werd in 1903 vervangen door de nieuwe Beurs van Berlage, ontworpen door Hendrik Petrus Berlage. Dit nieuwe gebouw bood onderdak aan vier beurzen: de goederenbeurs, de graanbeurs, de schippersbeurs en de effectenbeurs. Al in 1912 verhuisde de effectenbeurs naar een eigen plek: het monumentale pand Beursplein 5, ontworpen door architect Jos Cuypers en gelegen aan het Beursplein tussen de Beurs van Berlage en de Bijenkorf. Grote veranderingen in de beurswereld leidden er toe dat het gebouw enige tijd leeg stond.

Sinds 1998 is het pand weer bevolkt door de optiebeurs Euronext en sinds 2008 tevens door Saen Options. Met de overname van Saen heeft All Options ook de historische locatie geërfd en daar lijken ze helemaal niet ontevreden mee te zijn. De mooie beursvloer van weleer is nu gevuld met werkplekken van *traders* en *quants*, elk achter hun eigen batterij aan beeldschermen, dit alles in een zeer stijlvolle entourage, een prachtig gewelfd dak met mooie schilderijen. Aan de muur hangen ingelijste trader jackets, stammend uit de tijd dat er verschillende bedrijven op deze beursvloer huisden, die herkenbaar waren aan hun gekleurde jasjes.

Hoewel er wereldwijd inmiddels 24 uur per dag wordt gehandeld is de traditie van het openen en sluiten van de dag met de gong in ere hersteld en wordt deze handeling regelmatig verricht door vooraanstaande gasten en bezoekers.

Een indruk van het interieur krijgt u op www.360gradenpanoramafoto.nl/showcase02/show107606.html

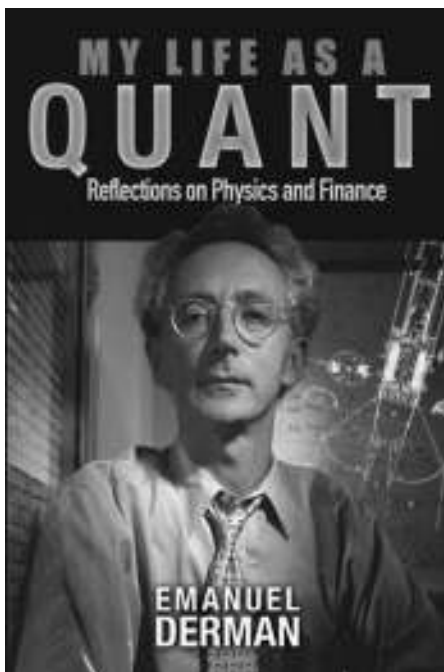
lijk doorliepen zij zo'n vier jaar geleden het normale traject: eerst de interne cursus, vervolgens aan de slag als handelaar. Die tak van sport hielden ze echter na een maand of twee voor gezien; hun talenten lagen meer in het onderzoek. Al hebben ze ieder maar 6 schermen voor zich op de werkplek, ze voelen zich niet ondergeschikt aan de *traders* en merken op dat dit typisch is voor All Options.

Het is dan ook duidelijk dat mensen met een achtergrond als Myburg en Gosme nuttig zijn voor het bedrijf, aangezien het analyseren van tijdsreeksen op de beurs uiteraard van groot belang is. Ze werken samen met handelaren, ze doen mee aan de *algo-trading* en zelfs denken ze mee over de toekomstige richting van het bedrijf. Ze spelen daarmee een centrale rol in de firma. Toen we het bedrijf verlieten waren de twee *quants* dan ook al weer druk in gesprek met een van de vice-presidenten!

Maar de belangrijkste rol van onze twee *quants* blijft toch het ontwikkelen en doorzien van modellen. Hoewel daar slechts relatief eenvoudige wiskunde voor nodig is (iets meer dan Calculus; als er al geavanceerdere wiskunde wordt gebruikt, houdt men dat angstvallig verborgen voor de buitenwereld, zelfs overvallers kunnen niet bij deze informatie!), is toch grondig inzicht noodzakelijk. Ons wordt uitgelegd dat de moeilijkheid niet zozeer zit in de wiskunde zelf, maar in de

kritische analyse van de aannamen die worden gedaan om een bepaald stuk wiskunde in te zetten. Daar, op het snijvlak van wiskunde en praktijk, leveren de *quants* hun grootste bijdrage. Theoretisch gesproken is kennis van een boek als *Options, Futures, and Other Derivatives* van John Hull (Prentice Hall Series in Finance, 6de ed., 2008) toereikend, zo wordt ons verzekerd. Als tijdens het gesprek de naam *Renaissance Technologies* valt worden er wat verlegen blikken van bewondering uitgewisseld tussen de *quants*. Het wordt duidelijk dat All Options nog steeds de ruimte heeft om op te kijken en te groeien naar de nog groteren.

Myburg en Gosme beginnen hun dag meestal niet met het lezen van de *Financial Times* of het *Wall Street Journal*, zoals de ouderwetse overvallers hadden verwacht, maar met *Bloomberg* of het *NuclearPhynance* forum (www.nuclearphynance.com). Ook de site van *quantitative finance* goeroe Paul Wilmott wordt vaak geraadpleegd. Dit leidt meteen tot de vraag of er ook conferenties worden bezocht, waarop Gosme zijn hand aan zijn oor brengt, ofwel: ze gaan er enkel heen om te luisteren. Uitwisseling van ervaringen met methoden gebeurt eigenlijk niet, en er wordt ook niets gepubliceerd. Immers, je kunt in deze business geen geld verdienen met standaard methoden, je moet slimmer of tenminste verder zijn dan je concurrenten.



My life as a Quant, Emanuel Derman, Wiley (2004), 304 pp., ISBN 0471394203



De keerzijde van deze medaille is bekend: je krijgt door deze opstelling natuurlijk ook weinig informatie van anderen, want zij gedragen zich eender. Het is het aloude adagium, dat overigens in veel andere industrieën al lang overboord is gegooid, en daar geleid heeft tot hechte samenwerkingen tussen concurrenten. De financiële wereld is hier kennelijk nog niet klaar voor, zo lijkt de conclusie.

Het bedrijf is echter niet zo gesloten als het voorgaande suggereert. Voor bezoeken van studenten staat All Options open, en men woont ook her en der in het land evenementen bij. Er zijn ook studenten die hun stage doen bij het bedrijf, en hun stageverslagen worden zelfs gepubliceerd. Vaak verloopt dit via DTF (*Derivatives Technology Foundation*, zie www.tdtf.nl). Op deze manier komt dus toch wel wat informatie naar buiten. De DTF organiseert ook een jaarlijks symposium, waar interessante lezingen worden gehouden (zoals een aantal jaren geleden door de eer-

der genoemde Wilmott, en recent ook door Wim Schoutens uit Leuven, die in het maartnummer van NAW nog een penetrante analyse schreef over de financiële crisis).

Je kunt je natuurlijk afvragen of onderzoekers uit een exacte discipline wel gelukkig zijn binnen een financiële instelling. Dit wordt treffend geïllustreerd in een beoordeling door een krant van het eerder genoemde boek van Derman: "A deep and elegant exploration by a thinker who moved from the hardest of all sciences (physics) to the softest of the soft (finance)." Nu kan men discussiëren over de vraag welke wetenschap de hardste is, maar dat de financiële sector wetenschappelijk gesproken boterzacht is, daar is iedereen het toch over eens? Het maken van modellen betekent daar immers dat je het gedrag van mensen modelleert, en niet van planeten of quarks. Inderdaad is het niet alleen zo dat er voor menselijk gedrag geen vastgestelde wetten zijn, Myburg betoogt bovendien dat modellen voor dit gedrag in al hun softheid ook nog eens voortdurend veranderen. De crisis van de 30-er jaren was niet die van nu, en in feite is de hele financiële wereld vanwege de automatisering nu totaal anders dan 80 jaar geleden. *Quants* moeten daarom vooral pragmatisch zijn en niet meteen grijpen naar de meest recente fancy wiskundige technieken.

Maar zijn Myburg en Gosme nu gelukkig in hun werk? In veel opzichten wel. Ze werken in een klein team met goed gespreide expertise, ze leren een hoop nieuwe dingen en het gaat

hier uiteraard om een spannende, snelle wereld. De werktijden zijn ook niet honderd uur per week, zoals je vaak hoort van wiskundigen bij *Investment Banks*, maar gewoon van half negen tot zes op doordeweekse dagen. De enige schaduwzijde die wordt genoemd is eigenlijk, in het nette jargon van het duo, "de hoge mate van specialisatie". Bedoelen ze dat het allemaal draait om geld zoals in de film *Wall Street*: "It's all about bucks, kid. The rest is conversation"?

De vice-president

Quants en handelaren zijn natuurlijk drukke mensen, en normaal zou het niet mogelijk geweest zijn om zo lang met Gosme en Myburg te spreken. Maar om half twaalf is het echt weer tijd om aan de slag te gaan en worden zij afgelost door de vice-president, Timir Karia. Hij is Amerikaan van origine en is sinds anderhalf jaar werkzaam bij All Options. Ook Karia heeft wiskunde gestudeerd, in combinatie met informatica, aan NYU en Columbia University. Na zijn studie ging hij als software engineer aan de slag bij Merryll Lynch, maar raakte al snel betrokken bij een aantal *internet start-ups*, culminerend in zijn eigen softwarebedrijf. Totdat Allard Jakobs hem spotte en naar Amsterdam haalde.

Ondanks zijn drukke baan heeft Karia nog veel universitaire contacten, vooral in de Verenigde Staten. Hij ziet een groot verschil met de praktijk. Universiteiten werken vaak met data waarin geen dividenden zijn verwerkt, en modellen waarin transactiekosten geen rol spelen. Dat staat erg ver af van wat men bij All Options tegenkomt. Desalniettemin zijn er wel interessante ontwikkelingen en het is zeker zaak om deze in de gaten te houden. Karia bevestigt dat men zich van de wiskunde niet al te veel moet voorstellen. Geen ingewikkelde technieken, maar veelal eerstejaars niveau. Wel moet je, zoals ook de *quants* betoogden, echt goed inzicht hebben en alle methoden tot in het kleinste detail begrijpen. Geavanceerde methoden worden niet uitgesloten, maar als VP vindt hij het vooral belangrijk dat er een goede afweging wordt gemaakt: niet een methode opnemen omwille van *l'art pour l'art*, maar enkel als er een duidelijke noodzaak is. Hierbij is correctheid een van de hoogste principes, plus een zeer gedegen argumentatie. Karia observerend krijgen we de indruk dat je zeer goed beslagen ten ijs moet komen om hem te overtuigen dat jouw wavelet-based methode geld in het laatje gaat brengen! Omdat men het toch voortdurend over redelijk basale wiskunde heeft, vragen we ons hardop af of de finan-



Julien Gosme en François Myburg

Foto: Hans Melissen



Foto: Hans Melissen

De kantoorruimte van All Options in de voormalige handelsvloer

ciële wereld soms bang is om nieuwe methoden te gaan gebruiken. Als je kijkt naar de veelheid aan conferenties, symposia en andere aandacht voor de financiële wiskunde, dan zou je toch denken dat er nieuwe bruikbare technieken bij moeten zitten. Waarom worden die niet of nauwelijks gebruikt, waarom is Black-Scholes nog steeds heilig?

Karia benadrukt nogmaals dat er een praktijk is waarin alles getoetst moet worden en die praktijk is onverbiddelijk voor sommige 'veelbelovende' ontwikkelingen. Karia lijkt ons bij uitstek een harde jongen, maar midden in het gesprek komen we plotseling te spreken over biologie en planten! Karia noemt een boek dat hem sterk heeft beïnvloed, namelijk *The Algorithmic Beauty of Plants* door Prusinkiewicz and Lindenmayer

(Springer, New York, 1990). Dit geeft volgens hem een uitstekende indruk van de rol van de wiskunde in de wereld van de planten, en Karia vergelijkt deze laatste rechtstreeks met de financiële wereld.

Ook hem leggen we de vraag voor hoe er omgegaan wordt met geheimhouding. Hij vindt eigenlijk dat het wellicht toch wat overtrokken wordt, dat er best gebieden zijn waarin die geheimhouding losgelaten zou mogen worden. Daar staat tegenover dat er bepaalde methoden en gebieden zijn die absoluut voor geheimhouding in aanmerking komen. Uitwisseling van data zou voor academische onderzoekers geweldig zijn, maar zover gaan bedrijven als All Options op dit moment nog niet. Uiteindelijk moet het bedrijf een balans vinden tussen *reinventing the wheel* en stan-

ding on the shoulders of giants, zoals Karia het uitdrukt.

De buit

De VP heeft duidelijk minder tijd dan de *quants* en we nemen afscheid. Het was een aangenaam bezoek: gastvrij onthaal, prachtige locatie, boeiende gesprekken. Voor jonge, dynamische mensen lijkt All Options ons een uitstekende werkomgeving: *it's a creative endeavour*, om met de VP te spreken. En onze buit? Een notitieblokje, een USB-stick en goede indruk van wat er speelt in het bedrijf. Qua wiskundige methoden zijn we niet veel wijzer geworden: die bleven in een kluis die deze overvallers niet wisten te kraken.

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut
Universiteit van Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
F.Verhulst@uu.nl

Oleg Kirillov

Department of Mechanical Engineering
Technical University of Darmstadt
Hochschulstr. 1
D-64289 Darmstadt, Germany
kirillov@dyn.tu-darmstadt.de

Onderzoek

Bottema opende Whitney's paraplu

Zo theoretisch als het onderwerp 'singulariteiten' uit de analyse van dynamische systemen ook mag klinken, de toepassing ervan in mechanica en werktuigbouwkunde heeft uiterst concrete inzichten opgeleverd. Na het poneren van Zieglers paradox in 1952 duurde het tot de jaren negentig voor het verband met Whitney's paraplu werd gelegd. Deze ontdekking was echter al in 1956 gedaan door een Nederlander. Ferdinand Verhulst en Oleg Kirillov geven Oene Bottema de eer die hem toekomt.

Als er geen wrijving was, zou het perpetuum mobile bestaan. De mathematische slinger, het standaardvoorbeeld uit de mechanica, zou zonder wrijving altijd blijven slingeren. In de werkelijkheid echter is er wrijving in het ophangpunt en is ook de luchtweerstand een tegenwerkende kracht. Dat levert energieverlies zodat de slinger langzaam maar zeker naar de evenwichtsstand - stil omlaag hangen - terugkeert. Een ander voorbeeld is het zonnestelsel. De wrijving bij de beweging van de planeten om de Zon is zo gering dat we de posities van de planeten eeuwen vooruit kunnen voorspellen zonder met wrijving rekening te houden. Bij voorspellingen op nog langere termijn - miljoenen jaren - moeten we echter wel rekening houden met allerlei soorten van wrijving die energieverlies geven.

In de mechanica die in de negentiende eeuw in boeken als [20] werd vastgelegd was de boodschap duidelijk: wrijving stabiliseert 'neutraal stabiele' evenwichtstoestanden. Wat is neutraal stabiel? Denk aan de harmonische oscillator, dat is de mathematische slinger, gelineariseerd bij de omlaag hangende positie van de slinger. De eigenwaarden van deze evenwichtspositie zijn zuiver imaginair.

Dat heet neutraal stabiel, omdat een klein positief reëel deel de evenwichtspositie instabiel maakt, een klein negatief reëel deel de positie stabiel. Zuiver imaginair zit daar net (neutraal) tussen in.

Het idee dat wrijving stabiliseert kreeg een wijde verspreiding in het onderwijs en de wetenschappelijke literatuur. Er is echter een fascinerende categorie systemen die het volgende paradoxale gedrag bezitten: *zonder wrijving bezitten ze neutraal stabiele evenwichtstoestanden, maar als er kleine wrijving aan het systeem wordt toegevoegd, worden sommige van deze stabiele evenwichten instabiel.*

Het paradoxale verband tussen wrijving (of damping) en instabiliteit werd voor het eerst opgemerkt bij rotorsystemen. Deze bleken stabiel tot bij een zekere rotatiesnelheid, maar ze werden bij wrijving al eerder instabiel. Dat vonden bijvoorbeeld Kimball in 1924 [14] en Smith in 1933 [19]. We zullen later een model voor een rotorsysteem in meer detail bekijken.

Pas in de jaren 1950-1970 werd deze paradox duidelijk geformuleerd in de publicaties van Ziegler [24-25], Bolotin [5-6], en Hermann [11-12]; hun motivatie lag vooral op het

gebied van toepassingen in de aërodynamica, met name de zogenaamde 'flutter'-trillingen van staven en panelen die belast worden. Het bleek dat de kritische belasting waarbij zo'n staaf of paneel instabiele beweging ging vertonen, aanzienlijk lager werd indien er rekening werd gehouden met wrijving.

In de mechanica werd dit verschijnsel Zieglers paradox genoemd. Het gaf aanleiding tot een groot aantal studies en pogingen tot verklaring, tot in de jaren negentig duidelijk werd dat deze instabiliteitsparadox te maken heeft met de Whitney paraplu (umbrella) singulariteit van het stabiliteitsgebied. Zo leverde singulariteiten- en bifurcatie-theorie een onverwacht inzicht in deze mechanische verschijnselen.

Opmerkelijk genoeg was dit singulariteitengedrag al ontdekt door Oene Bottema [8] in 1956. Deze ontdekking is een halve eeuw lang onopgemerkt gebleven in de literatuur over dit onderwerp. GOOGLE SCHOLAR geeft geen enkele citatie van dit artikel in de periode 1956-2008.

In dit artikel bespreken we kort Zieglers paradox, het resultaat van Whitney en het werk van Bottema [8]. In Bottema's standaardwerk *Theoretische Mechanica* (heruitgegeven door Epsilon Uitgaven) wordt dit verschijnsel overigens niet genoemd. Hij achtte het onderwerp waarschijnlijk te weinig elementair. Het vele werk van Bottema op het gebied van praktische mechanica wordt beschreven in [16]. We besluiten met een rotor model dat de verschijnselen illustreert. Een uitvoerig overzicht

van historische en moderne resultaten is te vinden in [15].

Zieglers paradox

In 1952 publiceerde Hans Ziegler van de ETH Zürich twee artikelen [24–25] die klassiek werden en in brede kring bekend bij werktuigbouwkundig ingenieurs; het trok ook de aandacht van wiskundigen.

Het gaat over de dubbele slinger die is weergegeven in figuur 1(a); deze bestaat uit twee onbuigzame staven van lengte l , de hoeken die ze met de verticaal maken worden aangegeven met φ_1 en φ_2 . De twee massapunten m_1 en m_2 met gewichten G_1 en G_2 bevinden zich op afstanden a_1 en a_2 van de scharnieren. De elastische weerstand en de wrijving in de scharnieren worden gegeven door $c\varphi_1$, $c(\varphi_2 - \varphi_1)$ en $b_1\dot{\varphi}_1$, $b_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$, waarbij een punt differentiatie naar de tijd aangeeft. Op het vrije einde van de slinger werkt een axiale belasting P .

Met deze aannames geldt voor de kinetische energie van het systeem

$$T = \frac{1}{2} \left[(m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l a_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 a_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \right],$$

terwijl voor de potentiële energie geldt

$$V = \frac{1}{2} \left[(G_1 a_1 + G_2 l + 2c) \varphi_1^2 - 2c\varphi_1 \varphi_2 + (G_2 a_2 + c) \varphi_2^2 \right].$$

Voor de dissipatieve, niet-conservatieve krachten geldt

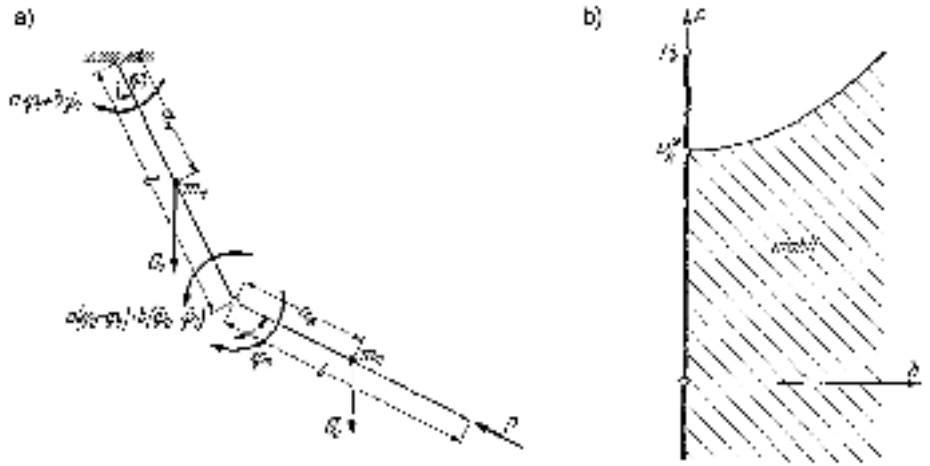
$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \varphi_2) - ((b_1 + b_2)\dot{\varphi}_1 - b_2\dot{\varphi}_2), \\ Q_2 = b_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2).$$

We kunnen vervolgens de Lagrange bewegingsvergelijkingen opschrijven: $\dot{L}_{\varphi_i} - L_{\varphi_i} = Q_i$, waarbij $L = T - V$. Dat leidt tot een 4-dimensionaal systeem van lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. Ziegler neemt dan aan dat $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l$, $b_1 = b_2 = b$ en begint ook met aan te nemen dat de dissipatie afwezig is ($b = 0$). De stabiliteit van de verticale evenwichtspositie volgt uit de eigenwaardebepaling van een 4-dimensionale matrix. Ziegler vindt dat de evenwichtspositie instabiel wordt als de axiale belasting P groter is dan een kritische waarde P_k , waarbij

$$P_k = \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2} \right) \frac{c}{l} \approx 2.086 \frac{c}{l}.$$

In het geval van wrijving ($b > 0$) moet de berekening opnieuw worden uitgevoerd. We vinden voor de kritische belasting

$$P_k(b) = \frac{41}{28} \frac{c}{l} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{ml^3}.$$



Figuur 1 Oorspronkelijke figuren van Ziegler. (a) Dubbele slinger met tangentiële belasting P , (b) stabiliteitsinterval (vet, $b = 0$) van de wrijvingsloze slinger en (gearceerd) het gebied van asymptotische stabiliteit van de gedempte slinger met gelijke wrijving voor beide delen van de slinger. Als $b = 0$, dan hebben we geen wrijving en stabiliteit indien $P < P_k$ geldt voor de belasting.

Ziegler vond dat het gebied van asymptotische stabiliteit van de evenwichtspositie in het geval van wrijving wordt gegeven door de ongelijkheden $P < P_k(b)$ en $b > 0$. Deze kun je uitzetten, samen met het stabiliteitsinterval als er geen wrijving is in een (P, b) -parameterdiagram, zie figuur 1(b). Het is verrassend dat de limiet van de kritische belasting $P_k(b)$ als b naar nul gaat, veel lager is dan de kritische belasting van het systeem zonder wrijving:

$$P_k^* = \lim_{b \rightarrow 0} P_k(b) = \frac{41}{28} \frac{c}{l} \approx 1.464 \frac{c}{l} < P_k.$$

In de mechanica en werktuigbouwkunde wordt dit verschijnsel de paradox van Ziegler genoemd. In de conclusie van zijn klassieke boek [5] benadrukt Bolotin in 1961 dat het oplossen van deze paradox van groot belang is voor de stabiliteitstheorie. Hij was zich er niet van bewust dat de essentiële elementen van de verklaring al in 1956 door Bottema waren gepubliceerd.

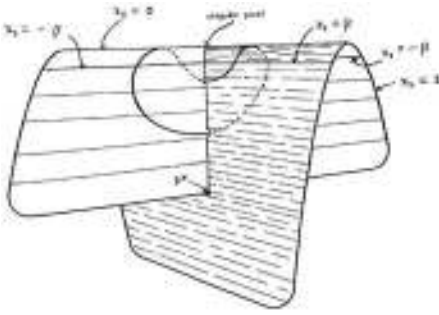
De paraplu van Whitney

Voordat we het werk van Bottema bekijken keren we terug naar 1943 en het onderzoek aan singulariteiten van afbeeldingen. Wat heeft dat met stabiliteitsonderzoek in de mechanica te maken? Bedenk, dat bij het bepalen van de stabiliteit van een oplossing we bijna altijd de eigenwaarden van een $n \times n$ matrix moeten bepalen. Deze zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking. In de elementen van deze matrix komen allerlei parameters voor: massa's, frequenties, dempingsconstanten enzovoorts. De eigenwaarden van de matrix willen we graag expli-

ciet kennen als functies van al deze parameters. Echter, de karakteristieke eigenwaardevergelijking die we kunnen opstellen is polynomiaal van graad n , ook de parameters zullen in deze vergelijking meestal polynomiaal van hoge graad voorkomen. We kunnen deze algebraïsche vergelijkingen, als ze van graad $n = 4$ of hoger zijn, zelden in hun volle algemeenheid oplossen. Maar we willen nu juist weten hoe de eigenwaarden veranderen als de parameters van waarde veranderen en met name bij welke waarde van de parameters een eigenwaarde met negatief reëel deel in een positief reëel deel overgaat. Dergelijke waarden van de parameters waarbij de aard van de oplossingen kwalitatief verandert, heten *bifurcatiewaarden*.

Terwijl toegepast wiskundigen en ingenieurs in dit soort bifurcaties geïnteresseerd waren, bestond er een groep wiskundigen met een heel andere invalshoek, degenen die differentiaaltopologie en globale analyse beoefenden. Daar was men onder andere geïnteresseerd in de veranderingen van de aard van algebraïsche krommen en oppervlakken, meer in het algemeen in het gedrag van singulariteiten van afbeeldingen bij verandering van parameters. Deze ontwikkeling liep parallel, pas in de zeventiger jaren van de vorige eeuw kwamen de ontwikkelingen uit de verschillende vakgebieden bij elkaar.

In 1943 verscheen een opmerkelijk artikel van Hassler Whitney [22]. Hij beschreef singulariteiten van afbeeldingen van differentieerbare n -variëteiten in $\mathbf{R}^m$ met $m = 2n - 1$. Waarom precies deze relatie tussen m en n ? Het bleek dat in dit geval een speciaal soort singulariteit een belangrijke rol speelt. De lo-



Figuur 2 Whitney's originele schets van de paraplu [23]

cale meetkundige gedaante van de variëteit in de buurt van de singulariteit werd 'Whitney's umbrella' genoemd, de paraplu van Whitney. In figuur 2 reproduceren we de originele schets van dat singuliere oppervlak uit een begeleidend artikel [23].

We geven schetsmatig de hoofdstelling weer: Beschouw de C^k afbeelding $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ met $m = 2n - 1$ en een geïsoleerde singulariteit $x = p$. We kunnen dan in een omgeving van p in $\mathbf{R}^n$ coördinaten $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kiezen en in $\mathbf{R}^m$ bijbehorende coördinaten $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ in een omgeving van $f(p)$ kiezen, zodat geldt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2, \\ y_i &= x_i, \quad i = 2, \dots, n, \\ y_{n+i-1} &= x_1 x_i, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Als bijvoorbeeld $n = 2$, $m = 3$, dan geldt in een omgeving van de oorsprong

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1 x_2,$$

zodat $y_1 \geq 0$ en als we x_1 en x_2 elimineren:

$$y_1 y_2^2 - y_3^2 = 0. \quad (1)$$

Als we op de y_2 -as starten voor $y_1 = y_3 = 0$, dan verwijdt het oppervlak zich als y_1 toeneemt. Voor vaste waarden van y_2 is de doorsnede steeds een parabool; als y_2 door 0 gaat, degenereert de parabool tot een halve lijn, en opent weer opnieuw (in omgekeerde richting); zie figuur 2.

De studie van singulariteiten van afbeeldingen heeft na het pionierswerk van Whitney en Marston Morse een grote vlucht genomen met veel toepassingen op de theorie van evenwichts- en periodieke oplossingen van differentiaalvergelijkingen. We noemen in dit verband nog [1–4, 9–10]. Bifurcatietheorie, normaalvormen en numerieke analyse zijn up-to-date bij elkaar gebracht in [17].

Afbeeldingen zoals Whitney die bestudeerde bleken in de mechanica een grote rol

te spelen. Het was echter in 1943 moeilijk voorstelbaar dat afbeeldingen van $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ zoals die door Whitney in [22] als zuiver wiskundig probleem werden behandeld, al binnen enkele jaren een industriële toepassing zouden hebben.

Bottema's oplossing

In 1956 verscheen in het tijdschrift *Indagationes Mathematicae* een artikel van Oene Bottema [8] (1901–1992); hij was in die tijd Rector Magnificus van de TH Delft (nu Technische Universiteit Delft) en had al veel artikelen over klassieke meetkunde en mechanica gepubliceerd. Met dit artikel liep Bottema tientallen jaren op de ontwikkelingen in de literatuur vooruit. Een eerder artikel [7] kunnen we als een inleiding zien, het was een studie van de paradox van Ziegler. Het artikel [8] is echter veel algemener en bevat Ziegler's voorbeeld als speciaal geval. We schetsen de resultaten.

Beschouw een mechanisch systeem met twee vrijheidsgraden en evenwichtsoptelling $x = \dot{x} = y = \dot{y} = 0$ gegeven door

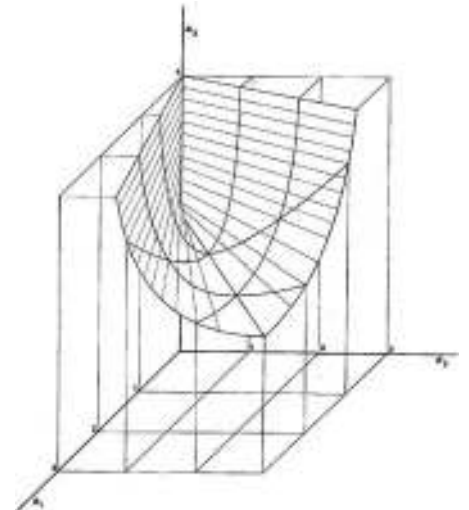
$$\begin{aligned} \ddot{x} + a_{11}x + a_{12}y + b_{11}\dot{x} + b_{12}\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + a_{21}x + a_{22}y + b_{21}\dot{x} + b_{22}\dot{y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

met a_{ij} en b_{ij} constanten, $\mathbf{A} := (a_{ij})$ is de coëfficiëntenmatrix van de krachten die van de posities afhangen, $\mathbf{B} := (b_{ij})$ de coëfficiëntenmatrix van de krachten die van de snelheden afhangen. Als $\mathbf{A}$ symmetrisch is en we hebben geen damping, dan heeft het mechanisch systeem een potentiaalfunctie van de vorm $V = (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)/2$; als $\mathbf{A}$ antisymmetrisch is, geven de krachten rotatie. Als de matrix $\mathbf{B}$ symmetrisch is, hebben we zogenaamde niet-gyroscopische damping, als $\mathbf{B}$ antisymmetrisch is, zijn de krachten die van de snelheden afhangen zuiver gyroscopisch. De stabiliteit van de evenwichtsoptelling volgt uit de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix van het systeem. De eigenwaarden zijn de oplossingen van de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

waarbij de coëfficiënten $a_1, \dots, a_4$ van de acht coëfficiënten van het mechanisch systeem afhangen. De evenwichtsoptelling is stabiel als alle eigenwaarden enkelvoudig zijn en reële delen nul of negatief hebben.

Twee elementen zijn opmerkelijk in de behandeling van dit probleem door Bottema. Allereerst blijkt hij in staat om het probleem in zijn volle algemeenheid op te lossen. Technisch gezien is dit een huzarenstukje, zeker in



Figuur 3 De originele figuur uit 1956 van Bottema [8] geeft het gebied van asymptotische stabiliteit weer; dit wordt bepaald door de wortels van een karakteristieke vergelijking van graad 4 met bifurcatieoppervlak V , de paraplu van Whitney.

een tijd waarin formulemanipulatie nog volledig met de hand moest gebeuren. Daar houdt het echter niet op. Bottema zag in dat zijn resultaten de paradox van Ziegler oplosten. Hij liet zien dat als de parameters die met damping samenhangen naar nul gaan, we een andere limietwaarde voor de stabiliteitsgrens vinden, dan als we vanaf het begin de damping nul kiezen. Kennelijk hebben we een discontinuïteit in onze stabiliteitsvoorwaarden. In de parameterruimte wordt het kritieke oppervlak V dat deze bifurcatie beschrijft, gegeven door de vergelijking

$$a_1 a_2 a_3 = a_1^2 + a_3^2, \quad (3)$$

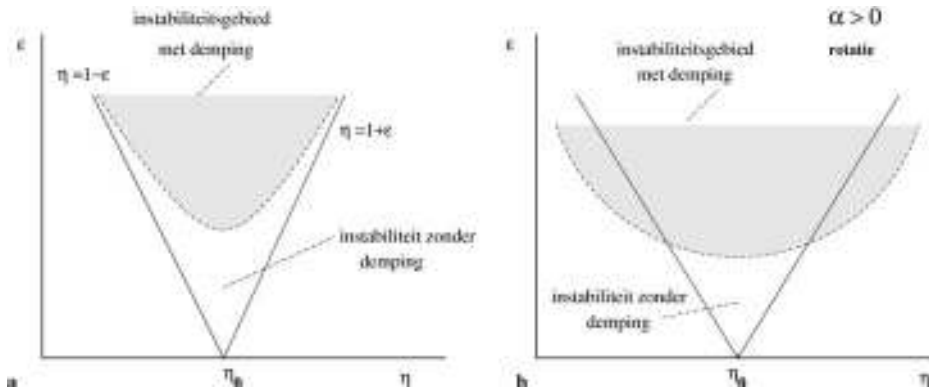
zodat V een oppervlak van de derde graad is. Bedenk dat a_1 en a_3 met de damping samenhangen en positief zijn. Bottema illustreert dit bifurcatiedrag in figuur 3.

We zijn met acht parameters begonnen, terwijl het bifurcatiedrag door drie parameters beschreven wordt. Het bifurcatieoppervlak V wordt gegeven door een afbeelding van $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ zoals die door Whitney werd behandeld.

In plaats van de uitvoerige berekeningen van Bottema weer te geven (zie [8] en [15]), laten we aan de hand van een expliciet voorbeeld de besproken paradox zien. Beschouw het mechanisch systeem beschreven door:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x + y + \kappa \dot{x} &= 0, \\ \ddot{y} - x + \omega^2 y &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij we alleen in de eerste vrijheidsgraad



Figuur 4 Links het klassieke geval zoals we dat vinden voor de Mathieu vergelijking zonder en met damping. Door de damping wordt het instabiliteitsgebied van de η -as gelicht en wordt het kleiner. Rechts de instabiliteitsgebieden voor het rotorsysteem. Weer wordt door de damping het instabiliteitsgebied van de η -as gelicht, maar het gebied wordt tevens breder. De grenzen van het V-gebied als er geen damping is worden in eerste benadering beschreven door de uitdrukking $\eta = \sqrt{1 + \alpha^2}(1 \pm \varepsilon)$, $\eta_0 = \sqrt{1 + \alpha^2}$.

damping ($\kappa > 0$) toelaten. De bijbehorende matrix is van de vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\kappa & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

met de volgende karakteristieke vergelijking voor de eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_4$:

$$(\lambda^2 + \kappa\lambda + 1)(\lambda^2 + \omega^2) + 1 = 0.$$

Als $\kappa = 0$, is gemakkelijk in te zien dat de triviale evenwichtoplossing instabiel is als $0 < \omega^2 < 3$ en stabiel als $\omega^2 > 3$. De eigenwaarden zijn in het laatste geval zuiver imaginair. Als $\omega^2 = 3$ dan hebben we een zogenaamde Kreinbotsing van de eigenwaarden: de 4 eigenwaarden zijn imaginair en vallen twee aan twee samen.

We geven nu de eigenwaarden zonder en met damping voor $\omega^2 = 4$ die volgen uit een MATLAB berekening:

$$\omega^2 = 4, \kappa = 0$$

$$\text{eigenwaarden : } \pm 1.9021i, \pm 1.1756i;$$

$$\omega^2 = 4, \kappa = 0.1$$

$$\text{eigenwaarden : } -0.05851 \pm 1.1736i, \\ + 0.0085 \pm 1.9029i;$$

$$\omega^2 = 4, \kappa = 0.2$$

$$\text{eigenwaarden : } -0.1164 \pm 1.1678i, \\ + 1.0164 \pm 1.9053i.$$

Het is duidelijk dat damping in de eerste vrijheidsgraad de evenwichtoplossing destabiliseert.

Parametrische excitatie

Het klassieke probleem van parametrische excitatie is de beweging van een slinger met

periodiek oscillerend ophangpunt. Dat probleem wordt in lineaire benadering beschreven door de Mathieuvergelijking

$$\ddot{x} + \varepsilon\kappa\dot{x} + (1 + \varepsilon \cos 2\eta t)x = 0,$$

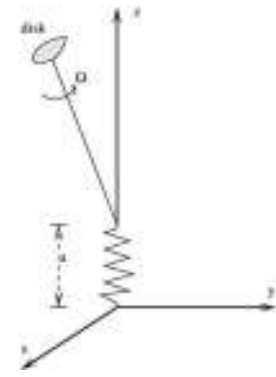
waarbij $\varepsilon\kappa$ de dempingscoëfficiënt is. De evenwichtoplossing $x = \dot{x} = 0$ is instabiel als $\kappa = 0$ en de waarde van η dicht bij een natuurlijk getal ligt; we noemen dat parametrische resonantie. In figuur 4a is het V-vormig instabiliteitsgebied in de ε, η -parameter ruimte weergegeven zonder damping ($\kappa = 0$) en met η in een omgeving van $\eta_0 = 1$. Indien er damping is ($\kappa > 0$), dan is het instabiliteitsgebied kleiner. Meer informatie over deze problemen is te vinden in het overzichtsartikel [21].

Het volgende voorbeeld beschrijft een systeem met twee vrijheidsgraden en is gebaseerd op [18] en [13]. Het model is indertijd ontworpen voor de beweging van roterende assen in de stadsbussen van Praag.

Beschouw een rotor die bestaat uit een zware schijf die met constante hoeksnelheid Ω om een starre as kan draaien. De as is elastisch gemonteerd op een fundering, de verbindingen die de as rechtop houden zijn ook elastisch. We beschouwen de projectie van de uitwijkingen van de rotor op het x, y -vlak, zie figuur 5. Als de verticale trillingen klein en harmonisch zijn met frequentie 2η , dan worden de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha\dot{y} + (1 + 4\varepsilon\eta^2 \cos 2\eta t)x \\ + 2\varepsilon\kappa\dot{x} = 0, \\ \ddot{y} - 2\alpha\dot{x} + (1 + 4\varepsilon\eta^2 \cos 2\eta t)y \\ + 2\varepsilon\kappa\dot{y} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

De parameter α is evenredig met de hoeksnelheid Ω en positief. Systeem (5) bestaat uit twee Mathieu-achtige vergelijkingen met damping. De eigenfrequenties van



Figuur 5 Rotor die bestaat uit een roterende schijf met constante hoeksnelheid Ω , die gemonteerd is op een starre as. De as kan elastisch bewegen op de fundering met uitwijkingen in de axiale en de twee horizontale richtingen.

het systeem zonder parametrische excitatie en zonder damping (dus voor $\varepsilon = 0$) zijn $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha$ en $\omega_2 = \sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha$. We bestuderen nu wat er gebeurt in de buurt van de resonantie

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\eta,$$

zodat

$$\sqrt{1 + \alpha^2} \approx \eta. \quad (6)$$

Wat gebeurt er als er geen damping is: $\kappa = 0$? Het instabiliteitsgebied in de (ε, η) -parameter ruimte komt overeen met wat we vonden voor de gewone Mathieu-vergelijking en is weergegeven in figuur 4 links. De randen van het V-vormig instabiliteitsgebied worden gegeven door

$$\eta_b = \sqrt{1 + \alpha^2} (1 \pm \varepsilon) + O(\varepsilon^2).$$

Nu het geval met damping: $\kappa > 0$

We kiezen weer de resonantie $\omega_1 + \omega_2 \approx 2\eta$. De analyse is wat ingewikkelder. We vinden na toepassing van normaliserings- en middellingsmethoden voor de rand van het instabiliteitsgebied:

$$\eta_b = \sqrt{1 + \alpha^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{(1 + \alpha^2)\varepsilon^2 - \left(\frac{\kappa}{\eta_0}\right)^2} + \dots \right). \quad (7)$$

Hieruit volgt dat het instabiliteitsgebied *groter* wordt als er damping is. Zie figuur 4 rechts. Er is dus een discontinuïteit bij $\kappa = 0$. Immers, als $\kappa \rightarrow 0$, dan gaan de randen van het instabiliteitsgebied naar de limieten $\eta_b \rightarrow \sqrt{1 + \alpha^2}(1 \pm \varepsilon\sqrt{1 + \alpha^2})$ hetgeen verschillend is van het resultaat dat we vinden als $\kappa = 0$: $\eta_b = \sqrt{1 + \alpha^2}(1 \pm \varepsilon)$.

Wiskundig is dit wel duidelijk, maar hoe is deze paradox vanuit de mechanica te verklaren?



Figuur 6 Oene Bottema (met dank aan R. Bottema)

Damping wordt toch verondersteld te stabiliseren? De oorzaak van de groter wordende instabiliteit is dat door de damping de twee vrij-

heidsgraden in x - en y -richting aan elkaar gekoppeld worden, zonder damping was dit niet het geval. Het is opnieuw een voorbeeld van

het optreden van instabiliteit in de mechanica en de rol die de paraplu van Whitney daarbij speelt. De genericiteit van het verschijnsel wordt benadrukt in [13].

Besluit

Het resultaat van Oene Bottema in 1956 kwam met veel vernuft en met veel inzicht in stabiliteitsvragen tot stand. Het loste de klassieke paradox van Ziegler op, waarbij de paraplu van Whitney een prominente rol speelt (al gebruikt Bottema deze term niet). Deze paradox correspondeert met een verschijnsel dat veelvuldig optreedt in bijna-Hamiltoniaanse en bijna-reversibele systemen. Wat betreft de toepassingen komt het in uiteenlopende gebieden van de mechanica en de natuurkunde voor, van werktuigbouwkundige constructies, hydro- en aërodynamica tot contactmechanica. Daarnaast houden deze verschijnselen verband met de zogenaamde Kreinbotsing van eigenwaarden in de lineaire algebra welke zowel in de bifurcatietheorie als in de numerieke lineaire algebra een rol speelt. In het artikel [15] zijn hier over meer details te vinden.

Referenties

- 1 D.V. Anosov and V.I. Arnold (eds.), *Dynamical Systems I, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer, Berlin, 1988.
- 2 V.I. Arnold, 'On matrices depending on parameters', *Russian Math. Surveys.*, 26 (1971), pp. 29–43.
- 3 V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- 4 V.I. Arnold (ed.), *Dynamical Systems VIII, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer, Berlin, 1993.
- 5 V.V. Bolotin, *Non-conservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Fizmatgiz (in Russian), Moscow, 1961; Pergamon, Oxford, 1963.
- 6 V.V. Bolotin, N.I. Zhinzher, 'Effects of damping on stability of elastic systems subjected to nonconservative forces', *Int. J. Solids Struct.* 5. (1969), pp. 965–989.
- 7 O. Bottema, 'On the stability of the equilibrium of a linear mechanical system', *Z. Angew. Math. Phys.* 6 (1955), pp. 97–104.
- 8 O. Bottema, 'The Routh-Hurwitz condition for the biquadratic equation', *Indagationes Mathematicae*, 18 (1956), pp. 403–406.
- 9 M. Golubitsky and D.G. Schaeffer, *Singularities and maps in bifurcation theory*, vol. 1, *Applied Mathematical Sciences* 51, Springer, Berlin, 1985.
- 10 M. Golubitsky, D.G. Schaeffer and I. Stewart, *Singularities and maps in bifurcation theory*, vol. 2, *Applied Mathematical Sciences* 69, Springer, Berlin, 1988.
- 11 G. Herrmann and I. C. Jong, 'On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems', *ASME J. of Appl. Mechs.*, 32(3) (1965), pp. 592–597.
- 12 G. Herrmann, 'Stability of equilibrium of elastic systems subjected to non-conservative forces', *Appl. Mech. Revs.* 20 (1967), pp. 103–108.
- 13 I. Hoveijn, M. Ruijgrok, 'The stability of parametrically forced coupled oscillators in sum resonance', *Z. angew. Math. Phys.*, 46 (1995), pp. 384–392.
- 14 A.L. Kimball, 'Internal friction theory of shaft whirling', *Gen. Elec. Rev.* 27 (1924), pp. 224–251.
- 15 O.N. Kirillov and F. Verhulst, 'Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella?', verschiijnt in 2010, preprint arXiv:0906.1650.
- 16 T. Koetsier, 'Oene Bottema (1901-1992)', *History of Mechanism and Machine Science*, vol. 1, *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science*, Springer (2007), pp. 61–78.
- 17 Yu.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory*, *Applied Mathematical Sciences* 112, Springer, Berlin, 2004.
- 18 M. Ruijgrok, A. Tondl, F. Verhulst, 'Resonance in a Rigid Rotor with Elastic Support', *Z. angew. Math. Mech.* 73 (1993), pp. 255–263.
- 19 D.M. Smith, 'The motion of a rotor carried by a flexible shaft in flexible bearings', *Proc. Roy. Soc. London A* 142 (1933), pp. 92–118.
- 20 W. Thomson, P.G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part I, New Edition, pp. 387–391, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1879.
- 21 F. Verhulst, *Perturbation analysis of parametric resonance*, *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, Springer, 2009.
- 22 H. Whitney, 'The general type of singularity of a set of $2n - 1$ smooth functions of n variables', *Duke Math. J.*, 10 (1943), pp. 161–172.
- 23 H. Whitney, 'The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space', *Ann. of Math.*, 45(2) (1944), pp. 247–293.
- 24 H. Ziegler, 'Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik', *Ing.-Arch.*, 20 (1952), pp. 49–56.
- 25 H. Ziegler, 'Linear elastic stability: A critical analysis of methods', *Z. Angew. Math. Phys.* 4 (1953), pp. 89–121.

De derde wet

| Solicited Comments

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'TIMSS 2007 — Feiten en meningen' van Jan van de Craats uit het NAW-septembernummer.

Als onderzoekers van het Nederlandse aandeel in TIMSS, willen we graag reageren op het artikel van Jan van de Craats waarin hij stelt dat de resultaten van TIMSS-2007 niet representatief zijn voor de gehele populatie van Nederlandse basisschool leerlingen van groep 6. De gegevens zouden niet representatief zijn omdat Nederland vervangende scholen nodig had om te kunnen voldoen aan de internationale responseis van 85%. Ook heeft Nederland op twee scholen na, geen 50% respons zonder vervangende scholen behaald. Hij trekt deze conclusie vooral op basis van het speciale 'vlaggetje' in de internationale rapporten.

De internationale coördinatie van TIMSS (zie <http://timss.bc.edu>) heeft een zeer duidelijke regel: als een land niet aan de responseisen voldoet en er twijfels zijn over de representativiteit, wordt het land niet opgenomen in de internationale ranglijsten. Nederland heeft een respons behaald van 95%. Van de Craats heeft gelijk als hij zegt dat deze respons tot stand is gekomen door deels gebruik te maken van vervangende scholen. Dit heeft echter geen invloed op de representativiteit van de gegevens, zoals blijkt uit het volgende. In elk land wordt een gestratificeerde steekproef getrokken van 150 basisscholen plus voor elke school twee vervangende scholen. Het trekken van twee vervangende scholen is nodig omdat verschillende landen (waaronder Nederland) zonder de mogelijkheid tot vervanging, de 85% respons niet kunnen halen. In deze landen zijn scholen namelijk niet verplicht om aan onderzoek mee te doen. Om te voorkomen dat door de vervanging vooral 'goede' scholen zouden mee doen, worden de originele scholen en de vervangende scholen gelijktijdig getrokken. Vooraf is vastgesteld welke school door welke school vervangen mag worden als de eerste school weigert. De vervangers zijn gelijk aan de originele school voor wat betreft de kenmerken waarop gestratificeerd is, zoals schoolgrootte en kenmerken van de leerlingpopulatie. Bijvoorbeeld een school met relatief veel achterstandsleerlingen wordt, als deze weigert mee te doen, vervangen door een school met een vergelijkbaar aandeel achterstandsleerlingen. Daarnaast wordt door TIMSS vereist dat 50% van de originele scholen in ieder geval mee doet.

Nederland heeft inderdaad dit keer op twee scholen na niet aan de eis van 50% zonder vervanging voldaan. Gelukkig voor alle schoolleiders, groep-6-leerlingen en hun leerkrachten die wel hebben meegedaan, is Nederland opgenomen in de internationale ranglijsten, weliswaar met een extra vlaggetje. De Nederlandse TIMSS data van 2007 is volgens TIMSS niet alleen representatief omdat de gerealiseerde steekproef op een aantal belangrijke schoolkenmerken overeenkwam met de originele steekproef, maar ook omdat de gemiddelde Nederlandse toetsscore op de toets een lage standaardmeetfout heeft. Dit laatste betekent dat de toetsscores van de leerlingen dicht bij elkaar liggen. Uit latere analyses is gebleken dat het aandeel 'rekenzwakke scholen', zoals vastgesteld door de Onderwijsinspectie, in TIMSS ook niet lager is dan landelijk. In Nederland weigeren schoolleiders niet omdat ze bang zijn voor slechte resultaten. Scholen hebben het meestal gewoon te druk, willen hun leerlingen niet te vaak toetsen of hebben geen zin om aan een onderzoeksproject mee te doen.

Als in Nederland alleen maar sociaal wetenschappelijke, kwantitatieve studies met 85% respons, serieus zouden moeten worden genomen, zoals Van de Craats suggereert, dan zou er heel weinig overblijven. Zeker als het onderwijsonderzoek betreft. Goed nonrespons-onderzoek is in dit geval veel belangrijker. Gelukkig weerhoudt zijn kritiek Van de Craats er niet van om de andere TIMSS-resultaten over

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

bijvoorbeeld attitudes van leerlingen in het artikel wel serieus te nemen.

Het voornaamste doel van het artikel van Van de Craats was om aan te tonen dat het met het realistisch rekenonderwijs in Nederland niet goed gaat. TIMSS biedt volgens ons te weinig diepgaande informatie om een oordeel te kunnen vellen over realistische rekenmethoden.

TIMSS laat zien dat er een lichte dalende trend is in leerprestaties in Nederland. Andere internationale studies zoals PISA-2006 (verschillende vakken in voortgezet onderwijs) en PIRLS-2006 (leesonderzoek in groep 6) laten ook enige achteruitgang voor Nederland zien. Wij vermoeden dat de daling in onderwijsniveau breder is dan alleen rekenen-wiskunde.

Martina Meelissen & Marjolein Drent, Universiteit Twente



Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2008

Micro-elektromechanische schakelaars voor mobiele telefoons

Voor de toepassing van micro-elektromechanische schakelaars in mobiele telefoons staan de ontwikkelaars voor een wiskundig probleem: hoe vind je in een groot landschap van mogelijkheden de stabiele evenwichtoplossingen van een bewegende plaatcondensator? Ten tijde van SWI2008, eind januari 2008, werd dit probleem ingebracht door het bedrijf NXP Semiconductors. Later in 2008 nam het bedrijf Epcos AG de RF-MEMS activiteiten van NXP over. Maar ook na de overname werken NXP en Epcos nog samen op het gebied van RF MEMS-schakelaars.

De meest voorkomende schakelaar in elektronische circuits is de transistor. Hij is klein, snel schakelbaar en goedkoop. Toch heeft een transistor ook nadelen. Juist omdat hij van halfgeleidermateriaal is gemaakt, treden er hogere vermogensverliezen op dan bij een elektromechanische schakelaar, die alleen maar goede elektrische geleiders gebruikt.

De elektromechanische schakelaar kent een lange traditie. Samuel Morse gebruikte er voor het eerst eentje in 1844, toen hij het eerste telegraafbericht van Washington DC naar Baltimore verzond. Door het gebruik van transistors sinds de tweede helft van de 20ste eeuw, is de elektromechanische schakelaar lange tijd uit beeld geweest. Inmiddels bestaat er echter een hernieuwde belangstelling. Zo werken de bedrijven Epcos Nederland en NXP Semiconductors samen aan een moderne miniaturversie van de elektromechanische schakelaar, speciaal be-

doeld voor het schakelen van radiofrequente (RF) signalen in mobiele telefoons: een micro-elektromechanische schakelaar, of RF MEMS.

Een RF MEMS biedt twee belangrijke voordelen. “De antenneverstand van een mobiele telefoon wordt sterk beïnvloed door externe factoren, zoals hoe je je hand en je hoofd ten opzichte van de antenne houdt”, vertelt Jiri Stulemeijer van de ontwikkelingsafdeling van Epcos. “Hierdoor kan een groot deel van het vermogen dat uit de versterker komt reflecteren en komt het niet bij de antenne. Daardoor gaat de batterij van de telefoon sneller leeg. Met een adaptief netwerk, dat gebruik maakt van MEMS-schakelaars, willen we continu een optimale instelling creëren, zodat signaalvermogen niet verloren gaat en de batterij langer meegaat.”

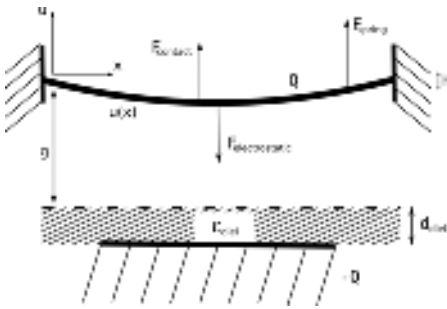
Het tweede voordeel zit in de multifunctionaliteit van een MEMS-schakelaar. Stulemeijer: “Nu gebruikt een mobieltje voor iede-

re frequentieband een andere versterker: voor GSM, UMTS, WLAN, Bluetooth, enzovoort. Met een MEMS kun je één schakelbare versterker bouwen voor alle frequentiebanden. Hierdoor vermindert het aantal componenten in de telefoon, terwijl de versterker altijd efficiënt gebruikt wordt. Ook dit tweede voordeel van een MEMS-schakelaar verlengt de levensduur van de batterij.”

Krachtspel

Een MEMS is in feite een condensator bestaand uit twee vierkante plaatjes. Elk plaatje heeft zijden van slechts enkele tienden van een millimeter. Het onderste plaatje zit vast, en het bovenste plaatje kan bewegen. Wanneer een elektrische spanning over de twee plaatjes wordt aangebracht, beweegt het bovenste plaatje naar het onderste. Als gevolg daarvan, buigt het bovenste plaatje als een veer door. De krachten op het bovenste plaatje hangen af van de aangelegde spanning en zijn positie. Bij een bepaalde spanning zijn er in principe meerdere evenwichtstoestanden mogelijk.

Maar behalve de veerkracht en de elektrostatische kracht, spelen nog twee andere krachten een rol. Als de schakelaar dicht



Figuur 1 Schematische doorsnede van een capacitieve RF MEMS schakelaar

staat, dan raakt de bovenste elektrode een isolerende laag op de onderste. Dat resulteert in een contactkracht, die zich gedraagt als die van een sterk niet-lineaire veer. Verder moet er bij het dichtgaan van de schakelaar lucht uit de spleet tussen de twee elektroden worden gedruwd. Daarvoor is ook een kracht nodig: de luchtspleetdempingskracht.

“Wat we nu willen weten,” zegt project-leider Peter Steeneken van het RF MEMS-onderzoek bij NXP Semiconductors, “is de verplaatsing van de bovenste plaat, waarbij op elk punt de elektrostatische kracht die het plaatje naar beneden trekt in evenwicht is met de veerkracht die het plaatje terug naar boven trekt. Bovendien willen we weten of het bereikte evenwicht stabiel of instabiel is. Sommige evenwichten zijn namelijk instabiel: als je er een klein zetje aan zou geven, dan raakt het plaatje uit zijn evenwicht. In de praktijk kan een MEMS alleen maar stabiele evenwichtstoestanden aannemen.”

Energiefunctionaal

Vijaya Raghav Ambati (UT), Andreas Asheim (NTNU, Noorwegen), Jan Bouwe van den Berg, Bob Planqué, Michelangelo Vargas Rivera (VU), Yves van Gennip, Andriy Hlod, Erwin Vondenhoff (TU/e), Tymofiy Gerasimov (TU Delft), Martin van der Schans (UL) en Sjors van der Stelt (UvA) waren de wiskundigen die het MEMS-probleem hebben bestudeerd. “Omdat het fysische probleem al helemaal gemodelleerd was, konden wij meteen aan de slag met het wiskundige probleem”, vertelt Planqué. Als uitgangspunt werd de energiefunctionaal gekozen: de functie die aangeeft hoe de energie afhangt van de variabelen in het MEMS-probleem, met name de afstand tussen de platen, de dielektrische eigenschappen van de platen en de spanning over de condensator. Grafisch voorgesteld, is de energiefunctioneel een heuvelslandschap waarin de hoogte de energie voorstelt en de andere dimensies de variabelen in de energiefunctionaal. Planqué: “De vraag is dan welke punten in het landschap een lokale minimale ener-

gie hebben. Dat zijn de stabiele evenwichten. De complicatie hierbij is, dat wat in de ene richting een minimum lijkt, in de andere richting een maximum kan lijken. Om de lokale minima te vinden moet niet alleen de eerste afgeleide van de energie in alle richtingen nul zijn, maar moet ook de tweede afgeleide in alle richtingen positief zijn.”

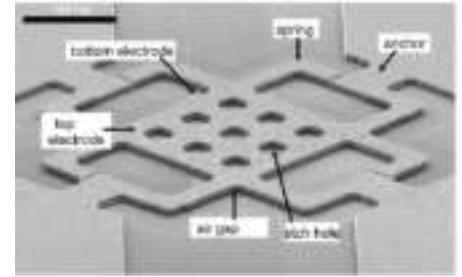
Een bewijs van instabiliteit is vaak makkelijker dan van stabiliteit: voor het eerste hoeft je maar één onstabiele richting te vinden, in het tweede geval moet je laten zien dat er geen instabiele richtingen zijn. Planqué: “Deze methode hebben we ook gebruikt om te laten zien dat een deel van de gevonden evenwichtoplossingen instabiel is. We konden in dat geval een goed gekozen richting vinden waarin de tweede afgeleide van de functionaal afnam.”

Twee factoren compliceren het vinden van lokale minima. Allereerst komt de mechanische energie als een vierde-orde term voor: een afgeleide in het kwadraat. Dat is vervelend. Ten tweede zijn de elektrostatische en de contact-energie niet-lineair. Voor het minimaliseren van functionalen met niet-lineaire termen, bestaat geen algemene oplossingsmethode. Planqué: “In deze aanpak maken we rijtjes functies met steeds lagere energie, en hopen dat dat rijtje convergeert naar een daadwerkelijk minimum. Dit is moeilijk voor convex-concave functionalen zoals hier.”

Lineariseren

Als je alleen maar naar hele kleine uitwijkingen ten opzichte van een ruststand kijkt, dan mag je het probleem lineariseren en alle hogere orde niet-lineaire termen schrappen. Planqué: “Deze lineaire vergelijking kunnen we zelfs analytisch oplossen, zodat we al het nodige kunnen leren uit de structuur van de evenwichtoplossingen.”

Door de linearisering kan echter niet het hele fysische probleem worden beschreven. Het hysteresegedrag van een MEMS-schakelaar — waarbij het gedrag op een bepaald moment afhankelijk is van de voorgeschiedenis — is een uitvloeisel van de niet-lineariteit van het probleem, terwijl het niet volgt uit het lineaire probleem. Verder konden de wiskundigen laten zien dat de numerieke methode die Epcos zelf al had ontwikkeld, de standaard wiskundige methode is om dit soort problemen op te lossen. De onderzoekers van Epcos en NXP pasten de methode toe zonder te weten dat hij in de literatuur al bestond. De studiegroep heeft ten slotte ook nog een aantal eigenschappen bewezen van het



Figuur 2 Opname van een capacitieve RF MEMS schakelaar gemaakt met een scanning elektronen microscoop

contactprobleem: het probleem dat ontstaat wanneer de bovenste condensatorplaat de onderste raakt. Planqué: “Als de elektrische spanning langzaam wordt verhoogd, raakt de bovenste plaat de onderste eerst in één punt. Wij hebben wiskundig bewezen dat als je de spanning nog wat verder opvoert er in eerste instantie toch maar één contactpunt blijft. Pas na een tijdje, als de spanning nog verder toeneemt, ontstaat er een contactoppervlak. Dit fenomeen was nieuw voor Epcos en NXP.”

Commercieel product

“Voor ons heeft de studiegroep twee belangrijke resultaten opgeleverd”, vertelt Jiri Stulemeijer van Epcos. “Ten eerste heeft de studiegroep ons geholpen met het benoemen van een oplossingsmethode die we in feite zelf al hadden gevonden. Daarmee hebben ze ons ook extra achtergronden bij die methode geleverd. Ten tweede heeft de studiegroep aan de hand van een paar voorbeelden laten zien hoe je de stabiliteit van de MEMS analytisch kunt bepalen. Dat helpt ons om complexere toestanden van de MEMS beter te interpreteren. Waarom is een bepaalde oplossing stabiel of instabiel? Dat zie je beter aan de analytische oplossing dan aan de numerieke oplossing. Verder weten we nu ook dat sommige problemen in het algemeen niet oplosbaar zijn, en ook dat is handig om te weten.”

In de praktijk van het MEMS-onderzoek bij Epcos en NXP loopt het modelleren parallel aan het experimenteren in de cleanroom van het bedrijf. Wat de onderzoekers in de modellen zien, vinden ze ook terug in de metingen. Momenteel wordt dit soort MEMS nog niet gebruikt in mobiele telefoons. Voordat ze daadwerkelijk toegepast kunnen worden, moet eerst aangetoond worden dat ze betrouwbaar genoeg zijn en jarenlang meegaan. “We hebben al veel testen uitgevoerd en verwachten de eerste commerciële producten in de nabije toekomst”, aldus Stulemeijer. “De fabrikanten van mobiele telefoons zijn enthousiast en we zien dan ook een goede toekomst voor deze technologie.”

Leo Maas

Instituut voor Marien en Atmosferisch onderzoek Utrecht

Universiteit Utrecht

Koninklijk Nederlands Instituut voor Zeeonderzoek

Postbus 59, 1790 AB Texel

Leo.Maas@nioz.nl www.nioz.nl/maas

Onderzoek

Onderwatergolven

Tegenwoordig kunnen we elk plekje van de aarde bestuderen, en dat vaak zonder er fysiek te zijn. Toch spelen zich fenomenen af in zee met raadselachtige eigenschappen. Leo Maas, bijzonder hoogleraar Golfdynamica van de Oceaan aan de Universiteit Utrecht, belicht onderwatergolven. Dit artikel is gebaseerd op de inaugurele rede van Maas getiteld 'Mare Incognitum'.

'Onderwatergolven' klinkt bij eerste gehoor paradoxaal, aangezien we golven op zee toch in de eerste plaats met oppervlaktegolven associëren. Dat was althans mijn perceptie gebaseerd op mijn eerste oceanografische getinte ervaringen, bestaand uit tochtjes die ik als kind met mijn ouders naar het strand maakte. Daar zag ik de golven steeds op me toerollen, golven die vlak voor het strand braken. Als je in de branding ging zwemmen kon je de klap van zo'n breker vermijden door eronderdoor te zwemmen. Hoe dieper je zwom, hoe meer de golf gedempt was. Mijn vader wees erop dat golven ook water meebrengen naar de kust; water dat vervolgens terugstroomt. Hij waarschuwde dat als je in zo'n terugstroom, een mui, terecht kwam, je daar niet tegenin moest gaan, maar dat je eerst moest mee zwemmen, zelfs als je naar beneden werd gezogen, om pas daarna, als je dan tenminste nog niet verdronken was, zijwaarts weg te zwemmen.

Begrip over waarom golven met de diepte zwakker worden, of waarom iedere zevende golf een hoge golf is, kwam pas veel later. Ik kon toen niet weten dat die andere intrigerende asymmetrie, namelijk dat golven altijd alleen maar naar de kust toe lijken te bewegen en niet er vandaan, mij in iets andere vorm nog jaren zou bezighouden. Het is

alsof de kust golven naar zich toetrekt, een verschijnsel dat ik om die reden later een *golfaantrekker* ben gaan noemen. Er zit natuurlijk geen magneet in de kust, maar golven die onder zekere hoek op de kust invallen, bewegen boven het ondiepere deel langza-

mer, waardoor ze naar de kust toe zwenken. Ze worden hoger en steiler, zodat ze uiteindelijk vaak breken. Deze branding vormt een onomkeerbaar proces, waardoor ook de golven niet meer kunnen omkeren. Golfaantrekkers lijken, op een manier waar ik later op terugkom, ook de diepzee te kunnen structureren. Zij kunnen daarvoor *onderwaterbranding* zorgen, een verschijnsel waar de bemanning van een onderzeëer eens hardhandig achter kwam toen deze op grote diepte de bodem



Figuur 1 Zeeslag bij Actium, 31 voor Christus, waar dood-water een beslissende rol gespeeld kan hebben. Schilderij van Lorenzo A. Castro (1672).

Oppervlakte-(zwaartekrachts)golven

Voor een homogene vloeistof, wiens snelheidsveld $\mathbf{u}$ rotatievrij is, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, kan dit snelheidsveld worden afgeleid uit een potentiaal ϕ : $\mathbf{u} = \nabla \phi$. In een onsamendrukbare vloeistof, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, voldoet deze potentiaal aan de Laplace vergelijking,

$$\Delta \phi = 0.$$

Dit is een elliptische vergelijking die zorgt dat de potentiaal zijn extremale waarden op de rand van het vloeistofdomein aanneemt. Oppervlaktegolven ontleen dan ook hun naam aan het feit dat hun verticale uitwijkingen maximaal zijn aan het vrije oppervlak (in rust gelegen op $z = 0$). Daaronder vallen ze (over afstand $1/\kappa$) exponentieel af zodat aan een horizontale bodem, $z = -H$, de verticale snelheid, $w = \phi_z = 0$, geheel verdwijnt. Hier stellen subscript partiële afgeleides naar de bewuste variabele voor. Hiermee wordt $\phi = \Phi(x, y, t) \cosh(\kappa(z + H))$. Aan het vrije oppervlak, ζ , wordt de verticale snelheid $w = \phi_z = \zeta_t$, en volgt uit integratie van de verticale impulsvergelijking, $w_t = -p_z/\rho$, over z , dat $\phi_t = -p/\rho = -g\zeta$. Hier is deze vergelijking geëvalueerd op $z = 0$, waar de druk bepaald wordt door de zwaartekracht g welke per oppervlakte-eenheid op de vloeistofkolom werkt: $p = \rho g \zeta$. Hieruit volgt het potentiaalveld van een horizontaal lopende golf boven een vlakke bodem: $\phi = \Phi_0 \exp[i(kx + ly - \omega t)] \cosh(\kappa(z + H))$, mits frequentie ω en de amplitude κ van de golfgetalvector $\mathbf{k} = (k, l) = \kappa(\cos \alpha, \sin \alpha)$ via de volgende dispersierelatie gerelateerd zijn

$$\omega = (g\kappa \tanh(\kappa H))^{1/2}. \quad (1)$$

De golflengte van de golf is gegeven door $2\pi/\kappa$. Lopend over langzaam variërende topografie, $H(\mathbf{x}) = H(x, y)$, volgen de golven stralen die beschreven worden door de wetten van de geometrische optica:

$$d\mathbf{x}/dt = \nabla_{\mathbf{k}} \omega. \quad (2)$$

Bovendien varieert hun golfgetal volgens

$$d\mathbf{k}/dt = -\nabla \omega.$$

Als de topografie slechts in een richting (zeg x) varieert, dan is het golfgetal in y -richting behouden, en volgt uit integratie van de stralenvergelijking (2) dat bij nadering van een kust de golven (1) naar de ondiepte toezwenken, (2) de golflengte $2\pi/\kappa \propto H^{1/2}$ afneemt en (3) de amplitude $\Phi_0 \propto H^{-1/4}$ toeneemt. Dit proces wordt nog versneld doordat de golfsnelheid evenredig is met de totale waterhoogte $H + \zeta$, totdat de golf te steil wordt en breekt, of totdat de golven zo kort worden dat dispersie, het uiteenwaaieren van een golfgroep, deze versteiling een halt toeroept. In solitonen is dit versteilende proces in perfecte balans met het uiteenvallen van de golfgroep (dispersie). Alvorens dit stadium bereikt wordt kan de vlakke golf (voor voldoende steilheid) echter ook onstabiel worden als gevolg van interactie met golven met naburige golfgetallen en een golf met het dubbele golfgetal. Dit resulteert in modulatie van de omhullende van de draaggolf: een ritmisch groeien en weer afzwakken van de golfamplitude.

Als een golf passeert beweegt het water in principe niet voorwaarts (denk aan een kurk op het water). In een verticaal vlak voert een 'waterdeeltje' op diep water een cirkelbeweging en op ondiep water een rechtlijnige beweging uit. Bij nadere beschouwing blijken deze deeltjes zich echter toch enigszins te verplaatsen. Dit komt doordat de voorwaarts gerichte beweging iets hoger in de waterkolom, nabij het oppervlak plaatsvindt, waar de snelheid vanwege het exponentiële profiel iets hoger is, dan in de tegengesteld gerichte terugwaartse beweging, die meer nabij de bodem plaatsvindt. De resulterende, netto waterverplaatsing in golfvoortplantingsrichting wordt *Stokes drift* genoemd.

werd ingedrukt.

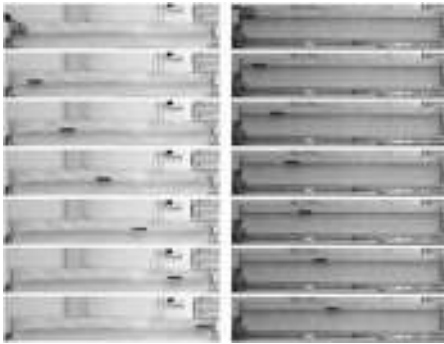
Dood-water

Het bestaan van onderwatergolven, die bij het incident met de onderzeeër een belangrijke

rol speelden, werd eind negentiende eeuw ontdekt toen de Noor Fridtjof Nansen met zijn schip, de Fram, probeerde als eerste de Noordpool te bereiken [13]. Hoewel er genoeg wind stond merkte Nansen dat de Fram in

de Noorse fjorden soms ineens tot stilstand kwam, alsof het schip aan de grond liep. De peilstok gaf echter aan dat er nog voldoende water onder de kiel stond. Navraag bij de bemanning leerde dat dit een bekend verschijnsel was. De suggestie dat het schip de bodem raakte was soms zo sterk dat er schepen ter reparatie naar het dok waren gestuurd, om daar tot de conclusie te komen dat er met het schip helemaal niets mis was. De toestand van bewegingsloosheid waarin het schip dan gevangen werd kon soms uren duren. Het verschijnsel werd door zeelieden 'dood-water' genoemd, vanwege de levenloze aanblik die het water bood, veroorzaakt doordat schip en water precies even snel bewogen. Dit gebrek aan snelheidsverschil had als nare bijkomstigheid dat er ook geen druk meer op het roer stond, waardoor het schip stuurloos raakte. Nansen hoorde hoe kapiteins daarom van alles geprobeerd hadden om hun schip los te wrikken. Sommigen hadden hun bemanning over het dek heen en weer laten lopen. Anderen hadden olie op het water laten gooien. Weer anderen hadden, in die typische reactie waarmee de mensheid het onbekende tegemoet pleegt te treden, op het water laten schieten! En toen was het water echt dood... Maar niets hielp. Bij terugkeeren van zijn poging om de Noordpool te bereiken, die hij op 86° Noord moest staken, beschreef Nansen zijn dood-water ervaringen aan Vilhelm Bjerknes, een prominent meteoroloog uit die dagen. Deze kwam prompt met de volgende hypothetische verklaring:

De fjorden bevatten een dunne laag smeltwater van enkele meters dikte. Dit water heeft een lagere dichtheid dan het zoute oceaanwater waar het overheen stroomt. Het is 'lichter'. Het fjord is dus gevuld met twee op elkaar gelegen waterlagen die onderling nauwelijks mengen. Bjerknes vermoedde dat de enorme weerstand die het schip bijna tot stilstand bracht veroorzaakt werd doordat het schip onder water *interne golven* opwekte, op het grensvlak tussen beide watermassa's; golven die kennelijk nauwelijks merkbaar zijn aan het oppervlak. Bjerknes liet het uitzoeken door zijn student, Vagn Walfrid Ekman, die later een zeer beroemd oceanograaf zou worden. Ekman begon met een literatuurstudie en vond bij de Romeinse geschiedsschrijvers Plinius en Tacitus beschrijvingen die hem ook aan dood-water deden denken [1]. Ekman vermoedde zelfs dat de historische zeeslag in 31 voor Christus bij Actium, voor de kust van Griekenland, beslecht werd door ditzelfde verschijnsel (Figuur 1). Daar verloor namelijk de vloot van Marcus Antonius en Cleopa-



Figuur 2 Zeven momentopnames van twee identieke experimenten waarin een blokje hout getrokken wordt door een bak water zonder (links) en met zout-gelaagdheid (rechts). Het touwtje (onzichtbaar) gaat eerst horizontaal naar rechts, vervolgens, via een paperclip, naar een hoog ophangpunt, en dan omlaag. Het wordt omlaaggetrokken door de zwaartekracht werkend op enkele nietjes aan het touwtje. In de gelaagde situatie ondervindt het blokje weerstand doordat het zwaartekrachtsgolven opwekt op het grensvlak tussen beide waterlagen.

tra de slag van Octavianus, de latere Romeinse keizer Augustus, die over kleinere, maar wel veel wendbaardere schepen beschikte. In de Romeinse tijd werd dit geweten aan zuigvissen, *Remora*, die zich aan de romp van de grote schepen zouden hebben vastgehecht en die deze kennelijk het manoeuvreren bemoeilijkten...

Hoewel deze verklaring voor het mysterieuze dood-water verschijnsel in de oudheid afdoende was, was Ekman er niet tevreden over. Hij besloot de hypothese van zijn leermeester in een laboratorium-experiment te toetsen,

Rompsnelheid

De algemene dispersierelatie (zie eerdere kader) reduceert voor lange golven (ondiep water; $\kappa H \ll 1$) tot $\omega = c_0 \kappa$, met $c_0 = \sqrt{gH}$, en voor korte golven (diep water; $\kappa H \gg 1$) tot $\omega = (g\kappa)^{1/2}$. Een trekschuit ter lengte $L \gg H$ (zoals in een trekvaart vaak het geval is), met snelheid U , produceert lange golven ter lengte van circa $2L$. Deze golven bewegen allen met de ondiepwatersnelheid c_0 . Het schip zal dus veel energie verliezen als $U \leq c_0$. Pas als $U > c_0$ zullen de golven niet meer loskomen van de 'golfmaker', de boot, zal het energieverlies navenant afnemen, en zal de trekschuit gaan planeren. Veel pleziervaartuigen zijn kort en in diep water ($L \ll H$) lopen hun golven met fasesnelheid $c \equiv \omega/\kappa = \sqrt{g/\kappa} = \sqrt{gL/\pi}$. Dit is de fameuze rompsnelheid waardoor veel schepen hun snelheid gelimiteerd zien ($U < c$). Om sneller te gaan is verleniging van de boot veelal te verkiezen boven aanschaf van een krachtiger motor!

een experiment dat ik met enkele middelbare scholieren heb nagedaan. Een 'scheepje' (een blokje hout) wordt daarin met behulp van een dun draadje en een gewichtje van nog geen gram door een twee meter lange bak getrokken. Om het effect van de gelaagdheid te bestuderen is het experiment twee keer uitgevoerd. Eén keer in een bak met kraanwater, en een tweede keer in een bak met een zoute en daardoor 'zwaardere' onderlaag, met daarbovenop een laag ongezouten water. Om onderwatergolven zichtbaar te maken is die bovenlaag van een kleurstof voorzien. Net als Ekman vinden we dat in gelaagde omstandigheden een scheepje inderdaad aanzienlijk vertraagd wordt, als gevolg van opwekking van grensvlaktgolven (Figuur 2). Dit blijkt met name het geval wanneer de scheepssnelheid ongeveer gelijk is aan die van interne golven met een golflengte gelijk aan de lengte van het schip. Opvallend is dat het wateroppervlak zelf kennelijk niet verstoord wordt, precies wat het dood-water verschijnsel zo mysterieus maakte. Vervolgexperimenten tonen aan dat als de forcering veel sterker wordt de gelaagdheid geen remmend effect meer heeft. Onder kritische (maar vaste) forcering varieert de resulterende bootsnelheid per experiment: soms is de 'boot' namelijk veel sneller en soms veel trager dan de grensvlaktgolf. We vinden dan meervoudige evenwichten. In meest extreme vorm bereikt de boot niet langer een eenduidige, vaste snelheid, maar alterneert tussen een snelle en langzame modus in: een peristaltische beweging.

Analogie met oppervlaktgolven

Het dood water verschijnsel deed denken aan het concept 'rompsnelheid': een aan de scheepslengte gerelateerde, schijnbaar niet te overbruggen maximale snelheid waarmee ieder schip geconfronteerd wordt. Dit concept werd aan het begin van de negentiende eeuw in Engeland ontdekt met behulp van een trekschuit [1]. In die tijd vond in heel Europa het goederentransport per trekschuit plaats. Deze boten werden getrokken door paarden die stapvoets over het jaagpad naast een kanaal sjokten. Op een dag schrok zo'n paard en sloeg op hol, de trekschuit achter zich aan sleurend. De voerman had veel moeite zijn paard onder appèl te krijgen. Na verloop van tijd lukte het hem het paard weliswaar tot in draf terug te nemen, maar niet tot in stap, evenwel zonder dat dit het paard ogenschijnlijk extra moeite kostte. Daarom arriveerde zijn trekschuit veel eerder dan gewoonlijk op de plaats van bestemming. De voerman zag daar meteen de commerciële waarde van in

en smeedde het tot recept. Bij het begin van een tocht werd voortaan een galop ingezet, om vervolgens de reis in draf voort te zetten. De Engelse scheepvaartautoriteiten die hij informeerde kwamen tot de conclusie dat het galopperende paard de trekschuit in *planee* bracht. Met andere woorden, terwijl de boot, als het paard stapvoets liep, tégen de boeggolf aan de voorkant van de boot in ploegde, surfte deze als het paard in draf ging op zijn eigen hekgolf, de golf achter de boot. De aanwezigheid van twee toestanden, kennelijk bij een zelfde inspanning, gekenmerkt door hetzij een langzame hetzij een snelle overtocht, vormt een illustratie van meervoudige evenwichten. De snelheid die een boot moet

Gelaagde zee

De zee bevat water dat als gevolg van een niet-uniforme temperatuur- en zoutverdeling enigszins gelaagd is in dichtheid: $\rho = \rho_* + \rho_0(z)$, met $\max(|\rho_0(z)|) \ll \rho_*$, een uniforme referentiedichtheid. Kouder en zouter water geeft de zee op grotere diepte een hogere dichtheid. De dichtheid ρ_0 neemt doorgaans weliswaar monotoon toe met de diepte z , maar niet uniform. Theoretisch is het echter aantrekkelijk om deze dichtheidsverandering toch in eerste instantie uniform te kiezen. Deze wordt dan gekarakteriseerd door een constante stabiliteitsfrequentie $N = (-g\rho_*^{-1}d\rho_0/dz)^{1/2}$. Deze gelaagdheid verleent de zee elastische eigenschappen: als een deeltje uit zijn evenwichtsniveau verplaatst wordt werkt afwisselend de opwaartsgerichte Archimedische en neerwaarts gerichte (gereduceerde) zwaartekracht. Een (voldoende verzwaarde) kurk gaat om die reden met frequentie N om zijn evenwichtsniveau oscilleren. Verplaatsing van vloeistofelementjes brengt daarnaast drukkrachten teweeg die naburige deeltjes in beweging brengen, zodat zich in het interne van de zee een zwaartekrachtsgolf voortplant, mits frequentie $\omega < N$: een onderwatergolf. De draaiing van de aarde en daarmee die van de oceaan maakt dat, zelfs als de dichtheid van het water uniform is, de zee ook nog eens gelaagd is in impulsmoment. Voor een star roterend object neemt dit simpelweg toe met het kwadraat van de afstand tot de draaias. Ook deze gelaagdheid draagt onderwatergolven, traagheidsgolven genaamd.

Interne zwaartekrachtsgolven

Ieder monotoon, met de diepte toenemend dichtheidsveld $\rho_0(z)$ stelt in zee een evenwichtstoestand voor. Storingen op deze gelaagdheid zijn per definitie te beschrijven met een lineaire vergelijking. In het geval van een uniforme gelaagdheid ($N = \text{const.}$) luidt deze $\Delta_3 p_{tt} + N^2 \Delta_2 p = 0$. Hierin stelt p de storingsdruk voor en is $\Delta_2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ en $\Delta_3 = \Delta_2 + \partial_{zz}$. Voor monochromatische, vlakke golven, $\propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$, met golfgetal

$$\mathbf{k} = \kappa(\cos \gamma \cos \alpha, \sin \gamma \cos \alpha, \sin \alpha),$$

waarin γ en α respectievelijk de hoek met de arbitrair gekozen x -as en met de zwaartekrichting, z , aanduiden, volgt de dispersierelatie

$$\omega = N \cos \alpha. \quad (3)$$

De afhankelijkheid van de golfgetalrichting α , in plaats van diens grootte κ (zoals in (1)), is typisch voor anisotrope golfproblemen en verantwoordelijk voor hun enigsmatige eigenschappen. In begrensde domeinen wordt het ruimtelijk patroon van de drukverdeling in een monochromatisch golfveld na strekking van de verticaal bepaald door de Poincaré vergelijking,

$$p_{xx} + p_{yy} - p_{zz} = 0. \quad (4)$$

In 2D ($\partial_y = 0$) kunnen we vanwege divergentievrijheid van het snelheidsveld een stroomfunctie ψ definiëren, zodat $u = -\psi_z$, $w = \psi_x$ en vereenvoudigt deze vergelijking tot

$$\psi_{xx} - \psi_{zz} = 0. \quad (5)$$

Met name de randvoorwaarde versimpelt daarmee tot $\psi = 0$, hetgeen stelt dat er geen stroming door de rand gaat. De rand wordt hier gevormd door het oppervlak $z = 0$, en de bodem $z = -\tau h(x)$. Hierin geeft $h(x)$ een dimensieloze vorm van de bodem en parameter

$$\tau = (N^2/\omega^2 - 1)^{1/2} H/L \quad (6)$$

beschrijft het 'medium' (stratificatie N , golffrequentie ω en aspect-ratio H/L , met H en L de verticale en horizontale schalen van het bassin). Met deze randvoorwaarde zoeken we in feite op een gesloten domein naar vrije golven. Het blijkt dat deze Dirichletrandvoorwaarde niet tot unieke oplossingen leidt (een onderbepaald probleem). Het lijkt er op dat we ook de normaalafgeleide van de stroomfunctie op de rand zouden moeten voorschrijven. Maar toevoeging van deze Neumannrandvoorwaarde leidt tot strijdigheid (een overbepaald probleem). Vaststelling *waar* de normaalafgeleide precies kan worden voorgeschreven (namelijk in twee zogenaamde 'fundamentele' intervallen) leidt tot een uniek, goedgesteld probleem. De oplossing, die voor ieder willekeurig gevormd 2D domein construeerbaar is, gebruikt het feit dat het stralenpatroon hier een exact in plaats van een benaderend onderdeel van de oplossing vormt. Iedere straal, $x \pm z = \text{constant}$, vormt onderdeel van een stralenweb: een straal met al zijn opvolgende en voorafgaande reflecties aan de domeinwanden. Op ieder web is een grootte die de partiële druk genoemd wordt invariant. In ieder punt van het vloeistofdomein is de (storings)druk in dat punt simpelweg de som van de partiële drukken op de twee stralen die door dat punt gaan en is de stroomfunctie in dat punt bepaald door hun verschil. Dit laat zien dat de partiële druk op ieder web op één en slechts één punt kan worden voorgeschreven. Wanneer we dat punt op de rand van het vloeistofdomein plaatsen komen we tot een reductie tot de genoemde fundamentele intervallen.

zien te krijgen om los te komen van de oppervlaktegolven, en om zo van een langzame een snelle overtocht te maken, heet 'rompsnelheid'. De weerstandshobbel die hierbij geslecht moet worden is analoog aan die welke Nansen en zijn mannen tegenkwamen bij hun pogingen om aan dood-water te ontsnap-

pen, en ook aan die waar vliegtuigen mee te maken hebben als ze 'supersoon', harder dan het geluid, willen vliegen. Een verschijnsel dat niet voor niets als het doorbreken van de geluidsbarrière te boek staat. In al deze gevallen verliest het zich verplaatsend object, bij nadering van een zekere barrièresnelheid die

karakteristiek is voor de snelheid waarmee golven in het medium (zee of lucht) willen reageren, veel energie aan golven.

Kennis over de zee?

Het bestaan van onderwatergolven en meer-voudige evenwichten illustreert de veelheid aan verschijnselen die in de oceaan veelal gelijktijdig te vinden zijn. Dit doet de vraag rijzen wat wij eigenlijk weten over zee en oceaan?

Qua geografische ligging en stromingspatronen is natuurlijk van oudsher veel kennis verkregen vanuit de scheepvaart. Later zijn daar waarnemingen op afstand vanuit satellieten bijgekomen. Maar beide waarnemingsmiddelen 'zien' vooral het zeeoppervlak, de waterhoogte en de oppervlaktetemperatuur. De diepzee is veel minder toegankelijk. Ons zicht is daar beperkt. Zelfs in helder water dringt licht slechts ongeveer honderd meter door. Geluid kan verder komen maar kan, net als licht in een luchtspiegeling, worden afgebogen als gevolg van dichtheidsverschillen. Hierdoor is een deel van de zee wat ik maar 'onduidelijk' zal noemen. Dit alles maakt onder water op afstand waarnemen problematisch. Wat rest zijn contactmetingen, vanaf een schip, of vanaf vrij drijvende of verankerde boeien. Zo worden bij moderne waarnemingen temperatuur, zoutgehalte en stroming onderwater elektronisch gemeten en opgeslagen. Hoewel dit meetprincipe een hoge vlucht heeft genomen zeggen deze contactmetingen relatief weinig over hoe deze grootheden op enige afstand van het meetinstrument variëren. Hier wrekt zich dat de oceaan zo ontzettend groot is. Diens ondoorzichtigheid en onduidelijkheid maakt dat we van de zee soms minder zien, horen of voelen, en daarmee kennen, dan van het heela!

Kan theoretisch inzicht in de werking van zee en oceaan ons dan helpen om ontbrekende kennis aan te vullen? Deze komt tenslotte regelrecht voort uit de op Newton's vergelijkingen gebaseerde en veelvuldig geverifieerde wetten voor de (geofysische) stromingsleer. Daarin worden niet alleen de op grote afstand werkende zwaartekracht, of door draaiing van de aarde veroorzaakte Corioliskracht meegenomen, maar ook de op korte afstand werkende electromagnetische wisselwerking. Deze laatste doet zich voor als wrijving, leidend tot menging van naburige watermassa's. De veelheid aan verschijnselen die met deze wetten op benaderende wijze te verklaren zijn is, zelfs wanneer ze afzonderlijk beschouwd worden, verpletterend. Wanneer ze echter gezamenlijk voorkomen en wisselwerken, zoals op zee, is het doorgaans onbegon-

nen werk ze uiteen te rafelen. Dus als we op zee waarnemen, wat nemen we dan waar? En, als we de zee modelleren, wat nemen we dan mee?

Theorie in modellen

Computersmodellen lijken het best in staat om al deze door elkaar heen spelende processen mee te nemen. Maar ook computers kennen hun beperkingen. Als we in ons numeriek model processen die op oceaanschaal spelen oplossen, betalen we daar voor doordat we verschijnselen met schalen kleiner dan zeg 10 km niet meer kunnen zien. Het meenemen van de invloed van die niet opgeloste kleinschalige processen in grootschalige modellen wordt parametrisatie genoemd. Tekennend is dat alle wel opgeloste, grootschalige verschijnselen behoorlijk kunnen veranderen wanneer we die parametrisatie anders kiezen. We nemen bijvoorbeeld aan dat grootschalige stroming energie verliest door meandering en afsnoering van wervels, en door opwekking van golven. Begrijpelijkerwijs zullen we, zelfs als deze wervels en golven te klein zijn om in ons numeriek model mee te nemen, het effect daarvan op die stroming wel willen modelleren, namelijk als een afremmend mengproces. Er zijn echter omstandigheden waarin wervels en golven deze stroming helemaal niet afremmen, maar juist aandrijven. Alsof je in een auto denkt op de rem te trappen, maar tot je schrik merkt dat je daarmee juist gas geeft. Deze (negatieve) afremming zou dus als een *aandrijving* beschreven moeten worden. Begrip over wanneer en waar menging remt of juist aandrijft wordt alleen verkregen door dit proces te isoleren en vervolgens als module in te bouwen in een complexer model.

De kracht van computers, hun vermogen om heel veel wisselwerkingen te kunnen beschrijven, zelfs in een ingewikkelde omgeving, kan dus misleidend werken. De oceaanstroming die ze voorspellen kan net zo complex ogen als de oceaanstroming die we waarnemen, maar is dat wel dezelfde complexiteit? En begrijpen we waarom deze optreedt? Onze hersenen zijn niet echt toegepast om het ene complexe veld van het andere te onderscheiden. Echt begrip over ingewikkelde terugkoppelingen in de oceaan ontstaat veeleer in denkmodellen waarin uit alle mogelijke wisselwerkingen de essentiële worden geïsoleerd.

De zee: een verstoorde rusttoestand

Ik beschouw bewegingen van zee en oceaan dan ook graag op een reductionistische manier, namelijk als storingen van een stabiele

Traagheidsgolven in draaiende kubus

Een volledig met een vloeistof van uniforme dichtheid gevulde kubus (afmeting H) wordt op een draaitafel geplaatst. Deze wordt in starre (uniforme) rotatie gebracht, met hoeksnelheid $f/2$. De draaias is gericht langs de positieve z -as en staat loodrecht op twee van de zijden van de kubus. Storingen in de vloeistof worden bepaald door de impulsvergelijkingen en door onsamendrukbaarheid

$$\begin{aligned}u_t - fv &= -p_x, & v_t + fu &= -p_y, \\ w_t &= -p_z, & u_x + v_y + w_z &= 0.\end{aligned}$$

Voor frequenties $\omega < f$ draagt dit systeem traagheidsgolven wier ruimtelijke drukverdeling (na strekking van de verticaal) weer door de Poincaré vergelijking (zie eerder kader) bepaald is. De dispersierelatie voor vlakke, monochromatische golven luidt

$$\omega = f \sin \alpha, \quad (7)$$

waar α de hoek is die de golfgetalvector maakt met de horizontaal. Met de ansatz $w = \sum_n \zeta_{n,t} \sin n\pi z$, $(u, v, p) = \sum_n (u_n, v_n, p_n) \cos n\pi z$, is dit te schrijven als

$$\begin{aligned}u_{n,t} - fv_n &= -H_n \zeta_{n,xtt}, \\ v_{n,t} + fu_n &= -H_n \zeta_{n,ytt}, \\ \zeta_{n,t} + H_n(u_{n,x} + v_{n,y}) &= 0,\end{aligned}$$

waar diepte $H_n = H/n\pi$. Door schaling $(u', v') = (u_n, v_n)/H_n f$, $\zeta' = \zeta_n/H_n$, $t' = tf$, $\omega' = \omega/f$ en $(x', y') = (x, y)/H_n$ volgt dat iedere verticale modus n aan dezelfde vergelijkingen moet voldoen. Na weglating van accenten luiden deze

$$\begin{aligned}u_t - v + \zeta_{xtt} &= 0, & v_t + u + \zeta_{ytt} &= 0, \\ \zeta_t + u_x + v_y &= 0.\end{aligned}$$

Merk op dat bij deze schaling voor mode n het domein opschaaft tot $n\pi$. Voor monochromatische golven volgt: $(\Delta_2 + \kappa^2)(u, v, \zeta) = 0$, een Helmholtz vergelijking, waar $\kappa^2 = \omega'^2 - 1$. Echter, de horizontale snelheden $(u, v) = \kappa^{-2}(-i\omega'\zeta_x + \zeta_y, -i\omega'\zeta_y - \zeta_x)$, zodat impermeabiliteit van de verticale wanden ($u = 0$ op $x = 0$ etc) het verdwijnen van 'scheve' afgeleides vereist. Dit leidt tot gecompliceerde oplossingen waarin iedere eigenmodus uit een oneindige Fouriersom bestaat (Figuur 4), [6]. Vanwege het gebrek aan symmetriebreking (alle wanden staan parallel of loodrecht op de draaiasrichting) ontbreekt hier de voor golfaan-trekkers karakteristieke ruimtelijke singulariteit. Zodra de kubus (of een van diens wanden) echter gekanteld wordt valt daar niet meer aan te ontkomen [12].

rusttoestand. In dit beeld wordt de zee gezien als een dunne schil gelaagd water die weliswaar met de aarde meedraait, maar die verder in eerste instantie in rust is, dus stil staat ten opzichte van de beweging van de aarde. Toegegeven, een ietwat abstract gezichtspunt, dat tamelijk haaks staat op de woelingen die onze maag soms weten te veroorzaken als wij ons op zee begeven. Maar, zelfs in zo'n rusttoestand beweegt het zee-water op de evenaar met een vaartje van zo'n 440 m/s door de ruimte! Doordat zowel land als zee samen ronddraaien merk je daar niets van. De term 'stabiele rusttoe-

stand' duidt er op dat deze toestand instelbaar is zonder spontaan beweging te veroorzaken; deze stelt een evenwichtstoestand voor. Iedere verstoring van deze rusttoestand zal een terugnijdende kracht teweegbrengen welke tracht de rusttoestand te herstellen. Door traagheid schiet zo'n verstoring, als de klepel van een klok door zijn evenwicht heen, keert van richting om, en dit geslinger herhaalt zich. Met andere woorden, verstoringen van de rusttoestand uit zich in de vorm van golven. Zo vinden we in de oceaan verstoringen terug in de vorm van geluidsgolven, van oppervlaktegolven (zoals windgolven, getij-



Figuur 3 Kelvin's draaiende, met water gevulde koperen 'rugbybal' met handvatten [5].

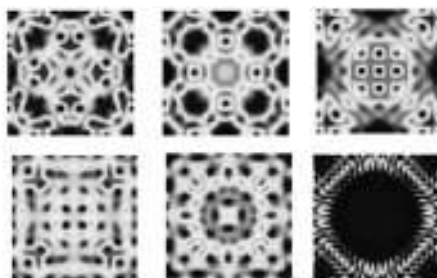
den en tsunami's) en van interne golven, zoals de grensvlkgolf die we eerder tegenkwamen. Anders dan in het dood-water verhaal neemt in de oceaan de dichtheid echter vaak niet plotsklaps maar *gradueel* met de diepte toe, en kunnen interne golven daardoor op alle dieptes voorkomen.

Golven transporteren energie en kunnen elders arbeid verrichten. Voor oppervlaktegolven is dat in de branding bij de kust, maar voor andere golven hebben we meestal maar een vaag idee waar dat 'elders' gelegen is. Het blijkt dat interne golven op een zelfde manier geconcentreerd kunnen worden, kunnen 'branden' en voor menging kunnen zorgen, maar dan in de diepzee.

Traagheidsgolven

Een prachtig voorbeeld van het vermogen van relatief zwakke interne golven om elders op geconcentreerde wijze 'arbeid te verrichten' is eind negentiende eeuw experimenteel gevonden door Lord Kelvin [5]. Deze had een met kraanwater gevulde koperen bol in draaiing gebracht (Figuur 3). Het geheel bleek net zo stabiel als een draaiend wiel, want als Kelvin een klap tegen de zijkant van de draaiende bol gaf reageerde deze niet. Wanneer de bol in discusvorm getimmerd werd gebeurde er weer niets, maar toen deze daarentegen de vorm van een rugbybal kreeg kwam deze na een klap 'spontaan' los uit zijn ophanging en tolde rakelings langs het hoofd van de ammenensis. Dat terwijl er niets gebeurde als er geen water in de draaiende rugbybal zat. Kennelijk werden door de Corioliskracht teruggedreven interne golven, traagheidsgolven, opgewekt, die zich zo organiseerden dat er een ontwrichtend koppel op de rugbybal werd uitgeoefend. Dit verschijnsel staat als curiosum te boek en behoeft bij mijn weten nog steeds verklaring!

Dit gebrek aan belangstelling voor golfbewegingen in homogene, draaiende vloeistof-

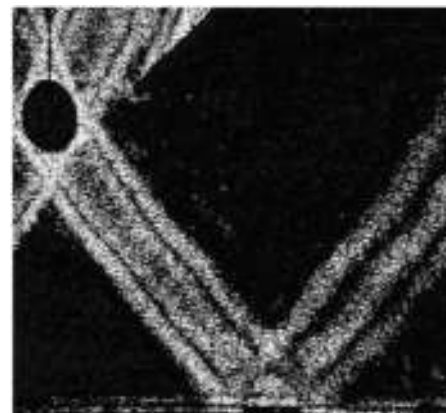


Figuur 4 Enkele golfpatronen ('eigenmodi') in een met homogene vloeistof gevulde draaiende kubus. Hier wordt de ruimtelijke horizontale verdeling van totale golfenergie (kinetisch plus potentieel) weergegeven voor een zekere verticale modus (lichte en donkere grijs tinten geven respectievelijk hoge en lage energiewaarden aan). De draaias staat loodrecht op dit vlak en is uit het papier gericht. De patronen laten een competitie zien tussen rechthoekige meetkundige en cirkelvormige draaisymmetrieën.

fen is, gezien het feit dat het universum van de kleinste tot de grootste schaal draait, enigszins onthutsend. Om een tipje van de sluier op te lichten heb ik daarom eens de golfpatronen berekend die optreden in een kubus, die vlak op een draaitafel gezet wordt. Het resultaat zijn tamelijk complexe golfpatronen, puur als gevolg van draaiing (Figuur 4), [6]. Dit lijkt een academische oefening, maar recentelijk zijn dit soort golven in de Middellandse Zee waargenomen [3]. Daar blijken ze voor energietransport te zorgen door pakketten doorgemengd water van honderden meters dikte.

Golven onder water

Het is verbluffend dat precies deze twee aspecten die de geofysische stromingsleer karakteriseren, namelijk continue gelaagdheid en draaiing als gevolg van de draaiing van de aarde, beiden leiden tot golven die heel anders zijn dan de ons bekende geluids-, licht- of oppervlakte-watergolven (Tabel 1). Ze bewegen zich namelijk *scheef* door de vloeistof, onder een vaste hoek α met de verticaal (Figuur 5); een hoek die bepaald is door hun fre-



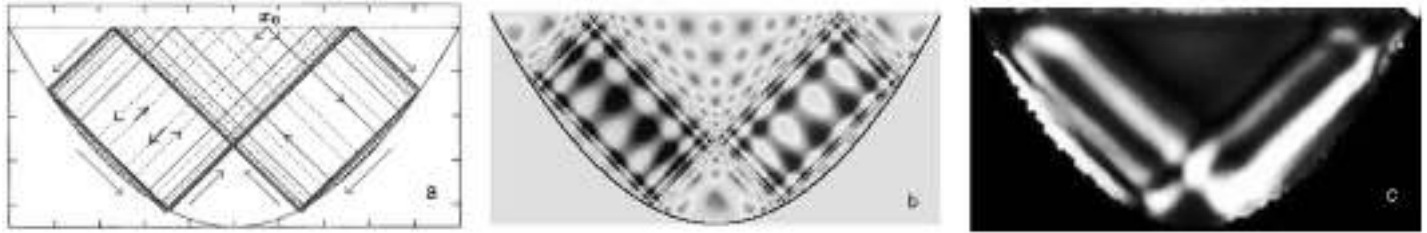
Figuur 5 Verdeling in een vertikaal vlak van interne zwaartekrachtgolven van zekere frequentie die worden opgewekt door verticale oscillaties van de cilinder, linksboven. Interne golfbundels bewegen schuin naar beneden en boven en één bundel reflecteert vervolgens aan de bodem. Deze golven zijn 'scheringsgolven', waarin de deeltjesbeweging in iedere bundel parallel is aan die bundel, maar met een faseverschil dwars daarop. Hierdoor scherpen deeltjes in naburige stralen langs elkaar heen. Bijgevolg plant de energie zich langs de bundel voort, in richting $\nabla_{\mathbf{k}}\omega$ [met ω uit (3)], loodrecht op de fase die zich in richting $\mathbf{k}$ voortplant. In dit experiment, verricht door Stuart Dalziel, is de intensiteit van de verstoring van het dichtheidsveld weergegeven.

quentie, zie (3) en (7). Net zo verbijsterend is het dat de consequenties hiervan zich het gemakkelijkst laten analyseren met behulp van meetkundige methodes; zeg maar met potlood en liniaal.

Meetkundige methodes zijn verouderd sinds Newton en Leibniz in de zeventiende eeuw problemen analytisch formuleerden, in termen van differentiaalvergelijkingen. Dit ondanks het feit dat Newton in zijn klassieke meesterwerk, de *Principia*, nog voor een meetkundige uitleg koos. Maar dat deed hij alleen omdat zijn tijdgenoten nog niet met de analytische methode vertrouwd waren. Bij modellering van interne golven in een uniform gelaagde oceaan gebeurt echter het omgekeerde. De oplossing van de bewuste differentiaalvergelijking, de ruimtelijke golfvergelijking, (5), is in een willekeurig ge-

	oppervlaktegolven	onderwatergolven
Medium	isotroop	anisotroop
Vergelijking	$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$	zwaartekracht, rotatieas $\phi_{xx} + \phi_{yy} - \phi_{zz} = 0$
Maximale verplaatsing	elliptisch	hyperbolisch
Dispersierelatie	aan rand	in interieur
$\mathbf{k} = \kappa(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$	$\omega = \omega(Abs(\mathbf{k}))$	$\omega = \omega(Arg(\mathbf{k}))$
Behoud van	$\omega = \omega(\kappa)$	$\omega = \omega(\alpha)$
Reflectie-wet	golf lengte	voortplantingshoek
Behoud van hoek tov	Snellius	hoek α invariant
Golftypering	normaal op bodem	vertikaal
Spectrum	golfchaos	golf aantrekkers
Lyapunovexponent	gequantiseerd	continue
Golfstralen	≥ 0	≤ 0
=Energiepaden?	divergeren	convergeren
	bij benadering	(in 2D) exact

Tabel 1 Vergelijking oppervlakte- en onderwatergolven [7]



Figuur 6 Interne golfaantrekker in een parabolisch oceanbekken. In deze verticale doorsneden werkt de zwaartekracht naar beneden. (a) Golfpaden en -aantrekker (periodieke baan) worden bereikt door golfstralen uit een willekeurig oppervlaktepunt x_0 weg te schieten. Pijlen geven de richting aan waarin de stralen lopen. Merk de omdraaiing van richting op die optreedt bij passage van een 'afstoter' (de plaatsen waar de bodem even sterk helt als de golfstralen), zodat zowel de naar links (gestippelde lijnen) als de naar rechts weggeschoten stralen (doorgetrokken) de aantrekker uiteindelijk in een zelfde zin doorlopen [9]. (b) Theoretisch stroomfunctiepatteroon in ieder punt van het bekken bepaald met behulp van de geometrische methode (zie kader) door in fundamentele intervallen de partiële druk door halve sinussen voor te schrijven. (c) In laboratoriumexperiment waargenomen intensiteit van de verstoring van een dichtheidsveld, met intensivering rond de golfaantrekker - meting: Jeroen Hazewinkel.

vormd oceanbekken met de analytische methode heel ingewikkeld [8], zo niet ondoenlijk, maar met de meetkundige methode kinderspel... Ik heb dat laatste eens letterlijk genomen, en heb mijn oudste twee kinderen, destijds zeven en vijf, gevraagd mee te helpen met het vinden van interne golfpatronen in een bekken dat een stabiel gelaagde vloeistof bevatte. Het enige principe dat ze moesten ge-

bruiken was dat vanuit een willekeurig startpunt op de rand een lijnstuk moest worden getekend dat onder een hoek van 45 graden wegliep. Zodra de bodem bereikt was moesten ze oversteken op een lijnstuk daar loodrecht op, een lijnstuk dat wél in het ingesloten domein, de 'zee', gelegen was, enzovoort. Met kinderhandjes bleek dat niet zo eenvoudig, maar een computerberekening die ik sa-

men met oud-promovendus Frans-Peter Lam ontwikkelde (Figuur 6(a)) maakte duidelijk dat de lijnstukken waarlangs deze golven lopen bijna altijd naar een gesloten baan worden getrokken, een *interne golfaantrekker* [9]. Deze lijnen fungeren een beetje als de zenuwbanen van de zee. Het zijn lijnen waarlangs de druk wordt doorgegeven. Ze illustreren het gezegde: als ik hier druk, voel ik daar pijn. De golfaantrekker is precies de plaats waar in experimenten de golfenergie zich concentreert [10] en Figuur 6(c). Zoals het strand oppervlategolven aantrekt, blijkt deze gesloten baan voor de beschouwde frequentie, van overal uit zee interne golven aan te trekken, golven die daar vervolgens mengen.

Vanuit theoretisch en experimenteel oogpunt lijkt ophoping van energie rond golfaantrekkers onvermijdelijk maar de grote vraag is natuurlijk: komen deze golfaantrekkers ook in zee voor? En, zo ja, waar dan? Dit is nu nog volstrekt onduidelijk. In analogie met het *Terra incognita*, het onbekende land dat zo tot de verbeelding sprak van ontdekkingsreizigers als Fridtjof Nansen, ligt er nu een *Mare incognitum* op verkenning te wachten! Bij deze ontdekkingsreis hebben we echter niet meer genoeg aan één schip, of meerdere schepen, maar zullen alle technische en theoretische middelen moeten worden aangewend om de diepzee te verkennen!

Toekomstplannen

Hoe kunnen we dit aanpakken? Bijvoorbeeld door het verhelderen van de invloed van gelaagdheid op deeltjes- en warmtetransport. De oceanografische gemeenschap herhaalt als een mantra het belang van interne golven voor verticaal transport van warmte, van voedingsstoffen en van opgeloste gassen, zonder echter in te gaan op het feit dat er een principeel probleem bestaat met verticaal transport in een gelaagde vloeistof.

Laat mij dit illustreren aan de hand van communicatie tussen bergdorpen, gelegen op de flanken van een diep dal. Daarin valt op dat

Meetkundige versus algebraïsche oplosmethoden

Het vinden van oplossingen van (5) met gepaste randvoorwaarden gebruikt in de meetkundige oplosmethode het web van golfstralen. Constructie van zo'n web is als het spelen op een 'interne golf-biljart'; een biljart waarin de 'bal' (golfstraal) niet volgens de wet van Snellius terugkaatst (hoek van uitval is hoek van inval ten opzichte van de normaal), maar zó dat de hoek met een vooraf bepaalde anisotropierichting (zoals de zwaartekracht) behouden blijft. Deze constructie van een web is te zien als een afbeelding van de rand op zichzelf [11]. Ieder punt van de rand wordt afgebeeld op zijn opvolger. In deze terminologie gesteld blijkt dit, hoewel er geen visceuze processen in het spel zijn, een *dissipatieve* afbeelding te zijn; een die er toe leidt dat er na voldoende weerkaatsingen altijd een vast of periodiek punt bereikt wordt. Dit zijn de reflectiepunten van wat zich in het domein manifesteert als een golfaantrekker. Voor bijna iedere gegeven waarde van parameter τ , (6), bezorgt de niet-lineaire aard van deze afbeelding de bijbehorende stroomfunctie- en drukvelden een zelfgelijkvormige, 'Escher-achtige' ruimtelijke structuur (Figuur 6(b)) [7, 9]. Hierdoor krijgt ook de aantrekker zelf een zelfgelijkvormige afhankelijkheid van τ . Dat wil zeggen, τ -intervallen (lees: frequentieintervallen) worden gekarakteriseerd door een zelfde soort aantrekker, om vervolgens, in naburige intervallen, plots te veranderen in veel gecompliceerdere...

In de algebraïsche methode, die voor één specifiek geval in een trapezoïdaal domein is uitgewerkt, wordt gezocht naar een oplossing in de vorm van een Fourierreeks [8]. De termen van deze reeks voldoen ieder afzonderlijk aan (5), en zijn nul op bodem, oppervlak en één verticale wand. De laatste randvoorwaarde, $\psi = 0$ op de hellende wand, moet de relatie tussen de onbepaalde Fouriercoëfficiënten geven. Het blijkt dat deze relatie op die rand twee functionaalvergelijkingen geeft, waar de normaalafgeleide van ψ aan moet voldoen. Dit impliceert dat als deze normaalafgeleide op twee delen van de hellende wand wordt voorgeschreven, deze op de rest van de hellende wand vastligt. Deze twee delen zijn precies de eerder genoemde fundamentele intervallen. Wat voor unieke bepaling van de Fouriercoëfficiënten resteert is het (arbitrair) voorschrijven van normaalafgeleides in deze twee intervallen, en vervolgens de bepaling van dit Fourier spectrum. Het blijkt dat ook het spectrum een zelfgelijkvormig karakter krijgt, een eigenschap welke relateerbaar is aan het verschijnen van de Weierstrassfunctie in diens uitdrukking. De Weierstrassfunctie is een mathematisch 'gedrocht' uit de negentiende eeuw, verzonden om aan te tonen dat een functie overal continue kan zijn maar toch nergens differentieerbaar. De zich relatief netjes gedragende Fouriercoëfficiënten bemonsteren de Weierstrassfunctie echter buiten het parametergebied waarvoor deze dit pathologisch gedrag vertoont.

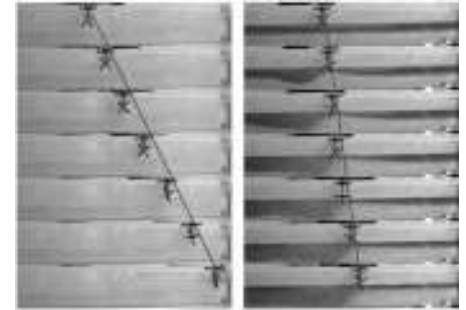
bewoners meer contact hebben met dorpjes op een paar kilometer afstand op *dezelfde* hoogtelijn dan met dorpjes vlakbij, enkele honderden meters hoger of lager. Niemand heeft kennelijk veel zin om steeds arbeid tegen de zwaartekracht in te moeten verrichten. Hetzelfde vinden we bij de verticale uitwisseling in de oceaan: deeltjes blijven het liefst gewoon hangen op een diepte waar hun dichtheid gelijk is aan die van het water. Recente experimenten laten dan ook zien dat verticaal transport inderdaad meestal onderdrukt wordt, behalve, opmerkelijkwijds, in intense interne golfbundels, zoals in een golfaantrekker. De golfaantrekker blijkt niet alleen golven maar ook deeltjes aan te trekken. Deze bewegingen eerst horizontaal, naar de bundels toe, maar worden daarna ook langs de bundel, scheef door de vloeistof gestuwd [4]. Mogelijk dat dit het lang gezochte voedseltransport-mechanisme is dat het mogelijk maakt dat koudwaterkoralen kunnen overleven. Koudwaterkoralen zijn een soort anemonen, poliepen die op grote diepte in koud, donker water op de bodem leven. Deze pikken voedsel uit hun omgeving op en zetten dat uiteindelijk om in kalk. Hun afhankelijkheid van vers, nabij het oppervlak geproduceerd plankton suggereert de aanwezigheid van een soort 'voedselsnelweg' tussen oppervlak en bodem, een snelweg waar de interne golfbundel zich kandidaat voor stelt.

Zoals gezegd is de diepzee onbekend omdat het moeilijk is om daar met licht of geluid een beeld van te vormen. Eigenlijk ligt het meer voor de hand om voor die beeldvorming

die golven te gebruiken die door de gelaagde oceaan wél worden toegelaten: de interne golven zelf. Met andere woorden, kunnen we wellicht die vreemde, scheeflopende interne golven gebruiken om oceaantvorm en gelaagdheid in beeld te brengen? Kunnen we 'kijken' met interne golven? Dit is een fascinerend, maar moeilijk probleem. Voor lichtgolven corresponderen bijvoorbeeld verschillende frequenties met verschillende kleuren. Maar interne golven van verschillende frequenties lopen onder een andere hoek met de verticaal. Dus wat voor beeld krijg je hiermee? Dit is een van de vele openliggende theoretische vragen. Beantwoording van deze vragen kan de oceaan misschien in een ander licht stellen!

Tenslotte

Kan ik ter afsluiting nog een praktisch advies geven over het onderwerp van mijn leerstoel: 'golfdynamica van de oceaan'? Wel, ik heb verteld dat de zee gelaagd kan zijn. Verschillenden onder u zullen gezwommen hebben in open water en misschien uit eigen ondervinding kunnen beamen dat oppervlakte en dieper water soms sterk in temperatuur verschillen. Gelet op het vertragend effect dat deze gelaagdheid op schepen kan hebben, ligt het voor de hand dat men zich afvraagt of ook zwemmers last kunnen hebben van dood-water? Experimenten, uitgevoerd met Huub Toussaint, van de Vrije Universiteit van Amsterdam, en twee van zijn studenten, heeft uitgewezen dat daar inderdaad aanwijzingen voor bestaan [2]. Nu



Figuur 7 Zeven opvolgende momentopnames van twee identieke experimenten (links) zonder en (rechts) met zout-gelaagdheid. Hierin trekt een LEGO-karretje dat van links naar rechts over de rand van de bak rijdt, zich met dezelfde spoed door de vloeistof voort. Het karretje heeft daartoe een schoepenrad dat door een motortje wordt aangedreven. Alleen het onderste van de vier schoepen steekt in het water. In de gelaagde situatie gaat kennelijk veel energie verloren in het tegen de zwaartekracht in omhoogbrengen van water met een hogere dichtheid uit de onderlaag.

is zwemmen met 'tentakels' zoals handen en voeten natuurlijk wel iets anders dan voortstuwing door zeil of motor. Daarom heb ik met enkele studenten een karretje gemaakt dat over de rand van een bak water rijdt en dat de beweging van handen nabootst doordat het zich door middel van schoepen door het water voorttrekt. Het experiment laat een frappant verschil zien tussen peddelen in homogeen en in gelaagd water (Figuur 7, zie filmpje: www.nioz.nl/maas, onder 'dead water'). Als u daarom de volgende keer bij het zwemmen in zee zo'n temperatuurverschil voelt en merkt dat u langzamer vooruit komt, misschien dat in ieder geval dit aspect van de zee u wat minder raadselachtig zal voorkomen. ...

Referenties

- Ekman, V.W., 'On dead water' *Sci. Results Norw. North Polar Expedi.* 1893 - 6 **5** (1904).
- Ganzevles, S.P.M., F. S. W. van Nuland, L. R. M. Maas, H. M. Toussaint, 'Swimming obstructed by dead-water' *Naturwissenschaften* **96** (2009), pp. 449-456.
- Haren, H. van, C. Millot, 'Rectilinear and circular inertial motions in the Western Mediterranean Sea', *Deep-Sea Research I* **51** (2004), pp. 1441-1455.
- Hazewinkel, J., S. Dalziel, A. Doelman and L.R.M. Maas, 'Tracer transport by internal wave beams', *Journal of Fluid Mechanics* (2009).
- Kelvin, Lord, 'On an experimental illustration of minimum energy', *Nature* **23** (1880), pp. 69-70.
- Maas, L.R.M., 'On the amphidromic structure of inertial waves in a rectangular parallelepiped', *Fluid Dynamics Research* **33** (2003), pp. 373-401.
- Maas, L.R.M., 'Wave attractors: linear yet non-linear', *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15** (2005), pp. 2757-2782.
- Maas, L.R.M., 'Exact analytic self-similar solution of a wave attractor field', *Physica D* **238** (2009), pp. 502-505.
- Maas, L.R.M., Lam, F.-P. A., 'Geometric focusing of internal waves', *Journal of Fluid Mechanics* **300** (1995), pp. 1-41.
- Maas, L.R.M., Benielli, D., Sommeria, J., Lam, F.-P.A., 'Observation of an internal wave attractor in a confined stably-stratified fluid', *Nature* **388** (1997), pp. 557-561.
- Manders, A.M.M., Duistermaat, J.J., Maas, L.R.M., 'Wave attractors in a smooth convex enclosed geometry', *Physica D* **186** (2003), pp. 109-132.
- Manders, A.M.M., Maas, L.R.M., 'Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary', *Journal of Fluid Mechanics* **493** (2003), pp. 59-88.
- Nansen, F., 'Farthest north. The Norwegian Polar Expedition 1893-1896' 1-2, *Archibald Constable and Company, Westminster*, 1897.

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragwetenschappen, Instituut ELAN,
Universiteit Twente,
Postbus 217
7500 AE Enschede
n.c.verhoef@utwente.nl

Petra Hendrikse

Faculteit Gedragwetenschappen, Instituut ELAN,
Universiteit Twente,
Postbus 217
7500 AE Enschede
h.p.hendrikse@utwente.nl

Onderwijs

Docenten op pad in de wereld van wetenschappelijk onderzoek

Onderwijsmethoden zijn onderwerp van felle debatten. Idealiter worden deze debatten gevoed door wetenschappelijke inzichten in wat wel en niet werkt in de onderwijspraktijk. Nellie Verhoef en Petra Hendrikse organiseerden een symposium waar docenten hun promotie-onderzoek presenteren. Deze docenten voeren hun onderzoek uit in de eigen dagelijkse praktijk van het lesgeven.

Voor het tweede achtereenvolgende jaar krijgen docenten in de exacte vakken die volop in de praktijk van het lesgeven staan, de mogelijkheid om te promoveren. In teamverband worden de docenten bijgestaan en nauwgezet begeleid door professoren die er veel tijd en energie in steken. Dit initiatief, het programma Didactisch Universitair onderzoek van DO-Centen naar vernieuwing van de bètavakken (DUDOC), is afkomstig van het Platform Bèta Techniek. Docenten kunnen intekenen op een onderzoeksvoorstel. Als het voorstel is goedgekeurd, kunnen geïnteresseerde docenten solliciteren. De gelukkige krijgt dan de mogelijkheid om te promoveren op een onderzoek dat zich afspeelt in de praktijk van het lesgeven. Let wel, de docent moet blijven lesgeven — het is niet zo dat de docent alle tijd aan zijn onderzoek kan besteden. Het blijkt in de praktijk een echte kluif te zijn! De onderwerpen van onderzoek verschillen uiteraard. Het type van onderzoek verschilt echter niet: in alle gevallen gaat het om ontwerpgericht onderzoek, niet om beschrijvend onderzoek. Het doel is dat het onderwijs in de praktijk weten-

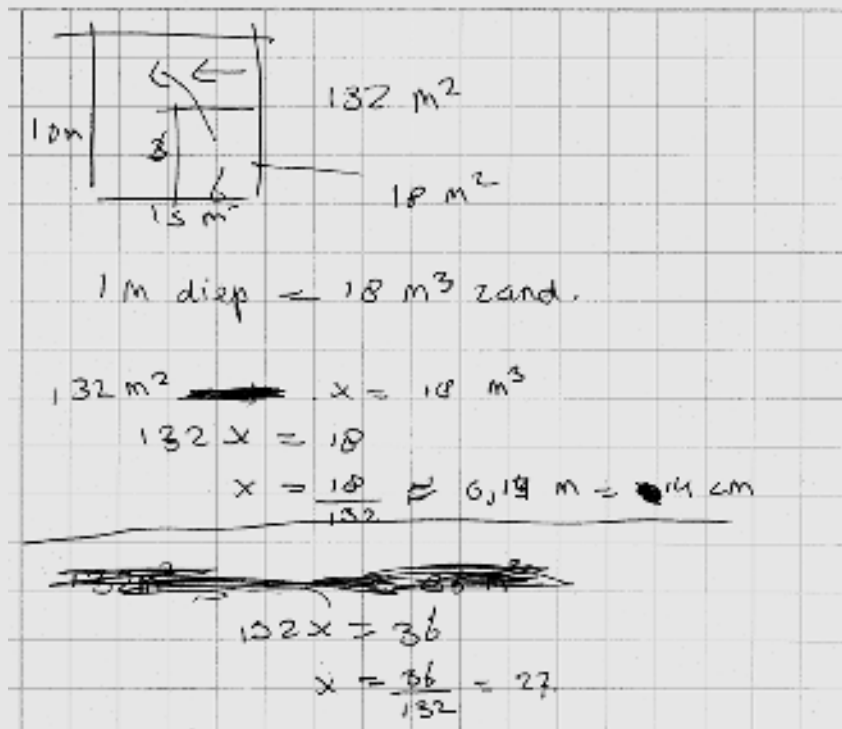
schappelijk verantwoord verbetert. De onderzoeken moeten maatschappelijk relevant zijn en aansluiten bij reeds bestaand (internationaal) vakdidactisch onderzoek. De onderwerpen van één docent uit de eerste tranche, en één uit de tweede tranche liggen dicht tegen elkaar aan. Een derde docent doet aanvullend onderzoek als NWO - Leraar - in - Onderzoek. Van deze docenten zijn Joke Zwarteveen en Daan van Smaalen verbonden aan de Universiteit Twente (UT) en Sanne Schaap aan de Rijksuniversiteit Groningen. Om meer bekendheid te geven aan het idee van promoverende docenten, naast hun lesgeven, stond het idee om half mei 2009 een symposium te houden op de school van Daan van Smaalen, het Christelijk Gymnasium in Utrecht. Het publiek bestond grotendeels uit (aankomende) VO-docenten, die op de één of andere manier betrokken of geïnteresseerd zijn in het onderwerp modelleren. Zo was er een docent uit Ede aanwezig die zich in een vergelijkbaar onderzoekstraject bezighield met modelleerproblemen aan de Universiteit Wageningen. Over het onderwerp is veel

gezegd en wordt veel gezegd (en gezwezen). Hoe kun je immers iets zinnigs zeggen over de didactiek van het modelleren als je niet precies weet wat modelleren is? Waar heb je het over als je nog nooit ervaren hebt hoe het is om de complexe realiteit te beschrijven en op grond van die beschrijving voorzichtig voorspellingen te durven doen? Het is misschien wel daarom dat dit onderdeel van de wiskunde nauwelijks is ingebed in het onderwijs. Het is moeilijk en het kost tijd, erg veel tijd en behendigheid van docenten die zich op paden begeven die ook voor hen ongewis en onvoorspelbaar zijn. De toepasbaarheid van wiskundige kennis en vaardigheden is cruciaal bij dit onderwerp. Joke Zwarteveen doet een poging om leerlingen de werkelijkheid te laten vatten in differentiaalvergelijkingen, veranderingen worden beschreven in vergelijkingen. Sanne Schaap probeert te analyseren hoe leerlingen relatief eenvoudige, werkelijke situaties benaderen en beschrijven met wiskundige technieken. Daan van Smaalen tenslotte legt de focus op de rol van de docent die deze leerprocessen stimuleert en kanaliseert. Hij pleit voor een open, transparante aanpak — samen voorbereiden én samen uitvoeren van lessen. De praktijk van het lesgeven is echter weerbarstig.

De eerste bijdrage over het begrijpen van differentiaalvergelijkingen (dv's) was van

Tim en Jonathan begonnen tijdens het maken van de zwembadopgave met concrete getallenvoorbeelden. In het onderstaande fragment hebben zij net de diepte van het zwembad uitgerekend bij één meter diep graven:

Tim: Even kijken of.. of.. als je 't met twee meter uitgraft of het dan
Jonathan: (Tim praat verder) Oke, dan doen we da..
Tim: eve.. of het dan.. of x dan twee keer zo groot wordt.. (Tim en Jonathan gebruiken x voor de hoogte van de laag zand die op de tuin wordt uitgesmeerd) [Jonathan rekent het getallenvoorbeeld door]
[...]
Jonathan: (schoolbel gaat) en dan maal [plus] twee. Ja da's wel lineair.



Figuur 1. Het getallenvoorbeeld van Tim en Jonathan

Joke Zwarteveen. Het doel van haar onderzoek is het ontwikkelen van een adequate didactiek voor het leren van het begrip dv die direct aansluit bij leerprocessen van leerlingen. Ze onderscheidt het opstellen, het uitrekenen en het analyseren van dv 's. Het opstellen van een dv , de eerste stap, beschouwt zij als onderdeel van een modelleerproces. Om te kunnen beschrijven hoe dat proces verloopt is een meetinstrument nodig. Een dergelijk instrument is er nog niet, dat moet zij ontwikkelen. Op basis van theorie (zoals lesmethoden voor het hoger technisch onderwijs) heeft Zwarteveen een prototype opgesteld. In een eerste ronde heeft ze de bruikbaarheid van dit prototype getest op uitwerkingen van VO-docenten wiskunde. Met het prototype-instrument kon succesvol worden gemeten dat de docenten geen enkele moeite hebben met het opstellen van een dv . In een tweede ronde werd het meetinstrument getest op de uitwerkingen van studenten tech-

nische geneeskunde op de UT. Deze studenten had Zwarteveen gekozen omdat zij het vak Differentiaalvergelijkingen op de universiteit gevolgd hebben en niet tot de groep van harde bètastudenten horen. In hardopdenk-sessies ontdekte Zwarteveen dat deze studenten nog nooit hebben nagedacht over veranderingen en de beschrijving daarvan in vergelijkingen, en stelde vast wat dat voor gevolgen heeft bij het opstellen van dv 's. Routinematig werd door studenten zonder enige verantwoording een verband gelegd tussen het woord dv , de truc 'afgeleide uitrekenen' en het symbool dy/dx . Zij hadden geen idee over de achterliggende betekenis van de notatie $\Delta y/\Delta x$. Deze bevindingen waren schokkend voor Zwarteveen. Alleen daarom al zou je als praktiserend docent aan wetenschappelijk onderzoek beginnen.

De tweede bijdrage, van Sanne Schaap, ging over belemmeringen en kansen tijdens het opstellen van mathematische modellen.

Schaap, die al een jaar langer bezig is dan Zwarteveen en Van Smaalen, gebruikt een theoretisch raamwerk als meetinstrument. Hij markeert dit met een begin- (het probleem) en een eindpunt (het mathematische model). De focus in dit raamwerk ligt bij de overgangen in de modelleercyclus van 1) situatie - via analyseren, probleem definiëren en vereenvoudigen, naar 2) het conceptuele model - via formaliseren, naar 3) het wiskundige model - via berekenen, naar 4) modeluitkomsten, en via interpreteren en experimenteel toetsen terug naar de oorspronkelijke situatie. Om het raamwerk als meetinstrument op bruikbaarheid te kunnen toetsen hebben drie tweetal-leerlingen in een pilotstudie tijdens een take-based-interview een viertal opgaven gemaakt. Het theoretische raamwerk bleek niet goed bruikbaar te zijn voor het benoemen van belemmeringen en kansen. Sommige belemmeringen en kansen konden wel geconstateerd worden, maar konden niet in het raamwerk worden geplaatst. Bijvoorbeeld bij de zwembadopgave met de vraag hoe diep je moet graven om een zwembad van 2 meter diepte te krijgen, waarbij de uitgegraven grond gelijkmatig over een tuin wordt verdeeld. Het duo Tim en Jonathan pakt dit probleem aan door eerst eens met een concreet getallenvoorbeeld aan de slag te gaan, zie Figuur 1. Ze nemen de tuin $10 \times 15 \text{ m}$ groot en het zwembad $3 \times 6 \text{ m}$.

Figuur 1 laat zien dat Tim en Jonathan het vermoeden ontwikkelen dat uitgegraven diepte en diepte van het zwembad evenredig zijn door twee concrete getallen voorbeelden uit te rekenen. Eerst kijken ze wat er gebeurt bij 1m uitgraven (niet diep genoeg), dan gaan ze door met 2m uitgraven (te diep). Schaap identificeert het rekenen met concrete getallenvoorbeelden en het netjes opschrijven van tussenresultaten als 'kansen'. Schaap gaat verder niet in op 'belemmeringen' terwijl die er wel zijn, bijvoorbeeld het gegeven dat Tom en Jonathan niet nauwkeurig werken. Ze schrijven onduidelijk, werken niet exact en vermelden niet altijd de eenheid. De eikpunten: situatie, conceptueel model, wiskundig model en modeluitkomst vereisen enige aanpassing in het kader van praktische bruikbaarheid. Schaap trekt dan ook de conclusie dat er nog werk aan de winkel is. Dit onderzoek dwingt hem (en het publiek) om na te denken over denkfouten van leerlingen, die op te sporen en zo mogelijk bij te stellen zijn.

De derde en tevens laatste spreker was Daan van Smaalen. Zijn presentatie ging over het fenomeen *lesson study* met de focus op

de wiskundedocent als ontwerper, onderzoeker en curriculumvernieuwer. Van Smaalen onderzoekt hoe *lesson study* kan bijdragen aan de professionalisering van wiskundedocenten. De aanpak van Daan is weergegeven in Figuur 2. De methode *lesson study* komt uit Japan. Het is een professionaliseringsstrategie waarbij docenten samen met collega's (en eventueel experts van buitenaf) een les ontwikkelen. Kenmerkend is dat collega's (en de experts van buitenaf) bij de uitvoering van de les aanwezig zijn (ieder heeft een rol als observator). Docenten ervaren hoe een les in de praktijk anders verloopt dan verwacht. Ze zien hoe dat komt, welke onverwachte situaties zich voordoen. In Japan komt het voor dat grote groepen geïnteresseerden achter in de klas staan om te observeren. De uitgevoerde les wordt samen geëvalueerd, bijgesteld en opnieuw uitgevoerd. De resultaten in

Japan zijn succesvol, docenten leren van elkaar in de praktijk. De vraag is of deze vorm überhaupt wel toepasbaar is in Nederland. De Nederlandse cultuur is er een van 'na de les direct naar huis vanwege andere taken'. Het idee om tot vijf uur op de school aanwezig te zijn, is niet gangbaar. Met z'n allen achter in de klas kijken hoe je collega de les geeft is ook al niet gangbaar. Toch wil Van Smaalen deze vorm van professionaliseren uitproberen, beginnend op zijn eigen Utrechtse school. De vraag die van Smaalen zich stelt is: Welke zijn de kenmerken van een in de lespraktijk ingebed professionaliseringstraject gebaseerd op de principes van *lesson study* met als doel het ontwikkelen van de vakdidactische kennis van wiskundedocenten? Als onderwerp kiest Van Smaalen voor modelleerprocessen, omdat hij verwacht dat het begeleiden daarvan andere vaardigheden van de docent vereist.

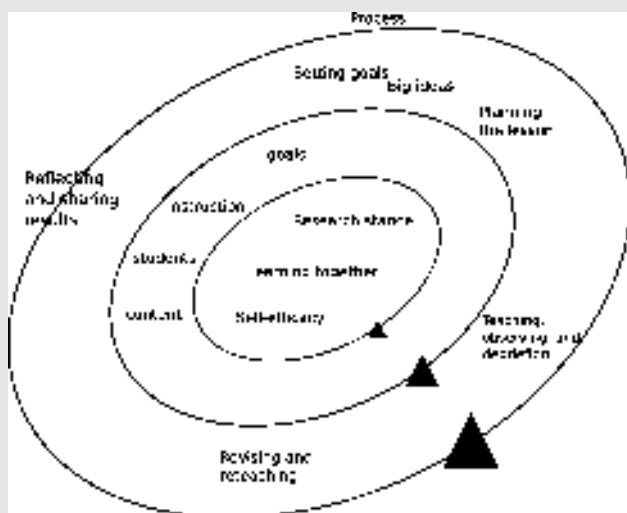
Het gaat er bijvoorbeeld om dat de docent de leerling leert zichzelf vragen te stellen, zonder direct aan antwoorden te denken. Er zijn ook momenten dat de docent moet ingrijpen en duidelijk moet sturen, maar wanneer dan en hoe? Tijdens zijn presentatie vraagt Van Smaalen zich al even hardop af, hoe hij eigenlijk professionaliseren kan gaan meten. Dit wordt nog ingewikkeld: vaststellen of, en zo ja, hoe docenten zich ontwikkelen. In de discussie komt het publiek met suggesties die Van Smaalen verder helpen bij de keuzes waar hij voor staat. "Samen nadenken over je vak is stimulerend", is de conclusie van de aanwezigen. En onderzoeken als docent, misschien toch een haalbare kaart? Het is nu wel voor iedereen duidelijk dat het pad van de docent als wetenschappelijke onderzoeker beslist niet over rozen gaat!

Werkwijze Daan van Smaalen

Van Smaalen is begonnen met het lezen van literatuur betreffende *lesson study*. Daar wordt in beperkte mate gesproken over het leren van de docenten. In het artikel van Lewis et al. [1] staat de hiernaast afgebeelde figuur waarin wordt ingegaan op het leren van docenten. In hetzelfde artikel pleiten de auteurs voor meer onderzoek naar *lesson study* (ze behandelen drie critical research needs).

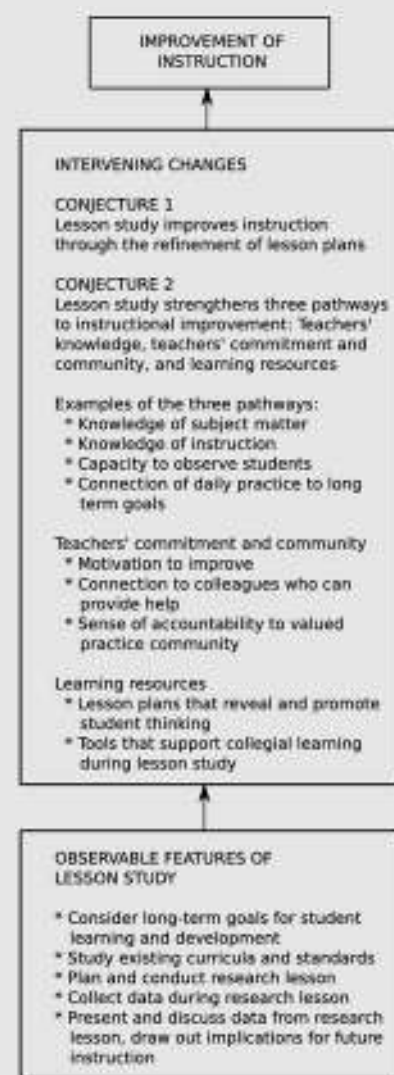
Naast het hiernaast afgebeelde model, gaat hij verder uit van het model zoals dat voorkomt in het boek *Leading lesson study* van Stepanek et al. Dat model staat hieronder

afgebeeld. Na deze modellen bestudeerd te hebben, is hij gaan onderzoeken hoe hij deze specifieke modellen zou kunnen koppelen aan wat meer algemenere en gangbare theorieën betreffende professionele ontwikkeling. Je komt dan al gauw bij Pedagogical Content Knowledge (PCK) uit. Daarom is hij het begrip PCK verder gaan bestuderen. Wat wordt er onder verstaan? Hoe conceptualiseren verschillende auteurs het? Hoe kan het worden gemeten? Dit met als doel om een link te kunnen leggen tussen de fasen in het proces van *lesson study* en het leren van docenten.



Noot

1. Lewis, C., Perry, R. & Murata, A., 'How Should Research Contribute to Instructional Improvement? A Case of Lesson Study', *Educational Researcher* 35(3) (2006), pp. 3-14



Figuur 2. Bijdrage van *lesson study* aan de professionalisering van wiskundedocenten

In de verdediging

| In defence



Expansions and Extensions

Charlene Kalle

Op 27 augustus van dit jaar promoveerde Charlene Kalle aan de Universiteit Utrecht bij Richard Gill en Karma Dajani op het proefschrift met de prikkelende titel *Expansions and Extensions*. Om wat voor ontwikkelingen en uitbreidingen gaat het hier?

Getalsontwikkelingen

In haar proefschrift bestudeerde Kalle de eigenschappen van een dynamisch systeem dat gebruikt kan worden om getalsontwikkelingen te maken. Standaard voorbeelden van getalsontwikkelingen zijn de decimale en de binaire ontwikkeling, respectievelijk met basis 10 en basis 2. In het algemeen hebben getalsontwikkelingen niet noodzakelijk een gehele basis. Voor een reëel getal $x \in [0, 1)$ is de zogenaamde β -ontwikkeling van de vorm $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n / \beta^n$, waarbij $\beta > 1$ de basis is en alle getallen b_n in een cijferverzameling $A = \{a_0, \dots, a_m\}$ liggen. Met $\beta = 10$ en $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ is dit precies de decimale ontwikkeling.

Sinds het einde van de vijftiger jaren is veel onderzoek gedaan naar ontwikkelingen met een niet-gehele basis β en cijfers 0 tot en met $\lfloor \beta \rfloor$, het grootste gehele getal kleiner dan β . Voor het maken van dergelijke ontwikkelingen kunnen dynamische systemen worden gebruikt. Een binaire ontwikkeling in basis 2 en met cijfers 0 en 1 kan bijvoorbeeld worden gegenereerd met de *doubling map* $T : x \mapsto 2x \bmod 1$ die de cijfers $b_n = b_n(x)$ van $x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n / 2^n$ bepaalt als volgt:

$$b_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } x \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad \text{en} \quad b_n(x) = b_1(T^{n-1}x)$$

Kalle heeft een afbeelding bestudeerd die getalsontwikkelingen maakt voor een reële basis $\beta > 1$ en cijfers in een *willekeurige* eindige verzameling van reële getallen, $A = \{a_0, \dots, a_m\}$. De enige eis op deze cijferverzameling is dat twee opeenvolgende cijfers niet te ver uit elkaar mogen liggen. In tegenstelling tot de klassieke cijferverzameling $\{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$, die je compleet zou kunnen noemen, bevatten de cijferverzamelingen bij Kalle niet alle cijfers van 0 tot en met $\lfloor \beta \rfloor$. De ontwikkelingen heten daarom *β -expansions with deleted digits*. De bijbehorende genererende transformatie die ze heeft bekeken is een 'zaagtandafbeelding': stuks-gewijs lineair met helling β en voor ieder cijfer a_j is er een interval waarop de transformatie gelijk is aan $\beta x - a_j$. Voor niet-gehele β en de klassieke cijferverzameling is de transformatie gelijk aan

$$x \mapsto \begin{cases} \beta x \bmod 1 & x \in [0, 1] \\ \beta x - \lfloor \beta \rfloor & x \in [1, (\lfloor \beta \rfloor) / (\beta - 1)] \end{cases}$$

Voor algemene cijferverzamelingen is de transformatie iets minder regelmatig, met 'tanden' van verschillende hoogte.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

Overaftelbaar veel ontwikkelingen

Getallen tussen 0 en 1 zijn bij gebruik van een gehele basis meestal op precies één manier te schrijven. In zo'n basis zijn er aftelbaar veel getallen waarvoor dat niet geldt; die hebben precies twee ontwikkelingen. De meeste getallen hebben bijvoorbeeld een unieke decimale ontwikkeling, maar een getal als $1/4$ is te schrijven als 0,25 en als 0,249999... Het grote verschil tussen de ontwikkelingen met gehele basis en die met niet-gehele basis is, dat dit niet langer geldt voor niet-gehele bases. In een niet-gehele basis hebben meestal bijna alle getallen overaftelbaar veel verschillende ontwikkelingen. Dat betekent ook dat er niet één maar vele verschillende transformaties zijn die de getalontwikkelingen kunnen genereren. Tussen al deze transformaties zijn er twee bijzondere, de *greedy* (gulzige) en *lazy* (luie) transformatie. De greedy transformatie maakt ontwikkelingen die op iedere plek het grootst mogelijke cijfer hebben staan. De lazy transformatie doet precies het tegenovergestelde, die pakt op ieder moment het kleinste mogelijke cijfer.

Random transformatie en uitbreidingen

Omdat bijna alle getallen in een niet-gehele basis overaftelbaar veel verschillende ontwikkelingen hebben en er veel verschillende transformaties zijn die de ontwikkelingen maken, kun je een random transformatie definiëren. Kalle heeft zo'n transformatie gemaakt, die voor iedere n beslist wat het cijfer b_n wordt door het gooien van een dobbelsteen met het juiste aantal zijdes. In tegenstelling tot de greedy of lazy transformatie, die voor ieder getal één mogelijke ontwikkeling geven, is deze transformatie in staat alle mogelijke ontwikkelingen te geven. Van deze en andere transformaties heeft Kalle allerlei eigenschappen bestudeerd. Ook definieerde ze uitbreidingen van de transformaties. Een van de mooie eigenschappen daarvan blijkt te zijn dat ze getallen met een periodieke ontwikkeling karakteriseren.

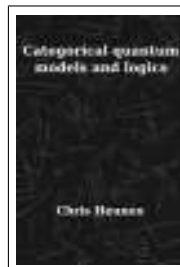
Sfeer en gezelligheid

Het leven als aio met de erbij horende vrijheid vond Kalle heel prettig. Allereerst was er natuurlijk haar onderzoek, maar het onderwijs geven vond ze een heel welkome afwisseling. De dagelijkse begeleiding bij haar onderzoek lag vooral in handen van Karma Dajani. Aan haar heeft Kalle naar eigen zeggen ontzettend veel gehad. Niet alleen op het wiskundig vlak, maar ook qua gezelligheid. Ze konden uren praten. Als ze naar haar toeging met een wiskundige vraag ging het gesprek na een half uur vaak over heel andere dingen. Ook mede-aio's zorgden voor een leuke sfeer. Gezamenlijke vrijdagochtendkoffie en lunch, af en toe films kijken, samen schaatsen of mountainbiken; zelfs een reisje naar Rome of Berlijn was voor een groep Utrechtse aio's niet te gek. De prettige omgeving maakte, dat Kalle graag naar de universiteit kwam en niet vaak thuis werkte.

In de tweede helft van haar derde aio-jaar hadden Kalle en Dajani het gevoel dat het promoveren wel zou gaan lukken binnen de tijd. Daardoor was de druk er wat af en kon Kalle echt genieten van het aio-schap. Die periode was nog extra plezierig, omdat ze naar twee conferenties in Rome en Praag ging die precies over haar onderwerp gingen. Beide conferenties waren erg gezellig en daarmee nog eens extra motiverend.

Het laatste half jaar was moeilijker. Er was opeens heel veel dat moest gebeuren. Het proefschrift moest natuurlijk afgerond worden, maar ook voordrachten, onderwijs en het zoeken naar een postdocplek plus het schrijven van onderzoeksvoorstellen daarvoor kostten tijd. Met nog wat conferenties erbij was het een heel hectische periode waarin ze af en toe het overzicht een beetje verloor. Maar uiteindelijk

is het natuurlijk allemaal goed gekomen. Sinds september werkt ze als postdoc aan de universiteit van Warwick, op een Marie Curie positie van een jaar. Waarschijnlijk zal ze in dat jaar ook wat weken in Wenen doorbrengen en als het lukt volgt er nog een jaar postdoc-schap in Wenen. Daarna is alles nog open, maar ze hoopt uiteindelijk toch wel in Nederland aan de slag te kunnen.



Categorical quantum models and logics

Chris Heunen

Gebruikmaken van kwantummechanische principes levert computers op die essentieel sneller zijn dan klassieke computers, en communicatieprotocollen waarbij in principe niet afgeluisterd kan worden. Op het eerste gezicht ideaal dus. Helaas zijn kwantumcomputers nog erg duur. Ze worden dan ook vooral gebruikt door grote instellingen als banken en overheden. Behalve de hoge kosten is er nog een nadeel: het tegenintuïtieve karakter van kwantummechanica maakt het schrijven van programma's voor een kwantumcomputer of het ontwerpen van kwantumcommunicatieprotocollen lastig. Chris Heunen, die op 7 januari volgend jaar bij Bart Jacobs en Klaas Landsman hoopt te promoveren aan de Radboud Universiteit, legt uit waarom. "Het is heel moeilijk om je intuïtie uit te schakelen, of op zijn minst om te vormen, opdat je slimme kwantumtrucs uit kunt halen. Bovendien moet een 'kwantumprogrammeur' nog erg *low level* bezig zijn; denk aan programmeren door direct poorten en bits te manipuleren, in plaats van een programmeertaal als Java of Mathematica te gebruiken die dat soort details abstraheert."

Noodzakelijke wiskundige bewijzen van correctheid

Gebruikers als banken en overheden zijn natuurlijk niet tevreden als programma's wel lijken te werken en programmeurs zeggen dat het allemaal klopt. Om hun de gewenste zekerheid te bieden, zijn wiskundige bewijzen van correctheid noodzakelijk. Bovendien wordt het een stuk gemakkelijker om een hoog-niveau-taal te ontwerpen voor kwantumomgevingen, als er bij iedere laag-niveau stap een correctheidsbewijs wordt meegenomen. Maar ook als je dat probeert, speelt het tegenintuïtieve karakter van de kwantummechanica je parten. Er zijn allerlei eigenschappen die tegen onze normale logische intuïtie ingaan. Heunen noemt als voorbeeld *entanglement*. Dit principe zegt dat twee kwantumbits op zo'n manier vervlochten kunnen raken, dat als je de een meet, de uitkomst van een meting van de ander onmiddellijk vastligt, zelfs als ze ruimtelijk heel ver gescheiden zijn.

Categorische modellen en logica

In zijn proefschrift *Categorical quantum models and logics* onderzoekt Chris Heunen welke aspecten van het gangbare model voor kwantummechanica dit soort logisch onbegrijpelijke eigenschappen veroorza-

ken. Zijn nieuwe uitgangsmodel is een *categorie* die aan bepaalde axioma's voldoen. De axioma's formuleren op hun beurt kwantumeigenschappen. Door hierop categorische logica te bedrijven, komt hij op een kwantumlogica die meer aansluit bij onze logische intuïtie.

Heunen legt uit op welke manier de 'gewone' kwantumlogica niet aansluit bij onze logische intuïtie: "Normale logica gaat over proposities die deelverzamelingen van een verzameling representeren. Zo'n machtsverzameling heeft een heleboel structuur; vereniging kun je bijvoorbeeld opvatten als logische conjunctie (en), en doorsnede als disjunctie (of). Men heeft geprobeerd ook zo te kijken naar gesloten deelruimten van een Hilbertruimte (toestandsruimte van de kwantummechanica), maar de logische interpretatie blijkt dan erg vreemd. Conjunctie distribueert bijvoorbeeld niet meer over disjunctie. In een analogie van Chris Isham: het is dan mogelijk om noch spek en eieren, noch ham en eieren als ontbijt te krijgen, als je de keuze hebt tussen eieren en ofwel spek ofwel ham." Het contra-intuïtieve karakter van de kwantumlogica is dus niet eens het gevolg van bijvoorbeeld de onzekerheidsrelatie in de kwantummechanica; het is nog fundamenteeler.

Een categorie bevat grof gezegd objecten met pijlen, of morfismen, ertussen. De objecten mogen vagere dingen zijn dan de gebruikelijke verzamelingen of functieruimten. In zekere zin bestudeert categoriëentheorie de wiskunde, waarbij ze functies als het centrale primitieve begrip neemt, in plaats van de 'element van'-relatie. Categoriëentheorie bestudeert hoe objecten zich gedragen ten opzichte van andere objecten, zonder gebruik te maken van een interne structuur.

Dit heeft natuurlijk ook gevolgen voor de logica. Kwantoren bijvoorbeeld, zoals 'er is een y zodat ...', worden traditioneel gemodelleerd door verzamelingen $\{x \in X \mid \exists y \in Y \varphi(x, y)\}$. Als je geen elementen hebt, maar alleen functies, moet je dat anders doen: in de categorische logica wordt een kwantor veralgemeniseerd tot een functor die geadjungeerd is aan *pullback*. In de categorie van verzamelingen (als objecten) en functies (als morfismen) komt dit dan neer op de traditionele definitie.

Categorisch modelleren van kwantumeigenschappen

Aan de hand van het entanglement-voorbeeld illustreert Heunen hoe hij kwantumeigenschappen in zijn proefschrift modelleert. Om entanglement categorisch te modelleren, moet je ten eerste eisen dat de categorie 'monoidaal' is. Dat wil zeggen dat er een manier is om twee objecten samen te stellen tot een groot nieuw object, en net zo, om twee morfismen samen te stellen tot een nieuw morfisme van het goede type. Grof gezegd moet er dus, om entanglement te kunnen modelleren, een tensorproduct zijn op de categorie. Het woord 'tensor' is hierbij echter misleidend, want het product hoeft geen bilineariteitseigenschappen te hebben. Het is slechts nodig eindig veel objecten te kunnen groeperen. In het bijzonder moet er een 'leeg systeem' zijn, dat Heunen I noemt.

Vervolgens stelt hij als axioma, dat voor ieder object X er een partnerobject X^* is, en morfismen $I \rightarrow X^* \otimes X$ en $X \otimes X^* \rightarrow I$ die precies samenwerken zoals de natuurkundige entanglement voorschrijft. Op deze manier krijg je niet-standaard modellen, die toch de kwalitatieve eigenschap 'entanglement' vangen, en waarin je dus kunt redeneren over en eigenschappen kunt bewijzen van entanglement.

Een typisch voorbeeld van een categorie waarbij dit axioma is opgelegd, is de categorie van vectorruimten (als objecten) en lineaire transformaties (als morfismen), met als monoidale structuur daadwerkelijk het tensorproduct. Een ander voorbeeld is de categorie van verzamelingen (als objecten) en relaties (als morfismen), met als monoidale structuur het Cartesisch product van verzamelingen.

Het mooiste resultaat

Het mooiste resultaat in zijn proefschrift vindt Heunen de 'karakterisatiestelling' dat iedere categorie met bepaalde eigenschappen in te bedden is in de categorie waarin objecten Hilbertruimten zijn, en morfismen continue lineaire transformaties. Daarbij schiet hij zichzelf wel een beetje in de voet, want dit resultaat laat zien dat de 'niet-standaard modellen' die hij bekijkt altijd een deel uitmaken van het traditionele (Hilbertruimte) model van de kwantummechanica. Anderzijds zijn de categorische eigenschappen die hij oplegt vrij zwak. Normaal gesproken zijn (complexe) scalaires bijvoorbeeld al in een kwantummodel ingebakken vanaf het moment dat de natuurkundige eist dat de toestandsruimte een vectorruimte is. Heunen eist echter helemaal niets over scalaires, maar toch blijken de complexe getallen als uit het niets te verschijnen. Het voorbeeld van de entanglement illustreert dit wederom goed. Hij eist daarvoor dat er een manier ('tensorproduct') is om systemen samen te stellen, en dat er een 'leeg systeem' is. Bij een echt tensorproduct is het lege systeem de 1-dimensionale vectorruimte, dus de complexe getallen. Zoals gezegd hoeft de manier van samenstellen voor Heunen helemaal geen echt tensorproduct te zijn; sterker nog, zijn axioma's leggen helemaal geen vermenigvuldiging met scalaires op. Maar die blijkt dus wel te volgen uit de wel opgelegde axioma's.

Zwarte band in karate vergelijkbaar met promotie

Het leven als aio beviel Heunen prima: "Boeiend werk, extreem flexibele werkomstandigheden, eigen verantwoordelijkheid, redelijk salarisniveau, wat valt er niet aan te bevallen?" Hij roemt vooral de vriendelijke verwelcoming door internationale collegae: ondanks een natuurlijke concurrentie is de sfeer bij bijeenkomsten vooral opbouwend en uitnodigend tot vooruitgang door samenwerking. In zijn tweede jaar kende hij echter wel een periode van twijfel. Hij had een artikel ingestuurd, waar hij zelf best trots op was. Twee maanden later werd het tijdens zijn vakantie in niet mis te verstane bewoordingen afgewezen door de referee: in een cruciaal lemma had hij (en zijn begeleiders) iets totaal over het hoofd gezien. Die domper deed hem weleens twifelen of dit nou zijn leven was. Achteraf denkt hij, dat zo'n periode vast hoort bij de vorming van een evenwichtige wetenschapper.

Professioneel gezien was vooral de zomer van het derde jaar fantastisch. Op de een of andere manier kreeg hij het heilige vuur te pakken en in twee weken legde hij de basis voor wat uiteindelijk twee hoofdstukken van het proefschrift zijn geworden. Het mooiste moment daarbij was de schetsmatige voltooiing van het bewijs van bovengenoemde karakterisatiestelling.

Naast de afronding van zijn proefschrift heeft Heunen afgelopen lente succesvol het zwarte-bandexamen karate afgelegd. Daar is hij heel blij mee en, terecht, ook wel een beetje trots op. Heunen vindt het trainen voor de zwarte band wel vergelijkbaar met een promotietraject: bij beide werk je ergens naartoe door jarenlange training, steeds maar aan je techniek schaven en continu bijleren.

Komende twee jaar naar Oxford

Als hij zichzelf met vrienden vergelijkt die in het bedrijfsleven werken, is hij eigenlijk alleen minder tevreden met de onzekerheid over de toekomst. Voor de komende twee jaar ligt die voor hem al wel vast. Met een Rubicon-subsidie van NWO werkt hij sinds september als postdoc in Oxford; een voortzetting van het goede leven als promovendus. Echter, de wekelijkse bijeenkomsten met zijn begeleiders, die inspirerende houvasten vormden, gaat hij waarschijnlijk wel missen.



Marco Swaen

Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Postbus 94248, 1090 GE Amsterdam

mdgswaen@xs4all.nl

Vakantiecursus

Zwevende getallen

Het geruchtmakende intuïtionisme van Brouwer heeft maar beperkt navolging gekregen. Marco Swaen laat de lezer kennismaken met Brouwers benadering van reële getallen en functies, die verrassend dicht bij onze dagelijkse interpretatie blijkt te liggen. Dit artikel is eerder verschenen in de vakantiecursus van het CWI, editie 2008.

In 1907, nu iets meer dan een eeuw geleden verscheen het proefschrift *over de grondslagen der wiskunde* waarin de dan nog onbekende L.E.J. Brouwer een nieuwe visie op de wiskunde ontvouwt, sindsdien aangeduid als het 'intuïtionisme'. Brouwer liet het niet bij filosofische beschouwing maar werkte in latere jaren zijn ideeën uit tot een nieuwe stijl van wiskunde beoefenen. De intuïtionistische wiskunde kreeg niet veel navolging, en is tegenwoordig vooral een curiositeit voor specialisten. Dat is jammer, want met name Brouwers behandeling van reële getallen en functies sluit eigenlijk beter aan bij de manier waarop we in concreto met getallen en functies omgaan.

In dit artikel wil ik de lezer op een informele manier kennis laten maken met de intuïtionistische kijk op reële getallen en functies. Omwille van de toegankelijkheid geef ik een losse interpretatie van de uitgangspunten die ver af ligt van de presentatie zoals Brouwer die in zijn artikelen gaf.

Historie

Als jong wiskundige nam Brouwer stormenderhand zijn plaats in op het wereldtoneel met de succesvolle toepassing van algebraïsche technieken in de topologie. De naar hem genoemde dimensiestelling en dekpuntstelling herinneren aan dat sprankelende begin. Maar Brouwer ambieerde meer dan het leveren van memorabele bijdragen aan het corpus van de klassieke wiskunde. Hij was

gegrepen door het toentertijd levendige debat over de vraag wat wiskunde nu eigenlijk is. In zijn proefschrift [2] liet hij zien de diverse stromingen in dat debat goed te kennen en uitte fundamentele kritiek op elk van die scholen. Brouwer stelt dat taal en logica slechts hulpmiddelen zijn in de beoefening van de wiskunde. Daarom zal het, in weerwil van wat logicisten als Frege en Russell hoopten, nooit mogelijk zijn de wiskunde te herleiden tot logica. Noch is de wiskunde terug te brengen tot een formeel spel zoals David Hilbert beoogde. En tenslotte moet ook Cantor het ontgelden met zijn verzamelingenleer, die volgens Brouwer niet veel meer is dan een betekenisloos woordspel. Brouwer laat het niet bij kritiek op de dominante stromingen van zijn tijd, hij komt ook met een eigen karakterisering van het wezen der wiskunde. Wiskunde is een vrije schepping van onze geest, waarbij we wiskundige objecten — getallen, functies, systemen — bedenken en bestuderen. Brouwer spreekt van mentale constructies die ontspruiten aan onze intuïtie — a priori kennis in de zin van Kant. Vandaar dat zijn opvattingen bekend zijn komen te staan onder de naam 'intuïtionisme'.

Toen tijdens de Eerste Wereldoorlog de internationale uitwisseling stilviel vatte Brouwer de taak op zijn filosofische standpunt concreet te maken door de wiskunde van de grond af op te bouwen volgens de inzichten die hij in zijn proefschrift ontwikkeld had. In 1918 verscheen zijn eerste artikel [4] in

een reeks waarin hij deze intuïtionistische reconstructie aanving met een verzamelingen-theorie en de theorie van het reële getal. Zijn belangrijkste leerling Arend Heyting (1898–1980) concipieerde in de twintiger jaren een intuïtionistische logica die de positie ten opzichte van de klassieke wiskunde verhelderde. Ook andere gebieden der wiskunde werden intuïtionistisch verkend, waarbij soms mooie resultaten werden geboekt. Hoe complexer de materie, hoe ingewikkelder het begrippenapparaat echter werd als gevolg van het verschijnsel dat één klassieke notie aanleiding gaf tot een waaier aan intuïtionistische, zodat niet-ingewijden al gauw het spoor bijster waren.

In de nadruk op constructieve methoden heeft Brouwers intuïtionisme inmiddels gezelschap gekregen van een schare aan andere alternatieve wiskunden onder exotische namen als de Russische recursief constructivisten, de constructieve analyse van Bishop, predicativistische wiskunde, finitisme en ultrafinitisme. Het aantal wiskundigen dat heden ten dage uit overtuiging de bewijzen Brouweriaans levert is overigens bijzonder klein. Wel blijft er interesse voor de intuïtionistische wiskunde als wiskundig systeem in verhouding tot de klassieke wiskunde. Ook binnen de traditionele wiskunde is er altijd een voorkeur voor constructieve bewijzen omdat die algoritmen opleveren waarmee wiskunde uitvoerbaar en toepasbaar wordt.

Uitgangspunten en kenmerken

De axiomatische methode is sinds Euclides het model geweest voor de opbouw van een solide wiskundige theorie. Daarbij worden bewijzen streng gevoerd op basis van een uit-

puttende lijst van uitgangspunten — de axioma's — en volgens afleidingsregels: de logica. Een belangrijk kenmerk van Brouwers intuïtionistische wiskunde is de tweeledige afwijzing van de axiomatische methode. Ten eerste zal men vergeefs in Brouwers artikelen zoeken naar een lijst met axioma's waarop de intuïtionistische wiskunde gefundeerd kan worden. Brouwer formuleert alleen aldoende wiskundige principes als hij het nodig vindt zijn bewijsvoering te verduidelijken. Ten tweede hanteert Brouwer in de bewijzen niet de vertrouwde logica, omdat volgens hem redeneringen moeten wortelen in wiskundige inhoud en niet mogen berusten op de klakkeloze toepassing van logische wetten. Met name verzet Brouwer zich tegen het principe van de uitgesloten derde, de wet die zegt dat er voor elke goed geformuleerde uitspraak A maar twee mogelijkheden zijn: A is waar, of A is niet waar, in formule: $A \vee \neg A$. De wet van de uitgesloten derde vormt de grondslag voor het bewijs uit het ongerijmde, een methode waarbij men om A te bewijzen, eerst aanneemt dat A niet waar is, en uit die aanname een tegenspraak afleidt. Gaat het bijvoorbeeld om een uitspraak van de vorm: "er is een x met eigenschap E ", dan levert een bewijs uit het ongerijmde de conclusie dat het *niet* mogelijk is dat er *geen* x is met eigenschap E . Maar daarmee geeft het bewijs doorgaans geen manier aan om die x daadwerkelijk te vinden, en wordt daarom niet als constructief beschouwd.

Het wiskundig universum

De afwijzing van bewijs uit het ongerijmde wordt soms wel eens voorgesteld als de essentie van Brouwers intuïtionisme. Zij is echter geen fundamentele leerstelling, maar eerder een consequentie van de overtuiging dat wiskunde gaat over dingen die we *maken*, en niet over dingen die los van ons bestaan. Anders dan sterren of geldstromen zijn getallen en systemen er alleen maar voorzover we ze willen zien. Het zijn bedenksels, die we zelf oproepen, en die we alleen aan anderen tonen door aan te geven hoe we ze in onze gedachten tot stand hebben gebracht. De wiskundige objecten zijn dus mentale constructies. Hebben we geen constructie voor x , dan is x er niet. Het wiskundige universum waarin we al denkend vertoeven is noodzakelijk onaf, alleen dat wat we er gemaakt hebben, dan wel waarvan we inzien dat we het in een afzienbaar aantal stappen zouden kunnen maken, bestaat er. Wiskunde is 'uitvinden' en niet 'ontdekken'. De objecten moeten we uitvinden voor we ze kunnen bestuderen. Vervol-

gens kunnen we al studierend eigenschappen ontdekken, maar welbeschouwd is dat ontdekken het vinden van sluitende redeneringen, van bewijzen, dus ook 'uitvinden' in de vorm van het leveren van een gedachteconstructie.

De tijdsintuïtie

Ook fantasieën en dromen zijn mentale constructies; het bijzondere aan de constructies waarmee we ons als wiskundige bezig houden is dat we ze maken vanuit een bepaald inzicht, onze tijdsintuïtie in Brouwers terminologie. Het is inzicht waarmee we zijn toegerust om de wereld waarin we moeten overleven te begrijpen en naar onze hand te zetten. Men kan ook denken aan een instinct, of in de terminologie van Kant: a priori kennis, kennis die we bezitten zonder deze eerst afgeleid te hebben uit ervaringen. In zijn proefschrift heeft Brouwer het over de tijdsintuïtie en noemt daarbij het gegeven dat we gedachten en gewaarwordingen niet gelijktijdig maar achtereen hebben, en beschikken over het vermogen de ene ervaring te onthouden en te vergelijken met een volgende. In ons denken figureert een tijdslijn, waarlangs we gewaarwordingen rangschikken, waarmee we oorzaak en gevolg onderscheiden en waarmee we onze handelingen kunnen beramen en overdenken.

De telrij $1, 2, 3, 4, \dots$ komt direct voort uit ons vermogen ons in gedachten een eenheid voor te stellen, daar in gedachte een eenheid aan toe te voegen, en dit proces eindeloos te herhalen. Zien we die telgetallen als stappen op de tijdslijn, dan kunnen we ook terugtellen en komen op $0, -1, -2, \dots$. Maar ook is de tijdslijn vloeiend, waarbij tussen momenten steeds weer nieuwe momenten onderscheiden kunnen worden, zodat we een beeld krijgen van wat we noemen: het continuüm. In onze gedachten zijn we vrij; al zullen we in de werkelijkheid nooit erg ver tellen, we beseffen dat het tellen niet eindigt omdat we in principe altijd weer één stap verder kunnen. Zo loopt het continuüm eindeloos voort en is het aantal telgetallen oneindig. Evenzeer is het oneindige aanwezig in de mogelijkheid in het continuüm tussen elk tweetal momenten weer een nieuw moment te onderscheiden.

De natuurlijke getallen

Met onze telgetallen kunnen we rekenen, en zo ontdekken we allerlei eigenschappen: een getal kan priem zijn, of samengesteld, even, of de som van twee priemgetallen. Heb ik een getal gemaakt dan kan ik de eigenschappen ervan onderzoeken. Maar als het aantal ge-

tallen oneindig is, hoe zou ik dan ooit kunnen vaststellen of alle getallen een bepaalde eigenschap hebben? Omdat ik weet hoe ik de getallen maak, namelijk elk getal is een directe opvolger van een eerder gemaakt getal en uiteindelijk een opvolger van 1 , kan ik toch het geheel der natuurlijke getallen overzien. In het geval dat ik weet dat de eigenschap voor 1 geldt, en altijd wordt doorgegeven van een getal naar zijn directe opvolger, kan ik concluderen dat de eigenschap vanaf 1 aan elke opvolger wordt doorgegeven en geen enkel getal zal overslaan. Dit is het bekende principe van "bewijs door volledige inductie", en is voor de intuïtionist nog acceptabeler dan voor een klassiek wiskundige, die denkt dat de natuurlijke getallen ergens buiten ons bestaan, en zich eigenlijk zorgen zou moeten maken of er behalve die opvolgers van 1 misschien nog andere natuurlijke getallen zijn.

Even of niet even

Zoals gezegd verzette Brouwer zich tegen het klakkeloos toepassen van logica, met name tegen het principe van de uitgesloten derde. Dat wil niet zeggen dat in zijn wiskunde $A \vee \neg A$ nooit geldt. Ter verduidelijking zullen we twee voorbeelden bekijken, één van een uitspraak waarop het principe wel, en één waarop het niet van toepassing is. De volgende stelling is niet moeilijk te bewijzen:

elk natuurlijk getal is even of oneven.

Met *even* bedoelen we dat het getal van de vorm $2n$ is, met oneven dat het van de vorm $2n - 1$ is, waarbij n een willekeurig natuurlijk getal voorstelt. Om te beginnen is het getal 1 oneven, want $1 = 2 \cdot 1 - 1$. Als een getal n even is, dan is zijn opvolger van de vorm $2m + 1 = 2(m + 1) - 1$ dus oneven. Is een getal oneven, dan is het zelf van de vorm $2m - 1$, dan is zijn opvolger $2m - 1 + 1 = 2m$, dus even. Verder is het niet heel moeilijk te beredeneren dat een getal niet even en oneven tegelijk kan zijn, dus we hebben ook: voor elk natuurlijk getal n geldt

$$n \text{ is even} \vee \neg(n \text{ is even}).$$

Goldbach of niet-Goldbach

De methode van volledige inductie biedt vaak geen soelaas. Dat is (tot op heden) bijvoorbeeld het geval bij het (sterke) vermoeden van Goldbach, dat teruggaat op een correspondentie tussen Goldbach en Euler van 1742 en behelst dat elk even getal groter dan 2 de som van twee priemgetallen zou zijn. Probeer maar:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$



Brouwer over keuzerijen

$$\begin{aligned} 8 &= 3 + 5 \\ 10 &= 3 + 7 = 5 + 5 \\ \dots \end{aligned}$$

Met $G(n)$ geven we aan dat het getal $2n$ voldoet aan de eigenschap in het vermoeden, oftewel $G(n)$ geeft de implicatie weer 'als $n > 1$ dan zijn er priemgetallen p en q zodat $2n = p + q$ '. Daarmee is het vermoeden van Goldbach dus te schrijven als: $\forall n G(n)$. Van een gegeven getal n is deze eigenschap te controleren binnen afzienbaar aantal stappen. Wil je bijvoorbeeld weten of $G(100)$, maak dan een lijst van de priemgetallen tussen 1 en 200, kijk dan of 1 en 199 misschien priem zijn, zo niet dan misschien 2 en 198 enz. ben je tegen de tijd dat je 100 bereikt nog geen paar priemgetallen tegengekomen dat samen 200 is, dan weet je dat $G(200)$ niet geldt. Ben je wel zo'n paar tegengekomen dan geldt $G(200)$ wel. Dit is inmiddels al voor vele getallen gedaan, ongetwijfeld met handigere methodes, en terwijl de grens 10^{17} al gepasseerd is, is er nog steeds geen getal gevonden dat niet voldoet. Maar langs deze weg zal nooit zekerheid ontstaan dat er in de verre toekomst niet toch een getal zal opduiken dat het vermoeden van Goldbach ontkracht. Vooralsnog is het vermoeden van Goldbach dus een open probleem, en daarmee een voorbeeld van een wiskundige bewering waarvan noch de bevestiging noch de ontkenning op dit moment beezen is. Dat zulke uitspraken bestaan is inherent aan de wiskundige arbeid, waarin er altijd weer nieuwe vragen zullen zijn. In het vervolg zullen we regelmatig teruggrijpen op het vermoeden van Goldbach als voorbeeld van een open vraag. Mocht Goldbach's vermoeden bij het lezen van dit artikel al beslist zijn, dan zijn er ongetwijfeld nog genoeg andere vermoedens die als voorbeeld kunnen dienen.

Logica en constructie

In overzichtelijke situaties, zoals we die in de werkelijkheid tegenkomen, zijn eenduidige uitspraken wel of niet waar. Dat inzicht maakt onderdeel uit van de logica die we in dergelijke situaties hanteren. Het wiskundig universum is echter niet overzichtelijk, het is onaf, en het is oneindig, en laat zich daarom niet zomaar begrijpen met de logica die we ontleend hebben aan de werkelijkheid. Voor Brouwer gaat logica niet vooraf aan de wiskunde, maar moet er uit worden afgeleid. Het constructieve karakter van zijn wiskunde heeft directe gevolgen voor de te hanteren logica. De logische voegwoorden krijgen bij hem een constructieve inhoud. Voor de twee uitspraken uit het voorafgaande is die constructieve betekenis als volgt:

1. De uitspraak $A \vee \neg A$ betekent: ik heb een bewijs voor A of ik heb een bewijs voor $\neg A$. Aangezien dit bij het vermoeden van Goldbach niet het geval is, is Goldbach $\vee \neg$ Goldbach dus géén stelling.
2. De uitspraak $\forall n (n \text{ is even} \vee n \text{ is oneven})$ betekent: ik heb een methode waarmee ik voor elk natuurlijk getal n beslissen kan of n even is, dan wel oneven.

De tweede uitspraak is wel een stelling, de benodigde methode is te halen uit het inductiebewijs dat we boven gaven voor deze uitspraak. Die methode kunnen we ook geven in de vorm van een functie f , bijvoorbeeld met het volgende recursieve voorschrift:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(n+1) &= 1 - f(n) \end{aligned}$$

Deze f is dan een constructie die berekent of n even is of oneven, hetgeen wordt gemeld met een 0, respectievelijk een 1.

Nu uitspraken een constructieve inhoud hebben kunnen ze ook gebruikt worden als basis voor nieuwe constructies. Omdat we weten: $n \text{ is even} \vee n \text{ is oneven}$, kunnen we een

functie g maken met het voorschrift:

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{als } n \text{ is even;} \\ 1, & \text{als } n \text{ is oneven} \end{cases}$$

Die functie is effectief dezelfde als de zojuist gedefinieerde functie f .

En daarom juist wijzen we een definitie als de volgende af:

$$x = \begin{cases} 0, & \text{als Goldbach} \\ 1, & \text{als } \neg \text{Goldbach} \end{cases}$$

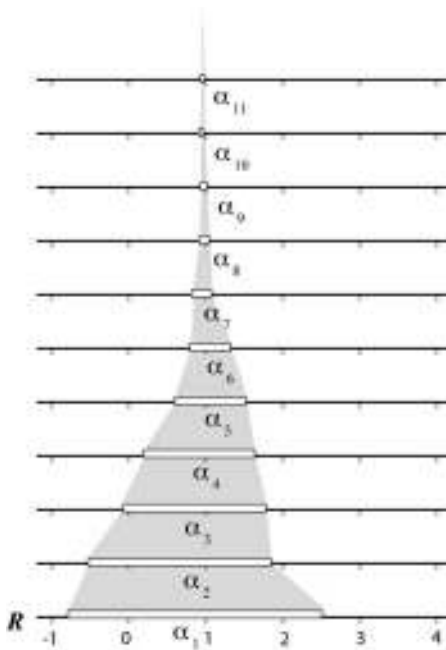
want om x te construeren moeten we eerst beslissen welk van beide gevallen geldig is, maar vooralsnog hebben we geen procedure om dat te doen. Dit ding x is geen wiskundig object, en dus ook geen natuurlijk getal, want een natuurlijk getal kunnen we binnen een afzienbaar aantal eenduidige stappen maken.

Dubbele ontkenning

Nu we logische formules lezen als mededelingen met een constructieve inhoud ontstaat er ook een wezenlijk verschil tussen een bewering ' A ' (A is waar) en de bewering ' $\neg \neg A$ ' (A is niet onwaar). Stel je zoekt een oplossing voor een bepaalde vergelijking $h(x) = 0$, dan ben je gesteld voor de vraag: ' $\exists x h(x) = 0$?'. Het kan zijn dat de aanname dat er géén x bestaat tot een tegenspraak leidt; dan weten we dus dat het niet zo is dat er geen nulpunt is, oftewel $\neg \neg \exists x h(x) = 0$. Maar dat bewijs op zich levert nog geen methode om dat nulpunt te vinden. Pas als we het nulpunt hebben, oftewel een constructie kunnen aangeven die het nulpunt levert, dan kunnen we beweren $\exists x h(x) = 0$.

De reële getallen

De stappen die we eerder aanbrachten op het continuüm zijn van een willekeurige maat,



Figuur 1 Een 'reëel getal'

we zouden die stappen ook kleiner of groter hebben kunnen kiezen. Het is een wezenlijk kenmerk van het continuüm dat het er lokaal na uitvergroting altijd weer net zo uitziet als voorheen. Zo kunnen we het stuk tussen 0 en 1 onderverdelen in tien kleinere stukjes, die we op hun beurt ook weer kunnen onderverdelen in 10 nog kleinere, enzovoorts, zodat we een schaalverdeling krijgen die met factor 10 omlaag steeds verder verfijnt. (We hadden natuurlijk net zo goed een andere basis dan 10 kunnen kiezen.) Al die schaalstreepjes zijn eindige decimaalbreuken en vullen het continuüm allerminst op, we kunnen terwijl we de schaal verfijnen immers steeds tussen twee maatstreepjes gaan zitten, bij uitvergroting zien we dat daar altijd weer genoeg ruimte voor is. Zo kunnen we al afdalend van verfijning naar verfijning een plaats aanwijzen in het continuüm met almaar toenemende nauwkeurigheid. Die aanwijzing bestaat dan uit opeenvolgende paren van maatstreepjes waartussen we hebben besloten te blijven. Deze weg komt nooit tot een einde omdat we na uitvergroting altijd weer voor in wezen dezelfde overweldigende keuzeruimte staan. Zo komen we tot het begrip 'reëel getal', als een eindeloze rij intervallen (dat wil zeggen paren maatstreepjes), waarbij de volgende altijd bevat is in de voorgaande en de breedte gedurig inkrimpt om smaller te worden dan elke verfijning van de schaal, zie Figuur 1.

Dit is theoretisch wat ons te wachten staat als we een bepaalde lengte volmaakt nauwkeurig zouden willen opmeten. Vergeten we even de kwantumfysica dan is die lengte al-

tijd nog nauwkeuriger op te meten, omdat we altijd weer verder kunnen uitvergroten. Het is ook het beeld dat we oproepen als we een reëel getal voorstellen met een eindeloze rij decimalen. In elk stadium geeft de nog onvoltooide rij een gebied aan waarbinnen we verder zullen blijven. Hebben we bijvoorbeeld 3,1415 dan beperken we ons daarmee tot het gebied tussen 3,141 en 3,142. Bij de volgende decimaal 3,14159 is dit verder ingeperkt tot 3,1415 en 3,1416. (Waarmee niet gezegd is dat deze twee concepten geheel samenvallen.) Hierbij laten we het beeld los van reële getallen als minuscule stipjes zonder omvang die tezamen de getallenlijn te vormen. Een reëel getal is niet een punt zonder afmeting, maar een voortschrijdend proces van inperking dat nooit voltooid is, waarbij we steeds scherper een deel van het continuüm afbaken. Dit concept strookt ook met het karakter van elk concreet reëel getal waar we in de wetkunde mee rekenen; wortels, machten, logaritmen, goniometrische waarden constanten als π , e en γ , we kennen er — enkele bijzondere rationale waarden daargelaten — altijd maar een beginstukje van. Voor een platonist is π een oneindige rij decimalen die ergens in een gouden boek zijn opgeschreven, in de praktijk echter is het een eindig aantal decimalen dat we uitgerekend hebben en dat op dat moment voldoet voor onze berekeningen.

De onderlinge ligging van getallen

Bekijken we de onderlinge ligging van twee van zulke reële getallen dan kunnen zich verschillende mogelijkheden voordoen.

1. $a = b$

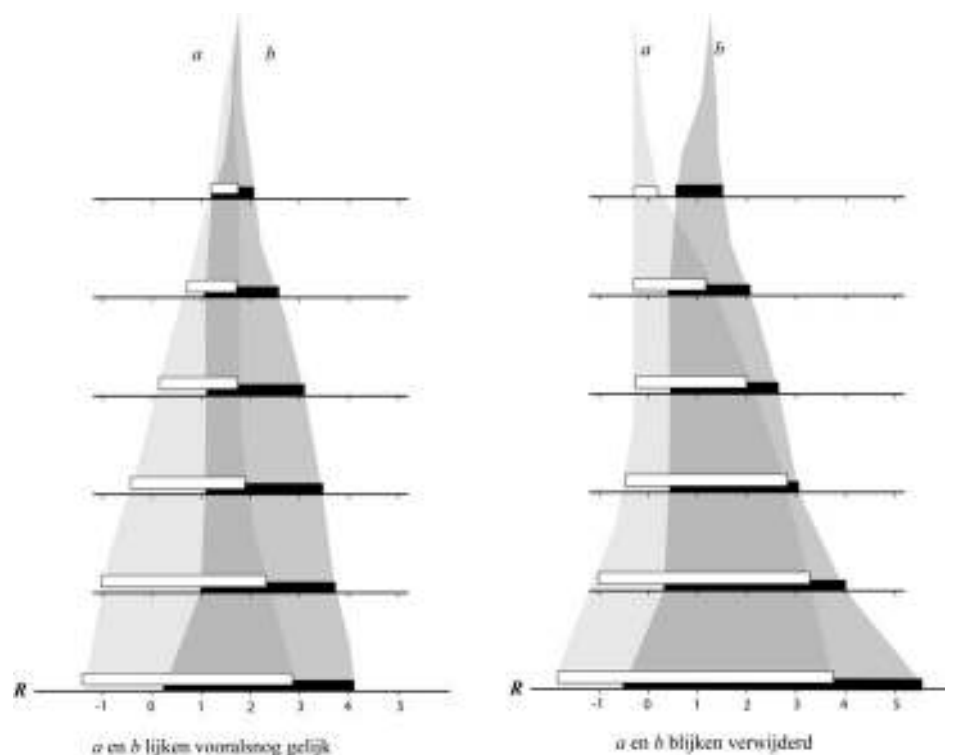
Als we weten dat de intervallen in elk stadium blijven overlappen, dan zijn de twee plaatsen die we aanwijzen niet van elkaar te onderscheiden en hebben we dus met hetzelfde reële getal te maken. Zie Figuur 2, links.

2. $a \neq b$

Als we weten dat op een bepaald moment de intervallen losraken, dan zijn a en b verschillende reële getallen. Zulks is rechts in Figuur 2 gevisualiseerd. Blijkbaar weten we dan in welk stadium zij losraken en kunnen dan aan de bijbehorende intervallen zien welke links en welke rechts ligt, dus beslissen $a < b$ of $a > b$. We noemen een tweetal getallen dan *verwijderd* van elkaar, notatie $a \# b$.

3. $a \neq b$

Het kan ook zijn dat we alleen weten dat de intervallen niet altijd zullen blijven overlappen, maar geen aanwijzing hebben in welk stadium ze van elkaar losraken. De getallen zijn dan in elk geval ongelijk (anders zouden ze altijd blijven overlappen) maar we hebben niet voldoende kennis om te besluiten dat ze van elkaar verwijderd

Figuur 2 De onderlinge ligging van reële getallen a en b .

zijn. In feite is $a \neq b$ hetzelfde als $\neg \neg a \# b$. De klassieke wiskunde kent de zogenaamde trichotomie die behelst dat voor reële getallen a en b er precies drie mogelijkheden zijn: $a < b$, $a = b$ of $a > b$. In bewijsvoering is dit een graag toegepaste gevalonderscheiding. Intuitionistisch is een dergelijke opsplitsing niet mogelijk omdat de onderlinge ligging van reële getallen niet altijd te bepalen is. We geven twee voorbeelden.

Een zwevend getal

De situatie kan zich voordoen dat we van een getal niet weten waar het zich ten opzichte van 0 bevindt, we spreken dan van een zwevend getal. Dat kan zijn omdat we niet weten of $a = 0 \vee a \neq 0$, zoals bij het volgende getal g dat we construeren op basis van het vermoeden van Goldbach. De rij intervallen voor g vormen we stap voor stap als volgt:

- Onderzoek $G(n)$, te beginnen bij $n = 1$.
- Zolang $G(n)$ voor de oplopende n nog geldt, laat je het interval inkrimpen rond 0, met $y_n = [0, 2^{-n}]$.
- Als je echter stuit op een k waarvoor $G(k)$ niet geldt, laat je het interval voor verdere n inkrimpen rond 2^{-k} : $y_n = [2^{-k} - 2^{-n}, 2^{-k}]$

Als er nooit een Goldbach-tegenvoorbeeld opduikt komt g uit op 0. Maar omdat we tevoren niet weten of er toch tegenvoorbeeld zal komen, blijven we in die situatie over de verdere ontwikkeling van k steeds even onzeker. In Figuur 3 is in het linkerdiagram de trechter boven y_k daarom licht van kleur. Hebben we eenmaal een tegenvoorbeeld gevonden, dan ligt de ontwikkeling van g verder geheel vast. Om dit te benadrukken is de trechter rechts donker van kleur gemaakt. Verschijnen er wel tegenvoorbeelden dan blijft het getal g steken op zekere 2^{-m} en is dus ongelijk aan 0, zie Figuur 3. Zolang het Goldbach's vermoeden open blijft, zal ook de ligging van g t.o.v. 0 ongewis zijn, en mogen we niet stellen dat $g = 0 \vee g \neq 0$.

Nog een zwevend getal

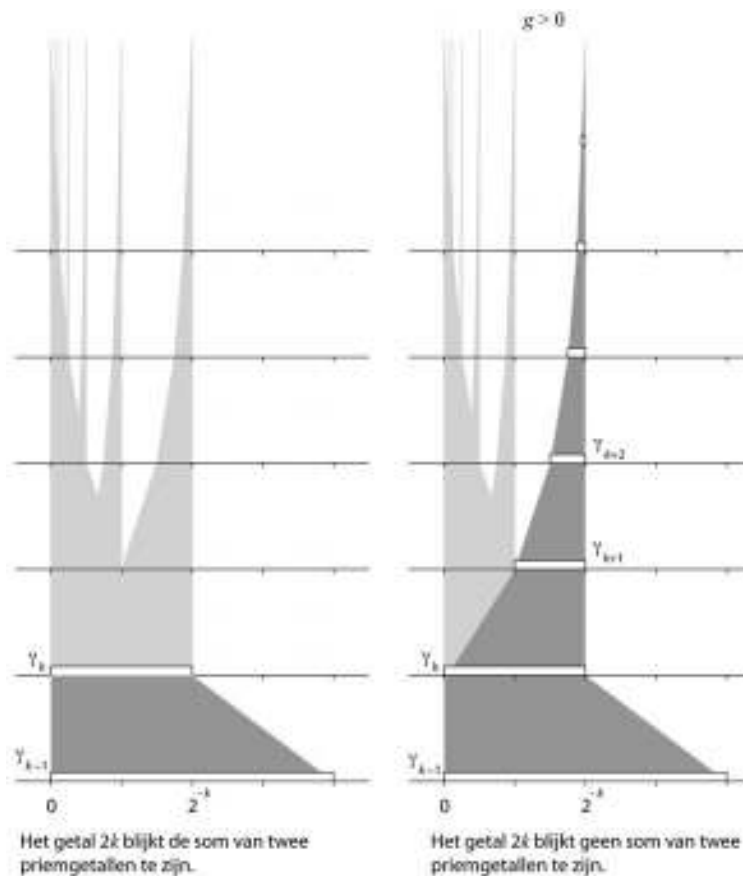
Op een vergelijkbare manier kunnen we een zwevend getal d construeren waarvan niet uitgemaakt kan worden of $d \leq 0 \vee d \geq 0$. Daarbij baseren we ons op de decimaalontwikkeling van het getal π . Op dit moment zijn er van π zo'n 10^{12} cijfers berekend, zonder dat daarin een duidelijk patroon zichtbaar is geworden. Vooralsnog zijn er geen series van dezelfde cijfers gevonden langer dan ongeveer tien. We stellen nu de volgende open vraag: komt in de decimaalontwikkeling van π eerder een aaneengesloten rijtje van hon-

derd nullen voor of eerder een rijtje van honderd negens. Het is duidelijk dat de twee series niet gelijktijdig kunnen optreden. Op basis van deze vraag construeren we het volgende getal d . Begin de rij intervallen van d met $\delta_1 = [-1/2, 1/2]$ Zolang je noch honderd opeenvolgende nullen, noch honderd opeenvolgende negens bent tegengekomen in de decimaalontwikkeling van π laat je het interval symmetrisch rond 0 inkrimpen. Zie je op een gegeven moment in de decimaalontwikkeling van π op de k -de decimaal de laatste nul in een rijtje van honderd nullen, zet dan de linkergrens van het interval vast en laat het interval verder daarheen inkrimpen (geval één). Kom je daarentegen eerst een rijtje van honderd negens tegen eindigend op de k -de decimaal, dan dwing je de rij intervallen naar rechts (geval twee). In formulevorm:

$$\delta_n = \begin{cases} [-2^{-k}, -2^{-k} + 2^{-n}], & \text{geval één} \\ [2^{-k} - 2^{-n}, 2^{-k}], & \text{geval twee} \\ [-2^{-n}, 2^{-n}], & \text{anders} \end{cases}$$

De constructie van het getal d kan de lezer zich voorstellen als in Figuur 4.

Zou je nu kunnen beslissen of $d \leq 0 \vee d \geq 0$ geldt, dan zou je al weten welk van beide series in elk geval niet als eerste komt.



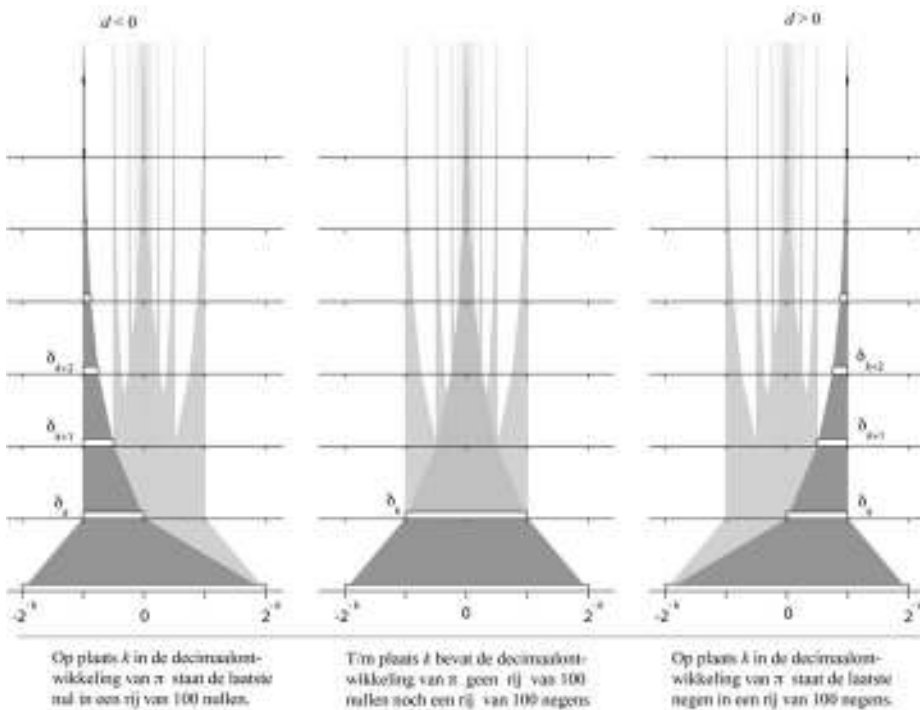
Figuur 3 Zwevend getal g . Tot $2k$ blijkt elk even getal de som van twee priemgetallen te zijn.

In Figuur 4 is de constructie van het getal d gevisualiseerd.

Brouwer gaf een soortgelijk voorbeeld [5] om te laten zien dat niet elk reëel getal een decimaalontwikkeling heeft (1920). Beschouw daartoe het getal $d + 1/10$, waarbij d het bovengenoemde zwevende getal is. Is de eerste decimaal van dit getal een 0, dan begint de decimaalontwikkeling met 0,0 en is het getal $d + 1/10$ blijkbaar niet groter dan $1/10$, dus $d \leq 0$. Is de eerste decimaal daarentegen een 1, dan ligt $d + 1/10$ blijkbaar niet onder $1/10$, en is dus $d \geq 0$. Maar we hadden d juist geconstrueerd als een voorbeeld waarvoor de beslissing $d \leq 0 \vee d \geq 0$ buiten ons bereik ligt.

Functionies

Met de reële getallen kunnen we rekenen zonder problemen. Willen we bijvoorbeeld twee getallen a en b bij elkaar optellen, dan moeten we een rij intervallen construeren voor de uitkomst $a + b$. Die intervallen kunnen we bepalen vanuit de intervallen van a en van b . Willen we bijvoorbeeld een interval voor $a + b$ waarvan de grenzen niet meer dan $1/10$ uiteenliggen, vraag van a en b dan intervallen waarvan de grenzen minder dan $1/20$ uit elkaar liggen, zeg $[a_l, a_r]$ en $[b_l, b_r]$. Het in-



Figuur 4 Zwevend getal d . Gesteld dat tot plaats k de decimaalontwikkeling van π geen rij van 100 nullen noch een rij van 100 negens bevat.

terval $[a_l + b_l, a_r + b_r]$ voldoet dan aan de gestelde eis. Bij een functie van reële getallen naar reële getallen, construeren we beginstukken van het beeld op basis van beginstukken van het origineel, zowel x als $f(x)$ zijn immers reële getallen en dus onaf. Wil je $f(x)$ met een bepaalde nauwkeurigheid weten, dan is dat mogelijk mits je x met een bepaalde nauwkeurigheid aanlevert. Visueel kunnen we een reëelwaardige functie voorstellen als een rij grafieken waarbij de lijn van de grafiek met steeds scherpere pen getrokken wordt, zie Figuur 5.

Geen sprongen

De bekende functies uit de analyse zoals polynoomfuncties, e-macht, logaritme, en goniometrische functies zijn constructief en stellen ons niet voor problemen. Treffen we een x -waarde die zweeft, dan kunnen we het beeld gewoon ook laten zweven, de aard van de reële getallen is dat we $f(x)$ stap voor stap kunnen bijstellen, al naargelang we x beter in beeld hebben. Dit gaat echter mis als we voor de y -waarde een abrupte keuze willen maken, zoals het geval was bij het bepalen van de eerste decimaal van het eerdergenoemde getal d . We lichten dit toe door nog een ander voorbeeld uit te werken. Stel: we willen een functie S maken op het interval $[-1, 1]$ met

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x \leq 0; \\ 1, & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Neem nu het eerder genoemde zwevende getal g waarvan niet beslist kan worden of $g = 0 \vee g \neq 0$. Het beeld $S(g)$ moet tot op elke nauwkeurigheid bepaald kunnen worden, laten we zeggen dat we voor het beeld van g een interval willen met een breedte niet groter dan $1/2$. Omdat 0 en 1 te ver uit elkaar liggen is S dan genoodzaakt het beeldinterval voor $S(g)$ hetzij bij 0 hetzij bij 1 te kiezen. Nu mag S van ons vragen om een interval van g dat flink smal is. De breedte van dat interval correspondeert met een n tot waar Goldbach dan gecontroleerd is. Op grond van die n moet S dan beslissen of het beeld van g in de buurt van 0 zal liggen dan wel in de buurt van 1. Maar dan zou S op grond van die eerste n getallen het vermoeden van Goldbach moeten kunnen beslissen, waarvan we aannamen dat dat (nog) niet mogelijk is.

Twee centrale stellingen

Dat reëelwaardige functies geen sprongen kunnen vertonen hebben we aannemelijk gemaakt met een beroep op de aard van het reële getal als eindeloze keuzerij, en op een notie van wat functies uitvoerbaar of 'constructief' maakt. Daarbij namen we stilzwijgend aan dat de functie totaal is, dat wil zeggen voor alle reële getallen gedefinieerd moet zijn. In de aangevoerde argumenten ligt in feite besloten dat een reëelwaardige functie wel continu moet zijn om uitvoerbaar te zijn. Binnen het bestek van dit artikel voert het te ver een technische uitwerking te geven, we

vermelden derhalve zonder bewijs de twee stellingen die de essentie van reëelwaardige functies vastleggen:

Stelling 1: Elke totale functie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{N}$ is constant.

Stelling 2: Elke totale functie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is continu.

Het is interessant de eerste stelling te bezien in relatie tot de verzamelingenleer van Cantor waarin steeds grotere verzamelingen worden opgebouwd door machtsverzamelingen te nemen, dus verzamelingen van alle deelverzamelingen van een bepaalde verzameling. Bij Cantor is de machtsverzameling altijd 'groter' dan de verzameling zelf. De machtsverzameling van A kunnen we voorstellen als alle functies van A naar $\{0, 1\}$. Uit stelling 1 volgt dat voor intuïtionisten deze machtsverzameling van $\mathbf{R}$ maar twee elementen heeft, namelijk de functie f met constant $f(x) = 0$ en die met constant $f(x) = 1$.

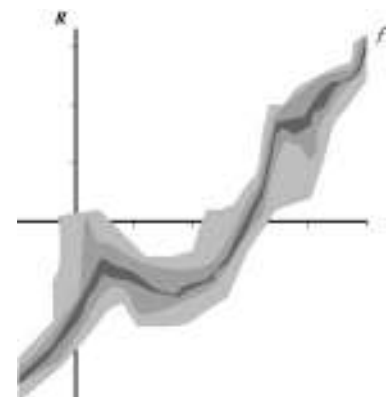
Geen tussenwaardestelling

Een ander mooi resultaat over reëelwaardige functies betreft zogenaamde tussenwaarden van functies. In de klassieke analyse hebben we

Tussenwaardestelling Gegeven een continue functie $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{R}$ met $f(0) < 0$ en $f(1) > 1$, dan is er een $x \in \mathbf{I}$ met $f(x) = 0$.

Hier staat $\mathbf{I}$ voor het eenheidsinterval $[0, 1]$. Intuïtionistisch geldt deze stelling niet. We zullen laten zien dat het vinden van zo'n nulpunt net zo veel voorzienigheid vergt als het beslissen of Goldbach wel of niet waar is. Om niet al te zeer verstrikt te raken in technische details beschouwen we de functie: $f : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ met $f(x) = \min(x - 1, 0) + \max(0, x - 2) + d$ waarbij d het zwevende getal is waarvan niet achterhaald kan worden of $d \geq 0 \vee d \leq 0$.

Links in Figuur 6 zien we wat er met deze functie aan de hand is. In het gebied van 1 tot 2 bevindt f zich steeds rond de x -as.



Figuur 5 Functie

Terwijl de decimalen van π worden afgezocht naar een rij van honderd nullen dan wel honderd negens krimpt het beeld steeds verder en trekt zich van 1 tot 2 steeds dichter rond de x -as samen. Mochten zich voor het eerst een rijtje van honderd nullen voordoen in de decimaalontwikkeling van π , dan trekt d de grafiek iets omlaag en zal er alleen nog een nulpunt ontstaan rond 1 (zie rechtsboven). Mocht daarentegen eerder een rijtje van honderd negens verschijnen dan tilt d de grafiek iets omhoog en komt het enige nulpunt helemaal bij 2 (zie rechtsonder). Een onvoorspelbaar kleine verschuiving in de y -richting duwt het nulpunt zo een hele eenheid van zijn plaats. Wil nu de ligging van het nulpunt bepaald worden dan moet al gekozen worden hetzij in de buurt van 1 de gaan zitten, hetzij bij 2, maar de kennis om dat te doen is dezelfde die nodig is om te beslissen of $d \geq 0 \vee d \leq 0$.

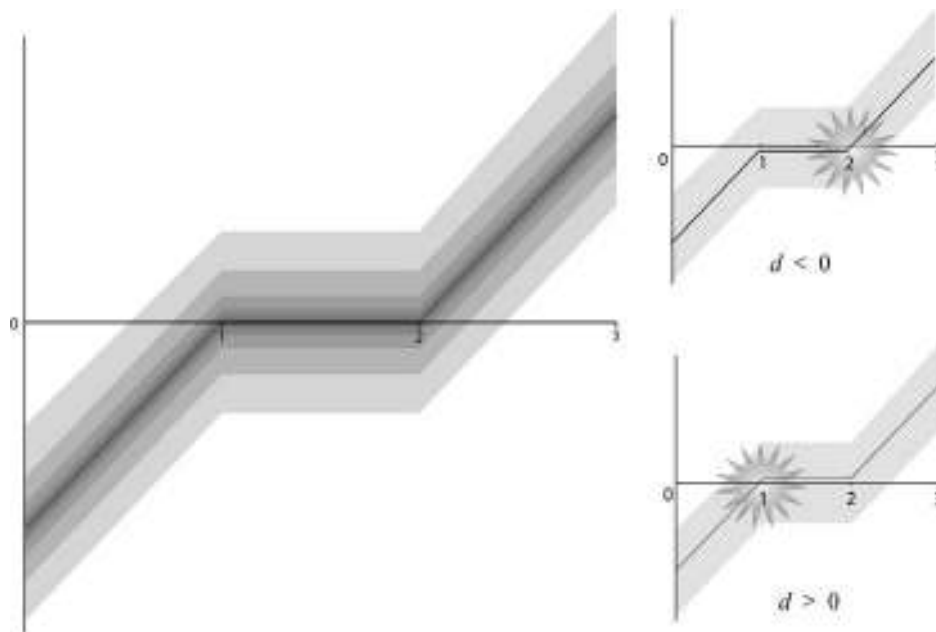
Tegenover dit negatieve resultaat staan twee positieve stellingen:

- Voor belangrijke deelklassen van functies is de tussenwaardestelling intuïtionistisch wel geldig. Stijgt f monotoon, of is f bijvoorbeeld een polynoomfunctie, dan is er wel een constructie om een nulpunt te vinden.
- Bij elke functie kan een bijna-nulpunt gevonden worden: dat wil zeggen een x waarvoor $f(x)$ minder dan 10^{-n} van 0 verschilt.

De bovenstaande weerlegging van de tussenwaardestelling heeft ook in de klassieke wiskunde een plaats. Daar toont deze functie aan dat er geen continue operatie op $C(\mathbb{I}, \mathbb{I})$ kan bestaan die een nulpunt van f geeft.

Geen dekpuntstelling

In 1952 schreef Brouwer een artikel [1] waarin hij zijn eigen dekpuntstelling intuïtionistisch weerlegt. De situatie is vergelijkbaar met die bij de tussenwaardestelling. Het vinden van een dekpunt bij een willekeurige continue afbeelding $f: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{I}^k$ veronderstelt een constructie om voor een reëel getal x te kunnen beslissen $x \geq 0 \vee x \leq 0$. Omdat die construc-



Figuur 6 Tussenwaarde

tie niet bestaat blijktens getallen als d is het dekpunt niet vindbaar. Ook hier is er echter wel een bijna-dekpunt te vinden, een punt dat minder dan 10^{-n} van zijn plaats gaat. Brouwer laat in het artikel zien hoe dit voor dimensie $k = 2$ gedaan kan worden.

Deels onbekende getallen

De intuïtionistische analyse behandelt reële getallen als onaffe objecten. De grootheden die optreden in dagelijks rekenwerk zijn meestal ook onaf. Dat kan zijn omdat de grootheid een lengte is die altijd nog nauwkeuriger opgemeten had kunnen worden. Het kan ook een grootheid zijn die wel geheel is of rationaal maar waarvan de precieze getalwaarde schommelt dan wel niet vastgesteld kan worden. Denk aan getallen als: het aantal inwoners van Nederland, de gemiddelde leeftijd van die Nederlanders, de leeftijd van de aarde. Ook bij deze grootheden zien we dezelfde kwesties optreden als bij de intuïtionistische getallen. Als N het aantal in

woners van Nederland is, dan is het moeilijk vast te stellen of $N \geq 16.421.651$ dan wel $N \leq 16.421.651$, dat zal per minuut kunnen verspringen en ook gevoelig zijn voor hoe we het exacte moment van geboorte of sterfte definiëren. Zijn we in een berekening uitgekomen op $x \sim 0,25$, dan ligt x blijkbaar tussen $245/1000$ en $255/1000$ en is niet meer vast te stellen of $x \geq 1/4 \vee x \leq 1/4$. In de schoolwiskunde hinken we vaak op twee gedachten. Enerzijds is er de exactheid uit de klassieke analyse, anderzijds willen we dat de leerling zich realiseert dat de getallen slechts benaderingen zijn. De zaak loopt regelmatig door elkaar, bijvoorbeeld:

1. "Los op voor $x \in [0, \pi]$ $\sin(1/2x) < 0,8$." Wat is hier het verschil met de vraag $\sin(1/2x) \leq 0,8$?
2. "Het gewicht van appels (in grammen) is bij benadering normaal verdeeld met $\mu = 48$ en $\sigma = 12g$." Moet hier continuïteitscorrectie worden toegepast?

Referenties

- 1 L.E.J. Brouwer, 'Door klassieke theorema's gesignaleerde pinkern die onvindbaar zijn', Kon. Nederlandse Academie van Wetenschappen. Proc. Ser. A55 (1952), pp. 443–445.
- 2 L.E.J. Brouwer, 'Over de grondslagen der wiskunde', proefschrift, Uitgegeven in epsilon-reeks L.E.J. Brouwer en de grondslagen der wiskunde, D.van Dalen, deel 51.
- 3 L.E.J. Brouwer, 'Over de onbetrouwbaarheid der logische principes', Tijdschrift voor Wijs-
- 4 L.E.J. Brouwer, 'Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten', Verhandelingen KNAW in 'Brouwer Collected Works', ed. A.Heyting, North Holland, Amsterdam.
- 5 L.E.J. Brouwer, 'Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?', Mathematische An-

nalien vol 83, nr 3-4 september 1921 (via www.springerlink.com/content/j610803w2l7x4192)

- 6 Anne Troelstra, Dirk van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, volume 1, North Holland, Amsterdam, 1988

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Adres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: wgreview.win@tue.nl

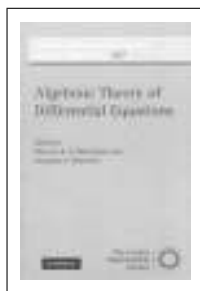


Alina Carmen Cojocaru en M. Ram Murty
**An Introduction to Sieve Methods
and their Applications**

Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006
London Mathematical Society Student Texts 66
224 p., prijs £25.99
ISBN 0-521-61275-6

Wiskundige zeven vormen een krachtig, maar helaas vaak ook technisch gecompliceerd, hulpmiddel in de getaltheorie. Het basisvoorbeeld is de zeef van Eratosthenes. We bekijken alle gehele getallen groter dan 1. In de eerste stap zeven we alle 2-vouden weg. Het kleinste getal dat nog over is, is 3. Vervolgens zeven we de 3-vouden weg. Het kleinste getal dat nog over is, is 5. Enzo voort. Over blijven de priemgetallen. Deze basis-zeef heeft helaas niet zulke gunstige wiskundige eigenschappen en voert tot een zwakke afschatting van $\pi(x)$, het aantal priemgetallen $\leq x$. Men kan vaak ook zo zeven, dat we andere gewenste getallen overhouden. Tegenwoordig, ruim tweeduizend jaar na Eratosthenes, zijn er vele zeven ontwikkeld, met als bekendste Brun's zeef, de grote zeef en Selberg's zeef. Door de zeef van Eratosthenes met de zogenaamde Rankin-truc te combineren, blijkt die gemodificeerde zeef veel krachtiger dan gedacht. Dat inzicht is mede te danken aan de tweede auteur en wordt beschreven in hoofdstuk 5. Een blik op het standaardwerk over de zeeftheorie (*Sieve theory*, Halberstam and Richert) leert dat het opmerkelijk technisch is. Het boek van Cojocaru en Ram Murty daarentegen beoogt een inleiding te zijn. De verschillende zeven worden vaak eerst in minder algemene vorm beschreven en met vele voorbeelden geïllustreerd. Als een test voor de kracht van de zeefmethode wordt meestal bekeken wat voor afschatting de zeef geeft voor $\pi(x)$. De voorbeelden bestrijken een opmerkelijk breed scala: het tellen van irreducibele polynomen in $Z[x]$, kwadratische waarden van polynomen, het normale aantal priemdelers van een polynoom, Schnirelman's stelling (dat er een c_0 bestaat zodat ieder getal als som van ten hoogste c_0 priemgetallen kan worden geschreven), af-schattingen voor priemtwelingen en de afleiding van bekende resultaten over de verdeling van priemgetallen in rekenkundige rijen zoals de stellingen van Brun-Titchmarsh, Barban-Davenport-Halberstam en Bombieri-Vinogradov. Het laatste hoofdstuk gaat over mogelijke toekomstige ontwikkelingen van de grote zeef, in het bijzonder die waarbij een verbinding met de theorie van modulaire vormen en spectraaltheorie gelegd wordt. In dat hoofdstuk wordt natuurlijk veel met de handen gewapperd (hand-waving), maar het is desalniettemin interessant. Ieder hoofdstuk wordt afgesloten met een uitgebreide verzameling van opgaven.

Het boek vind ik zeer goed leesbaar: het slaagt erin gedeeltelijk behoorlijk technische materie voor een groter publiek toegankelijk te maken. Daar het boek een aantal zeer recente ontwikkelingen in de zeeftheorie beschrijft, is het ook interessant voor degenen, die al vertrouwd met zeeftheorie zijn. Al met al kan ik het van harte aanbevelen. Voor de lezer die, aangespoord door dit boek, wat geavanceerder materiaal wil bekijken, kan ik tenslotte nog wijzen op de boeken van Greaves (*Sieves in number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2001) en Harman (*Prime detecting sieves*, London Mathematical Society Monographs, 2007). *Pieter Moree*



Malcolm MacCallum, Alexander Mikhailov (eds.)

Algebraic Theory of Differential Equations

Cambridge: Cambridge University Press, 2009
London Mathematical Society Lecture Note

Ser. 357

240 p., prijs £40.00

ISBN 9-521-72008-3

This book presents seven essays based on lectures given during a workshop in July and August 2006 at Heriot-Watt University, Edinburgh. The interest in algebraic approaches to differential and difference equations is still increasing and each year there are one or two conferences on these subjects. The table of contents shows a surprising diversity of themes. Nevertheless, many topics such as nonlinear ordinary differential equations, the Galois groupoids of Malgrange and Umemura, Painlevé equations, arithmetic of differential equations, Lie symmetries, etc., did not find their way into this book. Here is a brief indication of the contents of the only loosely related essays in the book.

By now well established, the Galois and Picard–Vessiot theories of *linear differential equations* are presented in a readable and didactic way by Singer. The last part of this essay deals with fairly new work by the author, Cassidy, Buium et al. on *parameterized* Picard–Vessiot theory and differential algebraic groups. For more details on this topic, the original paper is recommended. In *Final Comments* and the bibliography, an indication is given of the present state of the art.

The second essay, written by Ulmer and Weil, presents various methods of computing (say, in Maple) closed form solutions, such as rational functions, algebraic functions and exponential functions, of *ordinary linear differential equations*. Kovacic’s algorithm is presented.

Tsarev’s essay *Factorization of Linear Differential Operators and Systems* starts by showing that the 19th century method for factoring an ordinary linear differential operator does not extend to partial linear differential operators. Tsarev presents methods inspired by Darboux and Dini, namely sequences of Laplace transformations and Dini transformations, to solve (or to factorize) *special systems of linear partial differential operators*.

The essay *Introduction to the algorithmic D-module theory* by Leykin is again a rather different story. It concerns modules over the Weyl algebra D , Gröbner bases, holonomic modules, Bernstein–Sato polynomials, A -hypergeometric systems and local cohomology.

A partial differential equation of the form $\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x^k})$ where f is a polynomial, is called integrable if the Lie algebra of its (infinitesimal) symmetries is infinite dimensional. In the essay *Symbolic representation and classification of integrable systems* by Mikhailov, Novikov and Wang, symbolic representations of these equations are explained. Integrability is translated into properties of symmetric polynomials. Using these, lists of integrable equations are obtained.

In *Searching for integrable (P)DEs using algebraic conditions: two examples*, Hietarinta gives a list of what the term ‘integrable system’ could mean. For the first example: ‘*Louville integrability*’ (or complete integrability) for a Hamiltonian system of the form $H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$, a computer search of invariants is

discussed. The second example concerns integrability for soliton equations in Hirota bilinear form.

Around Differential Galois Theory by Pillay is a rather short essay because his expository papers on this subject, model theory of differential equations, were published at the same time. The main theme is the equation $d\ln_G(A) := A^{-1}\partial A = B$, where G is a D -group (i.e., Buium’s differentially algebraic group). Model theory, differentially closed fields, definable groups form the background for a Galois theory of linear and non-linear differential equations, including Picard–Vessiot extensions and Kolchin’s normal extensions. The relation with Umemura’s Galois theory is being investigated at present.

Marius van der Put



Alexandra Shlapentokh

Hilbert’s Tenth Problem Diophantine Classes and Extensions to Global Fields

New Mathematical Monographs 7

Cambridge: Cambridge University Press, 2007

320 p., prijs £ 61.00

ISBN 0-521-83360-4

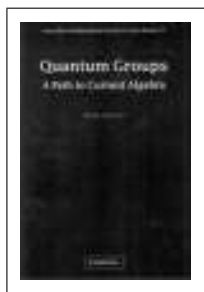
Hilberts Tiende Probleem (H10) vraagt, in zijn oorspronkelijke vorm, naar het bestaan van een algoritme dat voor een willekeurige diophantische vergelijking met gehele coëfficiënten beslist of deze vergelijking oplossingen heeft in de ring der gehele getallen. In 1972 bewees Matijasevich, op basis van werk van Davis, Robinson en Putnam, dat een dergelijk algoritme niet kan bestaan. Het is uiteraard zinvol om Hilberts Tiende Probleem ook voor andere domeinen te stellen. Afhankelijk van het domein kan H10 een positief of negatief antwoord hebben. Zo volgt uit de resultaten van Tarski dat H10 voor het lichaam van de reële getallen een positief antwoord heeft; er bestaat met andere woorden een algoritme dat voor een willekeurige diophantische vergelijking beslist of deze vergelijking oplosbaar is over de reële getallen.

In dit boek wordt ingegaan op twee belangrijke open vragen: wat is de status van H10 voor $\mathbb{Q}$ of een willekeurig getallenlichaam (dat wil zeggen een eindige algebraïsche uitbreiding van $\mathbb{Q}$)? En: wat is de status van H10 voor een willekeurige getallenring (dat wil zeggen een ring van gehele in een getallenlichaam)? Alhoewel beide vragen nog steeds onopgelost zijn, is er in de afgelopen 30 jaar heel wat onderzoek naar gedaan, onder meer door deze auteur. In het boek tracht de auteur dit onderzoek op een overzichtelijke en uniforme manier te presenteren.

Dit boek is zeker geschikt voor onderzoekers die binnen dit vakgebied werkzaam zijn. Voor hen kan het boek dienst doen als een naslagwerk waarin een heleboel gesofisticeerde en technische resultaten in verband met diophantische definieerbaarheid van arithmetische relaties te vinden zijn. Voor wie een eerste (of tweede) kennismaking met dit onderzoeksgebied wenst, is dit boek wellicht niet geschikt. Zo introduceert de auteur relatief eenvoudige concepten op een manier die hun maximale toepasbaarheid moet garanderen. Dit zorgt er echter voor dat de essentie van deze ideeën bedolven wordt onder een overdaad aan technische details (het kostte deze lezer alvast de nodige tijd om de omschrijving van H10 en de daaropvolgende ‘Remark’ (p. 37–38) te ontcijferen). Ook het feit dat de auteur weinig of geen moeite doet om het onderzoek te kaderen binnen het ruimere onderzoeksge-

bied van de modeltheorie van algebraïsche structuren, zorgt er voor dat het voor de geïnteresseerde leek moeilijk is om de relevantie van bepaalde technische resultaten precies in te schatten. Voor deze lezer is het aan te raden om naast dit boek ook het artikel *Undecidability in number theory* van B. Poonen (*Notices Amer. Math. Soc.* 55 (2008), 344–350) of het boek *Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry* onder redactie van Denef, Lipschitz, Pheidas en Van Geel (*Contemp. Math* 270) bij de hand te hebben.

Karim Zahidi



Ross Street
**Quantum Groups
A Path to Current Algebra**

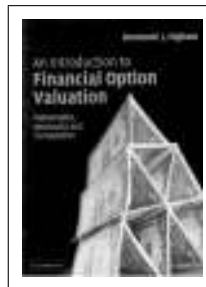
Cambridge: Cambridge University Press, 2007
Australian Mathematical Society Lecture Series
19

141 p., prijs £30.00
ISBN 0-521-69524-4

Het doel van Streets boek is studenten in aanraking te brengen met algebraïsche structuren en denkwijzen die meestal niet in een standaard algebra-college voorkomen. Het gaat om een categoriale aanpak van algebra's, coalgebra's, bialgebra's en Hopf-algebra's, waarbij de auteur quantumgroepen gebruikt om deze begrippen aan op te hangen. In het begin van dit bescheiden boekje (slechts 141 pagina's) wordt dit goed en leesbaar gedaan en op een algemenere manier dan in de meeste andere boeken. In dit deel wordt ook de enige quantumgroep geïntroduceerd die in dit boek wordt besproken, namelijk het quantumgroepanalogon van $GL(n)$ dat voornamelijk wordt bestudeerd voor het geval $n = 2$. Vooral het gedeelte waarin wordt beschreven hoe de duale van een algebra een coalgebra kan opleveren en vice versa, is zeer leesbaar. Het eerste deel van het boek is helder geschreven en vrijwel alle bewijzen zijn erin opgenomen. Dat verandert in het tweede deel, waarin de nadruk ligt op categorieën. Het boek wordt dan verhalender en minder precies, met name tegen het eind. Dit deel is minder leesbaar, en ook minder informatief. Wel wordt dan eindelijk een voorstel voor een definitie van een quantumgroep gegeven. Deze definitie is volledig in termen van categorieën, en wordt niet vergeleken met andere algebraïsche definities van quantumgroepen zoals deze te vinden zijn in boeken van Chari en Pressley, Etingof en Schiffmann, Kassel, Lusztig, Majid.

In het boek wordt regelmatig verwezen naar Manins boek, *Quantum groups and non-commutative geometry* uit 1988, dat ook qua formaat gelijkenis vertoont met Streets boek. Natuurlijk is Streets boek moderner en beschrijft het meer zijpaden, maar in bepaalde aspecten zijn deze boeken vergelijkbaar. Er is een duidelijke overlap in onderwerpkeuze en Street houdt deels de notatie uit Manins boek aan. Het is moeilijk aan de indruk te ontkomen dat het boek van Street, 19 jaar na Manins boek, relatief weinig toevoegt en mosterd na de maaltijd is. De literatuurlijst lijkt deze conclusie te onderschrijven; afgezien van een verwijzing naar een minder relevant artikel en een boek over knopentheorie zijn de meest recente referenties uit 1995 en dat zijn onder andere de boeken over quantumgroepen van Kassel en Majid. Als dit boek 15 tot 20 jaar geleden gepubliceerd was, had het grote invloed kunnen hebben.

Erik Koelink



Desmond Higham
**An Introduction to Financial Option
Valuation
Mathematics, Stochastics and Computation**

Cambridge: Cambridge University Press, 2004
273 p., prijs £ 27.99
ISBN 0-521-54757-1

De auteur durft het aan om de zoveelste 'introdutchie' tot de moderne financieringstheorie te geven, met speciale nadruk op het waarden van derivaten. De belangrijkste bijdrage ligt in de uitgebreide aandacht voor (numerieke) methoden om algemeen geldende abstracte formules voor de waarde van een derivaat in iets praktisch toepasbaars om te zetten. Daarnaast bevat dit boek een introductie in de kansrekening, toegespitst op resultaten die van waarde zijn in de stochastische financieringstheorie. Deze introductie is met zorg geschreven en goed toegankelijk. Desalniettemin is dat geen reden om dit boek te lezen. Die moet echt gevonden worden in de algoritmen die besproken worden om in concrete situaties de prijs van, bijvoorbeeld, cash-or-nothing of exotischer derivaten te vinden. Hierover later meer.

De introductie betreffende financiële markten en de geldende institutionele regels is relatief beperkt. De aandacht die geschonken wordt aan de beschrijving van beschikbare opties is zoals mag worden verwacht van een boek met de gekozen focus. De introductie staat in het teken van het formaliseren van het waarderingsprobleem in wiskundige termen: de modelmatige aanpak. De introductie in kansrekeningstechnische technieken is uitgebreider en didactisch verantwoord, maar indien veel van de behandelde begrippen in deze hoofdstukken onbekend zijn, zal de rest van het boek zware kost zijn.

De belangrijkste bijdrage van het boek ligt in de behandeling van numerieke technieken voor de waardering van financiële derivaten. Hierin zijn twee belangrijke soorten techniek te onderscheiden: analytische methoden en simulatietechnieken. Beide worden in detail behandeld, met veel voorbeelden. In alle gevallen zijn Matlab programma's toegevoegd om de behandelde stof zelf in praktijk te brengen.

Samenvattend, Higham is er in geslaagd een lacune in de beschikbare literatuur op het gebied van waardering van derivaten in financiële markten op te vullen, door zijn speciale aandacht voor numerieke waarderingsmethoden. Deze methoden worden, meestal in enigszins doorontwikkelde vorm, toegepast bij alle grote financiële instellingen in deze wereld.

Bas Werker



P.J. Holewijn en K. van Harn
Maat- en Integratietheorie

Utrecht : Epsilon, 2005 (2de druk 2008)
Epsilon-Uitgaven, deel 58
292 p., prijs € 25,00
ISBN 90-5041-089-2

Er zijn twee manieren om een tekst over maat- en integratietheorie op te zetten. Je kunt, zoals Halmos, beginnen met maten

op σ -algebra's en daarna gaan integreren; je kunt ook, à la Bourbaki, uitgaan van een integraal en dan de bijbehorende maatruimte maken. De auteurs kiezen de eerste weg. (Persoonlijk begin ik te neigen tot de tweede. De hoeveelheid werk is hetzelfde, maar het is zo aardig om, uitgaande van de Riemannintegraal, in twee regels de Lebesgue-integraal te kunnen beschrijven.)

Na een kort hoofdstuk Motivering komen σ -algebra's, maten, de uitbreidingsstelling van Carathéodory en de Lebesgue-maat. Vervolgens meetbare functies, integratie, en de convergentiestellingen; en dan productmaten, Fubini, en L^p .

De volledige titel van het boek bevat de toevoeging 'met basiselementen van de waarschijnlijkheidsrekening'. Deze toevoeging is welgekozen. Elk in aanmerking komend hoofdstuk heeft een aparte paragraaf waarin het voorafgaande bekeken wordt in het licht van de waarschijnlijkheidsrekening. Het zijn kleine doses, net genoeg om een brug te slaan tussen analyse en stochastiek. Onafhankelijkheid komt aan de orde, de spreiding niet. Er is een apart hoofdstuk over stationaire stochastische rijen en de wet van de grote aantallen.

Verder zijn er appendices over verzamelingen, de reële rechte

en de Riemannintegraal. Daar zal weinig in staan wat de lezer niet weet (de doelgroep is wiskundestudenten in hun derde jaar), maar je kunt er gemakkelijk even iets in opzoeken, en ze dienen ook om notaties vast te leggen. Er is een goede collectie opgaven, waaronder voorbeelden verdiepingen van de theorie en uitwerkingen van details van de hoofdtekst. Kennis van metrische ruimten wordt niet voorondersteld.

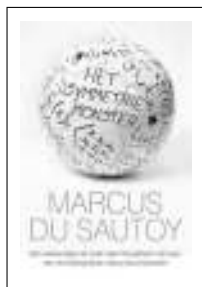
Tot zover de inhoud; nu iets over de uitwerking daarvan. In hun voorwoord kondigen de auteurs aan dat de stof uitvoerig uiteengezet wordt. Dat is juist, en de uitvoerigheid ontaardt niet in wijdlopiegheid. De efficiency van de tekst trof mij speciaal in de hoofdstukken II (σ -algebra's, Carathéodory) en III (introductie van de integraal, de convergentiestellingen).

De tekst wordt telkens even afgewisseld met een voorbeeld of een stukje heuristiek, wat de leesbaarheid ook nog ten goede komt. Het Nederlands is ouderwets goed, op twee dissonanten na: "De eigenschap geldt" en "zij x en y positief". (Of zijn die al zo gangbaar dat ze door de beugel kunnen?)

Het boek lijkt me dan ook geschikt als syllabus bij een college en evenzeer voor zelfstudie.

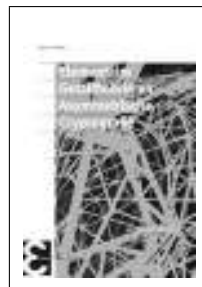
Arnoud van Rooij

Recent verschenen publicaties (suggesties naar wgreview.win@tue.nl)



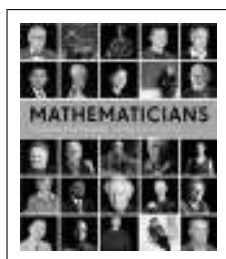
Marcus du Sautoy
Het symmetrie monster
(vertaald uit het Engels)

Uitgeverij Nieuwezijds, 2009
ISBN 9789057122866
www.nieuwezijds.nl/Boek/9789057122866/Het-symmetrie-monster/



Benne de Weger
Elementaire Getaltheorie en Asymmetrische Cryptografie

Epsilon-Uitgaven, 2009
ISBN 978-90-5041-108-0
www.epsilon-uitgaven.nl/E63.php



Mariana Cook
Mathematicians: An Outer View of the Inner World

Princeton University Press, 2009
ISBN13: 978-0-691-13951-7
press.princeton.edu/titles/8860.html



Maris van Haandel, Gert Heckman
Op de Schouders van Reuzen — de mechanica van Isaac Newton

Epsilon-Uitgaven, 2009
ISBN 978-90-5041-107-3
www.epsilon-uitgaven.nl/E62.php



Alexander Soifer
The Mathematical Coloring Book

Springer Verlag, 2009
ISBN: 978-0-387-74640-1
www.springer.com/math/numbers/book/978-0-387-74640-1



Stephen Simpson
Subsystems of second order arithmetic

Cambridge University Press, 2009
ISBN-13: 9780521884396
www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521884396

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is March 1, 2009.

Problem A (proposed by Alexey Kanel)

Is there a polynomial with rational coefficients whose minimum on the real line is $\sqrt{2}$?

Problem B (proposed by Frans Oort)

Are there infinitely many positive integers whose positive divisors sum to a square?

Problem C (proposed by Gabriele Dalla Torre)

For which odd positive integers n do there exist an odd integer $k > n$ and a subset $S \subset \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ of size n such that for every non-zero element $r \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ the cardinality of the intersection $S \cap (S + r)$ is even? What about even n ?

Star problems. In the June 2008 edition of the NAW we revisited a selection of unsolved star problems. Whoever sent in a solution first before July 1, 2009 would receive a book token. In this and upcoming editions we will publish some of the solutions we have received.

Edition 2009-2 We received solutions from Rob van der Waall (Huizen), Thijmen Krebs (Nootdorp), Ruud Jeurissen (Nijmegen), Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), Hendrik Lenstra (Leiden), and Jaap Spies (Emmen).

Problem 2009-2/A In how many ways can one place coins on an $n \times n$ chessboard such that for every square the number of (horizontally or vertically) adjacent squares that contain a coin is odd?

Solution We received solutions from Tejaswi Navilarekallu and Thijmen Krebs. Tejaswi Navilarekallu will receive the book token.

We contend that the required task is impossible if n is odd and that it can be performed in exactly 2^n ways if n is even.

We use integral coordinates (i, j) with $1 \leq i, j \leq n$ for the squares of the board. We color a square (i, j) white if $i + j$ is even, and black if it is odd. The problems of placing coins on the white and on the black squares are independent. We say that a configuration of coins is legal at a square if that square has an odd number of neighbors containing a coin. First we treat the case of even n , so $n = 2k$ for some integer k .

Claim: Any configuration of coins on the white half-diagonal $(1, 1), (2, 2), \dots, (k, k)$ extends to a unique configuration on all the white squares that is legal at all black squares.

Proof. We show by induction on m that any configuration on the half-diagonal extends uniquely to a configuration on the white squares (i, j) with $i + j \leq 2m$ that is legal at all black squares (i, j) with $i + j < 2m$. Note that the uniqueness implies that this configuration will be symmetric in the sense that there is a coin on (i, j) if and only if there is a coin on (j, i) .

The case $m = 1$ is trivial. For $m \leq n$ the induction step is easy, working outwards from

Redactie:

Johan Bosman

Gabriele Dalla Torre

Ronald van Luijk

Lenny Taelman

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Oplissingen

| Solutions

the half-diagonal. For $m > n$ we work from the squares $(n, 2m - n)$ and $(2m - n, n)$ on the edge towards the square (m, m) on the diagonal. The symmetry guarantees that there is no conflict at the square (m, m) . $\square$

It follows that the number of legal configurations on the white squares is 2^k . Of course the same holds for the black squares, so the total number of legal configurations on the board is $2^k \cdot 2^k = 2^n$.

We shall now prove by contradiction that there are no legal configurations if n is odd. Let k be such that $n = 2k + 1$. Assume that we are given a legal configuration. Legality at the corner square $(1, 1)$ implies that exactly one of $(1, 2)$ and $(2, 1)$ contains a coin. Legality at $(2, 2)$ then implies that either both or none of $(2, 3)$ and $(3, 2)$ have a coin. Continuing this alternating process we see that for all i either both or none of $(2i, 2i + 1)$ and $(2i + 1, 2i)$ have a coin. In particular either both or none of $(n - 1, n)$ and $(n, n - 1)$ have a coin, which contradicts legality at the corner square (n, n) .

Problem 2009-2/B A magic $n \times n$ matrix of order r is an $n \times n$ matrix whose entries are non-negative integers and whose row and column sums all equal r . Let $r > 0$ be an integer. Show that a magic $n \times n$ matrix of order r is the sum of r magic $n \times n$ matrices of order 1.

Solution This problem was solved by Ruud Jeurissen, Thijmen Krebs, Tejaswi Navilarekallu, and Jaaps Spies. The following is essentially the solution by Ruud Jeurissen, which was similar to all others. Ruud Jeurissen is the winner of the book token.

We prove the statement by induction on r , the case $r = 1$ being trivial. Suppose M is a magic $n \times n$ matrix of order r . We associate to M the bipartite graph where the two underlying sets R and C of vertices consist of the rows and columns of M respectively, and the i -th row and j -th column are connected by M_{ij} edges. Each subset $S \subset R$ of size k is connected by kr edges to columns in C . Since each column in C has only r edges, this implies that there are at least k columns in C that are connected to S . By Hall's theorem (also known as the marriage theorem), this implies there is a matching from R to C , meaning there is a magic matrix M' of order 1, such that the entries of $M'' = M - M'$ are non-negative. This implies that M'' is a magic matrix of order $r - 1$, so by the induction hypothesis M'' is a sum of $r - 1$ magic matrices of order 1. We conclude that $M = M'' + M'$ is the sum of r magic matrices of order 1.

Problem 2009-2/C (proposed by Tejaswi Navilarekallu) Find all finite groups G with the property that for all $g, h \in G$ at least one of (g, h) , (g, gh) and (h, hg) is a pair of conjugate elements.

Solution We received solutions from Rob van der Waall and Hendrik Lenstra. The proposer and Hendrik Lenstra had similar solutions, and the following is based on both. Hendrik Lenstra will receive the book token.

We claim that the only groups satisfying the given condition are $\{1\}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, and the dihedral groups of order 6 and 10.

Clearly the trivial group and the group of order two satisfy the condition, so assume G has $n > 2$ elements.

Let $1 = d_1, d_2, \dots, d_k$ be the sizes of the conjugacy classes of G . Therefore, $d_1 + \dots + d_k = n$. Then the set

$$\{(g, h) \in G \times G \mid g, h \text{ are conjugates}\}$$

has precisely $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_k^2$ elements. Similarly, the sets

$$\{(g, h) \in G \times G \mid g, gh \text{ are conjugates}\}$$

and

$$\{(g, h) \in G \times G \mid h, hg \text{ are conjugates}\}$$

have exactly $d_1^2 + \dots + d_k^2$ elements. Note that $(1, 1)$ belongs to all three sets. For G to satisfy the condition in the problem, we need the union of the above three sets to be $G \times G$. In particular, this gives the inequality $3(d_1^2 + \dots + d_k^2) \geq n^2 + 2$ or equivalently,

$$3(d_2^2 + \dots + d_k^2) \geq n^2 - 1. \quad (1)$$

Note that the d_i divide n . If for all i we have $d_i \leq n/3$ then

$$3(d_2^2 + \dots + d_k^2) \leq 3(d_2 + \dots + d_k) \frac{n}{3} = (n-1)n$$

contradicting the inequality (1). So there must be a conjugacy class C with exactly $n/2$ elements. We are going to show that, except for the identity, all other conjugacy classes have exactly 2 elements.

Since the conjugation action of G on C is transitive the centralizer of an element $c \in C$ has at most two elements, and since that centralizer contains c it follows that $c^2 = 1$, so all elements of C have order 2.

Let a and b be elements of C . We will show by contradiction that ab is not in C . Assume that ab is in C . Then $abab = 1$, so $aba^{-1} = b$, so $a = b$, since the stabilizer of b consists of only 1 and b . We conclude that $ab = 1$, a contradiction.

Next we show that the complement $H = G - C$ is a subgroup. Let x and y in H be given and fix an $r \in C$. By the above x and y can be written as ar and rb respectively, with $a, b \in C$. Then xy equals ab , which is an element of H .

The action by conjugation of an element $c \in C$ on H is an involution, since $c^2 = 1$. The only fixed point of this action is $1 \in H$, because $chc^{-1} = h$ implies $h^{-1}ch = c$ and the centralizer of c is $\{1, c\}$.

Any finite group H with an involution σ that fixes only $1 \in H$ is necessarily abelian, and the involution must be inversion. To see this, first observe that by a counting argument, every element $x \in H$ can be written as $x = \sigma(h)h^{-1}$ for some $h \in H$, then apply σ to obtain $\sigma(x) = x^{-1}$. Hence the automorphism is inversion, and therefore the group is abelian.

So we may assume $d_1 = 1$, $d_2 = n/2$, and $d_3 = \dots = d_k = 2$. Together with the inequality (1) this implies that $n \leq 10$. It is now easy to check that only the dihedral groups of order 6 and 10 satisfy the required condition (with $n > 2$).

Problem (Star) 2008-2/3 Let A and B be $n \times n$ matrices over $\mathbf{C}$. Suppose that $\lim_{k \rightarrow \infty} (A^k + B^k)$ exists. Show that there exists $M \in \mathbf{C}^{n \times n}$ such that $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k - kM$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k + kM$ exist. Give necessary and sufficient conditions on A and B for M to be zero.

Solution This problem was solved by Alex Heinis and Wim Hesselink. As Wim Hesselink sent in a solution first, he will receive the prize. The following is based on both solutions. Clearly the matrix M is unique, if it exists. For any linear map $f: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$, the vector space $\mathbf{C}^n$ is the direct sum of the generalized eigenspaces $E_{f,\lambda} = \ker(f - \lambda)^n$ for eigenvalues λ of f by the theory of Jordan normal forms.

Lemma 1. For any linear map f on $\mathbf{C}^n$ we have $\lim_k f^k = 0$ if and only if every eigenvalue λ of f satisfies $|\lambda| < 1$.

Proof. The only-if part being obvious, we assume that every eigenvalue λ of f satisfies $|\lambda| < 1$. Let λ be such an eigenvalue. Then the restriction f_λ of f to the generalized eigenspace $E_{f,\lambda}$ can be written as $\lambda \cdot \text{id} + m$, with $m^n = 0$. We get $f_\lambda^k = \sum_{j < n} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} m^j$, which tends to 0, because in each term $\binom{k}{j}$ only grows polynomially in k . We conclude that f tends to 0. $\square$

Lemma 2. Every eigenvalue λ of A or B satisfies $|\lambda| < 1$ or $\lambda = 1$.

Proof. For two sequences $(X_k)_k$ and $(Y_k)_k$ of matrices we write $X_k \sim Y_k$ if $\lim_k (X_k - Y_k) = 0$. Set $C = \lim_k (A^k + B^k)$. Then we have

$$C - A^{k+1} \sim B^{k+1} \sim B(C - A^k) = BC - BA^k,$$

and therefore $\lim_k (B - A)A^k = (B - I)C$. Let $x \in \mathbb{C}^n$ be an eigenvector for A with eigenvalue λ . Then $\lambda^k (Bx - \lambda x) = (B - A)A^k x$ converges, namely to $(B - I)Cx$. We conclude that either $|\lambda| < 1$ or $\lambda = 1$, or $Bx = \lambda x = Ax$, in which case $2\lambda^k x = (A^k + B^k)x$ converges, and we also find $|\lambda| < 1$ or $\lambda = 1$. The statement for eigenvalues of B follows from symmetry. $\square$

Let a and b denote the linear maps on $\mathbb{C}^n$ defined by multiplication by A and B respectively, whose eigenvalues are given in the previous lemma. Let $p, m, r: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ be the unique linear maps that equal 0, 0, and a , respectively, on the generalized eigenspaces $E_{a,\lambda}$ of a associated to eigenvalues λ with $|\lambda| < 1$, while their restrictions to $E_{a,1}$ equal id , $a - \text{id}$, and 0 respectively. In other words, with respect to the decomposition

$$\mathbb{C}^n \cong E_{a,1} \oplus \left(\bigoplus_{|\lambda| < 1} E_{a,\lambda} \right)$$

the maps p, m, r are given as

$$p = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} a - \text{id} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Then m is nilpotent, we have $a = p + m + r$, and the identities

$$p^2 = p, \quad pm = m = mp, \quad pr = mr = 0 = rm = rp, \quad \lim_k r^k = 0$$

hold, the latter by Lemma 1. Similarly, we may write $b = q + l + s$ where l is nilpotent and

$$q^2 = q, \quad ql = l = lq, \quad qs = ls = 0 = sl = sq, \quad \lim_k s^k = 0.$$

Of course the decomposition in generalised eigenspaces for a and b are not necessarily the same. We have

$$a^k + b^k = r^k + s^k + p + q + \sum_{1 \leq j < n} \binom{k}{j} (l^j + m^j).$$

As this has a limit and $\lim_k r^k = \lim_k s^k = 0$, we find that all terms $l^j + m^j$ for $1 \leq j \leq n$ vanish. In particular, $l + m = 0$ and $l^2 + m^2 = 0$, so that $l = -m$ and $m^2 = 0$. We conclude $a^k = p + r^k + km$ and $b^k = q + s^k - km$, so that $\lim_k a^k - km = p$ and $\lim_k b^k + km = q$. The first statement of the problem follows for the matrix M associated to m . The matrix M is zero if and only if the restriction of a to the generalized eigenspace $E_{a,1}$ is the identity.

Problem (Star) 2008-2/11 Let V be the complex vector space of all functions $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Let W be the smallest linear subspace of V with the properties:

- the function $f(z) = z$ belongs to W ,
- for all $f \in W$, $|f| \in W$.

Does $f(z) = \bar{z}$ belong to W ?

Solution The following solution is due to David Preiss (Warwick), and was communicated to us by Miklos Laczkovich. Since the solution was already known, there is no prize winner.

We will show that $f(z) = \bar{z}$ does not belong to W . We claim that it suffices to show that there is a complex vector space S of complex valued functions on the circle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ with the properties that

- $h(x) = e^{ix}$ belongs to S ,
- for all $h \in S$, $|h| \in S$,
- $h(x) = \cos(x)$ does not belong to S .

Indeed, if the function $f(z) = \bar{z}$ is in W , then the function

$$\frac{e^{ix} + f(e^{ix})}{2} = \cos(x)$$

belongs to S .

Construction of S. Let U be the family of regions $U = \{x + iy : \psi(x) < y < \phi(x)\}$, where $\phi, \psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ are continuous, $\psi \leq 0 < \phi$ and $\{x : \psi(x) = 0\}$ is locally finite in $\mathbf{R}$.

Let H be the set of functions F on $\mathbf{C}$ for which there is a region $U \in U$ so that F is holomorphic on U , and such that there is an $a < 1$ with $\limsup_{z \in U, |z| \rightarrow \infty} |F(z)|/|z|^a = 0$.

Let F be the set of continuous functions $f : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ with the property that there exist a positive integer n and functions $F_1, \dots, F_n \in H$ (with corresponding regions $U_1, \dots, U_n \in U$) and open intervals $I_1, \dots, I_n$ covering the circle minus a finite number of points so that $\cos x \in U_j$ and $f(x) = F_j(\cos x)$ for all $1 \leq j \leq n$ and all $x \in I_j$.

Let S be the set of all functions $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$ of the form $f + ig + ce^{ix}$ where $f, g \in F$ and $c \in \mathbf{C}$. The set S is a linear subspace of the complex vector space of all complex-valued functions on the circle.

Clearly $h(x) = e^{ix}$ is an element of S .

Proof that S is closed under $h \mapsto |h|$. Let h be a function in S , and write h as

$$h(x) = F_j(\cos x) + iG_j(\cos x) + ce^{ix}$$

on the open interval I_j , with $F_j, G_j \in H$. Let $a_j < 1$ be such that

$$\limsup_{z \in U_j, |z| \rightarrow \infty} |F_j(z)|/|z|^{a_j} = 0 \text{ and } \limsup_{z \in U_j, |z| \rightarrow \infty} |G_j(z)|/|z|^{a_j} = 0.$$

Assuming, as we may, that $\sin x$ does not change sign on any I_j , we have that on each I_j , $|h(x)|^2 = H_j(\cos x)$ where H_j is a linear combination of $1, F_j^2, G_j^2, F_j(z)z, F_j(z)\gamma(z), G_j(z)z, G_j(z)\gamma(z)$, where γ is a suitable branch of $\sqrt{1-z^2}$. Removing from I_j the finite set where $h(x) = 0$ we have that on each remaining interval $|h|$ coincides with a branch of $H_j^{1/2}$ and one verifies that $|h| \in F$, where the constant can be taken to be $(a+1)/2$.

Proof that $h(x) = \cos x$ does not belong to S . Assume that $\cos x = f(x) + ig(x) + ce^{ix}$ where $c \in \mathbf{C}$ and $f, g \in F$. Writing $c = u + iv$ and using that f, g are real, we get $f(x) = (1-u)\cos x + v\sin x, g(x) = -v\cos x - u\sin x$. For any interval I on which we can use the definition of $f, g \in F$ (and on which $\sin x \neq 0$) we therefore have $F, G \in H$ and $U \in U$ so that $F(z) = (1-u)z + v\gamma(z)$ and $G(z) = -vz - u\gamma(z)$, where γ is a branch of $\sqrt{1-z^2}$ on U . We have that

$$\limsup_{|z| \rightarrow \infty, z \in U} \frac{|F(z)|}{|z|} = \limsup_{|z| \rightarrow \infty, z \in U} \frac{|((1-u)z + v\gamma(z))|}{|z|} = \sqrt{(1-u)^2 + v^2}.$$

Since this limit has to be zero we conclude that $u = 1$ and $v = 0$. A similar argument for G gives that $u = v = 0$, a contradiction.

