

Inhoud | Contents

146	Colofon
147	Redactioneel <i>Wil Schilders</i>
148	Agenda
150	Nieuws

Afscheidsrede | Valedictory lecture

156	Het leven van een wiskundige <i>Robert Tijdeman</i>
-----	---

Oratie | Inaugural lecture

180	Begeisterung für Mathematik <i>Rainer Kaenders</i>
-----	--

Onderzoek | Research

176	Vallende polymeerdraden vormen Lissajouspatronen <i>Annemarie Aarts, Vivi Andasari, Stef van Eijndhoven</i>
197	Wiskundig onderzoek per computer? <i>Gunther Cornelissen e.a.</i>
208	Dr. Pangloss neemt de maat <i>Eduard Looijenga</i>

Onderwijs | Education

165	TIMSS 2007 – Feiten en meningen <i>Jan van de Craats</i>
-----	--

Geschiedenis | History

170	Grothendieck: de nieuwe algebraïsche meetkunde <i>Frans Oort</i>
191	Arabische astrologie en West-Europese wiskunde <i>Jan Hogendijk</i>
203	Het is niet alles goud wat er snijdt <i>Albert van der Schoot</i>

Samenleving | Society

163	SWI 2008: Patroonherkenning in pulsen van vurende hersencellen <i>Bennie Mols</i>
189	SWI 2008: Hoogwaardige aluminiumlegeringen <i>Bennie Mols</i>

Boeken | Books

210	Boekbesprekingen
-----	------------------

Rubrieken | Departments

168	De derde wet <i>Ferdinand Verhulst</i>
201	In de verdediging: rubriek voor proefschriften <i>Geertje Hek</i>
214	Problemen

Berekenende wiskunde

'Math inside' was de titel van het hoofdredactioneel in maart, aangevend dat wiskunde werkelijk overal te vinden is. Dit wordt ook heel inzichtelijk in een filmpje dat men in Duitsland heeft gemaakt voor 'Das Jahr der Mathematik'. Hierin is, zeker voor de meer jeugdigen onder ons, op aansprekende wijze duidelijk gemaakt waar men wiskunde zoal tegenkomt in het dagelijkse leven. Het motto van dit Duitse wetenschapsjaar was 'Alles wat telt', en op de website www.jahr-der-mathematik.de wordt bevestigd: "Du kannst mehr Mathe, als du denkst".

Het was een zeer succesvol jaar voor de wiskunde in Duitsland, zoals blijkt uit het volgende (een vertaling wordt achterwege gelaten, zodat de lezer al enigszins in de stemming komt voor de voortreffelijke intrede van Rainer Kaenders in dit nummer): *Die Bilanz des Wissenschaftsjahres 2008: Mehr als 500 Partner aus Wissenschaft, Kultur und Politik beteiligten sich mit rund 760 Veranstaltungen am Jahr der Mathematik. Unter dem Motto 'Mathematik. Alles, was zählt', luden vielfältige regionale und überregionale Veranstaltungen, Ausstellungen, Wettbewerbe und Festivals dazu ein, Mathematik zu erleben. Bundesbildungsministerin Dr. Annette Schavan: "Wir haben gezeigt: Mathematik macht Spaß!"*

Het is om jaloers op te worden, iedereen sprak en spreekt er over in Duitsland. Zouden wij in Nederland ook zoiets voor elkaar kunnen krijgen, het zou prachtig zijn. Columns in de kranten, elke avond wiskunde op radio en tv. En wiskundigen natuurlijk, hetgeen wellicht iets minder aangenaam is om naar te kijken.

Voorlopig moeten we het helaas doen met ietwat saaier alternatieven, hoewel dit allerminst een kwalificatie is van het belang ervan. De KNAW is begin dit jaar gestart met een activiteit rondom Computational Science (CS). Als je dit opzoekt via Google, krijg je meteen een indruk waar veel CS-onderzoekers het absoluut mee oneens zouden zijn, en terecht. Computational science is niet synoniem met Scientific Computing, het vakgebied dat wij in Nederland aanduiden met numerieke wiskunde. Laatstgenoemd vakgebied is wel een belangrijke 'enabling technology' voor CS. Wat is CS dan wel? Het eenvoudigst is om het te omschrijven als 'de 3e discipline', naast theorievorming en experimenteel onderzoek. CS is dan ook van nature interdisciplinair, vaak ontstaand uit fysische, chemische of andere toepassingen. De kern bestaat

echter uit zeer krachtige wiskundige algoritmen. Een goede vertaling van 'computational science' is er helaas niet. De titel van dit redactioneel komt daar in ieder geval niet voor in aanmerking, aangezien dit de wiskunde ook in een kwaad daglicht zou kunnen stellen. Een belangrijke beweegreden voor het initiatief van de KNAW is dat de ontwikkelingen op het terrein van CS de laatste jaren bijzonder hard zijn gegaan en naar verwachting de komende jaren in verschillende wetenschapsgebieden kansen zullen bieden op grote doorbraken. Er is een breed gedragen gevoel dat de uitgangspositie voor Nederland weliswaar uitstekend is, maar dat verdere actie noodzakelijk is om hier optimaal de wetenschappelijke vruchten van te plukken.

De belangrijkste aanbeveling van een ronde tafel conferentie begin dit jaar is dat uitwisseling tussen vakdisciplines onderling en met informatica/wiskunde cruciaal is voor het succesvol bedrijven van CS, en daarom gestimuleerd moet worden. Hier liggen dan ook grote kansen voor wiskundig Nederland. Als we er tenminste in slagen aan te sluiten bij onderzoekers uit andere disciplines, en die collega's bereid zijn de samenwerking met wiskundigen te zoeken. Dit is lang niet altijd het geval, er is vaak het gevoel dat de wiskunde er wel even bij gedaan kan worden, zeker met behulp van alle wiskundige software die tegenwoordig voorhanden is. Vandaar dat het stimuleren van uitwisseling een van de belangrijkste aandachtspunten is voor de KNAW.

Laat ons, als wiskundigen, het goede voorbeeld geven en (nog) meer aansluiting zoeken bij andere disciplines, om zo de problemen van nu en de toekomst gezamenlijk aan te pakken. Wellicht dat we op deze wijze niet slechts voor één jaar, maar voor een hele reeks mooie en succesvolle jaren van de wiskunde kunnen zorgen. Met dit als doel mogen we best een beetje berekenend zijn!

Wil Schilders, hoofdredacteur

NXP Semiconductors en TU Eindhoven

Agenda

Upcoming Events

september 2009

11 – 17 september 2009

10th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project

Conferentie over modellen voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs

plaats Dresden, Duitsland

info www.fi.uu.nl/nl

13 – 26 september 2009

Parameter Estimation in Physiological Models

Summer school over modelleren, met bijzondere aandacht voor het schatten van parameters

plaats Sicilië, Italië

info www.biomatematica.it/lipari2009

20 september 2009

Waarom win ik nooit de loterij?

Lezing voor kinderen door prof.dr. Michel Mandjes over kansrekening en tactieken om te winnen

plaats NEMO, Amsterdam

info www.science.uva.nl

21 – 25 september 2009

COMSOM Autumn school on Future Developments in Model Order Reduction

Symposium over recente ontwikkelingen in model-reductiemethoden

plaats Terschelling

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

23 – 25 september 2009

PICNIC

Internationaal congres/festival voor mensen die zich bezig houden met innovatie op het gebied van technologie, nieuwe media, entertainment, wetenschap en kunst

plaats Westergasterrein, Amsterdam

info www.amsterdaminc.tv

25 september 2009

Studiemiddag in dialoog: goed rekenonderwijs

Studiemiddag van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-wiskundeonderwijs over rekenonderwijs

plaats Utrecht

info www.nvowro.nl

25 september 2009

Discovery09

Uitgaansnacht vol wetenschap, muziek en kunst

plaats NEMO, Amsterdam

info www.discovery09.nl

oktober 2009

1 oktober 2009

Pump your career

Talentendag met diverse workshops voor vrouwelijke wetenschappers

plaats Museum voor Communicatie, Den Haag

info www.nwo.nl

2 oktober 2009

Wiskundetoernooi

18de editie van het wiskundetoernooi; honderd teams van scholieren gaan de strijd met elkaar aan

plaats Gymnasium, Nijmegen

info www.ru.nl/wiskundetoernooi

3 – 4 oktober 2009

Scientific Festival

Jaarlijks wetenschaps- en techniekfestival met als thema dit jaar: 'Reis naar het onbekende'

plaats NEMO, Amsterdam

info www.scientificfestival.nl

5 – 7 oktober 2009

YES-III: Paradigms of Model Choice

Derde editie van de workshop voor jonge statistici

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2009/YE-SIII/YE-SIII.main.htm

5 – 7 oktober 2009

Traitor Tracing

Driedaagse minicursus over het beschermen van intellectueel eigendom door Gábor Tardos

plaats TUE, Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma/index.html

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

6 oktober 2009

☐ **NWO Talentendag**

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

7 – 9 oktober 2009

☐ **34ste Woudschoten Conferentie**

Jaarlijkse conferentie van Nederlandse en Vlaamse numerieke wiskundigen over recente ontwikkelingen in iteratieve methoden, numerieke methoden en stochastiek in toepassingen

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

8 – 10 oktober 2009

☐ **DYNSTOCH Meeting 2009**

Jaarlijkse bijeenkomst van de negen Europese DYNSTOCH teams, die onderzoek doen naar dynamische stochastische modellen

plaats Humboldt-Universität, Berlin

info www.mathematik.hu-berlin.de/~mai/dynstochog/DynStochog.html

14, 28 oktober en 11 december 2009

☐ **Analytische meetkunde**

Driedaagse cursus in het kader van wiskunde D

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl

29 – 30 oktober 2009

☐ **Stochastic models for warehouse systems**

Workshop over recent onderzoek op het gebied van warenhuizen met de nadruk op stochastisch modelleren

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events/workshops/2009/warehousing/index.htm

november 2009

5, 12 en 19 november 2009

☐ **Kansrekening en statistiek voor wiskunde D**

Driedaagse cursus in het kader van wiskunde D

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl

7 november 2009

☐ **Studiedag/jaarvergadering NVvW**

Jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren met als thema 'Wiskunde, daar kun je op rekenen!'

plaats Anna van Rijn College, locatie Albatros, Nieuwegein

info www.nvvw.nl

7 – 9 november 2009

☐ **NETCOOP 2009: New Trends in Modeling, Quantitative Methods and Measurements**

Conferentie over wiskundige methoden en modellen voor optimalisatie van netwerken

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2009/NETCOOP/NETCOOP.htm

16 – 18 november 2009

☐ **Stochastics Meeting Lunteren 2009**

Jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse stochastici en statistici

plaats Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren

info www.cwi.nl/en/events/2009

18 november 2009

☐ **Symposium 'Blik op oneindig'**

Oneindigheid in de wiskunde en natuurwetenschappen; voor studenten in de exacte wetenschappen

plaats Gorlaeus Laboratorium, Universiteit Leiden

info symposiumdlf.nl

20 november 2009

☐ **Voorronde Wiskunde A-lympiade**

Een wedstrijd voor leerlingen in 5 havo en 5/6 vwo. De finale is in maart 2010 in Garderen

plaats Deelnemende scholen

info www.fi.uu.nl/alympiade

20 november 2009

☐ **Wiskunde B-dag**

Variant van Wiskunde A-lympiade: een wiskunde B-wedstrijd voor leerlingen in 5 havo en 5/6 vwo

plaats Deelnemende scholen

info www.fi.uu.nl/wisbdag

23 – 25 november 2009

☐ **Statistics and the Life Sciences:**

High-dimensional inference and complex data

Workshop over hoge dimensionaliteit in de levenswetenschappen

plaats Het Kasteel, Groningen

info www.ndns.nl/workshop/sls

26 november 2009

☐ **Rekenproblemen herkennen, analyseren en oplossen**

Eerste dag van de cursus. De andere dagen zijn op 10 december en 14 januari

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl

december 2009 – februari 2010

14 – 18 december 2009

☐ **Dynamic Random Environments**

Workshop over dynamische stochastische omgevingen, een onderzoeksgebied binnen de stochastiek dat zich richt op transport in random media

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/events/workshops/2009/DynamicRandomEnvironments/index.html

8 januari 2010

☐ **Wiskunde een kunst**

Wintersymposium VOR-themagroep Beta- en techniekonderwijs

plaats Nemo, Amsterdam

info www.fi.uu.nl

29 januari 2010

☐ **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2010**

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

5 – 6 februari 2010

☐ **Nationale Wiskunde Dagen**

Dag voor leraren in het voortgezet onderwijs

plaats NH Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

1 februari – 5 maart 2010

☐ **Math Info 2010**

Maand met lezingen en workshops over nieuwe interacties tussen wiskunde en informatica

plaats CIRM, Marseille

info www.lirmm.fr/MathInfo2010

Nieuws

| News

Krappe tijden

Er zijn te weinig contacturen voor Wiskunde B, blijkt uit een enquête onder de lezers van de WiskundeE-brief.

De enquête leverde 110 bruikbare inzendingen op, van 104 middelbare scholen. Er werd gevraagd naar de mening van de docenten over de beschikbare hoeveelheid contacturen. De contacttijd voor Wiskunde B wordt door de respondenten massaal als te krap ervaren. Dit gevoel is het sterkst voor de havo waar 70 procent van de deelnemers de tijd beoordeelde als 'te krap' of 'veel te krap'. Een aantal mensen merkten op dat het eigenlijk te vroeg is om wat te zeggen over het vwo, aangezien volgend jaar pas voor het eerst eindexamens worden gemaakt in de nieuwe programma's. Voor de havo was dat jaar al het geval.

Voor Wiskunde A en C is het beeld wat anders. Daarvoor beoordeelde de merendeel van de ondervraagden de tijd als 'net voldoende'. Over Wiskunde D werd opgemerkt dat hier wat extra ruimte is door de vaak kleinere groepen en het ontbreken van het eindexamen.

De WiskundeE-brief is een wekelijkse elektronische nieuwsbrief, bedoeld om wiskundedocenten in het voortgezet onderwijs snel van relevante zaken op de hoogte te brengen en met elkaar van gedachten te wisselen.

Bron: www.wiskundebrief.nl

Beginexamens

Het Freudenthal Instituut werkt samen met docenten van de TU Delft, de TU Eindhoven, de Open Universiteit, het Stedelijk Scholengemeenschap Nehalennia en de Universiteit Leiden aan het ontwikkelen van een instaptoets voor wiskunde om de kloof tussen het voortgezet en hoger onderwijs te overbruggen. Dit gebeurt in het kader van het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde 2 (NKBW2). In juni dit jaar verscheen hier een artikel over in het NRC Handelsblad.

Met de invoering van de basisvorming in 1998 is het wiskundeonderwijs op de middelbare school veranderd en het aantal contacturen voor wiskunde omlaag gegaan. Dat heeft vooral negatieve gevolgen gehad voor de algebraïsche vaardigheden van de scholieren. Om het niveau van aankomende studenten in kaart te brengen, heeft een aantal opleidingen in het hoger onderwijs zelf zo'n toets ontwikkeld. Die toetsen zijn onderling erg verschillend en gaan soms uit van niet al te realistische verwachtingen. Aan de toets die nu is ontwikkeld, hebben docenten uit het voortgezet en hoger onderwijs samen gewerkt. Het resultaat is een toets die door docenten uit het voortgezet onderwijs wordt gezien als haalbaar en door docenten uit het hoger onderwijs als afdoende ten aanzien van de algebraïsche vaardigheden die een student nodig heeft aan het begin van een bètaopleiding in het hoger onderwijs.

Achttien faculteiten en opleidingen in het hoger onderwijs zullen de toets bij wijze van proef gaan gebruiken. Het is de bedoeling de toets later breed in te voeren in het bètaonderwijs.

Bron: www.fi.uu.nl

Energie boven symmetrie

De Italiaanse vertaling van het boek *Why Beauty is Truth: The History of Symmetry* van Ian Steward is tweede geworden in de race voor de Italiaanse literatuurprijs *Premio Letterario Galileo 2009* voor de popularisering van wetenschap. De vertaling werd gemaakt door Luigi Civalieri en is getiteld *L'eleganza della verità: Storia della simmetria*. In het boek vertelt Steward hoe de zoektocht naar symmetrieën revoluties te weeg heeft gebracht in de wetenschap. Het voert de lezer

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.

Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

van het oude Babylonië via het Griekenland van Pythagoras, langs de Italiaanse Renaissance naar Évariste Galois en verder.

De Premio Letterario Galileo wordt toegewezen door 2000 leerlingen van middelbare scholen uit alle delen van Italië te laten stemmen. De scholieren kunnen kiezen uit een lijst van vijf boeken, samengesteld door een deskundige jury. De jury werd dit jaar voorgezeten door de Italiaanse astrofysica Margherita Hack. De prijs is in het leven geroepen door organisaties als de Università degli Studi di Padova en het Italiaanse ministerie van cultuur, om de interesse van jongeren in wetenschap en techniek te vergroten.

De uiteindelijke winnaar was *Energia per l'astronave terra*, van de Italianen Vincenzo Balzani en Nicola Armaroli. Dat boek bespreekt verschillende energiebronnen en hun economische en sociale aspecten.

Bron: www.padovacultura.padovanet.it

Het licht aan

Nooit meer jetlag dankzij wiskunde. Onderzoekers Dennis Dean en Elizabeth Klerman van het Brigham en vrouwenziekenhuis in Boston en Daniel Forger van de University of Michigan hebben een programma ontworpen, waarmee jetlag bestreden kan worden. Hun resultaten verschenen in juni op de webpagina van het vrij toegankelijke tijdschrift *PLoS Computational Biology*.

De effecten van een verstoord bioritme kunnen groot zijn. Bij een jetlag horen klachten als vermoeidheid overdag en 's nachts moeilijk in slaap kunnen komen. In ernstigere gevallen kunnen lichamelijke processen zoals de hormoonhuishouding en de spijsvertering ontregeld raken. Ons bioritme wordt sterk beïnvloed door de hoeveelheid licht waaraan we blootgesteld worden. Het is al langer bekend dat het bioritme verschoven kan worden door op de juiste momenten lichtimpulsen te geven. Variaties in de golflengte en de intensiteit van het licht, de duur van de lichtimpuls en het moment van toedienen hebben allemaal een niet-lineair effect op de faseverschuiving van het bioritme.

Er bestaat een wiskundig model dat de effecten van al deze factoren op de verschuiving van het bioritme beschrijft. Met behulp van dit model kan worden berekend hoe het toedienen van lichtimpulsen kan helpen bij het aanpassen van het bioritme aan veranderde omstandigheden. Het op de juiste momenten toedienen van lichtimpulsen kan de tijd dat iemand last heeft van een jetlag halveren. Dean en zijn collega's hebben een algoritme ontworpen, dat schema's genereert voor het toedienen van lichtimpulsen met als doel het bioritme zich na verstoring zo snel mogelijk te laten aanpassen. Op basis van gegevens over de lichtomstandigheden van de omgeving en het aantal tijdzones dat gereisd is, worden aanbevelingen gedaan over het tijdstip waarop de persoon zich bloot zou moeten stellen aan fel licht.

Het grote voordeel van het nieuwe algoritme is dat het niet één, maar veel verschillende mogelijke schema's genereert. Door het grote aantal factoren waar rekening mee gehouden moet worden, kostte dit in het verleden veel rekenwerk. Nieuwe technieken maken het nu mogelijk meer scenario's door te rekenen in een redelijke tijd. Het algoritme kan direct gebruikt worden voor het ontwikkelen van schema's ter bestrijding van jetlag of voor mensen die onder extreme omstandigheden werken, zoals in de ruimte, onder water of op de polen.

Bron: www.ploscompbiol.org

Wiskunde op het witte doek

Oliver Knill, wiskundige aan Harvard University verzamelt filmpjes

die te maken hebben met wiskunde op zijn website: Mathematics in Movies. Het aantal filmpjes op de website is vrij groot. Naast de minder verrassende filmpjes, zijn er ook fragmenten te vinden van onder andere 'Shrek the Third', 'Run Lola Run', 'Clueless' en 'Cast Away'.

Knill verzamelt sinds 2006 al dvd's en videobanden van films waarin wiskunde voorkomt. Op de website staan ook links naar soortgelijke verzamelingen van andere mensen.

Bron: www.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/index.html

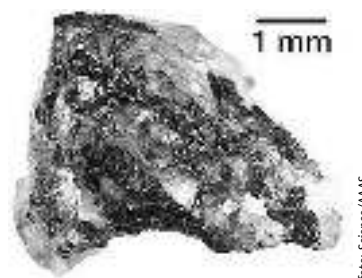
Natuurlijk

Voor het eerst zijn quasikristallen in de natuur aangetroffen. Het was even zoeken, maar Luca Bindi van de Università degli Studi di Firenze vond in het Korjakskoje-gebergte in Rusland een mineraal met deze structuur. Het mineraal bestaat uit koper, ijzer en aluminium.

In een kristal zijn de atomen op een strikt symmetrische manier gerangschikt. Het rooster waarin de atomen liggen is daardoor periodiek. Een quasikristal heeft symmetrieën die niet leiden tot een periodiek rooster. Dat betekent dat voor ten minste één as geldt dat het rooster door verschuiving langs die as, nooit op zichzelf kan worden afgebeeld. In het decembernummer van vorig jaar schreven we hier al over.

Tot nu toe werden quasikristallen uitsluitend in laboratoria gefabriceerd; de eerste keer was in 1984. Vanwege hun bijzondere structuur werd gedacht dat dergelijke stoffen allerlei bijzondere eigenschappen zouden bezitten. Men vroeg zich af of quasikristallen überhaupt wel in de natuur voor zouden kunnen komen. Dankzij de vondst van Bindi is die vraag nu beantwoord.

Bron: www.kennislink.nl



Doorbraak Kervaire-invariant probleem

De Amerikaanse wiskundigen Mike Hopkins (Harvard University), Douglas Ravenel (University of Rochester, New York) en Mike Hill (University of Virginia, Charlottesville) hebben het Kervaire-invariant probleem, een belangrijk probleem in de topologie, bijna volledig opgelost. Zij presenteerden hun oplossing op de conferentie ter ere van de tachtigste verjaardag van Michael Atiyah. Het is een opmerkelijk resultaat: veel wiskundigen hadden niet verwacht nog tijdens hun leven een oplossing te zien.

De Kervaire-invariant is gedefinieerd voor reële gladde variëteiten (objecten verkregen door op een gladde manier open delen van een reële vectorruimte aan elkaar te plakken) van dimensie $4k + 2$, met k een niet-negatief geheel getal. Deze invariant kan maar twee waarden aannemen: 0 of 1. In 1969 bewees William Browder dat voor vrijwel alle gladde variëteiten de Kervaire-invariant 0 is; alleen in dimensie $2^n - 2$, n geheel en groter dan 1, kan ze ongelijk zijn aan 0. In dimensies 2, 6, 14, 30 en 62 zijn inderdaad voorbeelden bekend van variëteiten met Kervaire-invariant gelijk aan 1. De vraag die open bleef was hoe het zit voor hogere dimensies. Hopkins, Ravenel en Hill hebben bewezen

dat voor gladde variëteiten van dimensie groter dan $126 (= 2^7 - 2)$ de Kervaire-invariant altijd 0 is. Het is nog onbekend of er gladde variëteiten van dimensie 126 zijn waarvoor de Kervaire-invariant waarde 1 heeft.

Bart van den Dries, Universiteit Utrecht

Een stijgende lijn

In Engeland scoren scholieren al 21 jaar ieder jaar hogervoor de General Certificates of Secondary Education (GCSE's). Dat zijn certificaten die scholieren van vijftien of zestien jaar per vak kunnen halen.

Op de website van The Times werd in een artikel het nut van deze examens besproken, onder andere door Marcus du Sautoy. Du Sautoy is hoogleraar wiskunde aan de University of Oxford en bekend van allerlei activiteiten om de populariteit van wiskunde te vergroten. Hij vergeleek de examens uit 1998 en uit 2008 met elkaar om te bepalen of de examens echt makkelijker worden.

Volgens Du Sautoy was de stof die door de examens werd getoetst min of meer gelijk. Wat hem vooral opviel was een verschil in hoe de scholieren werden aangesproken. In het examen van 1998 werd geprobeerd de interesse van de scholieren te wekken door te refereren aan de Muppets bijvoorbeeld. Verder werd vooral van de scholieren verwacht dat ze de geleerde technieken konden toepassen, dus dat ze in staat waren de juiste getallen op de juiste plaats in te vullen. Dit was anders in het examen van 2008. Hier werden scholieren aangemoedigd om na te denken over hoe ze wiskunde kunnen gebruiken om een probleem om te lossen. Ook werd er geprobeerd de interesse van de scholieren te wekken met wiskunde zelf, in plaats van met Muppets.

Wat Du Sautoy in beide examens miste was 'spannende' wiskunde. Hij herinnerde zich dat hijzelf op de middelbare school echte wiskunde te zien kreeg, zoals matrices, groepentheorie en topologie. Hij beseft dat dat misschien niet voor iedereen weggelegd is, maar stelt voor om in de toekomst twee wiskundecertificaten te maken. Zodat de echt geïnteresseerden ook aan hun trekken kunnen komen.

Bron: www.timesonline.co.uk

Min of meer

De trend om elektronische apparaten steeds kleiner te maken, zoals bij minilaptops, geeft natuurlijk allerlei praktische voordelen, maar ook andere gevolgen.

Chips kunnen steeds kleiner worden, omdat er steeds kleinere transistors gemaakt worden. Maar: hoe kleiner een transistor, hoe gevoeliger die is voor variaties in de elektronenstroom en deze variaties kunnen het signaal van de transistor verstoren. Dat heeft tot gevolg dat er grotere fouten ontstaan in de berekeningen. Dit kan voorkomen worden door de spanning te vergroten, maar dat heeft weer tot gevolg dat de chip meer energie verbruikt. Door kleinere chips te gebruiken is er dus steeds meer energie nodig om berekeningen met de juiste precisie uit te voeren. Bovendien zit er een grens aan hoe ver de spanning opgevoerd kan worden. Het lijkt daarom niet mogelijk om chips op deze manier te blijven verbeteren.

Krishna Palem van Rice University bedacht een oplossing voor dit probleem, de probabilistische chip. Het idee is dat niet meer geprobeerd wordt om de berekeningen zo nauwkeurig mogelijk te houden, maar dat een zekere onnauwkeurigheid toegelaten wordt. Hij en zijn team stelden een wiskundig model op, waarmee de relatie tussen de waarschijnlijke correctheid van de berekeningen, het energieverbruik en de snelheid onderzocht kon worden. Op basis daarvan was Palem in staat om een prototype van een probabilistische chip te bouwen, die

weliswaar iets minder correcte berekeningen leverde, maar waarvan het energieverbruik veel lager is.

Het is hierbij natuurlijk wel belangrijk om slim om te gaan met de toegestane onnauwkeurigheid. Wat Palem en zijn collega's hebben gedaan is het volgende. Stel dat je een berekening uitvoert met twee grote getallen. Dan is het veel belangrijker dat van de uitkomst de eerste cijfers, ofwel meest significante cijfers, correct zijn dan de laatste cijfers. Ieder van de cijfers van het getal wordt gegeven door een transistor. De kans op een juiste berekening van een cijfer kan verhoogd of verlaagd worden door de spanning op de bijbehorende transistor groter of kleiner te maken. Door de spanning hoog te laten voor de voorste cijfers en lager te maken voor de laatste cijfers, blijft de berekening vrij nauwkeurig en gaat het energieverbruik omlaag.

De probabilistische chip van Palem is natuurlijk niet geschikt voor toepassingen waarbij de nauwkeurigheid van de berekeningen heel belangrijk is, zoals de versleuteling van bepaalde gegevens. Er zijn echter wel toepassingen waarbij het niet uitmaakt dat de berekeningen iets minder precieze resultaten opleveren. Palem verwacht daarom dat er in de toekomst combinaties gebruikt zullen gaan worden van klassieke en probabilistische chips. Intel heeft al interesse getoond in de chips van Palem.

Bron: www.zdnet.be

Te gek voor woorden

Op de tweede *Canadian Discrete and Algorithmic Mathematics Conference* (CanaDam 2009) die gehouden werd in Montréal eind mei, werd aangekondigd dat het vermoeden van Dejean is opgelost. James Currie en Narah Rampersad van de University of Winnipeg lieten in hun presentatie zien dat ze erin waren geslaagd de laatste stap in het bewijs van het vermoeden te zetten.

Dejeans vermoeden gaat over herhalingen in oneindige woorden. Een alfabet is een eindige of aftelbaar oneindige verzameling symbolen en een woord over dat alfabet is een rij symbolen uit het alfabet achter elkaar gezet. Een kwadraat is een woord van de vorm xx of x^2 , waarbij x zelf een niet-leeg woord is. Voorbeelden van kwadraten zijn het Nederlandse woord 'papa', Engelse woord 'hotshots' en het Franse woord 'chercher'. Op dezelfde manier zijn andere gehele machten groter dan 1 gedefinieerd. Ongeveer een eeuw geleden gaf de Noorse wiskundige Axel Thue een voorbeeld van een oneindig woord over een alfabet met twee symbolen, dat geen deelwoord van de vorm x^3 bevat. Dit woord begint met 01101001... Ook gaf hij een voorbeeld van een oneindig woord over een alfabet met drie symbolen dat geen enkel kwadraat bevat.

In het algemeen kan ook gezocht worden naar oneindige woorden die geen rationale machten bevatten. Een woord w is een p/q -macht als het geschreven kan worden in de vorm $x^k x'$, waarbij x' een beginstuk is van x en de lengte van w gelijk is aan p/q maal de lengte van x . Een voorbeeld van een $7/3$ -macht is het Franse woord 'entente', ofwel ent^2e . Het vermoeden van Dejean gaat over de grootste mogelijke rationale macht e , zodat er alle oneindig woorden over een alfabet van n symbolen deelwoorden bevatten met een macht groter of gelijk aan e . We schrijven $RT(n)$ voor deze macht. RT staat voor 'repetitive threshold'. Thue bewees dat $RT(2) = 2$ en in 1972 bewees Françoise Dejean dat $RT(3) = 7/4$. Ook formuleerde ze toen het vermoeden dat $RT(4) = 7/5$, wat later bewezen werd door Pansiot, en dat $RT(k) = k/(k-1)$ voor $k \geq 5$.

Het vermoeden van Dejean werd in verschillende stappen door verschillende mensen opgelost. Het eerste resultaat was voor $5 \leq k \leq 11$ en later met dezelfde techniek ook voor $12 \leq k \leq 14$. Een grote door-

braak kwam een aantal jaar geleden, toen het vermoeden bewezen werd voor $k \geq 33$. Currie en Rampersad verbeterden de techniek die hiervoor gebruikt werd, zodat die toepasbaar werd voor alle $k \geq 27$. Recent zijn ze erin geslaagd om het vermoeden ook voor $15 \leq k \leq 26$ te bewijzen.

Op dezelfde conferentie werd duidelijk dat min of meer tegelijkertijd Michaël Rao van de Universiteit de Bordeaux hetzelfde resultaat langs een andere weg had verkregen.

Bron: *recursed.blogspot.com*

Henk van der Vorst SIAM Fellow

Professor Henk van der Vorst van de Universiteit Utrecht is benoemd tot Fellow van de Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). De Fellowship is een eervolle benoeming voor leden die een buitengewone bijdrage hebben geleverd op het gebied van toegepaste wiskunde en computational science. De buitengewone bijdrage van Van der Vorst is op het gebied van numerieke algoritmes. Vooral de Bi-CGSTAB methode voor het numeriek oplossen van grote stelsels lineaire vergelijkingen is beroemd.

Bron: *fellows.siam.org*

Schaapjes tellen

Er is een positief verband tussen goed slapen en goed academisch presteren, vooral op het gebied van wiskunde. De resultaten van een onderzoek op dit gebied werden gepresenteerd in juni op de SLEEP 2009, de 23ste jaarlijkse bijeenkomst van de Associated Professional Sleep Societies.

Het onderzoek is uitgevoerd onder jongeren tussen de 14 en de 18 jaar, waarvan zowel het slaapgedrag als de schoolcijfers bekend waren. Deelnemers met hoge wiskundecijfers werden 's nachts minder vaak wakker, besteedden minder tijd in bed, sliepen efficiënter en hadden over het algemeen een slaap van zeer goede kwaliteit. Ook was de tijd die het duurde om in slaap te vallen korter dan gemiddeld. Deelnemers met hoge cijfers voor Engels werden 's nachts ook minder vaak wakker. Ook werd er een relatie gevonden tussen een langere inslaaptijd in het weekend en lagere cijfers.

Volgens onderzoekster Jennifer Cousins van de University of Pittsburgh toont deze studie wederom het belang aan van een goede nachtrust voor jongeren.

Bron: *www.sciencedaily.com*

Is het (r)echt?

Simon Singh, de schrijver bekend van de boeken 'Fermat's Last Theorem', 'The Code Book' en 'Big Bang' is verwikkeld in een rechtszaak die volgens hem de hele wetenschap aangaat.

In april 2008 verscheen er een artikel van zijn hand in de Britse krant 'The Guardian' over chiropraxie. Hierin schrijft Singh over de eventuele risico's van chiropractische behandelingen. Ook bespreekt hij of er wel of geen bewijs is dat een dergelijke behandeling effect heeft bij het bestrijden van verschillende aandoeningen bij kinderen, waaronder astma. Na aanleiding van dit artikel heeft de British Chiropractic Association (BCA) een rechtszaak tegen hem aangespannen wegens laster. Singh heeft, na het inwinnen van deskundig juridisch advies, besloten om niet te schikken, maar om het gevecht aan te gaan.

Dit was geen eenvoudige beslissing. Volgens Singh zijn er namelijk twee grote problemen met de Britse lasterwetgeving. Ten eerste kost een dergelijke rechtszaak een fortuin. Volgens een recent onderzoek van Oxford University zijn de kosten van een lasterproces in Engeland of

Wales 140 keer het Europese gemiddelde. In Engeland is het vier keer duurder dan in de nummer twee van de lijst, Ierland en in Ierland is het tien keer duurder dan in Italië, de derde van de lijst. Je moet dus wel beschikken over behoorlijk wat financiële middelen om een lasterproces te kunnen voeren, of je nu degene bent die het proces aanspant, of degene die zich moet verdedigen. Het tweede probleem is volgens Singh dat de bewijslast van een lasterproces bij de aangeklaagde ligt. Er geldt dus dat je schuldig bent tot het tegendeel bewezen is. Deze twee factoren samen maken het heel makkelijk voor grote bedrijven of organisaties met veel geld om iemand van laster te beschuldigen. Bovendien maken deze factoren het bijna onmogelijk voor een individu om zich tegen zo'n beschuldiging te verdedigen. Schikken is dan vaak de enige optie.

Volgens Singh en de mensen achter de campagne 'Keep libel laws out of science' is het, door de manier waarop het Britse rechtssysteem op dit gebied werkt, mogelijk om een kritische stemmen het zwijgen op te leggen. Zo wordt de discussie rond medisch handelen en het aanvoeren van wetenschappelijk bewijs daarbij de kop ingedrukt. De BCA moeten zich tegen de aantijgingen van Singh verdedigen in een open discussie in de medische vakbladen en andere media.

Sinds 4 juni kan op de website een verklaring ondertekend worden, waarin gevraagd wordt om een snelle herziening van de Britse lasterwetgeving. De verklaring is ondertussen ondertekend door twaalf duizend mensen, waaronder journalisten, wetenschappers en mensen met een juridische achtergrond.

Bron: *www.senseaboutscience.org.uk*

Alweer een priemgetal

In juni werd er weer een Mersennepriemgetal gevonden dankzij het programma GIMPS. In het decembernummer van vorig jaar konden we al berichten dat er met GIMPS in september 2008 twee waren gevonden.

Een Mersennepriemgetal is een priemgetal van de vorm $2^n - 1$. Het gevonden getal is $2^{42634801} - 1$ en is het op één na grootste priemgetal dat op dit moment bekend is. Het bestaat uit maar liefst 12.837.064 cijfers. De eerste van de twee Mersennepriemgetallen die in 2008 gevonden werden had er 12.978.189.

Het getal werd gevonden door de Noor Odd Magmar Strindmo, of liever, door zijn computer. Strindmo laat zijn computer namelijk al sinds de oprichting in januari 1996 meerekenen in het project Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). Vrijwilligers kunnen de ongebruikte reken capaciteit van hun computer beschikbaar stellen om te zoeken naar Mersennepriemgetallen. Hun computer krijgt een getal toegewezen en rekt na of het getal een priemgetal is of niet. De computer van Strindmo testte al ruim 1400 kandidaat-priemgetallen. Het Mersennepriemgetal dat het uiteindelijk kreeg toebedeeld, is het 47ste bekende Mersennepriemgetal en de 13de die werd gevonden in het kader van GIMPS.

Bron: *www.kennislink.nl*

Aan de prijs

De International Mathematical Union (IMU) en de Chern Medal Foundation (CMF) hebben een nieuwe wiskundige prijs gelanceerd, de Chern Medal Award en zal worden toegekend aan personen die een indrukwekkende lijst aan wiskundige prestaties op hun naam hebben staan. De prijs bestaat uit een medaille en 500.000 Amerikaanse dollar. De helft van dit bedrag wordt gedoneerd aan organisaties ter bevordering van onderzoek, onderwijs of andere activiteiten ter promotie van de wiskunde. De prijswinnaar beslist waar het geld naartoe gaat.

De prijs is opgericht in nagedachtenis van de Chinese wiskundige Shiing-Shen Chern (1911–2004, Tianjin, China). Professor Chern wijde zijn leven aan wiskunde. Hij behaalde fundamentele resultaten binnen de moderne meetkunde en richtte het gebied van globale differentiaalmeetkunde op. Tijdens zijn leven was hij vrijgevig als hij daarmee de vooruitgang van de wiskunde kon stimuleren. De hoop is dat deze prijs ook dit soort persoonlijke vrijgevigheid zal bevorderen.

De commissie voor de toekenning van de prijs wordt door de IMU en CMF samengesteld en de prijs zal één keer in de vier jaar uitgereikt worden tijdens het International Congress of Mathematicians (ICM). De eerste keer zal tijdens ICM2010 in Hyderabad (India) zijn.

Bron: www.ams.org/news

Publiceer meer

Uit gegevens die verzameld werden door het Rathenau Instituut blijkt dat Nederlandse onderzoeksinstituten veel beter presteren dan over het algemeen werd aangenomen.

Publieke onderzoeksinstituten behoren niet tot een universiteit, maar doen wel wetenschappelijk onderzoek. In Nederland zijn er ongeveer 110 van dergelijke instituten. Hieronder vallen NWO, TNO en de KNAW. Het Rathenau Instituut verzamelde gegevens over publicaties en hoeveel geld de instituten binnenhalen uit het bedrijfsleven.

In de periode van 1990 tot 2006 werd er door de onderzoeksinstituten die zich toeleggen op fundamenteel onderzoek steeds vaker gepubliceerd in wetenschappelijke tijdschriften. Ieder jaar steeg het aantal publicaties met zo'n tien procent. Ook werden de publicaties steeds vaker geciteerd. In vergelijking met het internationale gemiddelde was het aantal citaties zelfs vijftig procent meer. Vooral het Energie Onderzoek Centrum Nederland (ECN) scoort hoog. Verder komt veel geld van de onderzoeksinstituten uit het bedrijfsleven. De interesse van bedrijven in het onderzoek kan een indicatie zijn dat deze onderzoeksinstituten belangrijker zijn voor de Nederlandse innovatie dan werd gedacht.

Bron: www.cwi.nl

Hypatia in de film

Op het Cannes Film Festival van 2009 werd de film *Agora* van de Chileense regisseur Alejandro Amenabar getoond. De film gaat over het leven van de vierde eeuwse wiskundige en astronome Hypatia, die werd gedood door een woedende menigte Christenen in het door Rome overheerste Egypte, en de tweestrijd van haar slaaf Davus, heen en weer geslingerd tussen zijn liefde voor Hypatia en zijn verlangen naar vrijheid. Er wordt gezegd dat Hypatia onder andere commentaren heeft geschreven op de *Konika* van Apollonius en de *Arithmetika* van Diophantus.

Hypatia, die bekend stond als atheïste en leefde in wrede tijden, werd het slachtoffer van geloofsfanatici. Amenabar vertelde dat hij in het verhaal van Hypatia veel hedendaagse misstanden terugzag. Dat gaf hem het idee om haar verhaal te gebruiken om een de film over het heden te maken. Het publiek was in ieder geval enthousiast, want er werd na de vertoning uitgebreid geapplaudiseerd.

Andere bekende films van Amenabar zijn 'Abre los Ojos' en 'The Others'.

Bron: www.guardian.co.uk

Personeel en wiskunde

Google Inc. gebruikt een wiskundige formule om te voorspellen voor welke werknemers de kans het grootst is dat ze binnenkort ander werk

gaan zoeken. Hierover verscheen in mei een artikel in The Wall Street Journal.

Sinds een tijd heeft Google last van leegloop. Het bedrijf wordt te groot en de nieuwigheid is eraf. Daardoor krijgen werknemers het idee dat ze minder kunnen bijdragen en wordt de aantrekkingskracht van nieuwe bedrijven als Facebook en Twitter groter. In de afgelopen maanden hebben een aantal hooggeplaatste mensen Google al verlaten.

De formule die Google gebruikt om te bepalen hoe waarschijnlijk het is dat iemand ander werk gaat zoeken, is gebaseerd op gegevens uit functioneringsgesprekken en enquêtes, en gegevens over salaris en promoties. Google wil niet zeggen wat de formule precies is, omdat die op dit moment nog uitgetest wordt. Wel zijn, volgens Google, met behulp van de formule al mensen aangewezen die het gevoel hebben dat het bedrijf hun capaciteiten niet voldoende benut. Aangezien dit een belangrijke reden is voor mensen om een nieuwe baan te zoeken, is dit een teken dat de formule voldoet.

Een wiskundige formule gebruiken om een personeelsprobleem op te lossen, zou wel typisch iets voor Google zijn. Het bedrijf heeft in 2005 tien gouden regels opgesteld en één daarvan is 'using heavy data to derive decisions'. Helaas is een belangrijke klacht van veel ex-werknemers van Google dat het bedrijf te onpersoonlijk is.

Bron: online.wsj.com

Casper de file

Een team van wiskundigen van het MIT heeft een model ontwikkeld voor spookfiles. De resultaten verschenen in mei in de elektronische editie van het tijdschrift Physical Review E.

Spookfiles zijn files die ontstaan zonder aanwijsbare reden, zoals een ongeluk of werkzaamheden. Ze ontstaan als er veel verkeer op de weg is. Kleine verstoringen, zoals een auto die plotseling moet remmen, kunnen zich dan snel ontwikkelen tot een file, die zichzelf vervolgens in stand houdt. Het model omschrijft de omstandigheden waaronder dergelijke files zich vormen en hoe ze zich daarna ontwikkelen. Deze kennis zou gebruikt kunnen worden bij het ontwerpen van nieuwe wegen en het aanpassen van bestaande wegen, om zo de kans op spookfiles te verkleinen.

Voor het model worden dezelfde vergelijkingen gebruikt als voor de omschrijving van golven die ontstaan bij explosies. Een belangrijke eigenschap die deze verschijnselen met elkaar gemeen hebben is de aanwezigheid van een sonisch punt. Vanuit dit punt wordt de golf in twee delen gesplitst waartussen geen communicatie mogelijk is. Voor de file is dit het stuk achter het begin van de file, waar auto's vrij kunnen rijden, en het stuk ervoor, waar de auto's in de file staan. Bestuurders die in de file staan, weten niet wat de oorzaak van de file is en zien alleen dat de file ineens is verdwenen.

Toekomstige studies zullen zich richten op de invloed van verschillende factoren op het ontstaan van spookfiles, zoals de verkeersdichtheid, de autosnelheden en het aantal rijstroken.

Bron: www.sciencedaily.com

Probleem Hirzebruch opgelost

Een belangrijk probleem op het grensvlak van topologie en algebraïsche meetkunde, 50 jaar geleden geformuleerd door Friedrich Hirzebruch, is opgelost door Dieter Kotschik van de Ludwig-Maximilians Universität in München. Het resultaat verscheen in de Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS). Het probleem gaat over complex-algebraïsche variëteiten, dit zijn ruwweg topologische ruim-

ten uitgerust met extra structuur (zogeneten algebraïsche structuur) door ze te beschrijven als nulpuntsverzamelingen van polynomen met complexe coëfficiënten. In iedere dimensie is voor dergelijke variëteiten een verzameling invarianten gedefinieerd, de zogenaamde Cherngetallen. Het zijn algebraïsche invarianten, wat betekent dat als twee variëten dezelfde algebraïsche structuur hebben, de corresponderende Cherngetallen gelijk zijn.

Voor algebraïsche variëteiten van complexe dimensie twee en lager zijn de Cherngetallen zelfs topologische invarianten; dat wil zeggen dat voor elk tweetal algebraïsche variëteiten de Cherngetallen gelijk zijn als de topologieën gelijk zijn. In andere woorden, in lage dimensies worden de Cherngetallen volledig bepaald door de topologie van de variëteit en niet zozeer door de algebraïsche structuur.

In een artikel van 1954 stelde Hirzebruch de vraag of in hogere dimensies de Cherngetallen ook topologische invarianten zijn, en meer specifiek, welke lineaire combinaties van Cherngetallen topologisch invariant zijn. Vóór de oplossing van Kotschik was al bekend dat bepaalde combinaties van Cherngetallen, namelijk de Euler karakteristiek en de zogenaamde Pontrjagingetallen, altijd topologisch invariant zijn. Kotschik heeft bewezen dat dit de enige topologisch invariante combinaties zijn. Dat wil zeggen: voor iedere lineaire combinatie van Cherngetallen die lineair onafhankelijk is van de eerdergenoemde, is er een tweetal algebraïsche variëteiten te vinden met dezelfde topologie, maar waarvoor de combinatie een andere waarde aanneemt.

Bart van den Dries, Universiteit Utrecht

Nederland 119 punten

Op de Benelux Wiskunde Olympiade 2009 heeft het Nederlandse team België en Luxemburg overtuigend verslagen. Het individuele klassement werd aangevoerd door drie Nederlanders.

In het officiële landenklassement werd Nederland eerste met 119 punten, gevolgd door België met 87 punten en als laatste Luxemburg, dat 63 punten haalde. In totaal deden er dertig leerlingen mee. Ze kregen vier moeilijke wiskundeopgaven voorgelegd die ze individueel moesten oplossen. De zeventienjarige Raymond van Bommel uit Hoofddorp was de enige die erin slaagde alle punten te behalen.

De Benelux Wiskunde Olympiade werd dit jaar voor het eerst gehouden en vond plaats in mei in Bergen op Zoom. Veel van de leerlingen die meededen, hebben ook meegedaan aan de Internationale Wiskunde Olympiade in Bremen in de zomer. *Bron: www.wiskundepersdienst.nl*

Hendrik Lenstra geridderd

Op 24 april werd Professor Hendrik Lenstra benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Dit gebeurde op zijn zestigste verjaardag, tijdens een congres dat geheel in het teken stond van zijn werk.

Lenstra, een van de grootste wiskundigen die Nederland ooit heeft voortgebracht, geniet ook internationaal veel aanzien. Hij promoveerde op 28-jarige leeftijd in de getaltheorie en werd een jaar later benoemd tot hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam. Op zijn 35ste werd hij lid van de KNAW. Zijn interesse beperkte zich niet alleen tot de getaltheorie. Ook op het gebied van de algebraïsche getaltheorie en algebraïsche meetkunde leverde hij belangrijke bijdragen.

Lenstra is een geliefd docent, die ook regelmatig ander publiek opzoekt. Hij organiseerde 'Pi in de Pieterskerk', maakte een animatie over het werk van Escher, getiteld 'Escher en het Droste effect', en is

zeer betrokken bij het project 'Reken mee met ABC', waarbij duizenden mensen via een website hun computer mee laten rekenen aan één grote rekenopdracht. In 2007 hield hij een voordracht op het popfestival Lowlands, die veel belangstelling trok. *Bron: www.nieuws.leidenuniv.nl*



Hendrik Lenstra met koninklijke onderscheiding

Nieuwe NLT-modules gecertificeerd

In juni zijn twintig nieuwe modules gecertificeerd voor het vak Natuur Leven en Technologie (NLT). Harrie Eikelhof, voorzitter van de Stuurgroep NLT, heeft de certificaten uitgereikt.

Het vak NLT is een geïntegreerd bètavak, wat betekent dat het vak gaat over onderwerpen op de grensvlakken van de disciplines biologie, natuurkunde, fysische geografie, scheikunde en wiskunde. Het vak ging in 2007 van start op 150 middelbare scholen. Inmiddels biedt bijna de helft van de havo/vwo-scholen het vak aan. Scholen kunnen binnen zekere grenzen kiezen welke modules ze leerlingen laten volgen. Havoleerlingen doen maximaal acht modules en vwoleerlingen doen er maximaal elf.

De nieuwe modules zijn voor de havo: 'Maak het verschil', 'Medische beeldvorming', 'Lijmen en hechten', 'Veiliger met kaart en GIS', 'Glastuinbouw en energie', 'Duurzaam en niet duur', 'Smaak maken' en 'Een waarheid als een koe'. Voor het vwo zijn gecertificeerd: 'Zuiver drinkwater!?', 'Bioinformatica', 'Robotica', 'Holografie', 'MP3-speler', 'Kernfusie', 'Levensloop van sterren', 'Ruimte voor de rivier', 'CO2-opslag; Zin of onzin', 'Kijken en zien', 'Klimaatverandering; Als het noordpoolgebied opwarmt' en 'Hart en vaten'.

In totaal zijn er nu 41 gecertificeerde NLT-modules. Ze zijn tot stand gekomen in een samenwerking tussen scholen, universiteiten, hogescholen en kennisinstellingen. NLT blijft in ontwikkeling: er zijn nog circa 25 nieuwe modules in de maak. *www.betavak-nlt.nl*

Robert Tijdeman

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

tijdeman@math.leidenuniv.nl

Afscheidsrede

Het leven van een

In getaltheorie worden eigenschappen van gehele getallen bestudeerd. Veel problemen spreken tot de verbeelding en zijn aan leken makkelijk uit te leggen, terwijl voor het oplossen van die problemen heel vaak zeer ontoegankelijke technieken nodig zijn. Vorig jaar ging Robert Tijdeman, vermaard getaltheoreticus, met emeritaat. In zijn afscheidsrede, uitgesproken op 29 augustus 2008, schetst hij zijn ervaringen en visie als onderzoeker, opleider, beoordelaar, burger en persoon. Ook gaat hij in op de talenten die een wiskundige moet hebben.

Het is me een genoegen iets te vertellen over het leven van een wiskundige. Aanleiding daarvoor zijn vragen van niet-wiskundigen zoals "Is er nog iets nieuws te bewijzen in de wiskunde?", "Kun je als je wiskunde studeert nog wat anders worden dan leraar?" en "Word je daarvoor betaald?". In recente films en boeken over wiskundigen wordt bij voorkeur gekozen voor wiskundigen met zeer afwijkend en soms bizar gedrag. Ik heb daarom gekozen voor een gewone hoogleraar wiskunde. Nu wil ik mijn collega's niet gewoon noemen. Zo kom ik terecht bij een wiskundige die ik vrij goed ken. Overigens is het mij opgevallen dat in veel afscheidsredes de spreker de hoofdrol speelt.

Hogere machten

Bijna 37 jaar geleden hield ik een openbare les getiteld 'Oud en nieuw in de getaltheorie' [1]. Dat zou ik nu weer kunnen doen, want wat toen nieuw was, is tegenwoordig oud en er is veel nieuws te vertellen. Ik kon toen nog niet bevroeden welk een grote rol hogere machten in mijn leven zouden spelen. U denkt nu misschien aan iets spiritueels, maar ik bedoel de hogere machten van de u welbekende getal-

len 1, 2, 3, 4, enzovoort.

Als ik getal zeg, bedoel ik hier een positief, geheel getal. Een macht krijg je door een getal een aantal keren met zichzelf te vermenigvuldigen. Vermenigvuldig je het getal één keer met zichzelf, dan krijg je een kwadraat, 3 maal 3 is 9, 4 maal 4 is 16, 5 maal 5 is 25 en dus zijn 9, 16 en 25 kwadraten. Merkwaardig is dat $9+16=25$. De som van twee kwadraten kan dus zelf ook een kwadraat zijn. Dat wordt vaak gebruikt bij sommetjes over de stelling van Pythagoras. U herinnert zich nog wellicht: als de lengtes van de rechthoekszijden gelijk zijn aan 3 en 4, dan heeft de schuine zijde lengte 5, immers $a^2 + b^2 = c^2$, in dit geval $3^2 + 4^2 = 5^2$. Er zijn meer van die mooie Pythagoreïsche drietallen, bijvoorbeeld 5, 12, 13 en 8, 15, 17. U denkt wellicht ook aan 6, 8, 10, maar dat is te krijgen door het drietal 3, 4, 5 te verdubbelen. Wij zoeken naar *primitieve* getallen, dat zijn getallen die geen gemeenschappelijke deler groter dan 1 hebben. Er zijn oneindig veel primitieve Pythagoreïsche drietallen. Een Franse jurist, de Fermat, die in de 17e eeuw leefde, heeft een methode ontwikkeld om al deze drietallen te karakteriseren, zie het kader over deze drietallen.

Hogere machten krijg je als je een getal meer dan eens met zichzelf vermenigvuldigt. Doe je het twee keer, dan heb je een derdemacht, bijvoorbeeld 8, want dat is $2 \times 2 \times 2$, of 1000, want dat is $10 \times 10 \times 10$. Vermenigvuldig je een getal drie keer met zichzelf, dan heb je een vierdemacht, bijvoorbeeld 16, want dat is $2 \times 2 \times 2 \times 2$, of 81, want dat is $3 \times 3 \times 3 \times 3$. [18] Er zijn veel meer kwadraten dan hogere machten. Hoe hoger de exponent, des te zeldzamer de machten zijn. Overigens heeft u dagelijks met machten te maken. Als u 2875 euro krijgt, is dat $2 \times 1000 + 8 \times 100 + 7 \times 10 + 5$, ofwel $2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$. Overigens, ook hier geldt: hoe hoger de macht, hoe zeldzamer het is dat je het krijgt.

Voor een wiskundige is het niet verrassend dat, nadat Fermat begrepen had welke sommen van twee kwadraten een kwadraat zijn, hij zich afvroeg of de som van twee derdemachten wellicht een derdemacht kan zijn. Na zijn dood vond zijn zoon in de marge van een wiskundeboek een aantekening van Fermat dat hij een wonderlijk mooi bewijs gevonden had dat de som van twee derdemachten geen derdemacht kan zijn, de som van twee vierdemachten geen vierdemacht, enzovoort, maar dat de marge te klein was om het bewijs op te schrijven. Deze bewering staat bekend als *de laatste stelling van Fermat*:

Er bestaan geen getal $n > 2$ en primitieve drietal getallen x, y, z zó dat $x^n + y^n = z^n$.

Nergens was te vinden welk bewijs Fermat in



Robert Tijdeman

wiskundige

gedachten had. Dat was jammer, maar niet verbazingwekkend. Er zijn maar weinig bewijzen die Fermat wel opgeschreven heeft.

Meestal daagde hij zijn tijdgenoten uit om bepaalde stellingen te bewijzen, zonder zijn eigen bewijs te onthullen. Wel opmerkelijk is dat de wiskundige Euler, die een eeuw na Fermat leefde, geen bewijs van de laatste stelling van Fermat kon vinden. Hij bewees alle andere beweringen van Fermat op één bewering na, die hij weerlegde. Wel bewees Euler de laatste stelling van Fermat voor exponent 3, dat wil zeggen dat de som van twee derdemachten geen derdemacht kan zijn, nadat Fermat het al voor exponent 4 had aangetoond. In de 19de eeuw volgden bijna alle exponenten tot 100, vooral dankzij de Duitser Kummer, die daarvoor een theorie ontwikkelde die zou uitmonden in de algebraïsche getaltheorie. In het begin van de 20ste eeuw werden nog enkele slimme trucs bedacht en kwam men tot exponent 617. In de tweede helft van de vorige eeuw werd de computer in stelling gebracht. Toen ik in 1971 mijn openbare les hield kwamen de exponenten tot 100000 in zicht en in 1993 was het voor alle exponenten tot vier miljoen bewezen. Toch is dit niet de manier om Fermats laatste stelling te bewijzen. Tenslotte zijn de getallen tot vier miljoen nog niet een honderdste procent van alle getallen, sterker nog, in feite vormen ze 0% van alle getallen. Andere methoden waren nodig. En die kwamen er. In 1982 gaf de Duitser Faltings ons nieuwe hoop door te be-

wijzen dat er voor vaste exponent n maar eindig veel primitieve drietallen x, y, z zijn zó dat $x^n + y^n = z^n$, maar zijn methode is ineffectief en kan daarom niet tot een volledig bewijs leiden. Onverwachts, in 1993, kondigde de Engelsman Wiles aan een bewijs van Fermats laatste stelling gevonden te hebben. Zeven jaar lang had deze hoogleraar uit Princeton in stilte aan een nieuwe theorie gewerkt die het bewijs mogelijk zou maken en uiteindelijk was het hem gelukt. Dacht hij, want de referenten die zijn bewijs controleerden vonden een gat in de redenering. Wat een teleurstelling. Wiles ging onverdroten verder en een jaar later slaagde hij er met hulp van zijn landgenoot Richard Taylor in het gat te dichtten. In 1995 verscheen het volledige bewijs van de laatste stelling van Fermat, 140 blad-

zijden gecompliceerde wiskunde. Na 360 jaar was de stelling bewezen waar bekende en onbekende wiskundigen, en hobbyisten hun tanden op stuk hadden gebeten [2].

Het is lang niet altijd het geval dat oude wiskundevermoedens door gerenommeerde wiskundigen worden opgelost. Een goed voorbeeld daarvan is het vermoeden van Catalan. De getallen 8 en 9 zijn beide machten, want $8 = 2 \times 2 \times 2$ en $9 = 3 \times 3$. Als je verder rekent (zie het kader over machten), kom je nog wel machten tegen die 2 verschillen, namelijk $25 = 5^2$ en $27 = 3^3$, en machten die 3 verschillen, namelijk $125 = 5^3$ en $128 = 2^7$, maar het verschil 1 vind je niet meer. Catalan lanceerde in 1844 het vermoeden dat 8 en 9 de enige machten zijn die 1 verschillen. Laten we eens aannemen dat er nog een paar

Getallen, machten, hogere machten

Getallen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Kwadraten:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...
3e machten:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	...
4e machten:	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000	...
5e machten:	1	32	243	1024	3125	7776	.	.	.	.	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Machten: de getallen die vanaf de tweede rij voorkomen. Dus: 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196, 216, 225, 243, 256, ...

Hogere machten: alle getallen die vanaf de derde rij voorkomen. Dus: 1, 8, 16, 27, 32, 64, 81, 125, 128, 216, 243, 256, ...

Pythagoreïsche drietallen

Laat r, s getallen zijn met $r > s$. Definieer $x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$. Dan geldt $x^2 + y^2 = z^2$, want

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (r^2 - s^2)^2 + (2rs)^2 \\ &= r^4 - 2r^2s^2 + s^4 + 4r^2s^2 \\ &= r^4 + 2r^2s^2 + s^4 \\ &= (r^2 + s^2)^2 = z^2. \end{aligned}$$

Hiermee kun je willekeurig veel Pythagoras-drietallen x, y, z maken. Als je $r - s$ oneven kiest en r, s primitief, dan zijn ook x, y, z primitief.

Bijvoorbeeld geldt:

$$\begin{aligned} r = 2, s = 1 &\rightarrow x = 3, y = 4, z = 5; \\ r = 3, s = 2 &\rightarrow x = 5, y = 12, z = 13; \\ r = 4, s = 1 &\rightarrow x = 15, y = 8, z = 17; \\ r = 4, s = 3 &\rightarrow x = 7, y = 24, z = 25. \end{aligned}$$

Zo vinden we de eerder genoemde Pythagoras-drietallen 3,4,5; 5,12,13; 15,8,17; 7,24,25.

Fermat bewees bovendien het omgekeerde: bij elk primitief drietal getallen x, y, z met $x^2 + y^2 = z^2$ kun je getallen r, s vinden zó dat $x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$. Er zijn dus geen andere primitieve Pythagoras-drietallen dan de drietallen die je met de r, s constructie kunt maken.

machten is dat 1 verschilt. In 1850 bewees V.A. Lebesgue dat het kleinste van die twee machten geen kwadraat kan zijn en in 1964 bewees de Chinees Chao Ko dat ook de grootste geen kwadraat kan zijn. De vraag werd dus: kunnen twee hogere machten 1 verschillen? Anders uitgedrukt:

Bestaat een oplossing in getallen $m > 2, n > 2, x, y$ van $x^m - y^n = 1$?

In 1976 bewees ik dat er boven een bepaalde grens geen Catalaanse paren meer voorkomen. Helaas was die grens wel erg hoog, zoiets als

$$10^{10^{10^{10^{300}}}},$$

veel te hoog om met een computer de resterende paren te controleren. Met name door de Fransman Mignotte werd die grens behoorlijk omlaag gebracht, en rond de eeuwwisseling leek het definitieve bewijs van het vermoeden van Catalan in zicht. Plotseling was er het gerucht dat een Roemeen Mihailescu uit Paderborn Catalans vermoeden bewezen had met behulp van een andere methode, namelijk de door Kummer gestarte algebraïsche getaltheorie. Een probleem was wel dat hij moeite had zijn ideeën goed op te schrijven. De Wit-Rus Bilu uit Bordeaux hielp Mihailescu aan een acceptabel bewijs. Ditmaal werd een bekend vermoeden al binnen 160 jaar opgelost [3].

Dit waren enkele getaltheoretische hoogtepunten tijdens mijn actieve loopbaan. U zou nu wellicht de vraag willen stellen of er nog

wel iets over is om te bewijzen. Maakt u zich niet ongerust. Wiskundigen zijn nog creatiever in het bedenken van vermoedens dan van bewijzen. We weten nog niet of twee hogere machten 2 kunnen verschillen. In 1993 sprak ik tijdens de Fermatdag in Utrecht het vermoeden uit dat de som van twee primitieve hogere machten niet gelijk kan zijn aan een derde. Anders uitgedrukt:

Er zijn geen getallen l, m, n alle > 2 en primitief drietal x, y, z zó dat $x^l + y^m = z^n$.

Door $l = m = n$ te nemen krijg je de laatste stelling van Fermat, door $x = 1, l = 3$ te nemen Catalans vermoeden. Sinds de Amerikaanse bankier Beal een som geld voor de oplossing van dit probleem heeft uitgelooft, staat deze bewering bekend als het vermoeden van Beal [4]. Hoewel er de laatste tijd flinke vooruitgang is geboekt, is dit probleem nog niet opgelost. Overigens is dit niet de heilige graal waar mensen naar zoeken die zich met dit soort problemen bezig houden. Dat is het nog diepere *abc*-vermoeden, in 1985 uitgesproken door de Fransman Oesterlé en de Brit Masser. Ik waag een poging om u het idee duidelijk te maken. U kent vast wel de priemgetallen, de getallen die niet in kleinere getallen te ontbinden zijn, zoals 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 en ook 101. Stel je hebt een primitief drietal getallen a, b , en c zó dat $a + b = c$. Bereken dan het product N van de priemdelers van abc . Nemen we $a = 32, b = 49, c = 81$, dan zijn dat alleen de priemgetallen 2 (voor

32), 7 (voor 49) en 3 (voor 81). Het product van die priemgetallen is $N = 2 \times 7 \times 3 = 42$. Het *abc*-vermoeden, een variant van het *abc*-vermoeden, zegt nu dat c altijd kleiner is dan N^2 :

Als a, b, c een primitief drietal is met $a + b = c$, dan geldt $c < (\prod_{p|abc} p)^2$.

In dit geval klopt het, want $c = 81$ is kleiner dan $N^2 = 42^2 = 1764$. Er is ondanks veel speurwerk geen enkel primitief drietal gevonden waarvoor het niet klopt. Het tot nu toe in zekere zin beste resultaat is

$$a = 3^{10} \times 109, b = 2, c = 23^5$$

met $c = 6436343$ en $N = 3 \times 109 \times 2 \times 23 = 15042$. Ook hier is echter c aanmerkelijk kleiner dan $N^2 = 226261764$. Als u het *abc*-vermoeden bewijst, dan bewijst u in wezen zowel de laatste stelling van Fermat (zie kader links), als het vermoeden van Catalan, het vermoeden van Beal, en nog veel meer [5].

Wiskunde is overal nodig

Waar is dit allemaal goed voor? Voor de wiskundige gaat het om het bevredigen van nieuwsgierigheid, het structureren van inzicht en de schoonheid van een redenering. Wat dat betreft zijn we eigenlijk wiskunstenaars. Helaas zijn er maar weinig mensen die we van onze kunstuitingen kunnen laten genieten, anders dan musici en schilders. Er is echter één aspect van de wiskunde dat niet opgaat voor muziek en schilderijen. Wiskunde is overal nodig. De wiskundigen bouwen samen aan een wetenschap die door iedereen gebruikt wordt. Grote priemgetallen spelen een belangrijke rol bij de bescherming van gegevens, bijvoorbeeld bij het elektronisch bankieren. De treinen rijden nu beter op tijd dan een paar jaar geleden mede dankzij het werk van de Nederlandse wiskundige Lex Schrijver, die hiervoor vandaag een prijs ontvangt. Voor andere toepassingen van wiskunde in het dagelijks leven zou ik kunnen verwijzen naar de mobiele telefoon, CD en DVD, Google, de weersverwachting, het verkeer op de weg en in de lucht, het beheer van uw pensioengeld, enzovoort. Zelf ben ik zijdelings betrokken bij de ontwikkeling van een geheel andere toepassing van de wiskunde. Dat ging als volgt.

In 1997 werd ik uitgenodigd voor een conferentie over discrete tomografie. Zulke uitnodigingen krijg ik wekelijks en omdat ik niet wist wat discrete tomografie is, heb ik de uitnodiging meteen verwijderd. Na enige weken kreeg ik een persoonlijke email van Maurice Nivat, dat hij me voor de conferentie uitgenodigd had om een wiskundeprobleem te bespreken. Ik nam de uitnodiging aan. Discrete

tomografie bleek te gaan over het reconstrueren van een vorm van een object uit een aantal (röntgen)foto's. Denk aan scans, zoals de MRI. Dat gaat met continue tomografie waarvoor honderden foto's nodig zijn. Het object wordt rondgedraaid ten opzichte van de camera en vanuit alle hoeken langs een cirkel gefotografeerd. Kan dat niet met veel minder foto's? Zo kom je terecht bij de discrete tomografie, die in 1997 nog in de kinderschoenen stond en geen enkele praktische toepassing had. Een probleem uit de discrete tomografie hield me bezig en op een gegeven moment realiseerde ik me dat het nemen van een foto eigenlijk net zoiets is als het berekenen van de rest bij deling door een veelterm. Nu is er een stelling in de getaltheorie, de zogenaamde Chinese reststelling, die je in staat stelt om, als je van een getal weet wat de rest is bij deling door 5, en bij deling door 7, en bij deling door 11, te bepalen wat de rest is bij deling door $5 \times 7 \times 11$ (zie kader op de volgende bladzijde). Er is ook zo'n stelling voor veeltermen. Als je een aantal foto's neemt uit verschillende hoeken, is dat dus net zoiets als de resten bepalen bij deling door verschillende veeltermen. Door gebruik te maken van die duizend jaar oude stelling kon ik de mogelijke objecten karakteriseren die tot de gemaakte foto's zouden leiden. Dat gaf inzicht in de structuur van het gefotografeerde object. Tezamen met mijn Hongaarse collega Lajos Hajdu heb ik dit uitgewerkt [6]. Het ging hierbij dus om het herkennen van de structuur van een mij bekende stelling in een onverwachte setting.

In die tijd was er een begaafde derdejaars student die zowel wiskunde als informatica studeerde. Ik vroeg hem of hij geïnteresseerd was in het doen van onderzoek op dit gebied, want dan konden we voor hem een promotieplaats aanvragen. Joost Batenburg, want zo heet hij, zei dat hij een onderwerp met wiskunde én informatica, en mogelijk medische toepassingen, ideaal vond. Bij de medische toepassingen dachten we aan het verlagen van de stralingsbelasting door het verminderen van het aantal te maken foto's bij een scan. In het economiekatern van de NRC van 14 juni van dit jaar [7] las ik dat het reconstrueren van een scan van een knietje 25 minuten kost, en van een brein langer. Als je dat weet te halveren, is er een enorme winst geboekt. In de wetenschapsbijlage van de NRC van diezelfde dag staat een artikel [8] van het wiskundemeisje Ionica Smeets [9] over het scannen van diamanten. Diezelfde Joost Batenburg, inmiddels in Leiden gepromoveerd en in Antwerpen werkzaam, is de hoofdpersoon van dat artikel. Door gebruik te maken van grafi-

Gevolgen van het *abc2*-vermoeden

Uit abc2 volgt Fermat

In 1830 was bekend dat als $x^n + y^n = z^n$ voor getallen $n > 2, x, y, z$, moet gelden dat $n > 6$. Stel dat zo'n oplossing bestaat en dat het *abc2*-vermoeden waar is. Dan is

$$z^n = c < N^2 = \left(\prod_{p|x^n y^n z^n} p \right)^2 = \left(\prod_{p|xyz} p \right)^2.$$

Er geldt $\prod_{p|x} p \leq x, \prod_{p|y} p \leq y, \prod_{p|z} p \leq z$ en $x \leq z, y \leq z$. Dus

$$z^n < (xyz)^2 < (z^3)^2 = z^6.$$

Hieruit volgt $n < 6$, maar dat was al in 1830 uitgesloten. $\square$

Uit abc2 volgt Catalan

Sinds 1964 was bekend dat als $x^m - y^n = 1$ een andere oplossing heeft dan $3^2 - 2^3 = 1$, zowel de m als de n groter zijn dan 4. Stel dat zo'n oplossing bestaat en dat het *abc2*-vermoeden waar is. Dan geldt

$$x^m = c < N^2 = \left(\prod_{p|x^m y^n} p \right)^2 = \left(\prod_{p|xy} p \right)^2.$$

Er geldt $y^n < x^m$, dus $y < x^{m/n}$. Zo vinden we

$$x^m < (xy)^2 < x^{2+2m/n}.$$

Dus $m < 2 + 2\frac{m}{n}$, ofwel $1 < \frac{2}{m} + \frac{2}{n}$. Echter $\frac{2}{m} + \frac{2}{n} < \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$. $\square$

sche kaarten uit de game-industrie, hardware bedoeld voor computerspellen dus, is hij er in geslaagd om de scantijd van een diamant terug te brengen van twee uur tot twaalf minuten en het berekenen van de vorm van de diamant zelf van een week tot een half uur. Dat kennen van de precieze vorm van de diamant is voor de diamantslijpers nodig om de ruwe diamant zo gunstig mogelijk te kunnen splitsen in diamantjes bruikbaar voor de verkoop. Aan het eind van het artikel spreekt Batenburg de verwachting uit dat over vijf jaar discrete tomografie ook medische toepassingen zal hebben. Karakteristiek in dit verhaal is de onvoorspelbaarheid van ontwikkelingen en het belang van aanwezige kennis, nieuwsgierigheid en inzicht.

Eigenschappen van wiskundigen

Wiskundige zijn is veelzijdig en veeleisend. Leven met een wiskundige ook. Mijn vrouw is op dit gebied ervaringsdeskundige. Ik maak u dan ook attent op een boeiende lezing die ze aangekondigd heeft te houden, niet met de titel "Het leven van een wiskundige", maar "Het leven mét een wiskundige". Wat maakt het beroep van wiskundige zo veelzijdig? Wiskundige zijn vereist kennis van de wiskunde, inzicht, creativiteit, gestructureerd kunnen denken, doorzettingsvermogen, schrijftalent, objectiviteit, geduld,

het vermogen om het werk van anderen te doorgronden en beoordelen, met studenten en promovendi kunnen omgaan en werken, en ook nog organisatie-, inschatting- en selectievermogen om de bijkomende bestuurlijke taken te kunnen verrichten. Die talenten bezitten wiskundigen niet in gelijke mate. Het is me opgevallen dat veel mensen anderen vooral beoordelen op de punten waar ze zelf goed in zijn. Mensen die veel onderzoek doen letten op publicatielijsten, mensen die didactisch goed zijn letten op welke leerlingen iemand heeft, mensen die bestuurlijk sterk zijn letten op de belangrijke functies die iemand vervuld heeft, enzovoort. Soms moet je dit voor ogen houden als je het oordeel van een ander, en van jezelf, wilt begrijpen. Ik ben ervan overtuigd dat de wiskunde alleen kan floreren doordat er velerlei soorten wiskundigen zijn en ze elkaar aanvullen.

Talent benutten

Een belangrijke eigenschap die ik nog niet genoemd heb is het vermogen om talent te herkennen en te laten ontwikkelen. Als ik kijk hoe Nederland met talent omgaat, dan is er nog veel te verbeteren. Ik noem enkele voorbeelden.

Ik heb zelf het voorrecht gehad om op het gymnasium drie wiskundeleraars te hebben waarvan er twee gepromoveerd waren en de

De Chinese reststelling.

De Chinese reststelling zegt dat als $m_1, m_2, \dots, m_r$ getallen zijn waarvan elk tweetal primitief is, en $c_1, c_2, \dots, c_r$ getallen zijn met $0 \leq c_i < m_i$ voor $i = 1, 2, \dots, r$, er een uniek getal c met $0 \leq c < m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$ is en de volgende eigenschap:

als x voor $i = 1, 2, \dots, r$ bij deling door m_i rest c_i heeft, dan heeft x bij deling door $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$ rest c .

Het getal c kan zo gevonden worden: Schrijf $m = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r$. Zoek voor elke i een getal d_i zó dat $d_i m / m_i$ bij deling door m_i rest 1 heeft. Bereken dan

$$y = c_1 d_1 \frac{m}{m_1} + c_2 d_2 \frac{m}{m_2} + \dots + c_r d_r \frac{m}{m_r}.$$

Dan is c de rest van y bij deling door m .

Bijvoorbeeld: het getal x heeft bij deling door 5 rest 3, bij deling door 7 rest 4 en bij deling door 11 rest 5. Dan is

$$\begin{aligned} m_1 &= 5, m_2 = 7, m_3 = 11, m = 385, \\ c_1 &= 3, c_2 = 4, c_3 = 5, d_1 = 3, d_2 = 6, d_3 = 6, \\ y &= 3 \times 3 \times 77 + 4 \times 6 \times 55 + 5 \times 6 \times 35 = 3063 \\ &\text{en } c = 368. \end{aligned}$$

Inderdaad heeft 368 bij deling door 5 rest 3, bij deling door 7 rest 4 en bij deling door 11 rest 5. De Chinese reststelling impliceert dat elk getal x dat dezelfde resten heeft een veelvoud van 385 van 368 verschilt.

derde naderhand is gepromoveerd. Zij brachten me inzicht bij. Het ging er om de wiskunde te begrijpen, niet om veel sommetjes te maken. Als je het principe begrepen had, was de vaardigheid snel verworven [19]. De vakken-nis van veel wiskundeleraars, met name in de onderbouw, schiet tegenwoordig tekort om de beste leerlingen goed te begeleiden. De meeste jongere leraren op het VWO hebben zelf niet of nauwelijks wetenschappelijk onderwijs gevolgd. Toen ik in Leiden begon werd ruim 60 procent van de wiskundestudenten leraar, nu is dat minder dan 10 procent. Het aantal wiskundestudenten is in de tussentijd gehalveerd en een grote groep potentiële wiskundeleraars wordt gemist. Gelukkig worden de gemaakte fouten nu door de regering erkend, maar daarmee is de opgelopen achterstand nog lang niet goed gemaakt. Ik vind het van landsbelang dat het leraarschap hoger wordt gewaardeerd en ook dat de faculteiten exacte wetenschappen hier een maatschappelijke functie vervullen die ze sinds de jaren tachtig van de vorige eeuw om financiële redenen hebben verwaarloosd. Ik vind dat de leraaropleiding wiskunde binnen de eigen faculteit thuishoort en dat wiskundigen daarvoor verantwoording moeten dragen. Er is nog een ander gat in de markt. Veel meisjes met wiskundetalent hebben meer belangstelling voor biologie en geneeskunde dan voor natuur- en scheikunde. Welke universiteit durft het aan een brede en minder diepe wiskundeopleiding aan te bieden die bij deze belangstelling

aansluit en waarmee ook een onderwijsbevoegdheid wiskunde verkregen kan worden? Hier is een potentiële bron om het aantal wiskundestudenten te verdubbelen.

Het probleem begint al jong. Van dichtbij heb ik meegemaakt hoe er in één gezin grote problemen waren met twee kinderen, het ene had een IQ van meer dan 150, het andere had het syndroom van Down. Het meisje met het syndroom van Down heeft van overheidswege haar hele leven bijzondere zorg en steun. Voor het hoogbegaafde kind moest de moeder het zelf maar uitzoeken. Toch zijn er mogelijkheden voor begaafde kinderen om zich te ontwikkelen. Zo kennen we de Stichting Vierkant voor Wiskunde [10] die in het Leidse Mathematische Instituut is gehuisvest en zomerkampen voor scholieren organiseert, die dan een hele week echte wiskunde doen. Dat gaat praktisch helemaal op vrijwillige basis en de nodige gelden moeten bij elkaar worden geschaapt. Ik ben blij met de voorzieningen voor kinderen met zeer lage intelligentie, maar van kinderen met zeer hoge intelligentie hangt de toekomst van onze kennissamenleving voor een groot deel af. Juist deze week werd bekend dat de regering 10 miljoen uitrekt voor het onderwijs aan hoogbegaafde kinderen op basisscholen [11]. Hulde aan het kabinet! Ik hoop wel dat dit beleid nog uitgebreid wordt tot kinderen van hogere leeftijden en tot buitenschoolse activiteiten.

Het is interessant om na te gaan hoe de Verenigde Staten in staat zijn om talent naar

zich toe te trekken. De dominantie van dat land op het gebied van toegepaste wetenschap en techniek staat niet in verhouding tot het aantal inwoners als we ze met de Europese Unie vergelijken. Ik ben nu zo'n twaalf jaar lid van de jury van de Ostrowskiprijs. Ostrowski en zijn vrouw hebben een legaat nagelaten waaruit tweejaarlijks een prijs van zo'n 75.000 euro wordt gegeven aan de wiskundige of wiskundigen die in de voorgaande vijf jaren de beste wiskundeprestatie hebben geleverd. Het voorzitterschap rouleert. Toen ik laatst voorzitter was en de prijsuitreiking in Leiden plaatsvond, ben ik nagegaan waar de prijswinnaars geboren waren en waar ze werkten. Van de 17 laureaten tot dan toe was niemand in de Verenigde Staten geboren, maar er werkten 15 in dat land, 1 in Engeland en 1 in Rusland. Dit jaar was ik voorzitter van de prijzencommissie van het Europese Wiskundige Genootschap dat in juli in Amsterdam haar congres hield. Daar kregen de beste Europese wiskundigen onder de 35 jaar een prijs. Van de 9 winnaars die in Europa geboren waren werken er nu al 4 in de Verenigde Staten. Het is dus een Europees probleem om talent aan te trekken en te behouden. Overigens, de enige Nederlander die ooit deze Europese prijs gewonnen heeft woont met zijn Amerikaanse vrouw in de Verenigde Staten. Gezinsverbanden spelen zeker een rol; het zou helpen als er soepele oplossingen werden gecreëerd voor de partners van wetenschappers die men graag naar Nederland wil halen.

Overigens betreft het niet alleen het top-talent. Er is in Nederland al jarenlang de tendens om het wiskundeonderwijs minder abstract, meer zogenaamd realistisch te maken. Dat heeft geleid tot een afname van wiskundige vaardigheid. Bij mijn gastlessen in vijfde klassen van VWO's heb ik vijfmaal meegemaakt dat niemand in de hele klas wist hoe je $a^2 - b^2$ kunt ontbinden. Veelgehoord argument in dit verband is dat de overgrote meerderheid de wiskunde toch niet meer nodig heeft, omdat de computers het allemaal kunnen. Wat daarbij echter vergeten wordt, is dat met het verminderen van het aantal lessen wiskunde ook het aantal uren gestructureerd leren denken en werken is verminderd. Volgens mij heeft dat grote gevolgen. In de NRC van 17 juni 2008 las ik dat het Nederlands spoor, meer dan in het buitenland, te kampen heeft met grote storingen die het gevolg zijn van ICT-problemen [12]. Dat ligt niet aan de gebruikte wiskunde! In een bericht van 2 juli staat dat psychotherapeuten protesteren omdat ze wegens automatiseringsproblemen al een half jaar geen vergoeding hebben ge-

had voor hun diensten [13]. Eerder waren er problemen met de ov-chipkaart, de stemcomputers en de tolpoorten. De belastingdienst, vroeger een toonbeeld van betrouwbaarheid, laat steek op steek vallen. Het energielabel voor huizen in de verkoop blijkt niet te meten wat het zou moeten meten. Het is niet eenvoudig om de oorzaak van al deze problemen eenduidig aan te geven [14], maar het lijkt met een computervirus te maken te hebben. Dit keer niet een virus in de computer, maar in de hersenen van politici en beleidsmakers. Het doet ze denken dat je elk lastig probleem met computers kunt oplossen, zonder dat je hoeft na te gaan of het redelijk is dat te verwachten, of de capaciteit en de kwaliteit van de computerafdeling voldoende is om het karwei te klaren, of de beschikbare computers er geschikt voor zijn en of de leidinggevendenden voldoende kennis hebben om de operatie tot een goed einde te brengen. Ook ontbreekt meestal de tijd voor proefprojecten. Het virus doet mensen ook denken dat je dingen niet meer hoeft te leren, omdat alles op het internet te vinden is. Het is een virus waarvoor geen virus-scanner of firewall bestaat. Gelukkig heb ik als voorzitter van de onderwijsvisitatiecommissie kunnen vaststellen dat de universitaire wiskundeopleidingen nog niet door het virus besmet zijn, en ik denk dat dit ook voor de informaticaopleidingen geldt. Daar zal het herstel vandaan moeten komen, maar het zal nog jaren duren.

Ouder talent

Een andere categorie waar talent onbenut blijft zijn de ouderen. We hebben in dit land het bijzondere voorrecht dat we al tussen de 60 en 65 jaar met pensioen kunnen gaan en daarna een redelijk inkomen genieten. Daar wordt begrijpelijkwijls graag gebruik van gemaakt. Veel van mijn leeftijdgenoten doen vrijwilligerswerk, maken reizen of wijden zich aan de kunst. Soms combineren ze het in kunstreizen. Van de leden van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen in de periode 1917-1946 bleek op 50-jarige leeftijd de levensverwachting nog 22 jaar te zijn, en stierven ze dus gemiddeld op 72-jarige leeftijd. Ze gingen toen op 70-jarige leeftijd met emeritaat. Dat verschilt twee jaar. Zestig jaar later, van 1977-2006, bleek de levensverwachting op 50-jarige leeftijd te zijn opgelopen tot 34 jaar, en werden ze dus gemiddeld 84 jaar. We gaan tegenwoordig op 65-jarige leeftijd met emeritaat, zo niet eerder. Het verschil was dus gegroeid van 2 jaar tot bijna 20 jaar [15]. Waarschijnlijk is het verschil inmiddels nog verder toegenomen [16].

Het is geen wonder dat gepleit wordt voor verhoging van de pensioengerechtigde leeftijd.

Het herinnert me aan een voorval, flink wat jaren geleden. Mijn vrouw leidde toen samen met een jongeman een jeugdkring. Hij was jarig. De kinderen van een jaar of acht vroegen hoe oud hij was geworden: 26 jaar. "Wat oud!" reageerden ze in koor. Als ik veertigers over gepensioneerd hoor praten, dan reageren ze nog net zo [17]. In Leiden zijn de werkomstandigheden voor emeriti die actief onderzoek doen nog goed. Elders worden ze vaak weggestopt of uit het instituut verbannen. Op het Leidse Mathematisch Instituut zijn de kamers voor emeriti zo dicht mogelijk bij de lift, zodat ze hun kamer nog kunnen bereiken zonder te vallen. Ik verwacht niet dat ik als geschenk van het instituut een rollator zal krijgen, want dat is niet verantwoord in verband met de komende bezuinigingen, maar misschien een looprek. Gepensioneerden worden respectvol met rust gelaten.

De vraag is of Nederland zich deze luxe kan blijven veroorloven. Opmerkelijk is dat beleidsmakers steeds spreken over een pensioenleeftijd die voor iedereen geldt. Als ik om me heen kijk, dan krijg ik een heel ander beeld. Sommige leeftijdgenoten zijn lichamelijk of geestelijk uitgeput en niet meer in staat om te werken. Anderen zijn nog tot op hoge leeftijd actief, zoals de man die mijn moeder liefdevol heeft verzorgd tot haar dood in januari van dit jaar. Op 90-jarige leeftijd loopt hij nog dagelijks enkele keren vijf trappen op, leert hij met de computer omgaan, en af en toe verblijft hij anderen met zijn piano-spel. Een individuele aanpak lijkt dus nodig. In sommige andere landen is men veel flexibeler. In de Verenigde Staten wordt een vaste pensioenleeftijd als leeftijdsdiscriminatie beschouwd en is deze wettelijk verboden. In Hongarije krijgen alleen sommige hoogleraren op 65-jarige leeftijd de titel emeritus wat betekent dat ze vanwege hun verdiensten de eer hebben om nog door te mogen werken. In Zweden wordt de pensioenhoogte wettelijk gekoppeld aan de levensverwachting, die jaarlijks wordt vastgesteld. Wie meer pensioen wil, kan langer doorwerken. Zo ligt het risico van een hoge levensverwachting ook bij de oudere generaties. Het niet goed benutten van talent kan ons land lelijk opbreken als straks de geboortegolf van direct na de Tweede Wereldoorlog met pensioen is. Waarom is in deze tijd van individualisering alles zo rigide geregeld? Waarom moet bijvoorbeeld de AOW voor iedereen op 65-jarige leeftijd ingaan? Kan het voor iemand die hiervan afhankelijk is niet aantrekkelijker zijn enkele

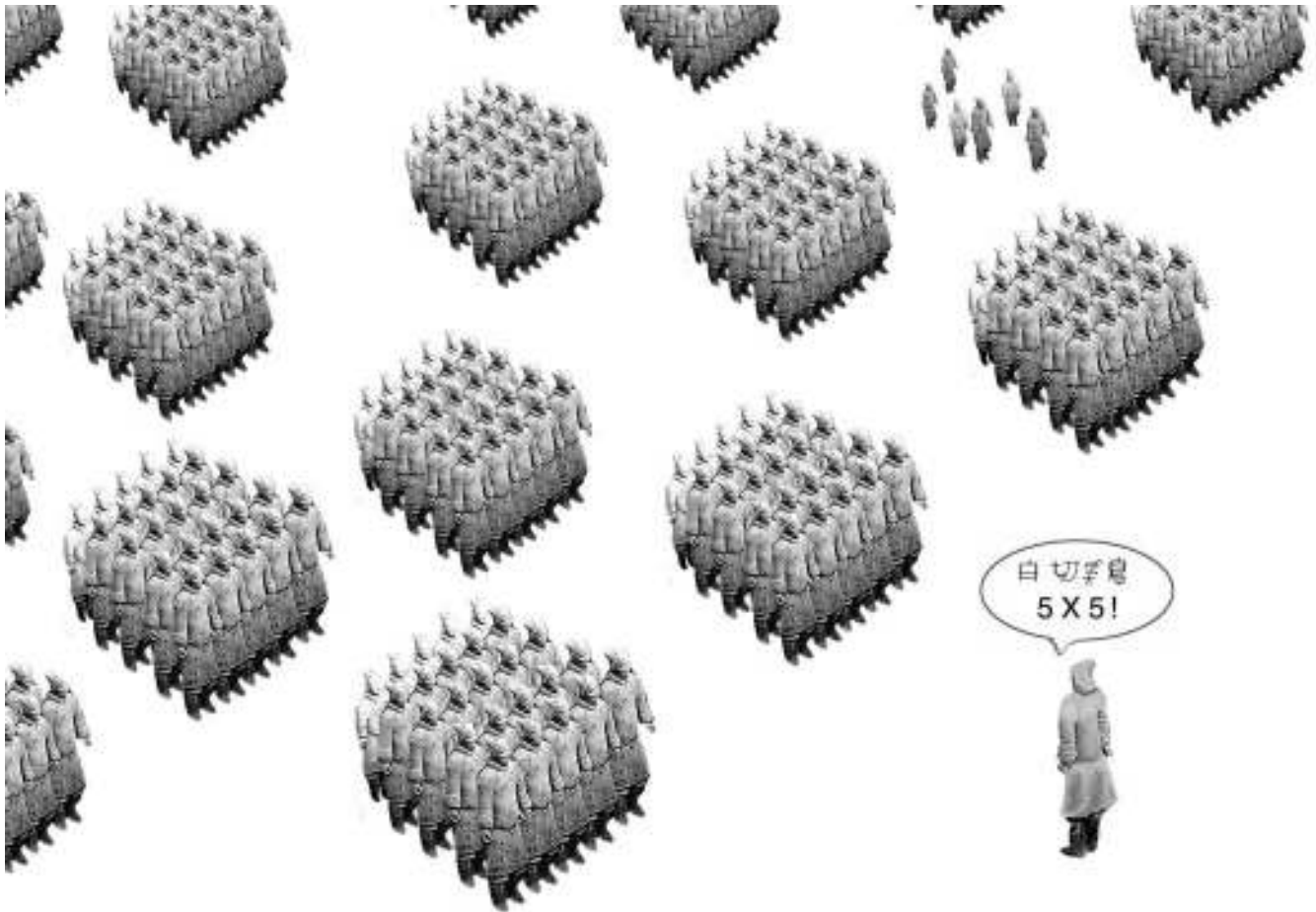
jaren door te werken om daarna een hogere uitkering te ontvangen [20]? Ik denk dat er met flexibiliteit en stimulansen veel te bereiken is.

Positieve ontwikkelingen

Ik heb u wellicht onbedoeld de indruk gegeven dat het een en al ellende is en dat het allemaal de verkeerde kant op gaat. Zo heb ik mijn carrière niet beleefd en zie ik de toekomst ook niet. Daarom voor het evenwicht enkele positieve ontwikkelingen.

Zoals u gemerkt zult hebben vormen wiskundigen een wereldwijde gemeenschap. Samenwerking beperkt zich niet tot de landsgrenzen. Al twintig jaar voor het ijzeren gordijn smolt hadden mijn vrouw en ik een jaar in Hongarije doorgebracht en we zijn er daarna nog vaak geweest. Vóór de weinig vredige gebeurtenissen op het plein van de Hemelse Vrede in Peking in 1989 hadden we in China rondgereisd. Door de persoonlijke contacten zijn we ook bij mensen thuis uitgenodigd, in Hongarije, Polen, Frankrijk, Canada, de Verenigde Staten, India, China, Japan, Australië, enzovoort. Anderzijds hebben we vele collega's uit andere landen bij ons thuis ontvangen. Zo hebben we vriendschappen gesloten, culturen overbrugd en een klein steentje bijgedragen aan de vrede en is ons gezichtsveld verbreed. In dat verband is het verheugend om sommige ontwikkelingen te zien. Veertig jaar geleden mochten Hongaren nooit met het hele gezin naar het buitenland; nu maken ze deel uit van de Europese Unie. Toen ik promoveerde was China een afgesloten land waar uitstekende wiskundigen jarenlang het land moesten bewerken; nu is er een open uitwisseling van wetenschappers mogelijk. Dertig jaar geleden moest ik tijdens reizen soms tot diep in de nacht wachten tot ik mijn vrouw telefonisch kon spreken, nu kan ik haar overal en altijd mobiel en per e-mail bereiken.

Toen ik in Leiden kwam gaf ik in dit gebouw college op een bord van nog geen 1 bij 1,5 meter. In het in 1972 in gebruik genomen Snelliusgebouw heb ik sindsdien in een ruime werk-kamer en in goede collegezalen mogen werken met begaafde studenten die allengs beter het Engels beheersten en beter konden presenteren. Onderwijs en begeleiding hebben me veel voldoening gegeven. Waar er in het begin nogal wat spanningen en naijver waren tussen de verschillende wiskunde-instituten in Nederland, is in de loop van de tijd een florerende samenwerking ontstaan die vorm heeft gekregen in onderzoekscholen, landelijk onderwijs en wiskundeclusters. Ik heb 37 jaar lang met veel enthousiasme in Leiden gewerkt. Ik dank studenten, promovendi, insti-



$$N \equiv 6 \pmod{25}$$

Copyright: Lin A. Russinoff

tuutsmedewerkers en collega's, in Leiden en elders, voor de plezierige contacten en de stimulerende samenwerking.

Kunstenaars kennen geen pensioenleeftijd. Daarom past deze gewone hoogleraar zich aan zijn leeftijdgenoten en wordt hij wiskun-

stenaar. Af en toe zal hij ook wel een wiskunstreis maken. Hoe het verder zal gaan met deze man, de tijd zal het leren.

Noten

- 1 De bewerkte tekst is in het Engels verschenen als: Old and new in number theory, *NAW* **3** (1972), pp. 188-192
- 2 Voor het verhaal: S. Singh, *Fermat's Last Theorem*, Fourth Estate, New York, 1997
Voor de wiskunde: A.J. van der Poorten, Notes on Fermat's Last Theorem, *Canad. Math. Soc.*, Wiley, 1996
- 3 J. Daems, Het vermoeden van Catalan, *NAW* **5(5)**, 2004, pp. 221-225
- 4 www.bealconjecture.com
- 5 R. Tijdeman, De Riemann-hypothese en het ABC-vermoeden, Onbewezen-vermoedens, *Vakantiecurcus 1999*, CWI Amsterdam, pp. 31-44, Sectie 3
- 6 L. Hajdu, R. Tijdeman, Algebraic aspects of discrete tomography, *J. Reine Angew. Math.* **534**, 2001, pp. 119-128
Voor een inleiding: R. Tijdeman, Discrete tomografie, Wiskunde en gezondheid, *Vakantiecurcus 2002*, CWI Amsterdam, pp. 115-128
- 7 M. de Waard, Een knietje kost 25 minuten, een brein langer, *NRC Handelsblad*, 14 juni 2008
- 8 I. Smeets, Diamant scannen, *NRC Handelsblad*, 14 juni 2008
- 9 www.wiskundemeisjes.nl
- 10 www.vierkantvoorwiskunde.nl
- 11 10 mln extra voor slimme leerlingen, *NRC Handelsblad*, 25 augustus 2008
- 12 Spoor kampt met veel grote storings ICT, *NRC Handelsblad*, 17 juni 2008
- 13 W. Oosterbaan, Overheid verwacht en eist te veel van haar computers, *NRC Handelsblad*, 2 juli 2008
- 14 Na mijn voordracht werd ik attent gemaakt op het artikel 'Toezicht bevrijdt overheid en IT-sector uit wurggreep' van Jan Turk in *Het Financieel Dagblad*, 6 mei 2008
- 15 D. van de Kaa, Het lange leven van akademieleden, Demos, NIDI, Amsterdam, april 2008, pp. 6-10
- 16 Man leeft langer door warmer weer, *NRC Handelsblad*, 28 juli 2008
- 17 Nederland gruwet van de ouderdom, *Leidsch Dagblad*, 19 maart 2008
- 18 We korten af: $8 = 2^3$, $1000 = 10^3$, $16 = 2^4$, $81 = 3^4$ en noemen het hoge getal de *exponent*
- 19 Het *Leidsch Dagblad* van 25 augustus 2008 verwoordt dit treffend: Jan Hendrickx, oud-hoogleraar en oprichter van de Leonardoscholen, stelt dat hoogbegaafde kinderen nou eenmaal anders leren dan 'normale' leeftijdgenoten. In plaats van zich de stof stap voor stap eigen te maken, zijn zij er meer bij gebaat als eerst het grote geheel wordt uitgelegd. "Neem het metrisch systeem, de kern daarvan is dat elke maat tien keer zo groot of klein is als de vorige. Je hoeft dus niet eerst de centimeters uit te leggen, dan pas de decimeters enzovoort. Weten ze hoe het zit, dan kunnen ze binnen een uur met dat hele systeem, inclusief grammen en liters, uit de voeten en sommen maken."
- 20 Soms reageert de regering razendsnel. De volgende ochtend, 30 augustus 2008, stond in het *Leidsch Dagblad*: "Het kabinet maakt het mogelijk de AOW maximaal vijf jaar uit te stellen. Later krijgt de doorwerkende oudere dan een hogere AOW uitgekeerd." Ik weet niet waarom er een bovengrens van 70 is. Ik hoop van harte dat mijn andere suggesties voor verbeteringen met dezelfde voortvarendheid opgevolgd zullen worden.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2008

Patroonherkenning in pulsen van vurende hersencellen

De gemeten elektrische activiteit op een bepaalde plek in de hersenen is de optelsom van duizenden vurende hersencellen. Aan wiskundigen de taak om in die chaos orde te ontdekken.

Onze hersenen bestaan naar schatting uit honderd miljard hersencellen. Elke cel communiceert met duizend tot tienduizend andere cellen. Dat gebeurt deels elektrisch en deels chemisch. Elke keer wanneer een hersencel vuurt, stuurt de cel een elektrisch signaal naar zijn uitlopers. Wanneer het elektrische signaal aan het uiteinde is aangekomen, wordt een chemisch signaal opgewekt, dat via een nauwe spleet naar een volgende hersencel loopt. Zo praat de ene hersencel met de andere, en meestal met vele andere tegelijk.

Een hersenchirurg moet precies weten op welke plek in de hersenen hij een biopsie neemt, een tumor verwijdert, een klein hersengebiedje lam legt, of een elektrode implanteert. Op moderne hersenscanners is de locatie alleen maar binnen een paar millimeter nauwkeurig te zien. Om preciezer te weten waar de chirurg bezig is, observeert hij het elektrische signaal. Dat gebeurt via een paar ingebrachte microneedles. Op een scherm ziet de chirurg dan hoe de hersencellen vuren, en tegelijkertijd luistert hij naar het vuurpatroon. Omdat deze patronen afhangen van de locatie in de hersenen, beoordeelt de chirurg aan de hand van deze patronen of hij de goede plek te pakken heeft of niet. Daar heeft hij veel ervaring voor nodig, maar dan nog heeft hij niet altijd de juiste plek te pakken.

Het Academisch Medisch Centrum (AMC) in Amsterdam onderzoekt of het mogelijk is

om de chirurg bij deze patroonherkenning te helpen via een stuk software dat de patroonherkenning automatisch uitvoert. Het AMC is vooral geïnteresseerd in een toepassing bij Deep Brain Stimulation (DBS). Bij DBS wordt lokaal in de hersenen een elektrode geïmplant, die als een soort pacemaker subtiele stroomstootjes kan geven. Vooral patiënten met bijvoorbeeld de ziekte van Parkinson, epilepsie, dwangstoornissen of een zeer ernstige depressie kunnen daar baat bij hebben. DBS behoort inmiddels tot een standaard protocol bij de behandeling van de ziekte van Parkinson.

Geroezemoes

Het analyseren van de patronen waarmee zenuwcellen vuren is een klassiek en uitgebreid vakgebied. “Helaas is veel van dat werk niet toepasbaar in de hersenen”, vertelt Lo Bour van het AMC. “In de hersenen hebben we een veel beperktere meettijd: niet meer dan tien tot twintig seconden om met een elektrode de vuurpatronen van hersencellen te meten. Dat maakt een statistische analyse veel moeilijker dan wanneer je een veel langere meettijd zou hebben.”

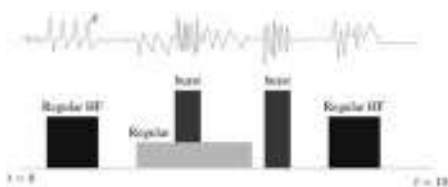
Voor de positiebepaling bij DBS gebruikt het AMC momenteel drie tot vijf elektroden die elk een tipdiameter van tien micrometer hebben (een micrometer is een duizendste millimeter). Deze elektroden meten tegelijkertijd het vuren van hersencellen. Wanneer een

hersencel vuurt — dat wil zeggen: een signaal doorgeeft aan een naburige hersencel — dan meet een elektrode een elektrische puls, een zogeheten *spike*. De globale vorm van zo'n spike lijkt op een volle periode van een sinus. De precieze vorm varieert per spike. Elke elektrode pikt niet alleen de elektrische signalen op tijdens het vuren van een of een paar hersencellen direct bij de elektrode (binnen honderd micrometer van de tip), maar ook een achtergrond van duizenden vurende hersencellen in de omgeving (binnen een tot twee millimeter van de tip). Het is alsof je met een richtingsmicrofoon naar een persoon in een drukke, grote zaal wilt luisteren. Naast het geluid van die ene persoon hoor je ook het geroezemoes van de honderden mensen daar omheen.

“Wij hebben zelf al uitgebreid onderzoek gedaan naar de analyse van de vuurpatronen”, zegt Bour, “Het fundamentele probleem is dat in een enkele opname zoveel tegelijk gebeurt. Hersencellen genereren spikes met verschillende vormen en in verschillende frequenties. Bovendien kan het vuurpatroon in de tijd veranderen. De grote vraag is hoe we uit deze veelheid van overlappende gegevens de informatie kunnen halen die ons vertelt op welke plek in de hersenen de elektrode zit. Wij wilden graag dat een groep wiskundigen er eens met een frisse blik naar zou kijken om zo misschien met nieuwe ideeën te komen.”

Vuurpatronen

Als basismateriaal kregen de wiskundigen de beschikking over meetgegevens van het AMC:



Figuur 1 Hersencellen genereren elektrische vuurpatronen met verschillende vormen en in verschillende frequenties.

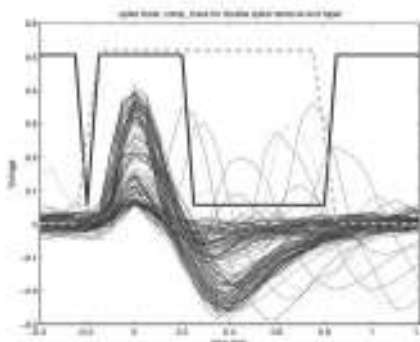
tijdreeksen van tien seconden, met daarin typisch zes- tot zevenhonderd spikes. Het doel was om deze tijdreeksen binnen maximaal vijf seconden te kunnen analyseren. Want binnen die tijd wil de neurochirurg beslissen of de naald al dan niet op de goede plek zit.

“We hebben het probleem in vier stappen aangepakt”, legt wiskundige Gjerit Meinsma van de Universiteit Twente, en lid van de studiegroep, uit. “Het begint met het verwijderen van de achtergrondruis. Daarna blijven de spikes waarin we geïnteresseerd zijn over. Die spikes verdelen we in klassen die overeenkomen met verschillende hersencellen. Vervolgens bepalen we voor elke klasse tot welk van drie typen vuurpatronen ze behoren. En ten slotte visualiseren we de resultaten.”

De drie typen vuurpatronen corresponderen met drie verschillende vuurfrequenties: cellen die vuren met een frequentie tussen 5 en 50 hertz; cellen die vuren met een frequentie tussen 50 en 150 hertz; en tenslotte cellen die vuren bij de typische frequentie van 100 hertz: *bursts*. Bursts hebben het kenmerk dat een actieve periode gevolgd wordt door een inactieve periode. Deze driedeling is een vrij grove, maar voor de praktijk handige indeling, zie Figuur 1.

De achtergrondruis hebben de wiskundigen uit het signaal verwijderd door een drempelwaarde te definiëren; een bekende methode. Spikes onder de drempelwaarde liggen worden uit het signaal verwijderd. Wat overblijft, zijn de spikes afkomstig van hersencellen het dichtst bij de naald. Het gefilterde signaal wordt vervolgens gekarakteriseerd door de vorm van de spikes en door hun gedrag in de tijd.

Voor het classificeren van de spikes gebruikten de wiskundigen Principal Component Analysis (PCA), een veel gebruikte techniek in de signaalverwerking. Meinsma: “Het PCA-algoritme haalt uit deze data automatisch de parameters die een spike het beste karakteriseren. Aan elke spike worden zo karakteristieke getallen toegekend. In de praktijk bleek de spikeamplitude de belangrijkste bepalende parameter. Vervolgens sorteert PCA de spikes in clusters die qua spikevorm



Figuur 2 In dit voorbeeld werden 674 spikes in een datareeks van tien seconden aangetroffen.

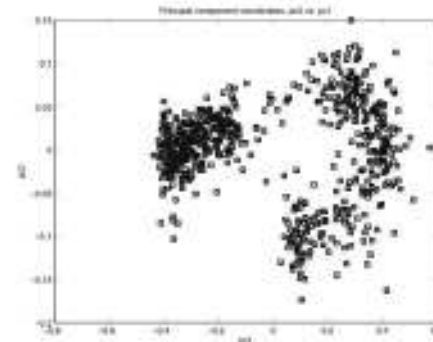
overeenkomen. De meeste opnamen bleken in twee clusters uiteen te vallen, maar sommige in drie clusters. Weer andere opnamen bleken geen duidelijke clustering te vertonen.”

De volgende stap was om te bepalen tot welk van de drie typen vuurpatronen elke klasse behoort. De wiskundigen gebruikten een variant van de autocorrelatiefunctie om dat probleem aan te pakken, het zogeheten Interspike Interval Histogram. Meinsma: “Deze variant is beter dan de autocorrelatiefunctie in staat om het begin- en het eindpunt van een spikereeks in de data te ontdekken, zelfs wanneer een vuurpatroon gevolgd wordt door een periode van inactiviteit. Het histogram laat de tijdsverschillen zien tussen de maxima van de spikes. Daaruit volgt dan vrij eenvoudig de frequentie van een bepaalde spikereeks.”

Wanneer verschillende spikereeksen elkaar niet overlappen, blijkt deze methode vrij goed te werken. Maar in de praktijk kunnen verschillende spikereeksen elkaar wel degelelijk overlappen. Het is nog onbekend hoe de methode in dat geval uitpakt.

Frequentie verradert locatie

“De studiegroep is met twee interessante ideeën gekomen, waar wij graag mee verder gaan”, zegt Lo Bour over de resultaten van de studiegroep. “Het belangrijkste resultaat is het idee om tegelijkertijd informatie over de tijdreeks en informatie over de vorm van de spikes uit het opgenomen signaal te halen. Dan hoeven we niet eerst te bepalen welk deel van het signaal van welke hersencel afkomstig is. Dat is namelijk iets wat bemoeilijkt wordt door het feit dat we maar een vrij korte opname hebben en bovendien doordat dat signaal in die korte tijd ook nog verandert. Hersencellen vuren niet steeds hetzelfde. Maar we hoeven in feite ook niet te weten welke hersencel welk piekje genereert. Het enige wat we willen weten is met wel-



Figuur 3 Het PCA-algoritme sorteert de spikes in clusters die qua spikevorm overeenkomen. De meeste opnamen bleken in twee clusters uiteen te vallen, maar sommige in drie clusters, zoals in dit voorbeeld.

ke frequentie de cellen vuren. Dat vertelt ons de locatie in de hersenen. De wiskundigen suggereren een aanpak die informatie uit het signaal kan halen zonder dat we weten welk piekje van welke cel afkomstig is. Hoewel er nog wel wat werk moet gebeuren voor we dit idee kunnen toepassen, ben ik over dit idee het meest optimistisch.”

Een tweede resultaat dat mogelijk toepasbaar is, is het gebruiken van discrete wiskunde voor de clustering van spikes. Bour: “Met discrete wiskunde kun je aan elke spike gehele getallen toekennen die de belangrijkste eigenschappen van een spike karakteriseren, zoals de breedte, de hoogte en hoe snel de spike daalt. Dat lijkt op een gewone clusteranalyse, maar het blijkt dat het gebruik van discrete wiskunde voordelen biedt wanneer het om een kleine dataset gaat, zoals bij ons altijd het geval is. Dit is een idee waar ik zelf nooit aan had gedacht, en typisch een voorbeeld van een resultaat dat kan ontstaan als je mensen vanuit een andere achtergrond naar het probleem laat kijken.”

Een concreet product, dat de hersenchirurg helpt in zijn beoordeling van de spikes, ligt nog niet in het verschiet. Daarvoor is nog meer onderzoek nodig.



Jan van de Craats

Korteweg-de Vries Instituut

Science Park 904

1098 XH AMSTERDAM

J.vandeCraats@uva.nl

Onderwijs Meten van kwaliteit

TIMSS 2007 – Feiten en meningen

De kwaliteit van het rekenonderwijs op de basisschool blijft een twistpunt. Het internationale onderzoek TIMSS dat deze kwaliteit voor verschillende landen op een rijtje zet, wordt door verschillende partijen gebruikt om te illustreren hoe goed dan wel slecht het onderwijs ervoor staat. Elders in dit nummer reageren Marja van den Heuvel-Panhuizen en Nellie Verhoef op het redactioneel van het vorige NAW-nummer. In onderstaand artikel licht Jan van de Craats zijn bezwaren tegen een positieve interpretatie van het TIMSS 2007 rapport toe.

TIMSS staat voor *Trends in International Mathematics and Science Study*, een periodiek georganiseerd internationaal vergelijkend onderzoek naar prestaties van leerlingen op het gebied van de wiskunde en de natuurwetenschappen. Het laatste TIMSS onderzoek waarover gerapporteerd is, is gehouden in 2007. Er is toen onderzoek uitgevoerd op twee gebieden, *mathematics* en *science* in twee leeftijds-categorieën: *grade 4*, overeenkomend met onze groep 6 van het basisonderwijs, en *grade 8*, overeenkomend met klas 2 van het voortgezet onderwijs. In 2007 heeft Nederland alleen meegedaan aan het onderzoek in groep 6 van de basisschool.

Ik beperk me in dit artikel tot het deel *mathematics* (rekenen en wiskunde) van het TIMSS-onderzoek voor *grade 4*. In totaal hebben daaraan in 2007 zesendertig landen meegedaan. De uitkomsten van TIMSS 2007 op het gebied *mathematics* van de Nederlandse deelnemers worden in bepaalde kringen geïnterpreteerd als ondersteuning van de stelling dat het Nederlandse rekenonderwijs op de basisschool internationaal gezien van hoog niveau is. Daarbij wordt soms de kreet ‘*best of the west*’ gehanteerd. Ik zal laten zien dat de resultaten van TIMSS 2007 een dergelijke conclusie niet toelaten. Die juichtoon is ook niet in lijn met de inhoud van het geza-

menlijke persbericht van NWO en de Universiteit Twente over TIMSS 2007 (9 december 2008) [5].

Feiten

De volgende feiten zijn ontleend aan de officiële rapportages [1–4] die ook via het internet geraadpleegd en gedownload kunnen worden.

1. In de landenrangschikking eindigde Nederland op de negende plaats, met de aantekening dat Nederland niet voldaan heeft aan de TIMSS-richtlijnen voor deelname via een representatieve steekproef (p. 34 in [3]). Daardoor mogen de resultaten van TIMSS 2007 *niet* als representatief worden beschouwd voor de gehele populatie van Nederlandse basisschoolleerlingen van groep 6.
2. Dat Nederland niet voldaan heeft aan de TIMSS-richtlijnen kan als volgt nader worden gespecificeerd (pp. 178–180 in [4], pp. 12–16 in [1]). Net zoals in de andere deelnemende landen was er ook in Nederland een blinde steekproef van basisscholen getrokken. In Nederland omvatte die steekproef 150 scholen. In elk van die scholen moest minstens één willekeurig getrokken volledige klas in groep 6 meedoen. Twee scholen vielen na de trekking

af omdat ze inmiddels waren opgeheven.

- Bij al dit soort onderzoeken is het zo, dat alleen als een voldoende hoog percentage uit de steekproef ook daadwerkelijk meedoet, de resultaten van het onderzoek representatief genoemd mogen worden. Volgens de TIMSS-richtlijnen zou minstens 85 procent van de scholen in de steekproef ook daadwerkelijk moeten meedoen (pp. 386, 392 in [3], p. 13 in [1]). Zeven landen voldeden niet aan dit criterium. Zes van de zeven landen haalden wel een deelnamepercentage van minstens 70 procent. Eén land voldeed echter bij lange na niet aan de eis. Dat was Nederland, met een deelnamepercentage van slechts 48 procent (72 van de 150 scholen, (p. 180 in [4])).
3. Bij de zeven landen (waaronder Nederland) die niet aan het TIMSS-criterium voldeden, zijn weigerende scholen uit de steekproef vervangen door andere scholen. In Nederland waren er 69 vervangende scholen, zodat er in totaal 141 scholen hebben meegedaan. Het totale aantal Nederlandse leerlingen dat mee heeft gedaan, bedraagt 3349, gemiddeld bijna 24 per school (p. 182 in [4]). Daarmee kwam het aantal deelnemers weer op een redelijke hoogte. Deze handelswijze heeft echter tot gevolg dat de resultaten dan niet meer representatief genoemd mogen worden. Ze zeggen dan alleen nog maar iets over de *deelnemerspopulatie* (de groep van alle deelnemers aan het TIMSS-onderzoek in Nederland), maar nauwelijks iets over de *totale populatie* van alle Nederlandse scholieren in groep 6. De TIMSS-



Illustratie: Ryu Tajiri

rapportage heeft de resultaten van de landen die gebruik hebben gemaakt van vervangende scholen dan ook in de tabellen van een speciaal merkteken voorzien om dit aan te geven.

4. In de Nederlandse deelnemerspopulatie presteerden meisjes significant slechter dan jongens. Allochtone leerlingen presteerden significant slechter dan autochtone leerlingen. Allochtone meisjes presteerden significant slechter dan allochtone jongens (pp. 27–28 in [1]).
5. Onderzocht is ook de *positieve houding* van de deelnemers tegenover rekenen en wiskunde. De resultaten van dat onderzoek staan vermeld in een tabel op bladzijde 175 van [3]. In deze tabel van zesendertig landen staat de Nederlandse deelnemersploeg op de *vierendertigste* plaats. De Nederlandse deelnemers hebben dus heel weinig waardering voor rekenen en wiskunde.
6. Als je de resultaten van TIMSS 2007 ver-

gelijkt met die van de vorige lichtingen (TIMSS 2003 en TIMSS 1995) valt op dat Nederland behoort tot de weinige landen waarbij er een *gestage achteruitgang* te zien is in de rekenscores (pp. 44–45 in [3], pp. 25–26 in [1]).

7. TIMSS 2007 *grade 4*, toetst uitsluitend leerlingen in groep 6 van het basisonderwijs. Hoe de resultaten van het rekenonderwijs *aan het einde* van de basisschool zijn, wordt in TIMSS dus niet getoetst. Juist over dat eindniveau zijn er in Nederland veel klachten.

In Tabel 1 staan de landenscores van de beste 20 landen in TIMSS 2007. Ze zijn voorzien van een sterretje wanneer de deelname in de steekproef minder dan 85 procent was. Ook zijn de scores van TIMSS 2003 vermeld indien die landen toen ook hebben meegedaan.

Meningen

Voorstanders van realistisch rekenen gebruiken de TIMSS resultaten om te betogen dat-

het Nederlandse rekenonderwijs het internationaal gezien uitstekend doet. Dit is niet gerechtvaardigd vanwege de te geringe respons op de aselechte steekproef.

Afgezien hiervan is het niet duidelijk waarom de voorstanders van realistisch rekenen zo nadrukkelijk de resultaten van de niet-westerse landen die hoog eindigen, in hun beoordeling buiten beschouwing laten (Nederland zou *'best of the west'* zijn). Wiskunde en rekenen kennen geen grenzen. Als Singapore, Taiwan en Japan verreweg de beste resultaten halen, dan valt er blijkbaar iets te leren van hun rekenonderwijs. En, daarover is geen twijfel, dat onderwijs is niet realistisch maar traditioneel.

De TIMSS-resultaten voor de Nederlandse deelnemers zijn niet bemoedigend, maar juist uitermate verontrustend: de lage *positieve attitude* van de Nederlandse deelnemers spreekt boekdelen. (Voor veel Nederlandse basisschooldocenten geldt overigens hetzelfde.) Realistisch rekenen heeft de pretentie re-

	2007	2003
Hong Kong	607*	575*
Singapore	599	594
Chin. Taipei	576	564
Japan	568	565
Kazachstan	549	
Rusland	544	532
Engeland	541*	531*
Letland	537	536
Nederland	535*	540*
Litouwen	530	534
USA	529*	518*
Duitsland	525	
Denemarken	523*	
Australië	516	499*
Hongarije	510	529
Italië	507	503
Oostenrijk	505	
Zweden	503	
Slovenië	502	479
Armenië	500	456

Tabel 1 Scores van TIMSS 2007

kenen leuk te maken voor kinderen. Blijkens TIMSS is bij de Nederlandse deelnemers juist het tegendeel het geval.

Bij de West-Europese deelnemers valt op dat er enige belangrijke landen niet hebben deelgenomen: Spanje, Frankrijk, Finland, België (Vlaanderen), om er enige te noemen. Ook dat maakt de claim *'best of the west'* twijfelachtig.

Een beoordeling van de waarde en de relevantie van de TIMSS-onderzoeken wordt bemoeilijkt doordat de helft van de gebruikte opgaven geheim wordt gehouden. De officiële verklaring is dat men die opgaven in een later onderzoek weer wil gebruiken.

Een gedachtenexperiment

Dat een hoge respons op de originele steekproef (zonder vervangingsscholen) noodzakelijk is om statistisch verantwoorde conclusies te trekken zal intuïtief misschien wel duidelijk zijn, maar het is de moeite waard om dit toch wat nader toe te lichten. Ik doe dat in de vorm van een gedachtenexperiment waarin ik de werkelijkheid wat vereenvoudig.

Stel dat aan elke school in Nederland een *rekenvaardigheidsindex* r kan worden toegekend, een getal tussen 1 en 10 dat aangeeft

hoe goed de kinderen in groep 6 op die school rekenen. Stel, om de gedachten te bepalen, dat de waarden van r verdeeld zijn rond een gemiddelde van $5\frac{1}{2}$. Ook in de steekproef van 148 scholen mag je dan ongeveer zo'n verdeling met een gemiddelde van $5\frac{1}{2}$ verwachten. Stel nu dat de bereidheid om aan het onderzoek deel te nemen positief gecorreleerd is met de rekenvaardigheidsindex: scholen die goed zijn in rekenen doen graag mee, scholen die niet goed zijn zullen bij voorkeur weigeren. Dan is de gemiddelde rekenvaardigheidsindex bij de 72 scholen die meedoen aanzienlijk groter dan $5\frac{1}{2}$.

Er waren $2 \times 78 = 156$ reservescholen (voor elke weigerende of afgevallene school twee), waarvan er uiteindelijk 69 ook hebben meegedaan. Laten we voor het gemak aannemen dat de gemiddelde rekenvaardigheidsindex onder die 69 vervangingsscholen weinig afwijkt van $5\frac{1}{2}$. Dan levert dit in het totaal van alle $72 + 69 = 141$ deelnemende scholen nog steeds een veel hoger gemiddelde op dan $5\frac{1}{2}$. Met andere woorden, de rekenvaardigheid in de deelnemerspopulatie is veel hoger dan de rekenvaardigheid in de totale populatie van alle scholen in Nederland.

Het bovenstaande laat zien dat het onverantwoord is om TIMSS-scores van een land met een te geringe respons op de oorspronkelijke steekproef geldig te verklaren voor de gehele populatie van het desbetreffende land. Er bestaat immers de mogelijkheid dat er een correlatie is tussen het weigeren van geselecteerde scholen om aan TIMSS mee te doen en de rekenvaardigheid op die scholen.

Alle reden tot zorg

Om twee redenen telt de mogelijke correlatie tussen weigeren en rekenvaardigheid extra zwaar voor de Nederlandse deelname. In de eerste plaats was de respons in Nederland *uitzonderlijk laag*: slechts 48 procent, terwijl de andere zes landen die onder de vereiste 85 procent zaten, percentages hadden van 70 (USA), 71 (Denemarken), 77 (Schotland), 81 (Marokko en Hong Kong) en 83 (Engeland)

(p. 180 in [4]). Overigens, ook in TIMSS 2003 voldeed Nederland niet aan de representativiteits-eis. Van de 150 scholen in de oorspronkelijke steekproef deden er toen maar 77 aan het onderzoek mee (52 procent). Er zijn toen 53 reservescholen toegevoegd. In 2003 waren er 26 deelnemende landen in *grade 4*. Zeven landen, waaronder Nederland zaten toen onder 85-procentsnorm. De andere waren Australië (78%), Filippijnen (78%), Hong Kong (77%), USA (70%), Schotland (64%) en Engeland (54%). Ook toen had Nederland dus het laagste deelnamepercentage in de oorspronkelijke steekproef (pp. 355 en 359 in [2]).

De tweede reden is de *uitzonderlijk lage waardering* voor rekenen en wiskunde in de huidige vorm onder Nederlandse scholieren en leerkrachten. Iedereen die de rekendiscussie in de media volgt, weet hoe groot dit probleem bij ons is, maar de Nederlandse TIMSS-resultaten onderstrepen dit ook weer. Bovendien zijn er bij ons grote verschillen tussen scholen. In een recent rapport schat de onderwijsinspectie het aantal rekenzwakke scholen op ongeveer een kwart.

Al met al lijkt het geen onredelijke veronderstelling dat rekenzwakke scholen eerder geneigd zijn niet aan TIMSS mee te doen dan rekensterke scholen. Dit zou betekenen dat de TIMSS-resultaten van Nederland geflatteerd zijn. Maar in elk geval is het onverantwoord om, zoals voorstanders van zogenaamd 'realistisch' rekenonderwijs doen, uit de TIMSS-scores te concluderen dat Nederlandse kinderen internationaal gezien uitstekende rekenaars zijn en dat het rekenonderwijs op de Nederlandse basisscholen van hoge kwaliteit is. De tegengestelde conclusie, namelijk dat er alle reden tot zorg is over ons rekenonderwijs, lijkt eerder door de TIMSS-resultaten te worden ondersteund. Denk daarbij vooral ook aan de geringe waardering voor rekenen en aan de onrustbarende verschillen tussen jongens en meisjes en tussen allochtone en autochtone leerlingen in de Nederlandse deelnemersgroep.

Referenties

- 1 M.R.M. Meelissen en M. Drent, 2008, *TIMSS-2007 Nederland*, Universiteit Twente, Vakgroep Organisatie en Management, <http://doc.utwente.nl/60205/1/TIMSS-2007.pdf>
- 2 Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., & Chrostowski, S.J. (2004), *TIMSS 2003 International Mathematics Report. Findings from IEAs Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. <http://timssandpirls.bc.edu/timss2003/mathD.html>
- 3 Mullis, I.V.S., Martin, M.O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report. Findings from IEAs Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*. Boston: Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center, <http://timss.bc.edu/TIMSS2007/mathreport.html>
- 4 Olson, J.F., Martin, M.O., & Mullis, I.V.S. (Eds.). (2008). *TIMSS 2007 Technical Report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College, <http://timss.bc.edu/TIMSS2007/techreport.html>
- 5 *Rekenpeil basisonderwijs langzaam achteruit*, gezamenlijk persbericht NWO en Universiteit Twente, 9 december 2008, <http://www.nwo.nl/nwhome.nsf/pages/NWOA.7M6GUP>

De derde wet

| Solicited Comments

Hieronder volgen twee reacties op het redactioneel uit het maartnummer. De oratie van de eerste auteur staat op www.fi.uu.nl/publicaties/nieuws/oratie.martja.pdf. Elders in dit nummer geeft Jan van de Craats zijn mening over het TIMMS 2007 onderzoek.

Onbekend maakt onbemind

Prijzenswaardig dat het redactioneel commentaar van deze NAW-aflevering een constructieve bijdrage wil leveren om de kwalijke uitlatingen over het wiskundeonderwijs een halt toe te roepen en een brug te slaan tussen wiskundendidactici en wiskundigen. Het enthousiasme waarmee wordt geschreven over de Nationale Wiskunde Dagen werkt aanstekelijk en doet de woelige tijden bijna vergeten. Een pluim voor de organisatoren van deze dagen. De positieve benadering van NAW stopt echter wanneer het gaat over het rekenen op de basisschool. De redacteur heeft kennelijk nog nooit de Panamaconferentie of de Nationale Reken Dagen bezocht, noch een basisschool zien meedoen aan de Grote Reken Dag. Daar is het enthousiasme zeker niet minder dan op de Nationale Wiskunde Dagen. Het is spijtig dat de betrokkenen uit de verschillende sectoren van het wiskundeonderwijs elkaars manifestaties niet bijwonen en zo weinig van elkaars werk weten. Dit weerhoudt universiteitswiskundigen er niet van om forse uitspraken te doen over wat er mis is met het rekenonderwijs op de basisschool. Voor Freudenthal lag dit anders. Hij wist waarover hij sprak. Hij werkte met kinderen, met basisschoolleerkrachten en in een team van rekendidactici, de Wiskobasgroep. Het ontwikkelwerk en onderzoek van deze groep is altijd in en met het onderwijsveld uitgevoerd. Het is een gotspe om de resulterende ideeën over wiskundeonderwijs naïef te noemen. Bovendien, zo Freudenthals ideeën al naïef zouden zijn, hoe zit het dan met de onderwijsopvattingen van geestverwanten als Pólya, Whitney en Hilton? NAW zet met deze diskwalificatie nogal wat aan de kant — men zou beter moeten weten.

Dezelfde onbekendheid met het rekenonderwijs op de basisschool blijkt uit de ongenueanceerde uitspraak dat de realistische didactiek voor de matig begaafde leerlingen geen succes blijkt te zijn. Hierop zeg ik: lees het proefschrift van Ton Klein of van Julie Menne en ga praten met de leerkrachten uit het speciaal basisonderwijs die meedoen aan het project Speciaal Rekenen. Hun ervaringen met realistisch rekenonderwijs zijn totaal anders, wellicht doordat zij een heel andere voorstelling hebben van realistisch rekenen dan wat de media schetst. Door de nu gangbare misvattingen wordt de nalatenschap van Freudenthal en Wiskobas afgerekend op een onderwijsaanpak die niets met realistisch rekenonderwijs te maken heeft. Onvoldoende opleiding en nascholing van basisschoolleerkrachten zijn hier mede debet aan.

Ik heb in mijn oratie geprobeerd een aantal van die dwalingen over realistisch rekenonderwijs en de resultaten recht te zetten. Als we de TIMSS-resultaten als maat nemen, doen we het internationaal juist niet slecht. Nederlandse basisschoolleerkrachten en ouders hebben er recht op dit te weten! Om duidelijk te maken hoe de vlag er werkelijk bij hangt, koos ik hierbij voor de eerder door Adri Treffers gebruikte aanduiding 'Best of the West', inderdaad een triomfantelijke slogan waarvan ik hoopte dat deze wat tegenwicht zou bieden tegen al die krantenkoppen op Telegraaf-formaat. Natuurlijk stellen die verschillen in TIMSS-scores niet zoveel voor en al helemaal niet als men bedenkt wat voor opgaven daarachter zitten. Er zijn legio bezwaren mogelijk tegen het gebruik van de TIMSS-resultaten voor een oordeel over de prestaties van de Nederlandse leerlingen op het gebied van rekenen-wiskunde. Het Freudenthal Instituut heeft in het spoor van Freudenthal zelf altijd met veel scepsis gekeken naar deze scores en de volgordes van landen die deze ople-

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

verden. Ook toen Nederland de vierde plaats haalde, waren wij daar niet bijzonder enthousiast over. Zo'n score is mooi meegenomen, maar de toetsen dekten niet bepaald onze doelen van rekenonderwijs. Nu ligt het anders. Nu worden de TIMSS-gegevens gebruikt om iedereen te overtuigen dat het internationaal niet goed gaat met de rekenvaardigheid van de Nederlandse basisschoolleerling. Alles goed en wel, maar als die gegevens dan gebruikt worden, moet dat wel goed gebeuren.

Ik geef graag toe dat 'Best of the West' gechargeerd is. Onze voor-sprong op Engeland is namelijk klein en niet significant, maar we scoren wel significant hoger dan alle andere westerse landen die hebben meegedaan: de Verenigde Staten, Duitsland, Denemarken, Italië, Oostenrijk, Australië, Zweden, Schotland, Nieuw Zeeland en Noorwegen. Onze score is 535 op een schaal met een gemiddelde score van 500 (Oostenrijk zit daar net boven en Australië zit daar net onder) en een standaarddeviatie van 100. De scores lopen van 611 tot 292. Voor een goed begrip van onze score is het ook van belang om te kijken naar de mate waarin de TIMSS-toets past bij ons curriculum. Nederland heeft bij het onderdeel rekenen een dekkingsgraad van slechts 64 procent. Dat betekent dat 64 procent van de leerlingen is onderwezen in de rekenonderdelen van de TIMSS-toets. Dit is het laagste percentage van de toptienlanden — waarbij overigens van twee landen de gegevens ontbreken. Singapore, nummer één op de ranglijst, heeft een dekkingsgraad van 91 procent, en voor Engeland, dat de tiende plaats inneemt, is dat 85 procent — de TIMSS-toets sluit daar duidelijk beter aan bij het gegeven rekenonderwijs dan bij ons.

Als we alleen een betere TIMSS-score voor het onderdeel rekenen willen halen, moeten we een jaar eerder beginnen met breuken en kommagetallen. Onze verantwoordelijkheid gaat echter verder dan 'teaching to the test' om een hoge TIMSS-score te krijgen. Wij kiezen voor goed rekenonderwijs en willen zoveel mogelijk kinderen een hoog niveau laten bereiken. De methodes spelen hierbij een belangrijke rol. Ze geven het noodzakelijke houvast aan basisschoolleerlingen, die vaak niet voldoende toegerust zijn om goed rekenonderwijs te geven en die bovendien alle vakken moeten geven en hierin deskundigheid moeten verwerven. Ofschoon het duidelijk is dat niet alle realistische methodes het gedachtegoed van de Wiskobasbeweging uit de jaren '70 en '80 even consistent en valide hebben uitgewerkt, geven de in 2005 door het Cito gerapporteerde analyses over de jaren 1992 tot 2004 duidelijk aan dat de nieuwere methodes als geheel een klein, maar wel positief effect hebben gehad op de reken-wiskunde-prestaties van de leerlingen in groep 8. In 1997, toen het Cito nog keek naar het effect van de afzonderlijke methodes op de scores van de leerlingen, wezen de analyses uit dat de twee grootste realistische methodes het veel beter deden dan de twee mechanistische methodes en dat deze laatste methodes zelfs niet superieur waren bij het onderdeel bewerkingen, terwijl dit toch het hoofdbestanddeel daarvan vormt.

Let wel, zoals ik ook in mijn oratie heb gezegd, ik zal de laatste zijn om te zeggen dat alles goed is met het rekenonderwijs in Nederland en dat we ons geen zorgen hoeven te maken over de rekenvaardigheid van onze leerlingen, maar nogmaals: dat blijkt niet uit de TIMSS-scores. Bij de verbetering van ons rekenonderwijs moeten we ons dan ook niet door deze scores laten leiden en ook niet door wat universiteitswiskundigen zich nog herinneren over hoe ze vroeger zelf zo goed rekenles hebben gekregen; de mensen die later bij de volwasseneneducatie terecht kwamen, kunnen daar andere verhalen over vertellen. Zoals

Freudenthal al zei: "Reken-wiskundeonderwijs is te belangrijk om louter aan wiskundigen over te laten." Ik voeg daar graag aan toe dat dit evenzeer geldt voor niet-wiskundigen: samenwerking is geboden. De vraag is of dit mogelijk is met de sterk polariserende nieuwe cijfer-

richting, die zonder enige evidentie met een media-offensief aan het basisonderwijs wordt opgedrongen, daarbij uitgaand van een sterk vertekend beeld van het bestaande rekenonderwijs en zich baserend op volstrekt achterhaalde, behavioristische ideeën van mechanistisch cijferen. Bij een deel van de universiteitswiskundigen hoef je hier niet mee aan te komen, die zitten op de lijn-Freudenthal. Nu de anderen nog.

Marja van den Heuvel-Panhuizen (Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht)

Bied woelige tijden het hoofd met wiskundig-didactisch onderzoek

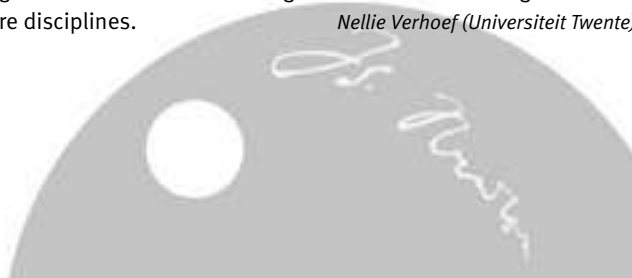
Woelige tijden breken aan: in 2010 zal 50% van de beroepsbevolking hoger onderwijs gevolgd moeten hebben. Naar verwachting stromen er vierenvijftig duizend studenten meer dan in 1955 het hoger onderwijs in. Dit zal vermoedelijk niet vlekkeloos verlopen. We moeten voorkomen dat deze gigantische toename tot gevolg heeft dat de instroom-eisen naar het hoger onderwijs worden versoepeld. Om de instroom-eisen op peil te houden zal het toeleverend onderwijs zich op de nieuwe situatie moeten voorbereiden — en liefst snel ook.

Het toeleverend onderwijs zal in de eerste plaats een stuk efficiënter moeten, in die zin dat meer leerlingen basiskennis bezitten die van nut is in het hoger onderwijs. Daarmee is niet gezegd dat dat alleen lukt met uit het hoofd leren, stampen, memoriseren en voordoen-nadoen. Er zijn creatievere methodes van leren en onderwijzen bekend waarbij leerlingen parate (functionele) kennis opdoen en zich inhoudelijk verdiepen. Onderzoekers van het wiskundeonderwijs spreken wel van een steeds krachtiger wordende rijke cognitieve structuur met cognitieve eenheden en verbanden daartussen. De creatieve methodes zijn bovendien uitdagend en motiverend voor leerlingen.

Zo zijn er allerlei spelvormen te bedenken waarbij leerlingen de vereiste basiskennis snel onder de knie kunnen krijgen, en waarbij de groepsgrootte geen beperkende factor hoeft te zijn. Denk bijvoorbeeld aan bingo om tweedegraads vergelijkingen op allerlei verschillende manieren op te lossen, ganzenborden met dobbelstenen om kansen in de gaten te leren krijgen, of het spelen met platlanders om eigenschappen van meetkundige figuren te ontdekken en te exploreren. De saaiheid van veel huidige lesvormen is dodelijk voor pubers. De werkvorm 'tien minuten sommen nakijken — 5 minuten uitleg — dertig minuten zelfstandig werken (al of niet in groepjes)' is niet aan te bevelen als de zojuist genoemde doelstellingen gehaald moeten worden.

Nog succesvoller is het om samen met leerlingen spelvormen te bedenken voor het leren van wiskunde. Onderwijsveranderingen zijn echter moeizaam, de praktische situatie in de school is altijd complex en weerbarstig. Een mooie oplossing is om op grote schaal wiskundig-didactisch wetenschappelijk ontwerpgericht onderzoek op te zetten en uit te voeren in ontwerpteams van docenten. Kansrijk zijn vooral ontwerpteams waarin niet alleen docenten, maar ook universiteiten participeren. De tijd is rijp om tijd en geld te steken in innovatie van het onderwijs, om de enorme toestroom adequaat te kunnen begeleiden naar het hoger onderwijs. Dit door middel van kwalitatief onderzoek dat erop gericht is dat de noodzakelijk basiskennis wordt geautomatiseerd en ingezet kan worden als voedingsbodem voor wiskundig denken in andere disciplines.

Nellie Verhoeef (Universiteit Twente)



Frans Oort

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

f.oort@uu.nl

Geschiedenis

Grothendieck: de nieuwe algebraïsche meetkunde

Alexander Grothendieck, een man met een dramatische jeugd, een briljant wiskundige die wereldfaam verwierf, maar op latere leeftijd vereenzaamde in een kluizenaarsbestaan. Hoe benaderde hij de wiskunde? Frans Oort beschrijft een klein deel van Grothendiecks leven en werk en geeft een voorbeeld van zijn werkwijze.

In de laatste honderd jaar heeft de algebraïsche meetkunde meerdere malen een grote ontwikkeling doorgemaakt. De erfenis van grote wiskundigen uit de 19de eeuw werd door de Italiaanse wiskunde van totaal nieuwe meetkunde methoden voorzien; vaak virtuoos en mooi, lang niet altijd rigoureuus. Door Van der Waerden, Zariski en vele anderen werd de algebraïsche grondslag gelegd, door Weil op een heel hoog plan gebracht. De Weil vermoedens bleken een nieuwe impuls te geven aan dit toch al zo rijke vakgebied. Serre wist de meetkunde weer terug te brengen in deze theorie. De uitdaging van de Weil vermoedens en de rijkdom aan meetkundige en algebraïsche methoden lagen klaar toen Alexander Grothendieck besloot om het vakgebied op een geheel nieuwe leest te schoeien. Was er nog wel iets nieuws te brengen in dit vakgebied dat al zo ver door ontwikkeld was? Gebruikmakend van methoden van al die voorgangers, en met een groot doel voor ogen ging Grothendieck aan de slag. Ik probeer een beschrijving te geven van de revolu-

tionaire en stormachtige ontwikkeling die de algebraïsche meetkunde doormaakte aan de hand van Alexander Grothendieck in de jaren 1958 – 1970. We zien:

- Het ontwikkelen van een fundamenteel nieuwe opzet van een heel vakgebied.
- Veel vroegere technieken komen in een krachtiger vorm terug.
- De mens die daar de spil in is, heeft later een ongelukkig leven.

Wat daar aan vernieuwende gedachten geproduceerd werd is verbazingwekkend. Prachtige verbanden tussen schijnbaar disjuncte gebieden. Oplossingen van oude problemen. En een menselijk drama dat daar doorheen speelt: het leven van Grothendieck in al zijn facetten.

In dit artikel worden de volgende onderwerpen behandeld. Eerst probeer ik iets te zeggen over persoonlijke achtergronden in het leven van Alexander Grothendieck. Dan ga ik in op de manier waarop een wiskundige werkt. In een schetsmatig beeld geef ik aan wat de

grote kracht was van de werkwijze van Grothendieck, en wat de methode is die andere wiskundigen in staat stelt om ook resultaten te boeken. In de topologie wordt de fundamenteel groep gedefiniëerd. In de algebra de Galois groep. Ik schets deze (schijnbaar zo ver van elkaar liggende) begrippen. Ik besluit met het beschrijven van een resultaat zoals dat door Grothendieck bereikt werd.

Veel mensen denken dat zijn gedachten wereld zo abstract en moeilijk te begrijpen is dat welke beschrijving daarvan dan ook vele tientallen pagina's moeilijke wiskunde hoort te beslaan. Ik probeer juist aan dít lezerspubliek te laten zien dat de essentie van Grothendiecks werkwijze heel goed te vertellen en uit te leggen is. Ik doe dat aan de hand een voorbeeld, de *monodromie-stelling*. De vernieuwende opzet van Grothendieck van het begrip fundamenteelgroep geeft ons de sleutel in handen om een moeilijk en diep resultaat te bewijzen met behulp van eenvoudige lineaire algebra. Al beschrijft dat maar een klein deel van de essentie van zijn werk; ik hoop dat het een tipje van de sluier oplicht.

Leven en werk

Het leven van Alexander Grothendieck is vol met drama, fascinerende geschiedenis en



Serre en Grothendieck in 1958

grootse momenten [1, 5].

Hij werd geboren in Berlijn in 1928. Zijn moeder Hanka Grothendieck leefde in bittere armoede. Zijn biologische vader Sascha Schapiro had een leven vol met gevaren: hij werd gevangen als opstandeling tegen het Sovjet regime, verloor bij de vlucht een arm, ontmoette de even anarchistische Hanka in Berlijn; daarna vluchtte hij voor de nazi's naar Frankrijk en probeerde daar de kost te verdienen als fotograaf. Hanka liet Alexander in 1933 bij een familie in Hamburg achter en ook zij vertrok naar Parijs. Maar Sascha vocht mee in de Spaanse burgeroorlog, en stierf later in een nazi concentratie kamp. Alexander gaat in 1939 naar zijn moeder. De oorlog brengen Hanka en Alexander door in een Frans interneringskamp (als ongewenste vreemdelingen). Lees vooral de fascinerende beschrijving van die tijd, en van hun leven in [5].

Na de oorlog studeert Alexander wiskunde, en al gauw blijkt zijn grote talent. In zijn proefschrift in 1953 vernieuwt hij op fundamentele wijze de functionaal analyse. Hij raakt daarna onder de indruk van een vermoeden van André Weil, een probleem analoog aan het Riemann vermoeden. Weil geeft aan welke nieuwe structuur er zou moeten gemaakt worden om dit vermoeden te bewijzen. Weil zelf maakt een nieuwe opzet van de algebraïsche meetkunde, en bewijst een belangrijk speciaal geval. Grothendieck is gefascineerd en besluit die hypothetische, nieuwe theorie te ontwikkelen. In 1958 geeft hij een voordracht op het International Congress of Mathematicians, ICM 1958, waar hij de grote lijnen van zijn plan schetst. Ik was er bij en heb er helemaal niets van begrepen. Maar er was iemand op de eerste rij, die blijk gaf te kunnen volgen wat Grothendieck van plan was. Dat bleek Jean-Pierre Serre te zijn.

Als buitenlander heeft Grothendieck moeite om een positie in Frankrijk te krijgen. In 1959 wordt het nieuwe instituut IHES opge-

richt, speciaal om Grothendieck aan een trekking te helpen en de gelegenheid te geven zijn grote plannen gestalte te laten geven. Dat instituut nu in een dorpje even ten zuiden van Parijs, bestaat nog steeds, en is het centrum van veel belangrijke ontwikkelingen. In zijn vruchtbare jaren heeft Grothendieck veel contact met Serre, zowel per telefoon, als in gesprekken, als in brieven. Het is duidelijk dat Serre niet alleen als klankbodem dient, maar vooral ook als diegene die bij alle plannen van Grothendieck de voorbeelden geeft die de realiseerbaarheid ervan aangeven ("toujours lui" schrijft Grothendieck daar over).

In de periode 1958–1970 presteert Grothendieck iets wat haast niet te geloven is. Hij schrijft vele duizenden bladzijden heel abstract wiskunde. Hij geeft vele jaren een seminarium, waar hij de teksten levert, meer dan tien afleveringen van elk vele honderden pagina's, soms uitgewerkt en voorgedragen door mensen die met hem samen werken. Hij schetst in voordrachten in Séminaire Bourbaki dingen die hij al bewezen heeft en die hij later hoopt uit te werken. Hij beschrijft hoe hij denkt dat de ontwikkelingen verder zullen gaan. We zijn nu nog steeds bezig te begrijpen wat hij toen geschreven heeft. Het is duidelijk dat in het begin van de 60er jaren dit alles in zijn hoofd reeds gestalte had gekregen. Op het ICM 1966 in Moskou ontvangt Grothendieck de Fields Medal (een Nobel prijs is er niet voor wiskundigen; dit is de hoogste eer, die eenmaal in de vier jaar aan twee of aan vier jonge wiskundigen wordt toebedeeld).

Hier is een voorbeeld van de grondigheid en het formidabele inzicht van Grothendieck. Serre signaleert in een van zijn bewijzen een probleem, dat er ruwweg op neer komt dat een quotiënt afbeelding van algebraïsche groepen niet een lokaal triviale vezeling hoeft te zijn in de Zariski-topologie. In [6] vinden we de oplossing: een dergelijke vezeling is "localement isotrivial": na terugtrekken met een eindige onvertakte afbeelding is dat wel het geval. En daar laat Serre het verder bij. Grothendieck neemt dat probleem op: je moet overdekkingen van een topologische ruimte niet definiëren door een vereniging van open deelverzamelingen, maar door zulke deelverzamelingen met daaroverheen steeds een ander ruimte. Het begrip 'overdekking' in de topologie gaat op de helling. M. Artin geeft in 1962 aan Harvard University daar een seminarium over. Grothendieck wijdt er, met Artin en Verdier, een heel seminarium aan, 1963 – 1964, vele honderden bladzijden abstracties. Het idee van Serre wordt in al zijn al-



Grothendieck geeft college (IHES, Bures-sur-Yvette)

gemeenschap uitgewerkt, deels omdat het de benodigde middelen kan leveren voor het bewijs van de Weil vermoedens: de hypothetische 'Weil cohomologie' heet dan 'étale cohomologie'. Maar ook omdat het ontwikkelen van zo'n prachtig groot bouwwerk nu eenmaal de voorkeur had van Grothendieck boven het bestuderen van speciale gevallen. Het bleek veel toepassingen te hebben, bijvoorbeeld in de logica: onverwachts, moeilijk te begrijpen, visionair. Een indrukwekkend bouwwerk. Een techniek die nu nog steeds behoort tot de dagelijkse gereedschapskist van de algebraïsch meetkundige. En, deze aanzet van Grothendieck heeft weer geleid tot prachtige ontwikkelingen en tot problemen die nog steeds onopgelost zijn. Overigens is dit een voorbeeld van een heel algemeen uitgangspunt van Grothendieck: bestudeer niet een variëteit of schema op zichzelf, maar altijd in de relatieve situatie; een voordracht van Grothendieck begon altijd met: "zij X een schema boven S ".

Al in die jaren zijn er tekenen dat Grothendieck dwars ligt. Hij richt een beweging op 'Survivre' die onder meer alle landen wil overtuigen bewapening op te geven. Het is vol met idealisme.

Maar zo briljant als Grothendieck was als wiskundige, zo bevlogen als hij in zijn idealisme is, zo weinig kennis van zaken en overzicht heeft hij in sociale en politieke zaken. Steeds vaker heeft hij aanvaringen met de directie van zijn instituut. In 1970 blijkt dat het IHES deels gefinancierd wordt met behulp van geld uit militaire bronnen. En Grothendieck neemt ontslag. Als U wilt proeven hoe Grothendieck daarover dacht en voelde, lees dan zijn stuk 'Responsabilité du savant dans le monde d'aujourd'hui, le savant et l'appareil militaire' [8]. En mogelijk waren er ook heel andere redenen waarom Grothendieck tot deze stap kwam.

In de jaren tussen 1970 en nu vervreemdt Grothendieck steeds meer van de wereld. Hij



Grothendieck in Montreal, 1970

schrijft vele duizenden bladzijden van memoires, vol venijn en vele honderden bladzijden met ideeën hoe de wiskunde zich verder zou moeten ontwikkelen. Van dat laatste is veel nog niet gepubliceerd, en zeker nog niet begrepen. Zijn grote droom, het bewijzen van de Weil vermoedens, wordt gerealiseerd door een leerling van hem, Pierre Deligne, maar Grothendieck heeft daar weinig waardering voor. Nu weet bijna niemand meer waar hij woont (ergens in de Pyreneeën). Hij weigert nu contact in het algemeen. Het lijkt een droevig bestaan.

Kortom: een heel moeilijk jeugd, als vreemdeling levend in eigen land – als student al indrukwekkende resultaten; als wiskundige eigenhandig een heel nieuw fundament leggend voor een heel vakgebied, met indrukwekkende resultaten, voor ons een reeks gereedschappen ontwikkelend die nog heel lang gebruikt zullen worden; steeds meer ontsporend in sociaal opzicht, met een leven nu dat wij toch als troosteloos ervaren. In 2008 werd hij 80 jaar oud. Maar als je denkt hoe hij nu leeft, daar word je niet vrolijk van.

Een paar van mijn gedachten:

Het komt voor dat iemand in het ene aspect van het leven briljant is, terwijl hij niet datzelfde indrukwekkende overzicht heeft in een ander gebied. Soms wordt die gedachtenfout wel gemaakt: omdat iemand goed is het ene 'moet' hij ook wel goed zijn in andere dingen. Laten we niet in die valkuil lopen. Hoe vaak heb ik niet een student gezien die iets niet begreep of iets niet kon, maar dan juist in iets anders vreselijk goed was. Of omgekeerd. Het blijft mooi om te zien wat voor mogelijkheden mensen hebben.

Soms wordt het gedrag van Grothendieck in zijn latere leven gezien als consequentie van een moeilijke jeugd. Een dergelijk redenering vind ik gevaarlijk. Er is mogelijk een verband, maar niet een logische implicatie. Er zijn heel wat mensen met een moeilijke jeugd

die stabiele en vriendelijke mensen zijn.

Wiskundigen genieten van de schoonheid van hun vak, en daardoor zijn het vaak zulke vriendelijke en tevreden mensen. De gedrevenheid van Grothendieck in zijn productieve jaren lijkt zich haast tegen hem gekeerd te hebben in zijn latere jaren. Ik denk dat een persoonlijkheidsstructuur niet een logisch gevolg is van het werken aan de wiskunde, al kan het er wel mee samen hangen, zowel in positieve als in negatieve zin.

Ik ken vele bevlogen, aardige en heel stabiele wiskundigen. Allicht, als je met zo'n mooi vak omgaat. Het gangbare oordeel 'een wiskundige, dus een nerd' klopt bijna nooit.

Hoe werkt een wiskundige?

Stel, je wordt geconfronteerd met een probleem of een vraag P . Dan zijn er twee verschillende manieren om naar een oplossing te zoeken (ter wille van de duidelijkheid chargeer ik wat, in de praktijk passen wiskundigen vaak een mengsel van de beide methoden toe).

Methode (G)

Generaliseer het probleem naar AP . Ontwikkel vervolgens een algemene theorie, een 'machine', een logische stelsel van redeneringen $Mach$. Voer het probleem AP in $Mach$ in, en wacht af wat er gebeurt. Als er een goed antwoord uitrolt, dan ben je erg tevreden. Als er geen antwoord uitrolt, dan ben je vastgelopen.

Grothendieck paste deze methode veel toe. Het grote voordeel is dat je door iets te ge-

neraliseren hinderlijke details en bijverschijnselen uitschakelt. Als je maar creatief genoeg bent dan zie je essentie van de structuur, en kom je tot veel algemenere opvattingen en meer nieuwe inzichten dan voorheen.

Zie ook een interview met Yuri Manin [3], die zegt: "I see the process of mathematical creation as a kind of recognizing a preexisting pattern." En in die visie spelen vermoedens en concrete problemen meestal geen grote rol. Er ligt meer nadruk op het vinden van een structuur, dan op het oplossen van een probleem.

Voordeel. Nieuwe, abstracte methoden worden ontwikkeld. De essentie van een structuur wordt niet versluierd door details.

Nadeel. Soms wordt het contact met 'de werkelijkheid' zo schimmig dat methoden lijken te bewijzen "dat de lege verzameling leeg is". Ik zag een keer Grothendieck ploeteren aan het bewijs van een heel algemene bewering, maar Serre gaf met een eenvoudig voorbeeld aan dat die bewering onjuist was.

Methode (M)

Bekijk het probleem P van alle kanten. Maak voorbeelden. Reken speciale gevallen door. En probeer zo een indruk te krijgen van de structuur van de materie. Soms zie je dan dat een deel van het probleem past in een algemene theorie. Dan ploeter je verder tot alle gevallen herleid kunnen worden tot die oplosbare gevallen, en je kijkt tevreden terug op de bereikte resultaten.

Voordeel. Je blijft met beide benen op de grond staan. In elke stap van het proces ben



In 1971 schreef Grothendieck, na zijn lezing aan de Universiteit Bielefeld, deze tekst in het colloquiumboek. Zijn frustratie omtrent het wetenschappelijke 'delirium' en de wereldproblematiek spat er vanaf

je bezig met dat probleem. Concrete voorbeelden behoeden je soms voor zinloze uitspraken, voor het inslaan van doodlopende wegen. En je mag ook best abstracte methoden toepassen.

Nadeel. Doordat je ‘laag bij de grond’ blijft mis je soms algemene principes. Je loopt het gevaar lange berekeningen te doen die overbodig zijn in een algemenere theorie.

Zo kun je werken aan een wiskundige probleem. Als je bezig bent met creatieve wiskunde (oplossen van een vraagstuk, werken aan een scriptie, het oplossen van een moeilijk probleem), probeer dan een mengsel van deze beide methoden. Aarzel niet om af en toe zo maar een wilde algemene theorie te ontwikkelen of proberen toe te passen. Maar aarzel ook niet om eens een moeilijk speciaal geval door te rekenen, om zodoende gevoel te krijgen waar de essentie van het probleem te vinden is. Sommige wiskundigen vinden dat een goed wiskundige niet passen, maar daar trek ik me meestal niets van aan. Probeer een bewijs te vinden, en een probleem op te lossen. Als dat niet lukt, gebruik dan de ‘reden’ waarom dat niet lukt om een tegenvoorbeeld te vinden. Als dat niet lukt, gebruik dan die ‘obstructie’ voor het vinden van een tegenvoorbeeld als argument in een bewijs, enzovoort. Een methode die ik vaak toepas, soms met een beetje succes, en die ik altijd vertel aan studenten en leerlingen.

De topologische fundamentealgroep en een toepassing

We illustreren methode (G) met behulp van een bewijs van de ‘monodromie-stelling’, in deze vorm gevonden door Grothendieck, gepubliceerd door Serre en Tate. Eerst ontwikkelen we een algemene theorie (zo prachtig mooi in dit geval). Dan voeren we het probleem in de machine, en de oplossing rolt er uit.

Veronderstel dat we een *topologische ruimte* T hebben, met een gemarkeerd punt $b \in T$. Daaraan voegen we toe een groep $(T, b) \mapsto \pi_1^{\text{top}}(T, b)$, de *topologische fundamentealgroep*. Lussen in T worden beschouwd: een afbeelding van het reële interval $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$ met $\gamma(0) = b = \gamma(1)$. Twee lussen heten ‘homotoop’ als ze continu in elkaar kunnen worden overgevoerd. Homotopie-equivalentieklassen van zulke lussen vormen de elementen van de fundamentealgroep. De inverse: de lus in omgekeerde richting doorlopen. Compositie in de groep: twee lussen achter elkaar doorlopen. Voor de theorie, zie een tekstboek over

topologie.

Prachtig: aan een topologische ruimte met basispunt wordt een ‘invariant’ gehecht, een groep; die vertelt iets over de topologische structuur. Vaak is die groep eenvoudiger te hanteren dan het topologische object waar het vandaan komt.

Een voorbeeld. Neem $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, de cirkel met straal 1 in het complexe vlak, met basis punt $b = 1$. Intuïtief is duidelijk:

$$\pi_1^{\text{top}}(S^1, b) \cong \mathbb{Z}.$$

Hierin tellen we hoe vaak een lus om de cirkel heenloopt, zeg tegen de wijzers van de klok in. Een bewijs dat de bovenstaande formule juist is vergt wel wat werk. We zullen in het bewijs hieronder alleen maar gebruiken dat $\pi_1^{\text{top}}(S^1, b)$ niet de triviale groep is.

De dekpuntstelling van Brouwer
Stelling. Beschouw de cirkel-schijf

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Een continue afbeelding $f : D \rightarrow D$ heeft een dekpunt, oftewel er is een $e \in D$ met $f(e) = e$.

Deze stelling, genoemd naar de Nederlandse wiskundige L. E. J. Brouwer, heeft veel toepassingen. Wat is het ‘glibberige’ van het probleem? De verzameling van alle continue afbeeldingen f zoals in de stelling is heel erg groot. Hoe werk je ooit concrete gevallen uit? *Bewijs.* Zie [9]. Omdat D samentrekbaar is zien we dat $\pi_1^{\text{top}}(D, b) = \{e\}$.

Veronderstel dat f geen dekpunt zou hebben. Trek voor iedere $x \in D$ de halfrechte H die begint in $f(x)$ en vervolgens door x gaat; omdat $f(x) \neq x$ voor elke x is deze halfrechte goed gedefiniëerd. Loop vanuit $f(x)$ langs H naar x en loop (eventueel) verder tot je de cirkel snijdt in het punt $F(x)$. Bewijs dat de afbeelding $F : D \rightarrow S^1$ die je zo krijgt continu is. Verder is duidelijk dat voor elke $x \in S^1$ geldt: $F(x) = x$. We krijgen

$$h := F \cdot i : S^1 \hookrightarrow D \rightarrow S^1, \quad \text{met } h = \text{id}_{S^1}.$$

(Hier krijgen we toch al het gevoel dat dit niet kan maar hoe bewijzen we dat?) Het effect van h op $\pi_1^{\text{top}}(S^1, t)$ is

$$\text{id}_{\mathbb{Z}} = h_* : \left(\pi_1^{\text{top}}(S^1, b) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(D, b) = \{e\} \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(S^1, b) \cong \mathbb{Z} \right) = 0.$$

Deze tegenspraak bewijst de stelling. $\square$

De Galoisgroep en een toepassing

Neem een lichaam K , en een polynoom $F = F(T) \in K[T]$. De verzameling van nulpunten van F in een algebraïsche afsluiting $k = \bar{K}$

heeft symmetrie-eigenschappen: beschouw automorfismen van k die elementen van K invariant laten en die nulpunten van F permuteren. Bijvoorbeeld $K = \mathbb{Q}$ en $F = T^2 + 5$; de nulpunten zijn $\pm\sqrt{-5}$ en complexe conjugatie verwisselt die twee nulpunten. Of $K = \mathbb{Q}$ en $F = T^3 - 2$; wat zijn de nulpunten? welke permutaties komen voor? Het antwoord op deze vragen (en op veel andere problemen die hiermee samenhangen) worden gegeven door Galois theorie. De droevige levensgeschiedenis van Galois is te lezen op Wikipedia.

In de Galois theorie wordt het kleinste lichaam L bestudeerd dat K en de nulpunten van F bevat. De groep van automorfismen van L over K (automorfismen van L die elementen van K invariant laten) is eindig en permuteert de nulpunten van F . De structuur van deze groep beschrijft eigenschappen van F . Wat is die groep voor het geval $F = T^3 - 2 \in \mathbb{Q}[T]$?

Met behulp van deze theorie is het niet moeilijk om een prachtig resultaat van Ruffini en van Abel te beschrijven en te bewijzen. Neem een ‘willekeurig’ polynoom $F \in K[T]$. Kun je de nulpunten van F beschrijven met behulp van worteltekens? We kennen allemaal de ‘ $A - B - C$ formule’ voor een kwadratische vergelijking. Cardano beschreef een dergelijke formule voor polynomen van graad 3. Ook is het mogelijk om een dergelijke formule op te schrijven voor een polynoom van graad 4.

Abel, Ruffini

Stelling. Voor $n \geq 5$ is er niet een formule opgebouwd met behulp van worteltekens die voor elk polynoom $F \in \mathbb{Q}[T]$ van graad n de nulpunten uitrekt.

Een andere formulering: voor $n \geq 5$ is er een $F \in \mathbb{Q}[T]$ polynoom van graad n over een lichaam $\mathbb{Q}$ waarvoor de Galois groep van F een niet oplosbare groep is; voor een dergelijk polynoom zijn de nulpunten niet op te schrijven in een formule met worteltekens.

De Galois theorie heeft een grote invloed gehad op het systematiseren en begrijpen van grote delen van de wiskunde.

Stop. We lezen niet verder, maar denken eerst na over de vraag:

“Wat is het verband tussen de topologische fundamentealgroep en de Galois groep?”

Het lijken begrippen in heel verschillende werelden. We zullen zien dat deze klassieke begrippen, die we goed dachten te begrijpen, door Grothendieck in een heel ander perspectief geplaatst zijn. En dan komt er een techniek beschikbaar die een moeilijk probleem eenvoudig maakt.

Schema's

Uitgaande van een variëteit construeren we een ring. Voor een lichaam k wordt de affiene ruimte van dimensie n gegeven als $\mathbb{A}^n = k^n$. Een affiene algebraïsche variëteit $V \subset \mathbb{A}^n$ wordt gegeven als nulpunten-verzameling van een stelsel polynoom vergelijkingen $f_1 = 0 = f_2 = \dots = f_s$. Dit werkt goed over een algebraïsch gesloten lichaam k . (In andere gevallen moet je meer structuur aanbrengen.) We kunnen 'reguliere functies' op V bekijken. Dat zijn quotiënten van polynomen modulo I , het ideaal voortgebracht als $I = (f_1, \dots, f_s)$, zodanig dat een dergelijke quotiënt in elk punt $P \in V$ geschreven kan worden als F/G met $G(P) \neq 0$. We kunnen nu bewijzen: de ring van functies die regulier zijn op V is gelijk aan $k[V] = R = [T_1, \dots, T_n]/I$.

Uit die ring kan de variëteit teruggevonden worden. Omgekeerd kan uit R de variëteit V teruggevonden worden: elk punt van V correspondeert met een maximaal ideaal van R .

Een voorbeeld

Voor $V = \mathbb{A}^1$ geldt $R = k[T]$; en het punt $P \in V$ gegeven door zijn coördinaat t correspondeert met het ideaal $(T - t) \subset R$. Eenvoudige opgave: bewijs dat voor k de algebraïsche gesloten toevoeging $t \mapsto (T - t)$ een bijjectie geeft tussen V en de verzameling van maximale idealen van $R = k[T]$.

Stelling. Er is een anti-equivalentie van categorieën

$$\{\text{affiene variëteit over } k\}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Alg}_k, \\ V \mapsto k[V].$$

Hier is Alg_k de categorie van commutatieve k -algebras van eindig type die geen nuldelers hebben.

Het idee dat een ruimte teruggevonden kan worden als verzameling van bepaalde idealen in de ring van functies op die ruimte was aan Grothendieck al bekend uit de lineaire analyse.

Aha! Je kunt dus een meetkundig object beschrijven als als verzameling van priemidealen in een ring. (Het blijkt technisch van belang te zijn niet alleen maar maximale idealen te beschouwen.) Kunnen we omgekeerd uit die ring de variëteit V terug vinden?

Definitie. Voor een commutatieve ring R met $1 \in R$ schrijven we $X = \text{Spec}(R)$ voor de verzameling van priemidealen $I \subset R$ met $1 \notin I$. Het 'spectrum' van de ring R .

Voor elk element $f \in R$ schrijven we U_f voor de verzameling van alle I met $f \notin I$ (de verzameling waar f "niet de waarde 0 heeft").

Het blijkt dat $\{U_f \mid f \in R\}$ een subbasis vormt voor een topologie op X . Dit was al bekend in de algebraïsche meetkunde als de 'Zariski topologie'.

Voor $P \in X$, gegeven door het priemideaal $I_P = I \subset R$ schrijven we

$$O_P = R_I = \{f/g \mid f, g \in R, g \notin I\}.$$

We hebben nu $\text{Spec}(R)$: een ruimte, met een topologie, en een verzameling van "functies", en de theorie kan opgezet worden. Eigenlijk zou ik ook het begrip 'schoof' moeten behandelen, maar dat voert ons te ver.

Stelling. Er is een anti-equivalentie van categorieën

$$\{\text{affien schema}\}^0 \xrightarrow{\sim} \text{Rg}, \quad R \mapsto \text{Spec}(R).$$

Hier is Rg de categorie van commutatieve ringen met 1.

Fantastisch toch? Een eenvoudig idee ont-doen van alle franje: geen condities aan R opleggen, hele rare commutatieve ringen mogen voorkomen. Het blijkt dat er diepe toepassingen zijn, dat dit de goede manier is om tegen de objecten aan te kijken.

Bovendien kunnen we nu heel andere vakgebieden erbij betrekken. Bijvoorbeeld de ring $\mathbb{Z}$ is toegestaan, de getaltheorie gaat meespelen.

Een voorbeeld: $R = \mathbb{Z}[T]$. We kunnen $\text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$ intuïtief aanvoelen als het 'product' van een ééndimensionale affiene ruimte met $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. We hebben plotseling een object waar we 'in de ene richting' meetkunde kunnen doen, en 'in de andere richting' getaltheorie. We komen hier later op terug.

Veel van deze begrippen waren deels al bekend (Weil, Zariski, Serre, en vele anderen). Maar de sprong naar de grote abstractie, de durf om het zo te doen, je vrij maken van vooroordelen, en het visionaire inzicht dat dit leidt tot de kern van de zaak, dat is de grote bijdrage van Grothendieck.

Het lijkt een eenvoudig spel, maar wie de vele pagina's theorie ziet, geschreven door Grothendieck, nodig om dit begrip in volle algemeenheid te ontwikkelen en toe te passen, weet wel beter. En dan komt het karakter van Grothendieck boven: alles tot in de meest gevorderde abstractie uitwerken, en alles opzetten met zo min mogelijk beperkende voorwaarden. En vele malen in de geschiedenis hebben we gezien hoe we de vruchten kunnen plukken van deze ontwikkelingen.

Zie [2], waar in het eerste hoofdstuk Grothendieck al meer dan tweehonderd bladzijden nodig heeft om het begrip een affien

schema in alle abstracties uit te leggen. In totaal zijn er acht delen van EGA verschenen, in totaal ongeveer 1600 bladzijden, een deel van de eerste vier hoofdstukken van de oorspronkelijk geplande dertien hoofdstukken van de *Éléments de géométrie algébrique*. In 1959 schreef Grothendieck aan Serre zijn plan voor de hoofdstukken van EGA, dat hij dit plan wilde afronden in drie, hooguit vier jaar, en dat we dan "algebraïsche meetkunde kunnen gaan doen"...

De Grothendieck fundamentealgroep en een toepassing: monodromie-stelling

Lemma. Zij $K = \mathbb{Q}(T)$. Beschouw $f = X^n - T$, met $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Beschouw $L \supset \mathbb{Q}(T)$, het kleinste lichaam dat alle nulpunten van f bevat. Dan is $L = \mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{T})$; hier is ζ_n een primitieve n -de eenheidswortel. Schrijf

$$K = \mathbb{Q}(T) \subset E = \mathbb{Q}(\zeta_n, T) \subset L.$$

Er is er een exacte rij

$$1 \rightarrow N := \text{Aut}(L/E) \cong \mathbb{Z}/n \rightarrow \text{Aut}(L/K) = G \\ \rightarrow H := \text{Aut}(E/K) \cong (\mathbb{Z}/n)^* \rightarrow 1.$$

Hier is $(\mathbb{Z}/n)^*$ de multiplicatieve groep van eenheden in de ring $\mathbb{Z}/n$. Door conjugatie in G werkt $H = \text{Aut}(E/K)$ op de commutatieve normaaldeler $N \subset G$. Zo komt er een homomorfisme

$$H \cong (\mathbb{Z}/n)^* \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(N) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/n) \cong (\mathbb{Z}/n)^*.$$

Bewering: Dit is een isomorfisme.

Het is niet moeilijk een bewijs uit te schrijven, als we eenmaal de notatie begrijpen. Dit eenvoudige resultaat is het hart van het bewijs dat straks volgt.

Schrijf N multiplicatief, $N = \langle \tau \rangle$ met $\tau^n = 1$. Het resultaat van het lemma in deze taal is: zij $\sigma \in G$ met $\sigma \mapsto (t \bmod n) \in (\mathbb{Z}/n)^*$; dan is $\sigma^{-1} \cdot \tau \cdot \sigma = \tau^t$.

De *monodromie-stelling* zegt iets over de eigenwaarden van de monodromie-matrix. Helaas, het zou te ver voeren om een complete, sluitende definitie te geven. De methode van bestuderen van matrices, die substituties in matrix vorm geven als we met oplossingen rond een singulariteit lopen, stamt al van Gauss. Jordan benadrukte dat deze substituties een groep voortbrengen (die we nu de monodromie-groep noemen).

Om het probleem aan te geven in het geval dat ons interesseert: in een familie van variëteiten, geparametriseerd door de cirkel of door de eenheids-schijf zonder oorsprong, levert eenmaal rondwandelen een substitutie

op, bijvoorbeeld op een homologie groep van de vezels. Dat geeft een matrix. Er waren allerlei moeilijke bewijzen om te laten zien dat de eigenwaarden van die matrix eenheidswortels zijn.

Grothendieck formuleert een veel algemenere theorie, die de topologische fundamenteelgroep en de Galois groep in één concept onderbrengt. We geven als voorbeeld $R = \mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]$, en we proberen een fundamenteelgroep te definiëren voor $X = \text{Spec}(R)$. We kunnen een (eindige) onvertakte overdekking van $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ geven door middel van $\sqrt[n]{T} = S$:

$$\text{Spec}(\mathbb{Q}[S, \frac{1}{S}]) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]), \quad T \longmapsto S^n.$$

Dit geeft het *meetkundige deel* van de fundamenteelgroep, zulke overdekkingen. Maar je kunt ook de inclusie $\text{Spec}(\mathbb{Q}) \subset \text{Spec}(K_n)$ met $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ beschouwen, waar ζ_n een ‘primitieve n -de eenheidswortel’ is: een nulpunt van $Y^n - 1$ zodanig dat $\zeta_n^r \neq 1$ voor $1 \leq r < n$. Dat geeft een ‘onvertakte overdekking’

$$\text{Spec}(K_n) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q});$$

dit geeft

$$\text{Spec}(K_n[T, \frac{1}{T}]) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}[T, \frac{1}{T}]).$$

Grothendieck beschrijft de fundamenteelgroep van een schema X als de groep die alle eindige ‘onvertakte overdekkingen’ van X classificeert. Onder andere bewijst hij dat er voor een schema X over een lichaam K een exacte rij bestaat

$$1 \rightarrow \pi_1(X_k) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow$$

$$\pi_1(\text{Spec}(K)) = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K) \rightarrow 1$$

bestaat; hier is k een algebraïsche afsluiting

van K . (Ik laat basis punten weg in de notatie.) We herkennen deze structuur als we het vorige lemma nog eens lezen. In veel gevallen lukt het Grothendieck het ‘meetkundige deel’ van de fundamenteelgroep in verband te brengen met de topologische fundamenteelgroep, en deze dan ook te berekenen met zuiver topologische middelen. Voor $n > 1$ is de afbeelding $\text{Spec}(O_n) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ vertakt, waar O_n de ring van gehelen is in K_n . Daarom zegt men in de algebraïsche getaltheorie dat de uitbreiding $\mathbb{Q} \subset K_n$ vertakt is, bedoelend dat $\mathbb{Z} \subset O_n$ vertakt is.

We beschouwen een familie van variëteiten. Omdat maar eindig veel coëfficiënten worden gebruikt, kunnen we dit definiëren over een lichaam eindig voortgebracht over $\mathbb{Q}$. Dus werkt er nog steeds een heel grote Galois groep op de meetkundige fundamenteelgroep. Het bovenstaande lemma geeft (laat n naar oneindig gaan) de volgende situatie (ik simplificeer, maar de essentie van het bewijs van Grothendieck zien we hier):

Lemma. Zij $M \in \text{GL}(m, \mathbb{Q})$, een $m \times m$ matrix over $\mathbb{Q}$ waarvan de determinant niet gelijk aan nul is. (Dit is de monodromie-matrix.) Veronderstel dat er een $S \in \text{GL}(m, \mathbb{Q})$ is en een geheel getal $t \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat:

$$S^{-1} \cdot M \cdot S = M^t.$$

(De matrix S komt van de werking van de Galois groep en deze gelijkheid is precies de gelijkheid zoals in het voorgaande lemma.) Dan is er een $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat voor elke eigenwaarde $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$ van M geldt: $\lambda^e = 1$.

Bewijs. Laat $\Lambda \subset \overline{\mathbb{Q}}^m$ de verzameling van eigenwaarden van M zijn; merk op dat alle eigenwaarden ongelijk aan nul zijn. Dan is Λ

ook de verzameling van eigenwaarden van $S^{-1} \cdot M \cdot S$. Dat weten we toch uit de lineaire algebra. Dus geeft $\lambda \mapsto \lambda^t$ een permutatie van de verzameling Λ . Als we die permutatie $m!$ keer uitvoeren dan komt er de identiteit. Dus:

$$\lambda^{t^{(m!)}} = \lambda, \quad \forall \lambda \in \Lambda; \quad \text{dus}$$

$$\lambda^e = 1 \quad \text{met} \quad e = t^{(m!)} - 1. \quad \square$$

Voor een precieze formulering van de monodromie-stelling, en voor een bewijs in de algemene situatie zie [7], Proposition (Grothendieck) op pagina 515; zie ook [4].

Wat is er gebeurd? De algemenere theorie van de *Grothendieck fundamenteelgroep*, die de topologische fundamenteelgroep en de Galoisgroep in één concept verenigt, geeft een werking van de Galois groep op de meetkundige fundamenteelgroep; het vertaalt een moeilijk meetkundig probleem in een eenvoudige berekening met matrices. Indrukwekkend! We zien hoe voor variëteiten over $\mathbb{C}$ juist ook de structuur over een lichaam eindig voortgebracht over $\mathbb{Q}$ van nut kan zijn: laat alle overbodige informatie weg.

Tot besluit

Dit is een voorbeeld van de vernieuwende werking van het gedachtengoed van Grothendieck, nu 40 jaar geleden ontwikkeld. We kunnen er nog veel van verwachten, en als gereedschap in de moderne wiskunde is het niet meer weg te denken.

Nawoord

Een eerdere versie van dit artikel verscheen in: “Vakidiot”, Studievereniging A-Eskwadraat, Jaargang 2008-2009:3, pp. 46–56. Met dank aan de redactie van dat tijdschrift voor de stimulerende uitnodiging dit artikel te schrijven. Met dank aan Sander Kupers voor commentaar en voor hulp bij de illustraties.

Referenties

- Hier vinden we een beschrijving, verwijzingen en veel artikelen over Grothendieck: <http://people.math.jussieu.fr/~leila/grothendieck-circle/biographic.php>.
- A. Grothendieck & J. Dieudonné (1960), *Éléments de géométrie algébrique*. Oorspronkelijk bedoeld als 13 hoofdstukken, waarvan er slechts 4 gedeeltelijk verschenen zijn. Hier verwijzen we naar: deel I, *Le langage des schémas*. Publications Mathématiques de l’IHES **4** (1960). Zie: http://en.wikipedia.org/wiki/Éléments_de_géométrie_algébrique
- Yuri I. Manin, *Good proofs are proofs that make us wiser*. Interview door Martin Aigner en Vasco A. Schmidt. The Berlin Intelligencer, 1998, pp. 16–19. Zie: <http://www.ega-math.narod.ru/Math/Manin.htm>
- F. Oort, *Good and stable reduction of abelian varieties*. Manuscr. Math. **11** (1974), 171–197.
- W. Scharlau, *Wer is Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität*. Te koop direct van de auteur voor € 12, scharlau@math.uni-muenster.de Winfried.Scharlau@web.de. Zie ook de artikelen op: <http://www.scharlau-online.de/ag-1.html>.
- J.-P. Serre, *Espaces fibrés algébriques*. Séminaire de Chavaley **3** (1958), 1–37.
- J.-P. Serre & J. Tate, *Good reduction of abelian varieties*. Ann. Math. **88** (1968), 492–517.
- ‘Responsabilité du savant dans le monde d’aujourd’hui, le savant et l’appareil militaire’, 50 pp, voordracht in Orsay in juni 1970. Beschikbaar op: <http://www.grothendieckcircle.org>.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_fixed_point_theorem

Annemarie Aarts

*Afdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
a.c.t.aarts@tue.nl*

Vivi Andasari

*Afdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
v.andasari@tue.nl*

Stef van Eijndhoven

*Afdeling der Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
s.j.l.v.eijndhoven@tue.nl*

Onderzoek

Vallende polymeerdraden vormen Lissajouspatronen

In fabrieksprocessen vind je overal wiskundige fenomenen. Bijvoorbeeld bij de industriële productie van polymeermatten, die onder andere gebruikt worden om te voorkomen dat rivierdijken afkalven. Een polymeerdraad valt in vloeibare toestand loodrecht op een horizontaal bewegende band. Op de band vormt de polymeerdraad patronen waarvan de vorm afhankelijk is van de snelheid van de band. De patronen die hierbij ontstaan, blijken te kunnen worden beschreven door Lissajousfiguren, in de elektrotechniek al veel langer bekend. De resultaten van dit onderzoek geven houvast bij het inrichten van het productieproces, bijvoorbeeld om de omzet te verhogen bij constante kwaliteit van de geproduceerde matten.

Jules Antoine Lissajous (1822–1880) is voor natuurkunde- en elektrotechniekstudenten de uitvinder van de ‘Lissajous-figuren’, gesloten krommen die zich vormen wanneer twee trillingen langs loodrechte lijnen worden gesuperponeerd. In 1855 ontwierp Lissajous een eenvoudige optische methode om samengestelde trillingen te bestuderen. Hij monteerde een spiegel aan elk van twee trillende objecten en richtte een lichtbundel op een van de spiegels. Deze bundel werd weerkaatst naar de andere spiegel en van deze tweede spiegel op een scherm. Op dit scherm vormde de dubbel weerkaatste bundel een tweedimensionaal patroon. Op deze manier construeerde Lissajous een voorloper van de oscilloscoop. Overigens werden de Lissajousfiguren reeds eerder ontdekt en onderzocht door de Amerikaanse wetenschapper Nathaniel Bowditch (1773–1838) die de patronen reeds in 1815 liet voortbrengen door een samengestelde slinger.

Elke samengestelde trilling wordt wiskundig beschreven door een samenstelling van twee eenvoudige harmonische bewegingen, zoals sinusoidalen

$$\begin{aligned}x_L(t) &= A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x), \\y_L(t) &= A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y),\end{aligned}\quad (1)$$

Hierbij geeft de onafhankelijke variabele t de tijd aan, de parameters A_x en A_y de amplitudes, ω_x and ω_y de hoekfrequenties, en φ_x and φ_y de fases. De samengestelde trilling wordt voorgesteld door de kromme

$$(x_L(t), y_L(t)), t \geq 0$$

in het (x, y) -vlak. De kromme beschrijft een patroon dat begrensd wordt door de zijden van de rechthoek $-A_x \leq x \leq A_x$, $-A_y \leq y \leq A_y$ in dat vlak.

De patronen laten alleen een gesloten (periodieke) kromme zien als de verhouding van de frequenties ω_x/ω_y een rationaal getal is. Als ω_x/ω_y irrationaal is, laat een wiskundig bewijs, dat de eigenschappen van de verzameling der reële getallen ten volle uitbuit, zien dat ieder punt van de rechthoek willekeurig dicht ligt bij een punt van de kromme of, anders gezegd, de kromme bezoekt iedere open deelverzameling van de rechthoek oneindig vaak. Toch is de kromme niet ‘vullend’ [2]; ge-

geven $x^* \in [-A_x, A_x]$ dan wordt het lijnsegment (x^*, y) , $y \in [-A_y, A_y]$ slechts aftelbaar vaak door de kromme bezocht, terwijl de kardinaliteit van dit lijnsegment niet gelijk is aan de kardinaliteit van de verzameling der natuurlijke getallen.

Keuze van faseverschillen $\varphi_x - \varphi_y$ en frequentieverhoudingen ω_x/ω_y bepalen het type Lissajousfiguur. Bijvoorbeeld, voor $\omega_x = \omega_y$ en $\varphi_x = \varphi_y$ volgt de kromme de diagonaal van de rechthoek

$$y = \frac{A_y}{A_x}x, \quad -A_x \leq x \leq A_x;$$

voor $\omega_x = \omega_y$ en $\varphi_y - \varphi_x = \frac{1}{2}\pi$ de ellips

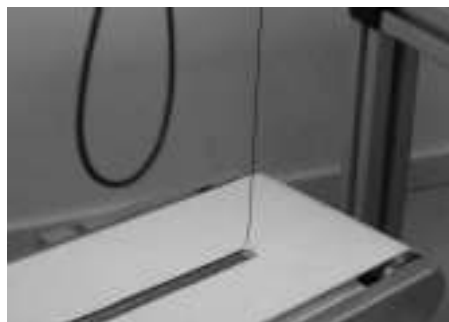
$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1;$$

en voor $\omega_y = 2\omega_x$ en $\varphi_y - \varphi_x = \frac{1}{2}\pi$ de parabool

$$\frac{y}{A_y} = 1 - 2\left(\frac{x}{A_x}\right)^2, \quad -A_x \leq x \leq A_x,$$

waarbij we de gelijkheid $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ hebben gebruikt. In al deze gevallen is de periode van de kromme $T = 2\pi/\omega_x$. Een uitgebreid overzicht van de verscheidene Lissajousfiguren wordt in [7] gepresenteerd.

Patronen die erg veel lijken op de Lissajousfiguren kunnen worden verkregen uit een experiment dat qua uitvoering zelfs eenvoud-



Figuur 1 Het experiment, waarbij een gesmolten polymeerdraad valt op een bewegende band

diger is dan het experiment dat Lissajous bedacht had. Benodigheden zijn stroop, een lepel en een dienblad dat met een constante snelheid in een gegeven richting kan worden verschoven. Vul de lepel met stroop en laat de stroop van de lepel glijden op het bewegende dienblad van 10 centimeter hoog. De stroop vormt een 'vloeibare draad' die op het bewegende oppervlak van het dienblad een stikpatroon vormt zoals het patroon van de stikdraad op een naaimachine. Er zijn reeds veel studies gemaakt naar dit kronkelend verschijnsel waarbij de vallende stroop beschouwd wordt als een visceuze vloeistofdraad en het bewegende dienblad vervangen is door een band met een goedgecontroleerde snelheid [1, 3–6]. Met behulp van experimenten of simulaties gebaseerd op een wiskundig model probeert men relaties vast te stellen tussen de procesparameters (de valhoogte, de beginsnelheid van de draad en de snelheid van de band), de materiaalparameters (viscositeit en massadichtheid van de vloeistof), en de vorm van het patroon dat op de band wordt gevormd door de visceuze draad. Om dergelijke relaties te vinden is een beschrijving van deze patronen vereist. In concreto, als we met de variabele x de richting beschrijven waarin de band beweegt en met de variabele y de richting loodrecht op bandrichting, dan schrijven we de patronen, die de vallende draad vormt, als een vlakke kromme

$$\begin{aligned} x(t) &= V_{\text{belt}} t + x_C(t), \\ y(t) &= y_C(t), \end{aligned} \quad (2)$$

waarin de variabele t de tijd beschrijft en V_{belt} de snelheid van de band.

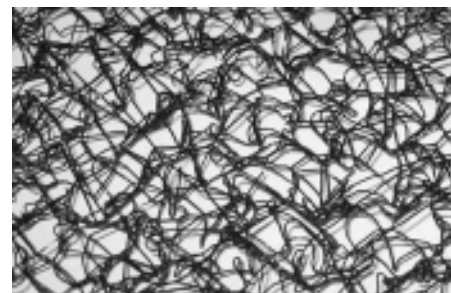
In dit artikel tonen we aan dat de kromme $(x_C(t), y_C(t))$, $t \geq 0$ een Lissajous-kromme is, zodat zowel $x_C(t)$ en $y_C(t)$ eenvoudige sinusoidalen zijn gedefinieerd in vergelijking (1). We laten zien welk effect de keuze van de bandsnelheid en

de valhoogte heeft op de patronen verkregen met deze wiskundige uitdrukking, en dus op de hoekfrequenties ω_x en ω_y , de fases φ_x en φ_y , en de amplitudes A_x en A_y . We stellen de volgende hypothese: de patronen die de visceuze draad op de band vormt, kunnen worden beschreven door Lissajous-figuren gebaseerd op eenvoudige sinusoidalen. Als we dit mogen aannemen, dan kan het onderzoek naar het dynamisch gedrag van zo'n vallende polymeerdraad met behulp van zeer complexe wiskundige modellen [4], zich richten op het bepalen van de fundamentele frequenties en bijbehorende amplitudes en fases die bij het gewenste patroon passen. Zodoende wordt de complexiteit van de analyse van het wiskundig model sterk gereduceerd. Als alternatief zouden we middels een statistische proefopzet relaties kunnen bepalen tussen de parameters die de patronen beschrijven, en de parameters die het materiaal en het proces beschrijven.

Het experiment

Voor de validatie van onze hypothese hebben we gebruik gemaakt van experimenten, zoals in figuur 1, om inzicht te krijgen in de verscheidene factoren die een rol spelen in het productieproces van polymeermatten. Zo'n polymeermat (zie figuur 2) bestaat uit vele polymeerdraden die onderling versmolten zijn tot een drie-dimensionale structuur. De polymeerdraden vallen parallel aan elkaar op een bewegend oppervlak; er wordt in het productieproces handig gebruik gemaakt van het kronkelen. Naast experimenten hebben we numerieke simulaties uitgevoerd, gebaseerd op wiskundige modellen, om de relaties te vinden tussen enerzijds proces- en materiaalparameters en anderzijds productieparameters. We doelen hierbij op de diameter van de lussen (amplitude) en het aantal lussen per lengte-eenheid (frequentie) in het patroon dat op de band gevormd wordt, en ook de dikte van de draad. De productieparameters beschrijven de kwaliteit van het product. Zoals in elk productieproces is het doel de omzet te vergroten bij gelijkblijvende kwaliteit. In dit geval zou dit kunnen betekenen dat de aanvangssnelheid van de polymeerdraad en de bandsnelheid worden verhoogd terwijl de valhoogte wordt verkleind. De simulaties zijn er dus op gericht de optimale materiaal- en procesparameters te bepalen.

In de experimentele opstelling wordt gesmolten polymeer door een spingat geperst; het polymeer vormt een draad die vanaf het spingat met zekere beginsnelheid valt op een bewegende band met een constante snelheid



Figuur 2 Een polymeermat, geproduceerd met meerdere polymeerdraden

V_{belt} , zie figuur 1. Er worden stalen met een lengte van 20 cm genomen van de patronen die de draad vormt op de band, zie figuur 3. Voor elk van deze stalen worden de corresponderende amplitudes, frequenties en fases bepaald. De tijd wordt nauwkeurig afgestemd en het resulterende wiskundige model van het patroon

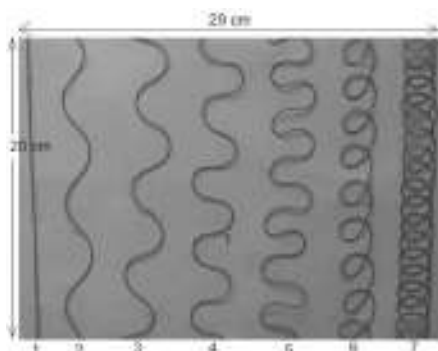
$$\begin{aligned} x(t) &= V_{\text{belt}} t + A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x) \\ y(t) &= A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y), \end{aligned} \quad (3)$$

wordt op schaal vergeleken met het corresponderende, experimenteel verkregen patroon.

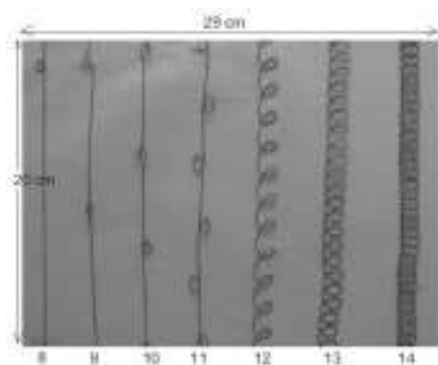
In figuren 3 en 4 staan de stalen die bij de experimenten zijn verkregen. Elke staal, uitgelegd op de bewegende band in een zeker patroon, behoort bij een specifieke snelheid van de band. De valhoogte in figuur 4 is $7/3$ keer groter dan de valhoogte in figuur 3. Het gevolg is dat de draden van figuur 4 de band met een hogere snelheid bereiken dan draden in figuur 3. Staal 1 in figuur 3, verkregen bij hoge bandsnelheid, toont een patroon zonder lussen. Door de snelheid van de band te verlagen ontstaan patronen met incomplete lussen, de meanderpatronen (stalen 2-5); verlagen we de snelheid nog meer dan zien we symmetrische lussen ontstaan die spiraalvormige patronen vormen (stalen 6 and 7). Voor een grotere valhoogte observeren we hetzelfde fenomeen maar met een andere tendens, zie figuur 4: voor relatief hoge bandsnelheden vertonen de patronen asymmetrische lussen die achtvormige patronen beschrijven (stalen 8-11) en voor lagere bandsnelheden de gebruikelijke spiraalvormige patronen (stalen 12-14).

Wiskundige beschrijving

Om de verkregen patronen wiskundig te beschrijven gebruiken we vergelijking (3). Daarbij nemen we voor de bandsnelheid de echte snelheid zoals deze in het experiment is gebruikt. We bepalen de amplitudes A_x en



Figuur 3 Boven: Polymeerstalen bij een relatief kleine valhoogte en variërende bandsnelheid V_{belt} (in): (1) 7.3, (2) 6.3, (3) 5.3, (4) 4.3, (5) 3.3, (6) 2.3, (7) 1.3



Figuur 4 Polymeerstalen bij een relatief grote valhoogte en variërende bandsnelheid V_{belt} (in): (8) 14.6, (9) 12.6, (10) 10.6, (11) 8.6, (12) 5.6, (13) 3.6, en (14) 2.3

A_y , de frequenties $f_x = \omega_x/(2\pi)$ en $f_y = \omega_y/(2\pi)$, en de fases φ_x en φ_y , overeenkomstig de volgende vuistregels:

- We zetten de fase φ_y op 0.
- De amplitude A_y is de helft van de breedte van de staal.
- Voor de bepaling van de frequenties onderscheiden we een meanderpatroon, een spiraalvormig patroon en een achsvormig patroon.

Voor een meanderpatroon tellen we het aantal keren N_y dat het patroon de denkbeeldige lijn $y = 0$ doorsnijdt voor gegeven staallengte L . De tijd t_L die nodig is om de staal ter lengte L te vormen is gelijk aan $t_L = L/V_{\text{belt}}$, zodat de frequentie f_y van het meanderpatroon bepaald kan worden uit $f_y = \frac{1}{2}N_y/t_L = N_y V_{\text{belt}}/(2L)$. Om een meanderpatroon te krijgen moet bovendien de verhouding $f_x:f_y$ gelijk zijn aan 2:1, want in dat geval wordt de golfbeweging, voortgebracht door de beweging in de y -richting, niet veranderd. De golven zijn zo breed mogelijk en symmetrisch als de beweging in de x -richting precies in antifase is met de beweging in de y -richting, dit betekent dat $\varphi_x = \pi$. De amplitude A_x wordt door een trial-and-error afstemming bepaald.

Voor een meanderpatroon tellen we het aantal keren N_y dat het patroon de denkbeeldige lijn $y = 0$ doorsnijdt voor gegeven staallengte L . De tijd t_L die nodig is om de staal ter lengte L te vormen is gelijk aan $t_L = L/V_{\text{belt}}$, zodat de frequentie f_y van het meanderpatroon bepaald kan worden uit $f_y = \frac{1}{2}N_y/t_L = N_y V_{\text{belt}}/(2L)$. Om een meanderpatroon te krijgen moet bovendien de verhouding $f_x:f_y$ gelijk zijn aan 2:1, want in dat geval wordt de golfbeweging, voortgebracht door de beweging in de y -richting, niet veranderd. De golven zijn zo breed mogelijk en symmetrisch als de beweging in de x -richting precies in antifase is met de beweging in de y -richting, dit betekent dat $\varphi_x = \pi$. De amplitude A_x wordt door een trial-and-error afstemming bepaald.

staal	V_{belt} [m/min]	A_y [cm]	f_y [Hz]	A_x [cm]	f_x [Hz]	φ_x [°]
2	6.3	0.9	1.5	0.1	3.0	180
3	5.3	1.2	1.6	0.1	3.2	180
4	4.3	1.5	1.6	0.15	3.2	180
5	3.3	1.6	1.65	0.2	3.3	160

Tabel 1 Amplitudes, frequenties and fases voor de meanderpatronen (staal 2, 3, 4 en 5) van figuur 3. De frequentieverhouding is $f_x = 2f_y$.

staal	V_{belt} [m/min]	A_y [cm]	f_y [Hz]	A_x [cm]	f_x [Hz]	φ_x [°]
6	2.3	1.1	1.7	1.3	1.7	115
7	1.3	1.2	1.7	1.4	1.7	90
12	5.6	0.7	5.4	1.0	5.4	-120
13	3.6	0.8	6.4	0.6	6.4	-100
14	2.6	0.7	6.8	0.6	6.8	-90

Tabel 2 Amplitudes, frequenties and fases voor de spiraalvormige patronen (staal 6, 7, 12, 13 and 14) van figuren 3 en 4. De frequentieverhouding $f_x:f_y$ is 1:1.

staal	V_{belt} [m/min]	A_y [cm]	f_y [Hz]	A_x [cm]	f_x [Hz]	φ_x [°]
8	14.6	0.3	1.6	4.7	1.07	0
9	12.6	0.3	2.9	2.6	1.93	0
10	10.6	0.3	4.0	1.8	2.67	0
11	8.6	0.5	5.4	1.3	3.60	0

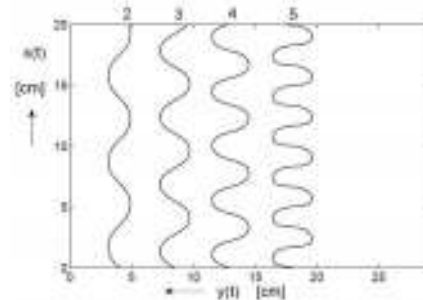
Tabel 3 Amplitudes, frequenties and fases voor de achsvormige patronen (staal 8, 9, 10 en 11) van figuur 4. De frequentieverhouding is $f_x:f_y$ is 2:3.

Voor spiraalvormige en achsvormige patronen tellen we eerst het aantal lussen N_{coils} in het patroon voor de gemeten lengte L van de staal. In elke lus verandert de beweging van de x -coördinaat zijn richting tweemaal: startend met een beweging in de richting van de bewegende band, de positieve x -richting, naar een beweging tegengesteld aan de bewegende band, en terug naar een beweging met de bandrichting. Dus, omdat in de periode $T = 1/f_x$ één lus wordt gevormd, voldoet de frequentie f_x voor spiraalvormige en achsvormige patronen aan $f_x = N_{\text{coils}}/t_L = N_{\text{coils}}V_{\text{belt}}/L$. Voor een spiraalvormig patroon passeert de draad de denkbeeldige lijn $y = 0$ tweemaal zodat $f_y = f_x$.

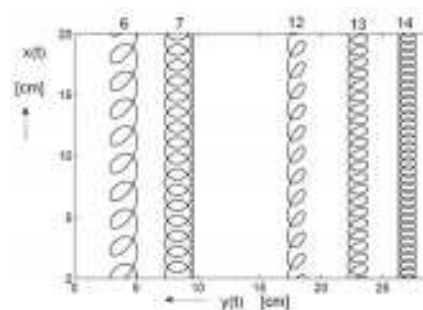
Voor een achsvormig patroon wordt de lijn $y = 0$ driemaal gepasseerd zodat de verhouding $f_x:f_y$ voor deze patronen gelijk is aan 2:3. De scheve stand van de lussen wordt bepaald door de fase φ_x . Om een volledige lus te maken in de periode ter lengte $T = 1/f_x$ zullen er twee tijdstippen zijn waarop de afgeleide dx/dt gelijk aan nul is. Dat betekent dus dat de vergelijking, analoog aan vergelijking (3),

$$V_{\text{belt}} + \omega_x A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) = 0$$

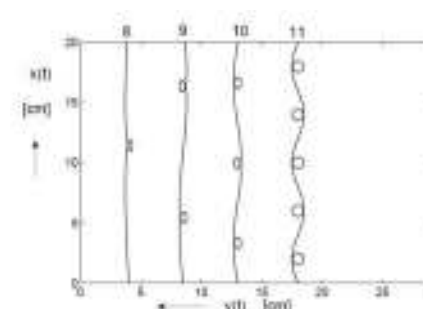
twee nulpunten heeft in het interval $0 \leq t \leq 1/f_x$. Hieruit volgt dat voor spiraalvormige en



Figuur 5 Meanderpatronen verkregen middels toepassing van Vergelijking (3) met de parameter waarden van tabel 1, behorende bij de meanderpatronen van stalen 2, 3, 4 en 5 van figuur 3 die verkregen zijn uit experimenten



Figuur 6 Spiraalvormige patronen verkregen door toepassing van Vergelijking (3) met de parameterwaarden van tabel 2, behorende bij de stalen 6, 7, 12, 13 en 14 van figuren 3 en 4 verkregen uit experimenten

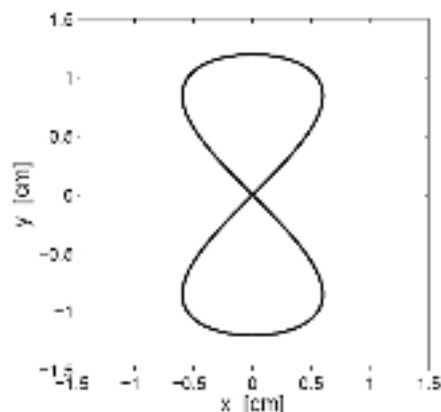


Figuur 7 Achsvormige patronen verkregen door toepassing van Vergelijking (3) met de parameterwaarden uit de tabel 3, behorende bij de stalen 8, 9, 10 en 11 van figuur 4 verkregen uit experimenten

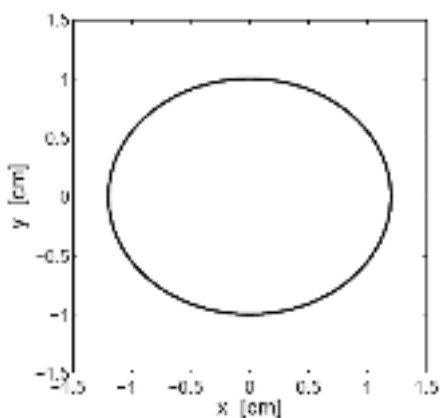
achsvormige patronen, de amplitude A_x moet voldoen aan

$$A_x \geq \frac{V_{\text{belt}}}{\omega_x}$$

In tabellen 1, 2, en 3 geven we de aldus gemeten waarden van de vijf parameters (A_x , A_y , f_x , f_y en φ_x) voor de meanderpatronen, spiraalvormige patronen en achsvormige patronen. In de figuren 5, 6, en 7 staan de grafieken van de bijbehorende modelpatronen die als test van onze hypothese vergeleken kunnen worden met de foto's van de overeenkomstige stalen: figuur 3 met stalen 1-5, figuren 3 en 4 met stalen 6, 7, 12-14, en figuur 4 met stalen 8-11.

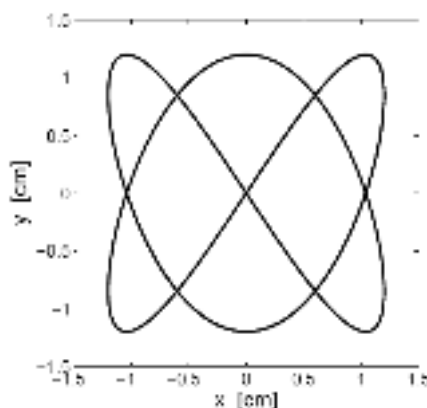


Figuur 8 Lissajousfiguur (0) dat behoort bij de meanderpatronen ($f_x = 2f_y$) van figuur 5. Hierbij is $A_y = 1.2$ cm, $A_x = 0.6$ cm, $\varphi_y = 0$, $\varphi_x = \pi$.

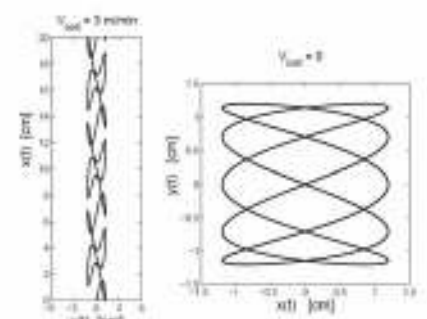


Figuur 9 Lissajousfiguur (0) dat behoort bij de spiraalvormige patronen ($f_x = f_y$) van figuur 6. Hierbij is $A_y = 1.0$ cm, $A_x = 1.2$ cm, $\varphi_y = 0$, $\varphi_x = \pi/2$.

De Lissajousfiguren die we krijgen als we de patronen van figuren 5, 6, en 7 beschrijven



Figuur 10 Lissajousfiguur (0) dat hoort bij de achtvormige patronen ($3f_x = 2f_y$) van figuur 7. Hierbij is $A_y = 1.2$ cm, $A_x = 1.2$ cm, $\varphi_y = \varphi_x = 0$.



Figuur 11 Fantasiepatroon (linker plaatje, $V_{\text{belt}} = 3$) en de bijbehorende Lissajousfiguur (rechter plaatje, 0), voor $f_x/f_y = 5/2$, $f_y = 1.5$ Hz, $A_y = A_x = 1.2$ cm, $\varphi_y = \varphi_x = 0$

in $(x_c(t), y_c(t))$, zijn weergegeven in figuren 8, 9, en 10. Of het patroon in figuur 11 ooit in een experiment zal worden waargeno-

men is de vraag, maar het bewijst dat middels de eenvoudige beschrijving van vergelijking (3) een schat aan kunstzinnige uitingen kunnen worden vorm gegeven.

Conclusie

In dit artikel wilden we aantonen dat met eenvoudige wiskunde relevante aspecten van complexe natuurkundige processen kunnen worden beschreven. De patronen die de vallende polymeerdraad vormen, vertonen wetmatigheid en symmetrie die zich lenen voor een wiskundige beschrijving. In dit geval zijn het de Lissajous-figuren, reeds bekend uit de electrotechniek en al twee eeuwen geleden ontdekt. We hebben onze bewering gevalideerd aan de hand van een analyse van 16 stalen, verkregen vanuit een laboratorium opstelling onder gecontroleerde omstandigheden. Afhankelijk van de snelheid van de band vormt de draad patronen die we in drie groepen hebben opgedeeld: meanderpatronen, spiraalvormige patronen, en achtvormige patronen. We hebben aangegeven hoe de verschillende modelparameters gekozen moeten worden om de patronen met het Lissajous-model te reproduceren. Van bijzonder belang voor diepzinniger modellering is de verhouding van de frequenties in relatie tot het patroon.

Dankwoord

De auteurs bedanken Marc Berkhoff en Frans van Vliet van Colbond B.V., Nederland, voor het uitvoeren van de experimenten en hun bijdrage in discussies.

Referenties

1. S. Chiu-Webster and J. R. Lister. The Fall of a Viscous Thread onto a Moving Surface: a 'Fluid-Mechanical Sewing Machine', *Journal of Fluid Mechanics*, 569:89–111, 2006.
2. J. M. Díaz de la Cruz Cano and J. J. Scala Estalella. Lissajous curves do not fill a rectangular area, *American Journal of Physics*, 64:499–500, 1996.
3. N. M. Ribe. Coiling of Viscous Jets, *Proceedings of the Royal Society of London A*, 460:3223–3239, 2004.
4. N. M. Ribe, M. Habibi, and D. Bonn. Stability of Liquid Rope Coiling, *Physics of Fluids*, 18, 2006.
5. N. M. Ribe, H. E. Huppert, M. A. Hallworth, M. Habibi, and D. Bonn. Multiple Coexisting States of Liquid Rope Coiling, *Journal of Fluid Mechanics*, 555:275–297, 2006.
6. N. M. Ribe, J. R. Lister, and S. Chiu-Webster. Stability of a Dragged Viscous Thread: Onset of "Stitching" in a Fluid-Mechanical "Sewing Machine", *Physics of Fluids*, 18, 2006.
7. M. S. Wu and W. H. Tsai. Corrections for Lissajous figures in books, *American Journal of Physics*, 52:657–658, 1984.

Rainer Kaenders

Universität zu Köln

Seminar für Mathematik und ihre Didaktik

Gronewaldstraße 2

50931 Köln, Deutschland

R.Kaenders@uni-koeln.de

Antrittsvorlesung

Begeisterung für

Wiskunde als wetenschap komt op veel mensen over als iets totaal anders dan wiskunde in het voortgezet onderwijs. In het onderwijs wordt uitgegaan van het aanleren van vaardigheden, niet van het stellen van eigen vragen aan de hand van verschijnselen die zulke vragen kunnen oproepen. In de onderstaande Duitse oratie, uitgesproken op 24 oktober 2008 aan de Universiteit van Keulen, betoogt Rainer Kaenders dat wiskundeonderwijs alleen daadwerkelijk kan enthousiasmeren als dit onderscheid wordt opgeheven.

Der Buchstabe tötet, aber der Geist machet lebendig. (2 Kor. III. 6)¹

Eine von Wissen und Können getragene Auffassung von Mathematik zu vermitteln, die ein Leben lang trägt, das individuelle Leben bereichert und Menschen in ihrer Lebenstüchtigkeit und ihrer Mündigkeit unterstützt, ist eines der höchsten Ziele des schulischen Mathematikunterrichts. Hiermit ist ein Anspruch verbunden, den im alltäglichen Mathematikunterricht wahr zu machen, kaum eingefordert, aber angestrebt werden kann. Seine Erfüllung ist nicht nur mit schwer messbaren, sondern auch an schwer planbare Bedingungen geknüpft. Lernen — und insbesondere das Lernen von Mathematik — ist ein Prozess zwischen LehrerIn und SchülerIn, der immer in soziale, kulturelle, organisatorische, politische und historische Kontexte eingebettet ist.

Begeisterung oder Inspiration für Mathematik zu erwecken, den Funken überspringen zu lassen, sich von der Mathematik geradezu *küssen* zu lassen, ist noch weitaus schwieriger zu erreichen. Was zu begeistern vermag, hängt zwangsläufig von den Vorlieben, den Erfahrungen und den Persönlichkeiten der Schüler und Lehrer ab. Begeisterung stellt

sich nur ein, wenn Schüler frei von Angst und Zwang ihre eigenen Fragen, ihren Geschmack, Vorlieben und Interessen durch Mathematikunterricht ausbilden lernen. Damit geht eine große Verantwortung für die Lehrer einher. Gleichzeitig müssen Schüler die nötige Disziplin entwickeln, die sie auf ihr eigenes Denken und ihre Fertigkeiten vertrauen lässt — und zwar eine Disziplin, die sie auf Dauer selbst in Freiheit aufzubringen im Stande sind. Es gibt keine Begeisterung ohne Freiheit, Kreativität, Autonomie des Denken, Verantwortung und Disziplin.

Sicherlich ist Begeisterung — anders als die kurzfristige Erfüllung von Lernvorgaben und nützlicher Fertigkeiten — weder zu planen noch zu erzwingen. Schon Aristoteles scheint gewusst zu haben, dass ein Kuss kein Gewicht hat. Es handelt sich um etwas Transzendentes — um Spiritualität. Begeistert zu sein und begeistern zu können, ist eine Gnade. Es wird nicht nur nach gerechten Maßstäben bestimmt, wem diese Gnade zuteil werden darf. So wenig wie man Elternhaus, Schule, kulturelle Hintergründe, Gesundheit, Talente, Wohlstand oder Glück selber machen kann, gelingt dies mit Begeisterung. Und trotzdem, spielt Gerechtigkeit eine Rolle, in der Frage, ob jedem Kind Zugänge zur Entwicklung des

Denkens, des Geschmacks und der Kreativität und damit Gelegenheiten zur Begeisterung eröffnet werden.

Aber warum überhaupt sollte man versuchen, Begeisterung für Mathematik entstehen zu lassen? Zunächst lässt sich Nützliches mit Begeisterung spielerischer und effektiver lernen als ohne. Doch dazu genügt schon Motivation — Begeisterung ist mehr. Wenn das Nützliche dazu dient, Kinder lebensstüchtig (und nicht nützlich) zu machen, so dass Sie in der Lage sind, ihre eigene Wahrheit zu suchen und zu leben, dann kann man sie auch begeistern. Als Lehrer ist es schließlich unsere Aufgabe, ihnen das Wahre, das Gute und das Schöne (*Verum, Pulchrum, Bonum*) weiter zu geben und auch die Verantwortung dafür zu übernehmen. Wenn wir nicht wollen, dass Werbeindustrie, politische Parteien, Regierungen oder andere für die Schüler entscheiden, was wahr, gut und schön ist, dann müssen wir ihnen die Gelegenheit geben, in Kontakt mit den Quellen der Kultur zu kommen und sie mit dem begeistern, was uns begeistert.

Weil begeisternder Mathematikunterricht so schwer zu planen und letztlich nicht zu garantieren ist, müssen wir aushalten, dass wir seinen Erfolg kaum wirklich umfassend messen können. Auch wenn kurzfristige und überschaubar zu lernende Inhalte und Fertigkeiten noch durch Tests überprüfbar sind, so ist schon nicht mehr klar, ob und wie sich dieses Wissen und diese Fertigkeiten nachhaltig entwickeln. Wenn man sich etwa anschaut, wie Politiker unterwegs *größte gemeinsame Nenner* suchen,



Rainer Kaenders

Mathematik

erfährt man eindrucksvoll, wie bescheiden die nachhaltigen Effekte von mindestens zehn Jahren Mathematikunterricht einzuschätzen sind. Selbst durch die großspurig formulierten Ziele der *mathematical literacy* (zentrale Inhalte der Mathematik wie Teilbarkeit oder Primzahlen kommen in diesem Verständnis mathematischer Bildung nicht vor – siehe Kasten), die im nicht-öffentlichen (unwissenschaftlichen und von anderen Zielen geleiteten) PISA Unternehmen mit intellektuell unehrlichen und zum Teil kleingeistigen Aufgaben kombiniert wurden, wird dies nicht gelingen. Im Gegenteil, diese Tests führen immer mehr zu einer nachweisbaren Standardisierung von Mathematikunterricht, der entsprechend standardisierte kurzfristige Lernziele planbar für den Test erzeugen soll. Auch, wenn die Unzulänglichkeit des damit verbundenen Bildungskonzepts an vielen Stellen ersichtlich geworden ist, fährt die Politik unermüdlich fort, dem zweifelhaften Versprechen eines leichteren und von außen zu managenden Mathematikunterrichts hinterherzujagen. Unter dem Vorwand, das Lernen von Mathematik leichter zu gestalten, fördert man *antididaktische Omission*, das heißt das Weglassen von Begriffen und Techniken, die für das Erlernen eines tragfähigen Mathematikverständnisses unverzichtbar sind.

Die Suche nach *mathematical literacy* durch einfältige Tests erinnert an Generationen kleingläubiger Anatomen, die Leichen seziierten, um die menschliche Seele in Zwerchfell, Herz, Rippenbogen, Ventrikel oder Hirnhöhlen zu suchen. Hierdurch werden die Leh-

rer in der Vermittlung ihrer mathematischen Kultur nicht unterstützt und der Mathematikunterricht im allgemeinen wird nicht verbessert. Mit Auffassungen mathematischer Bildung wie *mathematical literacy* ließe sich daher noch leben, wenn sie nicht die Gelegenheiten zur Begeisterung mit Mathematik bedrohten und die dazu fähigen Lehrerpersönlichkeiten frustrierten.

Auch heute sollten wir statt dessen unermüdlich versuchen, Schüler zu begeistern. Dazu gehört, dass wir ihnen vorleben, wie man sich angesichts eines schweren, intellektuell konfrontierenden und herausfordernden Faches verhalten und daran lernen kann, was die eigenen Möglichkeiten hergeben. Wenn man mathematischer Begeisterung den Weg bahnen will, kann man dafür etwas tun. In meiner Antrittsvorlesung will ich über Versuche reden, mit Hilfe mathematikdidaktischer Forschung Gelegenheiten zur Begeisterung zu schaffen und dadurch Mathematiklehrer in ihrer Arbeit zu unterstützen. Auf die Begeisterung selbst können wir dann nur hoffen.

Mathematik ist mehr

Wenn wir über Mathematikunterricht reden, dann kommen wir nicht umhin, darüber zu reden, was das ist oder sein soll: das Fach Mathematik. Hierzu gibt es historisch sehr unterschiedliche Auffassungen: das Studium der *Elemente* von Euklid, die didaktische Bewegung des *New Math*, die *Mathematical Literacy* unserer Tage oder Formen von Mathematikunterricht in totalitären Systemen. Diese Auffassungen sind immer an gesellschaft-

liche Bedingungen geknüpft.

Paul Ernest hat für die britische Gesellschaft fünf grundverschiedene Auffassungen zum Mathematikunterricht aus der Perspektive von Interessengruppen und ihrer politischen Ideologien, Wertesysteme, gesellschaftlichen und entwicklungspsychologischen Ausgangspunkte und ihren Vorstellungen von Mathematik beschrieben. Die Beschreibung reicht von den *Industrial trainers*, die vor allem Wert darauf legen, dass zukünfti-

Mathematical Literacy

“Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual’s life as a constructive, concerned and reflexive citizen.” Das wird im Detail ausgeführt: “... Citizens are bombarded with informations such as ‘global warming and the greenhouse effect’, ‘population growth’, ‘oil slicks and the seas’, ‘the disappearing countryside’. Last but not least, citizens are confronted with the need to read forms, to interpret bus and timetables, to successfully carry out transactions involving money, to determine the best buy at the market, etc. ...”

Aus: *The PISA 2003 Assessment Framework, Reading Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, ©OECD 2003



Abbildung 1 *De anatomische les van Dr. Nicolaes Tulp* (1632), Rembrandt van Rijn, Mauritshuis

ge Arbeitnehmer die Standard(rechen)verfahren beherrschen, bis hin zu den Auffassungen der sozialdemokratisch orientierten *Public Educators*, bei denen der Mathematikunterricht zu einem kritischen gesellschaftlichen Bewusstsein führen soll.

Die Sicht vieler universitärer Mathematiker fällt bei Ernest weitestgehend in die Kategorie der *Old Humanists*: Die Entwicklung der Mathematik wird dort auf das Wissenschaftsgebäude beschränkt. Sie ist gekennzeichnet durch das sukzessive Auftreten aussergewöhnlicher mathematischer Persönlichkeiten, die die Kultur der Mathematik hervorgebracht und vorangetrieben haben. Diese Kultur existiert unabhängig von der Wirklichkeit der allermeisten Lernenden — soll diesen aber beigebracht werden. In dieser Auffassung von Mathematik kommen viele andere — etwa gesellschaftliche, berufsvorbereitende, persönlichkeitsbildende oder alltagstaugliche — Aspekte nicht vor. Zur Entwicklung der eigenen mündigen Persönlichkeit und zur Bewältigung von Beruf und Alltag trägt diese Auffassung nur bei wenigen Schülern bei. Daher gibt es in der Mathematikdidaktik den Vorschlag, das Fach Mathematik als Lerngebiet im weitesten Sinne als *MATHEMATIK* (Wittmann) in Großbuchstaben zu bezeichnen, um es vom reinen Wissenschaftsgebäude der *Mathematik* zu unterscheiden.

Gänseblümchenmathematik

Die für mich schönste und ansprechends-

te Beschreibung der MATHEMATIK als Quell geistiger Erquickung, hat Hans de Rijk gegeben, der Erfinder der wunderbaren mathematischen Schülerzeitschrift *Pythagoras*, der auch bekannt ist unter dem Pseudonym Bruno Ernst. Die Mathematik, für die er sich und andere begeistern kann, nennt er *Gänseblümchenmathematik (madeliefjes wiskunde)*:

“Sieh die Mathematik als einen wunderschönen Garten. Mitten in dem Garten steht ein gewaltiger Baum mit Ästen, die in den Himmel reichen. Mit dem Stamm des Baumes sind die Namen großer Mathematiker aus der fernen Vergangenheit verbunden: Pythagoras, Archimedes, Euklid. Höher im Baum finden sich die Namen kluger Köpfe wie Euler, Gauß und Hilbert. Will man die Mathematik ganz oben im Baum bewundern, dann muss man ganz schön klettern.

Aber der Garten besteht nicht nur aus Bäumen alleine; es gibt auch Blumenbeete und Sträucher. An denen kann man sich auch ohne Klettern mindestens so erfreuen. Und ganz einfach auf dem Boden, zwischen dem Gras, steht manchmal ganz unerwartet ein wunderschönes Gänseblümchen. Das ist Mathematik, die Hans de Rijk am liebsten mag: *madeliefjeswiskunde* — Gänseblümchenmathematik.” (Pythagoras, sept. 2006)

Mathematische Begeisterung ist üblicherweise reserviert für Schüler, die Einlass in den Tempel der Mathematik begehren. Dass auch Schüler in Haupt- und Realschule oder im Grundkurs an Gesamtschulen und Gymnasien

für die Mathematik als solche *begeistert* sind, bleibt oft die Ausnahme. Das muss jedoch nicht zwangsläufig so sein. Zum Beispiel hat der in vielen Ländern der Welt stattfindende Känguru Wettbewerb es verstanden, Begeisterung für Mathematik entstehen zu lassen, von der sich sogar oft die Eltern anstecken lassen. Auch die so genannte *A-lympiade* des Freudenthal Instituts in Utrecht, an dessen Entwicklung wir uns in Köln aktiv beteiligen und die wir zusammen mit dem Schulministerium im Land Nordrhein-Westfalen (NRW) ausrichten, zeigt, dass es sehr wohl möglich ist, mathematische Begeisterung bei Schülern zu wecken, bei denen das System das gar nicht unbedingt vorgesehen hatte.

In der niederländischen ministeriellen Lehrplankommission cTWO (*commissie toekomst wiskundeonderwijs*, www.ctwo.nl), deren Mitglied ich bis zu meinem Dienstantritt in Köln war, ist uns das Streben nach Begeisterung bei der Entwicklung der Fächer *Wiskunde A* und *Wiskunde C* ein wichtiges Anliegen gewesen. Auch in Deutschland ist eine Reform etwa der Grundkurse in Mathematik an Gymnasien und Gesamtschulen denkbar: Dort wird oft die *Light-Version* des entsprechenden Leistungskurstoffes angeboten, mit der Folge, dass viele Schüler, die Mathematik als eine sinnentleerte und manchmal absurde Beschäftigung erfahren. Es bedarf meiner Meinung nach einer aufrichtigeren Reform dieser Inhalte vom Fach aus.

Didaktische Phänomenologie mathematischer Strukturen

Als Pionier der Mathematikdidaktik hat Hans Freudenthal — ausgehend von der grundlegenden Kritik, die er bezüglich der New Math Bewegung formuliert hatte — den Begriff der didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen geprägt. Anhand verschiedener mathematischer Konzepte verdeutlichte er, dass hier der Schlüssel zum didaktischen Zugang zur Mathematik gesucht werden kann: “Unsere mathematischen Konzepte, Strukturen, Ideen sind als Werkzeuge erfunden worden, die Phänomene der physikalischen, sozialen und mentalen Welt zu organisieren. Die Phänomenologie eines mathematischen Konzeptes, einer Struktur oder einer Idee beschreibt das Verhältnis zu den Phänomenen, für die das Konzept, die Struktur oder die Idee erfunden oder im Lernprozess der Menschheit in Beziehung gesetzt wurde; und, soweit diese Beschreibung mit dem Lernprozess der jungen Generation zu tun hat, ist dies didaktische Phänomenologie, ein Weg dem Lehrer die Stellen zu zeigen, an denen

der Lernende in den Lernprozess der Menschheit einsteigen kann. Nicht in ihrer Geschichte sondern in ihrem Lernprozess, der immer noch anhält, was bedeutet, dass tote Äste abgeschnitten und lebendige Zweige geschont und unterstützt werden müssen." (Übersetzung des Verfassers). Freudenthal unterscheidet hierzu *mentale Objekte* von *mathematischen Konzepten*. Der Übergang von mentalen Objekten zu mathematischen Konzepten ist Gegenstand der Phänomenologie mathematischer Strukturen.

Phänomene können unsere Aufmerksamkeit fesseln und rufen bei uns Fragen hervor, wenn sie *beziehungshaltig* (Freudenthal) sind, das heißt in Verbindung mit eigenen – auch mathematischen – Erfahrungen stehen. Dann erst erhalten mathematische Begriffe eine Bedeutung. Eine notwendige Voraussetzung für mathematische Begeisterung besteht nun darin, Phänomene so zu betrachten, dass sie eigene wirkliche Fragen bei der/dem Lernenden hervorrufen. Im klassischen Unterricht sind die allermeisten Fragen eher didaktisch oder rhetorisch, und Lehrer sind, wie wir alle wissen, Menschen, die Dinge fragen, die sie selbst schon wissen. Erst, wenn eigene Fragen anhand von Phänomenen eventuell auch in der Gemeinschaft der Lernenden und des Lehrers etabliert wurden, können mathematische Konzepte sinnvoll zur Beantwortung dieser Fragen eingesetzt werden. Zum Beispiel hat mein früherer Kollege in Nimwegen, Dr. Lodewijk van Schalkwijk, anhand eines Kurses über *fraktale Strukturen* und *dynamische Prozesse* gezeigt, dass erst nach einer sorgfältigen Vorbereitung und Etablierung mathematischer Fragen, deduktives Denken und Beweise auf wirkliches Interesse bei den Schülern stoßen, da sie den Schülern helfen, einander von der Richtigkeit der eigenen Antworten zu überzeugen. In der Mathematik ist die aktive und selbstständige Gestaltung des eigenen Lernprozesses anhand von Fragen motivierend, wie jeder weiß, der aktiv Mathematik betrieben hat.

Gefährlich ist hierbei die mögliche Palette der intellektuell unehrlichen Antworten auf ehrliche Fragen. Manchmal geht es ja eigentlich darum, einen bestimmten mathematischen Stoff zu behandeln. Begeisterung entsteht erst, wenn die mathematischen Konzepte dazu beitragen, Phänomene *innerhalb* ihres Kontexts zu begreifen. Ansonsten ist es ehrlicher zuzugeben, dass es um das Lernen des vorgegebenen mathematischen Stoffes oder um das Üben mathematischer Fertigkeiten geht.

Die Phänomenologie mathematischer

Strukturen bietet trotz der großen Enttäuschungen der NewMath Bewegung noch zahlreiche Möglichkeiten, auch Strukturen in der Mathematik zu behandeln. Entsprechende erfolgreiche Beispiele aus den 70er Jahren sind jene, in denen mathematische Strukturen als Phänomene (und nicht als Axiomatik) dargestellt werden, die dann *strukturiert* werden. Auch der *Wiskunde B-dag* des Freudenthal Instituts, an dessen Entwicklung wir in Köln ebenfalls aktiv beteiligt sind und den wir in NRW zusammen mit dem Land ausrichten, bietet hier eine Fülle inspirierender Beispiele.

Es ist auch in der Curriculumentwicklung unverzichtbar, die phänomenologische Perspektive einzunehmen, wenn man die bei den Lernenden anvisierte mathematische Wahrnehmung ('wiskundig beseft' oder 'mathematical awareness' (Hewitt)) beschreiben möchte. Die Erforschung didaktischer Phänomenologie mathematischer Strukturen wird mich auch in Zukunft in meiner Forschung beschäftigen.

Authentische Mathematik

Ein gutes Kriterium für die Entwicklung authentischer Fragen und Aufgaben und damit für mathematische Begeisterung sind die drei Fragen: Gab oder gibt es jemanden, der sich ernsthaft eine derartige Frage oder Aufgabe *gestellt* hat oder vielleicht gerade stellt – wenn es nicht sogar der Schüler selber ist? Wie wird in einer solchen Situation das Problem zufriedenstellend *gelöst*? Wie *lernt* man, derartige Probleme in solchen Situationen zu lösen? Es geht also um Authentizität bei der Wahl der Kontexte, der mathematischen Methoden und der Lernprozesse, das heißt um *authentischen Mathematikunterricht* (Lutz-Westphal). Ohne Authentizität wird es nicht gelingen, jungen Menschen zu erklären, warum es sich lohnt, Mathematik zu lernen.

Auch, wenn dies jedem einleuchten wird, so ist man doch immer wieder verwundert, wie wenig sich die Macher von Mathematikunterricht daran halten. Etwa die in der Presse mit *Oktaeder des Grauens* bezeichnete Abituraufgabe, die zu einer teilweisen Wiederholung des Mathematikabiturs in NRW geführt hat, fördert mein Grauen beim Gedanken an zentrale Abiturprüfungen weniger durch ihr Niveau als durch ihre Sinnlosigkeit. Natürlich kann man an einem Oktaeder spannende Mathematik betreiben, doch kein mathematisch denkender Mensch würde ohne einen äußeren Anlass den Eckpunkten eines Oktaeders die Koordinaten $A(13|-5|3)$, $B(11|3|1)$,

$C(5|3|7)$, $S(13|1|9)$... geben, um es dann mit der Schar von Ebenen $E_\alpha: 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9 \cdot (2a - 5) = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ zu schneiden. Wer ein Oktaeder ernsthaft betrachtet, wählt – falls keine äußeren Umstände etwas anderes erzwingen – den Ursprung des Koordinatensystems im Zentrum des Oktaeders, oder eventuell noch in einem seine Eckpunkte, und sorgt dafür, dass die Gleichung der Ebenenschar möglichst einfach wird – je nach dem *warum* sie oder er die Schnittflächen von Ebenen und Oktaeder bestimmen will. Genau in solchen Wahlen zeigt sich mathematische Kompetenz. Warum nun diese Aufgabe aber so gestellt ist, wird den Schülern nicht gesagt, wenn es denn überhaupt einen guten Grund gibt, abgesehen von der Notwendigkeit, eine komplizierte Abituraufgabe zu stellen.

In der Nachschreibeklausur lautet die entsprechende Aufgabe:

"Der Dorfplatz eines italienischen Dorfes ist ein attraktives Ausflugsziel. Der Platz wird von drei quaderförmigen Gebäuden begrenzt, an denen sich die folgenden Gebäudeecken befinden: $P_1(-2|5|10)$, $P_2(-5|-5|10)$, $P_3(5|-5|10)$. In einem dieser Gebäude befindet sich ein Café. Der Dorfplatz wird durch die Straßenlampe L beleuchtet.

a) Im Sommer scheint die Sonne auf den Platz. Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{s} = (0, 1, -2)^T$. Dadurch wirft das Gebäude mit dem Café einen Schattenstreifen auf den Boden. *Bestimmen Sie die Breite dieses Schattenstreifens.*"

Jeder, der in einem italienischen Café sitzt und – warum auch immer – wissen will, wie breit der Schatten des Gebäudes, schreitet diesen ab. Sicherlich wird man nicht die Richtung der Sonnenstrahlen durch einen Vektor und die Eckpunkte des Gebäudes durch dreidimensionale Koordinaten festlegen, um dann mit linearer Algebra die Breite des Schattens zu bestimmen. Solche Aufgaben sind vielleicht zur Einübung allgemeiner Rechentechniken akzeptabel. Doch stehen diese Aufgaben für eine Aufgabenkultur, in denen sie als *Anwendungen* mit *Realitätsbezug* gelten. Man kann sich des Eindrucks kaum erwehren, dass schlicht weg vergessen wurde, wozu lineare Algebra gut ist. Auf diese Frage eine für Schüler ehrliche Antwort zu geben, ist nicht einfach. Dazu muss man über eine didaktische Phänomenologie der linearen Algebra beziehungsweise der analytischen Geometrie verfügen.

Desweiteren finden sich in Schulbüchern (und auch beim PISA-Test) didaktische Mittel, die das Verständnis mathematischer Kon-

zepte vorbereiten und unterstützen sollen, gleich selbst als mathematische Inhalte deklariert wieder. Hier ist der Kontakt zur akademischen Mathematik, aber auch zu den Natur- und Ingenieurwissenschaften, wie auch zu den vielen beruflichen Bereichen, wo Mathematik eine Rolle spielt, unverzichtbar. In der niederländischen Lehrplankommission cTWO haben wir uns entschieden, wieder mehr authentische Inhalte in den Mathematikunterricht zu bringen. Unter anderem wurde dafür ein neues Teilfach *Mathematik D (wiskunde D)* eingeführt, in dem spezielle Themengebiete in Zusammenarbeit mit Universitäten und Fachhochschulen erarbeitet werden. In Nimwegen haben wir hierzu ein Thema aus der Astronomie gewählt. Auch das Thema der Lastkräne am Ende des Vortrags ist durch den Wunsch nach authentischerem Mathematikunterricht motiviert. In Köln nehmen wir jetzt teil an einem niederländischen Wiskunde D Projekt der Universitäten Amsterdam und Nimwegen zur Poincaré Vermutung.

Mathematik betreiben

Viele Menschen stellen sich naiverweise Lernen vor als metaphorische Übertragung von so genanntem Wissen von LehrerIn auf SchülerIn, wobei erstere dieses Wissen *besitzt* und letztere es *erwirbt*. Wie eine Flüssigkeit wird das Wissen durch *Vormachen* oder *Üben* in die Schüler gegossen, und mit Tests und Prüfungen versucht man herauszufinden, ob das Wissen dort auch *angekommen* ist. Dabei ist Mathematik, wie vielleicht jede Wissenschaft, keine Sammlung von Faktenwissen sondern eine aktive Beschäftigung, die geleitet ist von Fragen. Mathematiklernen ist Erwerb von Kenntnis, Sinngabung und Können in einem selbstgesteuerten, individuell unterschiedlichen Prozess, der auf ein Ziel ausgerichtet und situationsabhängig verläuft.

Diese Aktivität üben Menschen innerhalb der mathematischen Kultur aus — oder werden durch sie dort eingeführt. Dazu gehören neben allen Formen von Unterricht und Problemlösen auch allgemeine Unterstützung, Betreuung und Diskurs. Gerade der Diskurs unter Menschen, die nach Einsichten in dieselben mathematischen Fragestellungen suchen, war und ist eine wichtige Triebfeder für die Entwicklung von Mathematik, die Gelegenheiten zur gegenseitigen Begeisterung schafft. Auch Schüler sollten in solche Formen des Diskurses eingeweiht werden. Eine gemeinsame Untersuchung mit Jaap Top (NAW 5, 4(4)) bei Schülern des 9. Schuljahres an drei niederländischen Schulen hat gezeigt, dass die allermeisten Schüler das Betreiben von

Mathematik verstehen als das Lösen vorgefertigter Aufgaben: in der Schule aus Schulbüchern und in der Universität aus entsprechend dickeren Büchern.

Aktives und selbstständiges Lernen

An fünf Schulen in Nimwegen und Umgebung haben sich seit 1999 zehn erfahrene Mathematiklehrer (siehe AZL unter www.ratio.ru.nl) zusammengefunden, um in Zusammenarbeit mit einem Mathematikdidaktiker anhand von selbst entwickelten Materialien aktives und selbstständiges Lernen bei ihren Schülern zu erforschen und zu fördern und damit ihren eigenen Unterricht zu bereichern.

Im Jahr 2001 habe ich die Gruppe von meinem Kollegen Lodewijk van Schalkwijk übernommen. In der Folge haben wir das Projekt *Schlau Spielen* oder *Spelen op een slimme manier* durchgeführt, auf das ich noch zurückkommen werde. Anschließend befassten wir uns mit der Entwicklung einer Unterrichtsreihe zum Thema Zahlentheorie für Schüler aus 5 vwo (11. Schuljahr). Der Unterricht und damit das Unterrichtsmaterial, das Lehrerhandbuch und die Forschungsveröffentlichungen entstanden in Freudenthalscher Tradition durch Entwicklungsforschung. Die Gruppe ist noch immer aktiv und wird jetzt von Leon van den Broek geleitet.

Die Entscheidung der Lehrplankommission cTWO, durch das Fach Mathematik D (wiskunde D) wieder mehr authentische Inhalte in den Mathematikunterricht zu bringen, hatte für die Lehrer zur Folge, dass Sie diesen Unterricht gestalten mussten. Dazu hat die AZL-Gruppe in Zusammenarbeit mit dem Astronomen Jan Kuijpers sich die Aufgabe gestellt, entsprechenden Unterricht zu entwickeln. Der Ausgangspunkt war das Thema Drehimpulserhaltung bei Doppelplaneten. Gleichzeitig gab es eine Lehrerfortbildung (fünf Veranstaltungen im Jahr) mit etwa 70 Lehrern, die während der Entwicklung die Möglichkeit bekamen, Einfluss auf die Zwischenergebnisse zu nehmen. In zwei Jahren entstand eine umfangreiche Unterrichtseinheit zu dem Thema Doppelplaneten, die auch nach meinem Weggang weiter entwickelt wurde und mittlerweile reif ist, im Unterricht eingesetzt zu werden (siehe www.ctwo.nl). Diese Vorgehensweise mit Fachwissenschaftler, Kerngruppe und Lehrerfortbildung haben wir gemeinsam mit den drei technischen Universitäten in Delft, Eindhoven und Twente im Rahmen des Verbundes T(R)U's durchgeführt. Durch T(R)U's wurden die ersten konkreten Unterrichtsbeispiele für wiskunde D entwickelt, die tatsächlich aus einer Zusammenar-

beit mit Universitäten entstanden sind.

Mathematische Kreativität

Eine weitere Voraussetzung für die Entwicklung mathematischer Begeisterung ist die Erfahrung, mathematisch kreativ zu sein. Hierzu gibt es verschiedene Ansätze, die Schülern mehr oder weniger Gelegenheit geben, ihre Kreativität zu entdecken. Aber Vorsicht: Nicht alles, was nach Kreativität aussieht, ist es auch. Viele Formen von *Discovery Learning* oder *Stationenlernen* erinnern eher an das 'Verstecken von Ostereiern' (Freudenthal) als an authentische Kreativität, zu der immer eine aktive und autonome Rolle der Schüler in Hinblick auf die Gestaltung, die Kontrolle und das Ziel der Lernerfahrung gehört.

Ansätze wie *Entdeckendes Lernen* von Winter oder *Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht* von Schupp bieten dahingegen sehr wohl Gelegenheiten für Kreativität im Mathematikunterricht. In der Psychologie unterscheidet man zwischen *konvergenter* und *divergenter* Kreativität. Der klassische Mathematikunterricht spricht in erster Linie konvergente Kreativität an: zum Beispiel die Kreativität bei der Lösung einer vorgegebenen Aufgabe, die in der Regel zu einer oder einer überschaubaren Anzahl von Lösungen führt. Divergente Kreativität dahingegen ist eine Form freier Kreativität innerhalb eines vorgegebenen Rahmens, über die etwa ein Maler vor einer weißen Leinwand verfügen muss.

In unserer AZL-Arbeitsgruppe haben wir uns die Frage gestellt, ob und wie es möglich ist, auch divergente Kreativität in den Mathematikunterricht zu bekommen. Aus dieser Fragestellung ist das Projekt *Schlau Spielen* (siehe www.ratio.ru.nl) hervorgegangen. Das wesentliche Merkmal dieser Unterrichtsreihe zur Spieltheorie von etwa 10 Schulstunden für Gymnasium und Realschule ist, dass die Schüler in Gruppen ihr eigenes Nullsummenspiel entwerfen, dass sie dann anhand eigener Fragen erforschen. Uns stellte sich die Frage, ob es gelingt die Schüler divergente Kreativität entwickeln zu lassen und wie der Lehrer diesen Prozess fachlich unterstützen kann. Auf beide Fragen haben wir konkrete Antworten gefunden und gezeigt, dass dies tatsächlich in der Praxis realisierbar ist. In unserem nächsten Projekt haben wir uns dann die Aufgabe gestellt, zu einem mathematischen Thema divergente Kreativität entstehen zu lassen, zu dem ein größeres Hintergrundwissen mit entsprechenden Fertigkeiten gehört. Hieraus ging das *Zahlenteufel-Projekt* hervor.

Das Buch *Der Zahlenteufel* von Hans Ma-

gnus Enzensberger zeigt uns, wie man erfrischend direkt und alles andere als dogmatisch mit Zahlentheorie umgehen kann. Der Hintergrund eines Traums macht es möglich, abhängig vom mathematischen Sachverhalt, alles auftauchen und verschwinden zu lassen: Kaninchen, Kokosnüsse, beleuchtete Zahlendreiecke, schnellfließende Flüsse, und so weiter. Die Kreativität, die nötig ist, Mathematik auf diese Art und Weise darzustellen, verlangt vor allem divergente Produktion. Da die gesamte Ausgestaltung der Geschichte durch die dahinterliegende Mathematik motiviert ist, ist dies mathematische Kreativität. Man kann einen solchen Traum nur erschaffen, wenn man die zugrundeliegende Mathematik gründlich verstanden hat und sie auf wesentliche Aspekte reduzieren kann.

Nach einigen vorbereitenden Aufgaben sollen dann die Schüler eine "Dreizehnte Nacht" zu der Geschichte von Robert und dem Zahlenteufel schreiben. Dazu wird ihnen eine ganze Reihe zahlentheoretischer Themen angeboten, von denen sie eines auf kreative Weise in die metaphorische Sprache des Zahlenteufels übersetzen können. So haben wir divergente Kreativität von Schülern in der Zahlentheorie untersucht - einem auf jedem Niveau anspruchsvollen mathematischen Gebiet. Die Unterrichtsreihe findet als *praktischer Auftrag* statt, einer in vielen Schulfächern in den Niederlanden vorgeschriebenen Unterrichtsform mit einem Umfang von etwa zehn Unterrichtsstunden. Während ihrer Entwicklung wurde die Reihe in zwei Unterrichtszyklen in acht Klassen an drei Schulen unterrichtet.

Begeisterung und Kreativität vorleben

Dieser Entwicklungsarbeit liegt die Annahme zugrunde, dass wir unseren Schülern aktives selbstständiges Lernen nur beibringen können, wenn wir selbst auch aktiv und selbständig denken und arbeiten und unsere Schüler mit dem begeistern können, was uns selbst begeistert. In jeder Sitzung haben wir uns auch mit unseren eigenen mathematischen Fragen und Entdeckungen beschäftigt und begeistert. Jeder Mathematiklehrer sollte Mathematik mögen und sie betreiben, wenn sie/er Schüler begeistern will. Schon bei Pólya finden wir: "Jeder verlangt, dass die Schule den Schülern nicht nur Information in Mathematik mitgeben sollte, sondern Know-How, Unabhängigkeit, Originalität, Kreativität. Doch niemand fordert diese wunderbaren Dinge vom Mathematiklehrer - ist es nicht bemerkenswert?" (Übersetzung des Verfassers) Meiner Arbeit liegt immer die Über-

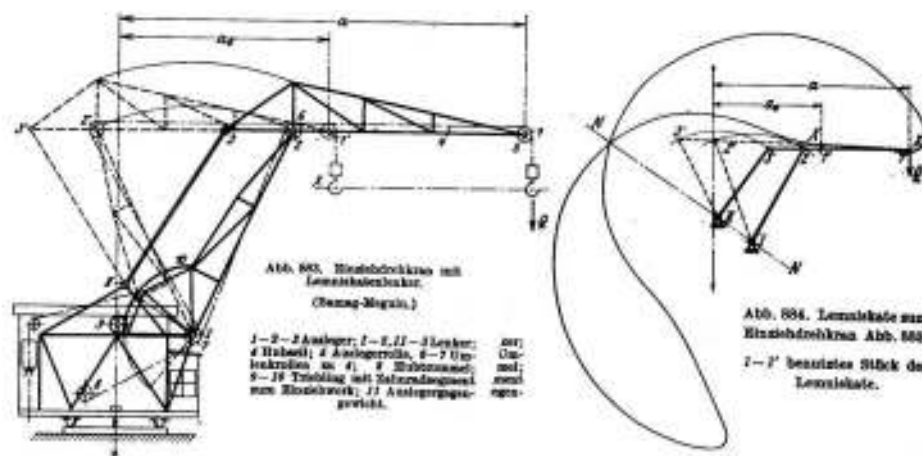


Abbildung 2 Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker

zeugung zugrunde, dass neue mathematische Impulse im Unterricht nur dann erfolgreich die Schüler erreichen können, wenn sich auch ihre Lehrer aktiv damit beschäftigen. Die Projekte sind so angelegt, dass sie dazu die Gelegenheit geben. Pólya fügt dem hinzu: "Hier ist meiner Meinung nach das größte Problem im Fachwissen des durchschnittlichen Mathematiklehrers in der Schule: er hat keine Erfahrung mit aktiver mathematischer Arbeit und, deshalb, verfügt er nicht über wirkliche Beherrschung selbst des Schulstoffes, den er unterrichten soll." Aus diesem Grunde bemühen wir uns in Köln, unseren Studenten einen tieferen Einblick in die Mathematik zu geben und beurteilen sie auch danach, ob sie dem oben formulierten Anspruch gewachsen sind. Mathematiklehrer stehen in einer langen Tradition und können daher nicht nur auf den Stoff vorbereitet werden, der im Moment im Unterricht behandelt wird. Sie müssen über einen mathematisch erwachsenen Blick auf den heutigen und zukünftigen Schulstoff verfügen. Auch, wenn wir nicht von allen Studenten dafür geliebt werden, sehe ich viele Studierende bei diesem Anspruch über sich hinaus wachsen und bin fest davon überzeugt, dass wir ihn um keinen Preis über Bord werfen sollten, wie das in den Niederlanden bei den Lehrern der Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen (*primair onderwijs* und *tweede-graads gebied*) zum schweren Schaden der mathematischen Kultur geschehen ist.

Zur mathematischen Kultur gehören schließlich auch besondere Ereignisse, oder *Happenings*. Das vom BMBF ausgerufene *Jahr der Mathematik* hat in dieser Hinsicht viel erreicht. Mit dem *Kölner Mathematikturnier* im September haben wir in Köln einen Beitrag hierzu geleistet. Das Mathematikturnier ist ein *Mannschaftswettbewerb*, bei dem innerhalb der Teams diskutiert und mit anderen

Teams verhandelt werden musste. Dadurch wird, anders als bei den meisten anderen Mathematikwettbewerben, die wichtige Funktion des mathematischen Diskurses in den Vordergrund gestellt. Das Turnier wird auch in Zukunft in Köln von unserem Seminar gemeinsam mit dem Mathematischen Institut und mit der Universität in Nimwegen durchgeführt.

Sicher mit Mathematik

Bei aller Selbstregulierung, Kreativität und Authentizität wird leicht eine unabdingbare Voraussetzung zur Entwicklung mathematischer Begeisterung vergessen: das Einüben mathematischer Algorithmen und Denkweisen. Wer Mathematik betreiben will, muss auf seine eigenen Rechnungen und sein eigenes Denken vertrauen können und dies erlernt man durch Üben. Das, was für die Schüler in anderen Bereichen, wie Sport oder Musik eine Selbstverständlichkeit ist, wird bei dem Versuch Mathematik attraktiv zu gestalten, in der Didaktik oft vergessen. Kinder – und gerade die mathematisch schwächeren – werden frustriert, wenn sie begeistert versuchen, eigene Fragen zu beantworten und dann feststellen müssen, dass sie nicht über die nötigen Mittel verfügen, sich diesen Fragen sinnvoll zu nähern. Freudenthal beschreibt die Rolle von Algorithmen: "Die Beherrschung von Algorithmen ist so entscheidend für den individuellen Entwicklungsprozess wie sie historisch für den der Menschheit gewesen ist. Algorithmen erlauben uns, eine längere Zeit automatisch zu handeln ohne die störende und verzögernde Interferenz des begreifenden Gedankens. Und dennoch,

Algorithmen bringen es auf den Punkt: Beherrschung ist entweder vollständige Beherrschung oder keine. Weniger als hundertprozentige Beherrschung kann zur Folge haben, dass alles falsch ist. Natürlich, niemand ist

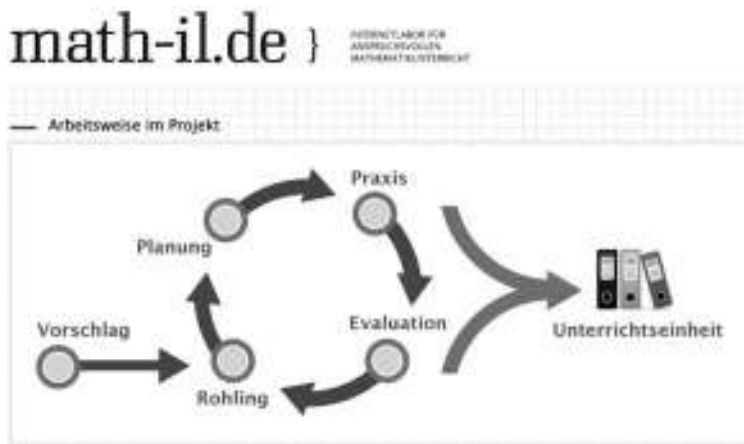


Abbildung 3 Arbeitsweise des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de

unfehlbar — nicht einmal ein Computer. Beherrschung umfasst die Fähigkeit, die eigenen Fehler zu erkennen und zu korrigieren — einfache, wie Flüchtigkeitsfehler, und grundsätzliche, wie die Anwendung eines Algorithmus auf Situationen, wo er nicht hingehört. Beherrschung, im übrigen, bedeutet die Fähigkeit, verloren gegangene Beherrschung wiedergewinnen zu können.“ (Übersetzung des Verfassers)

Unabhängiges und autonomes Denken können Kinder nur dann erlernen, wenn Sie ihren eigenen Berechnungen und Argumenten trauen können. Rechnerische und argumentative Fertigkeiten zu lernen, verlangt diszipliniertes Üben. Wenn man das ehrlich ausspricht, ist das in der Regel kein Problem, da viele Schüler mit der Notwendigkeit des Übens sehr vertraut sind. Problematisch wird es nur dann, wenn Schüler den Eindruck haben, dass das Einüben von Algorithmen und Standardargumentationen, das Wesen der mathematischen Beschäftigung ausmacht.

Die Gefahr, dass Algorithmen ganz aus dem Unterricht verschwinden, ist höchst real: In den Niederlanden sind schriftliche Rechenverfahren aus dem Grundschulstoff verschwunden und werden durch so genanntes *schlaues Rechnen* und vor allem durch Berechnungen mit dem Taschenrechner ersetzt.

Dabei Lernen die Kinder nachweisbar weniger als zuvor (antididaktische Omission) und gerade die Schwächeren werden dabei benachteiligt. Dies hat kürzlich noch die Auseinandersetzung zwischen Jan van de Craats und Willem Uittenbogaart im *Nieuw Archief voor Wiskunde* (NAW 5, 8(2) en 9(1)) eindrucksvoll belegt.

Beitrag der Mathematikdidaktik

Mathematikunterricht, dem unter all diesen Einflüssen gelingt, Begeisterung für Mathematik entstehen zu lassen, kann entwickelt, nachgewiesen und herausgearbeitet werden. Im wesentlichen gibt es zwei Herangehensweisen, mathematikdidaktische Einsichten über die Praxis des Unterrichts zu gewinnen: *empirische Forschung* und *Entwicklungsforschung*. In der empirischen Forschung führt die Wirklichkeit zu Beobachtungen, die mit Hilfe von Induktion zu Hypothesen erhoben werden. Durch Deduktion erhalten wir Vorhersagen in Situationen, die bisher nicht beobachtet wurden, und deren Gültigkeit in der Folge empirisch überprüft werden kann. Diese Überprüfung führt zu neuen Perspektiven in der Beobachtung der Wirklichkeit, die ihrerseits wiederum zu neuen Hypothesen führen. Dieser Prozess, den man *empirischen Zyklus* nennt, führt zu Erkenntnissen, verändert jedoch die Praxis nur indirekt, wenn überhaupt.

Entwicklungsforschung

Im Gegensatz dazu orientiert sich die mathematikdidaktische Entwicklungsforschung an einem *Entwicklungs- oder Entwurfszyklus*, das heißt die Analyse eines Problems führt zu einer Diagnose. Auf der Grundlage dieser Diagnose wird ein Ansatz oder ein Entwurf für eine Lösung des Problems erstellt, der in der Folge mit Hilfe von Fachwissen implementiert und auf seine Tauglichkeit überprüft wird. Die

Evaluation der Implementation des Lösungsansatzes in der Wirklichkeit führt zu einer erneuten Analyse des Problems vor dem Hintergrund des gewählten Lösungsansatzes, womit man den Entwurfszyklus erneut durchlaufen kann. Die Erkenntnisse, die auf diese Art gewonnen werden hängen von den jeweiligen Problemen und Lösungsansätzen ab. Die Methode hat gegenüber dem empirischen Zyklus den Vorteil, dass sie in der Lage ist, Probleme nicht nur zu verstehen, sondern auch implementierbare Lösungsansätze zu entwickeln. Es geht uns nicht nur darum, *Erkenntnisse* zum Unterricht zu sammeln, sondern diesen Unterricht anhand wissenschaftlicher Einsichten zu verbessern und erneut zu implementieren. Dabei können Unterricht, Curricula, Materialien und so weiter und die dazugehörigen konzeptuellen Systeme entstehen.

In meiner Arbeit mit Lehrern orientiere ich mich an dem oben beschriebenen *Entwicklungszyklus*, der gemeinsam mit den beteiligten Lehrern auf gleicher Augenhöhe (*kollaborativ*) durchgeführt wird. Dabei habe ich durchaus die Absicht, Einfluss auf die Praxis des Mathematikunterrichtes zu nehmen und zusammen mit den Lehrern diese Praxis in eine bestimmte Richtung zu verändern. Konrad Krainer hat die hier skizzierte Arbeitsweise *kollaborative Interventionsforschung* (*Collaborative Intervention Research*) genannt.

Mathematikdidaktisches Internetlabor

Auch in Köln möchte ich diese Arbeitsweise mit Lehrern und Schülern fortsetzen. Dazu haben wir im letzten Semester mit dem Entwurf des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de begonnen.

Sowohl in der mathematikdidaktischen Forschung als auch in der Ausbildung angehender Mathematiklehrer ist die Entwicklung von Mathematikunterricht von zentraler Bedeutung. Ausgehend von konkreten mathematikdidaktischen Fragestellungen, Unterrichtsideen und auf die Fragestellungen bezogenen Messinstrumenten soll LehrerInnen zusammen mit Mathematikdidaktikern die Möglichkeit gegeben werden, kollaborativ in kleineren Gruppen ihren eigenen Unterricht weiterzuentwickeln, untereinander auszutauschen, zu verbessern und mit Erkenntnissen der didaktischen Forschung und Entwicklung abzustimmen.

Da die alltägliche Unterrichtspraxis und auch Schulbücher eine solche Dynamik nicht haben, ist die Erstellung des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de in Angriff genommen. Das Labor wird zunächst Projekte im Rahmen konkreter mathematikdidak-



Abbildung 4 Lemniskatenkran

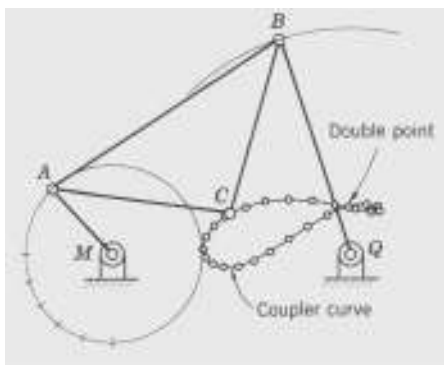
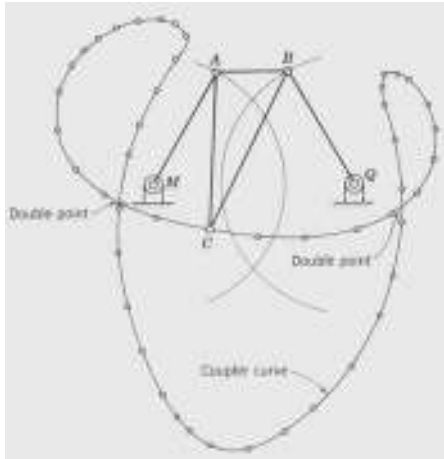


Abbildung 5 Konstruktion und Beispiel von Koppelkurven (aus *Kinematics an Linkage Design*, Hall A.S., Prentice-Hall, 1961)

tischer Frage- oder Problemstellungen durchführen, die jeder Benutzer der Webseite vorschlagen kann. Anhand der in das Labor implementierten Methoden der *kollaborativen Interventionsforschung* bietet es die entsprechenden elektronische Umgebungen zur gemeinsamen Entwicklung von Unterricht an. Es kann als Experimentierfeld für innovative Unterrichtsideen genutzt werden, die sowohl Lehrerinnen und Lehrer als auch Schülerinnen und Schüler anregen und sie für die Mathematik begeistern sollen. Gleichzeitig soll es unsere Bemühungen in der Lehre verstärken, Lehramtsstudenten mit über die übliche Schulbuchkultur hinausweisenden Unterrichtsentwürfen bekannt zu machen und daran mitarbeiten zu lassen. Das Internetportal mit der entsprechenden Entwicklungsumgebung bietet zudem eine verhältnismäßig einfache Art und Weise, Schüler und Lehrer direkt zu erreichen und somit der Früchte unserer eigenen Forschungs- und Entwicklungsarbeit teilhaftig werden zu lassen. Die Planungen sind soweit gediehen, dass jetzt mit der technischen Entwicklungsarbeit begonnen wird. (Das Internetlabor math-il.de ist inzwischen in der Produktion und wird ab dem Herbst 2009 unter www.math-il.de im Netz zu finden sein.)

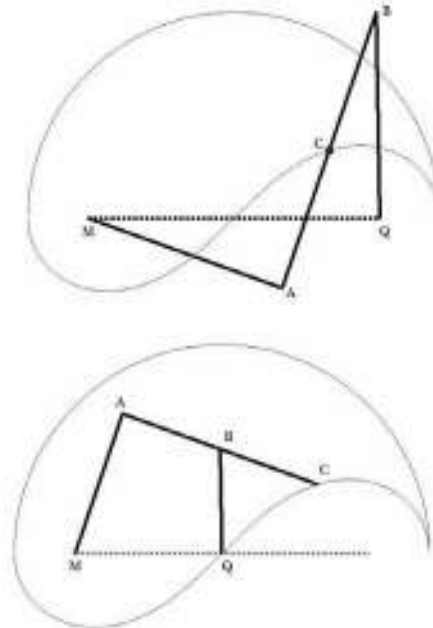


Abbildung 6 Zwei Konstruktionen der Bernoullischen Lemniskate als Koppelkurve

Noch etwas Mathematik

Zum Schluss möchte ich mit Ihnen noch etwas Mathematik betreiben. Meiner Meinung nach sollten gerade wir als Mathematikdidaktiker auch selbst nie die Mathematik aus dem Auge verlieren. Der elementare Kontext der Lastkräne und Koppelkurven begeistert mich schon seit einiger Zeit und die Beschäftigung reicht von Geometrie, Kurven, Singularitäten, algebraischer Geometrie, Topologie, Ingenieursanwendungen bis hin zur Mathematikdidaktik. Lassen Sie mich versuchen, auch Sie hierfür zu gewinnen.

Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker

Wir beschränken uns hier auf so genannte *Lemniskatkräne* (*Floating lemniscate cranes*, *double boom cranes* oder *Einziehdrehkräne mit Lemniskatenlenker*). Dies sind moderne Kräne, die auf einem einfachen Prinzip beruhen, dem *Doppellenkerwippprinzip mit Lemniskatenlenker*, das in den 30er Jahren von den *ARDELT Werken* in Eberswalde (heute *KE Kranbau Eberswalde*) eingeführt wurde.

Es ist der Sinn einer solchen Konstruktion, Lastkräne mit mehr oder weniger horizontalem Lastweg zu bauen. Bei diesen Kränen muss keine große zusätzliche Kraft aufgewendet werden, um die Last in horizontaler Richtung zu bewegen. Es gibt viele verschiedene Konstruktionen dies zu erreichen.

Bei den Lastkränen handelt es sich um einen authentischen Kontext. Solche Kräne sind in allen großen Häfen zu finden und sie werden auch heute noch von Ingenieuren konstruiert (siehe NAW 5, 7(3) und 8(2)).

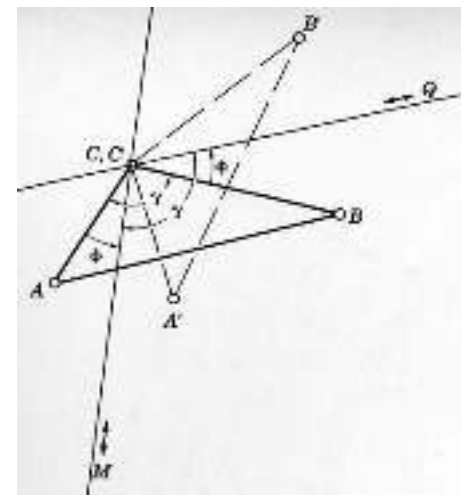
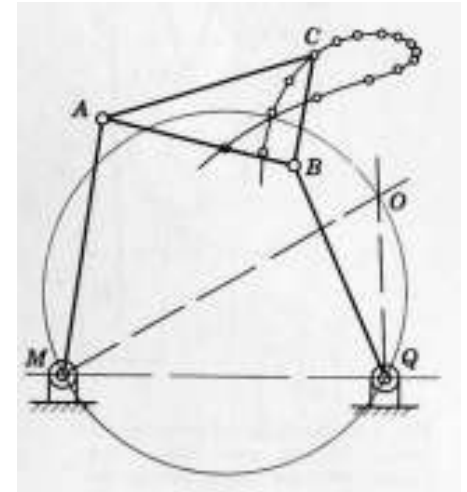


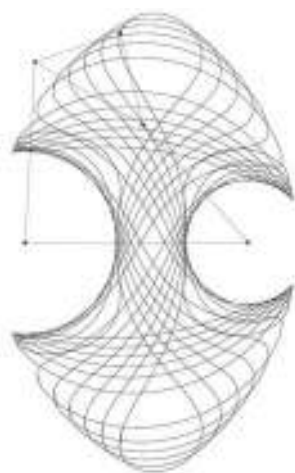
Abbildung 7 Definition eines Pivotkreises und Beweis-skizze

Gelenkvierecke und Koppelkurven

Der Basismechanismus der Lemniskatkräne beruht auf einem *Koppelmechanismus*, den man sich immer vorstellen kann als ein Gelenkviereck, mit einer fixierten Stange, dem *Steg*. Die gegenüberliegenden Stange, die so genannte *Koppelstange*, ist dann die Basis AB eines Dreiecks, dessen dritter Punkt C relativ fest zur Koppelstange bleibt. Die Spur dieses Eckpunktes C nennt man *Koppelkurve*. Das Dreieck $\triangle ABC$ kann dabei auch degeneriert sein, das heißt C kann auf der Geraden durch AB liegen. Die klassische Lemniskate von Bernoulli kann auf zwei Arten und Weisen als Koppelkurve mit degeneriertem Dreieck erzeugt werden (siehe Abbildung 6). Koppelmechanismen treten in vielen Maschinen und technischen Konstruktionen auf. Sie sind an vielen Stellen im Unterricht einsetzbar.

Singularitäten von Koppelkurven

Zum Verständnis dieser Koppelkurven ist es wichtig, zu wissen, wo sich ihre möglicherweise vorhandenen Singularitäten befinden. Da-

Abbildung 8 Das Gebiet G ausgefüllt mit Koppelkurven

bei gibt es *Doppelpunkte*, das heißt Stellen, durch die der Punkt C zweimal aus verschiedenen Richtungen hindurchläuft und *Spitzen*, wo der Punkt C sich in eine Richtung bewegend abrupt umkehrt. Aus mathematischer Perspektive sind beides Punkte, in denen es nicht gelingt eine *Tangente* an die Kurve zu legen, da sie an diesen Stellen nicht *glatt* ist.

Für die Lage der Doppelpunkte gibt es einen sehr schönen elementargeometrischen Satz in der Ingenieurwissenschaft. Falls wir einen Koppelmechanismus gegeben haben, wie in der Abbildungen 5 und 7, wobei A , B und C nicht auf einer Geraden liegen, definieren wir den *Pivotskreis* dieses Koppelmechanismus als den Kreis durch die Punkte M , Q und O , wobei O so gewählt ist, dass das Dreieck $\triangle MQO$ ähnlich ist zu $\triangle ABC$. Falls A , B und C doch auf einer Geraden liegen, nennen wir die Gerade durch M und Q die *Pivotgerade*. (Das französische Wort *pivot* bezeichnet so etwas wie Drehpunkt. In einem Koppelmechanismus wie in Abbildung 7 sind hiermit die Punkte M und Q gemeint.) Dann gilt (für den Beweis siehe NAW 5, 8(2)):

Die Doppelpunkte, das heißt Punkte, die durch zwei unterschiedliche Positionen des Koppelmechanismus erreicht werden können, liegen alle auf dem Pivotskreis oder der Pivotgeraden (siehe Abbildung 7).

Spitzen

Eine Zeit lang habe ich mich zusammen mit Leon van den Broek — etwa bei einem *Internationalen Känguru Camp* mit talentierten Schülern in der Kranbaustadt Eberswalde, bei der Masterclass *Wiskundig Denken* für Schüler an der Radboud Universität Nijmegen und beim *Wiskunde B-dag 2004* — gefragt, ob man denn auch eine ähnliche elementare Aussage wie über die Doppelpunkte auch über die

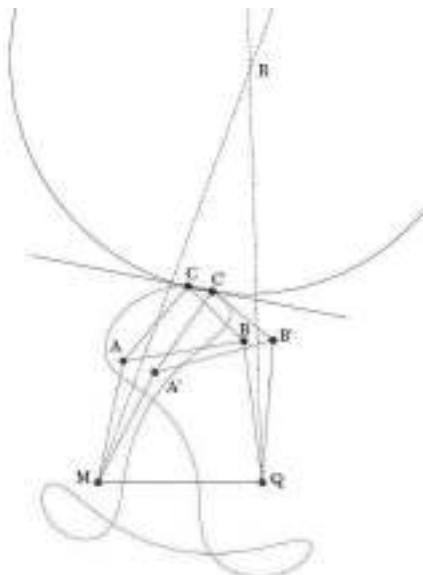


Abbildung 9 Konstruktion einer Sekanten an eine Koppelkurve

Spitzen treffen kann. Und in der Tat, das geht.

Um die Schüler Mathematik entdecken zu lassen, hatte Leon van den Broek vorgeschlagen, sich ein Gelenkfünfeck $MACBQ$ anzuschauen, bei dem die Punkte M und Q als fest angenommen werden. Man kann sich fragen, welches Gebiet G der Punkt C auf diese Weise erreichen kann. G entsteht als Schnittmenge zweier ringförmiger Gebiete, das heißt $G = (D_1 \setminus D'_1) \cap (D_2 \setminus D'_2)$, wobei D_1 und D'_1 Kreisscheiben um M und D_2 und D'_2 Kreisscheiben um Q sind (siehe Abbildung 8). Diese, mir ehrlich gesagt zunächst etwas langweilig scheinende, Aufgabe ist für jeden Schüler zu bewältigen und kann sehr schön mit mechanischen Hilfsmitteln unterstützt werden. Doch diese Aufgabe bietet auf verschiedene Weisen Raum für Fragen und Entdeckungen, wie uns die Schüler an verschiedenen Beispielen gezeigt haben.

Ich selbst habe dabei etwa entdeckt, dass all die Punkte in G , bei denen der Abstand der Punkte AB einen festen Wert behält, jeweils eine Koppelkurve formen. Die Vereinigung all dieser Kurven formt das Gebiet G . Wenn man die Situation untersucht, sieht man, dass die Koppelkurven die die *Eckpunkte* von G erreichen, eine Spitze haben müssen.

Und dies sind die einzigen möglichen Spitzen. Denn, wenn wir versuchen eine Sekante g durch C und C' an eine Koppelkurve zu zeichnen, dann benötigen wir zwei Positionen des Dreiecks $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$, wobei C nicht gleich C' sein darf — selbst dann nicht, wenn wir uns vorstellen, dass C' beliebig nahe an C gewählt ist. Zu zwei kongruenten Dreiecken gibt es aber immer eine

Drehung ρ , die $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ überführt. Den zugehörigen Drehpunkt R findet man als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AA' , die auch durch M verläuft und der Mittelsenkrechten BB' , auf der sich auch Q befindet. Da diese Drehung ρ auch C in C' überführt, ist die Sekante g senkrecht zur Mittelsenkrechten von CC' . Da also ρ die Dreiecke $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ ineinander überführt, finden wir den Drehpunkt R als Schnittpunkt der Geraden durch MA und QB . Falls nun C' gegen C strebt, wird die Sekante durch CC' zur Tangenten an C , die man nun als die zu RC senkrechte Gerade durch C konstruieren kann.

Schließlich kann man sich fragen, wann die obige Konstruktion misslingt: da gibt es eine Spitze. Das ist genau dann der Fall, wenn der Drehpunkt R mit dem Punkt C zusammenfällt. Das wiederum geschieht genau dann, wenn sowohl M , A , C als auch Q , B , C kollinear sind, das heißt auf einer Geraden liegen. M , A , C liegen auf einer Geraden, falls C auf dem Rand des ringförmigen Gebietes $(D_1 \setminus D'_1)$ liegt und QBC ist kollinear, falls C auf dem Rand von $(D_2 \setminus D'_2)$ zu finden ist. Die Schnittpunkte der beiden Ränder sind genau die Eckpunkte des Gebietes G .

Diese Herangehensweise ist in der Lage, die zugrunde liegende Mathematik so zu ordnen, dass sie zur überzeugenden Beantwortung der Ausgangsfrage dient. Das Thema ist zunächst jedem Kind zugänglich und besitzt danach jede beliebige Tiefe, wie etwa die allgemeine Repräsentation reeller Kurven durch Stangenkonstruktionen, die Betrachtung von Konfigurationsräumen (im obigen Beispiel eine Fläche von Geschlecht 2) oder der Darboux-Abbildung, die einem Gelenkviereck eine elliptische Kurve zuordnet. $\leftarrow$

Informatie

De volledige oratie met een bibliografie is te vinden op: www.kaenders.uni-koeln.de.

Referentie

1. Zitat aus Freudenthals Buch 'Mathematik als Pädagogische Aufgabe'

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

benniemols@gmail.com

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2008

Hoogwaardige aluminiumlegeringen

Het fabriceren van hoogwaardige aluminiumlegeringen heeft veel weg van alchemie uit vervlogen eeuwen. Exact berekenen wat er chemisch gebeurt tijdens het afkoelen, kost tot nu toe te veel rekentijd. Een slimme wiskundige aanpak kan deze alchemie terugbrengen naar deze eeuw en nauwkeurige voorspellingen leveren gebaseerd op moderne natuurkunde en chemie.

Onderdelen van auto's, vliegtuigen en een heleboel andere producten zijn gemaakt van een hoogwaardige aluminiumlegering. Het materiaal moet de gewenste sterkte, stijfheid en gladheid hebben. Om het deze eigenschappen te geven, worden allerlei chemische elementen toegevoegd aan het zuivere aluminium: bijvoorbeeld koper, zink, silicium, mangaan en magnesium. Afhankelijk van de toepassing variëren de gewichtsfracties van deze elementen tussen eentiende en tien procent.

Bij het staalbedrijf Corus wordt onderzoek gedaan naar het productieproces van deze hoogwaardige producten. Dat proces begint met het gieten van een vloeibare aluminiumlegering in een cilindrische vorm. Aan de zijkan-ten wordt de vorm met water gekoeld. De bodem van de vorm staat op een lift die naar beneden zakt tijdens het gietproces. Aan de bovenkant wordt voortdurend vloeibaar aluminium bijgegoten (Figuur 1a). De aluminiumlegering stolt van buiten naar binnen en van beneden naar boven. Uiteindelijk komt er aan de onderkant van de vorm een vaste aluminiumstaaf of -blok uit die meer dan zes meter lang, tot een halve meter dik en, voor de plakken, tot wel twee meter breed kan zijn.

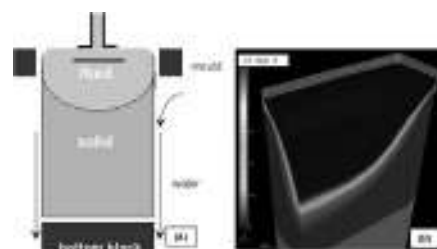
Zuiver aluminium stolt bij 660 graden Celsius. Als je er vijf gewichtsprocent koper aan toevoegt, daalt het stolpunt naar 650 graden

Celsius. Het gedrag van de legering wordt aan de ene kant bepaald door het verloop van de afkoeling, maar aan de andere kant ook door de stroming van de legering door de gietvorm. Als gevolg van de stroming en het stolproces kan er bijvoorbeeld relatief veel koper in het midden terechtkomen. Het gevolg is een hoger stolpunt in het midden dan aan de zijkan-ten. Dat leidt er toe dat het eindproduct in het midden andere eigenschappen krijgt dan aan de buitenkant. Idealiter wil Corus juist een eindproduct dat overal dezelfde eigenschappen heeft.

"We willen begrijpen hoe dit soort inhomogeniteiten ontstaat", zegt Andreas ten Cate van Corus. "Als we dat begrijpen, dan is de volgende stap dat we het productieproces kunnen aanpassen om inhomogeniteiten in het eindproduct te voorkomen."

Stolling en stroming

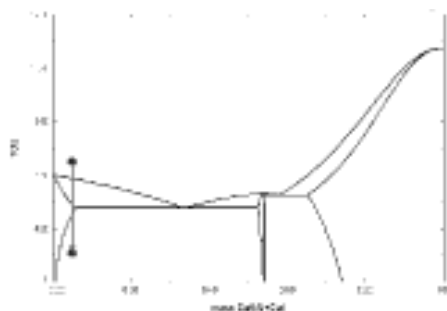
Samen met andere aluminiumbedrijven ontwikkelt Corus software om het gietproces op de computer te simuleren (Figuur 1b). Dat is gemakkelijker gezegd dan gedaan. Op elk punt in de gietvorm moet je in de tijd berekenen welke elementen er in welke concentratie zitten en waar ze heen stromen. Bij het stollen kan op iedere plek de concentratie van elementen veranderen, omdat niet evenveel van een element vanuit de vloeistof in het vaste



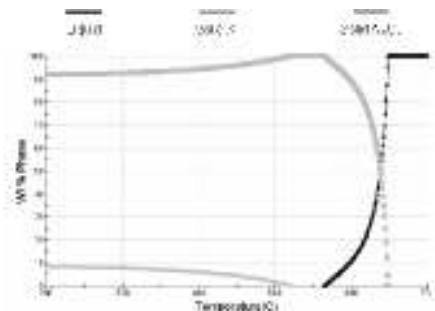
Figuur 1 Links: schema van het aluminium gietproces; rechts: numerieke simulatie van het aluminium gietproces in een kwart van de gietvorm

materiaal wil gaan zitten. De stroming zorgt er vervolgens voor dat de elementen zich verplaatsen. Het gevolg daarvan is dat op iedere plek ook de stolling steeds anders kan gaan verlopen.

Juist de aanwezigheid van een verscheidenheid aan extra elementen in de aluminiumlegering compliceert het probleem sterk. Elk extra element leidt tot een extra dimensie in de meerdimensionale thermodynamische faseruimte (Figuur 2). Om te voorkomen dat op elk tijdstip en op elk punt de fasetoestand moet worden berekend bij een specifieke temperatuur en een specifieke combinatie van elementen, lijkt het daarom handig om gebruik te maken van een thermodynamisch databestand. Daarin staat voor een heleboel temperaturen en concentraties wat de fasetoestand is. De database is netjes van te voren berekend. In plaats van het telkens opnieuw berekenen van de fasetoestand, hoeft het computerprogramma de fasetoestand alleen maar in een tabel op te zoeken. Omdat de database alleen een discrete voorstelling



Figuur 2 Fasediagram dat de relatie geeft tussen de samenstelling van de aluminium-koperlegering en de temperatuur



Figuur 3 Fasevorming tijdens het stolproces van aluminium met 4,5 gewichtsprocent koper (ook aangegeven met de groene lijn in figuur 2)

van de werkelijkheid levert, is in de praktijk interpolatie nodig om de fasetoestand voor een willekeurige combinatie van temperatuur en concentraties te kennen. Maar dat werkt nog steeds sneller dan het telkens opnieuw berekenen van de fasetoestand.

Toch is zo'n rechttoe-rechtaan-database niet automatisch de oplossing. Probleem is dat de grootte van dit gegevensbestand snel uit de hand loopt bij een toenemend aantal elementen in het vloeibare aluminium. Bij vier elementen beslaat de database al snel duizend gigabyte. Bij vijf of zes elementen wordt de database onwerkbaar groot.

Ten Cate: "Als we het probleem terugbrengen tot twee dimensies, duurt een simulatie al drie uur. Als we het tijdafhankelijke, driedimensionale probleem willen oplossen, duurt één enkele simulatie al langer dan twee weken. De uitdaging die we aan de studiegroep wiskunde met de industrie hebben gegeven was om een efficiënte koppeling te zoeken tussen de thermodynamische database en het simulatiemodel." (Figuur 3)

Sprongpunten

De wiskundigen van de studiegroep hebben eerst een eenvoudig eendimensionaal model van het fysische probleem gemaakt. Ondanks de beperking tot één dimensie, geeft dit model nog steeds een realistische beschrijving van het stollingsproces. Het model bestaat uit een verzameling partiële differentiaalvergelijkingen die het karakter hebben van convectie-diffusievergelijkingen met brontermen. Het model is zo ontworpen dat het gebruik kan maken van een thermodynamische database.

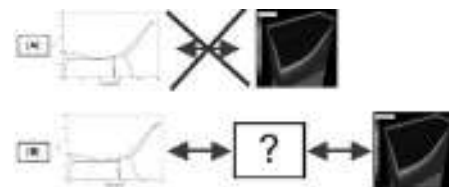
De volgende stap is dan om te proberen de thermodynamische database in grootte te beperken zonder dat de uiteindelijke oplossing significant afwijkt van de realiteit. "Daarvoor hebben we een wonderlijk eenvoudig idee uitgewerkt", zegt professor Bernard Geurts van de Universiteit Twente en lid van de studiegroep die de uitdaging van Corus bestudeerde. "Het thermodynamische gedrag

in de faseruimte wordt gekenmerkt door een heleboel sprongpunten. Als we weten waar de sprongpunten zitten, kunnen we de enorme thermodynamische database die aan elk roosterpunt hangt, veel goedkoper representeren. We maken gebruik van de wetenschap dat het gedrag tussen de sprongpunten ofwel lineair ofwel kwadratisch verloopt. Dan kunnen we polynomiale fitting toepassen. Zo hebben we de database met een factor achthonderd gereduceerd, van 1000 gigabyte naar 1,25 gigabyte en dan is de simulatie wel te doen. Zo hebben we laten zien dat de berekening wél goed is uit te voeren, terwijl we maar een klein beetje aan nauwkeurigheid verliezen."

De partiële differentiaalvergelijkingen kunnen met commercieel verkrijgbare software numeriek worden opgelost. Het moeilijkste van het Corus-probleem zit in de datareductie, niet in het oplossen van de uiteindelijke vergelijkingen.

Behalve deze concrete verbetering, heeft de studiegroep nog andere suggesties gedaan, die echter nog niet in detail zijn uitgewerkt. Deze suggesties bieden kansen op verdere verbeteringen als Corus de mogelijkheid heeft deze stappen verder uit te werken. Allereerst zou je een onderscheid kunnen maken tussen grootheden die langzaam veranderen als functie van temperatuur en samenstelling van de legering, en grootheden die snel veranderen. Ten tweede kun je belangrijkere gebieden in het fasediagram ook met een hogere nauwkeurigheid representeren dan gebieden die in de praktijk minder belangrijk zijn.

"Het probleem is te zwaar om binnen een week met direct toepasbare resultaten te komen", zegt Geurts. "Maar met het model dat er nu ligt, zou Corus ideeën voor het maken van betere legeringen makkelijk kunnen testen. De reductie van de database die we hebben voorgesteld, kunnen ze ook direct toe-



Figuur 4 (A) Een directe koppeling tussen thermodynamica-software en de simulatie kost te veel rekentijd. (B) De uitdaging van het Corus-probleem is om een efficiënte koppeling te bedenken tussen de simulatie en de thermodynamische database.

passen in hun simulatiesoftware. De bal ligt nu bij Corus. Zij moeten bekijken of en hoe ze onze resultaten willen toepassen."

Homogeen eindproduct

Andreas ten Cate van Corus is tevreden met de resultaten. "De studiegroep is heel concreet bezig geweest, en dat terwijl we de wiskundigen niet directe toegang tot de broncode van onze software konden geven. Ik kon ze wel een modelbeschrijving geven, en op basis daarvan hebben ze hun eigen model gemaakt. De concrete resultaten die ze voorstelden, maken volgens mij een goede kans om geïmplementeerd te worden. Het was nieuw voor mij om te zien dat je met een semi-analytische beschrijving van de curves in het fasediagram veel sneller resultaten behaalt. Ook de andere gesuggereerde verbeteringen zien er goed uit."

Gaat Corus de resultaten dan ook in de eigen simulatiesoftware gebruiken? Ten Cate: "Omdat de softwareontwikkeling binnen een internationaal consortium gebeurt, weet ik niet zeker of, en zo ja, hoe het wordt opgepikt, maar ik ga de suggesties van de studiegroep zeker inbrengen. Dan is het vervolgens aan het consortium om te beslissen wat ze ermee willen doen. Volgens mij is er een goede kans dat de resultaten geïmplementeerd gaan worden."

De mensen in de fabriek zijn al blij als er een heel blok aluminiumlegering uit het productieproces komt. Het is mooi meegenomen als de eigenschappen dan ook nog homogeen zijn, maar dat gebeurt niet altijd en soms verliest het eindproduct veel van zijn waarde. Ten Cate: "Nu wordt geprobeerd om nieuwe legeringen te ontwikkelen die het negatieve gevolg van de inhomogene samenstelling compenseren. Als we echter de interactie tussen de chemie en de fysica van het stollingsproces tijdens het gieten begrijpen en beheersen, dan kunnen we met dezelfde legering een beter product aanbieden. Dan weten we namelijk hoe we inhomogeniteiten kunnen voorkomen."

Jan Hogendijk

Mathematisch Instituut,
Universiteit Utrecht
Postbus 80.010
3508 TA Utrecht
J.P.Hogendijk@uu.nl

Bernouillilezing 2009

Arabische astrologie en West-Europese wiskunde

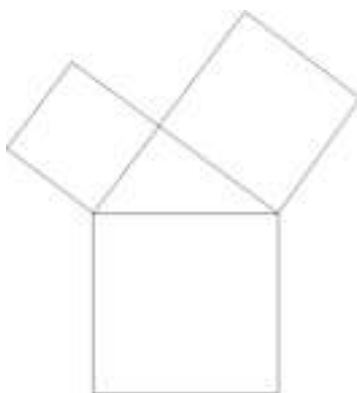
Wiskunde, dat is toch iets met stellingen en bewijzen? Zelfs de minst wiskundig-onderlegden zijn het daar nog wel over eens. Maar waar komt het werken met stelling en bewijs vandaan? En hoe en wanneer is men dit in West-Europa gaan doen? Jan Hogendijk, hoogleraar geschiedenis van de wiskunde, is specialist in de wis- en sterrenkunde in het middeleeuws islamitisch cultuurgebied. Dit artikel is een verkorte versie van zijn Bernoulli-lezing in Groningen, uitgesproken op 14 april van dit jaar.

De opvatting dat wiskunde te maken heeft met theorieën, stellingen en bewijzen is in de vijfde en vierde eeuw voor Christus in de Griekse cultuur ontstaan. In de *Elementen* van Euclides (circa 300 voor Christus) wordt de meetkunde helemaal op deze manier opgebouwd. Euclides begint met definities, axioma's en postulaten. In de definities legt hij de betekenis van termen vast, zoals cirkel, rechte hoek, en evenwijdig. De axioma's en postulaten zijn onbewezen aannamen, zoals: het geheel is groter dan een deel, door twee punten gaat een rechte lijn, en alle rechte hoeken zijn gelijk. Daarna behandelt Euclides meer dan 450 stellingen en constructies. Hij leidt deze allemaal met logische redeneringen af uit zijn axioma's en postulaten en uit de stellingen en constructies die hij al eerder behandeld heeft. Wij kijken tegenwoordig op een andere manier naar axioma's en constructies dan Euclides, maar bewijzen zijn in de huidige wiskunde nog steeds wezenlijk, en de theoretische diepgang van de *Elementen* is indrukwekkend (zie bijvoorbeeld [8]). Ook andere Griekse auteurs hadden '*Elementen*' geschreven, maar Euclides heeft deze concurrentie weggevaagd. In de rest van de Griekse oudheid was zijn boek het fundament van een groot deel van de wiskunde.

De kunst van het wiskundig bewijzen is op een ingewikkelde manier en met een omweg

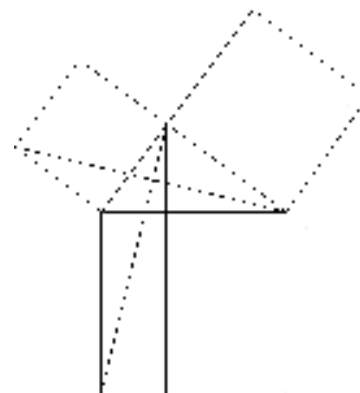
bekend geworden in West-Europa. In dit artikel bespreken we dit proces in zijn historische context. We zullen het verhaal af en toe illustreren aan de hand van de stelling van Pythagoras, die in de *Elementen* voorkomt als stelling 47 van boek 1. De meeste lezers kennen de stelling van Pythagoras in een moderne notatie: in een rechthoekige driehoek met zijden a , b en c geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

De kwadraten a^2 , b^2 en c^2 waren voor de Grieken echte vierkanten. De stelling van Pythagoras is in de woorden van Euclides (zie figuur 1): "in rechthoekige driehoeken is het vierkant op de schuine zijde gelijk aan de vierkanten op de rechthoekszijden."



Figuur 1

De Romeinen waren geïnteresseerd in praktisch landmeten, maar ze hadden geen belangstelling voor de theoretische Griekse wiskunde op de manier van Euclides. Pas na de val van het West-Romeinse rijk werden de eerste zes boeken van de *Elementen* door Boethius (circa 500 na Chr.) in het Latijn vertaald. Kort daarna stortten de cultuur en de wetenschap in West-Europa in, om pas in de tijd van Karel de Grote (742-814) weer op te leven. Aan kathedralen en kloosters werden scholen verbonden, waarin aanstaande geestelijken les kregen, niet alleen in geestelijke zaken maar ook in de zeven 'vrije kunsten'. Drie hiervan waren de *arithmetica*, *geometria* en *astronomia*. We moeten ons niet te veel illusies maken over dit onderwijs. De vertaling van Boethius was alleen een zeer verkorte samenvatting, met daarin de definities, postulaten, constructieopgaven en stellingen. De uitwerkingen van de constructies en de bewijzen zijn weggelaten, en daardoor is de samen-



Figuur 2



Figuur 3

hang van de tekst verdwenen. Laten we twee voorbeelden bekijken. We vinden de Stelling van Pythagoras, als in het citaat van Euclides hierboven, en een figuurtje (figuur 2), met hulplijnen die ooit in het bewijs gebruikt waren. Het bewijs zelf is verdwenen. Sommige stellingen waren zo verbasterd dat ze niet meer begrijpelijk waren. Zo werd propositie 45 van boek 1 weergegeven als het “beschrijven van een parallellogram gelijk aan een gegeven rechthoekige hoek, in een gegeven rechthoekige hoek, dat is de diameter.” Het bijgeleverde figuurtje (figuur 3) helpt niet om dit begrijpelijk te maken [9], en de Latijnse samenvatting geeft geen verdere informatie.

We kunnen concluderen dat de techniek van het wiskundige bewijzen in het Europa van Karel de Grote onbekend was; en het is nog maar de vraag of de samenvatting van Boethius op alle kloosterscholen onderwezen werd. Om het verdere historisch proces te volgen moeten we nu eerst aandacht besteden aan de sterrenkunde.

Het begin van de sterrenkunde in Europa

De wis- en sterrenkunde stonden op de kloosterscholen vooral in dienst van het berekenen van de paasdatum. Pasen valt op de eerste zondag na de eerste volle maan na het begin van de lente. De dag van de volle maan werd berekend met een schematische maankalender, gebaseerd op de aanname dat 19 zonnejaren precies gelijk zijn aan 235 perioden tussen twee nieuwe manen. Preciezere methoden waren niet bekend. De leerlingen werden ook onderwezen in de bolvorm van de aarde, en de verklaring van de seizoenen en de maanfasen. Zo ontstond er in de kloosterscholen belangstelling voor sterrenkunde.

In de tiende eeuw kwam de studie van de wis- en sterrenkunde en astrologie in islamitisch Spanje op gang [2]. In het islamitische Midden-Oosten was men al anderhalve eeuw eerder begonnen, en veel literatuur was aldaar uit het Grieks in het Arabisch vertaald. De eerste twee eeuwen bleef de islamitische wetenschap voor christelijk Europa grotendeels een gesloten boek. Wel maakten de kloostergeleerden kennis met een fraai sterrenkundig instrument uit islamitisch Spanje, het astrolabium (zie figuur 5). Dit is een rond metalen instrument, niet groter dan circa 30 cm, met als belangrijkste onderdelen de spin en de plaat. De spin is een stereografische projectie van

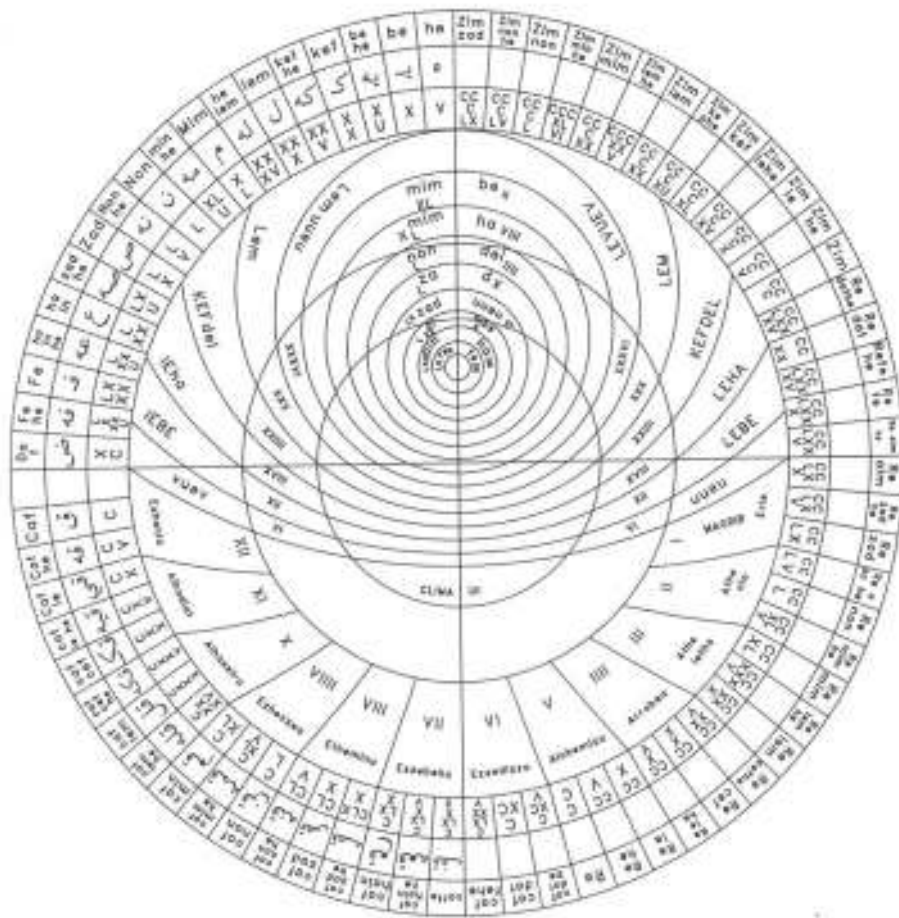
de hemel, met sterren en dierenriem, vaak fraai vormgegeven en opengewerkt. De plaat bevat een stereografische projectie van de horizon en hoogtecirkels, en in het lege gedeelte onder de horizon staan lijnen die de uren van de nacht weergeven. De spin draait om een as (die de hemelnoordpool voorstelt) over de plaat, en op deze manier kan het opgaan en ondergaan van hemellichamen worden gesimuleerd. Een plaat is altijd van toepassing op slechts één breedtegraad op aarde; daarom hadden de meeste astrolabia diverse platen voor verschillende breedtegraden.

In de elfde eeuw werden Arabische astrolabia in Latijnse handschriften nagetekend. Figuur 4 is een getrouwe weergave van zo'n tekening die in Frankrijk is gemaakt, vermoedelijk in de Benedictijner Abdij van Fleury aan de Loire [13]. We zien in de tekening de plaat van een astrolabium voor ‘clima IIII’, dat wil zeggen, voor ongeveer 36 graden noorderbreedte, veel zuidelijker dan Frankrijk. De te-

kenaar kende zelf weinig Arabisch maar hij heeft sommige Arabische inscripties zo goed nagetekend dat ze nog leesbaar zijn. Andere Arabische woorden en letters (die getallen aanduiden) zijn in Latijns schrift weergegeven. Deskundige lezers kunnen allerlei fouten in de tekening ontdekken. De kloostergeleerden wisten hoe het astrolabium gebruikt kon worden om de tijd te meten, maar begrepen lang niet alles van de constructie en de theoretische achtergrond. Zij werden wel geïntrigeerd door deze voortbrengselen van ‘Arabische’ wetenschap, en beseften dat in islamitisch Spanje nog veel op dit gebied te halen was.

Wiskunde in middeleeuws islamitisch Spanje

We onderbreken het verhaal nu even voor een overzicht van de middeleeuwse islamitische wiskunde. Deze kan globaal in twee soorten worden onderscheiden, die ik voor het gemak ‘lager’ en ‘hoger’ zal noemen [15]. ‘Lagere’



Figuur 4 Elfde-eeuwse tekening van een plaat van een astrolabium.



Figuur 5 Replica van een astrolabium dat in 1029 in Zaragoza werd vervaardigd

wiskunde bestond uit praktisch rekenen en meetkunde nodig voor landmeten en architectuur. Er bestonden handboekjes waarin allerlei regels en constructievoorschriften werden uitgelegd, soms met getallenvoorbeelden, maar altijd zonder bewijzen.

Tot de 'hogere' wiskunde behoorde in de eerste plaats de inhoud van de boeken 1–6 en 11–13 van de *Elementen* van Euclides, inclusief de bewijzen. Dit was een voorbereidende studie voor meetkunde van de bol, trigonometrie in het vlak en op de bol, methoden voor het berekenen van sinustabellen, en allerlei andere onderwerpen in de sfeer van de Griekse wiskunde. Een voorbeeld hiervan is de stereografische projectie, die noodzakelijk is om alle lijnen en cirkels op het astrolabium precies te tekenen. In Spanje was op dit gebied een behoorlijk niveau bereikt. De 'hogere' wiskunde had twee soorten toepassingen:

- Islamitische toepassingen, zoals het bepalen van de richting naar Mekka, het berekenen van gebedstijden, en het voorspellen van de eerste zichtbaarheid van de maansikkel. Deze toepassingen waren in de praktijk niet erg belangrijk. Zelfs bij het bouwen van moskeeën hield men in Spanje geen rekening met de wiskundige berekeningen van de richting van Mekka.
- Toepassingen in de tijdmeting, de sterrenkunde en de astrologie. Af en toe kwamen er aanvallen vanuit islamitische theologische hoek, omdat de astrologie in strijd zou zijn met de almacht van God. Maar voor de wiskunde en sterrenkunde konden zulke aanvallen gepareerd worden met de

islamitische toepassingen van het vorige punt.

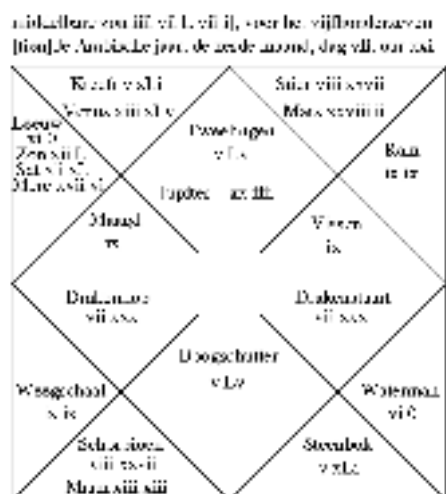
Omdat de astrologie de belangrijkste toepassing was, zullen we er in dit artikel wat uitgebreider op ingaan. De astrologie was gebaseerd op het geloof (dat trouwens ook nu nog springlevend is) dat de standen van de hemellichamen in relatie staan met gebeurtenissen op aarde. Voor de zon en maan is het duidelijk dat die het leven op aarde beïnvloeden, en men nam aan dat van de overige planeten ook invloeden zouden kunnen uitgaan, of in elk geval dat het ritme van het leven op aarde analoog is aan dat van de planeten. De astrologische interpretatie werd altijd gebaseerd op de precieze stand van hemellichamen op een bepaald moment. Een astroloog moest dus in staat zijn, deze standen voor elk gegeven moment uit te rekenen, en hoe preciezer hij dit deed, des te beter de voorspelling. Dit leidde tot een vraag naar nauwkeurige sterrenkundige tabellen. Een middelmatige astroloog had in principe genoeg aan deze tabellen en wat rekenvaardigheid. De meeste tabellen hadden echter een beperkte nauwkeurigheid en houdbaarheid. Als er een zonsverduistering was, bleek er vaak een verschil te zijn tussen het waargenomen en het voorspelde tijdstip van de verduistering en ook tussen waargenomen en voorspelde grootte. Ook namen de verschillen tussen waargenomen en voorspelde planeetstanden meestal toe met de tijd.

Bij het herzien van tabellen op grond van waarnemingen moesten ingewikkelde meetkundige problemen worden opgelost met methoden uit de *Elementen* van Euclides. In Spanje werd dit soort werk in de elfde eeuw onder andere in Toledo gedaan, enkele decennia voordat deze stad door de christenen veroverd werd. Er bestond zelfs een standaard studieprogramma voor de leerling die zich op dit gebied wilde bekwamen. Eerst moest de noodzakelijke rekenvaardigheid worden aangeleerd. Dan werd begonnen met de studie van een Arabische versie van de *Elementen* van Euclides, in elk geval de boeken 1 tot en met 6, en 11 tot en met 13. Daarna bestudeerde de leerling een paar boeken uit de categorie van de 'middelste boeken', bijvoorbeeld de *Data* van Euclides, de *Cirkelmeting* van Archimedes (circa 250 v. C.), de *Sferica* van Theodosius van Bithynië (circa 100 v. C.) over de bol, alle drie in een Arabische versie, en minstens één boek over boldriehoeksmetkunde, bijvoorbeeld van Thabit ibn Qurra (circa 870). Daarna ging hij (bijna nooit zij) aan de slag met een of meer boeken over sterrenkunde. Een goede theoretische basis was

te vinden in de *Almagest* van Ptolemaeus (circa 150 n. C.), waarin de hele sterrenkunde inclusief planeetbewegingen wordt opgebouwd in de stijl van de *Elementen* van Euclides. Het theoretisch kader van de *Almagest* was nog grotendeels geldig, maar het boek was lang en moeilijk, en veel tabellen waren 700 jaar na Ptolemaeus niet meer bruikbaar. Daarom werd de studie van de *Almagest* gecombineerd met andere boeken en tabellenwerken uit de negende, tiende en elfde eeuw na Christus. Natuurlijk hoorde het astrolabium ook tot het leerprogramma. Voor de would-be astroloog restten dan nog een stel dikke pillen over astrologische interpretatie, meestal van Arabische auteurs. Deze werken waren ook zonder de 'harde' wiskundige en sterrenkundige vooropleiding toegankelijk, maar dan werd men wel astroloog van lager allooi. Meer vooropleiding betekende een nauwkeuriger berekening van horoscopen, en daardoor vaak betere klandizie. Zo zorgde de astrologie voor een maatschappelijke inbedding van de sterrenkunde en de 'hogere' wiskunde. Natuurlijk waren er ook geleerden die vooral geïnteresseerd waren in wiskunde en sterrenkunde en die niet in astrologie geloofden. Algemeen werd erkend dat de astrologie minder zeker was dan wis- en sterrenkunde.

De vertalingen in de twaalfde eeuw

In 1085 veroverden de christenen zonder bloedvergieten de stad Toledo. Hierdoor viel het belangrijkste centrum van de islamitische wetenschap in Spanje in christelijke handen. Een aantal islamitische geleerden vertrok, maar veel Arabische boeken bleven achter. Onder beschermheerschap van de plaatselijke aartsbisschop werden in de twaalfde eeuw veel teksten uit het Arabisch in het Latijn vertaald. Ook in andere centra werden vertalingen gemaakt. De twee meest productieve vertalers van wiskundige en sterrenkundige werken waren de Engelsman Adelard van Bath (circa 1080-1150) en de Italiaan Gerard van Cremona (1114-1187). Deze laatste werkte aan de kathedraal van Toledo en vertaalde meer dan 70 Arabische teksten, niet alleen voor gebruik ter plaatse maar ook voor export naar de rest van christelijk Europa [5]. In dit verhaal houden wij ons vooral bezig met Adelard van Bath, omdat over diens wetenschappelijke opvattingen meer bekend is. Adelard werd geboren in Engeland, studeerde in Frankrijk, en reisde daarna naar het Midden Oosten. Hij leerde daar Arabisch en studeerde er diverse wetenschappen. Terug in Engeland vestigde hij zich in Bath. Of hij zelf in Spanje is ge-



Figuur 6 Engelse horoscoop, berekend circa 1160

weest, is niet bekend; wel weten we dat hij teksten uit dat gebied heeft vertaald.

De bedoeling van Adelard van Bath en Gerard van Cremona was een zodanige hoeveelheid literatuur uit het Arabisch in het Latijn te vertalen, dat wiskunde, sterrenkunde en astrologie in christelijk Europa op dezelfde manier zouden kunnen worden bestudeerd als in de islamitische wereld (in het bijzonder islamitisch Spanje). Bij Gerard kunnen we een deel van dit programma terugzien in de enorme lijst van zijn vertaalde werken (hij vertaalde daarnaast ook nog veel van Aristoteles). Adelard heeft zijn opvattingen expliciet uiteengezet in een brief aan een (fictieve) neef [1]. Hij voert hierin de zeven vrije kunsten op als zeven vrouwen. De *geometria* krijgt van de zeven de meeste bladzijden tekst, maar zij is kleiner dan de *astronomia*, die volgens Adelard de mooiste vrouw is van de zeven. Zij heeft een astrolabium in de hand, en wat zij allemaal omvat is niet uit te leggen aan iemand die geen specialist is. Adelard legt uit dat als iemand haar voor zich kon winnen, hij niet alleen de huidige situatie van de dingen op aarde zou kennen maar ook het verleden en de toekomst ervan. Elders vermeldt hij, onder verwijzing naar Plato, dat de mens de toekomst kan voorspellen vanwege de eeuwigheid van zijn ziel.

Dat het werk van Adelard en zijn collega's al snel enig resultaat heeft gehad, blijkt uit een groep van tien horoscopen die omstreeks 1160 in Zuid-Engeland zijn berekend. Deze horoscopen zijn bewaard op twee oude stukken perkament, en ze zijn geanalyseerd door John North (1934-2008), jarenlang hoogleraar aan de Universiteit van Groningen. Figuur 6 is een van deze horoscopen in vertaling. We bespreken deze horoscoop hier kort om de lezer een concreet idee te geven van de hoeveelheid

wiskunde die nodig is voor de beoefening van de astrologie [3].

De twaalf driehoeken in de horoscoop komen overeen met de twaalf astrologische 'huizen' (die niet hetzelfde zijn als de twaalf tekens van de dierenriem Ram, Stier, enz.) De getallen worden weergegeven in Romeinse cijfers, en ook is linksboven en rechtsonder een o zichtbaar.

Figuur 7 is een schets van de situatie aan de hemel die in de horoscoop van Figuur 6 wordt weergegeven. In de figuur is de hele ecliptica te zien, dat wil zeggen de schijnbare baan die de zon gedurende een jaar doorloopt tegen de achtergrond van de vaste sterren. De maan en de planeten zijn altijd in de buurt van de ecliptica te vinden. De ecliptica is verdeeld in de twaalf bekende tekens Ram tot en met Vissen, die elk 30 graden lang zijn. Het begin van de Ram is per definitie het snijpunt met de hemelevenaar waar de zon van het Zuidelijk halfrond naar het Noordelijk halfrond gaat. Deze overgang geeft het begin van de lente aan, en het begin van de Ram heet dan ook lentepunt.

De ecliptica wordt in vier kwadranten verdeeld door het vlak van de horizon en het vlak van de meridiaan, dat verticaal door het Noorden en Zuiden gaat. De twee snijpunten met de horizon zijn in de horoscoop het punt 9 graden Maagd, dat opgaat in het Oosten, en het punt 9 graden Vissen, dat ondergaat in het Westen. Het punt 5 graden 55 minuten Tweelingen staat precies in het Zuiden, dus in het meridiaanvlak boven de horizon; en 5 graden 55 minuten Boogschutter staat in het meridiaanvlak onder de horizon. Elk van de vier kwadranten kon op verschillende manieren worden onderverdeeld in drie astrologische huizen. Het berekenen van huizen (volgens verschillende systemen) was een favoriet onderzoeksthema in islamitisch Spanje; we zullen de lezer de details besparen. Als we de hemel voorstellen als een grote bol met onszelf in het midden, kunnen we de verdeling van deze hemelbol in de 12 huizen vergelijken met de verdeling van een sinaasappel in 12 partjes. De grenzen tussen de huizen zijn in figuur 7 met stippellijnen aangeduid. Het eerste huis is vlak onder de Oostelijke horizon en de huizen worden genummerd tegen de wijzers van de klok in. Elk huis heeft een astrologische interpretatie: omdat in deze horoscoop de zon, Saturnus en Mercurius in het twaalfde huis staan, hebben zij bijvoorbeeld iets te maken met vijanden. Om de astrologische huizen te vinden was meestal een indrukwekkende trigonometrische berekening nodig. Er was dus wiskundig werk aan de winkel.



Figuur 7 De hemellichamen en huizen in de horoscoop

Vanuit de waarnemer gezien draait de hele sterrenhemel, samen met alle tekens van de dierenriem, een maal per dag om de aarde [16]. Dit betekent dat het punt '9 graden Maagd' maar even aan de horizon staat; een paar minuten later komt het punt 10 graden Maagd op, enzovoort. Ook de grenzen van de huizen veranderen in hetzelfde snelle tempo: een planeet die nu in het twaalfde huis staat, zal over circa twee uur in het elfde huis staan. Voor de astroloog is het daarom belangrijk precieze tijdsaanduidingen te hebben, want de astrologische interpretatie van de hemel verandert van minuut tot minuut.

De horoscoop van figuur 6 blijkt inderdaad overeen te komen met de stand van de hemellichamen op een bepaald moment, namelijk op 1 augustus 1123 in de ochtend [4]. De fouten in de planeetstanden zijn niet meer dan een paar graden. Dat het hier om berekeningen en niet om waarnemingen gaat, is aan twee dingen duidelijk: ten eerste kon men in de Middeleeuwen de planeetstanden niet in boogminuten nauwkeurig waarnemen, en ten tweede was de zon op dat moment het enige zichtbare hemellichaam. Het blijkt dat de huizen en ook de positie van de zon zijn berekend met de *Tabellen van Toledo*. Dit sterrenkundig handboek is omstreeks 1070 samengesteld, kort voor de verovering van de stad door de christenen, en het is in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald [14]. Omdat in de *Tabellen van Toledo* de islamitische kalender gebruikt wordt, moest de astroloog eerst de datum (1 augustus 1123 in de ochtend) omrekenen in de islamitische kalender. Het resultaat staat boven de horoscoop aangegeven als uur 21 van de 7e dag van de 6e maand van het jaar 507 (dit is een schrijffout, het moet zijn: 517). In de *Tabellen van Toledo* begint de dag om 12 uur 's middags, dus '21 uur' komt overeen met 9 uur 's ochtends.

Er staat geen astrologische interpretatie bij de horoscoop, maar ik kan wel een gokje wagen. Op hetzelfde stukje perkament staat een

tweede horoscoop, van 16 september 1151, en hierbij staat het advies aan de koning om zijn baronnen te dwingen eer te bewijzen aan zijn zoon [11–12]. Misschien is de horoscoop voor 1 augustus 1123 negen uur 's ochtends de geboortehoroscoop van deze zoon.

De horoscopen zijn historisch belangrijk omdat zij laten zien dat de vertalingen door Adelard van Bath en anderen in Europa al snel succes hadden: een Engelse astroloog was omstreeks 1160 in staat zelfstandig berekeningen uit te voeren voor een specifiek Engelse situatie.

De vertalingen van de *Elementen*

Nu we iets van de historische context van de vertalingen behandeld hebben, kunnen we een kleine greep doen uit de Latijnse vertalingen van de *Elementen* zelf. In de vertaling van Adelard van Bath worden alle stellingen en bewijzen compleet weergegeven, dus ook de stelling van Pythagoras. Een verschil met de Griekse tekst is de oriëntatie van de figuur. In figuur 8 staat links de Griekse figuur, rechts die van Adelard. De Arabische vertalers in de negende eeuw hadden de figuren gespiegeld om ze aan hun schrijfrichting aan te passen [17], maar Adelard liet de figuren in de Arabische oriëntatie staan.

Zoals beloofd, behandelen we nu het bewijs van de stelling van Pythagoras in de vertaling van Adelard. In deze vorm werd dit bewijs in de twaalfde eeuw voor het eerst in West-Europa bekend [6]. Euclides trekt een loodlijn aml en de twee hulplijnen ad en gh . Hij merkt eerst op dat za en ag op een rechte lijn liggen, die evenwijdig is met Hb . Daarna laat hij zien dat in de driehoeken abd en Hbg , twee zijden en de ingesloten hoek gelijk zijn. Daarom zijn deze driehoeken gelijk;

hiermee bedoelt Euclides dat ze gelijke oppervlakte hebben. Omdat zag evenwijdig is aan Hb , is vierkant $azHb$ twee maal driehoek Hbg (wij zouden kunnen zeggen, dat de oppervlakte van vierkant $AzHb$ twee maal de oppervlakte van driehoek Hbg is, omdat de basis en de hoogte gelijk zijn). Omdat al en bd evenwijdig zijn, is rechthoek $bdlm$ twee maal driehoek abd . Daarom is vierkant $azHb$ gelijk aan rechthoek $bdlm$. Met dezelfde redenering volgt dat vierkant $agkt$ gelijk is aan rechthoek $lmgh$. De conclusie is dat de som van de twee kleine vierkanten $azHb$ en $agkt$ gelijk is aan het grote vierkant $bdhg$. De stelling is hiermee bewezen.

De vertaling van Adelard werd omstreeks 1160 omgewerkt, vermoedelijk door Robert van Chester. Robert liet in de boeken 1 tot 6 van de *Elementen* de bewijzen weg, en ook de letters die Euclides en Adelard hadden gebruikt om punten in de figuur aan te geven. Vermoedelijk heeft hij daarna aanwijzingen toegevoegd om de figuur te tekenen; zulke aanwijzingen zijn in veel handschriften bewaard. Bijvoorbeeld bij de Stelling van Pythagoras moet de lezer volgens Robert het volgende doen met Figuur 1:

“Vanuit de rechte hoek van deze driehoek trek drie rechte lijnen naar een basis van het grote vierkant: een loodlijn, en twee schuine zijden naar twee uiteinden. Trek daarna uit de twee overige hoeken van de driehoek en binnen de driehoek naar de twee hoeken van de kleinere vierkanten twee rechte lijnen, die elkaar op hun beurt snijden.”

Hierop volgen aanwijzingen om het bewijs te vinden: “Dan gebruik je de 14e (d.w.z. stelling 14 van boek 1) twee maal. Uit de 4e twee maal, en de 41e twee maal en nog eens twee maal, haal je het argument” [7].

Robert zegt niet waarom hij deze wijzigingen heeft aangebracht. De meeste historici geven als verklaring dat hij de bewijzen minder belangrijk vond dan de stellingen; maar het lijkt mij ook mogelijk dat hij de zelfwerkzaamheid van zijn lezer wilde stimuleren. In de middeleeuws islamitische wiskunde heb ik nergens zo'n aanpak gezien, maar wel in de *Grondbeginsels der Meetkunde* van Jan Hendrik Van Swinden (1790), een boek dat in het begin van de negentiende eeuw in Nederland populair was. Over didactiek van de wiskunde in de twaalfde eeuw zou nog veel interessants uit te zoeken zijn.

Om een ander verschil tussen Adelard en Robert te illustreren, bekijken we de constructie van de regelmatige dodecaëder uit Boek 13 van de *Elementen*.

Adelard vertaalt: “Nunc demonstrandum est quomodo fiat figura solida xii *alkaidarum* contenta in *alkoram* assignatam ...”

Als Latijn door Nederlands wordt vervangen maar Arabisch blijft staan komt er:

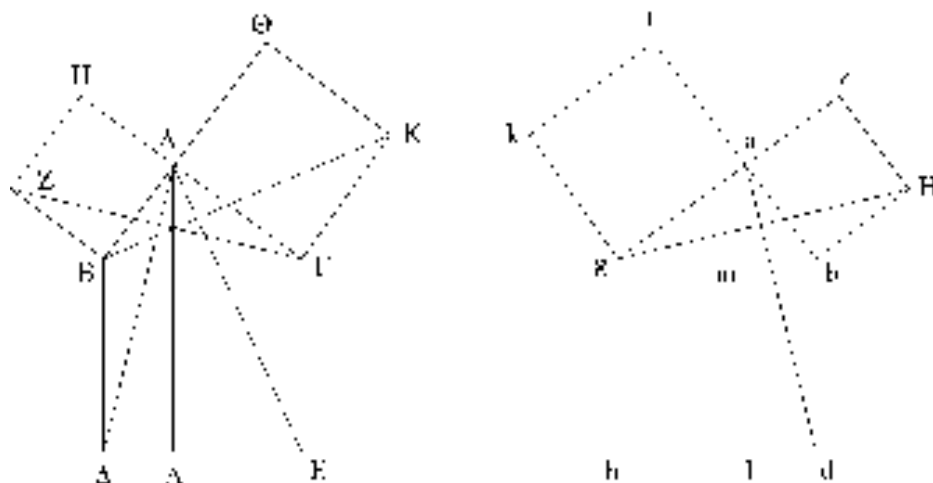
“Nu moet worden aangetoond hoe een lichaam van 12 *alkaidas* gemaakt wordt, dat bevat is in een gegeven *alkora*, en er moet worden aangetoond dat de zijde van het lichaam een irrationale lijn is, die *elmunfascel* genoemd wordt.

Laten ab , ag twee zijvlakken zijn van een *elmukaab* die in de gegeven *alkora* bevat is, en laat de zijde van de *elmukaab* rationaal zijn ...” [6]

Het woord al-kaida, dat tegenwoordig helaas zeer bekend is, betekent basis of, in deze context, zijvlak; en een lichaam ‘van 12 *alkaidas*’ is een vertaling van een Arabische vakterm die ‘regelmatig twaalfvlak’ betekent. *Alkora* betekent bol, en de constructie begint met een *elmukaab*, dat is de kubus, die in een eerdere propositie in dezelfde bol beschreven werd.

Robert verving al deze Arabismen door Latijnse woorden, en hier liet hij de ingewikkelde constructie en het bewijs helemaal staan. Hij merkt nog op dat je de twee zijvlakken van de kubus kan voorstellen door een vel met twee vierkanten onder een rechte hoek te vouwen [7]. Dat moet een echt vel geweest zijn — dus een stuk perkament — omdat papier in die tijd in West-Europa nog niet gemaakt werd. Blijkbaar wilde Robert zijn lezer aanmoedigen een aanschouwelijke voorstelling te maken.

De vertaling van Adelard was zeldzaam maar de versie van Robert was een eeuw lang (tussen 1150 en 1250) wijd verspreid, en is in wel 59 manuscripten bewaard. Het lijkt erop dat Gerard van Cremona toegang had tot de



Figuur 8 Figuren bij Euclides (links) en Adelard

versie van Robert en het lastig vond dat de bewijzen niet allemaal waren opgenomen. In elk geval maakte Gerard in Toledo zijn eigen vertaling waar de bewijzen wel weer helemaal in stonden.

Voorzover ik kan beoordelen hebben zowel Adelard als Gerard de stof in de *Elementen* van Euclides goed begrepen. Gerard had in Toledo een groep mensen om zich heen die zich ook inhoudelijk met wis- en sterrenkunde bezighielden. Het is waarschijnlijk dat Adelard en Gerard allebei wiskundig onderwijs hebben genoten van leraren in de islamitische wetenschappelijke traditie - dit hoeven geen moslims geweest te zijn, maar het kunnen in het geval van Gerard ook joodse leraren geweest zijn of tot het christendom bekeerde ex-moslims. Een aanzienlijke minderheid van de 'islamitische' wis- en sterrenkundigen bestond uit christenen, joden en aanhangers van andere religies. Er is een passage bekend waarin Adelard zijn 'Arabische meesters' noemt. Hij zegt dat deze meesters zich door rationele argumenten lieten leiden, terwijl zijn West-Europese leraren aan de leiband liepen van zogenaamde autoriteiten [1].

De dertiende eeuw en verder

Vanaf de dertiende eeuw werden gedeelten van de *Elementen* onderwezen aan de nieuw opgerichte universiteiten. Dit onderwijs hield verband met Aristotelische filosofie. De belangrijke theoloog Albertus Magnus schreef rond 1255 in dit kader een commentaar op Boek 1 van de *Elementen*. Uit dit commentaar blijkt dat hij van de wiskundige leerstof heel wat minder begreep dan de vertalers uit de twaalfde eeuw [10].

In de dertiende eeuw vinden we ook de eerste sporen van wiskundige en sterrenkundige creativiteit in christelijk Europa, bij personen die in nauw contact stonden met de islamitische wereld. Aan het hof van Alfonso de Wijze (alweer in Toledo) werd omstreeks 1260 een nieuwe verzameling sterrenkundige tabellen samengesteld, door een team van voornamelijk joodse geleerden. De belangrijkste dertiende-eeuwse wiskundige was Leonardo Fibonacci uit Pisa (circa 1170-1240). Deze heeft op diverse plaatsen in de islamitische wereld wiskunde bestudeerd. Hij deed creatieve wiskunde, maar het soort problemen waaraan hij werkte werd nog wel bepaald

door de islamitische wiskunde [18]. In de veertiende en vijftiende eeuw gingen de wis- en sterrenkunde in Europa langzamerhand hun eigen weg.

In 1533 werd de Griekse tekst van de *Elementen* van Euclides in West-Europa voor het eerst gedrukt. Vaak wordt vergeten dat de inhoud van de *Elementen*, en ook de methode van het wiskundig bewijzen, in Europa toen allang bekend waren. Dit is te danken aan de vertalingen uit het Arabisch in het Latijn in de twaalfde eeuw, en de contacten tussen de islamitische wetenschap en Europa. Juist in de moderne tijd is deze geschiedenis het waard om te onderzoeken en bekend te maken. ←

Dankwoord

Ik dank Prof.dr. F. Sezgin (Frankfurt) voor de toestemming om Figuur 4 te reproduceren, en Eric van Lit (Montreal) voor zijn commentaar op een eerdere versie van dit artikel.

Noten

- 1 Adelard of Bath: *Conversations with his Nephew: On the Same and the Different, Questions on Natural Science and On Birds*, edited and translated by Charles Burnett, Cambridge: Cambridge University Press, 1998, pp. 69, 103, 151.
- 2 Wij zullen het woord 'Spanje' aangeven om een gebied aan te duiden, hoewel dit eigenlijk niet juist is, omdat het koninkrijk Spanje pas rond 1500 ontstond. Het is historisch correcter het Arabische woord 'Al-Andalus' te gebruiken, dat echter een veel groter gebied omvatte dan het huidige Andalusië.
- 3 Zie voor de analyses van de horoscopen en de reproducties van het perkament [11] en [12].
- 4 Volgens North ([11], [12]) was het 2 augustus.
- 5 Charles Burnett, The Coherence of the Arabic-Latin Translation Program in Toledo in the Twelfth Century, *Science in Context* 14 (2001), 249-288.
- 6 H.L.L. Busard, *The first Latin translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath*, Toronto: Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983, pp. 68, 370.
- 7 H.L.L. Busard and M. Folkerts, *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements, the so-called Adelard II Version*, Basel: Birkhäuser, 1992, 2 vols. Zie vol. 1, pp. 130,325.
- 8 E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, Groningen: Noordhoff, 1929-1930, 2 delen.
- 9 M. Folkerts, *Boethius Geometrie II: Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*, Stuttgart: Steiner, 1970, pp. 127, 223.
- 10 Anthony LoBello, *The Commentary of Albertus Magnus on Book I of Euclid's Elements of Geometry*, Leiden: Brill, 2003, pp. 295-299.
- 11 J.D. North, *Horoscopes and History*, London: Warburg Institute, 1986, pp. 98-102.
- 12 J.D. North, Some Norman Horoscopes, in Charles Burnett, ed., *Adelard of Bath: An English Scientist and Arabist of the Twelfth Century*, London, Warburg Institute, 1997, pp. 147-162. Zie vooral pp. 152-156.
- 13 M. Schramm u.a., Der Astrolabtext aus der Handschrift Codex 196, Bürgerbibliothek Bern - Spuren arabischer Wissenschaft im mittelalterlichen Abendland, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 17 (2006/7), 199-300, zie p. 207.
- 14 Fritz S. Pedersen, *The Toledan Tables*, Copenhagen: Royal Danish Academy of Sciences and Letters, 2002, 4 vols.
- 15 Algebra heeft een tussenstatus.
- 16 De oorzaak van dit verschijnsel is de rotatie van de aarde om zijn as. In de Middeleeuwen nam men aan dat het universum om de aarde roteerde.
- 17 In de editie [6], p.68 is de figuur zonder de letters opnieuw gespiegeld, en daarna zijn de letters weergegeven in de links-rechts oriëntatie als bij Adelard.
- 18 Het is goed mogelijk dat de beroemde 'getallen van Fibonacci' (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...) uit de islamitische wereld afkomstig zijn. De Iraakse wiskundige Kamal al-Din ibn Yunus wist dat als een segment volgens de gulden snede wordt verdeeld, de verhouding bij benadering 34:21 is. In de islamitische wereld zou daarom bekend geweest kunnen zijn dat de gulden snede te benaderen is door opeenvolgende 'getallen van Fibonacci'. Leonardo zou 'zijn' getallen in de islamitische wereld geleerd kunnen hebben, maar ook aan het hof van Frederik II in Sicilië, waarmee ook Kamal al-Din in verbinding stond.

Gunther Cornelissen
Wilberd van der Kallen

Jeroen Sijsling

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

w.vanderkallen@uu.nl

j.r.sijsling@uu.nl

Willem de Graaf

Dipartimento di Matematica

Via Sommarive 14

I-38050 Povo (Trento), Italië

degraaf@science.unitn.it

Bart de Smit

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

desmit@math.leidenuniv.nl

Jan Stevens

Matematik

Göteborgs universitet

Chalmers tekniska högskola

SE-412 96 Göteborg, Zweden

stevens@chalmers.se

Freek Wiedijk

ICIS, Radboud Universiteit

P.O. Box 9010

6500 GL Nijmegen

freek@cs.ru.nl

Wiskundig werktuig

Wiskundig onderzoek per computer?

De computer is tegenwoordig vermoedelijk het meest gebruikte wiskundige werktuig. In de derde aflevering van deze mini-serie laat Gunther Cornelissen collega's vertellen over hun digitale hulpmiddelen.

De rubriek *Wiskundig werktuig*, over de 'gebruiksvoorwerpen' uit het wiskundig onderzoek, gaat dit keer over het inzetten van computers, in het bijzonder over verschillende computerpakketten voor symbolisch rekenen, bewijzen en bewijsverificatie. Hieronder schrijft een aantal mensen over hun favoriete pakket en hun ervaringen daarmee — natuurlijk een selectie, er is veel meer beschikbaar.

HOL

Bewijsassistenten zijn programma's waarmee de computer wiskunde op correctheid kan controleren. Dat wil zeggen: mits op de juiste wijze gecodeerd. Zulke gecodeerde wiskunde heet 'een formalisatie' en ziet er in de huidige systemen uit als volslagen onbegrijpelijke computercode. Er zijn vandaag de dag een viertal bewijsassistenten waarmee serieus wiskunde 'geformaliseerd' wordt: Mizar, HOL, Isabelle en Coq. Mijn onderzoeksterrein is het ontwikkelen van technologie om deze systemen *beter* te maken.

Er zijn nog niet veel hedendaagse wiskundigen die een helder beeld van bewijsassistenten hebben. Laat ik daarom eerst eentweetal misverstanden over bewijsassistenten

uit de weg ruimen. Ten eerste worden bewijsassistenten *niet* gebruikt om de wiskunde verder te helpen, om nieuwe resultaten te bereiken. Je mag al blij zijn als je wiskunde die je door en door begrijpt met een heleboel werk voor een bewijsassistent verteerbaar kunt maken. Ten tweede zijn bewijsassistenten iets totaal anders dan systemen voor computer algebra en ook iets totaal anders dan automatische stellingenbewijzers. Deze drie soorten software hebben momenteel niets met elkaar te maken.

Het *aardige* van bewijsassistenten is dat als je je wiskunde eenmaal 'geformaliseerd' hebt, en het systeem zegt dat het klopt, dat je dan ook *volkomen* zeker kan zijn dat het inderdaad klopt. Over hoe zeker dat 'volkomen zeker' is kun je een hoop woorden vuil maken, maar laten we zeggen: een heel stuk zekerder dan op welke andere wijze dan ook bereikbaar is. De *enige* ruimte voor 'fouten' bij formalisatie is dat je denkt dat er wat anders staat dan er staat, dus dat je intuïtieve begrip niet overeenkomt met wat je in werkelijkheid hebt gedefinieerd en bewezen. Maar *wat* er staat is zo zeker als wat. En dat heeft iets heel moois. Een formalisatie is als een

volkomen feilloze diamant.

Twee van de meest indrukwekkende formalisaties die ik ken zijn door John Harrison gedaan. Voor deze formalisaties gebruikte hij de mooiste van de vier bovengenoemde bewijsassistenten, zijn eigen versie van het HOL systeem. In zijn werk bij Intel gebruikt hij dit om floating point processors correct te bewijzen. Formalisatie van wiskunde doet hij er in zijn vrije tijd bij, voor de aardigheid.

De eerste van deze formalisaties bewijst de correctheid van de *kernel* van zijn HOL systeem. Het laat zien dat je er zeker van kunt zijn dat dit programma geen 'bugs' bevat waardoor per ongeluk incorrecte bewijzen als correct worden geaccepteerd. Nu kun je morren dat dit een kip en ei probleem is (de checker kan fout zijn en daarom de formalisatie accepteren terwijl die niet klopt), of over hoe het dan zit met Gödels tweede onvolledigheidsstelling, maar dat zijn bezwaren die geen hout snijden. Wat wel een serieus bezwaar is, is dat de formalisatie momenteel alleen het 'moeilijke' stuk van de HOL kernel behandelt (het deel dat te maken heeft met het hernoemen van variabelen bij substitutie). Het is dus niet af, in zekere zin. Als evenwel binnenkort de *hele* HOL kernel correct bewezen is, zal er een heel interessant punt bereikt zijn!

De tweede formalisatie is een vertaling van het bewijs van de priemgetalstelling uit de

analytische getaltheorie. Hierbij wordt door beschouwing van de nulpunten van de Riemann zeta-functie bewezen dat de verhouding tussen het aantal priemgetallen $\leq n$ en $n/\ln n$ in de limiet van n naar oneindig gelijk is aan 1. Een paar jaar geleden gaf verzamelingstheoreticus Bob Solovay het analytische bewijs van deze stelling als uitdaging aan de bewijsassistentengemeenschap. Hij verwachtte dat het nog decennia zou duren voor de technologie zo ver zou zijn dat dit bewijs in de praktijk geformaliseerd kon worden. Toen kwam John Harrison die in één maand tijd, naast zijn gewone werk bij Intel, een bestand van 4.314 regels HOL code produceerde waarin hij een vijftal pagina's uit een boek van Donald J. Newman formaliseerde. (Die HOL code blijkt ongeveer acht keer zo groot als de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ van Newmans bewijs: dit heet de *de Bruijn factor*.) Hij deed dit voor het *Festschrift* voor zijn promotor die dat jaar zestig was geworden. Het controleren van deze formalisatie – inclusief het checken van alle gebruikte basiswiskunde – kost de computer ongeveer twintig minuten. Gedurende die tijd construeert het HOL systeem een gerichte acyclische graaf met 22.882.354 punten, die loopt van drie beginpunten voor de drie axioma's van het HOL systeem aan de ene kant, naar een eindpunt dat correspondeert met de priemgetalstelling.

Dat John Harrison dergelijke indrukwekkende dingen met zijn HOL systeem kan doen is omdat hij één van de beste *bibliotheken* van geformaliseerde wiskunde heeft die er zijn. Het is een aantrekkelijke gedachte (een soort wiskundige versie van het 'human genome-project') om een dergelijke bibliotheek te maken voor *alle* wiskunde die je als algemeen ontwikkeld wiskundige hoort te kennen. Dat is dus ongeveer de wiskunde die vroeger in het kandidaats- en nu in het bachelor-programma wordt behandeld. Ik heb ooit uitgerekend dat het ongeveer 140 man-jaar zal kosten om dat allemaal te formaliseren. Een interessante dagdroom is om je af te vragen of dat er ooit van zal komen. En zo ja: wanneer dan, en in welke vorm.

Freek Wiedijk

HOL: <http://www.cl.cam.ac.uk/~jrh13/hol-light/>
Freeware

GAP

GAP (Groups, Algorithms and Programming) ontstond aan de universiteit van Aken als geesteskind van Joachim Neubüser. Na diens pensionering is het 'hoofdkwartier' verhuisd naar St. Andrews in Schotland, waar de verde-

re ontwikkeling van GAP gecoördineerd wordt.

Zoals de naam al doet vermoeden, is GAP een computeralgebra systeem met voornamelijk groeptheoretische toepassingen. En inderdaad heeft de meeste functionaliteit van GAP daarop betrekking. GAP is echter ook gemaakt met het doel 'open' te zijn, in tweeërlei opzicht: ten eerste kan men GAP 'gratis en voor niets' van de website halen, waarna men over alle broncode beschikt, en ten tweede heeft GAP een programmeertaal waarmee het mogelijk is nieuwe types objecten te introduceren. Dit laatste kan men gebruiken om eigen programma's in GAP te integreren. Bij voldoende enthousiasme is het dan mogelijk om de code te organiseren in een zogenaamd 'package' dat bij GAP aangeboden kan worden. Er volgt een beoordelingsproces, vergelijkbaar met de beoordeling van tijdschrift-artikelen, waarna, bij bevredigend resultaat, het package bij GAP gevoegd wordt en van de website geladen kan worden.

Ter illustratie noem ik een voorbeeld uit eigen ervaring. In 2007 heb ik wat gerekend met nilpotente banen in enkelvoudige Lie algebras, dit om het vermoeden van Elashvili voor Lie algebras van exceptioneel type aan te tonen. Hiervoor heb ik in GAP een nieuw type object geïntroduceerd (namelijk, het type 'nilpotente baan', in GAP-taal: `IsNilpotentOrbit`). Objecten van dit type worden op een bepaalde manier geprint:

```
gap> L:= SimpleLieAlgebra("E",6,
Rationals);;
gap> o:= NilpotentOrbit(L,
[0,0,0,2,0,0]);
<nilpotent orbit in
Lie algebra of type E6>
```

Vervolgens zijn op objecten van dit type een aantal functies toepasbaar, bijvoorbeeld om een corresponderend $\mathfrak{sl}_2$ -triple op te vragen:

```
gap> sl2:= RandomSL2Triple(o);; sl2[3];
v.4+v.8+v.19+v.23
```

De berekeningen vatte ik samen in een artikel (*LMS J. Comput. Math.*, 11:280–297, 2008) en de code zette ik op mijn website. Het laatste bleek nuttig toen de programma's werden opgehaald door Boahua Fu, die ze gebruikte in zijn onderzoek (arXiv:0809.5109). Als ik niet GAP's typesysteem had kunnen programmeren, was het voor hem zeker veel moeilijker geweest deze programma's te gebruiken.

Willem de Graaf

GAP IV: www.gap-system.org
Freeware

Macaulay, Macaulay2, Singular

Wiskunde een experimentele wetenschap? De computer op de werkplek maakt dit mo-

gelijk. Altijd al is het berekenen van zorgvuldig gekozen voorbeelden belangrijk geweest, maar de nu beschikbare rekenkracht opent heel nieuwe perspectieven.

In mijn eigen onderzoek heb ik veel gewerkt met het programma Macaulay, dat goed is in het vinden van standaardbases. Dat begon nadat ik in 1990 voor 2000 dollar een Mac SE30 gekocht had. Ik deed eenvoudige berekeningen, want veel langer dan een minuut hield de computer niet vol. Het bleek dat je de klok uit moest zetten. Daarna ging het beter. Omdat mijn machine niet zo snel was, en niet zoveel geheugen had, was het een hele kunst om trucs te vinden om toch tot een resultaat te komen. Al met al heb ik heel wat versele deformaties van singulariteiten uitgerekend.

Als je nu naar Dave Bayers Macaulay homepage gaat, lees je: Wait!! It's 2003. That 70's haircut really has to go. While you're at it, are you sure you want this program? It warms our hearts every time we hear of a diehard Macaulay enthusiast, but even Dave has switched to Macaulay 2.

Zelf heb ik de overstap naar de opvolger Macaulay 2 (o.a. geschreven door Mike Stillman, de andere auteur van Macaulay) niet gemaakt. Er is altijd een drempel om iets nieuws te leren, en als bepaalde dingen je dan ook nog tegenstaan, komt er helemaal niets van. Het is best zinvol lange output van berekeningen en tussenresultaten, na nauwkeurige bestudering, met de hand te vereenvoudigen. Van de **Macaulay 2** documentatie kreeg ik de indruk dat zulke operaties doodzonden zijn.

Na allerlei veranderingen in het computersysteem op mijn werk en thuis beschik ik niet meer over een werkende Macaulay versie. Wat ik nu gebruik is Singular, waarvan ik de ontwikkeling van het begin af aan gevolgd heb. Mijn eerste pogingen het programma serieus te gebruiken zijn gestrand op de onvolkomenheden van de vroege versies. Nog steeds is het zo dat ik in Singular niet alles voor mekaar krijg, wat ik in Macaulay kon doen. Het fijne aan het oude Macaulay, met zijn beperkte mogelijkheden, is dat het zo lekker primitief is. Van een programmeertaal kun je niet spreken, en er is een heel beperkte lijst van mogelijke opdrachten. Maar ik had nooit last van naamconflicten, iets wat ik met Singular, waar je veel meer mee kunt doen, wel heb. Kennelijk heb ik me verkeerde gewoontes aangeleerd.

Singular kan inderdaad veel meer. Wat erg prettig is, is dat polynomen gefactoriseerd kunnen worden. Singular rekent ook met inhomogene polynomen, in tegenstelling tot Macaulay, waar alle input gewogen homogeen moet zijn. Nu was die beperking niet

zo erg, want zonder die voorwaarde zijn de problemen vaak te moeilijk. Met de computer kun je meer aan dan met de hand, maar niet zoveel meer. Maak je een probleem een klein beetje moeilijker (bijv. een variabele meer), dan duurt de berekening veel langer. Je komt gauw van de situatie waarin je niet merkt dat de computer rekt, tot berekeningen die na een kop koffie nog niet klaar zijn. Het grondlichaam heeft grote invloed heeft op de omvang van berekeningen.

Meestal wil je rationale coëfficiënten hebben. Dat gaat eerst prima, maar als de berekeningen langer duren, kun je beter opnieuw beginnen met een eindig lichaam. In Macaulay kan het alleen zo, default is karakteristiek 31993. Over het algemeen merk je het verschil met rationale getallen niet.

Rekenen over een eindig lichaam kan zijn voordelen hebben. Om kwadratische vergelijkingen op te lossen is het handig het getal i te hebben. Een mogelijkheid is een extra variabele w in te voeren met zijn minimaalpolynoom $w^2 + 1$. Maar je kunt ook een geschikt eindig lichaam kiezen, bijv. $\mathbb{Z}/101$, waar 10 een wortel uit -1 is. Met een beetje geluk kun je de resultaten dan terugvertalen door bijvoorbeeld 9 als $i - 1$ op te vatten. Dit is een voorbeeld van het gebruik van de volgende variant op de hoofdstelling van de algebra: *ieder polynoom uit $\mathbb{Z}[x]$ heeft een lineaire factor $(x - n)$ modulo een geschikt gekozen priemgetal p* . In het algemeen werkt $n = 2$: je vult gewoon 2 in het polynoom in, en neemt een (niet te kleine) priemfactor van het resultaat als karakteristiek.

Tenslotte, wat bereken ik zoal? Laatst was ik geïnteresseerd in irreguliere oppervlakken: gladde complexe oppervlakken (reëel vierdimensionaal) met positief eerste Betti getal. De algemene hypervlaksnode is dan

geen normaalkromme, ofwel deze kromme is de projectie van een kromme in een hoger-dimensionale ruimte van dezelfde graad. Het eenvoudigste geval is een elliptisch regeloppervlak van graad 5 in $\mathbb{P}^4$. Zo'n oppervlak kan door heel mooie vergelijkingen gegeven worden. Er zijn vijf vergelijkingen van graad 3, en de relatiematrix is een 5×5 -matrix L met $L_{ij} = s_{i-j}x_{2i-j}$, waarbij de indices modulo 5 genomen moeten worden, en $s_k = -s_{-k}$ constanten zijn, die de elliptische modulus bepalen. De vector $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ ligt in de kern van L en daarom zijn de kolommen van de matrix van 4×4 onderdeterminanten steeds veelvoud van deze vector: dit geeft de vijf polynomen van graad 3; als je ze expliciet uitschrijft, is het al minder mooi. Voor $s_1 = s_2 = 1$ heb ik met Singular wat gerekend aan een algemene hypervlaksnode, gegeven door $x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0$. Zoals het hoort kreeg ik voor de normalisatie van de resulterende vijfdegraads elliptische kromme vijf tweedegraadsvergelijkingen, die er echter nogal ingewikkeld uitzagen. De volgende stap is het berekenen van de relatiematrix. Bij geschikte keuzes is dit een antisymmetrische 5×5 -matrix en de vijf vergelijkingen zijn dan de Pfaffianen van deze matrix (de wortels van de hoofdminoren, want dat zijn volledige kwadranten). Natuurlijk maakt de computer de verkeerde keuzes, maar door te vegen kun je de matrix antisymmetrisch maken. Dit helpt een beetje, maar erg mooi wordt het niet. En dat terwijl je de elliptische normaalkromme door nog mooiere vergelijkingen kunt geven dan het elliptische regeloppervlak. Wat hier aan de hand is, is dat de mooie vergelijkingen een erg grote symmetriegroep hebben. Door een algemene hypervlaksnode te nemen, maak je de symmetrie kapot. Zoiets kun je beter niet doen. Zo zie je maar weer dat je heel gauw tegen de grens aanloopt, van wat je kunt of wilt berekenen.

Jan Stevens

Macaulay: www.math.columbia.edu/~bayer/Macaulay

Macaulay2: www.math.uiuc.edu/Macaulay2

Singular: www.singular.uni-kl.de

Freeware

Magma

Ik zag Magma voor het eerst tijdens een landelijk mastervak Algebraïsche Getaltheorie in 2004. Door de hierop volgende huiswerkopdrachten op de computer werd het programma subtiel opgedrongen. Met succes: als ik vandaag de dag expliciet een bepaald straalklasselichaam nodig heb, weet ik waar ik het moet halen.

Wat Magma destijds deed verschillen van overige pakketten was het gemak waarmee het te begrijpen is. Het programma probeert zoveel mogelijk de taal te spreken die wiskundigen zelf ook bezigen. Dit helpt. Om een voorbeeld te noemen, om $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ te creëren, maak je eerst de polynoomring in de variabele x door te typen

```
R<x>:=PolynomialRing(Rationals());
```

en vervolgens bouw je K via

```
K<r>:=NumberField(x^2-13);
```

De naam Magma, naar de structuur gevormd door een verzameling met een binaire operatie, doet grotere algemeenheid vermoeden dan het programma eigenlijk biedt: het werkt voornamelijk in de algebraïsch-meetkundige en groepentheoretische hoek, waar het dan ook erg dominant is. Toch heeft het programma wel degelijk Bourbakistische pretenties. Veel functies werken alleen op objecten die in de juiste categorie leven, en weigeren pedant enige andere input te accepteren, ook al zou voor een goed verstaander duidelijk zijn wat wordt bedoeld. De multiplicatieve inverse van het gehele getal 2 kent Magma bijvoorbeeld niet. Dit is even wennen, maar dwingt je wel om duidelijke algoritmes te schrijven – en zorgt ook voor wat scherpslijperige voltooening als het programma desalniettemin beweert dat de eenheidengroep van een getallenlichaam eindig voortgebracht kan worden. $\text{UnitGroup}(K)$ is een Abelian Group isomorphic to $\mathbb{Z}/2 + \mathbb{Z}$.

Voor mij persoonlijk is er nog een reden om Magma te gebruiken: een aantal prachtige recente algoritmes in modulaire arithmetische meetkunde zijn in Magma geïmplementeerd. Voor bijvoorbeeld Fuchsgroepen bij quaternionalgebra's, ontwikkeld door John Voight, en voor Hilbert modulaire vormen, ontwikkeld door Lassina Dembélé en Steve Donnelly.

Een voorbeeld met deze algoritmes. Stel, we willen de automorfe eigenvormen van gewicht 2 berekenen voor de Shimurakromme horend bij het ideaal $I = (2)$ in $\mathcal{O}_K$. Na $I := \text{ideal}(\text{Integers}(K) | 2)$ typen we dan

```
>Q:=QuaternionAlgebra(I, [InfinitePlaces
(K)[1]]);
>Signature(FuchsianGroup(Q));
<1, [ 2 ]>
```

Er is dus maar één eigenvorm op scalairen na. Dit klopt met de volgens Jacquet-Langlands equivalente Hilbertmodulaire aanpak:

```
>Dimension(HilbertCuspForms(K, I));
1
```

Na wat rekentijd komen de eigenwaarden van Hecke voor deze laatste spitsvorm ook uit het programma rollen. Dat gaf goed vergelijkingsmateriaal voor eigen onderzoek, waarin één



en ander op naïeve wijze was berekend.
Jeroen Sijsling

Magma: magma.maths.usyd.edu.au/magma/
Licentie \$1200; studentenlicentie \$100.

Mathematica

Er zijn allerlei computeralgebra pakketten, meestal ontworpen voor en door specialisten in een tak van wiskunde. Als je een probleem hebt dat daar in past, is zo'n pakket geweldig. Maar als je bijvoorbeeld een niet-commutatieve situatie hebt, dan is een pakket ontworpen door commutatieve algebraïci een ramp, ook al kan het pakket in principe alles. Wat ik aan Mathematica zo prettig vind, is dat je er gemakkelijk zaken in kunt toevoegen. Als een berekening op papier uit de hand is gelopen kom ik met Mathematica meestal verder. Zo ben ik momenteel bezig geschikte graad twee cocykels te zoeken in complexen van tensorprodukten van geadjungeerde voorstellingen van een (kleine) algemene lineaire groep over de ring van de gehele getallen $\mathbb{Z}$. Mathematica kende van dit alles alleen $\mathbb{Z}$. Geen probleem: het pakket is gebaseerd op het herkennen van patronen en het voorschrijven van vervangingsregels. Verder is er niet besloten dat je in een bepaalde stijl moet programmeren, dus object-georiënteerd mag bijvoorbeeld, maar hoeft niet.

Ik heb dus tensorproducten nodig. In mijn berekeningen worden de tensoren op een basis uitgeschreven. Ik moet Mathematica dus leren om $a \otimes (b + c) \otimes d$ altijd te expanderen tot $a \otimes b \otimes d + a \otimes c \otimes d$, evenals $a \otimes (3 * b)$ tot $3 * (a \otimes b)$. Enzovoort. Dat gaat dan zo:

```
tensor[u___, v_ + w_, x___]:=
tensor[u,v,x]+tensor[u,w,x];
tensor[u___, v_?NumberQ * w_, x___]:=
v*tensor[u,w,x]
```

Of mysterieuzer, maar efficiënter:

```
tensor[u___, v_Plus, x___]:=
tensor[u,#,x]&/@v;
tensor[u___, v_?NumberQ * w_, x___]:=
v*tensor[u,w,x]
```

Dat lijkt als een trein te werken, tot je opeens een tensor met component nul in je output ziet. Dus ook even toevoegen:

```
tensor[u___, 0, x___]:=0
```

Als je berekening kan worden georganiseerd als veel herhalen van substituties, wat vaak het geval is, dan is Mathematica een uitkomst. Natuurlijk gebruik je ook wel eens een wiskundig algoritme dat Mathematica kent. In mijn geval het LLL algoritme, wat overigens in een eerdere versie fout was geïmplementeerd. Dat algoritme helpt om eenvoudige cocykels te vinden onder de mogelijke cocykels. Als ik thuiskom kijk ik of er

al output is.

Wilberd van der Kallen

Mathematica VII: www.wolfram.com

Volledige versie: ca. €3200; Home Edition: ca. €300.

SAGE

Sage is een project met een missie: *Creating a viable free open source alternative to Magma, Maple, Mathematica and Matlab*. Onder leiding van William Stein (Seattle) wordt Sage in hoog tempo ontwikkeld door een grote groep actieve wiskundigen en programmeurs. Ze zijn nog maar vier jaar bezig, en het is al een indrukwekkend systeem, dat ik zelf met veel plezier gebruik.

Een sterk uitgangspunt bij de ontwikkeling van Sage is het streven om niet het wiel opnieuw uit te vinden. Voorbeeld: elk computeralgebra-systeem heeft een *interpreter* nodig, waarmee commando's van de gebruiker in een bepaalde vorm verwerkt worden. Alle systemen hebben zelf interpreters ontworpen met allemaal hun eigen gebruiksaanwijzing en gebreken. By Sage hebben ze goed rondgekeken naar gangbare computertalen die hun bestaan bewezen hebben. De taal *Python* kwam als beste uit de bus en Sage is daarom gebouwd op Python. Dit heeft een enorm voordeel: alle verbeteringen en uitbreidingen die anderen voor Python ontwikkelen kunnen meteen worden gebruikt. Als ik bijvoorbeeld berekeningen wil doen die interactie met een *database server* vergen, dan zijn daar al standaard Python modules voor die door duizenden mensen gebruikt worden, en die zonder al teveel gedoe ingezet kunnen worden. Probeer dat maar eens vanuit Maple.

Over de praktische, politieke en religieuze voordelen van *open source* wordt wellicht meer geschreven dan over computer algebra. Laat ik hier volstaan met een eenvoudige observatie. Ik heb er wel eens last van dat ik in Maple of Magma niet kan achterhalen *hoe* iets berekend wordt. Soms wil ik dat weten omdat er iets niet klopt, soms wil ik het weten vanuit een interesse in algoritmes en soms wil ik weten waarom het zo lang duurt. Er is typisch geen enkele manier om hierachter te komen — het gebruik van de software is als het raadplegen van een orakel. Voor het gebruik in serieus wiskundeonderzoek is dat op zijn best onbevredigend. Open source software is wellicht lastig te ontcijferen, maar wie echt wil, kan erachter komen wat er gebeurt. Bovendien is het in een open source systeem mogelijk om tijdskritische stappen in een berekening efficiënter te gaan aanpakken, waardoor het hele systeem meer slagkracht krijgt.



Einstein (8ste van rechts) bij het Yerkes Observatory in 1921

Op gebruikersgemak scoort Sage goed. De grafische omgeving is te gebruiken via een *browser* — weer zo'n wiel — en alle functies zijn te vinden door slimme *tab completion*.

Kijk eens op de webpagina. Volgens mij heeft dit project de toekomst. Bart de Smit

SAGE: www.sagemath.org
Freeware

Een (Japanse) collega

Soms is het handig wanneer in plaats van een computer, een collega een berekening uitvoert. Bedenk hierbij dat men zegt dat vrouwen nauwkeuriger rekenen dan mannen — vandaar wellicht de vele dames op de foto bij Einstein (zie boven).

Een aantal jaren geleden: ik ben in Japan en zit met Fumiharu Kato te staren naar een cohomologiegroep waar we niet uitkomen. Het is groepencohomologie op een oneindig-dimensionale vectorruimte. Het is vrijdag en Kato deelt mij mee dat hij zaterdag met de familie moet doorbrengen, maar dat we op zondag wel weer aan het werk kunnen.

Zondagochtend komen we elkaar tegen in een café bij de Universiteit van Kyoto voor ホットコーヒー ('hotto kōhi'). Kato pakt een schrift, zegt: "So yesterday I was with my family, and I did the following calculations", en laat bladzij na bladzij zien met eindig-dimensionale benaderingen van het probleem. Dit zegt ook iets over Japanse familiemores. Het valt meteen op dat het resultaat na een paar benaderingen stabiel wordt. Een kopje koffie later zien we hoe we het probleem met Hilbert 90 kunnen herleiden naar een korte, eindig-dimensionale berekening. Ik weet niet of we dat ooit hadden ontdekt zonder die pagina's vol berekeningen.

Moraal: neem volgend weekend je schriftje mee naar Artis. Gunther Cornelissen

Collega's: Overal gratis beschikbaar, binnen Nederland wel in steeds kleinere aantallen.

In de verdediging

| In defence



Adaptive tensor product wavelet methods for solving PDEs

Tammo Jan Dijkema

Wie tussen nu en 2015 een keer een bezoek brengt aan het Universiteitsmuseum in Utrecht kan daar onder andere de tentoonstelling *Boeiende baggage* bekijken. Het museum zegt hierover: “Je gaat de deur uit en neemt mee ... je telefoon en agenda, je bril, pen of potlood, een banaan voor onderweg, deo en een condoom voor het geval dat ... Hele gewone, alledaagse voorwerpen zou je denken.” De mobiele telefoon, met camera wel te verstaan, is het voorwerp waarmee Tammo Jan Dijkema in het museum zijn promotieonderzoek naar benadering met behulp van wavelets illustreert. Op 29 juni promoveerde hij bij Rob Stevenson (UvA) en Henk van der Vorst (UU) aan de Universiteit Utrecht, op een proefschrift getiteld *Adaptive tensor product wavelet methods for solving PDEs*. Zelf noemt Tammo Jan ook meteen de Nederlandse versie van de titel, *Adaptieve tensorproductwaveletmethoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen*. Deze vormt namelijk een prachtig voorbeeld bij zijn favoriete stelling bij het proefschrift: “De regels voor spatiegebruik in het Nederlands zorgen voor erg lange woorden. Toch zijn ze te prefereren boven hun Engelse equivalenten, omdat ze ambiguïteit kunnen wegnemen”.

Dimensievloek omzeilen

Bovengenoemde waveletmethoden zijn numerieke methoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Tammo Jans onderzoek was onder andere gericht op het omzeilen van de zogenaamde *curse of dimensionality* die hierbij een rol speelt. Die dimensievloek legt hij als volgt uit: “Met een normale discretisatie van het domein groeit het aantal rekenpunten N als $N \sim (1/h)^d$, terwijl de afname van de fout maar evenredig is met h^p , waarbij h de afstand tussen de punten is, d de dimensie en p de orde van de methode. Dit betekent dat de fout zich gedraagt als $N^{-\frac{p}{d}}$: hoe hoger de dimensie, des te langzamer de convergentie.”

Op productdomeinen zoals $(0, 1)^d$ kan deze curse of dimensionality worden omzeild met een adaptieve waveletmethode die Tammo Jan met Rob Stevenson en Christoph Schwab heeft ontwikkeld. Met die methode gaat de convergentie, onafhankelijk van de dimensie, als N^{-p} . Dit is volgens Tammo Jan het belangrijkste resultaat in zijn proefschrift: omdat de asymptotische convergentie van de waveletmethode onafhankelijk van de dimensie is, kunnen er, in ieder geval asymptotisch, optimaal vergelijkingen mee kunnen worden opgelost in tien dimensies of meer. ‘Gewone’ eindige-elementenmethodes zijn voor meer dan vier dimensies praktisch niet bruikbaar.

Anisotrope tensorproductwaveletbases

Concreter gezegd komt het oplossen van een partiële differentiaalvergelijking neer op het vinden van een u in een Hilbertruimte H die, voor een gegeven $f \in H'$ en een elliptische lineaire operator $A : H \rightarrow H'$, voldoet aan $Au = f$. Denk voor A bijvoorbeeld aan de Laplaceoperator,

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

en voor H aan een Sobolevruimte op $(0, 1)^d$.

De truuk voor het vinden van een benadering voor u is nu om de onbekende functie u te schrijven als $u = \sum_j \mathbf{u}_j \psi_j$, waarbij $\Psi = (\psi_j)_j$ een basis voor H is en $\mathbf{u}$ een (oneindig lange) vector. Dan is het probleem te schrijven als $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, met $\mathbf{A}_{ij} = (A\psi_j)\psi_i$ en $\mathbf{f}_i = f(\psi_i)$. Op dit matrix-vectorprobleem kan je nu een benaderende iteratieve methode loslaten. Als Ψ een Riesz-basis is, is de convergentie van de benadering $\tilde{\mathbf{u}}_n$ naar $\mathbf{u}$ equivalent aan convergentie in H van $\tilde{u}_n := \sum_k \tilde{\mathbf{u}}_{n,k} \psi_k$ naar u .

Een belangrijk ingrediënt voor de constructie van een Riesz-basis Ψ voor H is een waveletbasis $\Phi = (\phi_k)_k$ voor $L_2(0, 1)$. De basis voor H wordt vervolgens gemaakt door geschaalde tensorproducten van deze basisfuncties te nemen: $\psi_{\vec{k}} = c_{\vec{k}} \phi_{k_1} \otimes \dots \otimes \phi_{k_d}$. Dit worden erg anisotrope (langgerekte) functies. Omdat op productdomeinen de te benaderen functie veelal ook anisotrope kenmerken heeft, bijvoorbeeld singulariteiten langs een rand, is het gebruik van dergelijke anisotrope functies heel handig.

Waveletmethodes om partiële differentiaalvergelijkingen mee op te lossen zijn in feite een soort eindige-elementenmethodes, waarbij de elementen wavelets zijn. Een essentieel verschil is alleen dat in eindige-elementenmethodes van tevoren een 'benaderingsruimte' wordt vastgesteld (bijvoorbeeld stuksgewijs bilineaire functies t.o.v. een of ander rooster), terwijl waveletbases direct een basis vormen voor heel H . Daardoor is convergentie naar de oplossing beter te bewijzen.

Resultaten die echt gebruikt zullen worden

De bewezen optimaliteit van de convergentie geldt alleen asymptotisch. Om een in de praktijk efficiënte methode te maken, is meer nodig. In veel schattingen speelt het zogenaamde conditiegetal van de stijfheidsmatrix namelijk een rol. Hoe kleiner dat conditiegetal, des te beter het kwantitatieve gedrag van de methode. Het conditiegetal van de tensorproductbasis groeit als het conditiegetal van de eendimensionale basis tot de macht van de dimensie. Dus het is handig als de eendimensionale basis goed geconditioneerd is, ofwel, een conditiegetal dichtbij 1 heeft (een conditiegetal 1 betekent dat het om een orthogonale basis gaat). Sterker nog, om naar echt hoge dimensies te gaan moet je wel beginnen met een orthogonale basis in een dimensie.

Tammo Jan heeft een basis gemaakt die een veel kleiner conditiegetal heeft dan tot nu toe bekende bases, maar wel de voordelen van waveletbases heeft. Hij voelt zich geveid dat hij gevraagd werd om een hoofdstuk van zijn proefschrift te presenteren aan een Duitse universiteit, waar ze zijn wavelets willen toepassen in een computerprogramma voor financiële wiskunde. Geweldig dat de resultaten daadwerkelijk gebruikt gaan worden!

Leuke en moeilijke aspecten van het aio-schap

Het leven als aio vond Tammo Jan erg leuk; de combinatie van onderwijs geven, prutsen aan onderzoek, en conferenties bezoeken en praatjes geven beviel hem goed. Sommige aspecten sprongen er echter uit. Behalve het feit dat zijn resultaten echt gebruikt zullen worden en dat er een poster over zijn onderzoek in het universiteitsmuseum hangt, verscheen er ook nog een stukje over een lunchprojectie over voetbalplaatjes in dagblad *De Pers* [1]. Naar aanleiding van dat laatste stond hij ook in het universiteitsbladje en was hij zelfs op Radio Rijnmond.

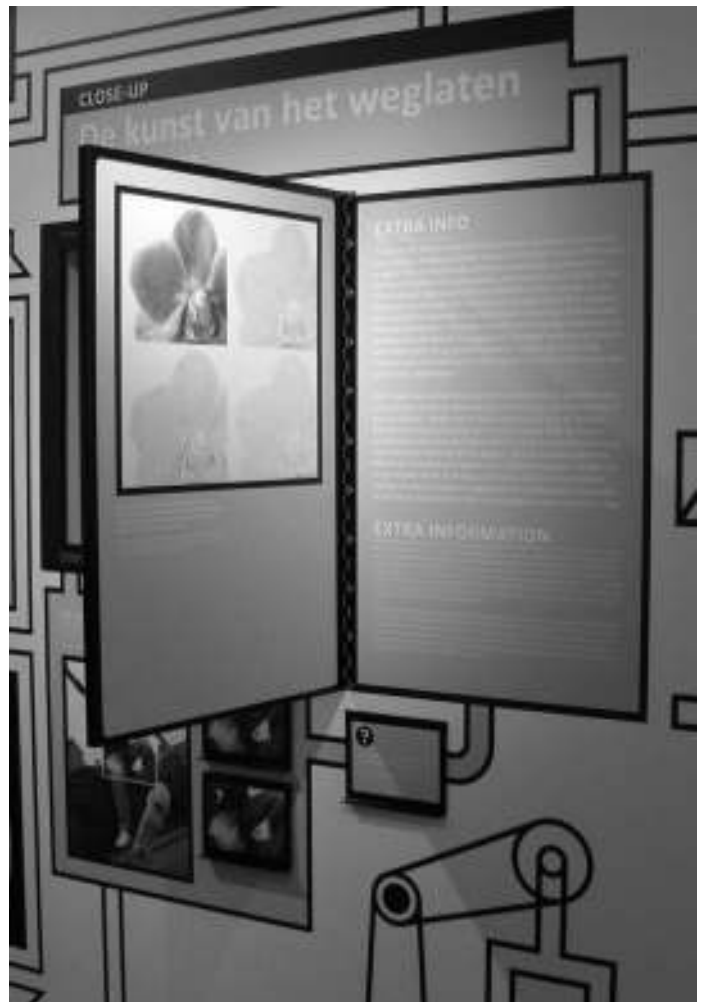
Met zijn promotor Rob Stevenson heeft hij erg actief samengewerkt. Toen Rob naar Amsterdam vertrok, is Tammo Jan ook steeds meer daar gaan werken, omdat hij het fijn vond om even snel te kunnen over-

leggen. Het pendelen naar Amsterdam was voor hem geen enkel probleem. Het was zelfs wel zinnig: in Utrecht was het soms een beetje te gezellig om efficiënt te schrijven, terwijl hij in Amsterdam een iets teruggetrokken bestaan leidde. Overigens was die gezelligheid in Utrecht in de eerste jaren zeker niet slecht: met veel van zijn collega-aio's heeft hij kleine probleempjes uit zijn werk opgelost.

Tammo Jan vond het wel moeilijk om zo lang motivatie op te brengen voor één project. Al organiseerde hij als aio de Studiegroep Wiskunde met de Industrie en gaf hij praatjes voor ouderdagen, voorlichtingsdagen en conferenties, toch zoekt hij in zijn volgende baan iets meer afwisseling. Op het moment van schrijven was hij aan het solliciteren in het bedrijfsleven: na tien jaar universiteit wil hij wel eens kijken wat er verder nog te doen is.

Referenties

1. <http://www.tammo80.nl/weblog/?p=1164>



De poster over Dijkema's onderzoek in het Universiteitsmuseum in Utrecht

Albert van der Schoot

Universiteit van Amsterdam

Faculteit der Geesteswetenschappen

Leerstoelgroep Filosofie van Kunst en Cultuur

Nieuwe Doelenstraat 15, 1012 CP Amsterdam

A.vanderSchoot@uva.nl

Onderzoek

Het is niet alles goud wat er snijdt

De gulden snede wordt tegenwoordig toegepast in schilderkunst, fotografie, architectuur, et cetera, en is als 'goddelijke proportie' omgeven met een mysterieus aura. De prozaïsche wiskundige eigenschappen van deze verhoudingsmaat waren al veel eerder vastgesteld. Maar wanneer heeft nu de kruisbestuiving van wiskunde naar kunst plaatsgevonden? Albert van der Schoot ontrafelt de oorsprong van de gulden snede als artistiek begrip in de literatuur, en ontzenuwt tegelijkertijd diverse hardnekkige mythes.

Leerlingen van het VWO moeten een profielwerkstuk schrijven, en de Stichting Kennisnet is behulpzaam bij het aanreiken van thema's en het op weg helpen van het eigen onderzoek dat de scholieren moeten leren te verrichten. Tot dan toe kwam de kennis uit het boek of uit de informatie van de leerkracht, en deze nieuwe activiteit (een goede voorbereiding van wat de leerlingen later op HBO of universiteit te wachten staat) is dan ook best spannend. Voor wiskunde is het aanbod bepaald niet zuinig, in vergelijking met de meeste andere vakken. Maar liefst 21 pakketten komen er bovendien wanneer in de zoekmachine Davindi 'wiskunde werkstuknetwerk' wordt ingetypt, tegenover slechts 15 voor Nederlands en niet meer dan drie (!) voor geschiedenis. Bovenaan de lijst staat het thema 'De gulden snede', verzorgd door de Rijksuniversiteit Groningen, en dat lijkt een goed verteerbare hapklare brok voor zo'n werkstuk te zijn [1]. De samenstellers laten weinig terreinen onaangeroerd om de leerlingen van het grote belang van de gulden snede te overtuigen. Daarbij blijken het pas in de laatste plaats de wiskundige eigenschappen van de gulden snede te zijn die de aandacht trekken.

Als eerste wordt de toepassing in de antieke architectuur genoemd: de gulden snede, ook wel aangeduid met het symbool ϕ , is 'terug te vinden (...) in het ontwerp van de Grote Piramide van Gizeh', zo leren we op de thema-

pagina van het werkstukpakket. Kennelijk beschikt men in Groningen over dit ontwerp en alleen dat al lijkt me groot nieuws: bij archeologen is het niet bekend, en in de schaarse bronnen die ons van de Egyptische wiskunde zijn overgeleverd komt de gulden snede niet voor. In de belangrijkste van die bronnen, de *Rhind Papyrus*, wordt wel ingegaan op wiskundige problemen in verband met de piramidebouw zoals het berekenen van de hellingshoek, maar niets wijst in de richting van wat Euclides in zijn *Elementen*, onze oudst bekende bron voor de guldensnede-verhouding, aanduidt als de 'verdeling in uiterste en middelste reden'. Roger Herz-Fischler, die eerder al van zich deed spreken door de wiskundige geschiedenis van de gulden snede te documenteren [2], publiceerde in 2000 een boek waarin hij allerlei wiskundige interpretaties behandelt die in de loop van de tijd over de structuur van de Piramide van Cheops naar voren zijn gebracht [3]. Van de 19 hoofdstukken in dat boek zijn er maar twee gewijd aan de gulden snede. Er zijn nog veel meer kandidaten voor de rol van sleutel tot het grote geheim van dit wereldwonder, met name π is een geduchte concurrent voor ϕ . Mysterieuze bouwwerken doen nu eenmaal een sterk beroep op de verbeelding en de inlegkunde; in ons land is het klassieke voorbeeld daarvan het boek van C. van der Vecht, *De steenen spreken: de goddelijke boodschap der groote pyramide* uit 1935 [4].

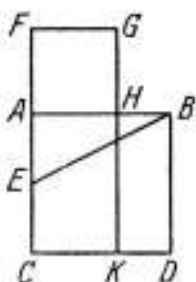
Niet minder verrassend is de stap die vervolgens in het themapakket wordt gezet naar de natuur: '(...) niet alleen menselijke bouwmeesters gebruikten de Gulden Snede in hun ontwerp. Ook het planten- en dierenrijk lijken te zijn ontworpen met het getal ϕ als uitgangspunt.' Daar stond ik echt van te kijken. Ik ben een alfa en mijn eigen eindexamen is alweer 40 jaar geleden, maar in die tijd werd ons nog wijs gemaakt dat er in de natuur zoiets bestond als *evolutie*, en dat de eigenschappen van planten en dieren zich voortdurend tijdelijk in hun habitat stabiliseerden binnen een continu proces van variatie en selectie. Dat planten en dieren in feite ontworpen waren door een niet-menselijke bouwmeester was toen aan biologen nog niet bekend, of misschien vond onze docent dat alfa's niet in deze hogere vorm van kennis moesten worden ingewijd.

Waar zouden de samenstellers van het pakket hun kennis over de gulden snede hebben opgedaan? De enige boektitel op de introductiepagina geeft wellicht het antwoord: *The Da Vinci Code* van Dan Brown. Daarin treedt immers hoogleraar Religieuze Symboliek Robert Langdon van de Harvard University op, die in zijn colleges uitlegt dat het getal 1,618 'een heel belangrijk getal in de kunst' is, bovendien 'alomtegenwoordig in de natuur' en 'sinds het begin der tijden een uiting van mysterieuze magie'. Wie zich wat serieuzer verdiept in de geschiedenis van de gulden snede ontdekt al gauw dat deze mythes pas in de nieuwste geschiedenis opduiken. Nu pretendeert Dan Brown niet met *The Da Vinci Code* een eindexamenpakket voor een profielwerkstuk te hebben geschreven, maar wie dat wel doet zou toch op zijn minst eens boeken zoals die van Herz-Fischler moeten doornemen.

Euclides en Vitruvius

Dat zou om te beginnen het inzicht opleveren dat zowel de benaming 'gulden snede' als de cultus rondom deze verhouding niet verder teruggaan dan het midden van de 19e eeuw. In 1951 verbaast George Sarton zich in het tijdschrift *Isis* erover dat er geen eerdere vindplaats bekend is van die benaming dan een wiskundeboek van Martin Ohm uit 1835, en hij vraagt de lezers van het tijdschrift om eerdere bronnen aan te dragen. Het heeft een halve eeuw geduurd voor deze uitnodiging beantwoord werd: in 1997 onthulde Dénes Nagy dat de naam goldener Schnitt reeds in 1833 van de drukpers was gerold, en wel in het *Lehrbuch der Geometrie* van Ferdinand Wolff [5]. Later ontdekte hij dat dat ook al in 1830 was gebeurd in de eerste druk van dat boek [6].

Nu zegt de late verschijning van de *term* 'gulden snede' natuurlijk niets over de *bekendheid* van deze bijzondere proportie. Die dateert wel degelijk uit de Oudheid, en wel onder de naam die Euclides haar geeft in zijn *Elementen*: 'verdeling in uiterste en middelste reden'. Euclides geeft een definitie van de verhouding, en laat er een flink aantal geometrische eigenschappen van zien. Maar dat is het dan ook: in de Oudheid treedt de gulden snede nooit buiten de context van de wiskunde. Anders dan Dan Browns Harvard-professor beweert is er dan ook geen spoor van te vinden in de bijbel van de klassieke architectuur, het werk van Vitruvius [7] — en dat terwijl deze Romeinse auteur toch met name in het derde van zijn tien boeken over de architectuur heel nadrukkelijk het juiste gebruik van proporties aan de menselijke bouwmeesters aanbeveelt. Maar dat kan ons niet verwonderen als we weten wat volgens Vitruvius een juist gebruik van proporties is: wie een tempel wil bouwen moet zich exact houden aan de maten die de verschillende delen onderling op elkaar afstemmen, en die alle van het geheel moeten zijn afgeleid. *Symmetria*, *analogia* (evenredigheid) en *commodulatio* zijn de termen die hij inzet om de architecten hiervan te overtuigen.



De geometrische weergave van de verdeling in uiterste en middelste reden volgens Euclides, boek II, paragraaf 11

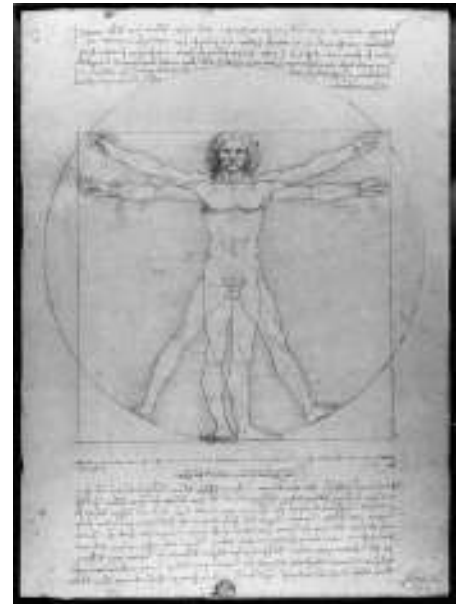


Duitse uitgave van Vitruvius' *De architectura* (16de eeuw)

Daarbij gaat het om volstrekt rationale verhoudingen, waarin voor zo'n irrationaal buitenbeentje als de gulden snede geen plaats is. Wat ons wél kan verwonderen is wat er volgens Vitruvius weer achter die rationale opbouw zit: die is vereist omdat de tempelbouwer de structuur van het menselijk lichaam moet imiteren - en die structuur is, zo meent Vitruvius zeker te weten, door de natuur op dezelfde wijze gevormd. Hij geeft een minutieuze beschrijving van de modulaire opbouw van het menselijk lichaam, zoals we die later ook bij de schilders van de 15e eeuw zullen tegenkomen. Alle lichaamsdelen verhouden zich volgens vaste, eenvoudige proporties. Daarbij geldt de navel als middelpunt van het lichaam; aan de 19e eeuwse observatie dat de navel het lichaam volgens de gulden snede verdeelt is Vitruvius nog lang niet toe, omdat hij zich met geen mogelijkheid een irrationale maat als natuurlijke verdeling kan voorstellen. Maar om er dan toch het middelpunt van te maken moet hij wel een kleine ingreep toepassen: de navel is pas als middelpunt zichtbaar als de menselijke figuur met uitgestrekte ledematen op zijn rug ligt. En zo beschrijft Vitruvius dan ook de figuur die we dankzij Leonardo's bekende tekening op de Italiaanse euromunten aantreffen [8]. Dat we in die figuur dezelfde mensengestalte ook in een vierkant tegenkomen komt omdat Vitruvius aan zijn beschrijving toevoegt dat de uitgestrekte armen precies de lichaamslengte omspannen - en ook dat is een gegeven dat in tempels uit de Oudheid en kerken uit de Renaissance navolging heeft gekregen.

Goddelijke proportie

Vitruvius is samen met Euclides de inspiratiebron geweest voor het enige boek dat in de Renaissance aan de gulden snede gewijd is, Luca Pacioli's *Divina Proportione* uit 1498. Die benaming voor de gulden snede had deze franciscaner monnik waarschijnlijk zelf bedacht. We komen haar ook een paar keer te



De *homo ad quadratum et ad circulum*, door Leonardo da Vinci, getekend op basis van Vitruvius' *De architectura* boek III

gen in de geschriften van Leonardo da Vinci (die met Pacioli bevriend was en de illustraties in diens boek had verzorgd), maar Leonardo bedoelt er nooit de specifieke verhouding van de gulden snede mee. Voor hem is de proportionaliteit als zodanig iets bewonderenswaardigs; hij spreekt bijvoorbeeld over de *divina proportionalità* van de lengtematen van de lichaamsdelen, zoals Vitruvius die had uiteengezet. Pacioli's boek dateert uit een tijd waarin men nog niet gewend was mathematische inzichten bij voorkeur in formules uit te drukken. Niets van wat de monnik te melden heeft over de eigenschappen van de goddelijke verhouding gaat uit boven wat Euclides daarover al had vastgesteld, maar zijn taalgebruik is heel wat bloemrijker dan dat van de compiler uit de Oudheid. Vol bewondering bericht Pacioli van de 13 *stupendi effecti* die de proportie bezit. Eigenschappen zoals

- Het kwadraat van de som van het grootste deel van een volgens de goddelijke proportie verdeelde lijn plus de helft van die lijn is altijd vijf keer zo groot als het kwadraat van die halve lijn op zichzelf.
- De som van het kwadraat van het kleinste deel van een volgens de goddelijke proportie verdeelde lijn en het kwadraat van het geheel is driemaal zo groot als het kwadraat van het grootste deel van die lijn.
- Het grootste deel van een volgens de goddelijke proportie verdeelde zijde van een hexagon is gelijk aan de zijde van het decagon dat door dezelfde cirkel omschreven wordt als het hexagon.

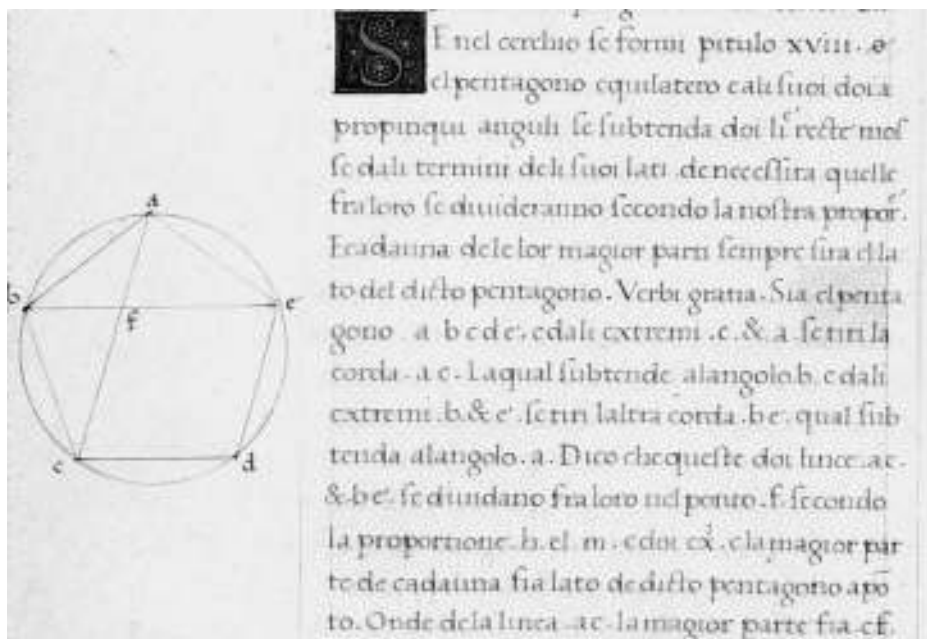
Het zijn allemaal kenmerken die onder mathematici al bekend waren, maar bij Pacioli krijgt

de presentatie van de *secretissima scientia* van de wiskunde het karakter van een inwijding in een mysterieuze leer die een onmiskenbaar religieus karakter heeft. Het bijvoeglijk naamwoord ‘goddelijk’ is niet voor niets gekozen, want Pacioli meent letterlijk dat God en de gulden snede door hun ongrijpbaarheid en hun onveranderlijkheid een zekere verwantschap vertonen. Af en toe verwijst hij naar Bijbelteksten om die verwantschap te illustreren. De wiskundige stellingen drukken voor hem een bovennatuurlijke waarheid uit. Wanneer hij dan de wonderbaarlijke eigenschappen toeschrijft aan de ‘irrationale symfonie’ die de goddelijke proportie teweegbrengt, verraadt hij meteen de herkomst van zijn verwondering. Die term was hij namelijk tegengekomen in de kantlijn van de vertaling die de 13e eeuwse geestelijke Johannes Campanus van het werk van Euclides had gemaakt - uit het Arabisch, want in die taal was dat werk beschikbaar. Pacioli verzorgde er een nieuwe uitgave van en moet zich dus intensief met die tekst hebben beziggehouden. Het volledige commentaar dat Campanus aan de gulden snede wijdt luidt als volgt:

“Wonderbaarlijk dus is het vermogen van de lijn die volgens de proportie van uiterste en middelste reden verdeeld is. Aangezien zeer veel zaken, die in de ogen van de beoefenaars der filosofie bewonderenswaardig zijn, zich hiernaar richten, komt dit principe of deze hoofdregel voort uit de onveranderlijke aard van hogere beginselen, zodat het zo verschillende vaste lichamen nu eens in grootte, dan weer in aantal zijden of ook in gestalte, in een irrationale symfonie logisch in overeenstemming brengt.” [9]

Ik citeer dit fragment hier in zijn geheel omdat deze paar regels uit de 13e eeuw het oudste overgeleverde commentaar op de gulden snede verwoorden waarin de auteur niet alleen naar de mathematische eigenschappen van de gulden snede verwijst, maar daar ook een verwondering over uitsprekt die de sfeer van de wiskunde overstijgt. Eigenlijk is dit het beginpunt van de adoratie voor de gulden snede, die in de 21e eeuw tot de dwalingen van Dan Brown heeft geleid. Maar meer dan een punt is het niet: er loopt geen rechte lijn tussen de Euclides-uitgave van Campanus en *De Da Vinci Code*.

De toon van Campanus’ commentaar zal zonder twiifel beïnvloed zijn door wat zijn Arabische voorgangers over Euclides’ proportietheorieën in het algemeen hadden geschreven, maar geen van de Arabische commentatoren had op de gulden snede in het bijzonder de aandacht gevestigd. Bij Pacioli leid-



Hoofdstuk 18 in de *Divina Proportione* toont dat diagonalen van het pentagon elkaar snijden volgens de goddelijke proportie

de de verwondering voor deze proportie tot een heel boek, dat overigens - anders dan zijn eerdere *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità* van 1494 - weinig aandacht had gekregen. Dat eerdere boek was een standaardwerk geworden dat in status wel een beetje te vergelijken viel met de *Elementen* van Euclides. Voor wat betreft het *Divina Proportione*-manuscript van 1498 was die geringe aandacht niet zo vreemd; van die tekst waren slechts drie officiële exemplaren gekopieerd, en het is maar de vraag in hoeverre die door hun adellijke eigenaars ooit gelezen zijn. In 1509 verscheen er echter een gedrukte versie in Venetië, samengebonden met nog enkele andere teksten, waaronder een Italiaanse vertaling van Piero della Francesca's traktaat over de vijf regelmatige lichamen, en een traktaat dat Pacioli aan de architectuur had gewijd.

Smoking gun

Dat geheel verscheen onder de oorspronkelijke titel van het manuscript van 1498: *Divina Proportione*. Maar als er onder die titel een traktaat over architectuur verschijnt, hebben we hier dan niet de *smoking gun* in handen die bewijst dat er in de Renaissance inderdaad sprake was van de cultivering van de gulden snede als esthetisch ideaal? De gedachte is aantrekkelijk, maar de feiten spreken haar tegen. Want het traktaat over de architectuur mag dan wel onder die titel in de openbaarheid zijn gebracht, het gaat helemaal niet over bouwen met de goddelijke proportie als maat. Met welke loep we de tekst ook lezen, Pacioli spreekt niet over architectuur als hij het over

de gulden snede heeft, en hij spreekt niet over de gulden snede als het om architectuur gaat - of je zou die ene zijdelingse verwijzing al als zodanig moeten opvatten waarin Pacioli aanbeveelt een gebouw te versieren met een ornament in de vorm van een van de geometrische lichamen die geconstrueerd zijn met behulp van de verdeling volgens uiterste en middelste reden.

Hij geeft als voorbeeld een gebouw bij Rome dat voorzien was van een icosaeëder, wat tot aandachtige bewondering door filosofen heeft geleid. Wie dit jaar wel eens rond de Amsterdamse Stopera is gelopen heeft kunnen zien dat Pacioli's aanbeveling daar inmiddels is nagevolgd: naast het gloednieuwe standbeeld van Spinoza staat een forse icosaeëder - ongetwijfeld tot groot genoegen van de Amsterdamse filosoof zelf, die immers in zijn *Ethica ordine geometrico demonstrata* had laten weten dat hij de handelingen en verlangens van mensen wilde beschouwen 'alsof er sprake was van lijnen, vlakken, of lichamen'. Maar het idee dat een door mensen ontworpen gebouw zelf volgens de goddelijke proportie geconstrueerd zou kunnen zijn komt niet eens bij Pacioli op, zoals überhaupt de notie 'iets maken met behulp van de gulden snede' in deze tijd nog ondenkbaar is. De goddelijke proportie is object van verheven adoratie, maar ze hoort bij de wereld van de wiskunde, niet bij de wereld van menselijke artefacten. Pacioli's boek is dus inderdaad een *smoking gun* - niet van de gulden snede als esthetisch ideaal bij architecten of andere kunstenaars, maar juist als getuigenis van het ontbreken daarvan.



Het standbeeld van Spinoza in Amsterdam, met icosaeëder

Een alles doordringende natuurwet

De relatie tussen gulden snede en kunst is hier dus totaal afwezig, en dat zal nog eeuwenlang zo blijven. Maar waar en wanneer is dat esthetisch ideaal dan wel in de geschiedenis terechtgekomen, als het in de Renaissance nog niet bestond? Dat gebeurde pas veel later, in het midden van de 19e eeuw. De tegenwoordige cultus rondom de gulden snede gaat terug tot de publicatie van een werk van Zeising in 1854, getiteld *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers, aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt und mit einer vollständigen historischen Übersicht der bisherigen Systeme begleitet*. Adolf Zeising (1810–1876) is de eerste die oppert dat de gulden snede (en hij gebruikt nu ook deze nieuwe term, waarvan hij toegeeft dat de herkomst hem niet bekend is) een morfologisch basisprincipe is dat zowel de natuur alsook de kunst doordrongen heeft. Dat zet hij zeer omstandig uiteen, met als uitgangspunt, zoals de titel al verraaft, het menselijk lichaam. Dat wordt volgens de gulden snede onderworpen aan een minutieuze onderverdeling, en uit de toelichting blijkt dat Zeising gelooft dat die onderverdeling een karakteristiek van het lichaam zelf is. Hij beperkt zich daarbij niet tot de gestalte van de mens; ook van talloze dieren meent hij dat hun ontwerp voldoet aan de proportie van de gulden snede. Een profielwerkstuk over dit thema had hij ongetwijfeld tot tevredenheid van de Rijksuniversiteit Groningen kunnen voltooien. En ook daar blijft het niet bij: in de structuur van kristallen meent Zeising eveneens de werkzaamheid van zijn principe aan te kunnen tonen, en in de fysische geografie herkent hij hetzelfde patroon in de onderverdeling van de continenten door de Golf van Mexico en de Middellandse Zee. Dat ook de

afstanden tussen de planeten zich keurig aan zijn voorschriften houden mag dan al geen verbazing meer wekken.

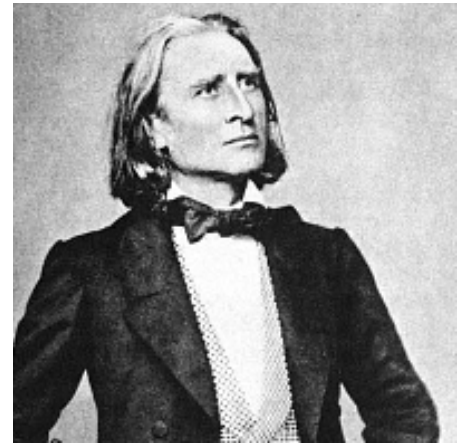
Het ‘volledige overzicht van eerdere proportiesystemen’ dat Zeising de lezers van zijn boek belooft, vertoont een opvallend manco. Zeising bespreekt maar liefst 80 eerdere systemen, die niets met de gulden snede te maken hebben, zoals die van Vitruvius, Alberti en Albrecht Dürer. Daarbij wijdt hij ook enkele regels aan onze eigen Samuel van Hoogstraeten (dankzij de proportievoorschriften in diens *Inleyding tot de hooge schoole der schilder-konst*, 1678), en gaat hij zelfs uitgebreid in op de antropobiologische metingen van Petrus Camper; maar Luca Pacioli, de enige auteur die met zijn *Divina Proportione* als voorganger van Zeising zou kunnen worden aangemerkt, ontbreekt. Ook Johannes Kepler, die in 1611 was begonnen te speculeren over de mogelijkheid dat in het goddelijk bouwplan de gulden snede als archetype van de voortplanting had gediend en die daarmee de eerste was die de gulden snede in verband had gebracht met de natuur, wordt niet als voorloper erkend [10]. Zo kan Zeising volhouden dat hij zelf de ontdekker is van de wonderbaarlijke almacht van deze proportie.

Geheimen van de methode

Maar wanneer is die vonk nu overgeslagen op praktiserende kunstenaars? Bij Zeising zelf heeft de artistieke toepassing van de gulden snede vooral betrekking op beeldende kunst en architectuur, maar al een paar jaar na de verschijning van de *Neue Lehre* vinden we een componist die, naar aanleiding van Zeising's *Neue Lehre*, zijn interesse voor het *gebruiken* van de gulden snede in zijn eigen werk kenbaar maakt. En het is niet de geringste: Franz Liszt schrijft op 6 mei 1859 een brief aan Marie, de dochter van zijn geliefde (prinses Carolyne zu Sayn-Wittgenstein), waaruit ik het volgende citeer:

“Misschien is Zeising bereid om (...) af en toe iets bij te dragen aan de kolommen van het *Neue Zeitschrift* [11]. Ik reken erop dat jij hem daartoe aan zult zetten, en ik reken ook op jou om de geheimen van de *Goldener Schnitt* aan Fainéant [12] uit te leggen - een methode die ik heel graag in mijn eigen composities zou willen gebruiken.”

Dat is een verrassende verklaring, in het handschrift van de componist zelf, en bovendien met een ondubbelzinnige verwijzing naar de persoon van Zeising erbij. De totale afwezigheid van enige referentie aan deze brief in al die boeken waarin beweringen over het gebruik van de gulden snede door kunste-

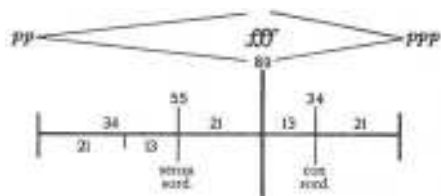


Franz Liszt in 1859, het jaar van de brief aan Marie

naars worden gedaan illustreert nog eens de kloof tussen mythe en werkelijkheid. De brief is in het Frans geschreven, alleen voor de term ‘Goldener Schnitt’ (die op dat moment nog geen gangbare vertaling in het Frans had) bedient Liszt zich van de taal van Zeising's boek. De originele tekst van het manuscript is nooit gepubliceerd; wel is een Engelse vertaling ervan opgenomen in *The letters of Franz Liszt to Marie zu Sayn-Wittgenstein* [13]. Helaas heeft de redacteur, kennelijk geheel onkundig van de cultus van de gulden snede en van het werk van Zeising, de cruciale term vertaald als ‘Golden Model’. Hoewel Klára Hamburger in haar in 1980 verschenen studie over Liszt [14] al wijst op het belang van deze opmerking, wordt de brief aan Marie pas veel later vermeld in de guldensnedeliteratuur - dankzij dezelfde Dénes Nagy die ook de vermelding van de gulden snede in het geometrieboek van Ferdinand Wolff had gevonden [15].

Wat voor contacten had Marie precies met Zeising? Wat heeft ze met het verzoek van Liszt gedaan? We zouden het graag willen weten — maar we zullen er waarschijnlijk nooit achter komen. Kort nadat ze de brief ontving trad Marie in het huwelijk, en de familie van haar echtgenoot was al even weinig ingenomen met de verbintenis tussen Liszt en Maries moeder als de vader van Marie dat was; het huwelijk van haar ouders was nooit ontbonden en prins Zu Sayn-Wittgenstein slaagde erin paus Pius IX ertoe te bewegen de verleende toestemming voor het in Rome geplande huwelijk tussen Liszt en Carolyne weer in te trekken. Dat leidde ertoe dat ook de contacten tussen Liszt en Marie verbroken werden; het is dus ook niet bekend of Zeising ooit van Liszts interesse op de hoogte is geweest.

Wat we nog liever zouden willen weten is: wat voor follow-up heeft Liszt zelf aan zijn interesse willen geven? Wat heeft hij zich überhaupt voorgesteld bij het idee om de gul-



Lendvai's indeling van het eerste deel van Bartók's Muziek voor snaren, slagwerk en celesta

den snede als 'methode' te gebruiken bij het componeren? De weliswaar uitgebreide maar ook nogal onbenullige bespreking van de muziek in de *Neue Lehre* kan hem nauwelijks geïnspireerd hebben. Zeising was weliswaar muzikaal geschoold en zijn vader was beroepsmusicus (en als violist verbonden aan het hof van de hertog van Anhalt-Bernburg), maar de moeizame poging die hij doet om zijn ideeën over 'eenheid in verscheidenheid', en met name over de mannelijke tegenover de vrouwelijke lichaamsbouw in verband te brengen met de muzikale intervalverhoudingen, leidt nergens tot een aanknopingspunt voor een 'methode' bij het componeren. Bij alle voorbeelden die in de guldensnedeliteratuur worden aangehaald als illustratie van de toepassing van deze proportie in de muziek neemt het werk van Liszt een opvallend bescheiden plaats in. Vermeldenswaard is misschien alleen een artikel van de Russische musicoloog L.L. Sabanejev, die in 100 door hem onderzochte composities van Liszt de gulden snede in 87 daarvan meende te ontdekken. Maar aangezien Sabanejev de gulden snede kon aanwijzen in 75% van de in totaal door hem onderzochte 1770 werken van 42 componisten valt die score van Liszt niet

heel sterk op [16].

Fibonacci in de concertzaal

Aan het andere eind van het spectrum staat de muziek van die andere Hongaarse componist, Béla Bartók, die eerst als leerling en later als docent verbonden was aan de door Liszt opgerichte Muziekacademie in Boedapest. In zijn nalatenschap zouden we graag net zo'n brief vinden als Liszt aan Marie schreef, maar helaas: uit Bartók's goed gedocumenteerde leven is geen enkel gesprek of brieffragment bekend waarin hij op welke wijze dan ook refereert aan de gulden snede; hoogstens laat hij zich, in zijn aversie tegen de seriële compositiewijze uit de school van Schönberg, laatdunkend uit over het componeren met behulp van de wiskunde [17]. Ook in de werkversies van zijn partituren ontbreekt ieder spoor van de organisatie van een compositie volgens de gulden snede. Niettemin heeft de Hongaarse musicoloog Ernő Lendvai heel wat voorbeelden uit Bartók's werken naar voren kunnen brengen die de guldensnede verhouding in zijn muziek op onmiskenbare wijze illustreren, in de vorm van onderverdelingen volgens de Rij van Fibonacci, de rekenkundige rij die een sterke verwantschap vertoont met de gulden snede [18]. Lendvai's werkwijze is bepaald niet onomstreden en op de door hem gesuggereerde exactheid van de proporties valt nog wel wat af te dingen, maar dan nog moet je vaststellen dat er nooit eerder in de muziekgeschiedenis composities tot stand zijn gekomen waarin die Rij zo dicht benaderd wordt - niet alleen in een enkele hoofdverdeling, maar ook in de verdere onderverde-

lingen. Een componist die zich dat ten doel zou stellen zou het natuurlijk exacter kunnen doen: in de halve eeuw na Bartók's dood zijn er heel wat stukken gecomponeerd waarbij de Rij van Fibonacci expliciet als structurerend principe is gekozen, precies zoals Le Corbusier dat in de architectuur had gedaan.

Een dergelijk structuurprincipe is nog door niemand aangewezen in de partituren van Franz Liszt. Moeten we ons daarover verbazen? Ik denk het niet. Waarschijnlijk was zijn voorstelling van 'componeren met behulp van de gulden snede' helemaal niet zo concreet. Hij vraagt Marie immers hem 'de geheimen van de gulden snede uit te leggen'; kennelijk weet hij zelf nog niet wat hij ermee aan moet. In zijn creatieve praktijk speelde deze veelgevoerde proportie, zo mogen we aannemen, net zo min een rol als bij Leonardo da Vinci of de bouwers van de piramide van Gizeh. Maar dat zal de dappere gulden snijderij, die overal de 'toepassing' van de goddelijke proportie kunnen aanwijzen, niet stuiten: als de brief van Liszt aan Marie in wat bredere kring bekend wordt, zal er ongetwijfeld gepoogd worden om de daarin uitgesproken intentie ook in het werk van Liszt gerealiseerd te zien. Ongewild illustreren beide Hongaarse componisten nog eens dat er een wereld van verschil ligt tussen het spreken over de gulden snede en het scheppen van werk waarin die proportie kan worden aangewezen. Tegen het ware geloof in de almacht van de gulden snede is zorgvuldig onderzoek van de historische werkelijkheid niet opgewassen; maar laten we toch maar hopen dat de brief nooit onder ogen komt van Dan Brown. . .

Noten

- 1 Zie <http://werkstukpakket-natuurtechniek.kennisnet.nl/deguldensnede>.
- 2 *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*, Waterloo (Canada) 1987.
- 3 *The Shape of the Great Pyramid*, Waterloo (Canada) 2000.
- 4 Dit was weer een bewerking van D. Davidson & H. Aldersmith, *The great pyramid: its divine message*, Londen 1924.
- 5 Dénes Nagy, 'Golden Section(ism): From Mathematics to the Theory of Art and Musicology', Part 2, in *Symmetry: Culture and Science*, Vol. 8, No. 1, 1997, p. 74.
- 6 Dénes Nagy, 'Forma, harmonia, and symmetry (with an appendix on sectio aurea)', in *Symmetry: Art and Science*, 2007 2-4, p. 40.
- 7 Vitruvius' *De architectura libri decem* werden rond 30 v. Chr. geschreven. Een moderne tweetalige uitgave is Vitruvius, *Zehn Bücher über Architektur*, Darmstadt 1981.

- 8 In boek III.1.1.3.

- 9 Campanus maakt deze aantekening bij Boek XIV, st. 10 — dus niet bij de tekst van Euclides zelf (die uit 13 boeken bestaat) maar bij de door commentatoren toegevoegde teksten die in de Renaissance als het 14de en 15de boek van Euclides bekend stonden.
- 10 Wel verwijst Zeising verderop in het boek (p. 424) zijdelings naar de *Harmonices Mundi*, maar niet in verband met de gulden snede.
- 11 Het *Neue Zeitschrift für Musik* was een tijdschrift dat sympathiseerde met de 'Neudeutsche Schule' van Duitse componisten, waarbinnen Liszt een centrale figuur was.
- 12 Fainéant ('Nietsnut') was de familiere naam waarmee Liszt zichzelf aanduidde in de contacten met Marie.
- 13 Vertaald en geredigeerd door H.E. Hugo, Cambridge, Mass. 1953.

- 14 Klára Hamburger, *Liszt*, Boedapest 1980; een Engelse vertaling verscheen in 1987.
- 15 Dénes Nagy, 'Golden Section(ism)', Part 2, pp. 95-98.
- 16 Nagy bespreekt dit artikel in 'Golden Section(ism)', Part 2, pp. 98-101.
- 17 Wel ontdekte Roy Howat in Bartók's nalatenschap een notitie met de indeling van een Turks volksliedje; eenheden van 18 tellen worden hier soms onderverdeeld als 9 + 9 tellen, maar ook als 7 + 11. Los van de melodie schrijft Bartók dat de 7 tellen soms als 3 + 4, en soms als 4 + 3 zijn samengesteld. Deze getallen vormen de aan Fibonacci verwante Rij van Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... Roy Howat, 'Bartók, Lendvai and the principles of proportional analysis', in *Music Analysis*, Vol.2, 1983, pp. 85-86.
- 18 Ernő Lendvai, *Béla Bartók - An Analysis of his Music*, Londen 1971.

Eduard Looijenga

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

E.J.N.Looijenga@uu.nl

Onderzoek Meten van kwaliteit

Dr. Pangloss neemt de maat

De status van een onderzoeker wordt door veel aspecten bepaald. Nu steeds meer wetenschappelijk werk op internet verkrijgbaar is, is de administratie daarvan ook beter geregeld. Wie kijkt er nu niet graag naar lijstjes zoals de top tien van de citatie-index? Eduard Looijenga geeft zijn mening over het beoordelen van collega's.

Ondanks zijn tekortkomingen is *peer review* nog steeds de beste manier om wetenschappelijk werk te beoordelen. Maar adel verplicht en wil deze methode stand houden, dan vereist dit van de kant van deskundigen een serieuze en gewetensvolle inspanning. Want als zij die niet kunnen opbrengen, wie dan wel?

Oordelen en beoordeeld worden

Iedereen heeft in zijn werkzame leven meer dan eens te maken met beoordelingen, aanvankelijk passief, later veelal ook actief. In het wetenschappelijk bedrijf gebeurt dat vaker dan elders, want daar doen zich nu eenmaal veel gelegenheden voor waarbij een keus gemaakt moet worden: allereerst wanneer het om een dienstverband gaat, zoals het bepalen wie een promotieplaats, een postdoc-schap, een vaste positie, een leerstoel krijgt, maar ook bij het beantwoorden van vragen als: wie nodigen we uit als spreker voor een conferentie, wie wordt een beurs, een mooie prijs, het lidmaatschap van een geleerd gezelschap aangeboden? Beoordelingswerk is in onze professie dan ook zo oud als het beroep zelf. En tot voor kort werd het praktisch uitsluitend toevertrouwd aan zijn beoefenaars. Met reden: goede wiskundigen kunnen in het algemeen goed oordelen (een uitspraak die minder tautologisch is dan hij lijkt) of vin-

den elkaar gemakkelijk als er vertrouwen is in elkaars deskundigheid en objectiviteit. En dan kan het ook buitengewoon efficiënt gaan. Een treffend voorbeeld is het Max Planck Instituut für Mathematik te Bonn: ieder jaar vragen circa 150 wiskundigen een bezoek aan (van enkele weken of langer), waarvan ongeveer een derde kan worden gehonoreerd. Het niveau van de aanvragers is hoog en dat maakt de selectie een complexe aangelegenheid. Toch slaagt de desbetreffende commissie (een gezelschap van zo'n tien wiskundigen) deze taak in een dagdeel te verrichten en wel zo dat bijna alle leden na afloop hun beslissing in ieder individueel geval kunnen rechtvaardigen.

De aanleiding voor dit stukje is tweemaal: enerzijds de neiging van de laatste tijd om in zulke zaken grotere bemoeienis toe te staan van niet-deskundigen en anderzijds de (mogelijk schuivende) kwaliteit van wetenschappelijke oordelen door vakgenoten. Deze twee zijn op een voor de hand liggende manier met elkaar te verbinden zonder dat er sprake hoeft te zijn van oorzaak en gevolg.

Een gebed verhoord

Zou het niet mooi zijn als er een eenvoudig algoritme bestond waarmee onmiddellijk de kwaliteit van een individuele onderzoeker is

te bepalen? En zou het niet nog mooier zijn als kwaliteit een ééndimensionaal attribuut is, waardoor de output eenvoudig in een getal is uit te drukken? Welnu, wat ooit een heimelijke wens was van menig bestuurder is sinds een jaar of drie een verhoord gebed: er is zo'n algoritme en die heet de *h-index*, bedacht door de fysicus Jorge E. Hirsch (waar de *h* voor staat weet hij alleen) en gepresenteerd in een artikel uit 2005, *An index to quantify an individual's scientific research output*, PNAS 102 (46): 16569-16572. De definitie is simpel: een onderzoeker heeft *h-index* minstens *n* als deze persoon *n* artikelen geschreven heeft met ieder minstens *n* citaties. Voor iemand wiens werk voornamelijk door wiskundigen wordt geciteerd is dat inderdaad in een paar seconden te bepalen: ga naar *MathSciNet*, rubriek *author citations*, en type de naam in. Tel nu de lijst af totdat het rangnummer het aantal citaties dreigt te overschrijden en dan heb je de *h-index*. Hirsch legt in zijn artikel uit waarom zijn algoritme beter is dan andere conventies. Zo merkt hij terecht op dat het totale aantal citaties van weinig betekenis is als niet ook bekend is hoe die over de publicaties verdeeld zijn. Om maar een voorbeeld te noemen: als twee auteurs hetzelfde totale aantal citaties hebben voor resp. 50 en 100 publicaties, dan is het niet onredelijk te onderstellen dat het werk van de eerste beduidend meer gewicht heeft dan dat van de laatste. Deze tellwijze beperkt verder de bijdrage van boeken (een boek kan deze index met hooguit 1 verhogen en als het maar enigszins een succes is

doet het dat ook). Hirsch schrijft dat voor een *tenure track*-positie aan een “major research university” (en daaronder vallen toch al onze universiteiten) een *h*-index van minstens 12 redelijk is en dat een *full professorship* een *h*-index van tenminste 18 vereist. Een oppervlakkige test leerde mij dat slechts één Nederlandse wiskundige aan het laatste criterium voldoet (L. Peletier met een *h*-index van 22) en dat de daarop volgende waarde (16) door maar drie landgenoten (allen emeriti) bereikt wordt. Dit toont al meteen aan dat deze algoritme voor een publicatiecultuur als de onze, waarbij artikelen hun citaties vaak pas over vele jaren verzamelen, heel onrechtvaardig en misleidend uitpakt voor jonge onderzoekers (dit wordt maar in bescheiden mate gecompenseerd door een ander manco van deze methode: MathSciNet verstrekt alleen de citaties verschenen vanaf 2000 en in sommige gevallen vanaf 1997; bovendien zijn het alleen de citaties voorkomend in tijdschriften). Nadere beschouwing maakt ook duidelijk dat het genoemde kwantitatieve verschil tussen de natuurkunde en de wiskunde een pendant heeft binnen de wiskunde zelf: in sommige deeldisciplines zijn de citatiescores gemiddeld lager zonder dat er reden is om daarin de afspiegeling te zien van een overeenkomstig verschil in kwaliteit. Het blijkt wel een (in de tijd) robuuste maat te zijn, want de periode tussen twee sprongen duurt vaak lang. Ook moet ik bekennen dat als we ons beperken tot senior-onderzoekers die werkzaam

zijn in min of meer hetzelfde vakgebied, het resultaat van deze methode aardig in overeenstemming kan zijn met een evaluatie die op conventionele manier tot stand is gekomen. Maar zelfs als dat betekent dat dit voor vier van de vijf keer het geval is, dan nog schiet deze methode naar mijn mening tekort. Want bedenk wel dat hier gaat om de beoordeling van een individu en niet om die van een groep waarvoor middelingsprocedé's een zuiverend effect plegen te hebben. (Een opmerkelijk voorbeeld om in het oog te houden is de Fields laureaat Laurent Lafforgue, wiens *h*-index 5 is.) Mijn conclusie luidt dan ook dat voor het beoordelen van wiskundigen deze *h*-index onbruikbaar is.

Een koninklijke weg

Hoe dan wel? Mijn antwoord zal onder vakgenoten (waartoe de lezer hoogstwaarschijnlijk behoort) weinig opzien baren: ik vind dat alleen de beroepsgroep zelf dat op een verantwoorde manier kan doen. Maar het adjectief in het laatste zinsdeel heeft dan wel gevolgen, zeker als we onze positie tegenover boekhoudende buitenstaanders wensen te versterken. Het vereist bijvoorbeeld dat de beoordelaar zich enigszins verdiept in het werk van de beoordeelde. Daarbij kan het MathSciNet van dienst zijn op een manier die wat inhoudelijker is dan wat ik zojuist beschreef, namelijk door eenvoudig de reviews van alle artikelen van de persoon in kwestie te lezen. Dit kost niet veel tijd en is meestal zeer informatief.

(MathSciNet verstrekt trouwens ook andere interessante gegevens, zoals het totale aantal *verschillende* citeerders, wat ons iets vertelt over de verspreiding van het werk.) En zelfs als het werkterrein voor de referent relatief onbekend is, dan nog loont het vaak voor de laatste om de artikelen er zelf eens bij te nemen, al was het maar om in een enkel geval de inleiding te lezen. Mijn ervaring is dat kwaliteit op deze manier bijna altijd te herkennen valt. De andere gebruikelijke indicatoren kunnen en horen natuurlijk ook in aanmerking genomen worden: de reputatie van de tijdschriften waarin is gepubliceerd, bijzondere voordrachten op uitnodiging, ontvangen internationale prijzen, een artikel dat een *Featured Review* ten deel is gevallen en dergelijke. Dit alles lijkt een open deur, en voor de beoordelende gezelschappen waar ik deel van uit heb meegemaakt was het dat meestal ook. Maar als ik mij bepaal tot mijn ervaringen in eigen land, dan zijn die toch gemengd. Laat ik het maar zo formuleren: zich voor een oordeel baseren op de Google Scholar score, of in het feit dat volledige objectiviteit nu eenmaal een illusie is reden zien om een serieuze inspanning achterwege te laten, dat is niet wat je noemt de koninklijke weg. Zulk een gemakzuchtige benadering is niet te rechtvaardigen, zeker niet als het om personen gaat en al helemaal niet als we de stelling willen verdedigen dat het systeem van peer review ondanks zijn tekortkomingen superieur is aan het oordeel van leken. ←

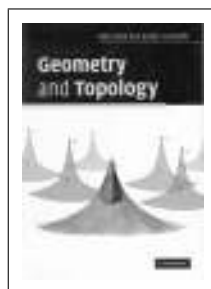


Dr. Pangloss uit *Candide* van Voltaire, hier als decorstuk bij een uitvoering van Bernsteins musical. Illustratie: Eloi Meylan (Gymnase de Chamblandes à Pully)

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Adres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: wgreview.win@tue.nl



Miles Reid and Balázs Szendrői

Geometry and Topology

Cambridge: Cambridge University Press, 2005

196 p., prijs £ 26,99

ISBN 0-521-61325-6

De voorloper van dit boek is jarenlang gebruikt als handleiding bij een cursus aan de universiteit van Warwick voor eerste- en derdejaars studenten wiskunde en mathematische fysica. De benodigde voorkennis is minimaal: analytische meetkunde, lineaire algebra en verder enkele onderwerpen (waaronder het Lorentz inproduct voor de bespreking van de hyperbolische meetkunde) die kort en krachtig worden behandeld in de appendix.

Het boek is geschreven in de vorm van een collegedictaat, zonder veel opsmuk. Dat vind ik een pluspunt. In overzichtelijke vorm worden vele onderwerpen uit de meetkunde besproken. Het boek is rijkelijk voorzien van fraaie en duidelijke tekeningen. Behalve de gewone euclidische meetkunde passeren ook de bolmeetkunde, hyperbolische meetkunde, affiene meetkunde, projectieve meetkunde, transformatiegroepen met toepassingen in de mathematische fysica en een beetje topologie de revue. De topologie komt er met ruim 30 van de 200 bladzijden een beetje bekaaid vanaf, maar zo erg is dat niet, want er zijn al genoeg goede inleidingen in de topologie. Door een bijzonder handige rangschikking van de onderwerpen komt er redelijk veel stof uit de genoemde onderwerpen met bewijs en al over het voetlicht. Door het hele boek verspreid zijn er leuke en instructieve opgaven. Zo ontstaat er een pointillistisch panorama van de meetkunde.

Door de heldere uitleg, fraaie voorbeelden en minimale voorkennis is dit een uitstekend boek voor een eerste kennismaking met de meetkunde.

Jan Aarts



Alexander Ivanov

J₄

Oxford Mathematical Monographs

Oxford: Oxford University Press, 2004

233 p., prijs £84.00

ISBN 0-19-852759-4

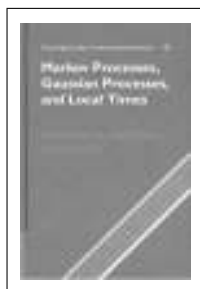
The finite simple group of order 86775571046077562880 known as the fourth Janko group, J_4 for short, is the subject of this book. Existence of this group was predicted by Zvonimir Janko in 1976 and J_4 was first constructed in 1980 by Benson, Conway, Norton, Parker and Thackrey as a group of 112×112 matrices over the field of 2 elements. This construction made heavy use of a computer. In 1990 the author and Meierfrankenfeld saw a way to obtain a computer-free construction of J_4 . The construction was completed and published in 1999. The book under review is essentially based on this project. The group is characterized as the unique group acting arc-transitively on a finite connected graph of valency 31 satisfying additional local properties.

Let V be a 10-dimensional vector space over the field of 2 elements equipped with a quadratic form of maximal Witt index. Consider the commutator subgroup $\Omega_{10}^+(2)$ of $SO_{10}^+(2)$, which acts transitively on the set of maximal singular subspaces. Let H_0 be the stabilizer in $\Omega_{10}^+(2)$ of a maximal singular subspace, and let H_1 be the stabilizer of a pair of maximal singular subspaces, one of which is stabilized by H_0 , that meet in a sub-hyperplane. Let $H_{01} = H_0 \cap H_1$, then H_{01} is of index 31 in H_0 and of index 2 in H_1 . The group H_1 contains an element τ of order 2, interchanging the two singular subspaces, which has the property that it does not normalize any proper subgroup of H_{01} which is normal in H_0 . Now forget about the group $\Omega_{10}^+(2)$ and just consider the amalgam (H_0, H_1, H_{01}) . It turns out that the group H_{01} admits another automorphism of order 2 with the same property as τ . Hence, besides (H_0, H_1, H_{01}) there is one other amalgam (G_0, G_1, G_{01}) with $G_0 = H_0$, $G_{01} = H_{01}$ and with G_{01} of index 2 in G_1 , and such that no proper subgroup from G_{01} is normal in both G_0 and G_1 . The purpose of this book is to show how this leads to the group J_4 .

The first two chapters are introductory and, as warm-up, it is shown how the amalgam (H_0, H_1, H_{01}) leads to $\Omega_{10}^+(2)$. In the following six chapters the author takes us on his quest for J_4 . The proof is a careful analysis of the amalgam and involves techniques from representation theory, cohomology theory and combinatorial group theory. At the end of each chapter some exercises are given. There is also an additional chapter with historical notes and there are two appendices on terminology and related (background) results.

This book is of interest to anyone who wants to know more about amalgams and the geometry behind sporadic simple groups.

John van Bon



Michael Marcus, Jay Rosen
Markov processes, Gaussian processes, and local times
Cambridge Studies in Adv. Mathematics 100
 Cambridge: Cambridge University Press, 2006
 620 p., prijs £ 54,00
 ISBN 0-521-86300-7

Het centrale thema van dit boek is de relatie tussen zogenaamde 'local times' (waaronder men, ruwweg gesproken, de afgeleide van een 'occupation measure' verstaat) van een zekere klasse van Markov-processen met geassocieerde Gaussische processen. De gedachte is dat met deze relatie alle kennis over Gaussische processen gebruikt kan worden om nieuw licht te werpen op eigenschappen van local times. Aan de andere kant geeft de opzet van dit boek de auteurs de gelegenheid niet-standaard (en zelfs ook nieuwe) resultaten voor Gaussische processen te presenteren.

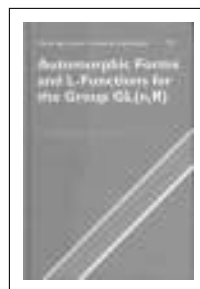
Een fundamentele rol in het boek wordt gespeeld door een familie van resultaten die bekend staat als 'Ray-Knight theorems'. In hun traditionele vorm laten zulke stellingen het verband zien tussen de local times van Brownse beweging en de kwadraten van onafhankelijke Brownse bewegingen. De auteurs maken inzichtelijk hoe dit resultaat uitgebreid kan worden, voortbouwend op resultaten van onder anderen Eisenbaum en Dynkin, tot een relatie tussen sterk-symmetrische Markov-processen en geassocieerde Gaussische processen.

Om deze theorie op te bouwen is een breed scala van sample-path resultaten voor Gaussische processen nodig. Hierbij wordt in een drietal hoofdstukken aandacht besteed aan onder meer de klassieke ongelijkheden (zoals die van Borell), en de condities die ontwikkeld zijn voor continuïteit en begrensdeheid van sample-paden. Het betekent dat we pas in hoofdstuk 8 (van de 13) aanbellen bij het daadwerkelijke hart van het werk, namelijk de generalisaties van Ray-Knight (waarbij zowel de traditionele combinatorische bewijzen gegeven worden, als nieuwe elegante versies), en de implicaties voor de local times van sterk-symmetrische Markov-processen. In het bijzonder wordt een aantal sample-path eigenschappen voor local times behandeld, zoals de hierboven genoemde continuïteit en begrensdeheid.

De laatste hoofdstukken van het boek gaan in op enkele specifieke aspecten van local times, waaronder de p -variatie van de local times van symmetrische stabiele processen (via op zichzelf al interessante resultaten over de p -variatie van fractionele Brownse beweging), en een analyse van de meest bezochte toestanden. Daarna volgt een hoofdstuk dat ingaat op local times voor diffusies, waarna het boek wordt besloten met een nadere karakterisering van de geassocieerde Gaussische processen.

Het boek is fraai opgezet, volledig self-contained en goed leesbaar. Het is duidelijk dat het onderwerp wat specialistisch van aard is — anders dan de titel doet vermoeden gaat het niet zozeer over Markov-processen, Gaussische processen en local times, maar veel meer over de relatie tussen deze drie noties. Mijn indruk is dat, ondanks dat ik het boek beschouw als een aanwinst voor het vakgebied, het publiek van dit boek (zeker binnen ons land) relatief beperkt zal blijven, vanwege zowel het niveau als de specifieke inhoud.

Michel Mandjes



Dorian Goldfeld
Automorphic Forms and L-Functions for the Group $GL(n, \mathbb{R})$
Cambridge Studies in Advanced Mathematics 99
 Cambridge: Cambridge University Press, 2006
 493 p., prijs £ 57,00
 ISBN 0-521-83771-5

De theorie van automorfe vormen op $GL(n, \mathbb{R})$ is een veralgemening van de theorie van modulaire vormen op $SL(2, \mathbb{R})$, maar is voor $n \geq 3$ van een totaal andere aard. De oorspronkelijke theorie van modulaire vormen, ontstaan in de 19de eeuw en verder ontwikkeld door Hecke en anderen in de 20e eeuw, maakt sterk gebruik van de functietheorie omdat $SL(2, \mathbb{R})/U(2)$ een hermitesch symmetrisch gebied is, het bovenhalvlak van het complexe vlak.

Rond het midden van de vorige eeuw heeft Maass een nieuw aspect aan die theorie toegevoegd door ook niet-holomorfe modulaire vormen te bekijken, bijvoorbeeld functies die invariant zijn onder $SL(2, \mathbb{Z})$ en eigenfuncties zijn van de (hyperbolische) Laplace-operator. Daarvoor zijn er weer Hecke-operatoren en L -functies, Eisensteinreeksen en is er weer een omkeringsstelling die zegt dat bepaalde Dirichletreeksen met een functionaalvergelijking van Maassvormen komen. Alhoewel we weten dat de ruimten van Maassvormen eindig-dimensionaal zijn, zijn deze vormen tamelijk mysterieus. Het is bijvoorbeeld een niet-triviaal

feit dat er oneindig veel even Maassvormen op $SL(n, \mathbb{Z})$ bestaan; voor $n = 2$ liet Selberg dit zien, voor $n > 2$ is dit een recent feit.

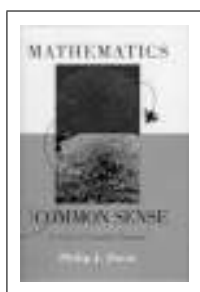
Voor $n > 2$ is de theorie van automorfe vormen op $SL(n, \mathbb{Z})$ een generalisatie van de theorie van niet-holomorfe vormen van Maass. Een belangrijk nieuw aspect voor $n > 2$ is dat de groep $SL(n, \mathbb{Z})$ voor $n \geq 3$ een stuk gecompliceerder is dan voor $n = 2$ en dat blijkt duidelijk voor wie het boek openslaat. Het staat vol met grote matrices en matrixidentiteiten. Dit en het feit dat de auteur weinig bekend wil veronderstellen maken dat het een kloek boek is geworden met bijna 500 pagina's dat gelezen kan worden zonder naar andere bronnen te wijzen.

Het lijkt me uitstekend leesbaar voor een beginnende promovendus met belangstelling in deze richting. Grosso modo begint de auteur met $SL(2, \mathbb{Z})$, behandelt daarna $SL(3, \mathbb{Z})$ en gaat daarna door met het algemene geval. Doordat de auteur zich beperkt tot niveau 1 blijven de lezer de nodige algemeenheden bespaard en kan de auteur tamelijk direct op de resultaten afgaan. Vermeldenswaard zijn een nieuw bewijs voor de multipliciteit-1 stelling en de omkeringsstelling voor $GL(3)$. Gezien de achtergrond van de auteur zal de aandacht voor resultaten uit de analytische getaltheorie, zoals Siegel-nulpunten niet verbazen. Het feit dat automorfe representaties ontbreken is in lijn met deze opzet van de auteur. Het boek eindigt met een korte bespreking van Langlands-functorialiteit.

Een belangrijk aspect van het boek is dat het boek een stel Mathematica functies (het 'GL(n)-pakket') biedt die het mogelijk maken de stof van ieder hoofdstuk ook met computeralgebra in de praktijk te brengen. Het boek wordt gecompliceerd met een handleiding van Kevin Broughan voor dit GL(n)-pakket.

Het ligt voor de hand dit boek te vergelijken met dat van Bump (*Automorphic Forms and Representations*) dat meer aandacht aan de representatietheorie geeft. Beide boeken completeren elkaar goed. Dit boek van Goldfeld kan ik zonder meer aanbevelen.

Gerard van der Geer



Philip J. Davis
**Mathematics and Common Sense
A Case of Creative Tension**

Wellesley MA: A.K. Peters, Ltd., 2006

242 p., prijs \$ 39.00

ISBN 1-56881-270-1

Philip Davis, co-auteur van de bestseller *The Mathematical Experience* uit 1981, beantwoordt in dit boek vragen over wiskunde in de vorm van 33 korte hoofdstukjes. Het is op een breed publiek gericht. De vragen variëren van *What is Mathematics?*, *What is Mathematical Intuition?*, *If Mathematics Says "No" Does It Really Mean It?* tot *When Is a Problem Solved?* en *What Is Meant by the Word "Random"?* Op het oog een aantrekkelijk programma, maar de inhoud valt wat tegen. De stukjes zijn te kort om werkelijk ter zake te komen. Wel is er een overvloed aan *Further Reading* suggesties aan het eind van elk hoofdstuk, maar daar schiet de gemiddelde leek weinig mee op.

Mijn belangrijkste bezwaar is dat de tekst nergens prikkelt of

uitdaagt. Het zijn allemaal brave maar saaie verhandelingsgetjes, die de kenner vervelen en de leek niet veel wijzer maken. Geen aanrader dus.

Jan van de Craats



H. Salzmann, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen

**The Classical Fields — Structural
Features of the Real and Rational
Numbers**

Enc. of Mathematics and Its Applications 112

Cambridge: Cambridge University Press, 2007

401 p., prijs £ 64,00

ISBN 0-521-86516-6

De klassieke lichamen die in de titel van dit boek bedoeld worden zijn de lichamen van de reële, complexe, rationale en p -adische getallen, en in deze volgorde komen ze aan de orde. Ook eindige lichamen kunnen als voorbeelden van klassieke lichamen worden beschouwd, maar daar wordt geen aandacht aan besteed omdat dat zuiver algebraïsche structuren zijn. In de wel behandelde lichamen zijn er namelijk naast de algebraïsche nog andere structuren: in elk geval is er sprake van metrieken, en topologieën, en soms ook van een ordening. En dat is met name het doel van het boek: weergeven welke interacties er in de verschillende systemen tussen de diverse structuren zijn.

Het eerste hoofdstuk is veruit het grootste, beslaat bijna de helft van het boek, en gaat geheel over de reële getallen. Het gaat daarbij niet, zoals je eigenlijk zou verwachten, over constructies voor de reële getallen; deze reële getallen worden als een gegeven beschouwd. Verderop in het boek worden op enkele plaatsen kort mogelijke definities van de reële getallen gegeven, maar met betrekking tot dit aspect wordt voornamelijk naar de literatuur verwezen. De optelgroep van de reële getallen wordt bekeken als een geordende groep, maar ook als een topologische groep. Het lichaam $\mathbb{R}$ wordt als topologisch lichaam beschouwd, en $\mathbb{R}$ wordt als meetruimte onderzocht. Dit alles gelardeerd met tal van bekende stellingen met betrekking tot de verschillende aspecten. De laatste paragraaf van dit eerste hoofdstuk gaat over de complexe getallen, en dit is tevens de enige keer in het boek dat deze aan bod komen. Deze worden dus zeer karig behandeld, en het argument daarvoor is dat veel van de onderzochte eigenschappen volgen uit, of te vertalen zijn naar eigenschappen van de reële getallen.

Het tweede hoofdstuk gaat over niet-standaardanalyse, en geeft onder andere een constructie van $\mathbb{R}$ via een 'ultrapower' van $\mathbb{Q}$. Ook hier gaat het in feite niet om de constructie van $\mathbb{R}$, maar om te demonsteren van hoe via non-standaardanalyse bepaalde stellingen op een andere, soms eenvoudiger manier bewezen kunnen worden. Hierna komen in hoofdstuk 3 de rationale getallen aan de beurt. Het argument dat gebruikt wordt om eerst de reële getallen, en daarna pas de rationale getallen te behandelen is wel aardig: in veel opzichten zijn de reële getallen eenvoudiger van structuur dan de rationale. Als voorbeelden worden de theorie van de kwadratische vormen over deze lichamen, en de topologieën genoemd. In dit hoofdstuk speelt hetzelfde als in het eerste: vrijwel geen aandacht voor een constructie van $\mathbb{Q}$, bijvoorbeeld uitgaande van $\mathbb{Z}$ met de bekende eigenschappen, maar ook hier worden de algebra, ordening en topologie uitvoerig bekeken. Er komen in dit hoofdstuk wel verschillende getal-theoretische ei-

genscapen aan bod. Zo wordt er op een gegeven moment bewezen dat de vermenigvuldigingsgroep van de positieve rationale getallen een vrije abelse groep met rang $\aleph_0$ is, en daarvoor is nodig dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Van deze stelling staan er in dit hoofdstuk dan zeven verschillende bewijzen.

Hoofdstuk 4 is een algemeen hoofdstuk over completering van topologische groepen, ringen en lichamen, dit ter voorbereiding van het laatste hoofdstuk over p -adische getallen. In dit laatste hoofdstuk wordt wel uitvoerig ingegaan op een constructie van $\mathbf{Q}_p$: de standaard constructie als completering uitgaande van de p -adische metrie in $\mathbf{Q}$. Ook hier veel aandacht voor de algebraïsche en topologische structuur, en daarnaast komt ook de ring $\mathbf{Z}_p$ van de p -adische gehele getallen uitvoerig aan bod. Er wordt onder andere aandacht geschonken aan kwadraten en kwadratische vormen over $\mathbf{Q}_p$, dit met name ook om verschillen met $\mathbf{R}$ te illustreren.

Het boek eindigt met een appendix met wat definities van en feiten over ordinaal- en kardinaalgetallen, topologische groepen, lokaal compacte topologische abelse groepen en lichamen.

Vrijwel elke paragraaf in het boek wordt afgesloten met enkele vraagstukken; voor elk vraagstuk is achterin het boek een oplossing of een aanwijzing gegeven. Het boek bevat veel informatie, en dan met name over de reële getallen. De opzet is in het algemeen zeer abstract. Als leerboek is het, naar mijn idee, ondanks de aanwezigheid van de vraagstukken, niet geschikt. Voor wie de nodige voorkennis al heeft kan het uitstekend dienen als naslagwerk, of om nieuwe dingen te ontdekken. Het is deel 112 in de serie *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, en daar-in lijkt het me uitstekend op zijn plaats.

Bram van Asch



Rick Durrett

Random Graph Dynamics

Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics 20

Cambridge: Cambridge University Press, 2007

212 p., prijs £ 41,00

ISBN 0-521-86656-1

Random graph theory has been a lively research area ever since the seminal work on the so-called classical or Erdős-Rényi random graph by Erdős and Rényi around 1960. In this model, we start with a fixed number of vertices, and independently draw each possible edge, independently of the other edges, with a fixed edge probability p . The work by Erdős and Rényi involved the structure of the connected components in the resulting graph, as well as the occurrence of special subgraphs, Hamilton cycles, etc., and has inspired a tremendous amount of subsequent work in the 50 years following its publication. This subsequent work was performed to a large extent by the discrete mathematics community, and its principal goal was to investigate the role of randomness in graphs as well as to prove results in deterministic graph theory using the so-called *probabilistic method*. Thus, it was not the principal aim to model real-life networks.

In the past decades, real-world examples such as the Internet, social networks, collaboration networks, and the World-Wide Web, have attracted enormous attention, and the empirical findings have shown fascinating features: Many real networks are

small worlds, in the sense that most pairs of vertices are connected by relatively short paths. For social networks, this is popularized by the phrase 'Six degrees of separation'. More remarkable, many real networks are scale free, which means that the number of vertices of degree k is approximately proportional to $k^{-\tau}$ for some $\tau > 1$. Since classical random graphs do not have both these features, the empirical findings have initiated the study of rather different random graph models. The empirical findings also attracted a wider community to the study of random graphs, consisting of theoretical physicists, mathematical statistical physicists, theoretical biologists and probabilists, each contributing their own sets of paradigms and techniques, as well as their own level of rigor. As a result, the field is flourishing.

The book under review is the first survey of the results obtained before 2006, in the various models proposed for real networks, from a probabilistic point of view. The book also covers the study of random processes on random graphs. This topic is of interest, for example, due to the fact that diseases and computer viruses spread using the network topology of social or computer networks.

The book starts by giving an excellent introduction to the empirical findings of real networks. This part is very nicely written, covering the many Nature and Science publications appearing around 2000, the claims that were made and how they ought to be taken with a grain of salt. The book continues to cover the main results in various random graph models, including the Erdős-Rényi random graph, but also the more recent random graph models for scale-free networks, such as the configuration model, inhomogeneous random graphs and preferential attachment models. The author focuses on the connectivity properties of the random graphs involved (e.g., the size of the largest connected component), distances in these random graphs, and the behavior of random walks and other stochastic processes on them. The author can be recommended for his choice of the relevant papers in the area, as well as for the enthusiasm which is apparent when reading the material. Many of the interesting problems still open in 2006 have been explicitly written down, which shall be a source of inspiration for the random graphs community.

A few notes of caution. The field of random graphs moves at incredible speed, and thus any book written on the subject is bound to be incomplete and to become outdated quickly. Writing a book on random graphs is like trying to shoot a moving target, but this should not refrain one from trying! The fact that the field moves fast is also apparent in the book, as many of the conjectures have been proved in the mean time (for example, the conjecture on page 6, which is reformulated as Conjecture 3.3.1 on page 82, has been solved by Svante Janson). Further, I found some proofs to be on the quick side and would have welcomed more details occasionally. Finally, not all typos have been removed from the text during the final editing.

Remco van der Hofstad

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is December 1, 2009.

Problem A (folklore)

Let k be a non-negative integer. Let $S \subset \mathbf{Z}$ be a set consisting of $2^{k+1} - 1$ integers. Show there exists a subset $T \subset S$ of cardinality 2^k such that the sum of the elements of T is divisible by 2^k .

Problem B (folklore)

Find all functions $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ such that

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x))$$

for all x and y in $\mathbf{R}_{>0}$.

Problem C (folklore)

Let V be an infinite-dimensional vector space. Show that the dimension of the dual space V^* equals the cardinality of V^* .

Edition 2009-1 We received solutions from Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), Ladislav Matejíčka (Bratislava), Alex Heinis (Hoofddorp), Thijmen Krebs (Nootdorp), Louis Maassen (Milsbeek), Pieter de Groen (Brussel), studentenvereniging PRIME (Gent), Floor van Lamoen (Goes), Johan de Ruiter (Leiden), Sep Thijssen (Nijmegen), Noud Aldenhoven (Nijmegen), and Jaap Spies.

Problem 2009-1/A (folklore) Let s be a real number. Find all continuous functions $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ that satisfy

$$f(xy) = f(x)^{y^s} f(y)^{x^s}$$

for all x and y .

Solution We received correct solutions from Tejaswi Navilarekallu, Ladislav Matejíčka, Alex Heinis, Thijmen Krebs, Louis Maassen, and Pieter de Groen. All received solutions were similar to one another and to the one we present here. The book token goes to Louis Maassen (by random draw).

First we prove the following claim: if $g : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ is a continuous functions satisfying $g(xy) = g(x)g(y)$ for all x and y then there exists a real number c such that $g(x) = x^c$. Indeed, let $c \in \mathbf{R}$ be such that $g(2) = 2^c$. The multiplicativity of g then implies that

Redactie:

Lenny Taelman

Ronald van Luijk

Johan Bosman

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

$g(2^r) = (2^c)^r = (2^r)^c$ for all rational numbers r . Using the continuity of g one concludes that $g(x) = x^c$ for all positive real numbers x , which proves the claim. Now consider the function

$$g : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0} : x \mapsto \exp(x^{-s} \log(f(x))).$$

One verifies that $g(xy) = g(x)g(y)$ for all x and y , so by the above claim it follows that $g(x) = x^c$ for some real number c . This shows that f is necessarily of the form

$$f(x) = x^{cx^s},$$

and conversely, for every c this function satisfies the required conditions.

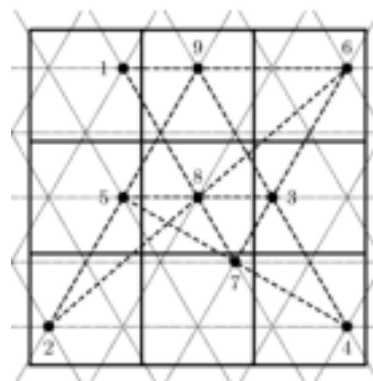
Problem 2009-1/B (proposed by Lee Sallows) In the accompanying picture, nine numbered counters occupy the cells of a 3×3 board so as to make a magic square. They form 8 collinear triples, and each triple yields the same sum 15.



Place nine counters, numbered 1 through 9, on the same board, again one in each cell, so that they form 8 new collinear triples, but now showing a common sum of 16 rather than 15.

Solution This problem was solved by Thijmen Krebs, PRIME, Floor van Lamoën, Johan de Ruiter, Sep Thijssen, Noud Aldenhoven, and Tejaswi Navilarekallu. Several others claimed to be able to prove the proposed task was impossible. The key point was to realize that the counters are not required to be placed in the center of their squares. Thijmen Krebs — who receives the book token for his solution — solved the problem by transposing a hexagonal lattice on a square lattice:

In the complex plane, let the vertices of the center square be $\frac{3}{4}(\pm 1 \pm i)$. Then for small enough counters, we can place the counters on the hexagonal lattice generated by 1 and $e^{\pi i/3}$ as follows:



Oplossingen

| Solutions

Problem 2009-1/C (folklore) If n is a non-negative integer define $a(n)$ to be the number of decimal digits of 2^n that are larger than or equal to 5. For example $a(8) = 2$. Evaluate the infinite sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{2^n}.$$

Solution This problem was solved by Tejaswi Navilarekallu, Sep Thijssen, and Thijmen Krebs. Benne de Weger and Jaap Spies confirmed to us that this problem is indeed folklore and has previously appeared in several problem sections including our own! The following elegant solution is by Sep Thijssen, who receives the book token for his answer.

For a natural number m , let $s(m)$ denote the sum of all decimal digits of m ; keeping track of the carries in the addition of m to itself, we find $2s(m) - s(2m) = 9b(m)$, where $b(m)$ is the number of digits of m that are at least 5. As $a(n) = b(2^n)$ by definition, we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{2^n} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2s(2^n) - s(2^{n+1})}{2^n} = \frac{2}{9} s(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s(2^{n+1})}{9 \cdot 2^n} = \frac{2}{9},$$

where the second equality follows from the fact that the second expression can be viewed as a telescoping series.

Using a similar argument Sep Thijssen shows that for all positive real numbers $x \in [0, 10)$ we have that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b(\lfloor 2^n x \rfloor)}{2^n} = \frac{2x}{9},$$

where $\lfloor z \rfloor$ denotes the largest integer smaller than or equal to z .

