

Inhoud | Contents

- 74 Colofon
- 75 Redactioneel *Ferdinand Verhulst*
- 76 Agenda
- 78 Nieuws

Oratie | Inaugural lecture

- 84 Het meten van dubbelzinnigheid *Gunther Cornelissen*

Onderzoek | Research

- 94 On the theorem of Pythagoras *Edsger Dijkstra* (met introductie door *Klaas Pieter Hart*)
- 116 Een kwart eeuw iteratieve methoden *Kees Vuik*

Geschiedenis | History

- 126 Publieke werken: Freudenthal's som-en-productraadsel *Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck, Rineke Verbrugge*

Onderwijs | Education

- 112 Verder met het wiskundeonderwijs *Dirk Siersma*
- 124 Krijgen we de klas gelukkig? *Petra Hendrikse, Nellie Verhoef*
- 132 Hoe ontstaat een wiskundemethode? *Nellie Verhoef*

Evenementen | Events

- 83 Het 45ste Nederlands Mathematisch Congres *Nellie Verhoef, Ferdinand Verhulst*
- 100 Natuur, Leven en Technologie, een nieuwe toekomst voor het wiskundeonderwijs? *Nellie Verhoef*

Boeken | Books

- 102 Vanuit het gezichtspunt van de muziek *Derk Pik*
- 137 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 91 De overval: Fox-IT *Matthijs Coster, Bart Jacobs, Klaas Landsman*
- 111 De favoriet van Eric Maskin *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
- 114 Wiskundig werktuig: The devil's guide to citing the literature *Dan Bernstein*
- 134 In de verdediging: rubriek voor proefschriften *Geertje Hek*
- 143 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
naw@math.leidenuniv.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Judi Romijn (judi@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (c.c.c.j.kalle@uu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureauredactie

Floris Olsthoorn
Harm de Vries

Medewerkers

Matthijs Coster (Min.Def.), Jan van de Craats (UvA),
Hans Cuypers (TU/e), Geertje Hek (UvA), Teun
Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van
Luijk (UL), Hans Melissen (TUD), Hans Sterk (TU/e),
Lenny Taelman (UL), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Math matique de France*, the *Gesellschaft f r Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Gert Vegter (RUG, ondervoorzitter), Rob van der Mei (CWI en VU, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Iris van Gulik - Gulikers (SLO), Klaas Pieter Hart (TUD), Arjen Sevenster, Herman te Riele (CWI)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	07-09-2009	–
4	07-12-2009	27-07-2009
1	08-03-2010	26-10-2009
2	07-06-2010	25-01-2010

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Van rechthoekige driehoeken en aangelegene vierkanten bouwt men Pythagorasbomen. Deze sculptuur maakte Koos Verhoeff in 3D (<http://wiskunst.dse.nl/pythagorasboom.html>, foto: Ben Bergmans). In dit nummer: de boom, stelling en stemming van Pythagoras op pagina's 82, 94 en 102.

Woelige tijden

Begin februari was ik op de jaarlijkse Nationale Wiskunde Dagen die worden georganiseerd door het Freudenthal Instituut. Elke keer als ik die bijwoon, word ik weer meegesleept door het enorme enthousiasme van de organisatoren en de circa zeshonderd deelnemers. Interessante workshops, mooie algemene voordrachten, veel informatie en contacten. Hoe valt dat te rijmen met de “grote onrust in het wiskunde onderwijs” die in de kranten met enige regelmaat wordt gesignaleerd? En nostalgische uitspraken als “vroeger was alles beter” of “de mooiste opleiding die er ooit geweest is, was de hbs-b”. Gelukkig lijkt het er op dat deze ‘onrust’ tot een bevredigende finale heeft geleid. De staatssecretaris, mevrouw van Bijsterveldt, heeft in een brief d.d. 20 februari 2009 aan de Tweede Kamer gemeld dat de aangepaste voorstellen van de vernieuwingscommissie cTWO haar instemming hebben. Tevens zegt ze blij te zijn dat het mogelijk is gebleken tot overeenstemming te komen over de ontwikkeling van de wiskunde in vwo en havo. Daarbij doelt ze op de strijdpunten tussen de Resonansgroep en cTWO die voor een groot deel over rekenen, algebraïsche vaardigheden en aansluitingsproblemen gaan; zie de artikelen van onze redacteurs in het maartnummer en het onderwijsnieuws in het huidige nummer. Daarmee is de strijdbijl begraven.

Tevredenheid alom of toch tijd voor een post mortem? Ik geloof allebei. Natuurlijk is het goed dat er een compromis is gesloten, de standpunten leken bij de exponenten van de discussie onnodig ver uit elkaar te liggen. Wel was het opvallend dat veel docenten hoger onderwijs de bezwaren van de Resonansgroep deelden, met uitzondering natuurlijk van een groot deel van de wiskunde didactici. Dat wijst op het bestaan van een serieuze tegenstelling die we niet moeten toedekken, maar moeten proberen op te lossen. Universiteitswiskundigen worden door de didactici nog al eens weggezet als ‘wereldvreemde, in ivoren torens levende lieden’. Daarbij wordt ontkend dat deze wiskundigen de dragers en hoeders van het vak zijn en bovendien dat de docenten in het hoger onderwijs als eersten de resultaten ervaren van het voorgaande onderwijs. Dat geeft behoorlijk veel recht van spreken, lijkt me. Anderzijds hebben de didactici de moeilijke taak om het onderwijs te vernieuwen in een sterk veranderende samenleving. Om op die veelgeprezen hbs-b terug te komen: natuurlijk gaf deze unieke schoolvorm in de negentiende en twintigste eeuw aan brede lagen van de bevolking een kans op goed voorgezet onderwijs. Maar de maatschappelijke omstandigheden zijn definitief gewijzigd. Er is nu een andere samenstel-

ling van de bevolking, er zijn andere verwachtingspatronen ten aanzien van onderwijs en carrière. In 1955 bijvoorbeeld, waren er zestigduizend universiteit- plus hbo-studenten. Dat aantal loopt nu tegen de zeshonderd duizend. Een van de Lissabondoelstellingen in het jaar 2000 is dat 50% van de bevolking in 2010 hoger onderwijs zou moeten hebben gevolgd. Dat vraagt niet alleen om een ander soort onderwijs, maar die enorme schaalvergroting brengt aansluitingsproblemen met zich mee. Zo hadden in het jaar 1957–1958 de eerstejaars wis- en natuurkunde aan de UvA gemiddeld een 8 voor de landelijk geëxamineerde eindexamenvakken, exacte vakken en talen tezamen. Dat is nu wel even iets anders.

Een ongelukkige samenloop van omstandigheden in Nederland is dat de afgelopen decennia de toch wel wat naïeve ideeën van Hans Freudenthal over onderwijs bij veel didactici gemeengoed werden. Dat leidde onder andere tot de zogenaamde ‘realistische wiskunde’, een didactiek die voor de matig begaafde leerlingen geen succes bleek te zijn. In haar oratie van 10 maart 2009 vermeldt Marja van den Heuvel-Panhuizen triomfantelijk dat volgens het TIMMS 2007 rapport over rekenprestaties Nederland ‘Best of the West’ scoort. Dat blijkt echter gebaseerd op 4 punten boven Engeland en 11 punten boven de VS op een schaal van 600. Als je bedenkt dat, globaal gesproken, zowel Engeland als de VS treurig primair en secundair onderwijs hebben, dan word je van die cijfers ook niet vrolijk. Kazachstan staat 21 punten boven Nederland, Hongkong 71 punten en de karakterisering van onze rekenprestaties als ‘Top van de Flop’ lijkt juist. Ik vermoed dat het talige realistische rekenen nog meer verwoestingen aanricht bij taalzwakke kinderen. Maar die cijfers zie ik nergens.

Degenen die constateren dat er flinke aansluitingsproblemen zijn tussen vwo en hoger onderwijs hebben gelijk. Er zijn gelukkig recente leerlingentoetsen die op een verbetering van de rekenvaardigheid wijzen, er is dus een verandering ten goede. De aansluitingsproblemen zijn echter blijvend en bij de aanpak hiervan hebben docenten hoger onderwijs en wiskunde didactici elkaar hard nodig. Een deel van de didactici was daar altijd met veel inzet toe bereid, nu de andere didactici nog. De Nationale Wiskunde Dagen laten elke keer weer zien hoe stimulerend en vruchtbaar dat samenspel kan zijn. 

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur

Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Agenda

Upcoming Events

juni 2009

2 juni 2009

□ LIMO 2009

Vijfde Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade voor bachelorstudenten wiskunde

plaats Utrecht

info limo.a-eskwadraat.nl

5 juni 2009

□ Wiskunde D-dag

Conferentie voor docenten in de tweede fase van havo en vwo, in het teken van het nieuwe profiel-keuzevak Wiskunde D

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD

8 juni 2009

□ Cursus voor Wiskunde D docenten

Eerste cursusdag voor docenten over het onderwerp 'Kansrekening en Statistiek' voor Wiskunde D. De andere twee data zijn 15 en 22 juni

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl/nl/professionalisering/seizoen-20082009

8 – 10 juni 2009

□ Parameter Estimation for Dynamical Systems

Workshop over het schatten van parameters van gewone differentiaalvergelijkingen

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/workshops/2009/PEDS_main.htm

10 – 12 juni 2009

□ 6th Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis

Reeks colleges en voordrachten over onderwerpen in de complexe analyse en operatorentheorie

plaats Sevilla, Spanje

info congreso.us.es/ceacyto/2009

15 – 17 juni 2009

□ Academy Colloquium Immersed Boundary Methods

Colloquium gericht op zowel gebruikers als ontwikkelaars van IBM's

plaats Bremen, Duitsland

info www.ahd.tudelft.nl/academy

15 – 19 juni 2009

□ The analytic theory of automorphic forms

Internationale conferentie ter ere van de 65ste verjaardag van Roelof Bruggeman

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info www.math.uu.nl/rb65.html

16 juni 2009

□ NWO-Talent Class

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

17 – 19 juni 2009

□ 2nd International Conference on Mathematics in Sport

Tweede editie van de internationale conferentie over wiskunde en sport

plaats Hampshire Hotel-Plaza, Groningen

info www.ima.org.uk/Conferences/maths_sport/index.html

19 juni 2009

□ Beta onder de Dom

Workshops voor beta-docenten met als onderwerpen 'Problemen oplossen en uitwerken' en 'Dynamische systemen'

plaats Wentgebouw UU, Utrecht

info <http://www.science.uu.nl/voorscholen/beta-onderdedom/>

26 juni – 7 juli 2009

□ MAPSP2009

Tweejaarlijkse conferentie over alle theoretische en praktische aspecten van scheduling, planning en timetabling

plaats Conferentieoord Rolduc

info <http://www.unimaas.nl/mapsp2009>

juli 2009

6 – 10 juli 2009

□ Automorphisms of Affine Spaces

Workshop over automorfismen van affiene ruimtes

plaats Radboud Universiteit Nijmegen

info www.ru.nl/science/math/conferences/automorphisms

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

6 – 10 juli 2009

□ **26th Journées Arithmétiques**

Jaarlijkse conferentie over alle facetten van de getaltheorie

plaats Saint-Etienne, Frankrijk

info jaz2009.univ-st-etienne.fr

10 – 22 juli 2009

□ **50ste Internationale Wiskunde Olympiade**

De 2009 editie van het wereldkampioenschap wiskundecompetitie voor middelbare scholieren

plaats Bremen, Duitsland

info www.imo2009.de

15 – 17 juli 2009

□ **Lévy processes: applications to finance**

Vierde in een serie workshops over Lévy processen met als titel 'Statistical Inference for Lévy Processes with Applications to Finance'

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/workshops/2009/Levy-Processes.main.htm

20 – 24 juli 2009

□ **27th European meeting of Statisticians**

Europese bijeenkomst van statistici en stochastici

plaats Univ. Paul Sabatier, Toulouse, Frankrijk

info <http://www.math.univ-toulouse.fr/EMS2009/4-17613-EMS2009.php>

augustus 2009

17 – 28 augustus 2009

□ **Utrecht Summer School in Mathematics**

Deze jaarlijkse Summer School heeft dit jaar de titel 'Dynamical Systems and their Applications'

plaats Universiteit Utrecht

info www.science.uu.nl/summerschools/usms

17 – 28 augustus 2009

□ **Order, disorder, and double disorder**

Workshop over modellen met random invloeden

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2009/OD/OD.main.htm

september 2009

11 – 17 september 2009

□ **10th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project**

Modellen voor de ontwikkeling van wiskundeonderwijs

plaats Dresden, Duitsland

info www.fi.uu.nl/nl

13 – 26 september 2009

□ **Parameter Estimation in Physiological Models**

Summer School over modelleren, met bijzondere aandacht voor het schatten van parameters

plaats Sicilië, Italië

info www.biomatematica.it/lipari2009

20 september 2009

□ **Waarom win ik nooit de loterij?**

Kinderlezing van prof.dr. Michel Mandjes over kansrekening en tactieken om te winnen.

plaats NEMO, Amsterdam

info www.science.uva.nl

oktober 2009

5 – 7 oktober 2009

□ **YES-III: Paradigms of Model Choice**

Derde editie van de workshop voor jonge statistici

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2009/YE-SSIII/YESIII.main.htm

7 – 9 oktober 2009

□ **34ste Woudschoten Conferentie**

Jaarlijkse conferentie van Nederlandse en Vlaamse numerieke wiskundigen over recente ontwikkelingen in iteratieve methoden, numerieke methoden en stochastiek in toepassingen

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/conferentieN.php

november 2009

7 – 9 november 2009

□ **NETCOOP 2009: New Trends in Modeling, Quantitative Methods and Measurements**

Conferentie over wiskundige methoden en modellen voor optimalisatie van netwerken

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl/workshops/2009/NETCOOP/NETCOOP.htm

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

Abelprijs voor Gromov

De zevende Abelprijs gaat naar Mikhael Leonidovich Gromov. De Noorse Academie voor Wetenschappen heeft dat op 26 maart bekend gemaakt. Gromov krijgt de Abelprijs voor zijn baanbrekend werk in de meetkunde. De wijze waarop hij tegen oude problemen aankijkt heeft tot veel nieuwe inzichten geleid, allen binnen de meetkunde, maar ook binnen andere takken van de wiskunde en daarbuiten. Volgens de jury is Gromov's werk 'een bron van inspiratie voor toekomstige ontdekkingen in de wiskunde'.

De 65-jarige Gromov werd geboren in Rusland. Op dertigjarige leeftijd vertrok hij naar de Verenigde Staten en een aantal jaren later verhuisde hij naar Frankrijk. In 1992 nam hij de Franse nationaliteit aan en tegenwoordig is hij werkzaam aan het Institut des Hautes Etudes Scientifiques in Bures-sur-Yvette.

De Abelprijs wordt ieder jaar uitgereikt door de koning van Noorwegen. Op 19 mei zal Gromov de prijs van zes miljoen Noorse kronen in ontvangst nemen. Dit komt overeen met ongeveer 700.000 euro.

Bron: www.kennislink.nl

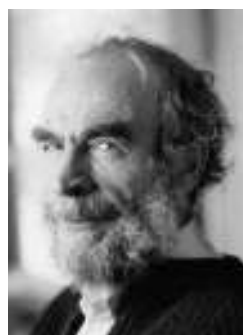


Foto: Gérard Ufféas

Mikhael Gromov

Geen brug te ver

Dit voorjaar is het Europese project Math-bridge van start gegaan. In dit project worden op Europees niveau problemen aangepakt die te maken hebben met de wiskunde-aansluiting tussen de middelbare school en het hoger onderwijs. Dit probleem speelt namelijk in heel Europa.

Vanuit Nederland doet de Open Universiteit mee aan het project. De Open Universiteit draagt bij door onderwijsmateriaal te ontwikkelen en gratis beschikbaar te stellen via internet, door het materiaal door de eigen studenten uit te laten testen en door het verder ontwikkelen van een systeem dat automatisch zinvolle feedback geeft. Het is vooral het laatste waarom de Open Universiteit is gevraagd mee te werken aan het project. Het systeem volgt tot in detail welke stappen een student onderneemt om tot een oplossing voor een wiskundig vraagstuk te komen en geeft dan automatisch aangepaste feedback op het gebied van syntax, semantiek en strategie.

In het project Math-bridge nemen elf Europese universiteiten deel. Met vereende krachten hopen ze de aansluitingsproblematiek beter te kunnen aanpakken.

Bron: www.ezpress.eu

Snoep verstandig, eet chocola

Problemen met hoofdrekken? Neem een reep chocola. Volgens David Kennedy, professor aan het Brain performance and Nutrition Centre van Northumbria University, kan chocolade eten helpen bij het uitvoeren van een mentaal moeilijke taak.

Zijn onderzoeksteam gaf een groep proefpersonen een chocolade-drinkje en een getal tussen 800 en 999. Het drinkje bevatte grote hoeveelheden van bepaalde chemische stoffen, die ook in chocolade zitten. De proefpersonen dronken eerst het drinkje en telden daarna terug van het getal dat ze gekregen hadden naar 0 in stappen van 3. Ze lieten een andere groep mensen dezelfde berekeningen doen zonder het drinkje. Het bleek dat de mensen die het drinkje hadden gekregen minder snel moe werden en de opgave sneller en beter maakten. Hetzelfde experiment werkte echter niet, toen gevraagd werd steeds 7 af te trekken in plaats van 3. Volgens de onderzoekers is deze opgave ingewikkelder en wordt hiervoor een net iets ander gebied van de hersenen gebruikt.

Het werkzame bestanddeel heet flavanol. Het is een polyphenol en zorgt voor een hogere bloedtoevoer naar de hersenen. Pure chocolade bevat veel flavanol, melkchocolade minder, maar het stofje kan ook in lagere hoeveelheden gevonden worden in groente en fruit.

Bron: www.telegraph.co.uk

KenKen

Er is sinds kort een computerversie van de getallenpuzzel KenKen op de markt. Een KenKen puzzel lijkt een beetje op een sudoku. Het grote verschil is echter dat een sudoku de getallen alleen gebruikt als symbolen, terwijl je voor het oplossen van een KenKen zowel moet rekenen als logisch nadenken.

De regels zijn simpel. Je krijgt een vierkant, verdeeld in kleinere vierkanten en in ieder kleiner vierkant moet een getal gezet worden. De verzameling getallen die gebruikt wordt, hangt af van de grootte van het vierkant. Bij een $n \times n$ vierkant gebruik je de getallen 1 tot en met n . In iedere rij en in iedere kolom moet iedere getal precies één keer voorkomen. Verder zijn er steeds een aantal vierkantjes gegroepeerd door er een dikke lijn omheen te zetten. Zo'n groep heet een kooi. In de linkse bovenhoek van een kooi staat een getal en een rekenkundige operatie, bijvoorbeeld 10+. Dit betekent dat de getallen uit de kooi samen onder de operatie het genoemde getal op moeten leveren. Bij 10+ moeten de getallen uit de kooi bij elkaar opgeteld dus 10 geven.

KenKen werd in 2004 uitgevonden door de Japanse docent Tetsuya Miyamoto. Miyamoto geloofde in de 'kunst van het onderwijzen zonder te onderwijzen'. Hij liet studenten iedere week 90 minuten van de lestijd besteden aan het oplossen van puzzels. De KenKen was daarbij de populairste. Volgens Miyamoto werkt deze methode van onderwijzen goed, als het aangeboden materiaal maar aantrekkelijk genoeg is.

Bron: www.gamershell.com

Numb3rs

De tv-serie Numb3rs is al een tijdje te zien op de Nederlandse televisie. Het is een Amerikaanse misdaadserie, waarin FBI-agent Don Eppes iedere uitzending de hulp van zijn broer en wiskundig genie Charlie Eppes inschakelt. De wiskunde die Charlie gebruikt bij het oplossen van de misdaden, is steeds cruciaal voor het tot een goed einde brengen van het FBI-onderzoek.

Op dit moment zijn er al vijf seizoenen van Numb3rs uitgezonden. Op de website van Wolfram (zie onder) wordt bij iedere uitzending van het vierde en vijfde seizoen een omschrijving gegeven van de gebruikte wiskunde. Ook staat er bij iedere aflevering een uitdagende puzzel, waar je zelf mee aan de slag kunt. Op de website zijn ook hints en oplossingen te vinden.

Het is de bedoeling dat er uiteindelijk op de website voor alle uitzendingen van Numb3rs een omschrijving en een probleem te vinden is. Hier wordt aan gewerkt.

Bron: numb3rs.wolfram.com/season5.html

Slowdaten

Speltheorie verklaart waarom de meeste liefdesrelaties tussen man en vrouw voorafgegaan worden door een aantal afspraakjes. Robert Seymour van de University College London en Peter Sozou van de London School of Economics omschrijven in hun artikel in de *Journal of Theoretical Biology* waarom het voor een vrouw beter is de periode van daten lang te rekken.

Het spel dat Seymour en Sozou analyseerden gaat uit van een man en een vrouw die met elkaar daten in de hoop een geschikte partner te vinden. Allebei betalen ze per tijdseenheid kosten voor deelname. Het is in dat opzicht onvoordelig om lang te daten. De gedachte daarachter is dat het voor beide partijen ongunstig is om veel afspraakjes te hebben voordat een beslissing valt, omdat het tijd kost. Zowel bij een negatieve uitkomst als bij een positieve, had die tijd besteed kunnen worden aan nuttigere activiteiten. Het spel eindigt als een van beiden ermee stopt of als de vrouw bepaalt dat ze de man als partner wil. Mannen zijn er volgens het model in twee soorten, 'goed' of 'slecht'. De vrouw krijgt een positieve opbrengst als ze een goede man kiest, maar een negatieve opbrengst als ze een slechte man kiest. Ze weet tot aan het einde van het spel niet of ze een goede of een slechte man voor zich heeft. De man krijgt een positieve opbrengst als een vrouw hem kiest. Er wordt aangenomen dat een goede man een hogere positieve opbrengst krijgt dan een slechte man. Dit betekent dat een goede man bereid is langer te daten dan een slechte man.

Seymour en Sozou lieten zien dat er onder geschikte aannames evolutionair stabiele evenwichtsstrategieën zijn. Voor de vrouw is het gunstig om veel afspraakjes te hebben voordat ze een beslissing neemt, omdat ze op die manier meer informatie krijgt over het type van de man. De kans dat een man goed is, gegeven dat hij het spel nog niet verlaten heeft, groeit naarmate het spel langer duurt. Slechte mannen geven op willekeurige tijdstippen op als de vrouw hem nog niet tot partner gekozen heeft. Goede mannen kunnen beter volhouden.

Voor de vrouw is deze strategie een compromis. Aan de ene kant wordt de opbrengst lager door het lange wachten. Aan de andere kant wordt de kans zo kleiner dat ze een slechte man treft, maar het risico een slechte man te kiezen is nooit helemaal uitgesloten. Tenzij ze nooit een partner kiest natuurlijk.

Bron: www.sciencedaily.com

Eerste ronde Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade is in januari geweest. Er deden 230 middelbare scholen mee. De opgaven waren misschien wat lastiger dan voorgaande jaren, maar er deden ook weer veel meer leerlingen mee. Vorig jaar lag het aantal deelnemers iets boven de drie duizend. Dit jaar waren het er bijna 4400.

Iedere leerling die voldoende punten scoorde in de eerste ronde gaat door naar de tweede ronde, die in september plaatsvindt. Voorafgaand aan de tweede ronde wordt een aantal trainingen georganiseerd op zes universiteiten. Het aantal punten dat gehaald moest worden voor toelating tot de tweede ronde is leeftijdsafhankelijk. Voor leerlingen uit klas 1, 2 en 3 gold een minimum aantal punten van 20. Leerlingen uit de vierde klas moesten minimaal 23 punten halen en vijfdeklassers gingen pas door bij 26 punten. Het totale aantal te behalen punten

was 36. Door de te behalen score leeftijdsafhankelijk te maken, kunnen ook jongere leerlingen doorstromen naar het trainingsprogramma. De organisatie hoopt zo het niveau van de wiskunde olympiade op te voeren.

De scholenprijs ging dit jaar weer naar het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Het was de derde keer in vier jaar dat deze school de prijs in de wacht sleept. De scholenprijs wordt ieder jaar uitgereikt aan de school waarvan de somscore van de beste vijf leerlingen het hoogste was.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Kristalhelder

Sneeuwvlokken zien er mooi uit, maar hun structuur is ongelooflijk ingewikkeld. Om ze beter te kunnen bestuderen, ontwikkelden wiskundigen van de University of Wisconsin-Madison en de University of California, Davis, een model, waarmee de groei van sneeuwvlokken in beeld gebracht kan worden. Deze sneeuwvlokken worden geproduceerd met behulp van cellulaire automaten.

In de natuur begint ieder sneeuwvlokje als een stofdeeltje in de lucht, omgeven door waterdamp. Watermoleculen kunnen zich aan het stofje en de omringende watermoleculen hechten of deze juist weer loslaten. Het oppervlak van een sneeuwvlok is semi-vloeibaar en watermoleculen hechten zich bij voorkeur in de holtes van de kristalvorm. Een sneeuwvlok bestaat uit enorm veel watermoleculen en de vorm van het uiteindelijke kristal is afhankelijk van allerlei plaatselijke omstandigheden, zoals temperatuur en vochtigheidsgraad. Veel wetenschappers hebben zich dan ook al afgevraagd hoe een proces, dat afhangt van zoveel toevalligheden, steeds weer vormen oplevert die sterk op elkaar lijken. Waarom hebben verschillende sneeuwvlokken steeds eenzelfde soort vorm?

Om de aard van sneeuwvlokken beter te begrijpen, maakten de onderzoekers een model dat de groei van sneeuwvlokken simuleert. Het duurde vier jaar voor het model klaar was en het programma heeft 24 uur nodig om een sneeuwvlok te laten groeien. Maar het resultaat mag er zijn. Het programma levert prachtige gedetailleerde driedimensionale plaatjes op. De cellulaire automaat die gebruikt wordt bij het maken van een sneeuwvlok kleurt de hoekpunten van een zeshoekig rooster. Een hoekpunt wordt gekleurd, afhankelijk van de kleur van de omliggende roosterpunten. De gekleurde roosterpunten komen overeen met plaatsen waar zich een watermolecuul bevindt. Er wordt een zeshoekig rooster gebruikt, omdat watermoleculen zich in de natuur organiseren in zeshoeken.

Het model en de achterliggende theorie verscheen in het januarinummer van het tijdschrift *Physical Review E*. Op de website psoup.math.wisc.edu/snowflakes.htm zijn een aantal filmpjes en een diavoorstelling te vinden.

Bron: www.zdnet.com



Woorden tellen

Een wiskundige techniek voor het analyseren van quantumsystemen zou ook gebruikt kunnen worden om algoritmes die zoeken naar sleutelwoorden in teksten te verbeteren. Een groep onderzoekers verbonden aan verschillende universiteiten in Spanje, schreven hierover in het maandnummer van de *Physical Review E*.

Het vinden van sleutelwoorden met behulp van statistische methoden heeft veel belangrijke toepassingen, zoals het onderbrengen van stukken tekst in de juiste categorie of het zoeken naar bestanden op het internet. Verreweg de meeste algoritmes werken met een corpus, een groot aantal documenten dat gebruikt wordt als referentie. Ze vergelijken de frequentie waarmee een woord voorkomt in een bepaalde tekst met de frequentie waarmee hetzelfde woord voorkomt in dat corpus en kijken naar het aantal teksten uit het corpus dat het woord bevat. Carpena en zijn collega's bedachten een nieuwe methode, die het werken met een corpus overbodig maakt.

Eerdere onderzoeken op het gebied van quantumsystemen toonden aan dat de manier waarop een relevant woord verspreid is over een tekst, erg verschilt van de manier waarop een niet-relevant woord in de tekst voorkomt. Een relevant woord (bijvoorbeeld 'Quichot' in het boek van Cervantes) lijkt in clusters voor te komen, terwijl niet-relevante woorden (woorden als 'en' en 'maar') homogeen over de tekst verdeeld zijn. Een reden hiervoor is dat een relevant woord het voornaamste onderwerp vormt van bepaalde stukken van de tekst en daarom in deze stukken veel voorkomt en in andere stukken minder.

Een manier om naar relevante woorden in een stuk tekst te zoeken is door naar de frequenties van woorden te kijken en te zoeken naar de aanwezigheid van dergelijke clusters. Dit wordt gedaan door naar de verdeling te kijken van de afstand van een woord tot de eerstvolgende keer dat hetzelfde woord weer voorkomt. Aan ieder woord in de tekst wordt een waarde toegekend, de C-waarde genoemd, die afhangt van de frequentie en de clustering. Hoe hoger deze C-waarde, hoe relevanter het woord. Vervolgens wordt een drempelwaarde voor de frequentie en cluster grootte gegeven. Deze drempelwaarde moet ervoor zorgen dat uit de analyse alleen die woorden naar voren komen, waarvan de frequentie en de mate waarin clusters gevormd worden, significant zijn. Dat wil zeggen, niet het gevolg zijn van statistische fluctuaties. Door het ontbreken van een corpus, is dit vooral van belang als het om kleine teksten (bijvoorbeeld artikelen) gaat, omdat alleen gebruik wordt gemaakt van de woorden uit de tekst zelf. Carpena en zijn groep hebben zo een groot aantal teksten uit verschillende talen geanalyseerd met goede resultaten.

Vervolgens gingen ze nog een stap verder en lieten ze de techniek los op rijen symbolen. Ze pakten een stuk tekst, waarvan de sleutelwoorden bekend waren, en verwijderden daaruit alle spaties en leestekens. Vervolgens gebruikten ze dezelfde statistische methoden om de C-waarde van alle lettercombinaties van 2 tot 35 letters in de tekst te berekenen. Uit deze analyse kunnen nu in twee stappen de sleutelwoorden gehaald worden. Eerste moet het significantieniveau weer bepaald worden en daarna moeten alleen die woorden geselecteerd worden, die ook echt iets betekenen. Ook deze aanpak bleek goed te werken en zelfs meer op te leveren, omdat zo ook combinaties van woorden of zelfs hele zinnen aangemerkt kunnen worden als relevant.

Het grote voordeel van de aanpak van Carpena en zijn collega's is vooral dit laatste. Dat het ook werkt op rijen symbolen, zonder spaties, maakt het in de toekomst misschien mogelijk de techniek te gebruiken andere bronnen, zoals bijvoorbeeld gesproken tekst of strengen DNA.

Bron: www.newscientist.com

Worteldag

Dit jaar had maart niet één, maar twee wiskundige feestdagen. Natuurlijk was er π -dag op 14 maart, maar ook 3 maart was een speciale dag. Toen was het namelijk worteldag, of in het Engels 'Square Root Day', omdat de datum geschreven wordt als 03-03-09.

Ron Gordon, een leraar uit Californië, raakte in de ban van worteldagen kort voor 9 september 1981. Er zijn maar negen worteldagen per eeuw en deze keer besloot Gordon een poging te wagen om worteldag meer bekendheid te geven. Hij stelde 339 dollar beschikbaar voor initiatieven, die worteldag populairder zouden kunnen maken. Zelf serveerde hij zijn leerlingen 'root beer' in vierkante glazen. Misschien kunnen wij op de volgende worteldag worteltjestaart bakken?

Bron: www.sciencemag.org

Modern wiskundeonderwijs

Er zijn tegenwoordig websites in de lucht met als doel leerlingen op de middelbare school extra oefenmogelijkheden aan te bieden voor wiskunde.

Op de website www.math4all.nl is een compleet overzicht te vinden van de HAVO en VWO eindexamenprogramma's wiskunde A, B, C en D. Bij een flink aantal onderwerpen zijn ook uitleg, theorie en een aantal voorbeeldopgaven te vinden. Dit is nog niet bij alle onderwerpen het geval, maar hier wordt hard aan gewerkt. De website is door leerlingen zelf te gebruiken om te oefenen voor hun eindexamen. Op de website is verder nog veel meer informatie te vinden voor leerlingen en leraren.

Via dezelfde website kan tegenwoordig ook gebruik gemaakt worden van het programma AlgebraKIT. Leerlingen kunnen in dit programma extra oefenmateriaal en uitleg vinden. Er staan nu applicaties op de website over de onderwerpen 'differentiëren' en 'vergelijkingen'. Het programma geeft een opgave en het is de bedoeling dat de leerling deze opgave met pen en papier uitwerkt. Vervolgens geeft het programma het antwoord en eventueel ook diverse tussenstappen. Aan dit programma is ruim drie jaar gewerkt door Martijn Slob. Hij is wiskundedocent in Deurne en dacht dat een dergelijk programma nuttig zou zijn voor zijn leerlingen. Daarom is hij het in zijn vrije tijd zelf gaan ontwikkelen. Meer informatie over het programma kan gevonden worden op de website www.algebrakit.nl.

Een andere website is www.algecadabra.nl. Dit programma is bedoeld om de rekenvaardigheid van leerlingen te vergroten, zonder gebruik van de rekenmachine. Er zijn veel verschillende rekenkundige onderwerpen te vinden. De leerling krijgt een opgave en moet die dan zelf oplossen uit het hoofd of met pen en papier. Vervolgens geeft het programma een antwoord en kan eventueel om een uitgebreide uitwerking worden gevraagd. Ook kunnen hints gevraagd worden. Het programma is gemaakt door Tom Lecluse, die ook Geocadabra ontwikkelde.

Bron: www.math4all.nl, www.algecadabra.nl

Een breuk leren

In het aprilnummer van *The Journal of Neuroscience* verscheen een artikel over de manier waarop onze hersenen breuken verwerken. Bij het zien van een breuk wordt er onmiddellijk en automatisch een groepje hersencellen actief in de sulcus intraparietalis en de prefrontale cortex. Dit zijn delen van de hersenen die actief zijn bij de verwerking van gehele getallen. Iedere breuk activeert een specifiek groepje cellen.

De onderzoekers, Simon Jacob en Andreas Nieder van de Universiteit van Tübingen in Duitsland, lieten een aantal proefpersonen kijken

naar een computerscherm waarop snel achter elkaar voor een korte tijd breuken te zien waren. Tijdens het experiment gebruikten ze een specifieke MRI-techniek, die geschikt is om veranderingen in hersenactiviteit te meten.

De onderzoekers lieten de proefpersonen eerst de breuk $1/6$ zien en registreerden de hersenactiviteit en de locatie van het gebiedje in de hersenen dat actief werd. Toen de onderzoekers de proefpersonen vervolgens een tijd lang breuken lieten zien die ongeveer gelijk waren aan $1/6$, werd de hersenactiviteit langzaam steeds minder. Als daarna andere breuken werden getoond, werd de activiteit weer groter. Hoe verder de breuk van $1/6$ af lag, hoe groter de activiteit. Ook bleek uit het onderzoek dat er in dit geval geen verschil is tussen de manier waarop hersenen reageren op getallen en op woorden. De reactie op $1/4$ was hetzelfde als op 'één vierde'.

De snelheid waarmee de hersenen reageren op de getoonde breuken impliceert dat de breuken niet berekend worden, maar automatisch verwerkt worden. Het lijkt erop dat volwassenen breuken intuïtief interpreteren. Volgens Jacob en Nieder zou dit onderzoek kunnen helpen bij het ontwikkelen van onderwijsmethoden voor het leren van breuken aan kinderen. Dat zou mooi zijn, aangezien breuken vaak een groot struikelblok vormen bij het rekenonderwijs.

Bron: www.sciencedaily.com

Rekenen is een eitje

'Kuikentje rekt beter dan baby' was de kop boven een artikel dat in april op de website het NRC verscheen. Het stukje gaat over een onderzoek dat in Italië is uitgevoerd met kuikens van een paar dagen oud en Kinder Surprise eieren.

Om te laten zien dat kuikens van een paar dagen oud al in staat zijn om verschillende hoeveelheden van elkaar te onderscheiden en kunnen optellen en aftrekken, hebben de dieronderzoekers het volgende experiment gedaan. Ze hebben een aantal pasgeboren kuikens bij de locale boer gehaald en die afzonderlijk ondergebracht in kooitjes. In ieder van deze kooitjes lagen vijf van de gele plastic eieren die in een Kinder Surprise ei zitten. Er was al bekend dat kuikens zich snel aan dit soort eieren hechten en dan graag dicht in de buurt van zo'n ei willen zijn. Vervolgens werd een kuiken op een groot wit vlak met twee verticale schermen erop gezet. Het kuiken zag drie plastic eieren achter het ene scherm verdwijnen en twee eieren achter het andere scherm. Nadat alle eieren verdwenen waren, mocht het kuiken vrij rondlopen en het grootste deel van de kuikens ging dan kijken achter het scherm waar drie eieren lagen. De kuikens hadden dus een duidelijke voorkeur voor meer eieren.

In het tweede deel van het experiment werd iets moeilijkers verwacht van de kuikens. Weer zagen de kuikens vijf eieren verdwijnen achter de twee schermen. Nadat alle eieren verdwenen waren, werden een aantal eieren verplaatst van het ene naar het andere scherm. Het kuiken kon deze verplaatsing zien. Vervolgens mocht het kuiken weer vrij rondlopen en nu kozen de meeste kuikens nog steeds voor het scherm waarachter het grootste aantal eieren lag. Om te bepalen waar de meeste eieren lagen, moesten de kuikens dus onthouden hoeveel eieren er achter ieder van de schermen verdwenen waren, ze moesten goed in de gaten houden hoeveel eieren er van het ene scherm naar het andere scherm waren verplaatst en vervolgens ook nog bepalen waar dan uiteindelijk het grootste aantal lag. En het merendeel van de kuikens was daartoe in staat.

Deze resultaten zijn verbazingwekkend, omdat soortgelijke onderzoeken met baby's en apen andere resultaten opleverden. Baby's en

apen raken namelijk in verwarring, zodra er meer dan drie voorwerpen in het spel zijn.

Bron: www.nrc.nl

Zaalkaak voor De Swart

De Zaalkaak wordt jaarlijks uitgereikt aan de auteur van het meest leesbare en vanuit journalistiek oogpunt meest interessante artikel in het Nieuw Archief voor Wiskunde in het vorige jaar. De bokaal, een 3D uitwerking van een Pythagorasboom, is een sculptuur van Koos Verhoeff.

De jury, bestaande uit Charlotte Vlek (nationaal PR-medewerkster wiskunde), Bruno van Wayenburg (wetenschapsredacteur Intermediair) en Arnout Jaspers (redacteur Natuurwetenschap & Techniek), heeft besloten de Zaalkaak 2008 toe te kennen aan Harrie de Swart, voor zijn artikel 'Over de machtsverhoudingen in de EU' (verschenen in NAW december 2008).

Het artikel beschrijft heel toegankelijk de achtergrond van de Poolse 'opstand' tegen de stemgewichten van de EU-lidstaten in de Europese ministerraad. Kort samengevat: het stemgewicht is nu evenredig met het aantal inwoners, terwijl dat volgens de Polen evenredig moet zijn aan de wortel uit het aantal inwoners. De Swart legt uit waarom de Polen wetenschappelijke gezien gelijk hebben, al kregen ze het in feite niet.

De jury waardeert in het bijzonder dat De Swart een kwestie die destijds voorpaginanieuws was, kundig heeft voorzien van de wiskundige achtergrond die eigenlijk iedere goed geïnformeerde leek paraat zou moeten hebben.

Speciale vermelding wil de jury nog maken van het essay 'Lof der Lezing', door Tom Körner (NAW december 2008). Zijn speelse, droogkomische en toch serieus te nemen verhandeling over het fenomeen 'lezing' (waaronder ook begrepen wordt 'het college') is, zo stellen wij ons voor, een verademing voor elke wiskundestudent die worstelt met de vraag of hij/zij wel slim genoeg is voor dit vak. Zoals een van de juryleden zei: "Had ik dit stuk maar jaren eerder gelezen". Dit leverde in de laatste onderhandelingsronde een moeilijke afweging op voor de jury, waarbij tenslotte de doorslag gaf dat het journalistieke artikel van De Swart beter in de doelstelling van de Zaalkaak past.

De Zaalkaak is met een toespraak op 15 april uitgereikt aan De Swart tijdens de jaarvergadering van het Nederlands Mathematisch Congres te Groningen.

Bron: *Ferdinand Verhulst*

In het donker

Angst voor wiskunde is een wijdverspreid verschijnsel onder studenten aan de Universiteit van Granada in Spanje. Vijf onderzoekers van de afdelingen voor wiskundeonderwijs en evolutionaire en onderwijspsychologie, hebben hier een onderzoek naar uitgevoerd onder 885 eerstejaars studenten van hun eigen universiteit.

De studenten die gevraagd werden een vragenlijst in te vullen deden studies aan vijf verschillende faculteiten. Al deze studies bevatten één of meerdere wiskundevakken. Zes op de tien studenten gaven aan angstsymptomen te hebben als ze iets wiskundigs moesten doen. Er was ook een verschil tussen mannen en vrouwen. 47 procent van de mannen en 62 procent van de vrouwen vertoonden symptomen. De symptomen liepen uiteen van gespannenheid en ongeduldigheid tot verwarring, angst en zelfs een black-out.

Volgens de onderzoeker is deze angst van invloed op de studiekeuze van dergelijke studenten. Studenten zouden studies, waar ze goed in zouden kunnen zijn en die ze leuk zouden vinden, laten schieten vanwege de hoeveelheid wiskunde die ze zouden moeten doen.

Bron: *prensa.ugr.es*

Tel uit je winst

Op 11 februari had EditieNL een kort item over de rij voor de kassa in de supermarkt. De vraag was wat voor soort rij sneller is: een lange rij van mensen met mandjes of een korte rij van mensen met volle winkelwagens? Om een antwoord te vinden, werd een experiment gedaan. Aan één kassa stonden twee mensen met volle karren, aan de andere kassa vijf mensen met wat boodschappen in mandjes. Achter de kassa's zaten twee ervaren kassamedewerkers. De uitslag: de rij met de winkelwagens was net iets sneller.

In de uitzending werd Michel Mandjes, hoogleraar wachtrijtheorie aan de UvA, om uitleg gevraagd. Bij het uitzoeken van de juiste kassa, moeten mensen zelf slim te werk gaan. Ze moeten letten op het aantal mensen in de rij en op de hoeveelheid boodschappen die deze mensen bij zich hebben. Het afrekenen kost ongeveer een halve minuut. Mensen kunnen zo zelf uitzoeken welke rij het snelste zal zijn. Volgens Mandjes komt er dus geen wiskunde bij kijken. Het is alleen rekenwerk.

Bron: www.rtl.nl



Foto: George Huitema

Ferdinand Verhulst overhandigt de Zaalkaak aan Harrie de Swart

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragwetenschappen, instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
N.C.Verhoef@utwente.nl

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
F.Verhulst@uu.nl

Evenement

Het 45ste Nederlands Mathematisch Congres

Het jaarlijkse Nederlands Mathematisch Congres (NMC) is de ontmoetingsplek bij uitstek van wiskundig Nederland. De 45ste editie vond in april van dit jaar onder een stralende zon plaats in Groningen. Nellie Verhoef en Ferdinand Verhulst geven enkele impressies.

Het congres werd op enthousiaste wijze geopend door de rector magnificus, Frans Zwarts. Nu eens niet een bestuurder die vertelt dat hij wiskunde nooit heeft begrepen, maar een verrassend relaas over hoe Zwarts bij zijn talenstudie, dus na het vwo, het belang van wiskundig denken en analyseren had ingezien.

In de openingsvoordracht bracht Sebastian van Strien ons up-to-date op het gebied van laagdimensionale dynamische systemen, in de middag en de volgende ochtend waren er minisymposia over veel verschillende onderwerpen. Don Zagier gaf een interessante lezing over 'mock theta functions', met veel technische details maar toch redelijk te volgen. De Bernoullilezing werd 's avonds in het Akademiegebouw gehouden door Jan Hogendijk; deze behandelde de relatie tussen Arabische en Westeuropese wiskunde in de Middeleeuwen en was zodoende zowel sociaal als wetenschappelijk actueel. De lezing en de daarna volgende receptie trok veel belangstelling: Groningers hebben een ragfijn gevoel voor de aangename combinatie van wiskunde en alcohol.

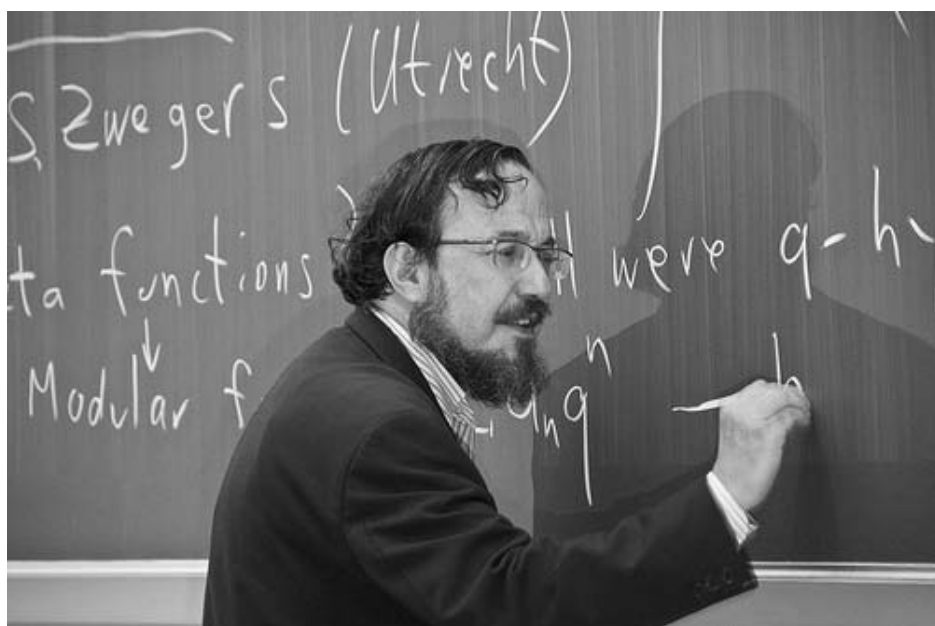
Ook de tweede dag was er een vol programma: de uitreiking van de Philips Wiskundeprijs (zie eind) en van de Zaalbokaal aan Harrie de Swart (UvT), lezingen van Dirk Siersma over topologie en van Jean-Pierre Luminet over zwarte gaten en cosmologie. We doen nog een greep uit de minisymposia.

Allereerst was er het minisymposium Wiskundendidactiek, toegespitst op aansluitingsproblemen, universitaire instaptoetsen en daarop niet voldoende voorbereide leerlingen. De voordrachten gingen over oorzaken en gevolgen, belemmeringen en succesfactoren. De deelnemers, vriend en vijand van realistisch wiskundeonderwijs (RME), waren uit op een fundamentele discussie over de ont-

stane malaise in het wiskundeonderwijs. Helemaal is er bij zes voordrachten weinig tijd voor discussie. Elke spreker moet in tien minuten zijn verhaal houden, vragen en opmerkingen worden bewaard tot het laatste half uur. Een begrijpelijke beslissing, maar het gevolg is dat de spanningsboog (te) lang gespannen blijft en er soms sprake is van indutten. Het sprankelende recht voor de raap reageren is er niet bij. Het blijkt toch nog steeds droevig gesteld te zijn met de aansluiting naar de universiteiten gezien de resultaten van eerstejaarsstudenten op de TU/e, ondanks de lichte verbetering t.o.v. het jaar daarvoor. Dit beeld wordt bevestigd door ervaringen op de UT, waar aankomende studenten zelfs de eerste middag dat ze aanwezig zijn de (zelfde als die op TU/e) instaptoets moeten maken.

Op de algemene vraag of het nu de goede kant opgaat na de extra inspanningen van het laatste jaar, is het antwoord: "Ja, we gaan de goede kant op maar we weten nog niet of we genoeg de goede kant op gaan". Er is kennelijk nog een lange weg te gaan.

Een ander minisymposium bevat lezingen door promovendi, elk 20 minuten inclusief discussie. Het is altijd weer boeiend om het werk van jonge onderzoekers te zien. Opvallend hoe een voordracht over een abstract onderwerp als 'automorphisms over finite fields' toch begrijpelijk gebracht kan worden, terwijl verhalen over een concreet en praktisch aandoend onderwerp ('systemen met onzekerheid' of 'quantum computers') soms erg abstract en algemeen gaan klinken. Alle voordrachten waren echter helder, de sprekers worden kennelijk goed gecoacht. De Philipsprijs voor promovendi ging naar Stefan van Zwam van de TU/e voor zijn voordracht "Laten zien dat het niet past".



Don Zagier vertelt over 'mock theta functions'

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

Oratie

Het meten van dub

Ik heb de afgelopen tijd vooral nagedacht over de toepassing van transcendente analyse op de

Dubbelzinnigheid wordt meestal gezien als een obstakel, iets dat moet worden opgehelderd of zelfs bestreden. Volgens Gunther Cornelissen biedt dubbelzinnigheid juist een kans om de grenzen van ons begrip te onderzoeken, en doen zich hierbij vaak buitengewoon interessante fenomenen voor. Cornelissen kreeg in 2007 een vici-beurs van NWO voor onderzoek naar verbanden tussen niet-commutatieve en aritmetische meetkunde. Hij bezet de nieuwe leerstoel 'mathematische fysica', is directeur van de onderzoeksschool MRI, ontwikkelt en doceert wiskunde-modules op Junior College Utrecht, en is redacteur van Nieuw Archief. Op 16 januari j.l. sprak hij deze oratie uit.

Huishoudelijke vergissing

*Vanmorgen kwam hij weer,
mijn ontrouwe vriend,
het lege blad.*

*Ik zit tegen hem aangeleund,
en wij bewachten samen de stilte.
Ondertussen staat in de keuken het leven
aan te branden.*

Bovenstaand gedicht kan slaan op verschillende activiteiten, zoals wiskunde, filosofie, dichten of componeren: het lege blad kan worden gevuld met formules, wijsheid, dichtregels of notenbalken. Al deze creatieve bezigheden hebben iets gemeen: het lijkt, althans volgens een wijd verbreide mening, alsof je je tijd aan het verdoen bent. Volgens wiskundige grootheid Alain Connes (1947) wordt de beste wiskunde gedaan liggend op een bank in het halfduister. Dit romantische beeld past niet bij de dagelijkse realiteit van email, studentenbegeleiding, onderwijs,

schrijven, besturen en vergaderen, maar het wijst wel naar de kern van het vak: nadenken.

Wie holt achter wie aan?

Vandaag wil ik het met u hebben over één van dit soort tijdsverspillingen. Natuurlijk vind ik het geen tijdsverspilling, maar u misschien wel, en natuurlijk *is* het ook geen tijdsverspilling. Laat me nogmaals het gebruikelijke bewijs geven: in het hart van de computer, Google, medische scans, veilig mobiel telefoneren, GPS en het spoorboekje bevindt zich moderne wiskunde.

Maar in de achterliggende, onzichtbare wiskunde geven wij dit oude, *verborgen* namen, zoals recursietheorie, lineaire algebra, Radontransformatie, elliptische kromme en grafentheorie. Die theorieën zijn écht niet bedacht om te worden toegepast; en ik verwacht niet dat u ze kent. Stiekem vind ik het zelfs onbevredigend dat zuivere wiskunde zich in dit tijdsgewricht moet rechthouden met het ar-

gument van de onverwachte toepassing. Om mijn wiskundig idool Yuri Manin (1937) te citeren: "Er schuilt een inherente zwakheid in de poging je interesses te verantwoorden door te zeggen dat ze toepasbaar zijn. Toepasbaar is een woord voor ingenieurs."

De afstand van zuivere wiskunde tot haar toepassing is groot. Daarmee bedoel ik niet zozeer in tijd. Ik bedoel dat de afstand groot is in zichtbaarheid. Zuivere wiskunde werkt echter omdat het *niet* met de toepassing samenvalt en er vaak op grote afstand uit voortkomt.

De maatschappij loopt werkelijk achter op de zuivere wetenschap, behalve dan natuurlijk op het soort wetenschap dat achter de maatschappij aanholt.

Ik weet niet of u persoonlijk het soort wiskunde waar ik het over wil hebben belangrijk vindt. Waarschijnlijk staat u hier algeheel neutraal tegenover, want het staat ver van uw bed — althans dat denkt u; alhoewel ik u hopelijk heb laten zien dat het eigenlijk onzichtbaar naast uw bed staat, bijvoorbeeld in de mobiele telefoon op uw nachtkastje.

Als de wiskundige op de bank ligt, zijn zijn of haar gedachten vrij en wild. Ik wil graag deze passie met u delen. Maar de afstand hindert mij daarbij. Wiskunde heeft een taalverdichting ondergaan die effectieve communicatie pas toestaat na jarenlange studie. Zon-



Gunther Cornelissen

Foto: Arthur van Dam

belzinnigheid

theorie der dubbelzinnigheid. — Évariste Galois, 1832

der deze taal van verdichte wiskundige symbolen kan wiskunde niet werken, maar precies daardoor creëert zij afstand.

Voor wiskunde is relevantie gekoppeld aan distantie: het afstand nemen en abstraheren. Met wiskunde en andere activiteiten die hoofdzakelijk uit Oblomoviaans op de bank liggen bestaan, wil ik hier *afstand nemen* propageren.

Laat ons nu dan wiskunde doen. Laat de buitenwereld even in de keuken aanbranden.

Dubbelzinnigheid in de wiskunde

We komen aldus aan bij de titel van deze lezing — ‘het meten van dubbelzinnigheid’.

Het leven zit vol ambiguïteit. Omdat dit een wiskunde-oratie is, kunt u zich wel voorstellen dat mij hierbij iets heel anders voor ogen staat dan uzelf in gedachten heeft. Om meteen alle twijfel weg te nemen en mezelf als vakidoot te onmaskeren: ik zal u vier voorbeelden geven van dubbelzinnigheid in de wiskunde.

Het **eerste voorbeeld** komt uit de algebra.

De vierkantswortel uit 15 is een getal waarvan het kwadraat 15 is. Maar daar zijn er twee van. Als ik de ene ‘vierkantswortel vijftien’ ($\sqrt{15}$) noem, dan is de andere ‘min vierkantswortel vijftien’ ($-\sqrt{15}$). Immers, -1 maal -1 is 1. Hoe kan ik deze twee vierkantswortels onderscheiden? Gelukkig zijn het kommagetallen, en dus kan ik zeggen dat de ene positief, en de andere negatief is. En daarom mag ik dan van ‘de’ vierkantswortel praten, als naam voor de positieve wortel, zoals ik trouwens zonet al stiekem deed.

Maar nu proberen we hetzelfde in een nauwelijks ander geval. De vierkantswortel uit -15 is een getal waarvan het kwadraat -15 is. Gaat u alstublieft niet het bestaan van dit getal in twijfel trekken, het bestaat al eeuwenlang. Ik noem het even w , van ‘wortel’. Maar dan is er een tweede vierkantwortel uit -15 , namelijk $-w$. Hoe kan ik die wortels onderscheiden? Het antwoord is dat ik dat niet kan. Pas als ik de ene heb gemeten, dat wil zeggen een naam heb gegeven, dan ken ik de andere

ook precies.

Vergelijk: in de huidige interpretatie van de theorie van waarneming in de kwantummechanica pint een meting zelf de waarde van het gemetene vast.

Dingen vallen pas op hun plaats als ze een naam hebben gekregen. “Als dit ‘ w ’ is, dan is dat ‘ $-w$ ’.”

Met deze onvermijdelijke dubbelzinnigheid leven heet ‘Galoistheorie’. Of, om het onderwerp wat meer recht te doen: een theorie die precies *meet hoe dubbelzinnig de situatie is*. Dankzij Galoistheorie kan ik beweren dat de oplossingen van $X^4 = 15$ in precieze zin drie keer minder dubbelzinnig zijn dan die van $X^4 - X = 15$.

Het lijkt in eerste instantie misschien vreemd dat er een kwantitatief verschil is tussen deze twee vergelijkingen, omdat ze allebei vier oplossingen hebben. Het cruciale nieuwe idee van Galoistheorie is dat het aantal oplossingen minder belangrijk is dan het verschil in vrijheid bij het geven van namen aan die oplossingen.

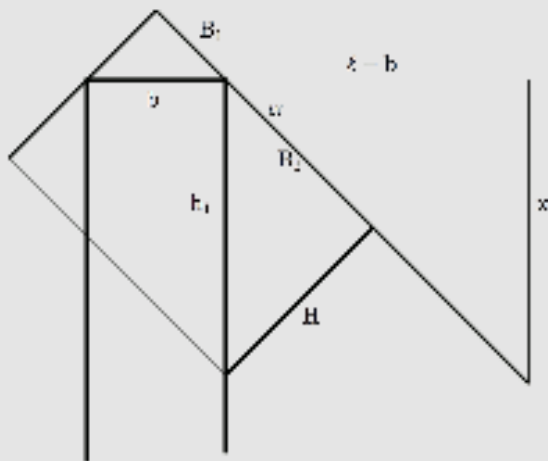
Évariste Galois (1811-1832), de wiskundige waarnaar deze theorie is vernoemd, stierf in een duel. In de beroemde ‘laatste brief’, geschreven de avond voor zijn dood, stelde hij al: “Ik heb de afgelopen tijd vooral nagedacht over de toepassing van transcendente analyse op de theorie der dubbelzinnigheid.” Dit is

De oplossingen van $X^4 - X = 15$ zijn

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-20\sqrt{\frac{2}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\alpha} \pm \frac{1}{2}\sqrt{20\sqrt{\frac{2}{\alpha}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{-20\sqrt{\frac{2}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\alpha}}},$$

met $\alpha = 1 + \sqrt{32001}$ en alle vier combinaties van keuzes van tekens voor de symbolen $\pm$.

Schematische weergave van het probleem van de zakkende slagboom



Gegeven zijn b (breedte van de pilaar), B en H (breedte en lengte van de holle buis) en ℓ (lengte van de slagboom). Gevraagd is x (daling aan de andere kant van de slagboom). Met de notaties van de figuur geldt:

$$x = (\ell - b) \tan \alpha; \sin \alpha = \frac{B_2}{h_1}; \cos \alpha = \frac{B_1}{b} = \frac{H}{h_1}; B_1 + B_2 = B$$

We vinden dat $X = \cos \alpha$ voldoet aan

$$b^2 X^4 - 2bBX^3 + (B^2 + H^2)X^2 - H^2 = 0,$$

en dan is een oplossing $x = (\ell - b)\sqrt{1 - X^2}/X$. De benadering van mijn zwager is $b = 0$ (dus de buis heeft dikte nul; het plaatje is dan hetzelfde als hierboven zonder het stuk links van de horizontale lijn h_1) en dan is de oplossing $x = B\ell/H$.

het motto van de lezing van vandaag.

Er moet mij in verband met polynoomvergelijkingen oplossen nog een anekdote van het hart, die ik vaak op het algebra-college vertel. Mijn schoonvader wilde zelf een draaihek maken. Dat bestond uit een lange metalen horizontale slagboom, vastgelast aan een verticale holle buis. Die holle buis op zijn beurt moest over een ronde pilaar worden geschoven die in de grond was geplaatst, om aldus het draaien van de slagboom mogelijk te maken. Het probleem is dat er speling in de constructie zat: de buis was te ruim voor de pilaar, en ging daar dus scheef op hangen. Daardoor zou de verticale boom van het draaihek aan het verder gelegen uiteinde lager komen te hangen. De vraag is: hoeveel lager? Met alle cijfers in de hand kwamen wij snel op een vierdegradsvergelijking, die vervolgens per internet en computer exact werd opgelost.

Het antwoord: 5,9 centimeter. Bij het avondeten werd trots de oplossing gemeld. Waarop mijn zwager opmerkte dat "dit ongeveer dat en zus en zo, dus het antwoord is ongeveer 6 centimeter".

Ik gebruik dit voorbeeld graag om te illustreren wat voor wiskunde ik doe. Bij het soort

wiskunde waar ik het vandaag over heb, gaat het om de theorie: de algebra van de eerste oplossing. De tweede, het schattend rekenen, deugt niet voor het zien van een algemene theorie over het oplossen van vergelijkingen. De theorie heeft distantie en universaliteit die later een toepassing vindt.

Deze dure woorden gebruik ik natuurlijk enkel om het schaamrood op onze kaken te verbergen toen mijn zwager in tien seconden een juiste benadering had gevonden. Hij deed trouwens alsof de binnenste pilaar geen dikte had, en dan zijn congruente driehoeken voldoende voor een oplossing.

Het **tweede voorbeeld** van dubbelzinnigheid is meetkundig. Stelt u zich een cirkel voor. Kijk bijvoorbeeld naar de sterren op de Europese vlag. Als ik deze vlag met de verkeerde kant aan de vlaggenstok bevestig, dan ziet u geen verschil. Hoe ik de vlag moet ophangen is dubbelzinnig. (Behalve dan dat er aan de ene kant van de vlag wel haakjes zijn om hem aan de vlaggenstok te bevestigen en aan de andere kant niet, maar het gaat me weer om de theorie.)

Stel, ik teken in het midden van de vlag een verticale lijn, dan liggen de sterretjes gespiegeld ten opzichte van deze lijn. Ik kan wel één

kant als 'links' zien en de andere als 'rechts', maar als ik de vlag omdraai, creëer ik weer dubbelzinnigheid, nu tussen links en rechts.

De sterretjes vervang ik door een cirkel. Ten opzichte van de verticale lijn liggen de punten van de cirkel nu in paren. Als we deze situatie algebraïsch beschrijven en coördinaten kiezen waarin de y -as de verticale lijn is, de x -as hier loodrecht op staat door het middelpunt van de cirkel, en de cirkel straal 4 heeft, dan liggen links en rechts van het punt op de y -as met y -coördinaat 1 precies de twee punten op de cirkel met x -coördinaat $\sqrt{15}$ en $-\sqrt{15}$. Dus dit tweede voorbeeld is eigenlijk het eerste voorbeeld, maar in meetkundige vermomming.

Het **derde voorbeeld** komt uit de mathematische fysica. In veel berekeningen in de theorie van elementaire deeltjes is het nodig te *renormaliseren*. Dit is een natuurkundig rekenrecept dat op verschillende manieren kan worden uitgevoerd, maar de uiteindelijke berekende 'constanten der natuur' moeten natuurlijk onafhankelijk zijn van de gekozen methode. Daar zit een Galoisgroep achter, door Pierre Cartier (1932) de 'Kosmische Galoisgroep' genoemd. Wederom kan ik kwantitatieve uitspraken doen: een vierdimensionale veldentheorie met een derdegraadspotentiaal (ook bekend als een ϕ_4^3) is wel ambigu, maar oneindig veel minder ambigu dan een driedimensionale theorie met zesdegraadspotentiaal (ϕ_3^6). De Galoisgroepen zijn hier soms oneindig groot, maar daardoor laat de wiskundige zich niet afschrikken.

Voor het **vierde voorbeeld** zet ik hier op een podium twee schermen neer, en plaats daarachter twee trommelaars, onzichtbaar voor het publiek. Iedere van hen speelt op een trommel, die evenwel niet de gebruikelijke ronde vorm hoeft te hebben: het zou ook een driehoek, ster, of wolkje kunnen zijn. Kunt u dan horen of deze twee trommels dezelfde vorm hebben of niet?

In 1910 gaf de Nederlandse natuurkundige Hendrik Lorentz (1853-1928) een lezing in Göttingen, toen het Mekka van de wiskunde.

Een kort terzijde. De lezing werd mogelijk gemaakt door het legaat van Paul Friedrich Wolfskehl (1856-1906), die 100.000 Duitse Mark ter beschikking stelde aan het wiskundig instituut te Göttingen, om te worden uitgereikt voor de oplossing van de Laatste Stelling van Fermat; maar zolang deze oplossing er niet was, mocht een deel van de rente worden gebruikt om een jaarlijkse lezingenreeks mee te bekostigen. Met moet nu bedenken dat de Wolfskehl-lezing van Lorentz aan de wieg stond van de ontwikkeling van de theo-



De doorgestreepte Europese vlag

rie van integraalkernen, en hiermee de inhoud van bijna het hele eerste volume van het klassieke werk van Richard Courant (1888-1972) en David Hilbert (1862-1943) getiteld *Methoden der Mathematischen Physik*. Het ontstaan van deze tak van mathematische fysica is dus te danken aan het *niet* oplossen van het getaltheoretische probleem van Fermat. Misschien is dit wel de betekenis van de naamgeving van mijn leerstoel, die het verband tussen fysica en getaltheorie behelst.

Lorentz stelde de vraag of het mogelijk is door luisteren naar een trommel zijn oppervlakte te berekenen. Het antwoord blijkt 'ja' te zijn. De paus van de Göttingse wiskunde, David Hilbert, die bij de lezing aanwezig was, zei dat hij het antwoord op deze vraag niet meer tijdens zijn leven zou vernemen. Het vermoeden van Hilbert was fout: hij leefde tot in de jaren 1940 en zijn briljante student Hermann Weyl (1885-1955), die ook in het publiek zat, loste het probleem een jaar later op, in 1911.

Bij al deze turbulente ontwikkelingen wordt vaak vergeten dat een promovenda van Lorentz, Johanna Reudler (1879-?), in haar prachtige proefschrift 'Over de zwarte straling in ruimten van verschillende vorm' het vermoeden verifieerde voor cirkels, rechthoeken, bollen, parallelepipedalen en cilinders. De enige verwijzing naar 'Fräulein Reudler' staat in een voetnoot van het artikel van Weyl, en de al vermelde lezing van Lorentz laat haar anoniem.

In de jaren 1990 construeerden Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert de eerste voorbeelden van trommels die er niet hetzelfde uitzien, maar toch hetzelfde klinken. Hier betekent 'hetzelfde klinken': 'hetzelfde Laplace-spectrum hebben'. Een recente studie van Koen Thas (1977) en zijn medewerkers laat zien dat alle bekende dubbelzinnigheden tussen de vormen van dergelijke trommels verklaard worden vanuit de symmetriegroepen van bepaalde soorten meetkundes, genaamd *Galoismeetkundes*. Zo zijn we weer, via het tweede voorbeeld, aangekomen bij het eerste voorbeeld.

Samenvattend. We hebben nu vier voorbeelden van dubbelzinnigheid: polynoomvergelijkingen oplossen en worteltrekken, symmetrie in figuren, invariantie in renormalisatie en het trommelvormen-probleem. Steeds is een soort Galoistheorie verantwoordelijk voor ons begrip van de situatie, of liever gezegd: het meten van ons onbegrip van de situatie.

Deze voorbeelden lopen ook dwars door de zogenaamde grenzen tussen algebra, getaltheorie, meetkunde, analyse en mathematische fysica. Frans Oort gaf ooit een lezing als titel 'Algebra of meetkunde?', en gaf hierop het antwoord 'Algebra en meetkunde!'. Ik zou nog verder gaan en Jean Dieudonné (1906-1992) citeren: "Het zou absurd zijn en tegen de geest zelf van onze wetenschap ingaan om haar te willen opdelen in rigide delen, op de wijze van de traditionele verdeling in algebra, analyse, meetkunde, etc. die heden ten dage compleet stukloopt."

Het dubbelzinnige verleden

Voor ik verder inga op muziek maken met wiskunde, grijp ik de eerste twee voorbeelden aan om u wat te vertellen over mijn eigen onderzoek van de afgelopen tien jaar. Wie mij kent weet dat ik in de wiskunde graag van de hak op de tak spring, wat ik zelf (zie het citaat van Dieudonné) als pluspunt ervaar. Nu zal ik proberen in deze potpourri een lijn te vinden.

Galoistheorie in hyperbolische meetkunde

In het eerste voorbeeld ging het om de dubbelzinnigheid die bestaat tussen de oplossingen van polynoomvergelijkingen. We weten van verrassend weinig polynomen wat de dubbelzinnigheid tussen de oplossingen precies is. In zekere zin hebben we weliswaar een wiskundige theorie over het meten van deze dubbelzinnigheid, maar het concreet bepalen daarvan, oftewel het berekenen van de Galoisgroep, is veel moeilijker. Wiskundigen zijn notoir lui als het om rekenen gaat.

Ik ben mijn carrière begonnen met het overwinnen van deze luiheid, namelijk: met het berekenen van Galoisgroepen in de theorie van modulaire vormen. De achtergrond vormt het werk van Issai Schur (1875-1941) aan de Galoisgroepen van klassieke orthogonale polynomen: ze zijn, in mooie traditionele terminologie, *zonder emotie* ('ohne Affekt').

Ik heb laten zien dat precies dezelfde dubbelzinnigheid optreedt in de hyperbolische meetkunde, namelijk voor de verzameling nulpunten van Eisenstein-reeksen op de modulaire kromme. De moraal is dat Eisensteinreeksen misschien wel een soort orthogonale polynomen zijn in het hyperbolische

vlak, compatibel met werk van Masanobu Kaneko en Don Zagier (1951).

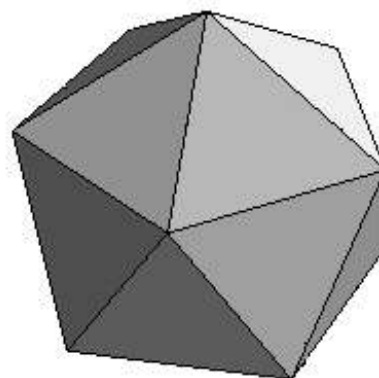
Vervorming van symmetrie

In het tweede voorbeeld ging het om dubbelzinnigheid in de meetkunde, die te wijten is aan symmetrieën, zoals in de Europese vlag. In het geval van mijn eigen onderzoek gaat het om het bestuderen van de vervormingen ('deformaties') van objecten die eventuele symmetrieën van het object behouden. Zo is de vlag symmetrisch onder het verwisselen van linker- en rechterkant.

In een jarenlang project met Fumiharu Kato (1968), Ariane Mézard (1974) en Jakub Byszewski (1984) heb ik onderzocht wat de structuur is van de 'deformatieruimte' van krommen met symmetrieën.

Niet-archimedische platonische lichamen

De meeste symmetrie ter wereld ligt verborgen in de zogenaamde platonische lichamen: de regelmatige convexe 4-, 6-, 8-, 12- en 20-vlakken tetraëder, kubus, octaëder, icoosaëder, dodecaëder. Het zijn de wonderen van onze alledaagse meetkunde. Men kan nu de vraag stellen of er zoiets als platonische lichamen bestaat in andere meetkundes. De-



Een 'normale' en een '2-adische' icoosaëder (gemaakt door Bill Casselman)

Roze ruis en dobbelstenen

Roze ruis kan met dobbelstenen als volgt worden benaderd: nummer drie dobbelstenen. Gooi eerst met alle dobbelstenen. Gooi vervolgens achtereenvolgens enkel met de derde, tweede en derde, derde, eerste en tweede, tweede en derde en enkel de derde dobbelsteen, en schrijf na iedere worp de som van de ogen van alle drie de dobbelstenen op (dus ook de dobbelstenen die zijn blijven liggen). Laat ieder getal tussen het minimale aantal ogen 3 en het maximale aantal ogen 18 corresponderen met een noot (bijv. in een chromatische toonladder).

ze vraag heb ik beantwoord in werk met Kato en Aristides Kontogeorgis (1972) voor *niet-archimedische meetkunde*. Die is anders dan de huis-, tuin- en keukenmeetkunde die u gewend bent, maar het is een natuurlijke manier om het klassieke ‘meten’ met reële getallen door te trekken naar andere gebieden: een getal is in dit soort meetkunde klein als het door een hoge macht van een gegeven priemgetal deelbaar is.

De verrassende fysische relevantie kwam o.a. met de berekening van de partitiefunctie van de Polyakovsnaar door Manin, en nu ook in het werk van Maxim Kontsevich (1964) en Yan Soibelman aan spiegelsymmetrie. Manin illustreert het verband tussen priemgetallenmeetkunde en fysica met volgende gelijkheid: het product van de uitdrukking ‘1 min het inverse kwadraat’ over alle priemgetallen is gelijk aan $6/\pi^2$. De linkerkant van deze gelijkheid is getaltheoretisch, en de rechterkant is ‘fysisch’, of ‘analytisch’.

Ons werk konden we gebruiken als ‘chemische’ bouwstenen voor het beantwoorden van de vraag wat voor symmetrieën er überhaupt mogelijk zijn in de niet-archimedische meetkunde.

Aantoonbare onmogelijkheid

Tenslotte wil ik nog kort ingaan op mijn onderzoek naar ‘aantoonbare onmogelijkheid’. Het is een sterk punt van de wiskunde dat zij haar eigen grenzen kent: ze weet soms heel

precies, op meetbare wijze, duidelijk te maken wat ze zelf niet kan. De dubbelzinnigheid waarover ik het hier heb is de onvolledigheidsstelling van Kurt Gödel (1906–1978).

Yuri Matijasevich (1947) gaf volgende versie van deze stelling: er bestaat een *spel*, zo iets als schaken, of kaartspelen, tussen uzelf en een andere speler, zo dat u bij iedere zet van de andere speler een winnende strategie heeft, maar die strategie niet door een computer kan worden berekend. Kortom: winnen is aantoonbaar altijd mogelijk, maar tegelijkertijd is het aantoonbaar onmogelijk de oplossing te berekenen. Als u in deze formulering ‘spel’ door ‘wiskunde’ vervangt, en ‘berekenen’ door ‘bewijzen’, komt u in de buurt van de stelling van Gödel.

Men kan wiskundig meten hoe onmogelijk iets is. De vraag hoe onmogelijk het is diophantische vergelijkingen op te lossen heb ik met Karim Zahidi (1972), Thanases Pheidas en Sasha Shlapentokh onderzocht via de onzichtbare elliptische krommen uit uw mobiele telefoon. Het is een kwantificatie van de onbeslisbaarheid bij Gödel.

Conclusie

Samenvattend, en terugkijkend naar de afgelopen jaren, zie ik het volgende patroon te voorschijn komen.

In de wiskunde hebben wij in de twintigste eeuw geleerd uit de nood een deugd te maken, door dubbelzinnigheid enerzijds, en onze onwetendheid of onkunde om iets te kunnen meten anderzijds, zélf te kwantificeren, en op die manier de grenzen van onze kennis om te zetten in een object dat we op zijn beurt dan weer met wiskunde kunnen bestuderen en meten. *Die Vermessung des Unvermögens zu Messen*. Ook dit is Galoistheorie.

We mogen niet te snel opgeven: een methode die niet werkt heeft vaak als oorzaak een interessant onderliggend fenomeen, dat we dan op zijn beurt weer kunnen bestuderen.

Ik denk hierbij aan de Bernoullilezing van mijn collega Hendrik Lenstra, waarin ‘onbegrip’ als belangrijke drijfveer voor het maken van nieuwe wiskunde wordt aangedragen. Aan het scala onderzoekstechnieken dat door Lenstra wordt opgesomd wil ik vandaag

De autocorrelatiefunctie

$$R : \{1, \dots, N-1\} \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$$

van een dataset $\{x_i\}_{i=1}^N$ is

$$R(k) = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})^2}$$

toevoegen: meet je onbegrip, en maak van deze meting een nieuw studie-object.

Hieruit kunnen wij misschien in de echte wereld, die ondertussen in de keuken flink is aangetaan, ook wat lering trekken. Onvermogen kan een kwaliteit zijn, mits begrepen. Als je weet dat je iets niet kan, probeer dan te meten in hoeverre je het niet kan.

Componeren met wiskunde

De dubbelzinnigheid in het trommelvormenprobleem wil ik gebruiken om u iets te vertellen over mijn huidige onderzoek.

Straks zullen we bekijken hoe een muziektoon is opgebouwd. Muziek bestaat echter niet alleen uit individuele tonen, maar uit een opeenvolging van tonen.

Die opeenvolging van tonen blijkt statistisch interessant gedrag te vertonen, zoals in de jaren 1970 werd ontdekt door Voss en Clarke. Als we een dobbelsteen opgooien voor iedere toon, dan krijgen we ‘witte ruis’ — het klinkt niet als muziek, want er is geen *correlatie* tussen tonen. Als we daarentegen een dobbelsteen opgooien en daarmee de afwijking ten opzichte van de vorige toon bepalen, is er wel een verband tussen opeenvolgende tonen. We krijgen dan ‘bruine ruis’, en het klinkt als erg saaie muziek, omdat er *te veel* correlatie tussen de tonen is. Bij analyse van bestaande muziek blijkt deze te voldoen aan een correlatieproces dat *roze ruis*, of *1/f-ruis* heet. Roze ruis kan ook met een dobbelstenen-proces worden benaderd. Voor een lerarensymposium in België hebben Karim Zahidi en ikzelf jaren geleden op die manier een aantal melodien bij mekaar gedobbel en van ritme en harmonie voorzien.

Helaas (of gelukkig?) hadden wij het dobbelrecept voor roze ruis echter verkeerd begrepen, doordat we bij iedere gooibeurt enkel de dobbelstenen opgeteld hadden die bij die beurt werden gegooid. Hierdoor ging heel wat correlatie verloren. Wij gooiden bij nader inzien gewoon willekeurig afwisselend met 3, 1, 2 en 1 dobbelsteen. Hierdoor vallen de waarden opeenvolgend in de intervallen 3 tot 18, 1 tot 6, 2 tot 12 en 1 tot 6. Er ontstaat dan



Voorbeeldcompositie 4 (met Karim Zahidi): muziek bij de reeks 15,3,6,4,13,4,5,5,13,5,7,2,12,4,9,4. Notenzetting: Derk Pik

echter een soort standaard ‘akkoordenstructuur’ waarbij vier opeenvolgende noten vanzelf een harmonie suggereren. Ik weet niet wat U vindt, maar ons hebben deze melodieën aangenaam verrast, en stiekem vind ik ze zelfs beter klinken dan ‘roze ruis’. Voor wie Karim kent is er maar één mogelijke naam voor dit proces: *dieprode* ruis. De autocorrelatiegrafiek laat zien dat dieprode ruis een zogenaamde ‘sinusoïdale’ correlatie vertoont; dit betekent grofweg dat de verbandenstructuur in deze melodie zélf de vorm van een pure boventoon heeft — een mooie zelfverwijzing.

De muziek van de relativiteitstheorie?

Hiermee komen we nu aan bij de wiskundige structuur van een individuele toon, het coloriet van een instrument. Wat we horen als we een vioolsnaar aanslaan, op een trommel slaan, of lucht door een orgelpijp jagen, bestaat uit een grondtoon en boventonen. De trillingen worden beschreven via de golfvergelijking, en de pure tonen corresponderen met zogenaamde eigenfuncties van de bijbehorende Laplace-operator. Die kunt u zich als volgt voorstellen. Als we een foto maken van een trillende snaar op een vast moment in de tijd, dan zien we een plaatje dat is opgebouwd uit het over mekaar leggen van dergelijke eigenfuncties: het zijn de sinussen en cosinussen van de middelbare school.

Het coloriet van een specifiek instrument is bepaald door de wijze waarop de boventonen gecombineerd worden, van een snerpende zaag tot een liefelijke blokfluit. De hoorbare informatie heet in de wiskunde ‘spectrale data’. Er zijn twee soorten vragen: inverse problemen, oftewel ‘Welke informatie is spectraal, dus hoorbaar?’, en directe problemen, oftewel ‘Wat weten we over het spectrum als we het instrument kennen?’.

Ter herinnering: volgens Weyl is oppervlakte spectraal, en volgens Gordon, Webb en Wolpert vorm niet.

De inverse spectrale vraag duikt voor het eerst op in een rapport van de natuurkundige Arthur Schuster voor de British Association in 1882. Schuster, de bedenker van de term ‘spectroscopie’, schrijft: “Een oplossing van het inverse probleem zou zelfs de meest bekwame wiskundige verbazen: de vorm van een klok afleiden uit de geluiden die ze kan voortbrengen. [...] Ondertussen moeten we zelfs de kleinste stap in deze richting vreugdevol verwelkomen.”

De chemische samenstelling van de zon kennen we *niet* doordat we een retourtje zon hebben gemaakt en een schepje helium meegebracht. We weten dat door te kijken en

spectroscopie te bedrijven.

Een verrassende toepassing van het inverse spectrale probleem uit de **gravitatie-theorie** dat erg dicht bij mijn huidige interesse staat is het werk van de Japanse fysicus Masafumi Seriu: het spectrum wordt gebruikt als afstandsmaat tussen verschillende oplossingen voor de vergelijkingen van Einstein voor het universum. Zoals u vast wel ooit heeft gehoord, is de ruimte waarin wij leven gekromd en zijn ‘ruimte’ en ‘tijd’ ondeelbaar met mekaar verbonden op kosmische schaal. De vergelijkingen van Einstein geven mogelijke modellen voor het universum, maar daar zijn er meerdere van.

In het bijzonder is er de vraag deze modellen met elkaar en met de realiteit te vergelijken. Een centrale vraag in de algemene relativiteit is ‘of cosmologie mogelijk is’, dat wil zeggen, of er een realistisch model is voor de complete evolutie van het heelal. Door Seriu wordt het spectrum gebruikt als afstand tussen verschillende universa. Maar het probleem van de ‘isospectraliteit’, dus dat de vorm van het universum niet noodzakelijk uit zijn klank is af te leiden, blijft bestaan. Hoe gaan we daarmee om? We zoeken het even op bij Riemann.

Riemann en Riemann

Als promovendus nam ik bij het surveilleren bij tentamens altijd een deel van het verzameld werk van een Groot Wiskundige mee, om door te bladeren en hier en daar in te lezen. Ik weet nog goed dat ik stukjes van Leopold Kronecker (1823–1891) zó kon lezen, maar dat ik van het werk van Bernhard Riemann (1826–1866) werkelijk niets begreep. Nu, vijftien jaar later, heb ik een jaar lang in zijn verzameld werk zitten lezen. Het is een boek van iets meer dan 500 bladzijden, waarvan er ongeveer 200 tijdens zijn leven gepubliceerd werden. Ik begrijp er nog steeds niks van. Ik neem nu de uitdaging aan te proberen aan dit werk een ‘epsilon’ toe te voegen. ‘Epsilon’ is wiskundejargon voor ‘een verwaarloosbaar kleine kwantiteit’.

Riemann leverde ons fundamentele con-



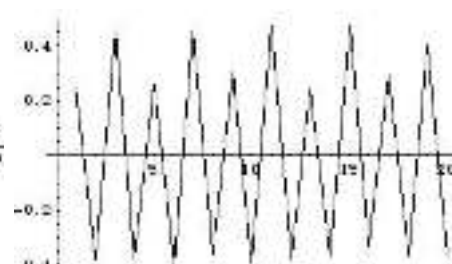
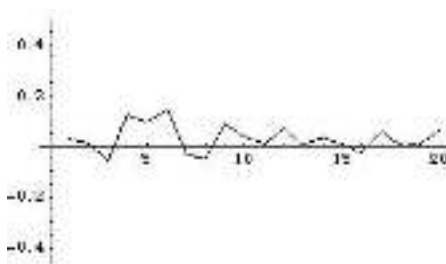
Foto: Arthur van Dam

Organist Gert Oost (1942–2009) improviseert ‘dieprode ruis-muziek’ op het Hinszorgel tijdens de oratie.

cepten als de Riemann zeta-functie en Riemannse meetkunde, en ik heb beide nodig.

Eerst iets over de **Riemann zeta-functie** en de Riemann-hypothese, het beroemdste open probleem in de wiskunde. Het spectrum (de boventonen) worden in de wiskunde samengepakt in een *zeta-functie*. De Riemann zeta functie hoort bij de boventonen van een cirkelvormige snaar.

De getaltheoretici in de zaal huiveren van mijn definitie van de Riemann zeta-functie. Immers, voor hen (en voor mij) meet de zeta-functie hoe priemgetallen verdeeld zijn. Als je



Autocorrelatiefunctie (zie kader op de vorige pagina) voor witte (links) en dieprode (rechts) ruis, op basis van een simulatie met 250 ‘random’ tonen in Mathematica

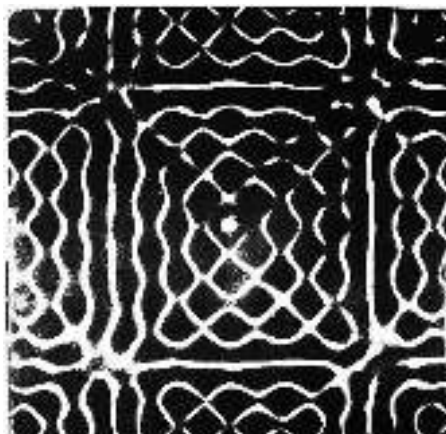


Foto: Stephen Morris, Experimental Nonlinear Physics, University of Toronto

Chladni-patroon op een zwart geschilderde 0.125 inch dikke vierkante aluminium plaat van 70x70 cm, bij 3678.1 Hz

begint te kijken waar in de natuurlijke getallen de priemgetallen zitten, dus getallen met als enige delers zichzelf en 1, dan lijkt dat in eerste instantie willekeurig. Maar op basis van lange berekeningen zag Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dat de priemgetallen wel degelijk gemiddeld op een bijzondere manier in de verzameling van alle getallen liggen. En de fout die wordt gemaakt tussen de werkelijke verdeling van de priemgetallen en die van Gauss is het ‘minst opvallend’ precies als de Riemannhypothese klopt. Trouwens, met Oliver Lorscheid (1978) heb ik in de afgelopen jaren een oud idee van Don Zagier opgepikt om dit te proberen bewijzen — uiteraard met epsilon succes. Toch is deze getaltheoretische zeta-functie hetzelfde als die van de cirkelvormige snaar, en dat is het begin van het grote mysterie. Als we de titel van het populaire boek van Marcus du Sautoy, ‘De muziek van de priemgetallen’ bekijken, dan krijgen we de indruk ook naar de priemgetallen te kunnen luisteren. Met het spectrum dat bij de priemgetallen hoort kun je inderdaad echt een toon voortbrengen, dat heeft Sir Michael Berry een keer gedaan, maar over het resultaat lopen de meningen uiteen. ‘In ieder geval beter dan Wagner’, heb ik een keer gehoord.

Een ander fundamenteel concept van Riemann is de zogenaamde **Riemannse meetkunde**, een flexibele modelmeetkunde, met enige aanpassingen bruikbaar in de relativiteitstheorie. Er is namelijk niet één meetkunde, maar er zijn er vele. Het leven op een bol is anders dan in een plat vlak; op grote schaal althans. Op een bol kom je bijvoorbeeld na lange tijd weer terug waar je bent begonnen, en op de vlakke eindige aarde val je ergens over de rand tussen monsters.

Floris Takens (1940) vroeg mij vorig jaar: hoe is het mogelijk verschillende Riemannse meetkundes te vergelijken, want ze zijn uit

lokale informatie opgebouwd. De aanleiding voor deze vraag was een misverstand: ik wilde graag een goede notie van ‘hetzelfde zijn’ in de niet-commutatieve meetkunde bedenken, laat staan alles met elkaar vergelijken. Maar het heeft me toch aan het denken gezet.

Riemannse meetkundes brengen geluid voort. De spectrale meetkunde, dat wil zeggen Riemannse meetkunde vanuit het standpunt van de Laplace-operator, de zeta-functie, dus het ‘geluid’ dat de meetkunde voortbrengt, heeft in de afgelopen twintig jaar een vlucht genomen in het bouwwerk van Alain Connes, genaamd *niet-commutatieve meetkunde*. Ik zal u de details hiervan besparen, maar de wortels ervan zijn te vinden in de kwantummechanica. Een probleem met dit pas twintig jaar jonge gebied van de wiskunde wordt treffend samengevat in volgend citaat van Yuri Manin: “Niet-commutatieve meetkunde ziet er vandaag uit als een gigantische bouwput, maar het ontbreekt aan een gemeenschappelijk fundament: van veel interessante constructies van ‘niet-commutatieve ruimten’ kunnen we zelfs niet met zekerheid zeggen of ze hetzelfde zijn of niet.” Vandaar mijn vraag naar ‘hetzelfde zijn’.

Nu is het in de niet-commutatieve meetkunde gebruikelijk om naar *families* van zeta-functies te kijken, geïndiceerd door functies op de meetkunde die men als muziekinstrument gebruikt.

Dit roept meteen de vraag op of die families van zeta-functies *wel* de meetkunde, ons muziekinstrument, uniek bepalen; een centraal punt in mijn huidige onderzoek. Met Matilde Marcolli (1969) heb ik vorig jaar al aangetoond dat trommels in de vorm van een gesloten oppervlak (eigenlijk compacte hyperbolische Riemannoppervlakken) reconstrueerbaar zijn uit een dergelijke Connesachtige meetkunde. Nu werk ik aan het geval van een algemene Riemannse meetkunde.

Als antwoord construeren wij bij ieder paar diffeomorfe Riemannse meetkundes een *veld* van zeta-functies. Als de theorie werkt, dan geeft een constant zetaveld gelijke meetkundes. Een holomorf veld duidt op een overdekking. In het algemene geval is dit zetaveld een maat voor het verschil tussen de Riemannse meetkundes. Dit is dan een soort antwoord op de vraag van Takens. We weten nog niet in hoeverre deze theorie werkt; we weten bijvoorbeeld wel al dat een constant veld gelijkheid impliceert in een residuele verzameling Riemannse metrieken op de gegeven ruimte.

In plaats van hier verder op in te gaan, verwijs ik naar een filmpje van een object dat in het bewijs een belangrijke rol speelt: de

knopenverzamelingen, oftewel de nulpuntsverzamelingen van de eigenfuncties. Die werden voor een vlakke trillende glasplaat voor het eerst zichtbaar gemaakt in een experiment van Robert Hooke (1635-1703) in 1680, dat werd herhaald en populair gemaakt door Ernst Chladni (1756-1827). Ondertussen gebruikt een new age bedrijf dit zelfs om uw eigen stemgeluid in een psychedelisch patroon om te zetten. Hooke en Chladni strooiden fijn zand op een glazen of metalen plaat die ze vervolgens lieten trillen. Het experiment is aan de Wake Forrest University opgenomen. Bekijk eens het spectaculaire filmpje met zout gestrooid op een luidsprekerplaat (<http://www.wfu.edu/academics/physics/demolabs/demos/avimov/waves/chladni.plates/resonance.square.MPG>). Voor mijn wiskundige collega's nog de opmerking dat we hier niet alleen de nulpuntsverzamelingen van de eigenfuncties van de Laplace-operator zien, want we hebben niet van doen met de gebruikelijke golfvergelijking. In deze patronen komen symmetrie en trommels weer op een verrassende manier samen.

Ik zou mijn onderzoeksprogramma als volgt willen samenvatten: door kwantummechanisch, dat wil zeggen met het veld van zetafuncties uit de niet-commutatieve meetkunde, te luisteren naar klassieke instrumenten, kunnen we die instrumenten reconstrueren. Dit luisteren gebeurt door zoiets als het afdekken van gedeelten van de trommel en luisteren naar het geluid dat dan wordt voortgebracht. Een soort trommelspel met twee handen, dus.

Maar wacht, de zeta-functie was toch iets getaltheoretisch? De vraag is dan ook wat voor implicaties of analogieën dit werk weer heeft voor de getaltheorie. Sir Michael Atiyah zei al dat het ‘Fort der Getaltheorie’ het volgende is dat door methodes uit de mathematische fysica zal worden overwonnen. Ik heb hier geen voorstelling bij, maar intrigerend is het wel.

Men neme het universum, en twee heel erg grote handen. Met één hand wordt stukje bij beetje het universum afgedekt. Met de andere hand wordt op het universum getrommeld. We bekijken de wonderbaarlijke Chladni-patronen. Zo kunnen we precies horen en zien in welk universum we onszelf bevinden. Als u zich ooit door mekaar geschud voelt, dan is het misschien wel omdat mijn onderzoeksgroepje weer eens het universum aan het aftasten is.

Volledige versie

De volledige tekst met annotaties, vertalingen, foto's en geluidsfragmenten vindt u op www.math.uu.nl/people/cornelis/oratie/oratie.shtml

Matthijs Coster

Militaire Inlichtingen- en Veiligheidsdienst (MIVD)
Postbus 20701
2500 ES Den Haag
matthijs@coster.demon.nl

Bart Jacobs

Institute for Computing and Information
Sciences (ICIS)
Radboud Universiteit Nijmegen
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
b.jacobs@cs.ru.nl

Klaas Landsman

Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle
Physics (IMAPP)
Radboud Universiteit Nijmegen
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
landsman@math.ru.nl

De overval: Fox-IT

Bescherming van staatsgeheimen, digitaal rechercheonderzoek, beveiligingsexpertise: Fox-IT levert wereldwijd wiskundig onderbouwde security- en intelligence oplossingen aan overheden en maatschappelijk belangrijke organisaties. Matthijs Coster, wetenschappelijk onderzoeker crypto-analyse bij de Militaire Inlichtingen- en Veiligheidsdienst, hoogleraar Digital Security Bart Jacobs en NAW-medewerker Klaas Landsman overvielen het bedrijf op 6 maart 2009.

Ronald Prins (40) is net terug uit Dubai en vliegt morgen naar Aruba. Hij is één van de drie directeurs van Fox-IT, dat naast het hoofdkantoor in Delft ook nevenvestigingen in Aruba en Engeland heeft. Als we samen met hem de bedrijfskantine inlopen schakelt hij een rode lamp in, die de lunchende medewerkers erop attendeert dat er bezoekers zijn. Gesprekken over staatsgeheimen worden onmiddellijk gestaakt en maken plaats voor de vriendelijke vraag wie wij zijn. Wiskundigen? Ja, mompelt men, daar hebben we er wel een paar van in huis. Maar de meerderheid van de bijna honderd medewerkers (onder wie twintig vrouwen) komt uit gebieden als informatica, natuurkunde en elektrotechniek. Prins zelf heeft wel degelijk wiskunde gestudeerd. Hij was als scholier al geïnteresseerd in cryptografie en raakte via het lezen van het legendarische blad *Hack-tic* van Rop Gongrijp en

anderen betrokken bij de hackers-scene. Hij studeerde na een stage bij Digicash af aan de TU Delft op *applied addition chains*, een slimme manier om met behulp van zo min mogelijk vermenigvuldigingen te machtsverheffen — relevant bijvoorbeeld voor Smartcards. Vervolgens begon hij met promotieonderzoek aan de TU Eindhoven onder leiding van Henk van Tilborg en werkte tegelijk als crypto-analyst bij het Nederlands Forensisch Instituut (NFI, voorheen het Gerechtelijk Laboratorium). Ook bij zijn volgende werkgever, de Algemene Inlichtingen- en Veiligheidsdienst (AIVD), vond hij dat het allemaal niet snel genoeg ging. Om zelf achter de knoppen te kunnen zitten richtte hij samen met technisch natuurkundige en voormalig NFI-collega Menno van der Marel in maart 1999 het bedrijf Fox-IT op. Promoveren zou er niet meer van komen, de potentiële doctorstitel werd verruild voor “het waarmaken van een jongensdroom” — inclusief Maserati.

Het bedrijf loopt namelijk bepaald niet slecht. De oprichters brachten een flink netwerk mee van hun tijd bij het NFI en konden meteen aan de slag met het verzorgen van trainingen en het uitvoeren van opdrachten voor de overheid (zie kader). Tien jaar later blijft de Nederlandse staat verreweg de belangrijkste opdrachtgever, maar heeft Fox-IT ook meer dan honderd bedrijven als klant om de missie van het bedrijf uit te voeren: het bijdragen aan een veiligere samenleving (“*Making technical and innovative con-*

tributions for a more secure society”). Hierbij moeten we eerder denken aan de wereld van James Bond dan aan die van Pieter van Vollenhoven: het gaat bij Fox-IT om zaken als de bescherming van staatsgeheimen, digitaal rechercheonderzoek voor grote fraude- en hackingonderzoeken, *security audits* binnen complexe en vertrouwelijke omgevingen, *security monitoring* voor de bewaking van informatie binnen organisaties, en tenslotte de ontwikkeling van software voor

Samenwerking met NBV

De meeste opdrachten van Fox-IT komen uit het veiligheidsdomein van de Nederlandse overheid, geen ministerie uitgezonderd. Daarbij heeft Fox-IT intensief contact met het Nationaal Bureau voor Verbindingsbeveiliging (NBV). Dit is een aparte club binnen de Algemene Inlichtingen- en Veiligheidsdienst (AIVD, de voormalige BVD) die een belangrijke vinger in de pap heeft bij de technische middelen die de Rijksoverheid gebruikt om haar geheimen te beschermen. Er werken veel wiskundigen (vooral cryptologen) en informatici. Belangrijke NBV-taken zijn het beheer van cryptografische sleutels (bijvoorbeeld voor Defensie of Buitenlandse Zaken) en de beoordeling van beveiligingsproducten (waaronder de verderop genoemde Tiger telefoons). Fox-IT werkt nauw samen met het NBV, bijvoorbeeld bij de ontwikkeling van de nieuwe ‘RedFox’ cryptochip voor de overheid. Dit is de beoogde opvolger van de huidige generatie cryptochips die in gebruik zijn voor de bescherming van staatsgeheimen.



Ronald Prins

Foto: Klaas Landsman

het analyseren van getapt internetverkeer.

Tot voor kort maakte de ministerraad gebruik van BlackBerry, een Personal Data Assistant (PDA) die kan worden gebruikt voor mobiele telefonie, mobiel internet en e-mail. Al het dataverkeer wordt versleuteld over de lijn, maar op de BlackBerry server wordt het dataverkeer weer ontcijferd. De BlackBerry kwam in opspraak na speculaties over de Amerikaanse regering die de BlackBerry stelselmatig zou af luisteren. Inmiddels maken de Nederlandse bewindslieden gebruik van het door Fox-IT ondersteunde systeem van Tiger telefoons. Hoe deze Tigers precies werken moet helaas geheim blijven, maar een veel gebruikte technologie voor sleuteluitwisseling in dit soort systemen is de zogenaamde Diffie-Hellman key exchange (zie kader).

Het gesprek komt op het vertrouwen tussen landen. In hoeverre kunnen we als Nederlandse staat vertrouwen dat we niet worden afgeluisterd door een andere staat of misschien zelfs een bondgenoot? De hierboven genoemde speculaties over het mogelijk af luisteren door de Amerikaanse regering voorstellen niet veel goeds. Fox-IT streeft ernaar om de Nederlandse overheid veilig te laten communiceren. Het irriteert Ronald Prins dan ook mateloos als een Nederlandse ambtenaar een paar tientjeswil besparen door Nederlandse beveiligingstechnologie te vermengen met goedkopere componenten van onbekend fabricaat.

De business unit van Fox-IT die zich richt op het maken van producten voor de bescherming van staatsgeheimen, zoals de Tiger telefoons, heet *Crypto* en zit in de directie-

portefeuille van Prins. De hele Crypto-group blijkt zich te bevinden in een zogenaamde Verboden Ruimte, waar we overigens zonder al te veel aandringen een kijkje mogen nemen. Al wordt ons bezoek in het logboek geregistreerd, de sfeer lijkt uitgesproken relaxed en de situatie verschilt slechts in één opzicht van een normaal ICT-bedrijf: er bestaat geen internetverkeer tussen deze Verboden Ruimte en de buitenwereld (met uitzondering van twee PC's in een hoekje, die echter niet met de andere computers in de ruimte verbonden zijn). De medewerkers van de Crypto-group kunnen dus niet van huis inloggen op hun computer op het bedrijf. Navraag leert dat dit niet leidt tot extreem lange werkdagen; medewerkers die tot diep in de nacht doorwerken zouden wantrouwen opwekken. *Nadenken* over geheime apparatuur en versleuteling mag wel buiten de werkplek; het gebeurt dan ook vaak dat men juist op de fiets of onder de douche dé oplossing vindt.

Het is opmerkelijk dat de algehele sfeer van geheimhouding waarin de Crypto-group werkt die van de opdrachtgevers weerspiegelt. Het lijkt onvoorstelbaar voor de standaard internetgebruiker, maar in een high-security omgeving is het (zoals dus ook bij bepaalde onderdelen van Fox-IT zelf) meestal verboden om een fysieke verbinding (hard of wireless) te hebben tussen onderdelen van een netwerk die verschillende rubriceringen hebben (zie kader staatsgeheim). In zo'n situatie dient gebruik te worden gemaakt van een floppydisk, USB-stick, cd of dvd, met als gevolg dat dergelijke media na gebruik wellicht vernietigd dienen te worden. De gebrui-

Diffie-Hellman key exchange.

Zij G een eindige cyclische groep met generator g ; in de oorspronkelijke versie van het protocol is $G = \mathbb{Z}_p$ (de multiplicatieve groep van gehele getallen modulo p voor een priemgetal p) en is g een primitieve wortel modulo p . Als de orde van G voldoende groot is (in dit voorbeeld is dat zo als p in binaire notatie uit minstens honderd cijfers bestaat), dan blijkt het praktisch onmogelijk te zijn om x terug te vinden uit g^x (mits ook x voldoende groot is); dit is het 'discrete logaritme probleem'. Deze x is de geheime sleutel die de telefoon van van beller A bij ieder gesprek opnieuw aanmaakt. Als eerste stap van de versleuteling stuurt A zijn gesprekspartner B openlijk g^x . De telefoon van B maakt nu zijn geheime sleutel y aan, en stuurt A — wederom openlijk — g^y . Zonder y te hoeven kennen berekent A's telefoon nu $(g^y)^x = g^{xy}$. Omgekeerd berekent B $(g^x)^y = g^{xy}$, hetgeen ook gelijk is aan g^{xy} ! Beiden hebben nu dezelfde geheime sleutel g^{xy} in handen en kunnen versleuteld gaan bellen. Het fascinerende is dat een gedeelte geheim wordt verkregen door uitsluitend publieke boodschappen uit te wisselen. Dit idee, een keerpunt in de cryptografie, is in 1976 gepubliceerd door de cryptologen Whitfield Diffie en Martin Hellman.

ker van een machine met gerubriceerde informatie kan geen contact maken met de buitenwereld, laat staan zijn e-mail lezen. Het probleem is daarbij niet zo zeer de datastroom naar de gebruiker toe, maar de potentiële lekkage van hem vandaan. Dit probleem heeft de Crypto-group opgelost met de *Fort Fox Data Diode*. Het is zelfs mogelijk dat iemand op een gerubriceerd netwerk met deze vinding zijn e-mail van internet kan lezen, maar het is niet mogelijk op deze e-mail te reageren, omdat er in dat geval informatie van het gerubriceerde netwerk zou weglekken naar het (ongerubriceerde) internet.

Prins heeft ook een tweede business unit in zijn portefeuille, genaamd *FoxReplay*. Deze houdt zich bezig met de interceptie van dataverkeer in opdracht van politie en intelligence organisaties wereldwijd; de directeur meldt met enige trots dat Fox-IT wereldleider is op het gebied van technologie voor het aftappen van het internet.

Maar hoe zit het nu toch met de wiskunde bij Fox-IT? Prins geeft ruiterslijk toe dat hij er in zijn werk zelden tot nooit gebruik van



Bart Jacobs en Matthijs Coster voor het Fox-IT gebouw in Delft

Foto: Klaas Landsman

Soorten van staatsgeheim

Zeer Geheim

De hoogste classificatie van geheim. Als dergelijk materiaal publiek raakt, dan zou daardoor zeer grote schade kunnen ontstaan t.a.v. de (inter)nationale veiligheid. (Denk aan een offensief tegen de Taliban)

Geheim

Als dergelijk materiaal publiek raakt, dan zou daardoor grote schade kunnen ontstaan t.a.v. de (inter)nationale veiligheid.

Vertrouwelijk

Als dergelijk materiaal publiek raakt, dan zou daardoor schade kunnen ontstaan t.a.v. de (inter)nationale veiligheid.

Ongerubriceerd

Materiaal dat onder geen van bovengenoemde rubriceringen valt.

Computers (en netwerken) waarop wordt gewerkt met een zekere rubricering dienen gescheiden te zijn van andere rubriceringen.

maakt; zijn typische dag bestaat uit de omgang met klanten ("we babbelen en er komt wel wat uit") en het bedenken van nieuwe investeringen. Hij doet naar eigen zeggen niets technisch meer, maar ziet als voordeel dat hij de techniek eventueel wel aan de klant kan uitleggen.

Om verder te komen met onze vraag voegt de eveneens in Delft afgestudeerde wiskundige Eelse-Jan Stutvoet zich na de lunch bij ons, geflankeerd door (de alweer Delftse) elektro-technicus Bartek Gedrojc. Ondanks zijn jeugdige verschijning — allerminst een uitzondering in het bedrijf — behoort Stutvoet qua dienstjaren tot de oudste medewerkers van Fox-IT, waar hij al tijdens zijn studie een deeltijdbaantje had. Gedrojc werkt daarentegen pas een paar maanden bij het bedrijf: hij is bijna klaar met zijn proefschrift in de cryptologie (begeleiding: Jan van der Lubbe, promotor Inald Lagendijk). Met vooruitziende blik werkte Gedrojc al in 2005 aan de beveiliging van het Elektronisch Patiëntendossier, maar hij hield zich ook bezig met de beveiliging van e-commerce en aanverwante problematiek. Ondanks deze voor de Crypto-groep perfecte achtergrond, en ofschoon zijn coauteur Martin van Hensbergen zelfs bij Fox-IT werkt, kwam Gedrojc er min of meer toevallig terecht.

Maar ja, ook Gedrojc en Stutvoet erkennen dat ze nauwelijks wiskunde gebruiken, al is de cryptologie daar grotendeels op gebaseerd.

Het gaat veel meer om slim programmeerwerk rond bestaande cryptografische protocollen, al merkt de laatste op dat het (soms!) handig is om te weten hoe zo'n protocol precies werkt. "Handig maar niet noodzakelijk", dat is het oordeel over zijn wiskundige achtergrond. Zoals we van talloze werkgevers horen, worden wiskundigen niet aangenomen om hun kennis van algebra en meetkunde, maar omdat men verwacht dat ze analytisch kunnen denken (en dan niet in de zin van ϵ en δ) en, laten we het ruiterlijk toegeven, slim zijn.

Hoe gaan deze slimmeriken om met het thema geheimhouding? Typerend voor Fox-IT is namelijk dat als het product al niet geheim is, de klant dat wel is. Alle medewerkers worden dan ook door de AIVD gescreend. Is het niet vervelend dat je zelfs met je partner niet over sommige zaken mag praten? Het blijkt geen issue, al helemaal niet buiten de Cryptogroep. Maar zelfs binnen die afdeling zit de geheimhouding hem vaak in technische details waar je sowieso niemand mee lastig zou willen vallen. In ieder geval is er nog nooit iets gelekt en is nog nooit iemand ontslagen.

Dit leidt wel tot de vervolgvraag naar de cultuur binnen Fox-IT: zijn het hackers in het diepst van hun gedachten, of eerder JOVD-ers die onze rechtsstaat willen beschermen? Het zit tegen het eerste aan. Om recht te doen aan de kernwaarde van Fox-IT, 'leading edge innovation', moeten de medewerkers op een speelse manier de grenzen van de technologie op willen zoeken, en om de tegenstander te doorgronden en te simuleren moeten ze ook niet vies zijn van de grenzen van de moraal. Sterker nog: "Je mag de grens opzoeken in het grijze gebied tussen wat precies wel en niet mag." Morele dilemma's zijn er niettemin op een ander vlak: wil je meewerken aan aftapsoftware voor het internet waarmee de geheime dienst van Saudi-Arabië homo's gaat vervolgen om hun hand af te hakken — of, zoals in Iran, ze aan een hijskraan op te hangen? Het is het typische probleem van alle *dual use goods*: met dezelfde technologie waarmee een zelfmoordaanslag op een markt kan worden voorkomen, gaat ook de repressie of de georganiseerde misdaad aan de haal. Aan Tiger telefoons zullen criminelen overigens niet snel komen, maar bijvoorbeeld de door Gongrijp geproduceerde cryptofoon (waarin het Diffie-Hellman protocol wordt gebruikt) kunnen ze gewoon kopen.

Al is de wiskundige spoeling dan dun, het Overvalteam ging enthousiast naar huis en kan Fox-IT van harte aanraden aan al dan niet gepromoveerde wiskundigen op zoek naar een leuke baan. Heeft het ook daadwerke-

Data diode

Een succesvol product van Fox-IT is de zogenaamde data diode. Dit systeem laat gegevens slechts in één richting door. Het eenrichtingsverkeer wordt uiteindelijk op een fysiek niveau met hardware gerealiseerd door alle overdracht via een LED (light emitting diode) en een lichtsensor te laten verlopen.

Het grote voordeel van de data diode, namelijk het garanderen van eenrichtingsverkeer, behelst tevens een nadeel: bij veel communicatieprotocollen worden korte controleberichten teruggestuurd die aankomst bevestigen of juist vragen om herzending. Sommige diensten kunnen dus slechts in beperkte mate via de data diode lopen. Je kunt er je mail bijvoorbeeld wel mee lezen, maar niet versturen.

Wie wil zoiets? De klanten van Fox-IT hebben vaak verschillende netwerken, met verschillende niveaus van vertrouwelijkheid. Het laagste niveau heeft een verbinding met het internet, maar de andere niveaus zijn daar fysiek van gescheiden. Overdracht van gegevens tussen zulke netwerken kan in de praktijk alleen plaatsvinden via een fysieke drager, zoals een USB stick of een dvd. Deze omslachtige 'air gap' methode draagt allerlei risico's in zich; de USB sticks en dvd's moeten bijvoorbeeld na de overdracht zorgvuldig gewist of vernietigd worden. Met een data diode daarentegen kun je wel degelijk zorgeloos informatie van laag (zwart) naar hoog (rood) laten lopen. Zodoende kan de generaal op zijn zeer vertrouwelijke netwerk zien wat er gaande is in de onbetrouwbare buitenwereld.

lijk zin om te solliciteren? Jawel! Prins verzucht dat het moeilijk is om goede medewerkers te vinden en dat hij daar permanent naar op zoek is. "Ik zie vaak het verschil tussen de manier waarop een academicus iets oppakt en een hbo-er." Hij zoekt de combinatie van de slimheid van een academisch opgeleid wiskundige of fysicus met de "handigheid achter het toetsenbord". Een informaticus die alles al in huis heeft is natuurlijk helemaal mooi. Tegen alle managementfilosofieën in vult Prins geen vacatures op, maar bouwt hij een functie om zo iemand heen. Wie het leuk vindt mag na drie tot vijf jaar het management in, zoals bij vele andere technologiebedrijven, maar zo niet, dan niet. "Mensen worden beoordeeld op hun creativiteit." ←

Klaas Pieter Hart

Faculteit EWI

TU Delft

Postbus 5031

2600 GA Delft

k.p.hart@tudelft.nl

Onderzoek A dead horse by E.W. Dijkstra

On the theorem of Pythagoras

Edsger Wybe Dijkstra (1930–2002) is een informatica-icoon met een heel eigen plek. Van oorsprong theoretisch fysicus, werd hij in 1952 de eerste Nederlandse programmeur aan het Mathematisch Centrum in Amsterdam. Noodgedwongen werden toen programmatuur en documentatie geschreven voor een computer die nog gebouwd moest worden. De techniek schreed voort en de computer werd dagelijks onderdeel van vrijwel ieder beroep, maar Dijkstra bleef trouw aan het werken op papier. In zijn loopbaan was Dijkstra hoogleraar aan de Universiteit Eindhoven en de University of Texas at Austin. In 1972 ontving hij de prestigieuze Turing Award. Hij oogstte internationaal veel waardering en heeft nog altijd enthousiaste volgelingen, maar kwam met zijn kritische en rechtlijnige houding ook regelmatig in conflict met collega's. Dijkstra is vooral bekend om zijn algoritmen zoals het 'kortste pad-algoritme', zijn pioniers-werk aan gedistribueerde systemen, en zijn methode voor foutvrij programmeren: door een programma in stapjes te construeren uit de wiskundige specificatie, verkrijgt men een gegarandeerd correct product. De bijdrage die volgt is een manuscript uit zijn EWD-serie [1].

Iedereen kent de stelling van Pythagoras: "... oh ja, $a^2 + b^2 = c^2$..." Hoeveel mensen weten waar de a , b en c voor staan, dat is een ander verhaal; de helft? tien procent? Hoeveel mensen kunnen de stelling bewijzen? En hoeveel mensen weten dat de stelling ook omgekeerd kan worden, dat wil zeggen: als $a^2 + b^2 = c^2$ dan vormen a , b en c een rechtehoekige driehoek met c als hypotenusa. Stratenmakers en hoveniers gebruiken deze omkering als ze met behulp van de 3-4-5-steek een rechte hoek uitzetten.

De stelling van Pythagoras lijkt de meest-bewezen stelling uit de Wiskunde; de meest uiteenlopende figuren hebben zich er aan gewaagd, van Multatuli tot de Amerikaanse president Garfield. Zo ook Edsger Dijkstra; in zijn rondschrijven genummerd EWD975 deed hij, in een fraai handschrift, zijn eigen duit in het zakje. We kunnen slechts raden naar zijn drijfveren maar zijn analyse van de formulering van de stelling en zijn herformulering ervan doen sterk denken aan een wens de stelling en het bewijs in één of ander formeel systeem

onder te brengen: hij kwam tot een gelijkheid die voor *alle* driehoeken geldt. Ook zijn commentaar na het bewijs, "Three cheers for formalism", wijst in die richting.

In de opmerkingen vinden we nog een impliciete vraag: "lack of axiomatization forced us to resort to a picture". Is er, uitgaande van een goede axiomatisering van de vlakke meetkunde, een synthetisch bewijs van Dijkstra's formulering te bedenken, zonder plaatjes en liefst zonder al te veel gevallen te onderscheiden? Op de website Cut-the-Knot [2] staat een bewijs dat gebruik maakt van de cosinusregel. Het is de vraag of dat uiteindelijk eenvoudiger is want de bewijzen van die regel kunnen ook uitlopen op gevallen onderscheiden.

Hoe dan ook: geniet van een fraai opgeschreven stukje Wiskunde.

Referenties

1. www.cs.utexas.edu/users/EWD
2. www.cut-the-knot.org/pythagoras/Dijkstra.shtml



Edsger W. Dijkstra in januari 2002

Copyright: Hamilton Richards

EWD975-0

On the theorem of Pythagoras

For the theorem of Pythagoras, I start from Coxeter's formulation ("Introduction to Geometry", p. 8):

"In a right-angled triangle, the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the two catheti."

Let us play a little bit with that formulation. In a triangle with sides a , b , and c - different from 0 so as to make its angles well-defined - we introduce the usual nomenclature α , β , and γ for their respective opposite angles. (We introduced one angle name so as to be able to express right-angledness, and the other two for reasons of symmetry.)

A formal expression of Coxeter's formulation is

$$\gamma = \pi/2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Besides the nomenclature we introduced, this formulation contains the (transcendental!) constant π . Fortunately we can eliminate it thanks to

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma$$

Elementary arithmetic yields the equivalent formulation

$$\alpha + \beta = \gamma \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Isn't that nicely symmetric? It immediately suggests - at least to me - the strengthening

$$(b) \quad \alpha + \beta = \gamma \equiv a^2 + b^2 = c^2$$

EWD975-1

(This will turn out to be a theorem.) We get an equivalent formulation by negating both sides:

$$\alpha + \beta \neq \gamma \equiv a^2 + b^2 \neq c^2$$

But $x \neq y \equiv x < y \vee x > y$, and the latter disjuncts are mutually exclusive. Remembering that the larger angle is opposite to the larger side, is it bold to guess

- (1) $\alpha + \beta < \gamma \equiv a^2 + b^2 < c^2$ and
 (2) $\alpha + \beta > \gamma \equiv a^2 + b^2 > c^2$?

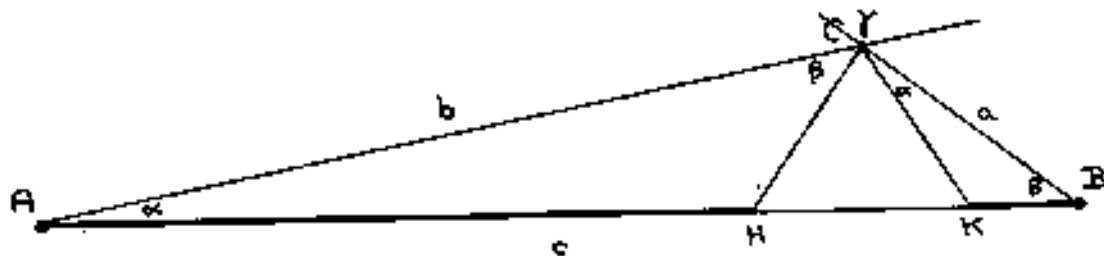
Bold perhaps, but not unreasonable.

Note that (0), (1) and (2) are not independent: from any two of them the third can be derived. They can be jointly formulated in terms of the function sgn - read "signum" - given by

$$\text{sgn}.0 = 0 \wedge (\text{sgn}.x = 1 \equiv x > 0) \wedge (\text{sgn}.x = -1 \equiv x < 0),$$

viz. $\text{sgn}.(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn}.(a^2 + b^2 - c^2)$

Consider now the following figure. We have drawn



the case $\alpha + \beta < \gamma$, in which the triangles $\triangle CKB$ and $\triangle AHC$, of disjoint areas, don't cover the whole of $\triangle ACB$; denoting the area of $\triangle XRY$ by "XRY" we have in this case

EWD975-2

$$CKB + AHC < ACB \quad .$$

In the case $\alpha + \beta = \gamma$, H and K coincide and we have

$$CKB + AHC = ACB \quad ,$$

and in the case $\alpha + \beta > \gamma$, the two triangles overlap and we have

$$CKB + AHC > ACB \quad .$$

In summary

$$\text{sgn.}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn.}(CKB + AHC - ACB) \quad .$$

The three areas at the right-hand side are those of similar triangles and hence have the same ratios as the squares of corresponding lines, in particular

$$\frac{CKB}{a^2} = \frac{AHC}{b^2} = \frac{ACB}{c^2} > 0 \quad ;$$

hence

$$\text{sgn.}(CKB + AHC - ACB) = \text{sgn.}(a^2 + b^2 - c^2) \quad .$$

Hence we have proved

$$\text{sgn.}(\alpha + \beta - \gamma) = \text{sgn.}(a^2 + b^2 - c^2) \quad ,$$

a theorem, say, 4 times as rich as the one we quoted from Coxeter.

* * *

The title of this note could make one wonder why I would waste my time flogging a horse as dead as Pythagoras's Theorem. So let us try to summarize what we could learn from this

EWD975-3

exercise.

- Three cheers for formalization! Instead of setting out to prove $a^2 + b^2 = c^2$ for a right-angled triangle, we included the antecedent $\gamma = \pi/2$ in the formal statement of what was to be proved. It was only after the introduction of π that we could eliminate it and meet the "nicely symmetric" formulation.

- Three cheers for the equivalence! It makes quite clear that the theorem is not about right-angled triangles, but about triangles in general.

- Three cheers for the notational device captured in sgn . If we had not been careful, we would have ended up proving

$$(\alpha + \beta) \underline{R} \gamma \equiv (a^2 + b^2) \underline{R} c^2$$

for $\underline{R}$ any of the six relations $=, \neq, <, \leq, >, \geq$

- No cheers at all for that stage of the argument in which lack of axiomatization forced us to resort to a picture. Pictures are almost unavoidably over-specific and thereby often force a case analysis upon you. Note that I carefully avoided the pictures for $\alpha + \beta > \gamma$; there are 9 of them: κ to the right of A , coincident with A , and to the left of A , and similarly for the pair η and B . For the argument these distinctions are irrelevant but, when drawing a picture, you can hardly avoid making them.

- One of these days I would like to find a convincing explanation of the circumstance that youngsters continue

EWD975-4

to be educated with the theorem of Pythagoras in its diluted form as quoted from Coxeter. Notice that the 9 figures could have been avoided by also proving

$$\begin{aligned} \angle CKB + \angle AHC < \angle ACB &\Rightarrow \alpha + \beta < \gamma \quad \text{and} \\ \angle CKB + \angle AHC = \angle ACB &\Rightarrow \alpha + \beta = \gamma \quad , \end{aligned}$$

i.e. proving (0) and (1) in full.

• Notice that our figure was not pulled out of a magicians hat! As soon as $\text{sgn.}(\alpha + \beta - \gamma)$ occurs in the demonstrandum, it is sweetly reasonable to construct that difference. In order not to destroy the symmetry between α and β , one starts with γ and subtracts α at the one side and β at the other:



and this is the germ of the figure we drew.

Epilogue. I am in a paradoxical situation. I am convinced that of the people knowing the theorem of Pythagoras, almost no one can read the above without being surprised at least once. Furthermore I think all those surprises relevant (because telling about their education in reasoning). Yet I don't know of a single respectable journal in which I could flog this dead horse.

Austin, 7 September 1986

prof. dr. Edsger W. Dijkstra
Department of Computer Sciences
The University of Texas at Austin
Austin, TX 78712-1188, USA

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragwetenschappen, Instituut ELAN,
Universiteit Twente,
Postbus 217
7500 AE Enschede
n.c.verhoef@utwente.nl

Evenement NLT-Conferentie in Amersfoort

Natuur, Leven en Technologie, een nieuwe toekomst voor het wiskundeonderwijs?

Een nieuw vak heeft zijn intrede gedaan in de Natuurprofielen van de bovenbouw van het voortgezet onderwijs: Natuur, Leven en Technologie (NLT). Gaan bètadocenten nu met elkaar samenwerken? Wat is de rol van wiskunde bij NLT? En welke wiskundige technieken en vaardigheden spelen een rol bij NLT? Nellie Verhoef was op 12 februari j.l. op de NLT conferentie in Amersfoort en vroeg Harrie Eijkelhof, de voorzitter van de stuurgroep NLT, naar zijn mening.

In een druk bezochte Eenhoorn in Amersfoort zijn bètadocenten intensief met elkaar in gesprek. De gesprekken gaan over NLT op school. Docenten geven aan in de handleidingen de noodzakelijke ondersteuning en diepgang te missen. Bij de module over klimaatverandering bijvoorbeeld zijn er zorgen over het niveau: soms lijkt het of alle vakken tekort komen — zowel aardrijkskunde, biologie, scheikunde als wiskunde. De wiskundedocent klaagt erover dat er nooit meer formules worden afgeleid. Formules worden gebruikt zonder dat begrepen wordt wat de betekenis is. Maar er wordt wel door docenten samengewerkt, dat ervaren ze zelf als positief. Samenwerken moet ook wel, omdat je van de meeste onderwerpen veel te weinig afweet. Aan de organisatie schort nogal wat. Het idee om havo- en vwo-leerlingen samen in één groep te zetten is ondoenlijk gebleken. Als je onverwacht computers nodig hebt zijn ze er niet, zo wordt er op los geklaagd. Maar al deze zaken worden verklaard als 'kinderziekten'. De toekomst met NLT lijkt er vrolijk uit te zien, als je in de Eenhoorn rondloopt.

In de pauze neemt Harrie Eijkelhof de tijd om in te gaan op de eerste pilotervaringen met de invoering een nieuw vak in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs: NLT. De doelen van NLT spitsen zich toe op het bètabreed implementeren van kennis en vaardigheden waarbij het fundament van wetenschap en het gebruik van technologie niet uit de weg gegaan worden. Bij het vak NLT ervaren wiskunde-, natuurkunde-, scheikunde-, biologie-, informatica- en aardrijkskundedo-

centen wat het betekent om interdisciplinair samen te werken. Wie het examenprogramma voor het vwo erop naslaat komt een rijke variatie aan onderwerpen tegen: aarde en klimaat; stellaire informatie en processen; biofysica, -chemie en -informatica; biomedische technologie en biotechnologie; (duurzaam) gebruik van grondstoffen, energie en ruimte; materialen, proces- en productietechnologie en werktuigen, voertuigen en producten. Het kán niet op lijkt het wel. NLT overlapt met Wiskunde D, in die zin dat de probleemsituaties die bij Wiskunde D aan de orde zijn, om wiskundige oplossingstechnieken vragen. Bij NLT zijn wiskundige technieken vaak, maar niet altijd, slechts een onderdeel van de oplossing. Wiskunde D wordt niet zoveel gekozen door leerlingen. Harrie hoort leerlingen vaak zeggen dat ze wel genoeg wiskunde in hun pakket hebben en dan liever kiezen voor het bredere NLT. Maar er is toch juist erg gekort in het aantal wiskunde-uren, zou je denken? Dat speelt volgens Harrie voor de leerlingen niet zo'n grote rol want die kennen de geschiedenis niet. Leerlingen die echt kiezen voor wiskunde kunnen nu zelfs meer uren wiskunde krijgen in de combinatie wiskunde B en D. Harrie betitelt wiskunde als de 'taal' die wetenschappers gebruiken om te kunnen communiceren. NLT is de omgeving waarin die taal noodzakelijk is. Taal is de schakel die contexten aan concepten verbindt. De context-concept benadering lijkt nogal in zwang te zijn in het bètaonderwijs. Is die benadering van toepassing op NLT? Volgens Harrie kan deze benadering op verschillende manieren worden uit-

gewerkt en per schoolvak verder worden ingekleurd. Zo staan bij natuurkunde de concepten centraal. De contexten worden erbij gehaald om de relevantie van de concepten voor de leerlingen te illustreren, de gedachte daarachter is dat het leerproces dan gestimuleerd wordt. En hoe zit dat dan bij NLT? Waarom is het belangrijk bij NLT concepten te leren en in welke situaties zijn deze concepten toe te passen? Volgens Harrie staan bij NLT niet de concepten op de eerste plaats. Het gaat bij NLT om ontwikkelingen in wetenschap en technologie, je zou kunnen zeggen contextgebieden zoals klimaat, gezondheid, voeding, sterrenkunde, medicijnen, en robots. Daarbinnen komen concepten aan bod die essentieel zijn om betreffende ontwikkelingen te kunnen volgen, toch een context-concept benadering dus.



Harrie Eijkelhof, voorzitter van de stuurgroep NLT.



Nu komt het gesprek op de recente tumultueuze ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Harrie vindt het jammer dat er zo gepolariseerd wordt. Hij verzucht dat nuanceringen nogal eens ontbreken, en dat doet de kwaliteit van de discussie geen goed. Hij vindt wel dat er in het wiskundeonderwijs wat te verbeteren valt. Wat meer aandacht voor vaardigheden is gewenst in veel vervolgopleidingen. Maar als dat ertoe leidt dat er alleen maar rijtjes geoefend worden zou dat ten koste kunnen gaan van andere waardevolle kanten van de wiskunde. De waardering voor de wiskunde zou juist kunnen toenemen als in de lessen duidelijk wordt hoe belangrijk en breed toepasbaar wiskunde is. Dan zou je bijvoorbeeld het onderwerp logaritmen wat meer moeten afstemmen op natuurkunde en scheikunde. Harrie heeft de indruk dat in de wiskundemethodes weinig verband wordt gelegd met pH-waarden en decibels en verder blijft het grote voordeel van logaritmische assen om exponentiële verbanden tussen grootheden uit te drukken onderbelicht. Volgens Harrie kunnen contexten ook in het wiskundeonderwijs een nuttige rol vervullen maar dan moet er nog wel eens kritisch worden gekeken naar contexten die er met de haren bijgesleept lij-

ken. Meer contact tussen docenten van de bètavakken op school kan daarvoor nuttig zijn. Het leggen van verbanden wordt dan niet meer alleen aan de leerlingen overgelaten. Toch moet er zeker óók plaats blijven voor zuivere wiskunde op school: kennismaking met het systematisch redeneren en bewijzen heeft een belangrijke vormende waarde, voegt hij eraan toe.

In de praktijk hangt veel van docenten af: hoe zij over hun vak praten en hun bevologenheid laten zien. In dat kader maakt Harrie zich zorgen over een aanbeveling in het Masterplan Toekomst Wiskunde dat een bachelor wiskunde voldoende kennis van de wiskunde garandeert om eerstegraads bevoegd wiskundedocent te worden. Dat lijkt Harrie niet verstandig. Hij pleit voor ervaring met wiskundige kennis én onderzoek op masterniveau voor elke toekomstige eerstegraads wiskundedocent, net zoals voor de andere bètavakken. Zij moeten leerlingen in de bovenbouw enthousiast kunnen maken voor een academische studie en het werkt alleen maar statusverlagend voor de beroepsgroep als je inhoudelijke eisen naar beneden gaat aanpassen. Je moet ook voorkomen dat aanstaande leraren het gevoel krijgen dat een carrière in

het onderwijs een fuik is vanwege tekorten in de vooropleiding.

En de ontwikkelingen rondom de educatieve minor, waarbij een universitaire bachelor toegang geeft tot een tweedegraads bevoegdheid? Dat vindt Harrie een goed plan. Dan wordt in de onderbouw een verantwoorde, stevige basis gelegd. Natuurlijk is een half jaar (30 ECTS) voor de educatieve vorming wel wat weinig, maar zijn er altijd creatieve oplossingen in de vrije keuzeruimte voor te vinden. Het sterke van dit plan is natuurlijk dat deze derdejaars bachelorstudenten snel voor de klas komen te staan en daarna eventueel weer terug kunnen komen naar de universiteit om alsnog hun masterdiploma te halen. De gedachte blijft toch dat inhoudelijk goed voorbereide docenten voor de klas komen te staan, in onderbouw én bovenbouw. Dat hebben we nodig volgens Harrie, dat is stimulerend voor de beroepsgroep en voor het onderwijs.

Dankwoord

Met dank aan Jenneke Krüger (Stichting Leerplanontwikkeling).

Derk Pik

Amstelveen

drpik@xs4all.nl

Boekbespreking

Vanuit het gezichtspunt van de muziek

De laatste jaren wordt er erg veel over wiskunde en muziek gepubliceerd. Twee jaar geleden is er zelfs een wetenschappelijk tijdschrift voor in het leven geroepen. Hoe serieus zijn deze activiteiten eigenlijk? Tooit de muziek zich met wetenschappelijke rechtvaardiging en wordt gebrek aan inspiratie en talent gemaskeerd met wetenschappelijke diepte? En omgekeerd: hoeveel verstand hebben wiskundigen werkelijk van muziek? Zijn al die wiskundige formalismes echt van belang? Derk Pik, professioneel musicus en wiskundige, geeft zijn mening over drie nieuwe boeken op dit gebied.

De relatie tussen kunst en wetenschap is ongemakkelijk. Waar wetenschap bestaat uit zekerheden, daar is kunst gemaakt van illusies. De onderzoeker verwacht van zijn gehoor een zo kritisch mogelijke houding; de kunstenaar richt zich op totale overgave en verwacht op zijn minst een zekere meegaandheid van zijn publiek.

Het contrast zou wel eens het sterkste kunnen zijn tussen wiskunde en muziek, omdat geen enkele kunstvorm zo appelleert aan abstracte, slecht benoembare emoties. Dit maakt het schrijven van een boek over muziek en wiskunde tot een hachelijke onderneming.

Alhoewel muziek en wiskunde hun abstracte karakter delen, is het doel van onderzoek op het gebied van wiskunde en muziek nogal verschillend. De wiskundige die onderzoek verricht op dit gebied zoekt naar algemene principes. Neem bijvoorbeeld het ontstaan van de twaalftoon equidistante stemming. Een typisch wiskundige vraag is: waarom twaalf? Een musicus of componist benadert het probleem van de stemming vanuit een totaal ander gezichtspunt: hij zoekt naar het bijzondere, naar de speciale eigenschappen van die stemming. Hij doet ook onderzoek: zijn doel is het vinden van nieuwe interessante intervallen, nieuwe stemmings, nieuwe kleuren. In het verleden heeft wiskunde daar steeds een grote rol in gespeeld.

Wiskundige overwegingen hebben bijvoor-

beeld herhaaldelijk geleid tot de ontdekking van nieuwe stemmings. Wat betreft dit onderwerp is een componist dan niet zozeer op zoek naar een wetenschappelijke verklaring voor het verschijnsel dat vele (Pythagoreïsche, reine, getempereerde) stemmings steeds de Westerse twaalftoonstoonladder benaderen, als wel naar nieuwe samenklanken.

In de twintigste eeuw verschoof het gebruik van wiskunde in muziek. Vele componisten raakten geïnteresseerd in combinatorische en symmetrische principes, en meer recent, in ruis en algoritmisch componeren. Melodie en harmonie waren niet langer de primaire drijfveren; de emancipatie van het ritme veranderde de klassieke muzikale wereld ingrijpend.

Technische ontwikkelingen hebben ook hun invloed gehad. Synthesizers en computers creëren grote mogelijkheden voor elektronische muziek. Doordat bijna alle muziek nu wordt opgeslagen en verspreid in digitale vorm, heeft wiskunde nog een andere belangrijke rol gekregen in muziek.

Recent zijn er drie boeken op het gebied van wiskunde en muziek verschenen. *The Math behind the Music* van Leon Harkleroad [1], bedoeld voor algemeen publiek, *Music and Mathematics: from Pythagoras to Fractals*, een compilatie van speciaal voor deze bundel ge-

schreven artikelen, verzameld en geredigeerd door John Fauvel, Raymond Flood and Robin Wilson [2], en *Music, a Mathematical Offering* van David J. Benson [3], voor een publiek met enige wiskundige achtergrond.

Voorafgaand aan de bespreking van deze boeken geven we een introductie over de historische rol die wiskunde in de muziek heeft gespeeld. We doen dit zoveel mogelijk vanuit het standpunt van de musicus. Zo zijn we in staat om gedetailleerd in te gaan op de werkelijke betekenis van deze drie boeken.

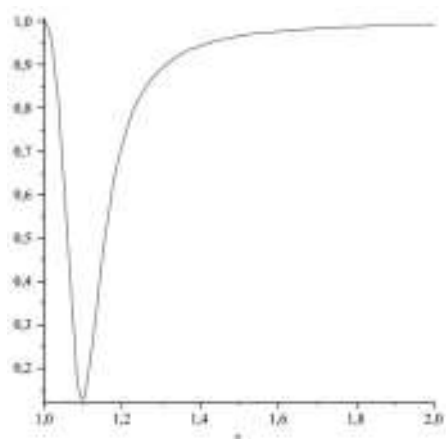
Historisch overzicht

Alhoewel consonantie niet het enige gebied is geweest waar wiskunde een prominente rol heeft gespeeld, is het historisch gezien wel het belangrijkste. Theorieën over samenklank bestaan al op zijn minst enkele duizenden jaren.

Consonantie, het samenklanken van stemmen of instrumenten, is een gecompliceerd onderwerp, waarbij natuurkunde, de fysiologie van het oor en deelbaarheid van getallen samenkomen. In de Middeleeuwen, Renaissance en Barok probeerden theoretici er achter te komen welke stemming het beste was voor hun koor of instrument. Tot op heden zoeken componisten naar nieuwe intervallen, nieuwe akkoorden met nieuwe mogelijkheden. De tonen waaruit de 'gewone' hedendaagse populaire muziek bestaat, bevat daarentegen al meer dan honderd jaar dezelfde gelijkgestemde twaalf tonen. Het muzikale materiaal verandert maar langzaam.

Consonantie

Twee snaren waarvan de lengtes in eenvoudige verhouding staan, klinken goed samen. Deze ontdekking is vanaf de Middeleeuwen



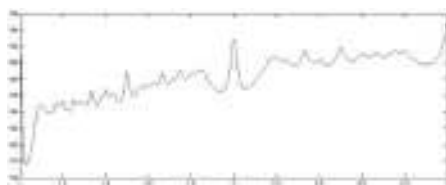
Figuur 1 Consonantiekromme voor twee sinustonen, een met constante frequentie van 220 Hz en de andere stijgend van 220 tot 440 Hz.

toegeschreven aan Pythagoras. Dit is overigens niet correct, daar stemmingen op basis van eenvoudige verhoudingen al zijn gevonden in Babylonische teksten van 3500 voor Christus. Aan het eind van de zestiende eeuw ontdekten Mersenne en Galilei onafhankelijk van elkaar dat de toonhoogte en de frequentie van de trillende snaar gerelateerd zijn: een eenvoudige frequentieverhouding resulteert in consonantie.

De componist Georg Andreas Sorge (1703 – 1778) ontdekte dat twee tonen dissonant klinken als ze *partiëlen* (boventonen) hebben die dicht bij elkaar liggen, maar net niet hetzelfde zijn (*Vorgemach der musicalischen Composition* (1745 – 1747)). Hermann von Helmholtz gaf hiervoor de eerste fysiologische verklaring in zijn invloedrijke werk *Die Lehre von den Tonempfindungen* [4]. Het bleek dat sinusfuncties een sleutelrol speelden.

Een typisch experiment gaat als volgt: neem twee sinustonen, de ene met een constante frequentie van bijvoorbeeld 220 Hz en de andere met een frequentie die geleidelijk stijgt van 220 Hz naar 440 Hz. Eerst hoort men zuivere consonantie, het zijn dezelfde tonen, maar spoedig verschijnt er een ratelend geluid en worden de twee tonen als sterk dissonant ervaren. Als het frequentiequotiënt groter wordt dan $1\frac{1}{6}$ verdwijnt het onaangenaam ratelende gevoel in het oor. Dit experiment kan schematisch worden weergegeven in een grafiek (figuur 1). Natuurlijk heeft deze kromme een subjectief karakter. De kromme is in 1877 geïntroduceerd door Helmholtz; in de zestiger jaren hebben R. Plomp and W.J.M. Levelt het effect statistisch getoetst voor verschillende tonen en akkoorden en hebben ze er een verfijnde theorie omheen gebouwd [5].

Het feit dat sinustonen die verder uit elkaar liggen niet dissonant klinken is verras-



Figuur 2 Consonantiekromme voor twee tonen met 14 partiëlen

send voor veel musici. Zij verwachten dat twee sinustonen die een grote septiem van elkaar vandaan liggen erg dissonant zullen klinken. Sinustonen en tonen, voortgebracht door trillende objecten zoals muziekinstrumenten, zijn dan ook erg verschillend. Natuurlijke tonen zijn opgebouwd uit vele sinustonen: ze bevatten vele tientallen *partiëlen* of boventonen.

Wat gebeurt er als we hetzelfde experiment nog eens uitvoeren, maar nu met twee computergegenereerde samengestelde tonen? We nemen twee samengestelde tonen waarvan de partiëlen eenvoudige verhoudingen hebben met de grondtoon. Eén toon is weer constant, met de frequenties (in Hz):

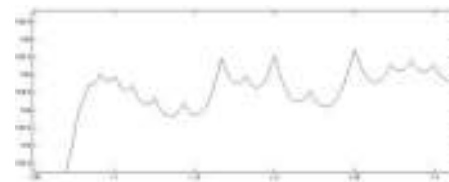
110 220 330 440 550 660 770
880 990 1100 1210 1320 1430 1540.

De andere toon, startend met dezelfde 14 frequenties beweegt langzaam naar een toon met de frequenties (in Hz):

220 440 660 880 1100 1320 1540
1760 1980 2200 2420 2640 2860 3080

Op elk moment zullen er partiëlen zijn die dissonantie veroorzaken. We kunnen de som van deze dissonanties weer in een grafiek weergeven (figuren 2 en 3).

De consonantiekromme vertoont een groot aantal pieken. Deze pieken verschijnen bij de verhoudingen van de grondtoonfrequenties



Figuur 3 Detail van consonantiekromme: in de buurt van de verhouding $9/8 = 1.125$ zijn vele pieken. Dit interval kan op vele manieren zuiver gespeeld worden.

1, 1.1, 1.111, 1.125, 1.143,
1.167, 1.20, 1.222, 1.25, 1.325,
1.4, 1.5, 1.666, 1.75, 1.83, 2, ...

We herkennen hierin de verhoudingen

1, 11/10, 10/9, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 11/9, ...

Een aantal van deze verhoudingen wordt in de Westerse muziek gebruikt: onze toonladders zijn er op gebaseerd. Andere ratio's zijn ongebruikt. Bekendheid met dergelijke intervallen biedt perspectieven voor hedendaagse muziek.

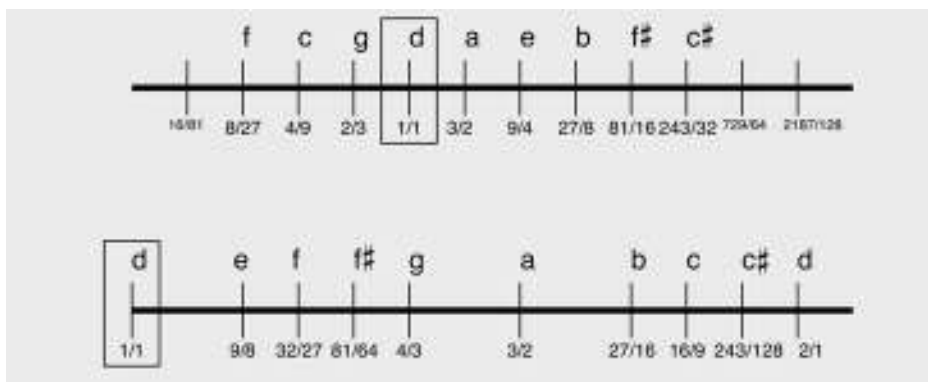
Er kan nog iets anders van deze grafiek worden afgelezen. Als we inzoomen op de plaats bij de verhouding 9/8 (op de piano is dit de afstand tussen een *a* en een *b*, een grote secunde) zien we vele pieken dicht bij elkaar. Dit suggereert dat in de nabijheid van dit interval vele zuivere intervallen zitten. Zilver zingen en spelen kan op vele manieren.

Toonladders

Westerse muziek, de muziek die we dagelijks om ons heen horen en waar we aan gewend zijn, heeft een nogal gecompliceerde structuur. Gewone akkoorden in populaire muziek bevatten vele verschillende tonen. In het verleden was dit niet altijd het geval. Tot ver in de Renaissance accepteerde men maar een beperkt aantal samenklanken. De stemming was geheel gebaseerd op twee intervallen: het octaaf (frequentieverhouding 2/1) en de



Figuur 4 Het octaaf, de kwint en de grote terts op een piano. Deze intervallen corresponderen achtereenvolgens met frequentieverhoudingen exact 2/1, ongeveer 3/2 en ongeveer 4/3. Merk op dat het octaaf acht witte toetsen omvat, de kwint vijf en de grote terts drie.



Figuur 5 De toonladder van het *Kyrie* van de *Messe de Nostre Dame* van Guillaume de Machaut. Op de bovenste regel zijn de tonen weergegeven, geconstrueerd met gebruikmaking van alleen maar kwinten, dus met frequentieverhouding $3/2$. De frequentieratio van de *a* en de *d* bedraagt $3/2$. De tonen behorende bij de klein gedrukte verhoudingen komen in het *Kyrie* niet voor. De verhouding van de Middeleeuwse *f#* en de *d* is gelijk aan $81/16$. Op de onderste lijn zien we dezelfde tonen, maar dan met hulp van octaafsprongen (verhouding $2/1$) zo dicht mogelijk bij de grondtoon *d*. Bijvoorbeeld: op de bovenste lijn hebben de *e* en de *d* verhouding $9/4$; op de onderste lijn liggen de *e* en de *d* naast elkaar met verhouding $9/8$.

reine kwint (verhouding $3/2$). De grote terts, het meest voorkomende interval in de populaire muziek, werd toen als vals beschouwd.

Pythagoreïsche stemming

De Middeleeuwse gevoeligheid voor zuivere intervallen legde grote beperkingen op aan componisten van vocale muziek. Neem bijvoorbeeld het *Kyrie* uit de *Messe de Nostre Dame* van Guillaume de Machaut (1300–1377). In dit werk voor a capella koor worden negen van de twaalf tonen gebruikt en deze zijn allemaal geconstrueerd vanaf de grondtoon *d*, waarbij alleen octaaf- en kwintsprongen worden gebruikt.

Een stemming waarbij alle tonen geconstrueerd zijn door de ratio's $3/2$ en $2/1$ heet een *Pythagoreïsche stemming*. In deze stemming zijn kwinten (verhouding $3/2$) zuiver en is de grote terts (verhouding $81/64$) wat minder zuiver. De *Messe de Nostre Dame* die in Pythagoreïsche stemming gezongen moet worden, bevat desondanks enkele grote tertsen. Deze verschijnen echter alleen in het midden

van melodische zinnen en veroorzaken een zekere spanning.

Reine stemmings

Drie intervallen in de Pythagoreïsche toonladder hebben een frequentieverhouding die grote getallen bevat. De Pythagoreïsche toonladder met grondtoon *c* heeft de verhoudingen

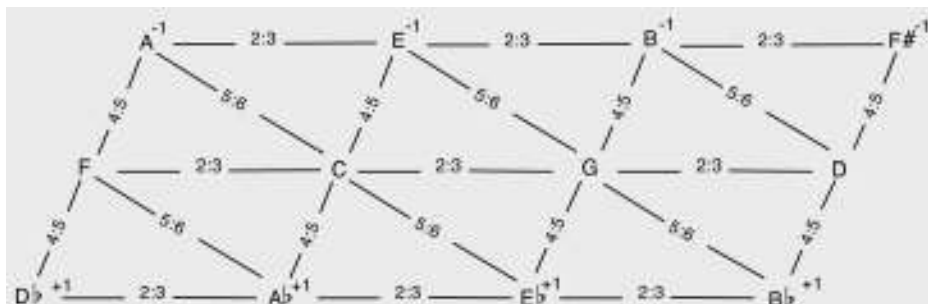
toon	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
ratio	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$

We kunnen de verhouding van de toon *e* ($81/64$) met een fractie van $80/81$ verlagen waarmee we het eenvoudiger quotiënt

$$\frac{81}{64} \cdot \frac{80}{81} = \frac{5}{4}$$

verkrijgen. De breuk $80/81$ heet de *syntoni-sche komma*. Als we dezelfde verlaging uitvoeren op de *a* en de *b*, vinden we de eenvoudiger tabel

toon	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i> [~]	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i> [~]	<i>b</i> [~]	<i>c</i>
ratio	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{1}$



Figuur 6 Stemschema uit *Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines*, 1615, van Salomon de Caus. (Dit stemschema verscheen ook in 1636 als Spinetstemming nr. 1 in *Harmonie Universelle* (1636–1637) van Marin Mersenne.) De tonen staan aangegeven met kruis of mol: *D#* staat voor een *Des* en *F#* staat voor een *Fis*. Op elke horizontale lijn staan de reine kwinten ($3/2$); als we naar boven naar rechts gaan vinden we de zuivere grote terts ($4/5$), en naar beneden naar rechts staat de zuivere kleine terts ($5/6$). Vanaf het einde van de vijftiende eeuw kan men dergelijke stemmingsschema's vinden in theoretisch werk van de wiskundigen Kepler, Mersenne, Euler en van verscheidene musici. De notatie is modern en komt uit het hier besproken boek *Music, a mathematical offering* van David Benson. De in dit voorbeeld gebruikte notatie is toeschreven aan Carl Eitz (1848–1924) en Hugo Riemann (1849–1919).

De laatste tabel is een voorbeeld van een *reine stemming*, of met de veelgebruikte Engelse term: *just tuning*. In deze stemming klinken alle intervallen zuiver ten opzichte van de grondtoon *c*. Merk op dat het priemgetal 5 in de breuken is verschenen.

Stemschema's

Zoals we zien in figuur 4 heeft de piano twaalf verschillende zwarte en witte toetsen. In de bovenstaande tabel toonden we de zeven tonen (*c, d, e, f, g, a, b*). De ontbrekende vijf zijn precies de zwarte toetsen van de piano (*cis, dis, fis, gis, ais*). We kunnen deze tonen aan het schema toevoegen met gebruik van de verhoudingen $3/2$ en $5/4$. Zo ontstaat het stemschema in figuur 6.

Wat zijn de goede en de slechte eigenschappen van zo'n stemschema? Intervallen die in het schema met enkele stappen bereikt kunnen worden klinken zuiver. Dit geldt ook voor akkoorden. In het bijzonder klinken alle grote en kleine drieklanken die als driehoek in het stemschema te vinden zijn, zuiver. Men betaalt echter een prijs voor de zuiverheid: de 'kwint' $F#^{-1} - D_{b+1}$ klinkt zeer vals. Uit figuur 7 concluderen we dat

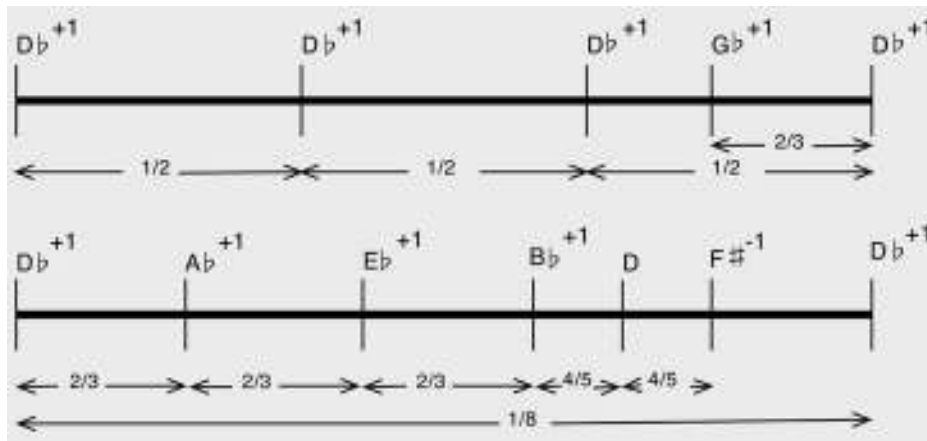
$$\begin{aligned} \frac{\text{hoge } G_{b+1}}{\text{hoge } D_{b+1}} &= \frac{2}{3} \approx 0,667 \\ \frac{\text{hoge } F\#^{-1}}{\text{hoge } D_{b+1}} &= \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{675}{1024} \approx 0,660, \end{aligned}$$

een afwijking van meer dan $1/100$. Het verlagen van $F\#^{-1}$ zou het interval $F\#^{-1} - D_{b+1}$ verbeteren.

We kunnen alle kwinten die nu zo zuiver mogelijk zijn met verhouding $3/2$, een klein beetje kleiner maken, zodat de onzuiverheid over meerdere intervallen verdeeld wordt. Dergelijke stemschema's heten *getempereerd*. Verschillende musicologen denken dat Bach meerdere getempereerde stemmingen gebruikte voor *Das Wohltemperierte Klavier* en niet een en dezelfde stemming voor alle 48 preludes en fuga's. Al enige jaren wordt er een discussie gevoerd of er bovenaan de eerste pagina van het manuscript van Bach een stemschema staat. Hier is namelijk een versiering getekend met allerlei krullen die de mate van verhoging of verlaging zou kunnen betekenen. Op het eerste gezicht lijkt dit een theoretische discussie, maar verschillende stemmingen hebben in de praktijk verschillende kleuren.

Equidistante stemming

Als we 12 reine kwinten op elkaar stapelen,



Figuur 7 Ideaal zou $G_{b+1} - D_{b+1}$ gestemd moeten worden als reine kwint: verhouding $2/3$. Met het stemmingschema van figuur 6 wordt de toon G_{b+1} als $F_{\sharp-1}$ gestemd. Dit geeft de verhouding $675/1024$: veel kleiner dan $2/3$.

dan is de totale afstand ongeveer 7 octaven. In frequentieverhoudingen:

$$(3/2)^{12} = 129,7 \approx 128 = (2/1)^7.$$

Het quotiënt van deze frequentieverhouding, $3^{12}/2^{19}$ heet de *Pythagoreïsche komma*.

Aan het einde van de achttiende eeuw werd de behoefte om een stuk te transponeren, dit betekent op een andere toonhoogte te spelen, zo groot, dat men alle intervallen gelijk ging stemmen. Het idee achter deze stemming is toegeschreven aan Vincenzo Galilei (1520–1591), de vader van Galileo Galilei. Het bleef eeuwenlang ongebruikt.

Er zijn twaalf tonen in een octaaf. Veronderstel dat de frequentieverhouding tussen twee naastgelegen tonen gelijk is aan r . Dan is de ratio tussen twee tonen die een octaaf van elkaar verwijderd liggen:

$$1/2 = \frac{c}{c'} = \frac{c}{c\#} \cdot \frac{c\#}{d} \cdot \frac{d}{d\#} \cdot \frac{d\#}{e} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{f}{f\#} \cdot \frac{f\#}{g} \cdot \frac{g}{g\#} \cdot \frac{g\#}{a} \cdot \frac{a}{a\#} \cdot \frac{a\#}{b} \cdot \frac{b}{c} = r^{12}.$$

Hieruit volgt dat de kleine secunde in de *equidistante stemming* gestemd moet worden met verhouding $r = \sqrt[12]{1/2} \approx 0.943874$.

Hedendaagse instrumenten zijn gestemd met dit interval als basis. De kwinten klinken nogal dun: $r^7/1 \approx 1/1.4983$. Tegenwoordig zijn we volledig gewend aan deze niet-reine stemming. Enkel als we gedurende een langere periode Middeleeuwse muziek zingen of beluisteren, kan de terugkeer naar onze alledaagse equidistante stemming een ongemakkelijk gevoel geven.

Andere equidistante stemmingen

Vele musici en wetenschappers hebben gezocht naar andere equidistante stemmingen. Een van de eersten was Nicola Vicentino, die in 1555 de 31-toons equidistante stemming

introduceerde, welke in 1691 werd opgepakt door Christiaan Huygens. Huygens bestudeerde ook de 19-toons equidistante stemming. Anton Fokker heeft in 1950 een 31-toons orgel gebouwd, dat zich lange tijd in het Teylers museum in Haarlem bevond. (Het orgel is onlangs grondig gerenoveerd en wordt nu in het Muziekgebouw aan 't IJ geplaatst. Op 17 mei van dit jaar vond daar een inwijdingsconcert plaats.) In 1876 construeerde Robert Bosanquet een harmonium voor 53-toons equidistante stemming. In [6] is een gedetailleerd historisch overzicht te vinden van equidistante stemmingen.

De kwaliteit van dergelijke n -toons equidistante stemmingen wordt bepaald door het aantal belangrijke intervallen dat op een acceptabele manier wordt benaderd. Expliciet: voor welke p en q is $(2^{1/q})^p \approx 3/2$, of: $p/q \approx \log_2(3/2)$? Als we een goede benadering p/q kunnen vinden, hebben we een goed benadering voor de kwint. Nog belangrijker: bestaan er goede gelijktijdige benaderingen zoals

$$p_1/q \approx \log_2(3/2),$$

$$p_2/q \approx \log_2(4/3),$$

$$p_3/q \approx \log_2(5/4).$$

Als we dergelijke q kunnen vinden, hebben we een equidistante stemming die tegelijkertijd de kwint, de kwart en de grote terts goed benadert.

Het probleem om een logaritme te benaderen door een rationaal getal is goed te begrijpen door middel van kettingbreuken. Gelijktijdige approximatie van meerdere logaritmen heeft echter geen constructieve oplossing (zie [3], p. 221).

Harmonie

Tot op heden is er geen goede verklaring voor de werking van de traditionele Westerse har-

monie. Natuurlijk is het een subtiel en rijk spel van spanning en ontspanning, van dissonantie en consonantie, maar ook van akkoordprogressies die men juist wel of juist niet verwacht; akkoorden die in een bepaalde toonladder passen of juist niet.

Het is verleidelijk om schema's te maken van toegestane akkoordopeenvolgingen. Deze opeenvolgingen kan men namen geven: dit is in het verleden vaak gedaan en de meeste harmoniëren hebben dergelijke schema's als hoofdonderwerp.

Deze schema's zijn wel tijds- en stijlafhankelijk. Grote componisten uit alle tijden hebben telkens weer geprobeerd om nieuwe akkoorden te vinden, nieuwe progressies. Een beroemd voorbeeld van een nieuwe progressie is het dubbelverminderde septiemakkoord bij Mozart, om op een onverwachte wijze op een dominant uit te komen. Zo'n uitvinding is sindsdien terug te vinden bij vele componisten en het schema van toegestane akkoordopeenvolgingen is er vanaf toen mee uitgebreid. Het schema van toegestane progressies is dus afhankelijk van het tijdperk en de muzikale stijl.

Dan maakt het ook nog uit welke stemming gebruikt wordt. In reine stemming klinken vele akkoorden dissonant en zijn er dus minder akkoorden toegestaan dan in onze huidige equidistante stemming, waar alle akkoorden enigszins vals klinken. In deze stemming zijn de dissonante akkoorden daarentegen minder dissonant en ontstaat er een enorme mogelijkheid tot het creëren van nieuwe akkoorden.

Elk nieuw akkoord leidt tot nieuwe akkoordprogressies. Telkens raakt het publiek er weer aan gewend. De nieuw geïntroduceerde akkoorden worden steeds dissonanter en hoe dissonanter een akkoord, des te meer akkoorden kunnen dienen als ontspannende opvolger. Neem bijvoorbeeld het beroemde Tristanakkoord uit *Tristan und Isolde* van Wagner: dit akkoord kan oplossen naar bijna alle drieklanken op een acceptabele manier.

Omdat de nieuwe, meer en meer gecompliceerde akkoorden steeds minder richting gaven — ze losten naar alle kanten op — werd hun betekenis ook steeds dubbelzinniger en minder dwingend. Aan het einde van de negentiende eeuw had de harmonie voor veel componisten zijn stuwende kracht verloren. Deze componisten zochten en vonden andere manieren om hun muziek te structureren.

Na 1900

Schönberg en zijn volgelingen braken radicaal



Figuur 8 Maat 35 tot en met 44 uit de pianosonate KV 533 van Mozart. In maat 40 is het tweede akkoord het dubbelverminderde septiemakkoord, dat naar de dominant g-groot leidt in maat 41.

Copyright 1977, G. Henle Verlag, München

met de plichtmatige harmonische clichés. Alhoewel Schönberg een grote kenner was van de traditionele harmonieleer — hij schreef een gezaghebbende aan Mahler opgedragen *Harmonielehre* en componeerde een aantal ‘harmonische’ meesterwerken (zoals de *Gurrelieder* en *Verklärte Nacht*) — bereikte hij een grote mate van concentratie met de ontwikkeling van de dodecafonische techniek.

De componist kiest een volgorde van de twaalf verschillende tonen, waarmee meteen de volgorde van de motieven en melodiën van het muziekstuk vastligt. De enige toegestane variaties bestaan in het spiegelen van de volgorde (opgeschreven op een notenbalk betekent dit: spiegelen in een verticale lijn) en het omkeren van de intervallen (in een horizontale lijn spiegelen). Deze operaties laten de motivische inhoud intact en geven de muziek een sterke eenheid. Een interessante wiskundige vraag is hoe veel variatie er bestaat in de keuze van twaalftoonrijen.

Bestaat er eigenlijk wel genoeg variatie? Te weinig, vond Igor Strawinsky. Hij ervoer de twaalftoonstechniek als beperkend: in zijn dodecafonische muziek ontwikkelde hij nog andere manieren dan spiegeling om toonrijen te manipuleren waarbij wel steeds de motivische samenhang blijft bestaan (zie bijvoorbeeld zijn Pianoconcert).

De harmonie verloor ook op andere manieren terrein. De meeste vroegtwintigste-eeuwse componisten plaatsten ritme en melodie op de voorgrond, ten koste van harmonie. Deze herwonnen vrijheid vereiste nieuwe structurerende middelen. Deze kunnen vaak op eenvoudige wiskundige wijze worden beschreven. Bijvoorbeeld het additieve ritme (het aan elkaar schakelen van ritmische motieven) tegenover delingsritmes (het traditionelere onderverdelen van ritmische eenheid in kleinere). *Le Sacre du Printemps* van Strawinsky bevat hier talloze voorbeelden van (zie [8]).

Symmetrie

Vele componisten stellen er eer in om bijvoorbeeld een motet te schrijven dat van voor naar achteren precies hetzelfde klinkt als van achteren naar voren. Machaut, Haydn, Rachmaninoff en vele anderen, verwerkten overvloedig veel symmetrie in hun composities. Symmetrie speelt dus een belangrijke rol in muziek. Maar waarom?

Alhoewel het moeilijk is hierop een gefundeerd antwoord te vinden, is het de belangrijkste vraag voor elke auteur die schrijft over symmetrie in muziek.

In de twintigste eeuw werd symmetrie door het wegvallen van conventionele harmonische structuur opnieuw een belangrijk stijl-middel. Componisten verwerkten daarom allerlei soorten wiskunde in hun muziek, soms met groot effect, maar ook vaak onnodig, pretentius, modieus en soms zelfs gewoon niet om aan te horen en onzinnig.

In de zeventiger jaren is geprobeerd fractals in muziek te verwerken. Fractals, die al meer dan een eeuw bestonden, raakten in de mode omdat ze met computers zichtbaar konden worden gemaakt. Een fundamentele eigenschap van een fractal is het bestaan van symmetrie die zich op steeds kleinere schaal herhaalt. In muziek is de tijd een van de dimensies: de micro-symmetrie is spoedig niet meer met het oor waarneembaar — *épater les bourgeois*.

Er waren echter ook veel positieve ontwikkelingen. Olivier Messiaen introduceerde seriële muziek in de pianostukken *Cantodyaya* en in het ‘Mode de valeurs et d’intensités’ uit de *Quatre Études de Rythme*.

In de seriële stijl worden muzikale parameters, zoals duur, positie in tijd, klanksterkte, toonhoogte, klankkleur, aan elkaar verbonden. In eerste instantie wordt hierdoor de toonhoogte en toonduur aan elkaar gekoppeld, zodat de toehoorder het groot aantal verschillende tijdsduren beter kan herken-

nen. Op dit terrein hebben Messiaen en zijn volgelingen hun doel royaal bereikt. Nu, vijftig jaar later, kunnen bijvoorbeeld vele pianisten een goede uitvoering geven van ritmisch excessief moeilijke muziek, zoals de tweede Sonate van Boulez. Toen deze muziek geschreven werd, was daartoe bijna niemand in staat.

Stemming in de twintigste eeuw

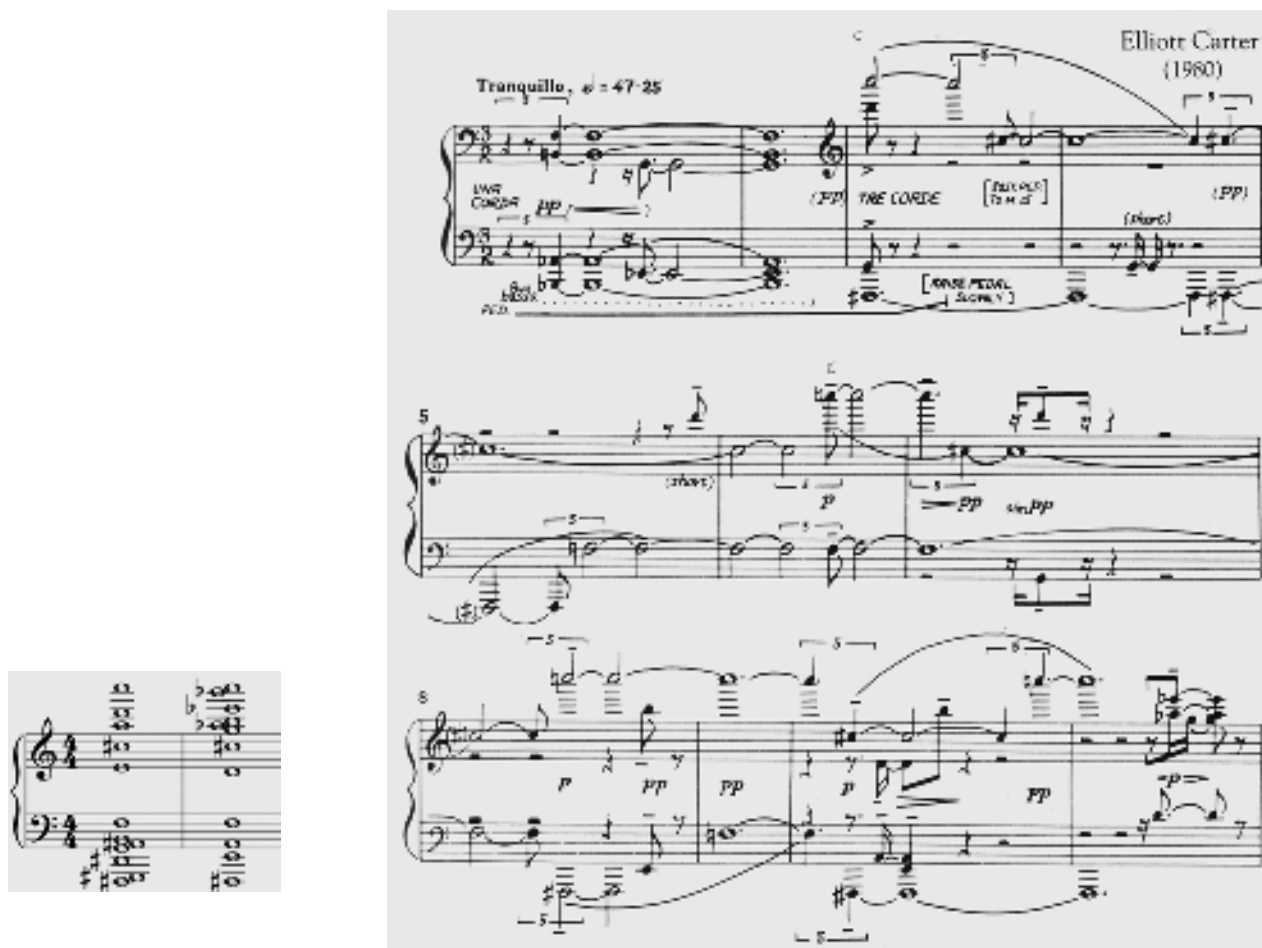
Een andere manier om uit de harmonische ineenstorting te komen was het experimenteren met nieuwe stemmingen. De Amerikaan Harry Partch (1901–1974) ontwikkelde nieuwe toonstelsels, geheel gebaseerd op rationale verhoudingen. Hij componeerde muziek in een 43-toons toonladder, waar de toonhoogtes ongelijk verdeeld waren. Om de klanken te realiseren ontwierp hij speciale instrumenten. Een aantal composities is op cd verkrijgbaar, veel meer is te vinden op YouTube.

De Amerikaanse componist La Monte Young (1935) heeft ook substantiële bijdragen geleverd op het gebied van alternatieve stemmingen. Zijn compositie *The well-tuned piano* is een zes uur durende improvisatie op een speciaal geprepareerde Bösendorfer concertvleugel. De piano wordt een week lang zeer precies gestemd in een speciale rationale stemming, die nogal verschilt van de gewone equidistante stemming. De improvisatie mediteert op lang volgehouden consonante klanken en bijzondere tremoli. De stemming is zodanig dat in de tremolowolken nieuwe tonen ontstaan, die niet op de toetsen worden gespeeld. Men kan dit zelf ervaren door een dvd bij de componist te bestellen [7].

In traditionele muziek uit het Midden-Oosten wordt al lange tijd een 24-toons equidistante stemming gebruikt; in de Westerse muziek sinds de twintigste eeuw. Componisten zoals Ivan Vishnegradski en Charles Ives deelden de toonladder op in kleinere stukken, in het bijzonder in 24 kwarttonen. Deze stemming leidt niet tot meer consonantie maar biedt allerlei mogelijkheden voor glissandi en vreemde akkoordkleuringen, zoals in *Music For Flute, Strings, Percussion* van Sofia Gubaidulina.

Vele belangrijke twintigste-eeuwse componisten werkten met alternatieve stemmingen. Bartok, Ligeti (in allerlei stukken, waaronder zijn hoorntrio), Stockhausen (bijvoorbeeld in *Mantra* voor twee piano’s, waar de toonhoogte en klankkleur wordt beïnvloed door een elektronisch feedbacksysteem) en Gérard Grisey die met moderne hulpmiddelen de spectra van muziekinstrumenten analyseerde om nieuwe consonanties te vinden.

In de tachtiger jaren zijn computers zo



Figuur 9 Het begin van *Night Fantasies* van Elliot Carter is een goed voorbeeld van het gebruik van symmetrie in muziek. Het stuk is gebaseerd op twee akkoorden die alle intervallen bevatten (zie rechter notenvoorbeeld). Een dergelijk akkoord bevat alle 12 verschillende tonen en alle 11 verschillende intervallen. Het eerste akkoord bevat, van beneden naar boven) de tonen $f\sharp, g\sharp, d\sharp, g, a\sharp, b, f, e, c\sharp, a, d, c$, en de opeenvolgende intervallen 2, 7, 4, 3, 1, 6, 11, 9, 8, 5, 10, genoteerd in aantallen kleine seconden. Het tweede akkoord wordt uit het eerste verkregen door van onder tot boven te spiegelen. Hoe worden deze akkoorden gebruikt? Het eerste akkoord verschijnt gedeeltelijk in maten 3 – 8: in maat 3 zien we $f\sharp, g, d, c$ en verderop $c\sharp$, in maat 5 is een f is toegevoegd, en in maat 8 verschijnen de tonen e en b ; dit zijn de eerste tonen van het eerste akkoord. Tien noten van het gespiegelde akkoord zien we in maten 10 – 13. Aan de ene kant is het stuk stevig gestructureerd door deze twee akkoorden; aan de andere kant lijkt het alsof de componist de melodielijnen en nieuwe akkoorden improviseert. Een muzikaal relevante vraag is: hoeveel verschillende akkoorden bestaan er die alle intervallen bevatten?

krachtig geworden dat werkelijk elke denkbare klank, met elk gewenst artificieel spectrum gegenereerd kan worden. Dit opent enorme mogelijkheden voor componisten. Ook is het experimenteren met auditieve perceptie zeer veel gemakkelijker geworden. In dit nieuwe onderzoeksgebied speelt wiskunde een grote rol alleen al bij het ontwerpen van de klanken.

Drie boeken over wiskunde en muziek

In bovenstaande historische schetsen zagen we het belang van wiskunde voor de muziek vanuit het oogpunt van de musicus. De hier besproken boeken richten zich op een algemeen, eventueel wiskundig onderlegd publiek, en ze zijn geschreven door wiskundigen. Wat is de betekenis van deze boeken?

From Pythagoras to Fractals

De modieuze titel verbergt een mooie verzameling artikelen met zeer veel nieuw materiaal. Het boek bestaat uit vier ge-

deelten, het eerste over muziek en wiskunde in de geschiedenis, twee delen over wiskundige structuren in muziek, en één deel over hedendaagse muziek, in het bijzonder over algoritmisch componeren.

De twee historische artikelen zijn prachtig. Het eerste, door Neil Bibby over stemming en temperament, geeft een gedetailleerd historisch overzicht van de verschillende stemsystemen vanaf de oudheid. Het artikel bevat een weelde aan kleine wetenswaardigheden. De auteur vertelt ons bijvoorbeeld over Handel die een 31-toons orgel bespeelde in Nederland: we hadden graag geweten welk orgel dat geweest is.

Het tweede artikel beschrijft de manier waarop Kepler de harmonieleer uit de muziek gebruikte om de structuur van het universum en de bewegingen van de planeten te verklaren. In het artikel wordt ook beschreven hoe zijn werk *Harmonie Universelle* van

invloed is geweest op de monnik Marin Mersenne en de Jezuïet Kircher.

Kepler verzamelde data die de bewegingen van de planeten ten opzichte van de zon beschreven. Deze gegevens koppelde hij aan de harmonieleer. Hij vond de verhoudingen tussen de snelheden van de planeten zo mooi, dat hij deze in resonanties probeerde te herformuleren. Voor ons lijkt dit nogal onzinnig, maar in zijn tijd waren dergelijke analogieën algemeen. Ook dit artikel bevat smakelijke details. Mersenne wijdde vijftien pagina's in zijn omvangrijke muziektheoretische tractaat aan de perfecte horoscoop van de musicus om daarna te concluderen dat horoscopen waardeloos zijn. Ondanks dergelijke uitwijdingen is dit werk van Mersenne van belang, al was het alleen al vanwege de vele unieke muziektranscripties die het bevat.

In het derde artikel, van Charles Taylor, worden fysische eigenschappen van instrumenten gekoppeld aan het spectrum van hun



Figuur 10 De openingsscène van *The Sound of Music*

Copyright 1965, Twentieth Century Fox

geluid. Het is een lezenswaardig artikel, maar het onderwerp is veel te groot voor deze bundel. Het standaardwerk op dit gebied — echt interessant voor de fysisch geïnteresseerde lezer — is *The Physics of Musical Instruments* [9].

Het vierde artikel, van Ian Stewart, is de meest verbazingwekkende bijdrage. Het gaat over een Zweedse gitaarbouwer, niet in wiskunde getraind, die een opmerkelijk goede constructie uitvond om fretten op de gitaarhals te plaatsen. In 1743 probeerde hij zijn uitvinding te publiceren in de *Proceedings van de Zweedse Academie*. Jacob Faggot, een meetkundige, econoom en constitutioneel lid van de Academie berekende dat de maximale fout van de constructie 1,7 % bedroeg en verklaarde de methode inaccuraat. Het duurde tot 1957 voordat J.M. Barbour een fout in de driehoeksmetkunde van Faggot ontdekte en zo de Zweedse gitaarbouwer eerherstel bezorgde. Het artikel legt de constructie uit, waarbij gebruik wordt gemaakt van de vergelijking van Pell en kettingbreuken.

Het vijfde artikel beschrijft de wetenschappelijke controverse die nog steeds bestaat omtrent de oorzaak van combinatietonen. Als iemand naar twee luide sinustonen met frequentie f_1 en f_2 luistert, is er een derde toon hoorbaar met frequentie $f_1 - f_2$: een voorbeeld van een combinatietoon. Helmholtz schreef het verschijnsel, dat plaatsvindt in het oor en niet in de lucht, toe aan de gekromde vorm van het tweedimensionale trommelvlies, dat kwadratisch niet-lineair gedrag veroorzaakt. In feite is het gecompliceerder

en zijn verschiltönen onderwerp van hedendaags onderzoek. Een beschrijving van Helmholtz consonantietheorie besluit dit deel.

De hoofdstukken 6 en 7 behandelen symmetrie. Het artikel 'The geometry of music' van Wilfrid Hodges geeft een overzicht van alle mogelijke types symmetrie in muziek. Elementaire rotaties, spiegelingen en strookpatronen worden met voorbeelden uit de muziek besproken. Op verschillende plaatsen is het artikel erg oppervlakkig. Hij schrijft dat het woord 'spiegeling' in titels van menig twintigste-eeuws muziekstuk voorkomt, zoals *Reflets dans l'eau* van Debussy. Dergelijke opmerkingen geven het artikel een nodeloos triviaal karakter. De vraag waarom symmetrie zo overvloedig voorkomt in muziek wordt nauwelijks aangeroerd.

Het zevende artikel beschrijft de structuur van het zogenaamde 'change ringing'. Hier ligt het verband met grafentheorie voor de hand. Daarop volgt nog een kort artikel *Composing with numbers: sets, rows and magic squares* van Jonathan Cross, waarin de dodecafonische stijl van de tweede Weense school wordt uitgelegd.

Het minst overtuigende deel van het boek gaat over symmetrie en fractals. Zware terminologie wordt geïntroduceerd om een melodie te verschuiven, en dit alleen om op te merken dat het tweede thema van de Waldsteinsonate van Beethoven drie hele tonen is opgeschoven. De auteur laat na om op te merken dat in vrijwel elke andere sonate in grote terts het tweede thema vijf tonen (een kwint) opschuift. En juist dit maakt een enorm ver-

schil.

In de Waldsteinsonate, in C grote terts, is het tweede thema in E-groot, waarmee vier kruisen worden toegevoegd: vier toonladdervreemde elementen. In de traditionele klassieke sonatevorm zou het tweede thema in G-groot staan, waarmee slechts één nieuwe toon wordt toegevoegd. Geen symmetrie en geen algebra, maar gewoon vier nieuwe tonen die ons naar een nieuwe wereld leiden.

De redacteurs van deze bundel hebben helaas de pretentieuze onzin niet doorzien.

The math behind the Music

Het eerste deel van het boek *The math behind the Music* bevat een waardevolle uiteenzetting over de oorsprong van toonhoogte en consonantie. Alles is eenvoudig geformuleerd, uitstekend voor de leek. In het bijzonder wordt de introductie van de sinusfunctie als unificerende bouwsteen van bron en ontvanger op een heldere manier verwoord met een minimum aan technische details.

Het is echt jammer dat de auteur deze eenvoud niet kan vasthouden in de rest van het boek. In de tweede helft, beginnend bij hoofdstuk 4, worden symmetriegroepen geïntroduceerd. Weer wordt het niet duidelijk wat deze werkelijk betekenen voor muziek. Het hoofdstuk over waarschijnlijkheidsrekening gaat slechts over het triviale onderwerp op hoeveel manieren een vast aantal muziekstukken is te rangschikken. Dit is onvoorstelbaar voor een uitgave van Cambridge University Press.

De auteur wijdt één enkele zin aan seriële muziek, die hij ziet als gevolg van dodecafonische muziek. Dit is een veel gehoorde opvatting die historisch niet correct is. Hij vervolgt: "Many composers found this [de seriële muziek] too rigid and confining. To relinquish all that regimentation and turn over the reins of chance seems like a liberation to some composers." Helaas vertelt hij er niet bij over welke componisten hij het heeft. De componist Xenakis, waar Hackleroad later aan refereert, is zijn stochastische compositietechniek in elk geval niet begonnen als reactie op seriële muziek.

Over deze componist weet de auteur ook nog te vertellen dat "Unfortunately, his writings about mathematical aspects of his music tend to be obscure, rather than clarify, his methods". Dit is een veel te hard oordeel over deze invloedrijke pionier: veel musici zijn blij dat hij zijn technieken en ideeën publiceerde in zijn boek *Musiques Formelles* (1962) en elektronische muziek is zonder hem ondenkbaar.

Het ergste komt nog: in het hoofdstuk *Pattern, pattern, pattern* over harmonische sequensen, het tweede voorbeeld op pagina 94, bekritiseert hij het openingslied van de *Sound of Music*. Hij schrijft: "If that song were written in the key of C [...] its accompaniment would also begin with a C chord. That C persists throughout: 'The hills are alive with the sound of'. But on the word 'music' the harmony changes to a $B\flat$ chord. Although *The sound of music* is not really one of my favorite things, I will admit that the $C-B\flat$ progression works quite effectively in that opening passage." Voor elke musicus is het duidelijk, zelfs zonder partituur, dat het hier een $C-B$ progressie betreft.

De B heeft namelijk een tegenovergestelde functie: de conventionele $C-B\flat$ progressie dwingt de melodie naar beneden, terwijl de B , de echte noot in het lied, onverwacht is en daarmee de melodie sterk naar boven dwingt, terug naar C . De auteur zou er goed aan doen de partituur te bestuderen, in plaats van minachtende opmerkingen te maken over populaire muziek.

Of het nu Xenakis is of *The Sound of Music*, Hackleroad heeft geen idee waar hij over schrijft.

Music, a Mathematical Offering

David Benson heeft met het schrijven van dit boek een nieuwe standaard gezet. De tekst stond al vele jaren gratis beschikbaar op internet; het veranderde vaak en werd steeds uitgebreid. Deze internetversie heb ik onder andere gebruikt bij een cursus die ik aan het Koninklijk Conservatorium in Den Haag heb gegeven.

Het boek is down to earth en tegelijkertijd idealistisch. Benson gaat vaak diep op zijn onderwerp in; toch verliest hij het volgende niet uit het oog: "Music is not mathematics. While we're discussing mathematical aspects of music, we should not lose sight of the evocative power of music as a medium of expression for moods and emotions. About the numerous interesting questions this raises, mathematics has little to say."

Hij voert ons langs de fysiologische verklaring voor de werking van het oor, de natuurkundige principes die ten grondslag liggen aan trillingen van een- en tweedimensionale oppervlakken. Er volgt een korte en duidelijke introductie in de Fouriertheorie, vanaf het begin al gekoppeld aan het spectrum van het geluid.

Het interessantste en ook uitgebreidste deel van het boek gaat over de verschillende verklaringen van consonantie. Benson doet



Figuur 11 Helmholtz was vindingrijk in het ontwikkelen van instrumenten waarmee hij geluid kon bestuderen. Het hier afgebeelde object is bedoeld om lage tonen te kunnen onderscheiden. Op pagina 43 van [4] beschrijft hij deze resonator, die met de tuitvormige bovenkant in het oor dient te worden gezet. Het geluid komt door de cirkelvormige, open onderkant naar binnen. De tuitvormige bovenkant wordt ingesmeerd met hete was die men laat afkoelen totdat aanraking met het oor te verdragen is. Op deze manier ontstaat er een luchtdichte verbinding met het instrument. Op deze manier bestudeerde Helmholtz de laagste tonen, bijvoorbeeld in het geratel van koetswielen en in opspattend water.

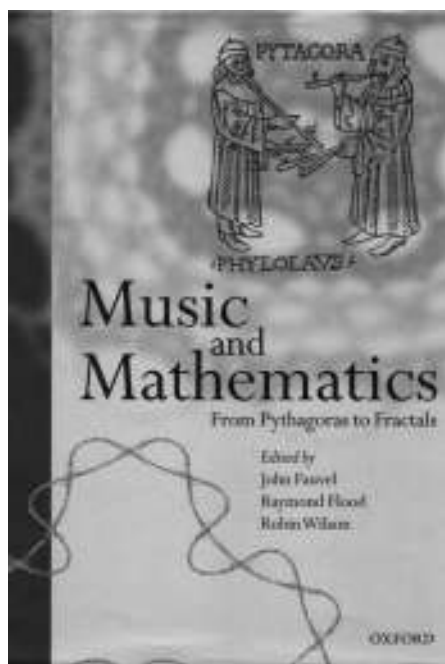
Foto: Physics Dept, Case Western Reserve University

gedetailleerd verslag van de verschillende manieren waarop je kunt stemmen en consonante intervallen verkrijgt. Hij besteedt veel aandacht aan alternatieve stemmingen zoals de 43-toons stemming van Harry Partch. Andere onderwerpen zijn synthetisch gegenereerde tonen met een artificieel spectrum en verschillende akoestische illusies gegenereerd door de computer. Twee hoofdstukken over digitale synthesizers besluiten dit gedeelte.

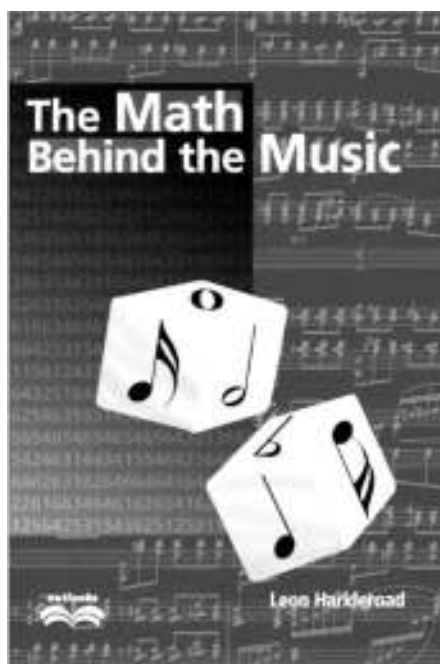
Het laatste deel van het boek is gewijd aan symmetrie. Ook dit hoofdstuk brengt ons verder dan alle andere werken op dit gebied. Een aantal van de besproken fenome-

nen verscheen wel eerder in de literatuur, vooral in de *American Mathematical Monthly*. Burnsides lemma wordt gebruikt om het aantal echt verschillende twaalftoonsreeksen te berekenen (9985920). Dit werpt de vraag op hoeveel twaalftoonsreeksen er zijn die dezelfde eigenschappen hebben, zoals bijvoorbeeld geen tertsafstand, geen kleine seconde, of met een bepaald motief. Na lezing van het hoofdstuk is de lezer voldoende toegerust om deze problemen zelf op te lossen.

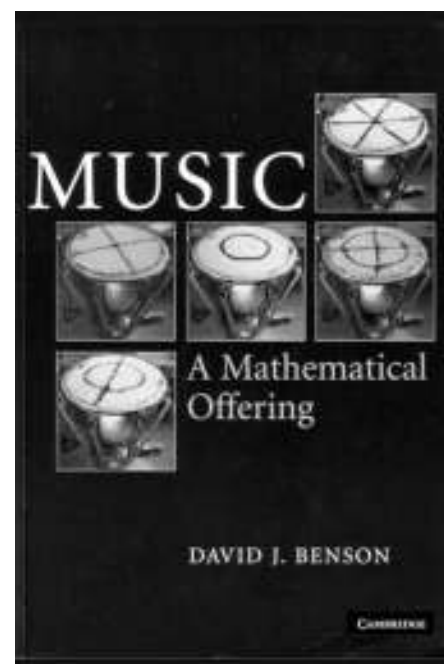
Eliot Carter compileerde voor eigen gebruik een atlas met daarin alle mogelijke akkoorden van drie tot en met twaalf tonen. Hij was in het bijzonder geïnteresseerd in twaalf-



John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson editors, *Music and Mathematics: from Pythagoras to fractals*, Oxford University Press, Oxford, 2003.



Leon Harkleroad, *The Math behind the Music*, Cambridge University Press, New York, 2006.



David J. Benson, *Music, a mathematical offering*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

toonsakkoorden, die tevens de elf verschillende intervallen bevatten, zoals het eerste akkoord in het pianowerk *Night Fantasies* (zie figuur 11). Een dergelijk akkoord vind je niet zomaar: hoeveel bestaan ervan? Eliot Carter gebruikt zo'n akkoord om zijn muziek een overkoepelende structuur te geven. Tevens is het een rijke bron van motieven en kleinere akkoorden.

Het boek bevat een fantastische bibliogra-

fie. In de online versie zijn diverse items verrijkt met zijn persoonlijke commentaar. Dat zou ook interessant zijn voor andere wetenschappelijke boeken! Het is overigens begrijpelijk dat Cambridge Publishers deze commentaren heeft verwijderd, ook al was het leuk leesvoer: "A huge work. It doesn't go far enough with technical aspects", "Hard to understand and not very enlightening".

Samenvattend heeft David Benson een uit-

zonderlijk boek geschreven, dat ook gebruikt kan worden als beginpunt van onderzoek in allerlei richtingen. En nog belangrijker: het is goed te gebruiken voor professionele musici, zelfs als ze bijvoorbeeld niet alle Fourieranalyse begrijpen. Exacte informatie, die ook nog eens helder is opgeschreven. Het biedt voor musici een wereld aan mogelijkheden. ←

Referenties

- 1 Leon Harkleroad, *The Math behind the Music* (2006), Cambridge University Press, New York.
- 2 John Fauvel, Raymond Flood, Robin Wilson editors, *Music and Mathematics: from Pythagoras to fractals* (2003), Oxford University Press, Oxford.
- 3 David J. Benson, *Music, a mathematical offering* (2007), Cambridge University Press, Cambridge.
- 4 Hermann von Helmholtz, *On the Sensations of Tone* (1954), Dover; vertaling van: *Die Lehre von den Tonempfindungen* (1877).
- 5 W.J.M. Levelt, R. Plomp, 'Tonal Consonance and Critical Bandwidth', *Journal of the Acoustical Society of America* (1965), <http://hdl.handle.net/2066/15398>; W.J.M. Levelt, J.P. van de Geer, R. Plomp, 'Triadic Comparisons of Musical Intervals', *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* **19**(2), (1966), pp. 163–179, <http://hdl.handle.net/2066/15409>.
- 6 Jan van de Craats, Floris Takens, 'De juiste toon, de juiste stemming', *Nieuw Archief voor Wiskunde* (juni 2001), vijfde serie, deel 2, nummer 2, Leiden.
- 7 Website <http://www.melaoundation.org/lmy.htm> van La Monte Young waar cd's en dvd's van deze componist kunnen worden besteld.
- 8 Ton de Leeuw, *Music of the 20th Century* (2006), Amsterdam University Press, Amsterdam; translation of: *Muziek van de twintigste eeuw* (1964), Utrecht.
- 9 Neville H. Fletcher, Thomas D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments* (2008), Springer, Corr. 5th printing edition.
- 10 Website <http://bach.tuning.googlepages.com> waar Bachs stemmingsinstructies voor *Das Wohltemperierte Klavier* worden besproken.

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Eric Maskin



Pierre Deligne

De favoriet van Eric Maskin

Pierre Deligne

Jeanine Daems en Ionica Smeets vroegen op hun weblog www.wiskundemeisjes.nl aan een reeks wiskundigen wie hun favoriete nog levende wiskundige is. Hiermee willen ze bijzondere wiskundigen van deze tijd in het zonnetje zetten. Dit is de laatste aflevering van deze rubriek in het Nieuw Archief voor Wiskunde. We eindigen met de favoriet van Nobelprijswinnaar Eric Maskin.

Op bezoek in Princeton vroeg ik Eric Maskin welke nog levende wiskundige hij bewondert. Maskin werd geboren in New York en studeerde en promoveerde als toegepast wiskundige aan Harvard. Hij werkte op verschillende topplekken voor hij in 2000 neerstreek op het Institute for Advanced Study in Princeton. Daar werkt hij aan verschillende economische vraagstukken. In 2007 kreeg Maskin de Nobelprijs voor Economie voor zijn werk in de speltheorie. Hij was een van de grondleggers van de Mechanisme Ontwerp Theorie: hoe je een spel kunt opzetten om een bepaalde uitkomst te bereiken, ook al spelen de individuele spelers voor hun eigen belang. Dit klinkt gemener dan het is: het is vaak juist de bedoeling dat de spelers uiteindelijk allemaal tevreden zijn. Maskin gebruikt als voorbeeld aan het begin van een voordracht vaak de klassieke vraag hoe je met twee personen een taart eerlijk kunt delen. Hij eindigt zo'n voordracht met de actuele vraag hoe je een veiling van bijvoorbeeld gsm-frequenties zo eerlijk mogelijk kunt opzetten. Omdat Maskin in de economische speltheorie werkt, verwachtte ik dat hij ook iemand in die hoek zou noemen als favoriet. Tot mijn verbazing koos hij echter... Pierre Deligne.

Deligne werd in 1944 geboren in Brussel, waar hij ook wiskunde studeerde. Hij was lange tijd verbonden aan het Institut

des Hautes Études Scientifiques, waar hij werkte met Alexander Grothendieck. Sinds 1984 werkt hij in Princeton. Delignes beroemdste resultaat is waarschijnlijk zijn bewijs van de Weil-vermoedens. Voor dit werk kreeg Deligne in 1978 de Fieldsmedaille en hij heeft sindsdien heel wat prijzen gewonnen. Zijn werk is ontzettend breed, Maskin noemt hem 'een moderne Gauss'. Maskin heeft nooit zelf met Deligne gewerkt, maar hij bewondert zijn prachtige resultaten en zijn vriendelijke persoonlijkheid. Ze zien elkaar regelmatig op Princeton, Maskin vertelt dat Deligne naar de meest uiteenlopende voordrachten komt. Blijkbaar komt Maskin zelf ook naar al die voordrachten!

Tenslotte een mooi citaat uit de nieuwsbrief van Princeton toen voor de 61ste verjaardag van Deligne een conferentie werd georganiseerd.

Peter Sarnak schrijft: "There are very few mathematicians whose impact on modern mathematics comes close to that of Deligne [...] Deligne's research in algebraic geometry and arithmetic geometry has shaped these fields and led him to the solution of a number of long standing problems, including the Weil Conjectures (which are the analogues of the notorious Riemann Hypothesis for varieties over finite fields) and the celebrated Ramanujan Conjecture in the theory of modular forms. Deligne's foundational contributions range from the above fields to representation theory of groups, differential equations and monodromy, topology... Many of the techniques and tools that he developed either in these papers or in response to questions posed to him (he is very approachable and generous) are at the bottom of much of the exciting research that is going in these fields today."



Dirk Siersma

*Mathematisch Instituut,
Universiteit Utrecht,
3508 TA Utrecht
D.Siersma@uu.nl*

Nieuws

Verder met het wiskundeonderwijs

In de afgelopen maanden woedde een felle discussie over de inhoud van de examenprogramma's wiskunde per 2014. Het Nieuw Archief deed hiervan verslag in het decembernummer van 2008 (Siersma, van de Boogaart), en in het maartnummer van 2009 (Landsman, van de Craats). De laatste ontwikkeling in dezen is het zojuist bereikte compromis tussen de standpunten van de vernieuwingscommissie cTWO, de staatssecretaris en de resonansgroep. Dirk Siersma, voorzitter van de vernieuwingscommissie, bericht over de vreedzame afsluiting van een scherp debat.

In de afgelopen nummers van NAW zijn diverse bijdragen verschenen over de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs in havo en vwo. Ik weersta de verleiding om daar verdere kanttekeningen bij te maken en verwijs naar mijn bijdrage in het decembernummer. Ik denk dat het belangrijker is om naar de toekomst te kijken. Laten we gevolg geven aan de oproep van Klaas Landsman: de rijen sluiten en samen aan het werk gaan. Daarvoor is nu het moment gekomen.

Op 11 maart j.l. stuurde de staatssecretaris van OCW, Marja van Bijsterveldt, een brief aan de Tweede Kamer waarin ze instemt met de door cTWO (vernieuwingscommissie wiskunde) aangepaste examenvoorstellen als grondslag voor de nader uit te voeren examenpilots. Deze pilots starten op dertien scholen in klas 4 in het schooljaar 2009–2010. (De brief is integraal weergegeven bij dit artikel.)

In de aanpassingen (gericht op 2014) heeft cTWO haar visie en ingezette koers in belangrijke mate kunnen combineren met de wensen van de staatssecretaris. De koers van cTWO is gericht op een wiskundeprogramma met aandacht voor denkactiviteiten, die hand in hand gaan met een verantwoord niveau van algebraïsche vaardigheden. Daarnaast een gezonde blik naar buiten, want wiskunde staat midden in de wereld van vandaag.

In een eerdere discussie tussen OCW en

cTWO vroeg het ministerie zich af of er voldoende ruimte was gereserveerd voor de basisvaardigheden wiskunde. Daarbij werd ook de wens uitgesproken tot een versteviging van het onderbouwprogramma in havo en vwo. Naar aanleiding van deze discussie heeft cTWO tussentijds de effecten van het huidige wiskundeonderwijs ten aanzien van de basisvaardigheden algebra geëvalueerd. Daartoe hebben docenten een enquête ingevuld ($n = 193$), zijn interviews gehouden met docenten van de experimenterende scholen, zijn per schoolmethode de edities 2007 vergeleken met de voorgaande edities en hebben leerlingen van klas 5 en van klas 6 een vergelijkende algebratoets gemaakt. Vooral de resultaten op de toets laten een duidelijke trend zien naar een betere beheersing van de algebra.

Gesterkt door deze feiten heeft cTWO de stellige verwachting dat het herstel van de algebraïsche vaardigheden, ingezet in het 2007-programma, haalbaar is en voldoende garantie geeft voor de aansluiting met het hoger onderwijs. Tegelijkertijd zijn door cTWO de aanbevelingen van een eerder rapport over de onderbouw van havo en vwo uitgewerkt tot een Trajectenboek voor de leerjaren 1 tot en met 3. Het trajectenboek bevat een opsomming per leerjaar en per leerlijn van onderwerpen die aan bod kunnen komen, een en ander toegelicht met voorbeelden. Vanaf 2009 zal

daarmee actief gewerkt worden aan het herstel van de onderbouw, waarin diepgang en leerstof en vaak ook contacturen verdwenen zijn tijdens de basisvorming.

Aansluitend op de onderbouw is per examenprogramma geformuleerd welke voorkeuren men kan verwachten in klas 4 om met succes aan het bovenbouwprogramma te kunnen beginnen.

Met deze documenten is, weliswaar als uitgangspunt voor de experimenten, het toekomstige wiskundeonderwijs voor havo en vwo van de eerste klas tot en met het eindexamen in kaart gebracht. Het is de bedoeling dat in 2012 de definitieve examenprogramma's worden vastgesteld. De landelijke invoering vindt dan plaats in klas 4 vanaf 2014 en kan aansluiten op het herstel van de onderbouw. In de tussentijd is er voldoende tijd voor de implementatie en het ontwikkelen van geschikt lesmateriaal.

De genoemde documenten kunt u downloaden vanaf de cTWO-site: www.ctwo.nl.

Belangrijke wijzigingen

De aangepaste examenvoorstellen bevatten de volgende belangrijke wijzigingen:

- Wiskunde C (vwo): de formulering van de vaardigheden en de omvang van statistiek;
- Wiskunde A (havo): een nieuwe eigen opzet voor Statistiek en Kans;
- Wiskunde A (vwo): een uitbreiding van de differentieerregels en het toevoegen van tangens, de e-macht en $\ln$;
- Wiskunde B (vwo): domeinindeling van de meetkundelijn.

**Ministerie van Onderwijs, Cultuur en
Wetenschap**

> Retouradres Postbus 16375 2500 BJ Den Haag

De voorzitter van de Tweede Kamer der Staten-Generaal
Postbus 20018
2500 EA DEN HAAG

Rijnstraat 50
Den Haag
Postbus 16375
2500 BJ Den Haag
www.minocw.nl
Contactpersoon

Onze referentie
VO/OK/107782
Bijlagen
1

Datum 11 maart 2009
Betreft wiskunde

In mijn brief van 13 juni 2008, kenmerk VO/OK/21463 stelde ik de Kamer op de hoogte van de stand van zaken bij de ontwikkeling van nieuwe examenprogramma's wiskunde voor vwo en havo. Ik moest u mededelen dat er verdeeldheid was in de wiskundewereld, op dat moment zich toespitsende op de besluiten die ik had genomen over de voorstellen voor nieuwe examenprogramma's gedaan door de daarvoor ingestelde vernieuwingscommissie (cTWO, commissie Siersma). Deze besluiten waren gebaseerd op de weging van de commentaren op de voorstellen door de zgn. Resonansgroep (vertegenwoordigers van het hoger onderwijs) en de vereniging van de wiskundedocenten. Ik besloot mijn brief met de mededeling dat ik, gelet op de gebleken verschillen van mening, mijn besluiten nog eens zou voorleggen aan de VSNU en de HBO-Raad.

Nadat deze mij, kort samengevat, hadden medegedeeld dat zij zich in deze besluiten konden vinden, heeft uitvoerig nader overleg plaatsgehad met de vernieuwingscommissie. Dat heeft ertoe geleid dat de vernieuwingscommissie mij aangepaste voorstellen heeft voorgelegd (versie 20 februari 2009). De commissie heeft daarbij tevens een toelichting gegeven waarin zij o.a. verantwoordt op welke wijze zij mijn besluiten heeft verwerkt. In de bijlage bij deze brief vindt u deze toelichting. Ik stem in met deze aangepaste voorstellen. Daarmee kunnen zij de grondslag vormen voor een nadere uitwerking in zgn. syllabi voor het centraal examen door de CEVO en vervolgens voor in het schooljaar 2009-2010 te starten pilots. Deze pilots zullen o.a. een antwoord moeten geven op de vraag naar de praktische haalbaarheid van de programma's.

Ik ben blij dat het in goed overleg uiteindelijk mogelijk is gebleken tot overeenstemming te komen over de verdere ontwikkeling van de wiskunde in vwo en havo.

Marja van Bijsterveldt-Vliegenthart
De staatssecretaris van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap

Dan Bernstein

Technische Universiteit Eindhoven,
P.O. Box 513,
5600 MB EINDHOVEN
djb@cr.yp.to

Wiskundig werktuig

The devil's guide to citing the literature

Als tweede deel van onze minireeks 'Wiskundig werktuig' laat Dan Bernstein zien hoe je best niét de wiskundige literatuur kunt citeren, in deze tijden van internet en Google. Daniel J. Bernstein is onderzoekshoogleraar informatica aan de University of Illinois at Chicago, gast aan de Technische Universiteit Eindhoven en winnaar van de Beeger Prijs 2008 van het KWG.

Wiskundige onderzoeksartikelen bevatten precieze biografische referenties. Hoe kunnen we dat soort referenties zo zinvol mogelijk maken voor de lezer? In dit stukje geeft de duivel aan auteurs enig zinvol advies.

Te korte biografische verwijzingen

De hoofdfunctie van een biografisch item is het helpen van de lezer om een exemplaar van het geciteerde werk te kunnen bemachtigen. Krantz schrijft op pagina 76 van een zeker boek in een zekere taal dat 'de praktijk van het opsommen van afkortingen in plaats van correcte bibliografische referenties onverantwoordelijk is'.

Opgeve 1. Zoek de passende referentie bij dit citaat.

De auteur die de lezer zo min mogelijk wil helpen, imiteert Krantz' hypothetische minimalistische biografische referentie: 'Machedon, 1988'.

Opgeve 2. Zoek de passende bron bij deze minimalistische referentie.

Als een lezer klaagt, antwoord dan dat je in het tijdperk van Google, CiteSeer, MathSciNet en de Collection of Computer Science Bibliographies, toch gemakkelijk uit deze minimale hoeveelheid informatie de volledige referentie kunt reconstrueren. Zo kunnen bijvoorbeeld lezers met toegang tot MathSciNet

zoeken naar Machedon en 1988 en aldus alle detailinformatie over twee artikelen van Mache-don uit 1988 vinden, en hopelijk kan de lezer van Krantz' hypothetische citatie wel achterhalen welk van deze twee papers wordt bedoeld.

Een lezer merkt misschien op dat *jij* dit had moeten doen, en dus de complete informatie zelf in de bibliografie had moeten opnemen. Antwoord hierop dat korte biografische entrees papier besparen en het milieu minder belasten.

Verwijzingen zonder URL

Onderstaande biografische verwijzing is uitermate gebruiksvriendelijk, dus probeer dit te vermijden:

[40] John B. Friedlander, Andrew Granville. Smoothing 'smooth' numbers. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 345 (1993), 339-347. MR 95b:11086. <http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/Analytic.html>.

Dankzij de URL kan de lezer een kopie van het artikel downloaden in veel kortere tijd dan vereist om het tijdschrift in een bibliotheek te vinden. Omdat wij de lezer graag willen vertragen, kunnen we beter de URL weglaten:

[40] John B. Friedlander, Andrew Granville. Smoothing "smooth" numbers. *Philosophical*

Transactions of the Royal Society of London Series A 345 (1993), 339-347. MR 95b:11086.

Met dit soort citatie zonder URL kan iemand meer tijd verliezen dan met "[40] That old smoothing-smooth paper": er zijn vast wel lezers die bij het zien van de titel van het tijdschrift hierboven er zelfs niet aan denken met Google naar het artikel te gaan zoeken.

Verwijzingen zonder stabiele URL

Maar zal de URL <http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/Analytic.html> over twee jaar nog wel werken? Over vijf jaar? Over twintig jaar?

'Linkverrotting' is een wonderlijk mechanisme om je boze bedoelingen te verbergen. Zo verscheen bovenstaande citatie (in een boek uit het jaar 2000) met als URL <http://www.math.uga.edu/~andrew/ag-papers.html>, een link die niet langer werkt. Je kan dus best de referentie uit dit boek kopiëren met de oude URL en natuurlijk niks updaten. Mocht er ooit een permanente URL voor dit artikel komen, geschikt om te citeren, zoals bijvoorbeeld <http://cite.math.uga.edu/1993/granville>, dan moet je die vooral niet gaan gebruiken. Kies ook hier weer liever de referentie die het meest waarschijnlijk verrot.

Slechte identificatie van boeken

Volgende verwijzing komt uit een artikel van Bellare, Canetti, en Krawczyk:

[17] P. Rogaway and D. Coppersmith, "A software optimized encryption algorithm," *Workshop on software encryption*, Cambridge, 1993.

Het boek met het artikel van Rogaway en Coppersmith heeft niet de titel 'Workshop on software encryption' en werd niet in 1993 uitgegeven. Hoe kan een lezer dit boek in 's hemelsnaam in zijn bibliotheek vinden?

Opgave 3. Vind dit artikel.

Nog enige misleidend volledig uitziende referenties:

[27] R. Moenck and A. B. Borodin, Fast modular transforms via division, in Conf. Record, IEEE 13th Ann. Symposium on Switching and Automata Theory, 1972, pp. 90–96.

[Sha71] D. Shanks. Class number, a theory of factorization and genera. In Proc. Symp. Pure Math. 20, pages 415–440. AMS, Providence, R.I., 1971.

Is 'Conf. Record, IEEE 13th Ann. Symposium on Switching and Automata Theory' de titel van een boek? Wat betekent 'Proc. Symp. Pure Math.'? Het punt is: als de lezer het niet weet, zal de bibliotheeksoftware of het bibliotheekpersoneel dit dan kunnen achterhalen? Het had er ook zo kunnen uitzien:

[1] Ross Anderson (editor). Fast software encryption. Lecture Notes in Computer Science 809. Springer-Verlag, Berlin, 1994. ISBN 3-540-58108-1. MR 97b:94004.

[2] Richard M. Karp (chairman). 13th annual symposium on switching and automata theory. IEEE Computer Society, Northridge, 1972.

[3] Donald J. Lewis (editor). 1969 Number Theory Institute. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 20. American Mathematical Society, Providence, 1971. ISBN 0-8218-1420-6. MR 47 #3286.

[4] Robert T. Moenck, Allan Borodin. Fast modular transforms via division. In [2] (1972), 90–96.

[5] Phillip Rogaway, Don Coppersmith. A software-optimized encryption algorithm. In [1] (1994), 56–63.

[6] Daniel Shanks. Class number, a theory of factorization, and genera. In [3] (1971), 415–440. MR 47 #4932.

De lezer kan eenvoudig de naam van de editor en de titel van het boek in de catalogus van een bibliotheek vinden. Zoeken op ISBN is nog makkelijker, als je in de catalogus op ISBN-nummer kan zoeken, maar dat is onder-tussen meestal het geval. Het aangeven van de naam van een boekenreeks en het volu-

menummer maakt het vinden van boeken in bibliotheken die reeksen samen bewaren bijzonder eenvoudig. En het Math Reviews nummer is een andere toegangsbron tot informatie voor MathSciNet-gebruikers.

Misschien heeft uw lokale bibliotheek geen exemplaar van het boek. Misschien wil de lezer het dan uit een boekenwinkel halen, of online kopen bij een boekenwinkel of uitgever. Hoe meer informatie beschikbaar (editor, reeks, volume, uitgever, jaar, ISBN), hoe eenvoudiger het is te verifiëren dat het om de correcte referentie gaat.

Als je dus niet wilt dat een lezer het boek dat je citeert kan vinden, zorg er dan voor dat geen enkele van deze mechanismes werkt.

Andere versies van artikelen weglaten

De referentie hierboven naar Moenck-Borodin is niet compleet. Hier is de complete referentie, of liever gezegd, hoe de biografie zinvol kan worden uitgebreid zodat de kwestie duidelijk wordt:

[28] Allan Borodin, Robert T. Moenck. Fast modular transforms. Journal of Computer and System Sciences 8 (1974), 366–386. MR 51 #7365. Older version, not a subset, in [118].

[93] Richard M. Karp (chairman). 13th annual symposium on switching and automata theory. IEEE Computer Society, Northridge, 1972.

[118] Robert T. Moenck, Allan Borodin. Fast modular transforms via division. In [93] (1972), 90–96. Newer version, not a superset, in [28].

Voor de lezer blijkt het in dit geval bijzonder zinvol te zijn om twee versies van het paper te kunnen vinden:

- Een lezer die het artikel uit 1972 zoekt kan misschien makkelijk het artikel uit 1974 vinden, of omgekeerd. Voor de meeste lezers maakt het niet zoveel uit welk artikel ze raadplegen.
- De meeste resultaten uit het artikel van 1974 zijn al in het artikel uit 1972 te vinden. Lezers die de credits correct willen toekennen moeten ook het artikel uit 1972 bekijken.
- De meeste resultaten uit het artikel van 1972 worden duidelijker en uitvoeriger in het artikel van 1974 uitgelegd. Lezers die een resultaat uit deze artikelen willen leren en beide exemplaren ter beschikking hebben, zullen de voorkeur geven aan de

versie van 1974.

- In het artikel uit 1972 staan resultaten die niet in het artikel uit 1974 zijn opgenomen. Lezers die alles willen weten moeten beide artikelen lezen. Het was natuurlijk beter als het artikel uit 1972 wel een deelverzameling van dat uit 1974 was geweest, maar dat is nu eenmaal niet het geval. (Saillant detail: het Moenck-Borodin delingsalgoritme werd door twee andere groepen heruitgevonden in 1998, en is niet hetzelfde als het Borodin-Moenck delingsalgoritme.)

Al deze voordelen kan je zelf teniet doen door slechts één versie van het artikel te citeren. Als lezers klagen, wijs er dan op dat al dat geciteer de citation index van de auteurs nodeloos en ten onrechte verhoogd.

Onspecifieke delen van grote documenten

Hier is een slecht citaat uit een boek van Buergisser, Clausen, en Shokrollahi:

Tellegen's theorem (13.20), a basic result in network theory, see, e.g., [142, 416, 9], says that transposing the K-DAG for a matrix A gives a K-DAG for its transpose.

Waarschijnlijk bedoelen Buergisser et al. specifieke pagina's in de boeken [142], [416] en [9]. Hoe kan de lezer die vinden? Laten we de uitdaging aannemen. We hebben [142] uit de bibliotheek geleend. Het betreft een boek van 867 pagina's door Desoer en Kuh met als titel 'Basic Circuit Theory.' De index geeft aan dat Tellegen's stelling te vinden is op pagina's "393, 422–423; applications, 396–402, 807." Naar welke van deze 11 pagina's wordt verwezen? (Het antwoord blijkt te zijn: geen enkele van deze pagina's. Tellegen's stelling zegt dat de totale stroomsterkte van een elektrisch circuit nul is. Het idee om circuits te transponeren is later door Bordewijk ingevoerd. Maar goed, om *fout* citeren ging het hier niet, alleen om *vaag* citeren.)

Opgave 4. Om welke Bordewijk gaat het hier?

Je moet dus gewoon altijd paginanummers enz. weglaten in referenties! De dikste boeken kiezen. Nog beter: gewoon niet citeren, en hopen dat je dan zelf wordt geciteerd. ←

Dankwoord

The devil thanks Gunther Cornelissen for his help in producing this document.

Kees Vuik

Technische Universiteit Delft
 Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
 Delft Institute of Applied Mathematics
 Mekelweg 4, 2628 CD Delft
 c.vuik@tudelft.nl

Onderzoek

Een kwart eeuw iteratieve methoden

Lineaire algebra vormt het wiskundige fundament waarop bijvoorbeeld in computer-animaties de meest fantastische voorstellingen worden gebouwd. Voor de weergave van deze beelden in films of games is een ontzaglijke partij rekenwerk nodig, en er is dan ook doorlopend behoefte aan snellere hardware en slimmere rekenmethoden. Kees Vuik geeft een overzicht van de ontwikkelingen in de afgelopen vijftintig jaar in de iteratieve methoden, waarbij Nederlandse onderzoekers een vooraanstaande plaats innemen.

In dit artikel worden iteratieve methoden beschreven, die de afgelopen kwart eeuw ontwikkeld zijn voor het oplossen van lineaire stelsels van de vorm

$$Ax = b,$$

waarbij $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ een niet-singuliere matrix is en de oplossing x en de rechterlid-vector b beide element zijn van $\mathbf{R}^n$. In dit overzicht veronderstellen we dat de gebruikte matrices veel nullen bevatten: A is een ijle matrix. Veelal zijn de matrices afkomstig van gediscretiseerde partiële differentiaalvergelijkingen. De matrices zijn groot tot zeer groot: stelsels met miljarden vergelijkingen en miljarden onbekenden zijn geen uitzondering. Dit betekent vooral dat methoden die optimaal gebruik maken van het computergeheugen en efficiënt zijn in rekentijd, erg in de aandacht staan. Als een methode gebruikt wordt door niet-experts dan is het van groot belang dat de methode robuust is, dat wil zeggen dat de methode altijd met een betrouwbaar antwoord komt, weinig of geen parameters bevat en tenminste sneller is dan de methoden die tot nu toe gebruikt worden. Een aardige uitzondering op het gebruik van grote stelsels is de toepassing van het oplossen van stelsels binnen een computer-

spel. Hierbij komen stelsels van 80 vergelijkingen en 80 onbekenden voor. Echter omdat de oplossing binnen een milliseconde gevonden moet worden, maken de spelletjes toch gebruik van geavanceerde parallelle iteratieve methoden [30].

We starten met een kort overzicht van de 'state of the art' methoden in 1980. Daarna worden de nieuwe ontwikkelingen besproken. Eerst worden *Krylov-deelruimte*-methoden besproken. Deze methoden kunnen alleen zinvol gebruikt worden als ze gecombineerd worden met geschikte *preconditioneringen*. Een andere belangrijke ontwikkeling bij het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen zijn *domein decompositie*-methoden. Deze methoden leiden automatisch tot iteratieve methoden. *Multigrid*-methoden kunnen zowel als oplosmethode en als preconditionering gebruikt worden. Als laatste maken we een uitstapje naar speciale computers. In de conclusies geven we een korte samenvatting en een vooruitblik van de toekomst van iteratieve methoden.

Als illustratie beschouwen we het 2×2 stelsel:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 50, \\ x + 2y &= 55. \end{aligned}$$

De exacte oplossing wordt gegeven door $x = 15$ en $y = 20$. Als we dit stelsel oplossen met de Gauss Jacobi iteratieve methode dan gaat dit als volgt. Kies een startbenadering, bijvoorbeeld $x_0 = 0$ en $y_0 = 0$. Om de volgende benadering (x_1, y_1) te vinden, lossen we x_1 en y_1 op uit:

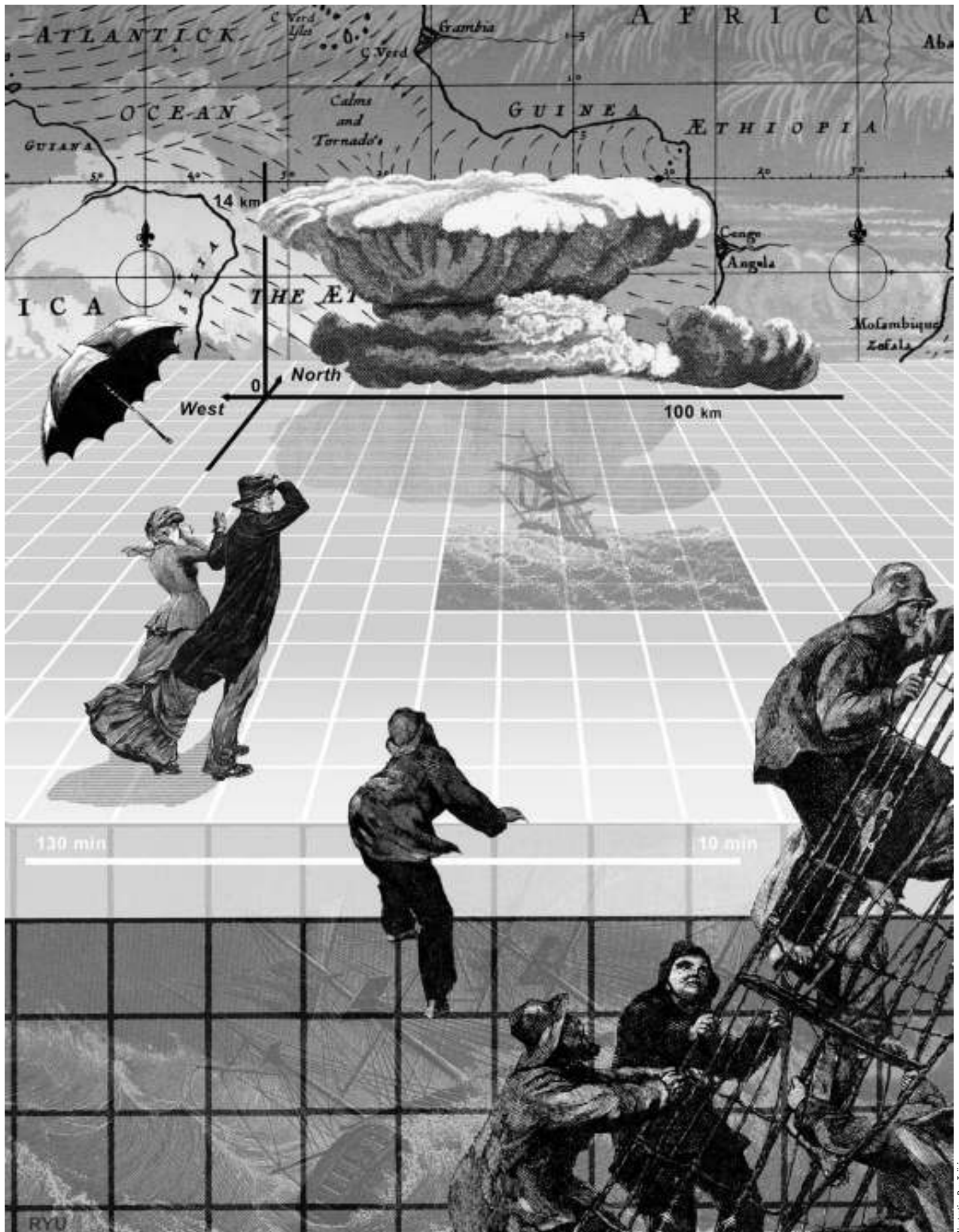
$$\begin{aligned} 2x_1 + y_0 &= 50, \\ x_0 + 2y_1 &= 55. \end{aligned}$$

De oplossing hiervan wordt gegeven door $x_1 = 25$ en $y_1 = 27.5$. Zo doorgaande vinden we: $x_2 = 11.25$ en $y_2 = 15$, $x_3 = 17.5$ en $y_3 = 21.875$, $x_4 = 14.0625$ en $y_4 = 18.75$, ... en we zien dat er snelle convergentie optreedt naar de exacte oplossing $x = 15$ en $y = 20$.

Nederlandse onderzoekers nemen een vooraanstaande plaats in bij de ontwikkeling van snelle en robuuste iteratieve oplosmethoden. Omdat de hoeveelheid literatuur over iteratieve oplosmethoden erg groot is, beperken we ons tot de belangrijkste verwijzingen. In elke paragraaf zal verwezen worden naar boeken [2, 25, 39, 63] of overzichtsartikelen [43], waarin verdere verwijzingen te vinden zijn.

Iteratieve methoden tot aan 1980

Boeken waarin een overzicht gegeven wordt van de literatuur uit deze periode zijn [67, 72, 75]. Opvallend hierbij is dat er in de jaren 1970-1980 weinig of geen boeken verschenen zijn over iteratieve methoden. Een mogelijke oorzaak zou kunnen zijn dat de ontwikkeling van standaard iteratieve methoden min



Krylov-deelruimtemethoden

De meest eenvoudige methode om het stelsel $Ax = b$ op te lossen is de Richardson methode. Kies een startbenadering x_0 . Om de nieuwe iterand te bepalen wordt de volgende iteratie gebruikt:

$$x_{j+1} = x_j + (b - Ax_j) = x_j + r_j.$$

Het is eenvoudig om in te zien dat x_j een lineaire combinatie is van

$$x_0, r_0, Ar_0, \dots, A^{j-1}r_0.$$

Dit blijkt voor veel iteratieve methoden het geval te zijn. De ruimte opgespannen door $r_0, Ar_0, \dots, A^{j-1}r_0$ wordt de Krylov-deelruimte genoemd. Een Krylov-deelruimtemethode is een methode waarbij de iterand x_j element is van de Krylov-deelruimte en waarbij of een minimalisatie eigenschap geldt (CG, GMRES), of het residu (bi)-orthogonaal staat op een andere deelruimte met dimensie j .

of meer voltooid was, terwijl de stormachtige ontwikkeling van Krylovmethoden net startte in deze periode.

Onder standaard iteratieve methoden verstaan we methoden die gebaseerd zijn op een splitsing van de matrix, zoals Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel en Successieve Overrelaxatie (SOR). Veel verschillende varianten (blok versies, Symmetrische SOR, SOR met lokale overrelaxatie enz.) zijn bekend aan het einde van de jaren zeventig. Verder is een goede analyse van de convergentie gemaakt en is er theorie ontwikkeld om schattingen te maken van de optimale (lokale) overrelaxatie parameter [7]. In 1968 is de SIP (Strongly Implicit Procedure) beschreven door Stone [52]. De methode lijkt op een incomplete Choleski ontbinding, met dit verschil: de ongewenste fill wordt niet weggelaten maar wordt zodanig opgenomen in de andere niet-nulelementen van de Choleski factor, dat de fout in de incomplete ontbinding dezelfde orde van grootte heeft als de afbreekfout. Lange tijd is dit één van de snelste oplosmethoden. We zien bijvoorbeeld dat de ICCG methode pas doorbreekt als blijkt dat deze methode sneller is dan de SIP methode. Als laatste noemen we de TDMA (tridiagonal matrix algorithm) methode. Deze is door Patankar [36] gebruikt om gediscretiseerde Navier-Stokes vergelijkingen op te lossen. De methode is nog steeds heel populair bij deze toepassingen.

De Chebychev semi-iteratieve methode [23–24] is eerst voor symmetrisch positief

definiëte (SPD) matrices ontwikkeld en geanalyseerd en later pas voor algemene matrices. Een nadeel van deze methode is dat er informatie over de eigenwaarden bekend moet zijn. Een voordeel van deze methode is dat er geen inproducten bepaald behoeven te worden, wat de methode heel geschikt maakt voor massaal parallelle computers. Verder wordt deze methode gebruikt om de convergentie(snelheid) van Krylov-deelruimtemethoden theoretisch te schatten.

In 1952 is voor het eerst de Conjugate Gradient methode beschreven voor SPD matrices [29]. De methode had een slechte start als directe oplosmethode. Pas toen in 1977 de methode gecombineerd werd door Meijerink en Van der Vorst met een preconditionering gebaseerd op een incomplete Choleski ontbinding ontstond de zeer succesvolle en robuuste ICCG methode [32]. Uit de 872 verwijzingen binnen Google Scholar blijkt dat deze in Nederland ontwikkelde methode zijn weg gevonden heeft bij allerlei toepassingen. Het generaliseren naar algemene matrices is in deze periode nog niet erg succesvol.

Een andere belangrijke oplosmethode, die ontwikkeld is vanaf 1960 is de geometrische multigrid methode. Deze is in eerste instantie toepasbaar voor het snel oplossen van elliptische partiële differentiaalvergelijkingen op gestructureerde roosters. De methode wordt in Nederland voor het eerst toegepast op de gediscretiseerde Navier Stokes vergelijkingen. Theoretische analyse laat zien, dat de methode een optimale complexiteit heeft. Bij een vergelijking van de ICCG en de geometrische multigrid methode blijkt dat de laatste voor Poisson-achtige problemen altijd sneller is, als het aantal onbekenden heel groot is. Het toepassingsgebied van de geometrische multigrid methode is in deze periode nogal beperkt. De ICCG methode heeft een veel hoger 'black box' gehalte.

Domein decompositie methoden zijn al vanaf 1870 bekend. Onder de naam Schwarz wordt een hele grote verscheidenheid van methoden geplaatst. Deze methoden kunnen gebruikt worden om met behulp van analytische technieken partiële differentiaalvergelijkingen op te lossen in gecompliceerde gebieden. Bij een andere toepassing worden er op verschillende gebieden verschillende modellen opgelost. In zekere zin kunnen de blok standaard iteratieve methoden ook gezien worden als domein decompositie methoden. De domein decompositie methoden hebben altijd een iteratieve component in zich. Soms worden ze gebruikt als preconditionering voor een Krylovmethode. Na de opkomst van de



Figuur 1 A.N. Krylov (1863–1945)

parallelle computer na 1980 staan deze methoden erg in de aandacht. We komen hier later op terug.

In de periode van 1940 tot 1980 zien we dat de digitale computer een enorme ontwikkeling heeft doorgemaakt. Zijn in de beginjaren stelsels met $n = 80$ al zeer groot, in de jaren tachtig is het al mogelijk om vectoren en (ijle) matrices op te slaan voor $n = 10^6$. Het blijkt dat er een interactie is tussen de groei van de computersnelheid en de ontwikkeling van de iteratieve methode. Een voorbeeld hiervan is dat iteratieve oplosmethoden sneller worden dan directe oplosmethoden als n groter genomen kan worden. Alhoewel er omstreeks 1980 speciale computerarchitecturen op de markt komen (vector, transputer, RISC, etc.) vinden de grote ontwikkelingen op dit gebied pas na 1980 plaats.

Krylov-deelruimtemethoden

Zoals uit het voorgaande blijkt waren de Krylovmethoden voor symmetrische positief definitie matrices al voor 1980 uitgekristalliseerd. De situatie is geheel anders voor niet-symmetrische matrices. Rondom 1980 wordt zelfs bewezen [18, 69] dat het onmogelijk is om een Krylovmethode te vinden, die alle prettige eigenschappen van de Conjugate Gradient-methode bezit en die gebruikt kan worden voor algemene matrices. Eén van de weinige ontwikkelingen die wel plaatsvindt in de tachtiger jaren is een goed begrip van de superlineaire convergentie van de Conjugate Gradient methode [59–60].

Voor de Conjugate Gradient methode gelden de volgende eigenschappen:

- de benadering x_k is een element van de Krylov-deelruimte gebaseerd op A en het beginresidu $r_0 = b - Ax_0$,

- bij de Conjugate Gradient methode wordt de fout geminimaliseerd in de A-norm,
- de Conjugate Gradient methode maakt gebruik van een korte recurrenties (2 of 3 terms recurrentie, afhankelijk van de implementatie).

In [18, 69] wordt aangegeven voor welke klasse van matrices Krylovmethoden ontworpen kunnen worden met bovenstaande eigenschappen. Voor algemene matrices zal er dus één van de eigenschappen niet gelden. Dit leidt tot de volgende drie klassen van methoden:

- De Conjugate Gradient methode toegepast op de normaalvergelijkingen. Hierbij is niet voldaan aan de eerste eigenschap.
- BiCG methoden. Deze voldoen niet aan een optimalisatie eigenschap.
- GMRES methoden. Bij deze methoden worden lange recurrenties gebruikt.

Conjugate Gradient toegepast op de normaalvergelijkingen

Dit is een voor de hand liggend idee: pas Conjugate Gradient toe op

$$A^T A x = A^T b.$$

Als de matrix A niet singulier is, dan is de matrix $A^T A$ SPD. De beste methode binnen deze klasse is de LSQR methode [35]. Een sterk punt bij deze methode is dat er goede foutschattingen gemaakt worden; deze maken de methode robuust en zeer betrouwbaar. Een nadeel is dat de convergentie bepaald wordt door $\kappa(A^T A) = \kappa(A^2)$. In het algemeen leidt dit tot trage convergentie. Ook is het vinden van een geschikte preconditionering geen eenvoudige zaak.

BiCG methoden

Bij de BiCG methode, die beschreven is in [19], wordt de CG methode toegepast op

$$Ax = b \text{ en } A^T \tilde{x} = \tilde{b}.$$

Hierbij wordt $\tilde{r}_k = \tilde{b} - A^T \tilde{x}_k$ het schaduwresidu genoemd. Het blijkt dat in deze methode de zoekrichtingen en de residuen bi-orthogonaal zijn, dat wil zeggen:

$$r_i^T \tilde{r}_j = 0 \text{ als } i \neq j.$$

De methode convergeert snel als A een kleine afwijking heeft van een SPD matrix. Nadelen zijn dat er per iteratie twee matrix-vector producten nodig zijn, verder is A^T nodig, die niet altijd beschikbaar is, er kan 'serious break down' optreden en er is geen convergentie analyse mogelijk. Het aandeel nadelen wordt minder bij de CGS (CG Squared) methode [50]. Bewerkingen met A^T zijn niet langer nodig. Er

zijn nog wel twee matrix-vector producten nodig per iteratie, echter de convergentie gaat ook twee keer zo snel als bij de BiCG methode. De methode vulde een gat in de markt en wordt heel vaak gebruikt en geciteerd (651 verwijzingen binnen Google Scholar).

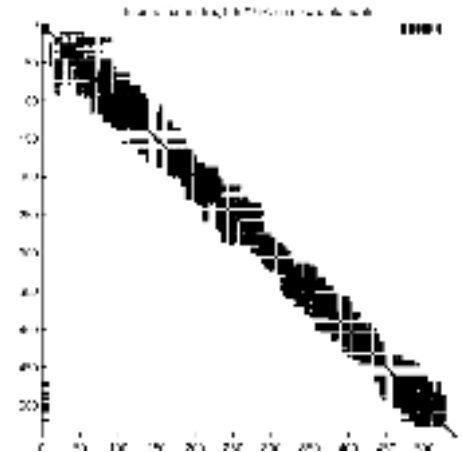
Een nadeel van CGS is dat lokaal het residu enorm kan toenemen. Een oplossing hiervan is de Bi-CGSTAB methode ontwikkeld door Henk van der Vorst [62]. Deze methode is nog steeds één van de favoriete Krylov oplossmethoden. Naast deze methode zijn nog veel andere varianten ontwikkeld. De meeste daarvan worden niet zo veel gebruikt. Een uitzondering hierop is de QMR (Quasi Minimal Residual) methode [21]. Deze methode lijkt op de Minimal Residual methode, echter, het residu wordt niet geminimaliseerd in een echte norm. Voor een bepaalde klasse van matrices is dit een hele geschikte methode.

Het idee van Sonneveld om van BiCG over te stappen op CGS is later breed toegepast. Voor bijna elke methode werden er na verloop van tijd Transpose Free varianten ontwikkeld zoals TFQMR en Transpose Free Lanczos [10, 20]. De ontwikkelingen komen vanaf 1995 bijna tot stilstand bij het ontwerpen van nieuwe Krylovmethoden.

Onlangs is een nieuwe ontwikkeling gestart binnen de wereld van de Krylovmethoden. Sonneveld en Van Gijzen hebben de 30 jaar oude IDR (een voorloper van CGS) nieuw leven ingeblazen. Een nieuwe variant IDR(s) met meerdere schaduw residuen blijkt verrassend goed te convergeren [51]. Zij hebben bewezen, dat IDR(1) gelijk is aan Bi-CGSTAB zonder rekening te houden met het effect van afrondfouten. Voor waarden van s groter dan 1 ontstaan er methoden (IDR(4) is een goede keuze), die korte recurrenties gebruiken, terwijl de convergentie veel dichter bij full GMRES ligt dan voor de Bi-CGSTAB methode. De IDR(s) methode is ook vergeleken met BiCGSTAB2 [28], Bi-CGSTAB(l) [47] en ML(k)BiCGSTAB [74]. Voor de details verwijzen we naar [51].

GMRES methoden

Als laatste bespreken we de klasse van GMRES methoden. Dit zijn methoden, die een benadering vinden binnen de Krylov-deelruimte en waarvan het residu geminimaliseerd wordt. Als gevolg van de stelling kan dit alleen maar door lange recurrenties te gebruiken. De GMRES en FOM methoden zijn ontwikkeld door Saad en Schultz [40] in 1986. Als het aantal iteraties klein is dan is GMRES de beste Krylovmethode. Als er veel iteraties nodig zijn, dan moet GMRES herstart worden.



Figuur 2 De niet-nul structuur van een ijle matrix

De methoden GCR [16] en Orthomin [68] leveren dan betere prestaties, omdat deze ook getrunkeerd kunnen worden en zelfs gebruik kunnen maken van variabele preconditioneringen.

Door de optimalisatie eigenschap kunnen voor deze methoden ook convergentie resultaten bewezen worden. Eén daarvan is eenvoudig te gebruiken als het spectrum omsloten wordt door een cirkel in het complexe vlak, die de oorsprong niet bevat [40]. In deze stelling wordt gebruik gemaakt van het conditiegetal van de matrix van eigenvectoren. Bovendien is er voor deze methoden bewezen, dat er superlineaire convergentie optreedt [64]. Omdat de klasse van niet-symmetrische matrices ook niet normale matrices bevat kan het conditiegetal van de matrix van eigenvectoren heel groot (of ∞) zijn. Een gevolg hiervan is dat dan het spectrum geen bruikbare informatie oplevert voor de convergentie [26]. Een wat ongebruikelijke methode is de EN-methode [15]. De methode is niet erg bekend maar berust wel op een origineel idee, namelijk het oplossen van een lineair stelsel met een Newton Raphson achtige methode. Deze methode is de motivatie geweest voor de ontwikkeling van de GMRESR methode [65].

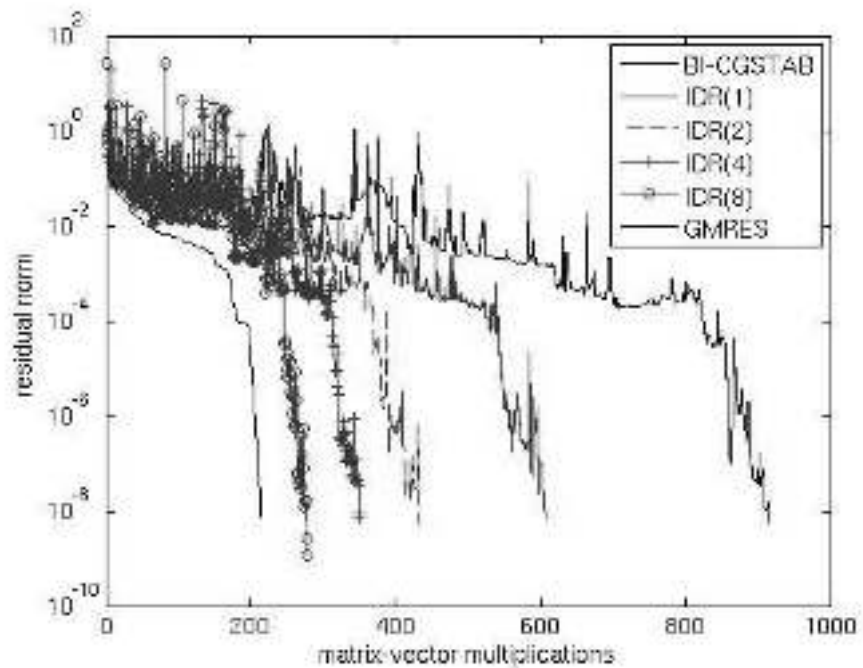
Afsluitende opmerkingen

We zien dat elke klasse van methoden bepaalde voor- en nadelen heeft. Dit heeft ertoe geleid dat er 'hybride' methoden ontwikkeld zijn om de voordelen te behouden en de nadelen te verminderen. Voorbeelden zijn: GMRESR [65], een combinatie van een GCR buitenloop en GMRES binnenloop, Bi-CGSTAB(l) [47], waarbij het BiCG polynoom gecombineerd wordt met een GMRES(l) polynoom en Krylovmethoden gecombineerd met een polynoom preconditionering.

Na verloop van tijd bleek het aantrekke-

lijk te zijn om Krylovmethoden toe te passen, die gebruik kunnen maken van variabele preconditioneringen en/of benaderende matrix vector vermenigvuldigingen. Dit heeft geleid tot flexibele Krylov varianten. GCR is standaard geschikt voor een variabele preconditionering [65]. In 1992 is de F(lexible)GMRES methode [38] ontwikkeld. Hierbij is een kleine aanpassing van de GMRES methode nodig. Onlangs is de F(lexible)CG beschreven in [33]. Voor recente resultaten over benaderende matrix vector vermenigvuldigingen verwijzen we naar [45–46, 58].

Het kiezen van een geschikte Krylovmethode is niet altijd eenvoudig. Belangrijk is het aantal benodigde/verwachte iteraties mg en de verhouding f tussen de rekentijd van een matrix vector product en een vector update. Als mg klein is en f groot dan is GMRES de beste methode. Als mg groot is en f klein dan is Bi-CGSTAB de beste methode terwijl voor tussenliggende waarden van mg en f GMRESR de beste methode is.



Figuur 3 Het convergentiegedrag van IDR(s) vergeleken met andere Krylovmethoden

Preconditioneringen

Voor veel stelsels is de convergentie van Krylovmethodes traag. Dit kan verbeterd worden door een geschikte preconditionering toe te passen [3]. Hierbij wordt het linker- en rechterlid van het stelsel vermenigvuldigd met een matrix zodat de oplossing niet verandert maar de eigenschappen van de gepreconditioneerde matrix veel gunstiger zijn voor de convergentie van een Krylovmethode. We hebben in het overzicht tot 1980 gezien dat voor SPD matrices een incomplete Choleski methode tot een goede verbetering leidt. Deze methode is gegeneraliseerd voor algemene matrices en staat bekend als een ILU preconditionering. Bij deze preconditioneringen wordt een benaderende ontbinding gemaakt van A . Het product van een onderdriehoeksmatrix L en een bovendriehoeksmatrix U is gelijk aan $\hat{A}$ en de waarde van $\|A - \hat{A}\|$ is klein. Door de 'fill in' te verwaarlozen kan de geheugenruimte beperkt blijven. In veel gevallen zijn deze preconditioneringen snel en robuust. We geven nu een aantal observaties over deze klasse van preconditioneringen.

- Het blijkt dat de ordening van de onbekenden van groot belang is voor de kwaliteit van de ILU preconditioneringen. Methoden om de bandbreedte te beperken (zoals het reversed Cuthill-McKee algoritme (RCM) [11]) of het profiel te minimaliseren (zoals het Sloan algoritme [48] en het Approximate Minimum Degree algoritme (AMD) [1]) blijken ook goed te werken voor ILU preconditioneringen.

- Voor Poisson problemen blijkt dat het aantal iteraties toeneemt als de grootte van het rekenrooster toeneemt. Dit is een nadeel van ILU preconditioneringen.
- Voor sommige herordeningen (MRILU [8] en ARMS [41]) blijft het aantal iteraties min of meer constant ook als de grootte van het rekenrooster toeneemt.
- Een nadeel van ILU preconditioneringen is dat ze in het algemeen lastig te gebruiken zijn op parallele computers. Voor sommige speciale matrices zijn parallele varianten beschikbaar [13–14, 39, 71].
- Het toelaten van extra 'fill in' leidt vaak tot minder iteraties en soms tot minder rekentijd.

De laatste opmerking zullen we wat verder uitwerken. Er zijn twee belangrijke methoden om 'fill in' toe te laten: 'level fill in' ILU(k) [32] gebaseerd op de niet-nul structuur van de matrix en 'threshold fill in' waarbij elementen onder een bepaalde drempel weggegooid worden zoals ILUT(ϵ). Meestal blijkt de laatste methode erg gevoelig te zijn voor de keuze van ϵ . Als ϵ te klein is, dan zijn de matrices L en U bijna vol en als ϵ te groot is, dan treedt er trage convergentie op. Op dit moment is ILU-pack [6] één van de beste preconditionerings pakketten gebaseerd op 'threshold fill in'.

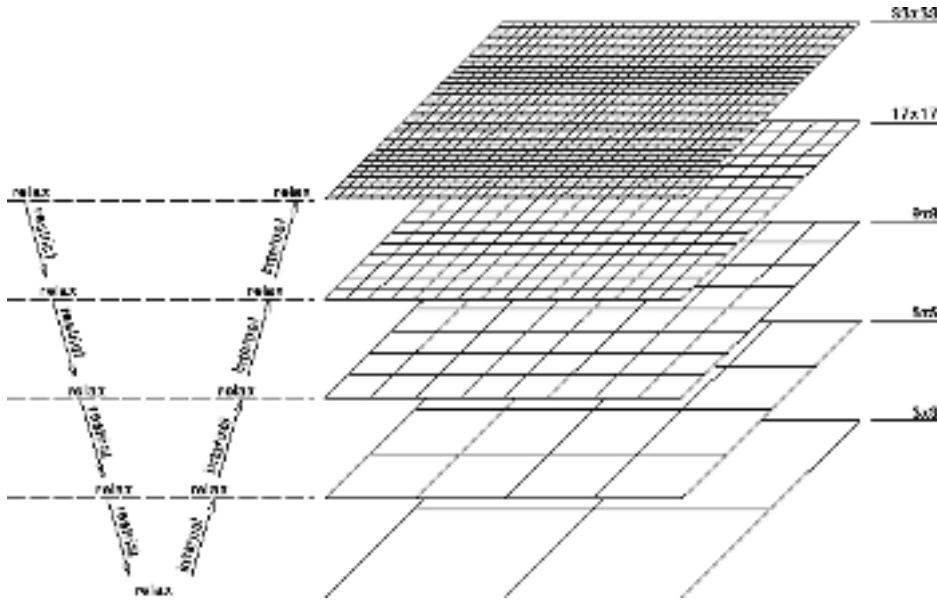
Een manier om ILU te generaliseren is door gebruik te maken van blok varianten. Hiervoor zijn verschillende toepassingen mogelijk. De eerste is dat er per roosterpunt verschillende onbekenden zijn zoals bij stromingsproble-

men: drie snelheden, de druk en de temperatuur. Het kan aantrekkelijk zijn om de matrix die behoort bij deze onbekenden als één 5×5 blok te zien. Voordeel is dat de convergentie vaak sterk verbeterd. Een nadeel is dat zo'n ontbinding meer geheugenruimte kost [2, 31, 66].

Een andere blokversie is een opdeling van de matrix in deelmatrices. De buitendiagonaalblokken worden weggelaten bij het bepalen van de blok ILU ontbinding. Een voordeel is dat deze BILU preconditionering goed paralleliseerbaar is. Een nadeel is dat de convergentie slechter wordt als het aantal blokken toeneemt [70].

Het is ook mogelijk om als preconditionering gebruik te maken van één of meerdere iteraties van een standaard iteratieve methode. Kandidaten hiervoor zijn: SOR, SSOR en multigrid methoden. De laatste preconditionering is heel geschikt voor Poisson-achtige problemen. Het blijkt dat het aantal iteraties voor zulke problemen onafhankelijk is van de grootte van het rekenrooster. Verder is deze combinatie erg robuust. Veranderingen in het rekenrooster, rechterlid, coëfficiënten en of randvoorwaarden beïnvloeden de convergentie nauwelijks [56].

Een andere klasse van preconditioneringen is gebaseerd op ijle benaderingen van de inverse, de zogenaamde SPAI (Sparse Approximate Inverse) methoden. Hierbij wordt een matrix B geconstrueerd zodanig dat B een gekozen niet-nul patroon heeft. De resterende



Figuur 4 Roosters gebruikt bij een V-cycle van multigrid

elementen van B worden dan bepaald door

$$BA - I$$

in één of andere norm te minimaliseren. Een groot voordeel is dat een SPAI preconditionering eenvoudig te paralleliseren is. Dit verklaart ook de grote populariteit van deze methode. Een groot nadeel is dat de kwaliteit van de preconditionering erg afhangt van de gekozen norm en het gekozen niet-nul patroon [27].

Momenteel is het efficiënt oplossen van zadelpunt problemen een belangrijk onderwerp. Dit type problemen treedt op bij het oplossen van optimaliseringsproblemen en het oplossen van de gediscrètiseerde incompressibele Navier Stokes vergelijkingen. Hiervoor zijn veel verschillende preconditioneringen voorgesteld. Het blijkt dat de kwaliteit van deze preconditioneringen erg afhankelijk is van het op te lossen probleem. Op dit moment is er geen preconditionering, die het goed doet voor alle zadelpunt problemen. Verder is er nog geen preconditionering bekend van de gediscrètiseerde incompressibele Navier Stokes vergelijkingen, waarbij de gebruikte discretisatie cellen een hoge aspect ratio hebben [4, 12, 57].

Als laatste voorbeeld van een preconditionering noemen we 'operator based' preconditioneringen. Het idee is als volgt: het op te lossen stelsel is afkomstig van een gediscrètiseerde operator en is moeilijk oplosbaar met een Krylovmethode. We kunnen nu een operator bepalen die veel lijkt op de oorspronkelijke operator, maar na discretisatie is het resulterende stelsel wel efficiënt op te lossen. De

ze gediscrètiseerde operator kan dan gebruikt worden als preconditionering. Als voorbeeld beschouwen we de Helmholtz vergelijking

$$-\Delta p - k^2 p = 0,$$

met geschikte randvoorwaarden. Na discretisatie levert dit een stelsel $Ax = b$ op. Dit stelsel is moeilijk oplosbaar voor grote waarden van k omdat dan de eigenwaarden van A positieve en negatieve waarden hebben. Een goede preconditionering is de discretisatie van

$$-\Delta p + k^2 p = 0.$$

De resulterende matrix geven we aan met B . We kunnen dan een Krylovmethode toepassen op

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b.$$

De vermenigvuldiging $B^{-1}r = v$ wordt uitgevoerd door het stelsel $Bv = r$ benaderend op te lossen. Andere mogelijkheden zijn: de preconditionering baseren op 'eenvoudige randvoorwaarden', op constante coëfficiënten, op een lagere orde discretisatie van de operator of op het (anti-)symmetrische deel van de operator. [17].

Voor moeilijke problemen blijkt dat een preconditionering wel helpt, maar dat er vaak één of meerdere eigenwaarden de convergentie enorm vertragen. Om dit te verbeteren zijn de zogenaamde 'second level' preconditioneringen ontwikkeld. Nadat er een schatting gemaakt is van de 'slechte' eigenvectoren, wordt er een projectie operator gemaakt die er voor zorgt dat deze eigenvectorcomponenten niet meer voorkomen in het residu. Als gevolg hiervan beïnvloeden deze eigenwaarden

de convergentie niet meer. De combinatie van traditionele preconditioneringen met een 'second level' preconditionering leidt vaak tot robuuste en snelle oplosmethoden [9, 42]. Een recent overzicht is te vinden in [54].

Andere ontwikkelingen

We sluiten af met recente ontwikkelingen op het gebied van domein decompositie, multigrid methoden en speciale computers.

Domein decompositie

De domein decompositie methoden zijn enorm ontwikkeld in de afgelopen 25 jaar. Het toepassingsgebied is uitgebreid van eenvoudige Poisson-achtige problemen naar problemen op het gebied van stromingsleer, elektromagnetische problemen en mechanica. Generalisering naar niet-symmetrische matrices heeft plaatsgevonden. Verder is de combinatie van een domein decompositie methode en een parallelle computer heel goed. Net als bij blok preconditioneringen zien we vaak dat de convergentie slechter wordt als het aantal domeinen toeneemt en dat er problemen zijn bij discontinue coëfficiënten. Beide problemen kunnen verholpen worden door een coarse grid acceleratie toe te voegen. Hierbij is een grote overeenkomst met de 'second level' preconditioneringen beschreven in de vorige paragraaf. Er is veel onderzoek gedaan naar optimale koppelingsvoorwaarden [22, 53]. Domein decompositie methoden worden vaak gecombineerd met Krylovmethoden. Als de subdomein problemen benaderend opgelost worden en een Krylovmethode wordt gebruikt, dan blijkt vaak dat eenvoudige koppelingsvoorwaarden voldoende zijn voor snelle convergentie. Voor verdere details verwijzen we naar [49, 55].

Multigrid methoden

Ook bij de multigrid methoden zien we een ontwikkeling naar algemene toepassingsgebieden. Multigrid methoden worden breed toegepast bij problemen in stromingsleer die gediscrètiseerd zijn op gestructureerde rekenroosters. De belangrijkste ontwikkeling is het verschijnen van Algebraïsche Multigrid Methodes [37]. Het voordeel hiervan is dat deze methoden een hoog black box gehalte hebben. Een nadeel is dat er weinig theorie beschikbaar is. Bovendien zijn voor vergelijkbare problemen Algebraïsche Multigrid Methodes een orde duurder in rekentijd dan de Geometrische Multigrid Methodes. Multigrid methoden sluiten goed aan bij de toenemende interesse voor het oplossen van 'multiscale' problemen. Voor verdere details verwijzen we

naar [56, 73].

Speciale computers

Ontwikkelingen binnen de numerieke lineaire algebra gaan vaak hand in hand met ontwikkelingen op het gebied van de beschikbare computers. Een eerste gevolg hiervan is dat de problemen tegenwoordig veel groter kunnen zijn dan de problemen 25 jaar geleden. Dit heeft belangrijke gevolgen voor de methoden die het best gebruikt kunnen worden. In de jaren 80 zien we de opkomst van vectorcomputers, parallelle computers en risc processoren. Al deze computers hebben vaak speciale eigenschappen die gebruikt moeten worden om ze efficiënt in te zetten bij numerieke lineaire algebra methoden. Eén van de belangrijkste punten is dat deze computers prima werken op regelmatige vectoren en heel traag werken op vectoren met indirecte adressering. We hebben al gezien dat veel preconditioneringen lastig parallel te maken zijn [14, 61]. Meestal zien we dat er eerst een stap terug gedaan wordt naar een eenvoudige preconditionering en pas later worden de complexe preconditioneringen ook geschikt gemaakt voor de nieuwe typen computers.

In de jaren 90 komen de Beowulf clusters op. Dit zijn clusters van PC's gekoppeld via ethernet die gebruikt worden als een poor man's parallelle computer. Bij de massief parallelle computers is ethernet vervangen door zeer snelle verbindingen. De opkomst van PVM, MPI, BSP [5] en OpenMP heeft het gebruik van deze computers erg vereenvoudigd.

In de 21-eeuw zien we de opkomst van PC's met twee tot zestien centrale processor eenheden binnen één computer. Dit geeft opnieuw mogelijkheden om de methoden te paralleliseren. Op dit moment worden er methoden ontwikkeld om te gebruiken op de zeer snelle videokaarten. Deze ontwikkeling staat nog in de kinderschoenen, maar heeft de potentie om uit te groeien tot een nieuwe standaard voor high performance computing. Voor verdere details verwijzen we naar [13, 34, 44].

Conclusies

We zien dat er een grote ontwikkeling geweest is op het gebied van iteratieve methoden. De toepassingsgebieden zijn enorm toegenomen. Er blijven echter nog steeds gebieden waar geschikte iteratieve methoden ontbreken. De ontwikkeling van algemene Krylov-

methoden lijkt tot stilstand gekomen te zijn, uitgezonderd de recente ontwikkeling van de IDR(s) methode. De verwachting is dat er voor ingewikkelde problemen steeds meer gebruik gemaakt gaat worden van combinaties van verschillende numerieke lineaire algebra methoden. Nog steeds staat het ontwikkelen van geschikte preconditioneringen enorm in de aandacht. Ook het beschikbaar komen van nieuwe computer-architecturen zal leiden tot nieuwe methoden. De grenzen van het rekenen met 'double precision'-getallen komen in zicht. De reden hiervoor is dat bij de discretisatie de gebruikte stapgrootte steeds kleiner gekozen wordt. Dit betekent dat de problemen steeds groter worden. Het resultaat hiervan is dat $n\kappa(A)\mu$ (n is de dimensie van de oplosvector, $\kappa(A)$ is het conditiegetal en μ de machineprecisie, die gelijk is aan 10^{-16} voor 'double precision'-getallen) in de buurt van 1 komt te liggen. Een gevolg hiervan is dat de nauwkeurigheid van de berekende oplossing niet meer gegarandeerd kan worden. De verwachting is dat er overgestapt moet worden naar machines met een relatieve machineprecisie van 10^{-32} . 

Referenties

- 1 Patrick R. Amestoy, Timothy A. Davis, and Iain S. Duff. An approximate minimum degree ordering algorithm. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 17(4):886–905, 1996.
- 2 O. Axelsson. *Iterative solution methods*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- 3 M. Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. *Journal of Computational Physics*, 182:418–477, 2002.
- 4 Michele Benzi, Gene H. Golub, and Jörg Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numer.*, 14:1–137, 2005.
- 5 R. Bisseling. *Parallel Scientific Computation: A Structured Approach Using BSP and MPI*. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- 6 M. Bollhöfer and Y. Saad. Multilevel preconditioners constructed from inverse-based ILUs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27:1627–1650, 2006.
- 7 E.F.F. Botta and A.E.P. Veldman. On local-relaxation methods and their application to convection diffusion equations. *J. Comp. Phys.*, 48:127–149, 1982.
- 8 E.F.F. Botta and F.W. Wubs. Matrix renumbering ILU: An effective algebraic multilevel ILU preconditioner for sparse matrices. *SIAM J. Matrix Anal. and Appl.*, 20:1007–1026, 1999.
- 9 B. Carpentier, L. Giraud, and S. Gratton. Additive and multiplicative spectral two-level preconditioners for general linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29:1593–1612, 2007.
- 10 T.F. Chan, L. de Pillis, and H.A. van der Vorst. Transpose-free formulations of Lanczos-type methods for nonsymmetric linear systems. *Numerical Algorithms*, 17:51–66, 1998.
- 11 E. Cuthill and J. McKee. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. In *Proceedings of the 1969 24th national conference*, pages 157–172, New York, NY, USA, 1969. ACM.
- 12 H. Sue Dollar, Nicholas I. M. Gould, Wil H. A. Schilders, and Andrew J. Wathen. Implicit-factorization preconditioning and iterative solvers for regularized saddle-point systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 28(1):170–189, 2006.
- 13 J.J. Dongarra, L.S. Duff, D.C. Sorensen, and H.A. van der Vorst. *Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers*. SIAM, Philadelphia, 1991.
- 14 I.S. Duff and H.A. van der Vorst. Developments and trends in the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 25:1931–1970, 1999.
- 15 T. Eirola and O. Nevanlinna. Accelerating with rank-one updates. *L.A.A.*, 121:511–520, 1989.
- 16 S.C. Eisenstat, H.C. Elman, and M.H. Schultz. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. *SIAM J. Num. Anal.*, 20:345–357, 1983.

- 17 Y.A. Erlangga, C.W. Oosterlee, and C. Vuik. A novel multigrid based preconditioner for heterogeneous Helmholtz problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27:1471–1492, 2006.
- 18 V. Faber and T. Manteuffel. Necessary and sufficient conditions for the existence of a conjugate gradient method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21:352–362, 1984.
- 19 R. Fletcher. Conjugate gradient methods for indefinite systems. *Lecture notes in Mathematics*, 506:73–89, 1976. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- 20 R.W. Freund. A transpose-free quasi-minimal residual algorithm for non-Hermitian linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14:470–482, 1993.
- 21 R.W. Freund and N.M. Nachtigal. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems. *Numerische Mathematik*, 60:315–339, 1991.
- 22 M. Genseberger. *Domain decomposition in the Jacobi-Davidson method for eigenproblems*. PhD thesis, University Utrecht, Utrecht, 2001.
- 23 G.H. Golub and R.S. Varga. Chebyshev semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods. I. *Numer. Math.*, 3:147–156, 1961.
- 24 G.H. Golub and R.S. Varga. Chebyshev semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods. II. *Numer. Math.*, 3:157–168, 1961.
- 25 A. Greenbaum. *Iterative methods for solving linear systems*. Frontiers in applied mathematics 17. SIAM, Philadelphia, 1997.
- 26 A. Greenbaum, V. Ptak, and Z. Strakos. Any non-increasing convergence curve is possible for GMRES. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 17:465–469, 1996.
- 27 M.J. Grote and T. Huckle. Parallel preconditioning with sparse approximate inverses. *SIAM J. Sci. Comp.*, 18:838–853, 1997.
- 28 Martin H. Gutknecht. Variants of BiCGSTAB for matrices with complex spectrum. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14:1020–1033, 1993.
- 29 M.R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 49:409–436, 1952.
- 30 C. Lacoursière. A parallel block iterative method for interactive contacting rigid multibody simulations on multicore pcs. In F. G. Gustavson, B. Kagstrom, J. Dongarra, F. Wolf, A.C. Elster, D. Kressner, M. Sala, X. Cai, A. Laaksonen, and M. Gerndt, editors, *Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing, 8th International Workshop, PARA 2006, Umea, Sweden, June 18–21, pages 956–965*, Berlin, 2007. Springer.
- 31 J.A. Meijerink. Iterative methods for the solution of linear equations based on incomplete block factorization of the matrix. *Proc. 1983 Reservoir Simulation Symposium*, San Francisco, CA, 1983 (paper SPE 12262):297–303, 1983.
- 32 J.A. Meijerink and H.A. Van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. *Math. Comp.*, 31:148–162, 1977.
- 33 Y. Notay. Flexible conjugate gradients. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22:1444–1460, 2000.
- 34 J.M. Ortega. *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*. Plenum Press, New York, 1988.
- 35 C.C. Paige and M.A. Saunders. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *A.C.M. Trans. Math. Softw.*, 8:43–71, 1982.
- 36 S.V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- 37 J.W. Ruge and K. Stüben. Algebraic multigrid. In S.F. McCormick, editor, *Multigrid Methods*, chapter 4, pages 73–130. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1987.
- 38 Y. Saad. A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm. *SIAM J. Sci. Comput.*, 14:461–469, 1993.
- 39 Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems, Second Edition*. SIAM, Philadelphia, 2003.
- 40 Y. Saad and M.H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856–869, 1986.
- 41 Y. Saad and B. Suchomel. ARMS: an algebraic recursive multilevel solver for general sparse linear systems. *Num. Lin. Alg. Appl.*, 9:359–378, 2002.
- 42 Y. Saad, M. Yeung, J. Ehrel, and F. Guyomarc'h. A deflated version of the conjugate gradient algorithm. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21:1909–1926, 2000.
- 43 Yousef Saad and Henk A. Van Der Vorst. Iterative solution of linear systems in the 20th century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123:1–33, 2000.
- 44 R.W. Shonkwiler and L. Lefton. *An introduction to parallel and vector scientific computation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- 45 V. Simoncini and D.B. Szyld. Theory of inexact Krylov subspace methods and applications to scientific computing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25:454–477, 2003.
- 46 V. Simoncini and D.B. Szyld. On the occurrence of superlinear convergence of exact and inexact Krylov subspace methods. *SIAM Review*, 47:247–272, 2005.
- 47 G.L.G. Sleijpen and D.R. Fokkema. BiCGstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *ETNA*, 1:11–32, 1993.
- 48 S.W. Sloan. An algorithm for profile and wavefront reduction of sparse matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:239–251, 1986.
- 49 B. Smith, P. Björstad, and W. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- 50 P. Sonneveld. CGS: a fast Lanczos-type solver for nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 10:36–52, 1989.
- 51 Peter Sonneveld and Martin B. van Gijzen. IDR(s): A family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric systems of linear equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31:1035–1062, 2008.
- 52 H.L. Stone. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5:530–558, 1968.
- 53 K.H. Tan. *Local Coupling in Domain Decomposition*. PhD thesis, University Utrecht, Utrecht, 1995.
- 54 J.M. Tang. *Two-level preconditioned conjugate gradient methods with applications to bubbly flow problems*. PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, 2008.
- 55 A. Toselli and W. Widlund. *Domain Decomposition Methods*. Computational Mathematics, Vol. 34. Springer, Berlin, 2005.
- 56 U. Trottenberg, C.W. Oosterlee, and A. Schüller. *Multigrid*. Academic Press, London, 2000.
- 57 M. ur Rehman, C. Vuik, and G. Segal. A comparison of preconditioners for incompressible Navier-Stokes solvers. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 57:1731–1751, 2008.
- 58 J. van den Eshof and G.L.G. Sleijpen. Inexact Krylov subspace methods for linear systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26:125–153, 2004.
- 59 A. van der Sluis and H.A. van der Vorst. The rate of convergence of conjugate gradients. *Numer. Math.*, 48:543–560, 1986.
- 60 A. van der Sluis and H.A. van der Vorst. The convergence behaviour of Ritz values in the presence of close eigenvalues. *Lin. Alg. Appl.*, 88/89:651–694, 1987.
- 61 H.A. van der Vorst. High performance preconditioning. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10:1174–1185, 1989.
- 62 H.A. van der Vorst. Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for solution of non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 13:631–644, 1992.
- 63 H.A. van der Vorst. *Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 13. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- 64 H.A. van der Vorst and C. Vuik. The superlinear convergence behaviour of GMRES. *J. Comp. Appl. Math.*, 48:327–341, 1993.
- 65 H.A. van der Vorst and C. Vuik. GMRESR: a family of nested GMRES methods. *Num. Lin. Alg. Appl.*, 1:369–386, 1994.
- 66 S. van Veldhuizen, C. Vuik, and C.R. Kleijn. A class of projected Newton methods to solve laminar reacting flow problems. Report 08-03, Delft University of Technology, Delft Institute of Applied Mathematics, Delft, 2008.
- 67 R.S. Varga. *Matrix iterative analysis*. Prentice-Hall, London, 1962.
- 68 P.K.W. Vinsome. *ORTHOMIN: an iterative method solving sparse sets of simultaneous linear equations*, *Proceedings of the Fourth Symposium on Reservoir Simulation*. Society of Petroleum Engineers of AIME, Richardson, 1976. pp. 149–159.
- 69 V. Voevodin. The problem of nonselfadjoint extension of the conjugate gradient method is closed. *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, 23:143–144, 1983.
- 70 C. Vuik and J. Frank. Coarse grid acceleration of a parallel block preconditioner. *Future Generation Computer Systems*, 17:933–940, 2001.
- 71 C. Vuik, R.R.P. van Nooyen, and P. Wesseling. Parallelism in ILU-preconditioned GMRES. *Paral. Comp.*, 24:1927–1946, 1998.
- 72 E.L. Wachspress. *Iterative solution of elliptic systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- 73 P. Wesseling. *An introduction to multigrid methods*. Wiley, Chichester, 1992.
- 74 Man-Chung Yeung and Tony F. Chan. ML(k)Bi-CGSTAB: A BiCGSTAB variant based on multiple Lanczos starting vectors. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21:1263–1290, 1999.
- 75 D.M. Young. *Iterative solution of large linear systems*. Academic Press, New York, 1971.

Petra Hendrikse

Faculteit Gedragswetenschappen, Instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
h.p.hendrikse@utwente.nl

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragswetenschappen, Instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
n.c.verhoef@utwente.nl

Boekbespreking De gelukkige rekenklas

Krijgen we de klas gelukkig?

Het blijft een hardnekkige splijtzwam: de huidige situatie in het reken-wiskundeonderwijs. In het recent verschenen boek *‘De gelukkige rekenklas’* geven vriend en vijand onbekommerd hun mening over oorzaak en gevolg van realistisch rekenonderwijs.

De gelukkige rekenklas doet denken aan de gelukkige klas van Theo Thijssen en dat is precies de bedoeling. Bij het openslaan van het boek valt de laatste regel van de eerste bladzijde op: “Ze werden stil, want ze hadden er zin in”. Kenners van de reken- en wiskunde-problematiek anno 2008 voelen het al in hun onderbuik: oefenen is leuk, of toch niet? Het boek geeft in deel 1 aan welke positie de auteurs Tom Braams, Jan van de Craats, Marisca Milikowski en Rob Milikowski innemen. In deel 2 gaat het om argumenten die deze en andere auteurs juist *niét* delen. Deel 3 beschrijft de lespraktijk van nu, waarin met enige weemoed wordt teruggeblikt op goede tijden van weleer. In deel 4 trekken Tom Braams en Marisca Milikowski een conclusie. Zij pleiten voor effectonderzoek (terugkeer van algemene vaardigheden naar vakinhoud), controle op het behalen van de eindtermen en tegen uniformiteit in methoden en automatisme in de toewijzing van onderzoeksgelden.

De borreltafel

“Met het rekenen is het in Nederland slecht gesteld. Nieuwe rekenmethoden, zoals het ‘realistisch rekenen’, hebben niet gebracht wat ervan werd verwacht. Breuken en delen, het is velen te hoog gegrepen”, zo luiden de eerste zinnen achterop *‘De gelukkige rekenklas’*. Wat verwachtte men dan van het ‘realistisch rekenen’? De zin doet geloven dat het ging om ‘breuken en delen’ voor velen. Maar er is een verschil: Tom Braams en Marisca Milikowski bedoelen de techniek van het automatisch en liefst foutloos kunnen omgaan met breuken

als gevolg van veel oefenen. De aanhangers van het ‘realistisch rekenen’ streven inzicht en begrip na als het om breuken gaat. De samenvoeging van beide doelen op de achterkant van het boek leidt tot een onjuist beeld van het ‘realistisch rekenen’. De achterkant is natuurlijk niet de inhoud van het boek. Misschien is deze interpretatie onterecht en werpt dit boek een helder beeld op de min of meer uit de pan gelopen brede discussie. Iedereen kan tenslotte wel iets zinnigs toevoegen aan deze discussie, in de lerarenkamer, bij de borrel of op een verjaardagsfeest. De titel van het boek maakt nieuwsgierig: zou het dan toch mogelijk zijn, een gelukkige rekenklas? De wat stekelige stijl met argumenten uit het ene kamp tegenover het andere kamp, is kenmerkend voor het boek: velen geven hun mening en doen hun zegje. Echter, van een zorgvuldige afweging van alle argumenten op basis van (wetenschappelijke) onderzoeksresultaten is geen sprake. Het lijkt eerder op een aaneenschakeling van statements. Wel wordt zonneklaar waar, en bij wie, je tegengestelde meningen kunt vinden.

Verse vis

Een voorbeeld van tegengestelde meningen die in dit boek voorkomen, is die over de houdbaarheid van kennis. Zo staat op p.64 — zonder verwijzing — te lezen dat constructivisten beweren dat informatie opzoeken belangrijker is dan kennis vergaren omdat “kennis even houdbaar is als verse vis”. Voor het andere kamp is dat een dwaas argument: “De stelling van Pythagoras gaat al sinds 500 v. Chr. mee. En zonder te weten waar je naar

moet kijken, weet je niet eens waar je moet zoeken en wat de gevonden informatie waard is. We lijken te willen dat wij nu iets hebben uitgevonden dat de wereld totaal anders maakt”. “Er is niets nieuws onder de zon”, zo wordt vervolgd. Maar: “Het reële rekenen is een enorme vooruitgang geweest die we nu weer dreigen kwijt te raken”, vervolgt het andere kamp. “We lijken terug te keren in de tijd. Terug, helemaal terug naar de twaalfde eeuw”, is de hartenkreet als het om methodes van het realistisch rekenen gaat. Het boek lijkt bijna aan te sluiten bij de in Nederland ontstane patstelling van welles-nietes, waarbij iedereen — met of zonder kennis van zaken — een duit in het zakje doet. Wat voegt dit nu nog toe aan alles wat al in de media naar voren is gekomen?

De efficiëntie van getallen

Toch staan in het boek allerlei onverwachte voorbeelden en leservaringen die de moeite waard zijn. Indirect hebben de situaties iets te maken met de kwestie waar het in dit boek over gaat. Aanhakend bij de opmerking over ‘terug naar de twaalfde eeuw’ schetst Milikowski in hoofdstuk 9 de vooruitgang die binnen het rekenen is gemaakt. Hoe de waarde van een getal is gaan afhangen van zijn plaats binnen een reeks getallen; de 1 in het getal 12 stelt een grotere waarde voor dan de 2. Kunt u voor de vuist weg even het Romeinse getal geven als we CCXXXVII met tien vermenigvuldigen (MMCCCLXX)? Veel eenvoudiger is het, in vergelijking met het Romeinse talstelsel, om snel het antwoord te weten als we 237 met tien vermenigvuldigen (er komt een 0 achter het getal te staan, op de laatste plaats). Wellicht is inzicht in de opbouw van het getal, het ‘traditionele’ onder elkaar zetten geen trucje, maar juist een uiting van

begrip. Het is een meegaan met een in het verleden gemaakte stap.

Een ander voorbeeld is het lezen van links naar rechts of van rechts naar links. Hoe het leren tellen in feite al samenhangt met het lezen van rechts naar links. Je leert eerst 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en dan? Dan krijg je 10. Je kunt rechts van de 1 het trucje met 1 t/m 9 herhalen en dan krijg je, jawel, een 2 bij het meest linkse getal. Enzovoort. Bij getallen van boven de honderd wordt het zelfs onlogisch. 123 spreken we uit als honderd (links) drie (rechts) en twintig (midden). Het lezen van getallen wordt essentieel als je ermee moet gaan manipuleren, bijvoorbeeld optellen. De aanpak van het ene kamp (de auteurs) is recht-toe-recht-aan: onder elkaar zetten en steeds 1 onthouden als je boven de 10 komt. Het andere kamp, pleit voor kolomsgewijs optellen: eerst de honderdtallen dan de tientallen en als laatste de eenheden. De argumentatie is dat je weet wat je doet, met de onderliggende veronderstelling dat je bij 'onder elkaar zetten' en steeds 1 onthouden boven de 10, niét weet wat je doet (zie onderstaande berekening).

Kolomsgewijs optellen	Kolomsgewijs aftrekken
386	803
<u>673</u>	<u>261</u>
900 (= 300 + 600)	600 (= 800 - 200)
150 (= 80 + 70)	-60 (= 0 - 60 tekort)
<u>9</u> (= 6 + 3)	<u>2</u> (= 3 - 1)
1059	542

Dat brengt ons bij de vraag of de manier waarop je een getal leest, bepaalt of je een trucje uitvoert bij het optellen of dat je werkelijk weet wat je aan het doen bent. Het boek gaat daar verder niet op in.

Context

Het is interessant om te lezen hoe een docent na een ervaring in een les, de volgende keer dat hij dezelfde les gaf, zijn onderwijs aanpaste. In beide lessen werd gebruik gemaakt van een context; bezitten van een bepaalde hoeveelheid van iets, bijvoorbeeld potloden of kralen. Wel of geen gebruik maken van context, bleek nu niet de verklaring te zijn voor de verschillen in begrip na afloop van de les. Dat was in beide lessen gelijk; in beide lessen werd gebruik gemaakt van potloden. De volgorde waarin de zaken gepresenteerd werden en het opbouwen van een begrip vanaf een grondsituatie naar een grotere hoogte bleken van essentieel belang te zijn. De grondsituatie was in dit geval: beginnen met wat 'evenveel', 'meer dan' en 'minder dan' betekent. Grotere hoogten waren in dit geval: spreken over verhouding, zonder de getallen er zelf bij te hebben (4 meer zonder te weten dat het om 10 en 14 potloden gaat).

Het gesprek gaat over het verschil, zoals het leeftijdsverschil tussen broers en zussen. Dat is wellicht precies wat Freudenthal ook bedoelde. Niét het wel of niet gebruiken van realistische contexten, en ook niet de precieze methode zijn van belang. Belangrijk is: (1) de volgorde, en (2) geen stadia overslaan of te snel doorlopen. Misschien kunnen we wel stellen dat iedere methode aan het doel beantwoordt zolang de leerlingen maar begrijpen waar die methode op berust en waarom we die methode mogen en kunnen gebruiken.

Rekenmachines

Dit laatste argument, begrijpen hoe en waarom — bijvoorbeeld wat een optelling precies voorstelt — is voor 'realistische rekenaars' essentieel. Vanuit dat oogpunt bezien kan een hulpmiddel ingezet worden om het proces van berekenen sneller en minder arbeidsintensief te maken. Voor de 'realistische rekenaars' draagt het cijferen niet bij aan inzicht en begrip, en kan daarom worden afgeschaft. In een te vroeg stadium wordt de procedure verkort, vinden zij. Zonder het te begrijpen leren leerlingen de ingekorte vorm van onder elkaar zetten en van klein naar groot optellen, zo is de redenering. Echter, de rekenmachine (ook een vorm van verkorten), wordt tegenwoordig in een steeds vroeger stadium geïntroduceerd. Wat is nu het verschil tussen het gebruik van de rekenmachine en het cijferen? Het lijkt erop dat hetzelfde argument, verkorten van procedures en/of verminderen van arbeidsintensiteit, wordt gebruikt om het cijferen uit het onderwijs te weren en de rekenmachine naar binnen te halen. Hoewel dit argument in dit boek niet op deze manier naar voren komt, wordt het wel ter tafel gebracht.

Beschuldigend wordt naar de invloed van het Freudenthal Instituut gewezen als het om slechte rekenprestaties gaat. Citaten die dat bevestigen zijn er genoeg, zoals: "In het realistisch rekenonderwijs ontwaren we een zeer grote appreciatie voor rekeninzicht, maar tegelijk een zekere minachting voor automatisering" (p. 97), en "Zelfs de 'realistische' onderzoekers Kraemer en Nelissen kwamen tot dezelfde wetenschappelijke bevindingen, en toch blijven ze eigenaardig genoeg zweren bij de aanpak van het realistische rekenonderwijs..." (Feys, 1998, 41). Samengevat wordt gesteld (p.163): "Ten eerste: elke didacticus beaamt het voorgaande. 'Inderdaad, er moet gememoriseerd worden', zegt De wereld in getallen, zegt het TAL-team, zegt Goffree, zegt Ter Heege — zegt kortom iedere rekenspecialist: de tafels moeten aan het eind van groep 5 worden gekend en vlot uit

het geheugen oproepbaar zijn. Ten tweede: niemand vertelt hoe". Deze kwestie is misschien een vruchtbare aanzet om de verschillende meningen over goed en slecht rekenonderwijs tegen het licht te houden.

Onvoldoende onderbouwing

In het boek staan heel wat gedachten en bijpassende voorbeelden. Helaas ontbreekt het aan focus en theoretische onderbouwing. Tom Braams en Marisca Milikowski schrijven in hun voorwoord: "In deze bundel hebben wij de argumenten op een rij proberen te zetten die we in de afgelopen jaren hebben gehoord in deze rekendiscussie. Argumenten van ouders en van leerkrachten in het basisonderwijs, van remedial teachers en van psychologen, van wiskundigen en docenten in het voortgezet en beroepsonderwijs. En we hebben, net zoals de commissie-Dijsselbloem dat deed in de Tweede Kamer, geprobeerd te analyseren hoe het zo fout heeft kunnen gaan".

Hieruit blijkt dat Tom Braams en Marisca Milikowski behoren tot degenen die vinden dat het helemaal fout is gegaan met het reken- en wiskundeonderwijs. Niet iedereen is het daarmee eens, zo blijkt in de media. Gaat het niet om doelen die docenten met hun onderwijs nastreven? Wijers, Jonker en Zwaneveld (2008) lieten recent 71 wiskunde-docenten in het voortgezet onderwijs kiezen tussen de volgende slogans: zonder vaardigheden geen inzicht? Of: zonder inzicht geen vaardigheden? 76% koos voor de eerste, en 46% voor de tweede optie (Euclides 83, 8). Dat betekent dat driekwart van de wiskunde-docenten in dit onderzoek beaamt dat vaardigheden nodig zijn om inzicht te verkrijgen. Hoe zouden leerkrachten in het basisonderwijs hierop reageren als het om het manipuleren met breuken gaat bijvoorbeeld? Is dit niet de vraag waar het allemaal om te doen is? Het boek had aan betekenis gewonnen als de didactici van het Freudenthal Instituut de gelegenheid hadden gehad om een reactie te geven.



Tom Braams en Marisca Milikowski (Red.): *De gelukkige rekenklas*, Amsterdam: Uitgeverij Boom, 2008, 207 p., prijs € 19,50, ISBN 978-90-8506-615-6

Hans van Ditmarsch

Fil., Logica, Universidad de Sevilla
Calle Camilo Jose Cela s/n
41018 Sevilla Spanje
Computer Science, University of Otago
Dunedin 9015 Nieuw-Zeeland
hans@cs.otago.ac.nz

Jan van Eijck

Centrum voor Wiskunde en Informatica
PO Box 94079
1090 GB Amsterdam
jve@cw.i.nl

Rineke Verbrugge

Kunstmatige Intelligentie
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 407
9700 AK Groningen
rineke@ai.rug.nl

Geschiedenis

Publieke werken: Freudenthal's som-en-productraadsel

In 1969 poneerde Hans Freudenthal in Nieuw Archief het som-en-productprobleem [4–5]. Dit probleem heeft daarna de academische gemoederen nogal beroerd. In 2002 kwam het in NAW nogmaals over tafel, in het kader van een ander raadsel, het zeven-kaartenprobleem [14]. In 2005 werd in NAW een lezersoproep geplaatst om de herkomst en de verspreiding van het raadsel te achterhalen. In deze bijdrage berichten de auteurs over de resultaten van deze oproep en plaatsen de analyse van het raadsel in de actualiteit van kennislogica en model checking.

In het laatste NAW-nummer van 1969 [4] poneerde Hans Freudenthal het probleem, zoals afgebeeld in figuur 1. En in het daaropvolgende nummer, in 1970, werden de oplossingen, en de oplossers, besproken.

Dit som-en-productprobleem kan een 'raadsel' genoemd worden, omdat de bekendmakingen ('uitspraken') die door S (voor 'som')

en P (voor 'product') gedaan worden op het eerste gezicht niet informatief lijken – ze spreken immers alleen hun onwetendheid uit en zeggen niets over feitelijke getallenparen! De bekendmakingen zijn echter zo informatief, dat S en P getallenparen kunnen elimineren.

Bijvoorbeeld, de getallen kunnen niet 2 en 3 zijn, of een ander priemgetallenpaar, omdat

in al die gevallen P meteen de getallen uit hun product zou kunnen afleiden. Dan had hij dus niet de eerste bekendmaking 'ik weet het niet' kunnen doen. Iets lastiger is in te zien dat de getallen ook niet, bijvoorbeeld, 14 en 16 kunnen zijn. Als dat zo was, dan was hun som 30. Dit is tevens de som van de priemgetallen 7 en 23. Als het product $7 \cdot 23$ was, dan zou P net als in het voorgaande geval geweten hebben wat de getallen waren. Met andere woorden: gegeven dat de som van de getallen 30 is, zou S het voor mogelijk hebben gehouden dat P wist wat de getallen waren. Maar S zei nu juist 'dat wist ik al', namelijk dat P niet wist wat de getallen zijn. Daarom kunnen de getallen niet 14 en 16 zijn.

Door middel van dit soort eliminatie van getallenparen leren S en P genoeg van hun bekendmakingen om de unieke oplossing van het probleem te bepalen.

Na deze ponering van het probleem kwam het op verschillende andere academische plaatsen eveneens boven water, met name in het vakgebied van de kunstmatige intelligentie, nadat het daar was verspreid door John McCarthy in [9], aan het eind van de jaren 70. Dit werd gevolgd door prettige woe-kingen van dit probleem in de populair-wetenschappelijke pers (zie de details hierna). Het maakte tevens opgang in de zogenaamde 'kennislogica' voor het expliciet in logische taal beschrijven van kennis en kennisverandering, met name in een publicatie

No. 223. A zegt tot S en P : Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leq 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan S alleen mee, en $p = xy$ aan P alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.

Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. P zegt: Ik weet het niet.
 2. S zegt: Dat wist ik al.
 3. P zegt: Nu weet ik het.
 4. S zegt: Nu weet ik het ook.
- Bepaal het paar (x, y) .

(H. Freudenthal).

Figuur 1 De originele publicatie

van Plaza uit 1989 [12]. Via de kennislogica kwam het recentelijk terecht in het gebied van model checking. Daarin kan het probleem in een programmeertaal geformaliseerd worden en kunnen de eigenschappen van S en P en de uniciteit van de oplossing automatisch worden geverifieerd [15].

In deze bijdrage besteden we eerst uitvoerig aandacht aan de verspreiding van het probleem, mede om de resultaten van een NAW lezersoproep in 2005 te rapporteren. Daarna introduceren we de kennislogica (in een variant waarin we ook kunnen refereren aan de gevolgen van waarheidsgetrouwe uitspraken) en analyseren we het probleem in kennislogica. Tenslotte modelleren we het probleem voor bewerking in de model checker DEMO, ontwikkeld door Jan van Eijck aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica.

Versies van het raadsel

Een van de grondleggers van de kunstmatige intelligentie, John McCarthy, schreef van 1978 tot 1981 een artikel over het som-en-productprobleem, dat hij als volgt formuleerde [9]:

Two numbers m and n are chosen such that $2 \leq m \leq n \leq 99$. Mr. S is told their sum and Mr. P is told their product. The following dialogue ensues:

1. Mr. P : I don't know the numbers.
2. Mr. S : I knew you didn't know. I don't know either.
3. Mr. P : Now I know the numbers.
4. Mr. S : Now I know them too.

In view of the above dialogue, what are the numbers?

Er bestaat een aantal verschillen tussen de versies van Freudenthal en McCarthy. In de versie van McCarthy is de bovengrens voor beide getallen 99, terwijl Freudenthal 100 opgeeft als bovengrens voor de *som* van beide getallen. Ook staat McCarthy, anders dan Freudenthal, twee gelijke getallen toe. Daardoor zijn aan het begin veel meer getallenparen toegestaan in de versie van McCarthy. Verder geeft Mr. S . in zijn tweede bekendmaking extra informatie ("I don't know either") die niet voorkomt in de dialoog van Freudenthal. Het blijkt dat geen van deze wijzigingen afzonderlijk, noch in combinatie, invloed heeft op de oplossing (zie [15]).

Vanaf de jaren zeventig zijn er veel verschillende versies van Freudenthal's raadsel in omloop geweest. Deze variaties verschillen van het origineel in een aantal aspecten: andere bekendmakingen in de dialogen, andere toegestane getallen en verschillen-

de keuzen wat betreft de informatie voorafgaand aan de dialoog. Wordt die begininformatie bij voorbeeld impliciet gegeven als 'common knowledge' van S en P , zoals Freudenthal inventief deed in zijn origineel, of is alleen de lezer van die informatie op de hoogte? Voor discussies over de verschillende varianten van dit raadsel verwijzen we graag naar de literatuur over recreatieve wiskunde, bijvoorbeeld [1–3, 6–7, 13], en de website <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/logic.sum.product>. Voor een bijzonder elegante wiskundige analyse bevelen we graag [7] aan. Interessant is verder Edsger Dijkstra's analyse [19].

Meer op logici gericht zijn de publicaties [10–12]. Plaza maakt een model van het raadsel in een dynamische kennislogica die de voorloper is van de logica van openbare mededelingen die we hier presenteren. We zijn schatplichtig aan Plaza voor de beschrijving van het beginmodel en de formalisering van de effecten van de bekendmakingen in de dialoog.

Op zoek naar de oorsprong

Zowel John McCarthy als Martin Gardner [6, 9] wisten niet van Freudenthal's publicatie en stelden de vraag waar het probleem vandaan kwam, zonder deze bevredigend te kunnen beantwoorden. Zo zegt McCarthy in een voetnoot van zijn artikel [9]:

"I have not been able to trace Mr. S and Mr. P back beyond its alleged appearance on a bulletin board at Xerox PARC."

Martin Gardner schrijft in 1979 in zijn column "Mathematical Games" [6]:

"This beautiful problem, which I call "impossible" because it seems to lack sufficient information for a solution, began making the rounds of mathematics meetings a year or so ago. I do not know its origin."

Als reactie op [6] schreef de Nederlandse algebraïcus Robert van der Waall aan Gardner over Freudenthal's publicatie in 1969 in het *Nieuw Archief voor de Wiskunde*, waarna Gardner in een vervolgcolum de juiste credits gaf.

Wij hebben geprobeerd twee openstaande vragen over de geschiedenis van het som-en-productraadsel te beantwoorden:

1. Als het raadsel inderdaad voor het eerst in druk verscheen in 1969 in [4], hoe is het probleem dan tien jaar later terecht gekomen op "a bulletin board at Xerox PARC" en "the rounds of mathematics meetings" in de Verenigde Staten?



Hans Freudenthal (1905 – 1990)

2. Heeft Freudenthal het raadsel zelf ontworpen? En zo ja, werd hij daarbij wellicht geïnspireerd door mogelijk minder complexe voorgangers?

Over vraag 1 hebben we oproepen gedaan op internationale maillijsten zoals "Foundations of Mathematics" en een groot aantal Nederlandse en Amerikaanse wiskundigen aangeschreven die in de jaren 60 en 70 een goed internationaal netwerk hadden. Daarbij hebben we een aantal mooie anekdotes gehoord. Zo leerde de psycholoog en internationaal schaakmeester J.T. Barendregt, vader van logicus Henk Barendregt, in de vroege jaren 60 van zijn Russische schaakcollega's een raadsel kennen dat nu een van de voorgangers van het som-en-productprobleem uit [17] blijkt te zijn. De beroemde wiskundige John Conway had zelf in de jaren 70 onafhankelijk een andere puzzel bedacht waarbij kennis en gebrek aan kennis een sleutelrol vervullen. Hij raakte begin jaren 70, met de trein op reis in Nederland, een keer aan de praat met de reiziger tegenover hem, die Hans Freudenthal bleek te heten. Conway heeft Freudenthal toen uitgebreid gecompimenteerd over LINCOS (Lingua Cosmica), Freudenthal's taal om met eventueel buitenaards leven in contact te komen, maar beide heren kwamen er niet achter dat zij zulke gelijksoortige raadsels hadden ontworpen. Toch kunnen we nog steeds geen precies antwoord geven op de eerste vraag.

Wat de tweede vraag betreft vonden we geen bevestiging in Freudenthal's gepubliceerde geschriften, noch in onze contacten met het Freudenthal-instituut. Professor N.G. de Bruin schreef ons wel het bemoedigende bericht dat, als geen bron werd vermeld

te preciseren welke feiten in welke toestanden gelden – de waardering V_p voor atoom p bestaat dus uit de deelverzameling toestanden in het domein waar p waar is. Voor een toestand $s \in S$ noemen we het paar (M, s) een *kennistoestand* of informatietoestand. Gegeven twee toestanden s, s' in het domein, betekent $s \sim_a s'$ dat actor a de toestand s niet van s' kan onderscheiden op basis van de voor die actor beschikbare informatie. Bijvoorbeeld, voordat S en P hun gesprek voeren zijn voor S de paren (14, 16) en (7, 23) niet te onderscheiden maar wel voor P . Gegeven een domein van getalparen hebben we dan dat (14, 16) $\sim_S$ (7, 23) maar (14, 16) $\not\sim_P$ (7, 23).

Hiermee komen we dan uiteindelijk bij de semantiek aan, die ons vertelt hoe we de formele taal op de kennismodellen interpreteren. Gegeven een kennismodel $M = \langle S, \sim, V \rangle$, wordt de interpretatie van een formule op dit model als volgt inductief gedefinieerd. De constructie ' $M, s \models \phi$ ' lezen we als 'formule ϕ is waar in kennistoestand (M, s) ', en 'desda' staat voor 'dan en slechts dan als'.

$M, s \models p$	desda $s \in V_p$
$M, s \models \neg\phi$	desda $M, s \not\models \phi$
$M, s \models \phi \wedge \psi$	desda $M, s \models \phi$ & $M, s \models \psi$
$M, s \models K_a \phi$	desda voor alle $t \in S$, als $s \sim_a t$ dan $M, t \models \phi$
$M, s \models [\phi]\psi$	desda als $M, s \models \phi$ dan $M \phi, s \models \psi$

Hierbij is het kennismodel $M|\phi = \langle S', \sim', V' \rangle$ in de clause voor $[\phi]\psi$ gedefinieerd als

$$\begin{aligned} S' &= \{s' \in S \mid M, s' \models \phi\} \\ \sim'_a &= \sim_a \cap (S' \times S') \\ V'_p &= V_p \cap S' \end{aligned}$$

De operator $[\phi]$ kan gezien worden als een omvormer van kennistoestanden, namelijk van M naar $M|\phi$. Het Engelse equivalent is 'epistemic state transformer', naar analogie van het bekendere 'state transformer' in de semantiek van programmeertalen. Het model $M|\phi$ is een submodel van M , namelijk de beperking van het domein S van M tot de toestanden waar ϕ waar is, met behoud van toegankelijkheidsrelaties en waardering op deze restrictie. De zogenaamde duale van operator $[\phi]$ is $\langle \phi \rangle$. We bedoelen hiermee dat $\langle \phi \rangle\psi$ gedefinieerd is als $\neg[\phi]\neg\psi$.

Bijvoorbeeld, in de beginttoestand (7, 23) is de bewering $K_P(x_7 \wedge y_{23})$ – P weet dat de getallen 7 en 23 zijn – waar, omdat er voor P geen ander getallenpaar voorstelbaar is. Zoals al gezegd, heeft het product van twee priemgetallen immers geen ande-

```
module SumProduct
where import DEMO

pairs :: [(Int,Int)]
pairs = [ (x,y) | x <- [2..100], y <- [2..100], x < y, x+y <= 100 ]
numpairs = toInteger (length pairs)
indexed_pairs = zip [0..numpairs-1] pairs
msnp :: EM
msnp = (Mo [0..numpairs-1] val [a,b] acc [0..numpairs-1])
  where
    val = [ (w,[P x, Q y]) | (w,(x,y)) <- indexed_pairs ]
    acc = [ (a,w,v) | (w,(x1,y1)) <- indexed_pairs,
                      (v,(x2,y2)) <- indexed_pairs,
                      x1+y1 == x2+y2 ]
    ++
    [ (b,w,v) | (w,(x1,y1)) <- indexed_pairs,
                (v,(x2,y2)) <- indexed_pairs,
                x1*y1 == x2*y2 ]

pform :: Int -> Int -> Form
pform x y = Conj [Prop (P x), Prop (Q y)]
statement_2 =
  Conj [ pform x y 'impl' Neg (K b (pform x y)) | (x,y) <- pairs ]
announce_2 = public (K a statement_2)
statement_3 =
  Conj [ pform x y 'impl' K b (pform x y) | (x,y) <- pairs ]
announce_3 = public statement_3
statement_4 =
  Conj [ pform x y 'impl' K a (pform x y) | (x,y) <- pairs ]
announce_4 = public statement_4
solution = showM (upds msnp [announce_2,announce_3,announce_4])
```

Figuur 3: De DEMO-module SumProduct. Commentaarregels zijn verwijderd.

re ontbinding. Aan de andere kant geldt $\neg K_S(x_7 \wedge y_{23})$ – S weet niet dat de getallen 7 en 23 zijn – omdat (7, 23) $\sim_S$ (14, 16), en in de toestand (14, 16) van het model is bewering $(x_7 \wedge y_{23})$ onwaar. En P 's bekendmaking 'ik weet het niet' beperkt het domein tot toestanden waarin de bewering waar is. Dit leidt dus tot eliminatie van paar (7, 23) uit het model.

'Som en product' in kennislogica

Het modelleren van 'som en product' in kennislogica is nu vrij gemakkelijk. Om te beginnen bepalen we de verzameling van atomaire proposities (propositieletters) en actoren. De actoren zijn S en P – de rol van de aangever A is alleen de achtergrondinformatie publiek te krijgen. De gegeven verschillende natuurlijke getallen x, y tussen 1 en 100 leggen we vast in de verzameling $I \equiv \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 1 < x < y \text{ \& } x + y \leq 100\}$. De atomaire propositie ' $x = 3$ ' staat voor de informatie 'de waarde van de variabele x is 3.' Iets formeler kunnen we ' $x = 3$ ' representeren als een propositieletter x_3 . Op die manier vormen we een eindige verzameling atomen $\{x_i \mid (i, j) \in I\} \cup \{y_j \mid (i, j) \in I\}$.

De propositie ' S weet dat de getallen 4 en 13 zijn' formaliseren we als $K_S(x_4 \wedge y_{13})$. En ' S weet wat de getallen zijn' is dan formeel $K_S(x, y) \equiv \bigvee_{(i,j) \in I} K_S(x_i \wedge y_j)$ (het symbool $\bigvee$ staat voor een disjunctie van meerdere leden). Op dezelfde manier is ' P weet wat de getallen zijn' te beschrijven als $K_P(x, y) \equiv \bigvee_{(i,j) \in I} K_P(x_i \wedge y_j)$. Merk verder op dat 'wist' in bekendmaking 2 van S verwijst naar de

waarheid van $K_S \neg K_P(x, y)$ in de *beginttoestand* van het probleem, dus niet in de toestand die resulteert na bekendmaking 1 door P . Dit maakt onmiddellijk duidelijk dat bekendmaking 1 door P verder in de analyse over het hoofd gezien kan worden, ook al omdat bekendmaking 2 uit bekendmaking 1 volgt: als je iets weet, is het waar. Op deze wijze modelleren we alle vier de bekendmakingen ter oplossing van het probleem:

1. P zegt: "Ik weet het niet": $\neg K_P(x, y)$
2. S zegt: "Dat wist ik al": $K_S \neg K_P(x, y)$
3. P zegt: "Nu weet ik het": $K_P(x, y)$
4. S zegt: "Nu weet ik het ook": $K_S(x, y)$

Deze bekendmakingen interpreteren we achtereenvolgens, te beginnen met 2, op epistemisch model $SP_{(x,y)} \equiv \langle I, \sim, V \rangle$ dat bestaat uit een domein van paren $(x, y) \in I$ (als hiervoor), *equivalentierelaties* (toegankelijkheidsrelaties) $\sim_S$ en $\sim_P$ zodanig dat voor S : $(x, y) \sim_S (x', y')$ desda $x + y = x' + y'$ en voor P : $(x, y) \sim_P (x', y')$ desda $xy = x'y'$; en *waardering* V zodanig dat $V_{x_i} = \{(x, y) \in I \mid x = i\}$ en $V_{y_j} = \{(x, y) \in I \mid y = j\}$.

Om de oplossing van het probleem weer te geven, kunnen we zeggen dat

$$SP_{(x,y)}, (4, 13) \models \langle K_S \neg K_P(x, y) \rangle \langle K_P(x, y) \rangle \langle K_S(x, y) \rangle \top$$

Hierin staat $\top$ ('truth') voor de 'altijd ware' bewering. Met andere woorden, gegeven dat (4, 13) het werkelijke getallenpaar is, kunnen de beweringen 2, 3, en 4 in die volgorde pu-



Publieke werken van Thomas Rosenboom (Querido, 1999)

bliek uitgesproken worden. Eigenlijk geeft deze formule alleen weer dat *ten minste* (4, 13) een oplossing is. Er zijn nog preciezer manieren waarop we ook kunnen uitdrukken dat dit de enige oplossing is (zie [15]).

We kunnen nu ook de raadselachtigheid van het raadsel expliciteren. In de begintoestand weet *P* niet wat de getallen zijn, maar na de bekendmaking *z* van *S* weet *P* het *wel*. Dit komt overeen met

$$SP_{(x,y)}(4, 13) \models \\ (K_S \neg K_P(x, y)) \rightarrow K_S \neg K_P(x, y)$$

Met andere woorden, iets kan onwaar worden door het bekend te maken. Rara, hoe kan dat? Dat weten we nu.

'Som en product' in DEMO

Sinds enige tijd bestaan er zogenaamde model checkers voor kennislogica, programma's waarmee epistemische eigenschappen van communicatieve acties automatisch kunnen worden geverifieerd. DEMO (de afkorting staat voor *Dynamic Epistemic Modeling*) is ontwikkeld aan het CWI in Amsterdam door een van de auteurs van dit artikel. Het implementeert kennismodellen, operaties op kennismodellen en toetsing van epistemische formules in kennismodellen. DEMO is geschreven in de functionele programmeertaal Haskell. Openbare bekendmaking is

maar een eenvoudig voorbeeld van de communicatieve acties die DEMO aankan, maar het scala aan voorbeelden is heel veel groter.

De implementatie van het som-en-productraadsel in DEMO (van de hand van Ji Ruan) vindt u in Figuur 3. In Haskell is een lijst een standaard datastructuur, maar een verzameling niet. De verzameling $I \equiv \{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 1 < x < y \ \& \ x+y \leq 100\}$ is daarom in het programma geïmplementeerd als een lijst

$$\text{pairs} = [(x, y) \mid x \leftarrow [2..100], \\ y \leftarrow [2..100], x < y, x+y \leq 100]$$

De symbolen { en } zijn dus vervangen door [en], het symbool $\in$ door $\leftarrow$, en in plaats van *I* noemen we dit semantisch object *pairs*. We koppelen nu elk getallenpaar aan een natuurlijk getal, om die natuurlijke getallen vervolgens te kunnen gebruiken als namen voor mogelijke werelden. Het resultaat heet *indexed_pairs*. Het kennismodel voor de begintoestand van het som-en-productraadsel heet in de implementatie *msnp*. Dit model heeft als domein $[0..numpairs-1]$, terwijl de waardering van atomaire proposities is geregeld in *val* en de toegankelijkheidsrelatie voor de actoren in *acc*. Het vierde onderdeel geeft aan dat voorts nog elk getallenpaar in $[0..numpairs-1]$ het werkelijke getallenpaar zou kunnen zijn.

Voor het precieze verband tussen bekendmakingen, de logische formalisering, en de weergave in DEMO, nemen we $K_S \neg \bigvee_{(i,j) \in I} K_P(x_i \wedge y_j)$, voor "S zegt: Dat wist ik al". De logische formule is equivalent met $K_S \bigwedge_{(i,j) \in I} \neg K_P(x_i \wedge y_j)$. Een in het model equivalente maar computationeel zuiniger alternatief is $\bigwedge_{(i,j) \in I} ((x_i \wedge y_j) \rightarrow \neg K_P(x_i \wedge y_j))$. Dit is de formule *statement_2* in het programma.

Het resultaat van uitvoering van de drie bekendmakingen uit het raadsel in het beginmodel ziet er in DEMO zo uit:

```
SumProduct> solution
==> [0]
[0]
(0, [p4, q13])
(a, [[0]])
(b, [[0]])
```

Dit geeft aan dat op het punt waar alle openbare bekendmakingen verwerkt zijn het kennismodel bestaat uit een enkele wereld 0, een wereld die correspondeert met het getallenpaar (4, 13), terwijl beide actoren op de hoogte zijn van deze unieke oplossing.

Een nieuw raadsel

Met deze uitleg van de implementatie van het som-en-productprobleem besluiten we dit verhaal. Enerzijds doet zo'n programma

wellicht wat aan de 'magie' van het oorspronkelijk probleem af, maar anderzijds biedt het ook weer vernieuwende mogelijkheden om soortgelijke raadsels te ontwikkelen en te testen. Voor de NAW-lezer presenteren we daarom een nieuw epistemisch raadsel in de traditie van onzekerheid die meerdere actoren over getallen hebben, waarbij die onzekerheid door het uitspreken ervan weggenomen wordt. Het volgende raadsel is een variant op [8].

Drie actoren A, B en C krijgen ieder een positief natuurlijk getal op het voorhoofd geplakt. Ze kunnen alleen het voorhoofd van de anderen zien, maar, uiteraard, niet dat van zichzelf. Een van de getallen is de som van de andere twee getallen. Al het voorgaande is gemeenschappelijke kennis. De volgende conversatie vindt nu plaats:

- A: "Ik weet mijn getal niet."
- B: "Ik weet mijn getal niet."
- C: "Ik weet mijn getal niet."

Agent A weet nu wat haar getal is. Wat zijn de getallen en wie heeft welk getal, als alle getallen priem zijn?

Als u dit een lastig probleem vindt, kunt u natuurlijk ook proberen het antwoord met behulp van DEMO te vinden. Zie hiervoor [16] en <http://homepages.cwi.nl/~jve/demo>.

Dankwoord

Rineke, Jan en Hans danken het NIAS (Netherlands Institute for Advanced Studies in the Humanities and Social Sciences) voor haar gastvrijheid, in het kader van het NIAS project 'Games, Action, and Social Software'. Verder danken wij het NWO Cognitieprogramma voor de Advanced Studies beurs NWO 051-04-120 waarmee het bezoek van Hans van Ditmarsch aan het NIAS gefinancierd is, en NWO MagW voor de Replacement grant NWO 400-05-710 die het mogelijk maakte dat Rineke Verbrugge haar tijd tijdens het NIAS-project aan onderzoek kon besteden. De titel 'Publieke Werken' van deze bijdrage is naar de bekende roman van Thomas Rosenboom met wie wij met veel genoegzaam maaltijden op het NIAS gedeeld hebben. Deze titel is een knipoog naar de 'public announcements' – openbare bekendmakingen – en 'public announcement logic' – kennislogica – die centraal staan in onze modellering. 

References

- 1 A. Born, C.A.J. Hurkens, and G.J. Woeringer. The Freudenthal problem and its ramifications: Part (I). *Bulletin of the EATCS*, 90:175–191, 2006.
- 2 A. Born, C.A.J. Hurkens, and G.J. Woeringer. The Freudenthal problem and its ramifications: Part (II). *Bulletin of the EATCS*, 91:189–204, 2007.
- 3 A. Born, C.A.J. Hurkens, and G.J. Woeringer. The Freudenthal problem and its ramifications: Part (III). *Bulletin of the EATCS*, 95:201–219, 2008.
- 4 H. Freudenthal. (formulering van het som-en-productprobleem). *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(17):152, 1969.
- 5 H. Freudenthal. (oplossing van het som-en-productprobleem). *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(18):102–106, 1970.
- 6 M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 241(December):20–24, 1979. Tevens besproken in jaargang 242, nummers March (pagina 24) en May (paginas 20–21), 1980.
- 7 I.M. Isaacs. The impossible problem revisited again. *The Mathematical Intelligencer*, 17(4):4–6, 1995.
- 8 A. Liu. Problem section: Problem 182. *Math Horizons*, 11:324, 2004.
- 9 J. McCarthy. Formalization of two puzzles involving knowledge. In V. Lifschitz, editor, *Formalizing Common Sense : Papers by John McCarthy*, Ablex Series in Artificial Intelligence. Ablex Publishing Corporation, Norwood, N.J., 1990. Origineel manuscript daterend uit 1978–1981.
- 10 G. Panti. Solution of a number theoretic problem involving knowledge. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 2(4):419–424, 1991.
- 11 R. Parikh. Finite and infinite dialogues. In E. Moschovakis, editor, *Workshop on Logic from Computer Science*, pages 481–498. MSRI Publications / Springer, 1992.
- 12 J.A. Plaza. Logics of public communications. In M.L. Emrich, M.S. Pfeifer, M. Hadzikadic, and Z.W. Ras, editors, *Proceedings of the 4th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems: Poster Session Program*, pages 201–216. Oak Ridge National Laboratory, 1989. ORNL/DSRD-24.
- 13 L. Sallows. The impossible problem. *The Mathematical Intelligencer*, 17(1):27–33, 1995.
- 14 H.P. van Ditmarsch. Het zeven-kaartenprobleem. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 3(4):326–332, 2002.
- 15 H.P. van Ditmarsch, J. Ruan, and R. Verbrugge. Sum and product in dynamic epistemic logic. *Journal of Logic and Computation*, 18(4):563–588, 2007.
- 16 J. van Eijck. DEMO — a demo of epistemic modelling. In J.F.A.K. van Benthem, D. Gabbay, and B. Löwe, editors, *Interactive Logic — Proceedings of the 7th Augustus de Morgan Workshop*, number 1 in Texts in Logic and Games, pages 305–363. Amsterdam University Press, 2007.
- 17 W. T. Williams and G. H. Savage. *The Penguin Problems Book: A Modern Anthology of Perplexities and Tantalizers*. Penguin Books (Allen Lane), Harmondsworth, 1940.
- 18 W. T. Williams and G. H. Savage. *The Second Penguin Problems Book*. Penguin Books, Harmondsworth, 1944.
- 19 E.W. Dijkstra, *A problem solved in my head*. E.W. Dijkstra archive, EWD666, see www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewdo6xx/EWD666.PDF, 1976.

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragswetenschappen, instituut ELAN
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
N.C.Verhoef@utwente.nl

Interview Jan Dijkhuis en Rob Houtenbos van Getal en Ruimte

Hoe ontstaat een wiskundemethode?

Velen vragen zich af hoe een schoolmethode ontstaat: wie geeft de aftrap en hoe gaat dat dan verder in zijn werk? Kan iedereen auteur worden? Volgen auteurs scholing? Ligt er een inhoudelijk, breed gedragen concept aan de methode ten grondslag? Is er nog een rol toebedeeld aan docenten? Welke? Jan Dijkhuis (coördinerend auteur tweede fase) en Rob Houtenbos (uitgever bovenbouw) tillen een tipje van de sluier op over het ontstaan van de grootste wiskundemethode Getal en Ruimte in de praktijk van alledag.

De opdracht is dat ik, volgens afspraak, zoek naar een man met een blauwe jas en veel haar. Iets te laat, kom ik op het station Arnhem aan. Het station oogt chaotisch, vanwege een langdurige verbouwing. Ik loop in de richting van de uitgang, zonder ook maar het idee te hebben een man met een blauwe jas en veel haar voorbij te lopen. Buiten sta ik bij de Rabobank stil — het lijkt me niet gek even o6 te bellen om te vertellen dat ik nu de Rabobank van dichtbij zie. En jawel, ik ben te ver en moet teruglopen. Niet veel verder — het kan niet missen, staat een man wat verloren tegen een hek. Dat is de auteur Jan Dijkhuis. We gaan op een bankje in de zon zitten. De vragen komen vanzelf: “Waar werk je, hoe lang al, vind je het leuk, zoveel klassen en dan ook nog schrijven? Niet te geloven!” Ik kijk achterom en zie een man in pak — de uitgever! Samen lopen we in de richting van de stad. Het restaurant, de plek waar we afgesproken hebben, ziet er chique uit, een uitgelezen plek om te vergaderen en nog iets te eten ook... Ik val met de deur in huis en vuur de eerste vraag af.

Hoe ontstaat een wiskundemethode?

Jan Dijkhuis (JD): Kijk, het schrijven van een eerste concept kan natuurlijk niet zonder een gedegen voorbereiding. Het duurt ongeveer een maand voordat er een eerste concept ligt. Dat eerste concept leg ik dan voor aan de andere redactieleden, wekelijks spreken we elkaar. De redactieleden houden

de veranderingen in het examenprogramma en de didactische ontwikkelingen nauwlettend in de gaten. Er gaan wel vijf of zes vergaderingen overheen tot we allemaal tevreden zijn. Het criterium is consensus. Als er consensus is bereikt dan zijn we klaar. Dat gaat lang niet altijd van een leien dakje — en het is een intensief proces, maar zo ontstaat onze methode dus. Momenteel staan cTWO en de Resonansgroep tegenover elkaar als het om het vaststellen van nieuwe programma's gaat. De waarheid ligt in het midden. Het is natuurlijk zo dat we te ver doorgeschoten waren de laatste tijd, we wilden teveel in één keer. Van de beslissing van Marja van Bijsterveldt trekken we ons vooralsnog niet veel aan, want dat gaat over 2013. Onze boeken zijn nu allemaal klaar voor de periode tot 2013. In de loop der tijd zie je dat er veel veranderd is, veel meer zelfwerkzaamheid voor leerlingen, de manier van werken is totaal anders geworden. De laatste jaren zijn er als gevolg van veranderingen in de basisvorming steeds meer toepassingen in de boeken terechtgekomen, ten koste van algebraïsche vaardigheden. Het ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen bepaalt het kader waarbinnen scholen hun lesprogramma moeten ontwikkelen. De auteurs van Getal en Ruimte streven naar een optimale invulling van het kader maar tien jaar geleden lag de lat te hoog. In 1998 waren we écht te ambitieus, de boeken zagen er prachtig uit, waren veel dikker dan nu, maar het was teveel: de leerlingen

kwamen er niet doorheen. Bij elk onderwerp trokken we nog een lijn naar beroepen waar die kennis van toepassing zou kunnen zijn. De leerlingen werkten zelfstandig en ze vonden het lesmateriaal motiverend. Leerlingen vonden het allemaal leuk om te doen, dat was toen de tijdgeest. Vanaf 2003 werd het anders. Steeds meer op de algebraïsche toer. Er kwamen steeds meer stukken zonder context, het ging weer om haakjes wegwerken en zo. Natuurlijk evalueren we voortdurend. We organiseren gebruikersbijeenkomsten, die over het algemeen druk bezocht worden. Dit soort bijeenkomsten zijn cruciaal voor de auteurs. De evaluatie zelf vindt echter vooral plaats in de eigen lesomgeving. Dat is wel gekleurd, omdat de pilot implementaties plaatsvinden bij docenten die hun eigen materiaal hebben samengesteld. Eigenlijk zou wetenschappelijk onderzoek niet zo gek zijn, om het gebruik in de klas te kunnen verantwoorden. De uitkomsten van die contactmomenten in de eigen lesomgeving worden overigens altijd meegenomen door de auteurs.

Is er misschien een algemeen didactisch en onderwijskundig kader?

JD: Ja, dat is er wel, de leerling staat centraal. Het gaat om het stimuleren van het denkvermogen, het structureren en het logisch kunnen denken. Dat kun je alleen leren door steeds kleine stapjes te maken. Je neemt de leerling bij de hand. Van nature doen leerlingen dat niet, niet uit zichzelf, daar hebben ze de school voor nodig. Ze leren met elkaar eigenlijk.

Hoe zijn de taken verdeeld?

JD: Er zijn vier auteursgroepen die aan de bovenbouw werken, waarbij de bovenbouw is verdeeld in wiskunde A, B, C en D; en er zijn

Voorbeeld van 'werkbaar voor leerlingen'

Laten we eens een wiskundig begrip bij de kop pakken. Hoe doe je dat bij het begrip 'afgeleide' bijvoorbeeld? Je kunt de limiet toch niet ongestraft overslaan?

JD: Ja, nu kan dit weer, we noemen de limiet weer — niet bij wiskunde A leerlingen want daar gaat het vooral om de context: ze moeten ermee kunnen werken. Daar speelt het begrijpen van een limiet geen rol.

Maar iedereen kan toch wiskunde leren, waarom dan dit onderscheid?

JD: Nee, wij denken dat wiskunde A leerlingen dat echt niet kunnen, dat gaat hen boven de pet.

Maar het kenmerk van wiskunde is toch structuur? Sla je op deze manier die structuur over? En ben je eigenlijk niet onvolledig, of onjuist?

JD: Is dat dan erg?

Daar nog een ander voorbeeld waar de limiet een rol speelt: de normale verdeling. Daar gaat het toch ook om een limietgeval van de binomiale verdeling: daar wordt helemaal niet over gerept? Is dat geen misser? Je zou nu op het begrip limiet terug kunnen komen. Een overlappende structuur zou overzicht kunnen geven over meerdere onderwerpen in de schoolwiskunde, waar het steeds gaat om de stap van discrete naar continue processen. Dat biedt toch houvast?

JD: Nee, dat is niet nodig, de auteur zit in alle schrijfgroepen, dus dat gaat vanzelf goed. Dat hoeft je niet expliciet te noemen. Zelfs de overgang van wiskunde A naar wiskunde B loopt op die manier soepel. Het uitgangspunt is voortdurend de leerling.

ten meer zelf uitzoeken. Netwerk is niet zo bekend en de Wageningse Methode is prachtig, maar niet voor elke leerling geschikt. Het is echt een methode die geschreven is voor de 'happy few'. Getal en Ruimte besteedt veel aandacht aan voorbeelden, daar leren leerlingen van. Als het wordt voorgedaan kunnen leerlingen dat nadoen. Dat is voor verreweg de meeste leerlingen de meest effectieve aanpak.

Maar wat blijft er dan over van eigen creativiteit?

JD: Die eigen creativiteit zie je heus wel, bijvoorbeeld als leerlingen aangeven: oh, maar zó kan het ook!

En de rol van de docent. Wat doet de docent nu, wat wordt er van hem of haar verwacht? Het boek lijkt die rol over te nemen, de docent is overbodig geworden!

JD: Nee, dat is écht niet de bedoeling van de methode — elke docent kan doen wat ie zelf wil. Op elk gewenst moment kan hij zijn eigen verhaal toevoegen, graag zelfs! De docent wordt ook gestimuleerd ICT te gebruiken, dat gebeurt nog veel te weinig. ICT kan worden ingezet als extra hulpmiddel voor de docent om dingen uit te leggen, op een manier die anders niet kan. Maar ICT kan ook heel goed worden ingezet als het om extra oefening gaat. Sommige leerlingen hebben dat nodig, niet alle. Het voordeel is dat wij ervoor gezorgd hebben dat leerlingen direct feedback krijgen. En oefening baart nog steeds kunst. De methode zit in de lift, schrijvers en uitgever zijn heel tevreden over de methode, hoewel het natuurlijk altijd wel weer beter kan.

Toch probeer ik nog even een kritische noot. Soms zijn contexten niet aan te bevelen, bijvoorbeeld als het onzin-contexten zijn.

JD: Welke dan?

Wel, een context die een driehoekige tuin beschrijft met een lantaarnpaal in het midden vind ik een typisch voorbeeld van onzin! Daar krijg ik wel gelijk in.

Het is tijd en we moeten gaan eten. Tot mijn verbijstering zijn mijn partners al klaar terwijl ik nog met een half vol bord voor me zit. Ik moet toch begrijpen dat het vak van lesmethodes schrijven van je eist dat je 'met de klok' leeft. Dus, een kwartier aan het eten besteden is lang genoeg... ik heb het niet op kunnen eten zo snel.

drie auteursgroepen die aan de onderbouw werken, verdeeld in: vmbo BK, vmbo KGT en T/h en havo/vwo en vwo. Totaal gaat het om een club van zeventien mensen waarvan enkelen participeren in meerdere stromen. Vaak schrijft één persoon de concepten van een titel. De andere auteurs leveren tijdens de vergaderingen commentaar op dat concept. Op deze manier ligt voor de eindredactie, de samenvattingen, de antwoorden en uitwerkingen, de praktische opdrachten en de toetsopgaven de eerste verantwoordelijkheid steeds bij één van de auteurs. Ook het ontwerpen van ICT ligt bij de auteurs. Eén auteur ontwerpt, de rest speelt een stevige rol met hun commentaar. ICT wordt steeds belangrijker, daar wordt flink in geïnvesteerd.

Is er een visie? En zo ja, dient elke auteur die visie te onderschrijven?

JD: De grote lijn is 'werkbaar voor leerlingen'. De visie van Getal en Ruimte is dat de methode werkbaar moet zijn voor jou als docent, in jouw klas. Essentieel is dat je aansluit bij wat er eerder in de les is gebeurd. Steeds gaat het om de realisering van vernieuwingen van buitenaf, want het examenprogramma is bindend.

Hoe begin je aan een nieuw onderwerp, zoals wiskunde D?

JD: Het concept voor Wiskunde D is groten-deels bij nul begonnen, bijvoorbeeld bij analytische meetkunde. Het is niet zo dat het allemaal al op de plank lag. Bij analytische meetkunde is eerst bewust gekeken: wat wil je

daar nu mee? Vervolgens is er gezocht naar een logische volgorde uitgaande van een uitgebreide studie van wat er allemaal al bestaat over dit onderwerp (zowel via de cTWO-site als ander materiaal). Na een uitgebreide bespreking in het auteursteam kan de versie waarover men uiteindelijk tevreden is, geïmplementeerd worden in de eigen situatie. Dan zie je zelf hoe het loopt, en of het in overstemming is met de voorstelling die je ervan had. Maar bovenaan staat haalbaarheid en het plezier van leerlingen. Als de toets achter de rug is, kan je eigenlijk pas aangeven of de implementatie van een onderdeel gelukt dan wel mislukt is.

Nu een ander onderwerp: hoe word je auteur bij Getal en Ruimte?

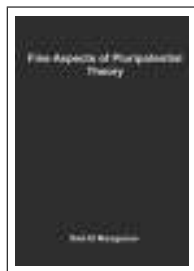
JD: Eigenlijk gaat dat via mond-op-mond reclame. Als een collega aangeeft dat hij graag wil meedoen, dan volgt er een gesprek en dan moet hij een stukje lesstof laten zien waarvan hij vindt dat het beter is geworden. Dat wordt dan uitgebreid besproken en becommentarieerd. Het gaat erom of en hoe de schrijver anderen van zijn visie weet te overtuigen. Na een jaar meedraaien (schrijven en vergaderen) volgt een 'go/no-go' beslissing. Het is belangrijk dat auteurs kunnen omgaan met kritiek, vooral met elkaars kritiek.

Hoe onderscheidt Getal en Ruimte zich van andere wiskundemethodes? Wat is het onderscheid met Moderne Wiskunde bijvoorbeeld?

JD: Nou, bij Moderne Wiskunde worden de leerlingen meer in het diepe gegooid, ze moe-

In de verdediging

| In defence



Fine aspects of pluripotential theory

Said El Marzguioui

Naar een ander land verhuizen is een ingrijpende gebeurtenis. Nadat Said El Marzguioui in de zomer van 2003 vanuit Marokko naar Nederland kwam, heeft hij erg getwijfeld of hij wel de juiste beslissing had genomen. Hij moest wennen aan de cultuur, het weer en het landschap en hij moest van alles gaan leren. De taal, de normen en waarden, zelfs zijn rijbewijs moest hij opnieuw behalen. Hoewel dit alles zeker niet makkelijk was, was het de moeite waard. Op 18 februari 2009 sloot Said zijn aio-tijd aan de UvA succesvol af met de verdediging van zijn proefschrift *Fine aspects of pluripotential theory*. En bovendien voelt hij zich inmiddels beter thuis in Nederland dan in Marokko.

Pluripotentialtheorie en de pluri-fijne topologie

Van zijn promotor Jan Wiergerinck kreeg Said de opdracht om de eigenschappen van de zogenaamde pluri-fijne topologie te doorgronden. Said legt uit dat deze topologie voortkomt uit de pluripotentialtheorie, die op haar beurt kan worden beschreven als het bestuderen van de plurisubharmonische functies op de complexe vectorruimte $\mathbb{C}^n$. Dergelijke functies zijn in vele opzichten analoog aan convexe functies. Een functie f op de reële lijn heet convex als de tweede afgeleide van f positief is. De vergelijkbare eis voor een plurisubharmonische functie is dat de zogenaamde complexe Monge-Ampère operator positief moet zijn.

Er is echter een belangrijk verschil tussen de twee begrippen. Een convexe functie is altijd continu, maar een plurisubharmonisch functie hoeft niet continu te zijn en kan bovendien de waarde $-\infty$ toekennen. Omdat continuïteit in de wiskunde een topologisch begrip is, kan men de Euclidische topologie zodanig uitbreiden dat alle plurisubharmonische functies op $\mathbb{C}^n$ continu worden. De 'kleinste' topologie die alle plurisubharmonische functies continu maakt heet de pluri-fijne topologie. Het is een zeer gecompliceerde topologie, die niet voldoet aan de aftelbaarheidsaxioma's en dus niet metriseerbaar is. Maar het ergst van alles is dat deze topologie zo groot is dat alleen de eindige verzamelingen compact zijn. Een typische voorbeeld van een open verzameling ziet eruit als een gatenkaas met zoveel gaten dat er geen stukje kaas zonder gat meer uitgesneden kan worden.

Vallen en opstaan

Al in 2005 bewees Said met Jan Wiergerinck dat de pluri-fijne topologie lokaal samenhangend is en dat de pluri-fijne open verzamelingen toch een aangename structuur hebben. Dit resultaat beantwoordde een meer dan 20 jaar oude vraag van de Deen Bent Fuglede en vormt ook meteen de belangrijkste stelling van zijn proefschrift. Het afronden van het bewijs gaf Said een overwinningsgevoel, vooral omdat het zijn eerste echte bijdrage aan de wiskunde was. Naar aanleiding hiervan mocht hij op bezoek bij Bent Fuglede in Kopenhagen om meer te leren over diens theorie van fijne harmonische en subharmonische functies.

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

Echter, Said leerde ook al snel dat onderzoek vaak gepaard gaat met vallen en opstaan: ongeveer twee maanden na het oplossen van Fugledes probleem ontdekte zijn promotor een ernstig gat in het bewijs. Dit was een zware tegenslag: het leek erop dat het hele bewijs instortte. Bovendien hing zijn hele onderzoeksproject van dit probleem af. Na vele slapeloze nachten en dagenlang hard werken wisten Said en zijn promotor uiteindelijk het gat te dichten: een enorme opluchting!

Kers op de taart

Het oplossen van Fugledes probleem, en daarmee het begrijpen van de pluri-fijne topologie, maakte het mogelijk om de theorie van fijne plurisubharmonische functies in pluri-fijne open verzamelingen te ontwikkelen. Deze vorm van pluripotentialtheorie is veel lastiger dan de gewone, want er zijn geen oneindige compacta, waardoor de gebruikelijk redeneringen niet opgaan.

De verzameling waarin een gewone plurisubharmonische functie min oneindig wordt, kom je op veel plaatsen in de wiskunde tegen en wordt de pluripolaire verzameling genoemd. Pluripolaire verzamelingen zijn ingewikkeld van structuur en vertonen een merkwaardig verschijnsel. Dankzij de theorie van fijne plurisubharmonische functies heeft Said veel vooruitgang geboekt in het begrip van de eigenschappen van pluripolaire verzamelingen.

In de zomer van 2008 bewees Said dat een fijne plurisubharmonische functie altijd continu is ten opzichte van de pluri-fijne topologie. Zijn promotor vond het een zeer belangrijke doorbraak en moedigde hem bijna dagelijks aan om na te denken over de mogelijke gevolgen en toepassingen van het resultaat. Inderdaad, kort daarna bewees Jan Wieringer dat de verzameling waarop een *fijne* plurisubharmonisch functie min oneindig wordt pluripolair is, een resultaat dat Said niet haalbaar achtte. Deze doorbraak vormde de kers op zijn promotietaart, want met dit tweede belangrijke resultaat was het schilderij compleet. De grondslagen van een nieuwe theorie waren nu echt gelegd.

Een bijzondere baan

Said vindt het aio-schap een bijzondere baan. Naast het verrichten van onderzoek volg je ook cursussen in binnen- en buitenland, waar je vakgenoten ontmoet en leert hoe ze wiskunde bedrijven. Ondanks de cultuurverschillen en taalbarrière begrijp je elkaar heel goed omdat de taal van de wiskunde universeel is. Said ging dan ook graag naar een zomerschool of conferentie: omdat er zo weinig mensen zijn met wie je je wiskundige ideeën kunt uitwisselen, voelt de kring van vakgenoten vaak als een familie.

Said heeft naast zijn onderzoek ook met veel plezier lesgegeven aan studenten van alle niveaus, van eerstejaars- tot en met masterstudenten. In het begin besteedde hij heel veel tijd aan het voorbereiden van de lessen. Hij had de Nederlandse taal pas geleerd en wilde helder kunnen uitleggen en geen taalfouten maken. Zoveel voorbereiding bleek echter niet nodig: de studenten begrepen hem goed en waardeerden het zeer dat hij les gaf in het Nederlands. Het onderwijs geven vond hij belangrijk, omdat hij zo zijn wiskundige kennis kon overdragen. Maar hij heeft er zelf ook heel veel van geleerd. De vaardigheden van het lesgeven, de Nederlandse taal en, niet te vergeten, wiskunde. Veel wiskundige begrippen begreep hij pas echt toen hij ze aan de studenten moest uitleggen.

Wiskunde was mijn redding

Zoals gezegd, voelt Said zich inmiddels beter thuis in Nederland dan in Marokko. Hij is dankbaar voor de vele hulp die zijn promotor Jan Wieringer hem gaf bij het 'inburgeren'. Hij is er echter van overtuigd

dat de wiskunde zijn echte redding was. Had hij bijvoorbeeld rechten of economie gestudeerd, dan had hij de Nederlandse taal uitstekend moeten beheersen om zover te komen als hij nu gekomen is. Hij kent veel mensen die in Marokko zijn afgestudeerd maar in Nederland geen diploma konden halen vanwege de taalbarrière. Tot slot vertelt Said nog dat Nederland ook in belangrijke mate van Marokko verschilt in de toekomstperspectieven voor gepromoveerden. In Marokko kom je meestal maar moeilijk aan een baan na je promotie. Hier zijn er zeker voor gepromoveerde wiskundigen prima vervolgbanen te vinden. Zelf werkt Said sinds 1 oktober 2008 als credit risk analyst bij ABN AMRO. Er komt redelijk wat wiskunde bij zijn nieuwe functie kijken en bovendien beschikt hij als wiskundige natuurlijk over de bekende vaardigheden die hard nodig zijn in de financiële wereld, zoals analytisch denken, ruimtelijk inzicht en abstractievermogen. En hoewel hij de pluri-fijne topologie niet kan toepassen om winst voor de bank te maken, is hij er voorlopig wel op zijn plaats!



Front interactions in a three-component system

Peter van Heijster

Bij het verschijnen van dit nummer heeft ook Peter van Heijster zijn proefschrift verdedigd, en wel op 26 mei. De afgelopen vier jaar werkte hij onder begeleiding van Arjen Doelman aan het CWI. Op het moment van schrijven van dit stukje had hij net het manuscript van zijn proefschrift *Front interactions in a three-component system* ingediend bij de promotiecommissie. Een mooi moment om eens terug te kijken.

Peter beschrijft zijn aio-tijd als de toe nu toe mooiste en leukste periode van zijn leven. Elke dag kon hij bezig zijn met wiskundeonderzoek, iets dat hij erg graag doet. Het vele reizen naar conferenties en het lesgeven bevalt hem ook prima, en tot slot zat hij als aio ook nog eens niet vast aan strikte werktijden. Met andere woorden, hij vond het een ideale baan. Het is dan ook niet wonderlijk dat hij hoopt op een vervolg in de vorm van een postdoc positie aan Brown University in Providence, RI, in de Verenigde Staten.

Hoewel Peter zijn aio-tijd achteraf dus heel positief beoordeelt, had hij het aan het begin, in de zomer van 2005, best moeilijk. Het was bloedheet, hij was net begonnen met zijn onderzoek en hij zat helemaal vast met een berekening. Evenals de rest van het CWI was zijn promotor op vakantie. Daar zat hij dan ... Een maand lang heeft hij enorm lopen ploeteren. In september kwam iedereen terug van vakantie en begon het normale leven weer, ook in sociaal opzicht. Onder andere de roeisport bracht de nodige afleiding en structuur. Bovendien verhielp Arjen Doelman zijn probleem in een paar minuten, zodat hij met frisse moed verder kon.

Interactie van golffronten

In zijn proefschrift onderzocht Peter aan de hand van een specifiek systeem van reactie-diffusievergelijkingen hoe golffronten elkaar

beïnvloeden. Bij golffronten moet men denken aan bijvoorbeeld boeg- of hekgolven van een schip of aan een puls door een zenuwbaan. Wiskundig gesproken zijn het oplossingen van een systeem van differentiaalvergelijkingen die overal in rust zijn behalve in enkele gelocaliseerde gebiedjes. Het betreffende specifieke systeem is in de jaren negentig geïntroduceerd om fenomenen in gasontladingen te beschrijven, maar Peter gebruikte het meer als *toy-model*: een relatief simpel model waarvan de frontinteracties wiskundig te bestuderen zijn.

Voordat de interactie van bepaalde frontoplossingen kan worden bestudeerd, moet natuurlijk allereerst bewezen worden dat zulke oplossingen bestaan. Om betekenisvol te zijn moeten ze bovendien *stabiel* zijn. Peter legt uit waarom: “Niet-stabiele oplossingen komen in de natuur niet voor. Denk maar eens aan een recht omhoog wijzende slinger. Indien je een slinger in die stand een uiterst klein zetje geeft dan zal deze uiteindelijk tot rust komen in een stabiele, naar beneden wijzende stand.” De recht omhoog wijzende slinger correspondeert met een instabiele oplossing, waarop een kleine verstoring een grote invloed heeft. Een dergelijke oplossing zul je in het algemeen niet waarnemen, in tegenstelling tot stabiele oplossingen.

Het mooiste resultaat

Nadat existentie en stabiliteit van de oplossingen bewezen waren, kon Peter de frontinteracties daadwerkelijk gaan bestuderen. Hij leidde een systeem van gewone differentiaalvergelijkingen af dat in leidende orde de dynamica van multi-frontoplossingen beschrijft. Vier jaar geleden was de centrale vraag in zijn onderzoeksvorstel of het mogelijk is om deze dynamica te beschrijven. Met de afleiding van dit systeem is die centrale vraag positief beantwoord. Omdat er ook nog eens een mooi stukje wiskunde bij kwam kijken, vindt Peter dit het fraaiste resultaat in zijn proefschrift.

Voor het eenvoudigste geval, de 2-front oplossing, ziet de vergelijking er als volgt uit:

$$\frac{d}{dt}\Delta\Gamma = 3\sqrt{2}\varepsilon(\alpha e^{-\varepsilon\Delta\Gamma} + \beta e^{-\varepsilon\Delta\Gamma/D} - \gamma)$$

Hier is ε een kleine parameter die voldoet aan $0 < \varepsilon \ll 1$. De parameters α, β, γ, D zijn $O(1)$ met betrekking tot ε en $\Delta\Gamma$ is de afstand tussen de twee fronten. Bovendien is het belangrijk om op te merken dat $\Delta\Gamma$ wegens constructie $O(\varepsilon^{-1})$ is. De verandering in de onderlinge afstand tussen de golffronten vindt dus in verhouding heel langzaam plaats.

Zoals gezegd beschrijft deze vergelijking de leidende orde dynamica van de afstand tussen de twee fronts van een 2-front oplossing. Je kunt er bijvoorbeeld aan zien dat een stationaire 2-front oplossing (oftewel een 2-front die niet meer verandert in de tijd) moet voldoen aan

$$\alpha e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*} + \beta e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*/D} = \gamma$$

waarbij $\Delta\Gamma^*$ de afstand tussen de fronten van de stationaire oplossing

is. Dit blijkt precies de conditie te zijn die al eerder in het existentiebewijs voor een dergelijke 2-front oplossing was afgeleid! Uit de gevonden differentiaalvergelijking kan ook de stabiliteit van deze stationaire oplossing gemakkelijk worden bepaald: om stabiliteit te garanderen moet iedere kleine verstoring van de stationaire oplossing uitdoven. Daarom moet voor stabiliteit gelden

$$\alpha e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*} + \frac{\beta}{D} e^{-\varepsilon\Delta\Gamma^*/D} > 0.$$

Formeel was de afleiding van de formule voor de multi-front dynamica niet zo moeilijk, maar het rigoreuze bewijs was verre van triviaal. Peter laat in zijn proefschrift bovendien zien dat de resultaten keurig overeenkomen met numerieke experimenten.

Het bewijs is gebaseerd op een paar vrij recente technieken, waaronder de zogenaamde renormalisatie-groepmethode (die overigens verschilt van de oorspronkelijke ‘natuurkundige’ renormalisatiemethodes van Kadanoff en Wilson) om niet-lineaire stabiliteit en existentie, alsmede de validiteit van de formele afleiding, te bewijzen.

Een hoogtepunt in Oberwolfach

Gevraagd naar het mooiste moment in de afgelopen vier jaar, zegt Peter dat er natuurlijk verschillende hoogtepunten waren. Een voorbeeld is een hogere-orde berekening aan een bifurcatie die na twee maanden rekenen eindelijk het gewenste resultaat gaf. Maar de beste herinneringen heeft hij toch aan de vele positieve reacties die hij direct na afloop van zijn presentatie tijdens de Oberwolfach workshop *Dynamics of patterns* kreeg. Het was sowieso al bijzonder dat hij daar aanwezig was en een voordracht mocht houden. Voor conferenties in Oberwolfach worden altijd vijftig senior-onderzoekers uitgenodigd. Aangezien er altijd een paar deelnemers afzeggen is er een reservelijst, waar Peter ook op stond. Zodoende belandde hij in het wiskundige conferentiecentrum in het Zwarte Woud. Hij vertelt dat Oberwolfach in *the middle of nowhere* ligt en vrijwel volledig afgesloten is van de ‘boze buitenwereld’. Zo is er op de kamers, die trouwens niet op slot kunnen, geen TV- of internetaansluiting. Het is dan ook een soort toevluchtsoord voor wiskundigen, om heerlijk een week lang kunnen samenwerken zonder al te veel gestoord te worden. Ook het dinerritueel is bijzonder: iedereen heeft een eigen servet met zijn of haar naam erop, dat bij elke maaltijd willekeurig bij een tafel wordt neergelegd. Zodoende spreek je telkens nieuwe mensen, ideaal voor aio’s.

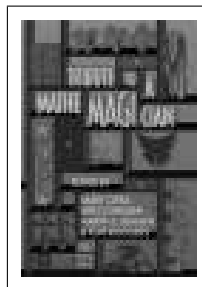
Peter was niet alleen op deze geweldige plek beland, hij mocht er ook nog eens 40 minuten spreken. Hij was dan ook heel erg zenuwachtig. Ondanks of misschien juist dankzij de zenuwen, liep zijn voordracht beter dan ooit en kreeg hij er zoals gezegd veel complimenten voor. Meteen daarna lag zijn servet als bonus bij die van Felix Otto en Bernd Fiedler, twee coryfeeën met wie het goed toeven is. Met recht een hoogtepunt om met plezier op terug te kijken!



Boekbesprekingen

| Book Reviews

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Adres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: wgreview.win@tue.nl



Barry Cipra, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Tom Rodgers (eds.)
Tribute to a Mathemagician
Wellesley, MA: A.K. Peters Ltd., 2005
262 p., prijs \$ 49.00
ISBN 1-56881-204-5

Ter ere van Martin Gardner, de grootste popularisator van de wiskunde uit de vorige eeuw, die vooral bekend is geworden door zijn column *Mathematical Recreations* in het tijdschrift *Scientific American*, worden van tijd tot tijd conferenties georganiseerd onder de titel *Gathering for Gardner (G4G)*. De conferentiebijdragen worden verzameld in bundels. Deze derde bundel is gebaseerd op de vijfde G4G, gehouden op 5, 6 en 7 april 2005 in Atlanta. Alle stukken hebben betrekking op Gardners brede interesse-terrein dat samengevat kan worden onder de noemer recreatieve wiskunde, met inbegrip van puzzels, spellen en goocheltrucs. Zoals te verwachten was, vormen de 34 artikelen een bont scala aan vermakelijke hersenkrakers, ingenieus in elkaar gezette constructies, verbazingwekkende paradoxen en diepgravende analyses. Ik noem hier slechts een paar auteurs: Smullyan met logische paradoxen, van Deventer met twee mooie 3D-puzzelbijdragen, het trio Farrell, Gardner en Rodgers over Configuration Games, Golomb met een nieuw Pentomino Problem en Frederickson over scharnierende dissectiepuzzels. Ook is er een behaarswaardig stuk van Dudley waarin hij de draak steekt met de huidige trend om schoolwiskunde te verpakken in zogenaamde realistische toepassingen die in werkelijkheid niets met toepassingen, maar alles met stupiditeit en gekunstelde pseudoprobleempjes te maken hebben. Hij stelt daar de recreatieve puzzels tegenover die de eeuwen getrotseerd hebben en die nog steeds de geest scherpen van ieder die daar gevoelig voor is. Niet omdat ze praktisch nut zouden hebben, maar omdat ze intellectuele uitdagingen vormen die de moeite waard zijn. *Vive Recreational Mathematics* is zijn toepasselijke titel, en daar sluit ik me van harte bij aan.

De liefhebbers van dit genre zullen in deze bundel weer veel van hun gading vinden. De verzorging is voorbeeldig en de prijs redelijk.

Jan van de Craats



Enrico Bombieri en Walter Gubler
Heights and Diophantine Geometry
New Mathematical Monographs, no. 4
Cambridge: Cambridge University Press, 2006
652 p., prijs £37 (pb)
ISBN 521846153 (hb), 780521712293 (pb)

Over Diophantische meetkunde bestaan al enkele standaardwerken, onder andere van Lang, van Serre en van Hindry-Silverman. Hierin worden de grote eindigheidsresultaten uit de Diophantische approximaties en de theorie van krommen en abelse variëteiten over getallenlichamen behandeld, verbonden met namen als Siegel, Mordell-Weil, Roth en Faltings.

Dit boek voegt op een aantal belangrijke punten iets toe aan deze lijst. Zo krijgt hier de theorie van kleine punten op deelva-

riëteiten van tori een prominente plek, met als hoeksteen een veel-geroemd resultaat van Zhang. Zhangs bewijsmethode gebaseerd op gelijkverdeling van speciale punten is een belangrijke recente techniek met veel potentieel verstrekkende gevolgen die niet in de eerdere werken te vinden is. Erg interessant is de toepassing van Zhangs resultaat op de eenhedenvergelijking naar een artikel van Beukers-Schlickewei. De eenhedenvergelijking krijgt hiermee een behandeling die verschilt van de klassieke, gebaseerd op Diophantische approximaties in de stijl van Siegel-Mahler-Roth.

Een ander belangrijk gezichtspunt in dit boek is dat voor Siegels klassieke resultaat over gehele punten op krommen men in feite toekan zonder resultaten uit de aritmetiek van abelse variëteiten (bijvoorbeeld Mordell-Weil). Deze mogelijkheid wordt in Serre's boek *Lectures on the Mordell-Weil Theorem* kort genoemd, maar niet verder uitgewerkt; hier vindt men een presentatie volledig langs deze lijnen door de weergave van een recent argument van Corvaja-Zannier dat Siegels resultaat uit Schmidts deelruimtestelling laat volgen.

Ten slotte wil ik de behandeling van het *abc*-vermoeden noemen. Dit vermoeden wordt op verhelderende wijze in een breed meetkundig perspectief geplaatst door in detail een link te leggen met vertakking op krommen en Vojta's vermoedens.

Dit boek bevat een schat aan informatie voor ieder die zich op de hoogte wil stellen van de moderne state-of-the-art Diophantische meetkunde. Daarbij is de benodigde hoeveelheid voorkennis niet groot; de plaatsen waar meer geavanceerde wiskunde wordt gebruikt zijn heel overzichtelijk in een kleiner lettertype gedrukt. Wel is het zo dat de meer in toepassingen geïnteresseerde lezer wat moeite zal hebben om zich door de eerste twee hoofdstukken heen te werken. In deze hoofdstukken worden hoogtes geïntroduceerd als doel op zichzelf, en niet als een middel dat aangewend kan worden om een bepaald ruw idee nauwkeurig te maken. Hiermee wordt de presentatie in die eerste hoofdstukken nogal technisch, soms zelfs dusdanig dat men liever een verwijzing naar een researchpaper of een opgave had gehad.

Robin de Jong



Christoph Lossen, Gerhard Pfister (Eds.)
Singularities and Computer Algebra
London Mathematical Society Lecture Note Series 324
 Cambridge: Cambridge University Press, 2006
 371 p., prijs £46.00
 ISBN 0-521-68309-2

Ter gelegenheid van de 60e verjaardag van Gert-Martin Greuel vond van 18 tot 20 oktober 2004 een conferentie aan de Technische Universiteit van Kaiserslautern plaats. Van de 16 voordrachten op deze conferentie zijn er elf tot een artikel uitgewerkt, die in dit boek zijn gepubliceerd. Verder zijn er vijf andere artikelen die met het werk van Greuel verband houden, waaronder één van Christoph Lossen en Gerhard Pfister getiteld: *Aspects of G.-M. Greuel's Mathematical Work*. In het laatstgenoemde artikel wordt een overzicht van het wetenschappelijke werk van Greuel gegeven.

Er zijn twee belangrijke hoekstenen in het werk van Greuel: singulariteiten en computeralgebra. Om met het laatste te beginnen: Greuel is, samen met Pfister en Schönemann, één van de

auteurs van het invloedrijke computeralgebrasysteem SINGULAR. Dit systeem is gratis te verkrijgen. SINGULAR rekent in polynoomringen, quotiënten van polynoomringen en localisaties daarvan. Dit systeem is vandaag de dag een belangrijk instrument in het wiskundig onderzoek. Verschillende artikelen in het boek berichten hierover.

Ook in de theorie van singulariteiten zijn er vele belangrijke bijdragen van Greuel. Ik noem hier slechts zijn resultaten over de Gau-Manin connecties voor geïsoleerde singulariteiten van volledige doorsnijdingen, zijn onderzoek op het gebied van kromme-singulariteiten (met bijvoorbeeld Buchweitz), maximale Cohen-Macaulay modulen, en zijn aanzet voor de studie van equisinguliere families van projectieve krommen. Aan dit laatste thema hebben diverse studenten van hem gewerkt. In totaal heeft Greuel meer dan 80 artikelen gepubliceerd, het allergrootste deel daarvan in vooraanstaande tijdschriften.

Het is natuurlijk onmogelijk om in deze boekbespreking uitvoerig op alle artikelen die in dit boek gepubliceerd zijn in te gaan. Ik vermeld daarom slechts, dat vrijwel alle direct of indirect verband houden met het werk van Greuel.

Theo de Jong



Hal Schenck
Computational Algebraic Geometry
Series: London Mathematical Society Student Texts, no. 58
 Cambridge: Cambridge University Press, 2003
 193 p., prijs €21.99
 ISBN 0-521-53650-2

Dit boekje telt 162 bladzijden, plus inleiding en appendices. Gemiddeld een kwart van de bladspiegel is gevuld met commando's in Macaulay 2, een computeralgebrasysteem voor het rekenen met polynomen. Maakt dat het boek onleesbaar? Integendeel.

In razend tempo passeren heel wat onderwerpen uit de commutatieve algebra de revue. Bij bijna alle concepten ligt de nadruk op het feit dat je ze met Macaulay 2 kunt uitrekenen. Voor bewijzen van veel stellingen wordt naar standaardwerken zoals *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* van Eisenbud verwezen, of anders worden ze in opgaven verwerkt.

Het materiaal is ruwweg op te delen in vier categorieën, die ik maar even basale algebra, homologische algebra, meetkunde, en combinatoriek doop. In de eerste categorie vallen stellingen over quotiënten van polynoomringen en modulen daarover, alsmede Gröbnerbases en eliminatietheorie. Tot de tweede categorie behoren projectieve resoluties, de lokalisatie-, hom-, en tensorproduct-functor, afgeleide functoren en als speciaal geval daarvan Ext en Tor. De schrijver realiseert zich dat de student bij zoveel abstractie wel eens zou kunnen afhaken. Hij probeert dat onder andere te voorkomen door in een opgave te schetsen hoe het feit dat Tor symmetrisch is, Hilbert's stelling over de lengte van projectieve resoluties impliceert.

Aan (algebraïsche) meetkunde wordt niet zoveel extra gedaan: er is een wel heel beknopt hoofdstuk over schoven, cohomologie, krommen en Riemann-Roch, en een hoofdstuk over Hilbert-functies van eindige verzamelingen punten — maar misschien is dat laatste eerder combinatoriek. In deze vierde categorie vallen zeker de Stanley-Reisnerringen en Stanley's bewijs dat cyclische

polytopen de maximaal mogelijke facet-telvectoren hebben onder alle triangulaties van sferen. Dit bewijs maakt gebruik van Reisker's karakterisering van aritmetisch Cohen-Macaulay Stanley-Reiskerringen, dus ook de (a)CM-eigenschap wordt kort behandeld.

Al met al een mooi boekje met veel *hands-on* reken- en programmeer voorbeelden. Als zelfstudiemateriaal voor Master's-studenten lijkt het me te hoog gegrepen, maar het boek kan goed gebruikt worden als leidraad voor een Master-cursus van een of twee semesters.

Jan Draisma



Edward B. Burger, Robert Tubbs
Making Transcendence Transparent
An intuitive approach to classical transcendental number theory

New York: Springer Verlag, 2004

263 p., prijs €42,75

ISBN 0-387-21444-3

De auteurs van dit boek zijn specialisten in Diophantische approximatie en transcendentietheorie. Burger heeft een aantal artikelen geschreven over meetkunde der getallen, Diophantische ongelijkheden en transcendente getallen, en Tubbs over transcendente getallen en Drinfeld-modulen.

De transcendentietheorie is onder niet-specialisten berucht vanwege de technische bewijzen met argumenten die voor niet-ingewijden vaak uit de lucht komen vallen. Burger en Tubbs willen leken met dit boek een inleiding geven tot de theorie van transcendente getallen, en daarbij de bewijsmethoden op een 'natuurlijke' manier introduceren. Afgezien van wat analyse en een klein beetje algebra wordt geen voorkennis verondersteld.

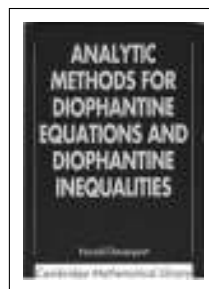
Naar mijn mening zijn de auteurs uitstekend in hun opzet geslaagd. In de eerste twee hoofdstukken van het boek behandelen ze enkele niet al te moeilijke zaken, zoals enkele algemeenheden over rationale en irrationale getallen en Liouville's constructie van transcendente getallen. Daarna voeren ze de moeilijkheidsgraad geleidelijk op, en bewijzen verderop in het boek enkele behoorlijk geavanceerde resultaten. De auteurs introduceren de nieuwe ideeën steeds stapsgewijs en besteden veel tijd aan de motivatie van die ideeën, bijvoorbeeld door eerst een bewijsmethode te proberen die niet blijkt te werken, en die daarna zóaan te passen dat die wel werkt. Om de lezer vertrouwd te maken met de te gebruiken technieken behandelen de auteurs vaak eerst een speciaal geval voordat ze het algemene resultaat bewijzen. In veel gevallen wordt de lezer gevraagd door middel van 'challenges' zelf bepaalde bewijsschappen uit te werken.

Zoals gezegd beginnen de auteurs met Liouville's constructie van transcendente getallen. Daarna behandelen ze de stellingen van Hermite, Lindemann en Weierstrass over de transcendentie van e en π en over de algebraïsche onafhankelijkheid van $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_M}$ met algebraïsche exponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_M$. Daarna bewijzen ze de stelling van Gelfond-Schneider over de transcendentie van α^β waarbij α en β algebraïsche getallen zijn. Vervolgens behandelen ze Mahlers classificatie van transcendente getallen, waarin transcendente getallen in drie groepen worden verdeeld afhankelijk van hoe goed ze door algebraïsche getallen kunnen worden benaderd. Verder geven de auteurs een inleiding tot de

elliptische functies van Weierstrass, en bewijzen Schneiders resultaat dat de perioden van een Weierstrass elliptische functie $\wp$ transcendent zijn wanneer de coëfficiënten g_2 en g_3 van de differentiaalvergelijking $\wp' = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ algebraïsch zijn. In het laatste hoofdstuk van hun boek gaan de auteurs in op transcendentieresultaten over functielichamen van karakteristiek $p > 0$. Ze voeren de exponentiële functie van Carlitz $e_C(z)$ in, bewijzen enkele eigenschappen van deze functie, en geven een klein inkijkje in het werk van Drinfeld.

Het boek geeft een erg aardige inleiding tot de transcendentietheorie en lijkt me zeer geschikt voor een Master college of voor zelfstudie. Het enige wat naar mijn mening ontbreekt zijn literatuurverwijzingen naar meer geavanceerde resultaten voor diegenen die zich na het doorwerken van het boek verder in transcendentietheorie willen verdiepen. De eerste hoofdstukken van het boek zijn misschien wat langdradig, omdat de auteurs uitgebreid de tijd nemen om allerlei zaken uit de elementaire algebra te behandelen die bij de lezer kennelijk niet bekend worden verondersteld.

Jan-Hendrik Evertse



Harold Davenport

Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities

Cambridge Mathematical Library

Cambridge: Cambridge University Press, 2005

140 p., prijs £27,99

ISBN 0-521-60583-0

Harold Davenport (1907-1969) was een van de invloedrijkste getaltheoretici in de jaren vijftig en zestig van de vorige eeuw, door zijn onderzoeksresultaten, en zijn bestuurlijke en didactische kwaliteiten. Dat laatste blijkt uit leerlingen zoals Baker, Coates en Montgomery en uit ook nu nog populaire boeken zoals *The Higher Arithmetic* en *Multiplicative Number Theory*. Cambridge University Press heeft daarom besloten een college dat Davenport gegeven heeft als inleiding tot zijn eigen onderzoeksgebied als boek uit te geven. De 140 bladzijden lange tekst over de Hardy-Littlewood methode en haar toepassingen is praktisch onveranderd gepubliceerd.

In de 40 jaar na het schrijven van de tekst is op dit gebied veel vooruitgang geboekt, onder andere door Vaughan en Heath-Brown. Die latere ontwikkelingen worden in zeer lezenswaardige overzichten van elk vier bladzijden samengevat, voor Waring's probleem door Vaughan, voor de homogene polynoomvergelijkingen in veel variabelen door Heath-Brown, en voor de bijbehorende ongelijkheden door Freeman. Ze noemen ook enkele bewijzen in Davenport's boek die nu eenvoudiger behandeld kunnen worden. Met dit 'Voorwoord' is Davenport's boek nog steeds een uitstekende inleiding tot het vakgebied.

Het probleem van Waring (1770) stelt dat voor elke gehele $k > 1$ een s bestaat zódat elk positief getal de som is van s k -de machten van niet-negatieve gehele getallen. De bewering werd in 1909 door Hilbert bewezen. De kleinste bij k horende s is inmiddels bekend, en groeit exponentieel. De cruciale grootheid is echter de kleinste s als eindig veel uitzonderingen worden toegestaan, aangeduid met $G(k)$. Het belangrijkste resultaat in deze richting, Vinogradov's bovengrens $Ck \log k$ voor een constante C ,

wordt in dit boek bewezen.

Stel $F(x_1, \dots, x_n)$ is een homogeen polynoom van graad d met gehele coëfficiënten. Heeft de vergelijking $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ dan een niet-triviale oplossing in gehele getallen? Voor $d = 2$ wordt het antwoord gegeven door de stelling van Hasse-Minkowski. Een belangrijk deel van het boek is gewijd aan het geval $d = 3$ met als resultaat dat $n = 17$ voldoende is. In 1983 verkreeg Heath-Brown de voor $d = 3$ best mogelijke waarde $n = 10$. Als d even is, moet natuurlijk geëist worden dat niet alle coëfficiënten hetzelfde teken hebben. Een schatting voor de minimale n van Birch voor $d > 3$ en schattingen van Davenport en Heilbronn voor het aantal oplossingen van ongelijkheden van de vorm $|a_1 x_1^d + \dots + a_n x_n^d| < C$ worden in de laatste hoofdstukken bewezen.

Dit boek is een welkome inleiding in de Hardy-Littlewood methode en haar toepassingen.

Rob Tijdeman



D. Cvetkovic, P. Rowlinson and S. Simic
Spectral Generalizations of Line Graphs

London Mathematical Society Lecture Note Series, no. 314
Cambridge: Cambridge University Press, 2004
298 p., prijs £44.00
ISBN 0-521-83663-8

Beschouw een graaf G (ongericht, zonder lussen en meervoudige kanten). De lijngraaf $L(G)$ van G is de graaf met als knopen de kanten van G , waarin twee knopen verbonden zijn als de corresponderende kanten een knoop van G gemeen hebben. Lijngrafen hebben de eigenschap dat de kleinste eigenwaarde van de verbindingsmatrix tenminste -2 is. Andere grafen met alle eigenwaarden groter dan of gelijk aan -2 zijn de cocktailpartygrafen (volledige grafen waaruit de kanten van een perfecte matching zijn verwijderd) en de gegeneraliseerde lijngrafen (een gemeenschappelijke generalisatie van lijngrafen en cocktailpartygrafen).

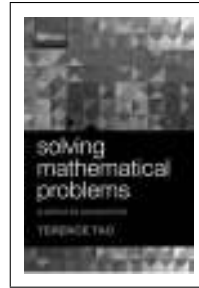
In 1976 publiceerden Cameron, Goethals, Seidel en Shult (*Journal of Algebra* 43, pp. 305–327) de stelling dat, op eindig veel uitzonderingen na, elke samenhangende graaf met kleinste eigenwaarde tenminste -2 van bovengenoemd type is. Het bewijs gebruikt niet-Euclidische meetkunde en wortelsystemen en het resultaat zegt in feite dat de uitzonderingen (exceptionele grafen genoemd) te vinden zijn in het wortelsysteem E_8 .

Sindsdien is er, voornamelijk door de schrijvers van dit boek, veel energie gestoken in het vinden van alle exceptionele grafen. Dit werk is rond de eeuwwisseling in zekere zin afgerond door het bepalen van alle maximale exceptionele grafen. Het boek bundelt alle hiervoor relevante resultaten. Het begint met oude resultaten over lijngrafen en gegeneraliseerde lijngrafen, behandelt het bovengenoemde bewijs van de hoofdstelling, introduceert de (relatief nieuwe) 'star-complement'-techniek, geeft hiermee een alternatief bewijs van de hoofdstelling, en een methode om alle maximale exceptionele grafen te vinden. In appendices staan onder andere lijsten van de 473 maximale exceptionele grafen, van de 187 exceptionele reguliere grafen en de 573 exceptionele grafen met kleinste eigenwaarde strikt groter dan -2 .

Het boek is zeer welkom voor specialisten in algebraïsche grafentheorie. Het is prettig geschreven, daarom ook toegankelijk voor degenen die zijdelings in het onderwerp geïnteresseerd zijn.

Het geeft bovendien een aardige kijk in de keuken van de spectrale grafentheorie.

Willem Haemers



Terence Tao
**Solving Mathematical Problems
A Personal Perspective**

Oxford: Oxford University Press, 2006
128 p., prijs £16.00
ISBN 978-0-19-920560-8

Terence Tao is een grote naam: winnaar van de Fields medal in 2006 en in 2007 nog in Nederland om samen met Ben Green de Ostrowski-prijs in ontvangst te nemen tijdens het NMC in Leiden. Wellicht minder bekend is dat hij als 14-jarig jochie al voor het eerst deelnam aan de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO). In '86, '87 en '88 behaalde hij daar achtereenvolgens een bronzen, zilveren en gouden medaille. Wie weet van welke toekomstige grote wiskundigen we zullen kunnen zeggen dat ze in 2011 hebben deelgenomen aan de IMO in Nederland?!

Op die jonge leeftijd schreef hij een boekje over 'problem solving' op wiskundeolympiadeniveau, dat recentelijk opnieuw is uitgekomen. In een zestal hoofdstukken neemt hij de lezer mee door het 'IMO-landschap', langs Euclidische meetkunde, combinatoriek, elementaire getaltheorie en algebra. De 26 problemen die daarbij de revue passeren, geven een goed beeld van de wiskunde die vandaag de dag op de IMO aan bod komt. Bovendien hebben de gepresenteerde uitwerkingen een duidelijke meerwaarde door de discussie die er steeds aan vooraf gaat, waarin hij uitgebreid ingaat op heuristieken en oplosstrategieën.

Er is helaas wel een groot aantal typo's in deze uitgave geslopen. Op blz. 7 moet 196 vervangen worden door 192 en moet $4d2$ juist $4d4$ zijn. Op blz. 9 blijkt 876 niet te werken, maar 376 gelukkig wel. Op blz. 53 staan de haakjes fout en op blz. 58 moet AB juist AC zijn. Een lijst van meer dan 50 typo's is te vinden op <http://olympiads.win.tue.nl/imo/books.html#Tao> (met dank aan Tom Verhoeff).

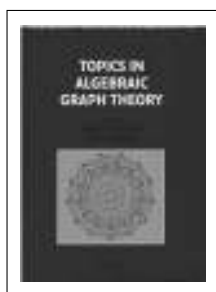
Is dit nu de nieuwe *How to solve it?* van Polya? Nee, Polya blijft op een veel elementairder wiskundig niveau hangen en is veel strikter in het indelen van het proces van probleemoplossen in zijn vier fases. Tao gaat alleen in het eerste hoofdstuk expliciet in op de verschillende onderdelen van Polya: het probleem begrijpen, de gegevens en het doel begrijpen, goede notatie invoeren, het probleem een beetje aanpassen, enzovoort. In de volgende hoofdstukken maakt hij die link steeds minder expliciet.

Volgens de flaptekst is het boek geschikt voor studenten en voor iedereen vanaf 14 jaar met een interesse voor zuivere wiskunde. Hier wil ik toch een kanttekening bij plaatsen. Iemand die de meeste basistechnieken beheerst en voor wie Heron, de rechte van Euler, de rechte van Simson/Wallace, de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz, of Ptolemaeus, modulorekenen, primitieve wortels enzovoort allemaal gesneden koek is, zal zich goed kunnen vermaken met dit boek en zich er goed door uitgedaagd voelen. Als je echter verwacht dat je genoemde gereedschappen wel en passant door het lezen van dit boek zult oppikken, kom je van een koude kermis thuis en zou het lezen van dit boek een frustratie

rende ervaring kunnen worden. Het boek gaat nergens in op de theorie; stellingen worden aangeroepen maar niet bewezen. Alleen op de core business van de problem solving wordt gefocust. Voor basistechnieken moet men zich dus eerst met andere literatuur scholen, bijvoorbeeld met Arthur Engels *Problem-Solving Strategies*.

Elk jaar organiseert de Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade een IMO-training voor de groep van 30 leerlingen die de voorrondes hebben gewonnen. Voornaamste doel is de kloof tussen middelbareschoolwiskunde en het IMO-niveau enigszins te dichten. Van deze 30 grote talenten plaatsen er zich uiteindelijk zes voor het Nederlandse team. Dit boekje is zeker geschikt voor hen die al tenminste één jaar aan deze training deelnemen. En voor wie goud op de IMO wil halen, nu of in 2011 in Nederland, moet dit boekje eigenlijk gewoon kinderspel zijn. Net als het was voor de jonge Terence Tao zelf!

Quintijn Puite



Lowell W. Beineke, Robin J. Wilson, Peter Cameron (eds.)

Topics in Algebraic Graph Theory

Encyclopedia of Mathematics and its Applications, no. 102

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

276 p., prijs £63.00

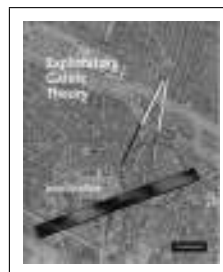
ISBN 0-521-80197-4

Tussen 1978 en 1988 verschenen de drie delen van *Selected Topics in Graph Theory*, samengesteld door Lowell Beineke en Robin Wilson. Het hier te bespreken boek is het eerste in een (geplande) serie 'topic'-boeken, waarvan elk deel een bepaald gebied binnen de grafentheorie zal bestrijken. Opgemerkt zij dat in de drie bovengenoemde delen al enkele hoofdstukken met algebraïsche grafentheorie voorkwamen, namelijk *Eigenvalues of graphs* door Schwenk en *Strongly regular graphs* door Cameron in deel 1, *Automorphism groups of graphs* door Cameron in deel 2, en *Isometric embeddings of graphs* door Graham in deel 3. Bij het te bespreken boek over algebraïsche grafentheorie hebben de samenstellers zich laten adviseren door Peter Cameron - een voor de hand liggende keuze. Zoals Cameron in zijn voorwoord schrijft, zijn er twee algebraïsche technieken die binnen de grafentheorie een rol spelen. Enerzijds is dat lineaire algebra, via bijvoorbeeld de bindingsmatrix van een graaf, en anderzijds is dat groepentheorie, via de automorfismen van een graaf. De eerste vier inhoudelijke hoofdstukken zijn echte lineaire algebra hoofdstukken (*Eigenvalues of graphs* door Doob, *Graphs and matrices* door Brualdi en Shader, *Spectral graph theory* door Cvetkovi en Rowlinson, en *Graph Laplacians* door Mohar), en de andere, met uitzondering van het hoofdstuk over sterk reguliere grafen, zijn echte groepentheorie hoofdstukken (*Automorphisms of graphs* door Cameron, *Cayley graphs* door Alspach, *Finite symmetric graphs* door Praeger, *Distance-transitive graphs* door Cohen, en *Computing with graphs and groups* door Soicher). In het uitzonderlijke hoofdstuk *Strongly regular graphs* door Cameron komen beide technieken samen.

Ondanks het mooie streven van de samenstellers om onderwerpen uit de algebraïsche grafentheorie samen te brengen, vind ik het resultaat teleurstellend. Het algehele gevoel dat ik krijg bij het doorbladeren en lezen van stukken uit dit boek is er één van gezapigheid. In meer dan één hoofdstuk worden uitgemol-

ken koeien uit de sloot gehaald, of betreft het marginale beweringen van stukken die elders verschenen zijn. Ik mis bij meerdere (maar zeker niet alle!) hoofdstukken recente resultaten, vragen, en problemen. Ik vrees dan ook dat dit boek niet vaak uit mijn boekenkast gehaald zal worden. Wellicht kan het dienen als basis voor cursussen algebraïsche grafentheorie, maar bij meerdere hoofdstukken zal de betreffende docent er dan wel een dikke schep bovenop moeten doen!

Edwin van Dam



John Swallow

Exploratory Galois Theory

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

208 p., prijs £22.99

ISBN 0-521-54499-8

In iedere goed onderhouden wiskundige bibliotheek zal men een redelijke hoeveelheid boeken over Galois theorie vinden, en het is in eerste instantie een vraag van smaak op welk concreet exemplaar de keuze van de lezer valt. Als er een nieuw boek over Galois theorie verschijnt, is het dan ook een voor de hand liggende vraag of dit een verrijking is die iets nieuws aan de verzameling boeken over het onderwerp toevoegt.

In zijn inleiding geeft de auteur van *Exploratory Galois Theory* aan, dat hij Galois theorie op een concrete manier wil ontwikkelen die toegankelijk is voor bachelorstudenten. In plaats van het meest elegante en efficiënte pad naar de hoofdstelling van de Galois theorie te bewandelen, kiest hij er daarom voor natuurlijke vragen over algebraïsche getallen en lichaamsuitbreidingen te benadrukken.

De indeling van het boek laat zien dat de beloofde aanpak inderdaad ook gevolgd wordt. Op de eerste 100 bladzijden (de helft van het boek) worden elementaire vragen over algebraïsche getallenlichamen behandeld. De eigenlijke Galois theorie beslaat dan de volgende 50 pagina's, waarbij veel aandacht besteed wordt aan het bepalen van Galois groepen met behulp van resolventen. De laatste 40 pagina's van het boek zijn gewijd aan een aantal klassieke onderwerpen, waaronder oplosbaarheid door radicalen, constructies met passer en liniaal, maar ook eindige lichamen.

Volgens de filosofie van het boek worden de benodigde algebraïsche begrippen zo concreet als mogelijk ingevoerd, in het bijzonder worden algebraïsche getallen als deelverzameling van de complexe getallen beschouwd. Alhoewel dit natuurlijk voor de aanschouwing behulpzaam is, leidt het opschuiven van een abstractere toegang (met getallenlichamen als quotiënten van veeltermringen) op een aantal plekken tot onnodig omslachtige bewijzen.

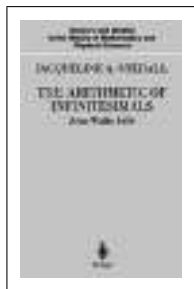
In een aparte sectie worden een aantal concrete algoritmen voorgesteld, die informatie over algebraïsche getallen berekenen, bijvoorbeeld minimumveeltermen en normaalvormen. Sommige van deze algoritmen zijn volledig triviaal, andere vereisen behoorlijk gevorderde methoden, zoals de factorisatie van veeltermen over willekeurige getallenlichamen. Omdat de algoritmen nauwelijks toegelicht worden, zijn het voor de beoogde lezer met weinig achtergrondkennis helaas niet meer dan black-box methoden die op geheimzinnige manier een resultaat produceren.

De eigenlijke Galois correspondentie wordt op een redelijk traditionele manier behandeld. Kleine problemen komen om de hoek kijken, omdat niet alle stellingen in de benodigde algemeenheid bewezen zijn. Deze gaten worden door verwijzingen naar de opgaven opgevuld.

Een groot deel van het hoofdstuk over de Galois correspondentie is gewijd aan het bepalen van Galois groepen met behulp van resolventen. Voor het geval van polynomen van graad 4 wordt expliciet een stelsel van resolventen aangegeven die de verschillende transitieve permutatiegroepen van graad 4 onderscheiden. Er wordt echter ook geconstateerd, dat het toepassen van de voorgestelde methode al voor graad 5 in sommige gevallen moeilijk wordt. Een opmerking over state-of-the-art technieken en hun bereik ontbreekt helaas volledig. Hierdoor wordt ten onrechte de indruk gewekt, dat het praktische nut van de Galois theorie erg beperkt is, terwijl met de moderne technieken het berekenen van Galois groepen tot graad 15 weinig problemen oplevert.

Samenvattend valt te zeggen, dat het ontwikkelen van de Galois theorie vanuit natuurlijke vragen over algebraïsche getallen op zich een goed plan is, maar dat de realisatie in het besproken boek niet helemaal geslaagd lijkt. Op veel punten had wat meer abstractie tot een overzichtelijkere presentatie van het materiaal kunnen leiden. De aangegeven concrete algoritmen zijn slechts van beperkt nut, omdat de onderliggende technieken niet voldoende toegelicht worden.

Bernd Souvignier



Jacqueline A. Stedall (ed.)
The Arithmetic of Infinitesimals
John Wallis 1656

Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences
New York: Springer Verlag, 2004
192 p., prijs €96,25
ISBN 0-387-20709-0

Sinds de publicatie van haar proefschrift *A Discourse Concerning Algebra: English Algebra to 1685* (OUP, 2003) heeft Jacqueline Stedall bepaald niet stil gezeten. Inmiddels zijn er behalve haar proefschrift nog diverse andere boeken met haar naam verkrijgbaar. Dit bespreken boek is een vertaling van John Wallis' *Arithmetica Universalis* van 1656. Voor de tekst zelf en alle wiskundige uitdrukkingen is moderne typografie gebruikt. De figuren en de tabellen zijn direct van Wallis overgenomen, ofschoon de tekst in de tabellen door een Engelse vertaling is vervangen. Zoals Stedall in haar inleiding competent uiteenzet (en ook in haar proefschrift valt na te lezen), speelde Wallis' werk een belangrijke rol bij de overgang van de wiskunde van Descartes en Fermat naar de 'moderne' wiskunde van Newton. Waarschijnlijk het meest bekende resultaat (en één van de hoogtepunten) in de tekst is het oneindige product van Wallis $\frac{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \dots}{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \dots}$ voor $\pi/4$. Deze verta-

ling maakt het de moderne lezer gemakkelijker zelf te volgen met welke hindernissen Wallis zich bij de afleiding van dit resultaat en andere resultaten geconfronteerd zag. Het boek is dan ook van harte aan te bevelen aan een ieder die in de geschiedenis van de 17de-eeuwse wiskunde geïnteresseerd is.

Eisso Atzema



Daniel Simson en Andrzej Skowronski
Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Vols. 2, 3

London Math. Soc. Student Texts 71/72
Cambridge: Cambridge University Press, 2007
308/456 p., prijs £27.99/£29.99
ISBN vol. 2: 0-521-54420-7; vol. 3: 0-521-70876-0

De delen 2 en 3 besluiten het voorliggende boekwerk onder review. Deel 1 is besproken in NAW 5/10, nr. 1 maart 2009. Ingaan op details is hier onmogelijk, maar laat vermeld zijn, dat het hele werk indrukwekkend genoemd mag worden.

In deel 2 treft men de theorie van buizen (tubes) aan, een volledige beschrijving van moduulcategorieën over algebra's van Euclidisch type, alsmede dito reguliere modulen, tubes, Auslander-Reiten quivers, onontbindbare modulen en tubes over hereditaire algebra's van Euclidisch type. Als middelen om dit alles te beschrijven worden tilting theorie, gehele kwadratische vormen en meetkunde van tubes gebruikt. Deel 2 besluit met minimale representatie-oneindige algebra's. Het heeft 284 referenties in de literatuurlijst, qua publicatiedata voor het overgrote deel na 1980. Iets dergelijks zien we in deel 3, maar daar betreft het wel 703 referenties!

Wat er in deel 3 te vinden is? Wel, mooie dingen als tubulaire uitbreidingen van algebra's, vertakkingsalgebra's, tilted algebra's al dan niet van zogeheten wild type. Het laatste hoofdstuk gaat over de richting van toekomstig onderzoek en er is een sectie die betrekking heeft op onderwerpen uit alle drie de delen.

De totale hoeveelheid bladzijden in de drie delen bedraagt 1222. De tekst bevat overal een grote hoeveelheid voorbeelden; aan het eind van elk hoofdstuk staan veel opgaven vermeld. Bewijzen van stellingen worden in detail gepresenteerd. Als zodanig is het gehele werk geschikt voor seminars en colleges. Of het ook voor zelfstudie geschikt is, zoals op de achterflappen der drie delen staat? Misschien wel, maar dan moet men wel over veel tijd beschikken en een bron van permanente inkomsten hebben.

De conclusie van dit alles is, na gesprekken door de reviewer met enkele experts, dat het hier een standwerk van zeer hoge orde betreft, dat in geen enkele wiskundebibliotheek mag ontbreken.

Robert van der Waall

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is September 1, 2009.

Problem A (folklore)

In how many ways can one place coins on an $n \times n$ chessboard such that for every square the number of (horizontally or vertically) adjacent squares that contain a coin is odd?

Problem B (folklore)

A magic $n \times n$ matrix of order r is an $n \times n$ matrix whose entries are non-negative integers and whose row and column sums all equal r . Let $r > 0$ be an integer. Show that a magic $n \times n$ matrix of order r is the sum of r magic $n \times n$ matrices of order 1.

Problem C (proposed by Tejaswi Navilarekallu)

Find all finite groups G with the following property: for each $g, h \in G$ at least one of the pairs (g, h) , (g, gh) , and (h, hg) is a pair of conjugate elements.

Edition 2008-3 We received submissions from Marco Pauw (London), Rob van der Waall (Huizen), Paolo Perfetti (Rome), Sep Thijssen (Nijmegen), Pieter de Groen (Brussels), Ronald Rietman (Eindhoven), Ludo Tolhuizen (Eindhoven), John Simons (Roden), Sander Scholtus (Den Haag), Kee-Wai Lau (Hong Kong), Jaap Spies, Thijmen Krebs (Delft).

In the last issue we forgot to mention Thijmen Krebs' and John Simons' correct solutions to problem 2008-3/A, Sep Thijssen's correct solution to problem 2008-3/B, and the fact that Rob van der Waall's solution to problem 2008-3/A was co-authored with Alexa van der Waall and Nils Bruin.

Problem 2008-4/A (folklore) If x is a real number then we denote by $\lfloor x \rfloor$ and $\lceil x \rceil$ the largest integer smaller than or equal to x and the smallest integer bigger than or equal to x , respectively. Prove or disprove: for all positive integers n we have

$$\left\lceil \frac{2}{2^{1/n} - 1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n}{\log(2)} \right\rfloor.$$

Solution This problem was solved by Sep Thijssen and by Ronald Rietman & Ludo Tolhuizen. Both found the counterexample

$$n = 777451915729368$$

and used the following method to find this n . For large n the difference

$$\frac{2n}{\log(2)} - \frac{2}{2^{1/n} - 1}$$

is very close to 1, so that a counterexample must necessarily have $2n/\log(2)$ very close to an integer, say m . In particular, the rational number m/n must be a good approximation to $2/\log(2)$. One can use the continued fraction expansion of $2/\log(2)$ to find

Redactie:

Lenny Taelman, Ronald van Luijk

Redactieadres:

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

rational numbers that are good approximations of $2/\log(2)$. The 36-th convergent has 777451915729368 as denominator and yields the above counterexample.

Problem 2008-4/B (folklore) Let (a_i) be a sequence of positive real numbers such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

for some real number a . Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n}{n^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Solution This problem was solved by Ludo Tolhuizen, Rob van der Waall, Pieter de Groen, John Simons, Marco Pauw, Paolo Perfetti, Sep Thijssen, Sander Scholtus, Kee-Wai Lau, Jaap Spies, and Thijmen Krebs.

The following solution is based on several of the submissions.

Put $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Since we have

$$\frac{a_n}{n} = \frac{s_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{s_{n-1}}{n-1}$$

and since both terms of the right-hand side tend to a , we find $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/n = 0$. We claim that in fact

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{i \leq n} a_i}{n} = 0.$$

If the sequence (a_i) is bounded, this is obvious. If it is not, then for every n we choose $j(n) \leq n$ such that $a_{j(n)} = \max_{i \leq n} a_i$; clearly we have

$$\frac{\max_{i \leq n} a_i}{n} \leq \frac{a_{j(n)}}{j(n)}$$

and the right-hand side tends to zero because the index $j(n)$ tends to infinity, while a_j/j tends to zero when j goes to infinity.

For all n we have

$$\frac{s_n^2}{n^2} - 2 \cdot \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n}{n^2} = \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n^2} \leq \frac{\max_{i \leq n} a_i}{n} \cdot \frac{s_n}{n}.$$

The first factor of the right-hand side tends to 0 while the second factor tends to a , so the product tends to 0. We conclude that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Problem 2008-4/C (proposed by Hendrik Lenstra) Let x be a real number, and m and n positive integers. Show that there exist polynomials f and g in two variables and with integer coefficients, such that

$$x = \frac{f(x^n, (1-x)^m)}{g(x^n, (1-x)^m)}.$$

Solution Unfortunately we received no submissions. The following is the proposer's solution.

The existence of the requested polynomials f and g is equivalent with the fact that x is contained in the field $K = \mathbf{Q}(x^n, (1-x)^m)$. Suppose x is not contained in K and let F be the minimal polynomial of x over K . Then F has a root $y \in \mathbf{C}$ with $y \neq x$. Every polynomial with coefficients in K of which x is a root, is a multiple of F , and therefore also has y as a root. Applying this to the polynomials $(1-T)^m - (1-x)^m$ and $T^n - x^n$, we find $(1-y)^m = (1-x)^m$ and $y^n = x^n$, from which we conclude $|y-1| = |x-1|$ and $|y| = |x|$. The circles in $\mathbf{C}$ centered at 1 and 0 with radii $|x-1|$ and $|x|$ intersect in two conjugate points or a unique real point, if the circles intersect at all. Since y and the real number x are intersection points, we find $y = x$, which is a contradiction from which we conclude $x \in K$.

