

Inhoud | Contents

- 2 Colofon
- 3 Redactioneel *Wil Schilders*
- 4 Agenda
- 6 Nieuws
- 10 Ander weer op til *Henk Broer*
- 12 Van het KWG

Oratie | Inaugural lecture

-
- 22 Oneindige dimensies *Jan van Neerven*

Onderzoek | Research

-
- 33 De continuümhypothese *Klaas Pieter Hart*
 - 58 Wiskunde en modellen voor financial weapons of mass destruction *Wim Schoutens*

Onderwijs | Education

-
- 9 Klasseposter 'wiskunde in perspectief' *Charlotte Vlek*
 - 29 Twee bewogen jaren *Jan van de Craats*
 - 48 Terug naar de werkelijkheid *Klaas Landsman*

Samenleving | Society

-
- 42 Wiskundige verpoelingen *Wieb Bosma*
 - 52 Kansen in het recht *Johan Wolswinkel*

Boeken | Books

-
- 40 Waardig gezelschap aan de koffietafel *Gunther Cornelissen*
 - 67 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

-
- 51 De favoriet van Hendrik Lenstra *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
 - 62 De derde wet *Ferdinand Verhulst*
 - 64 In de verdediging: rubriek voor proefschriften *Geertje Hek*
 - 70 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
naw@math.leidenuniv.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)
Judi Romijn (judi@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (c.c.c.j.kalle@uu.nl)
Nellie Verhoef (n.c.verhoef@gw.utwente.nl)

Bureau redactie

Floris Olsthoorn, Harm de Vries

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.), Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TU/e), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Ronald van Luijk (UL), Hans Sterk (TU/e), Lenny Taelman (UL), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementensperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members. A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105. Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Gert Vegter (RUG, ondervoorzitter), Rob van der Mei (CWI en VU, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Iris van Gulik - Gulikers (SLO), Klaas Pieter Hart (TUD), Arjen Sevenster, Herman te Riele (CWI)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
2	08-06-2009	–
3	07-09-2009	27-04-2009
4	07-12-2009	27-07-2009
1	08-03-2010	26-11-2009

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

De Brownse beweging, een stochastisch proces dat toevallige bewegingen beschrijft, blijkt geschikt om ruis te modelleren in partiële differentiaalvergelijkingen. Lees de oratie van Jan van Neerven op pagina 22.

Math Inside

In het vorige nummer zal U zeker de mooie stoomlocomotief zijn opgevallen bij een verslag van het symposium over de Toekomst van de Wiskunde. Het plaatje laat veel fantasie over aan de lezer, en men kan slechts bevroeden wat de eindredacteur heeft geïnspireerd tot het kiezen van juist deze illustratie. Eén ding is zeker, de titel van het artikel wordt er door versterkt: ambities en mogelijkheden. In dit geval van wiskunde, toegespitst op de Nederlandse situatie. Inmiddels is het Masterplan Toekomst Wiskunde gereed [1], en aangeboden aan het ministerie van OCW.

Besteedden we in het decembern timer vooral aandacht aan het wiskundig onderzoek, in dit nummer richten we ons ook op de onderwijsparagrafen welke een uitermate belangrijk onderdeel vormen van het Masterplan. Het artikel van de hand van Klaas Landsman, lid van de werkgroep, licht de conclusies, maatregelen en aanbevelingen op dit punt toe.

Een eveneens belangrijk aandachtspunt is de valorisatie van wiskunde in Nederland. Het Masterplan citeert hier voormalig president Edward E. David van Exxon: "Too few people recognize that the high technology so celebrated today is essentially a mathematical technology." Om meer mensen hiervan bewust te maken, stelt de werkgroep voor om een Transferpunt Wiskunde & Innovatie op te richten. Dit TWI dient de wisselwerking tussen de onderzoekswiskunde enerzijds, en het bedrijfsleven en de maatschappij anderzijds, te coördineren. Men denkt hierbij onder andere aan tijdelijke en deeltijdaanstellingen tussen de academische wereld en het bedrijfsleven.

Overigens is het wel interessant dat het Masterplan juist de uitspraak van David citeert. Deze stamt namelijk uit 1986! Je kunt je dan afvragen: heeft er sindsdien geen enkele directeur meer gerept over het belang van wiskunde? Als dit laatste het geval is, dan moeten we ons toch eens achter de oren krabben!

Toevallig of niet (dat laat ik graag over aan onze stochastische lezers), tegelijk met het Masterplan verstuurd door NWO, ontving ik van STW het boekje over de Simon Stevin Gezel 2008. De inleiding door Eppo Bruins, directeur van de Technologiestricting STW, is getiteld 'Kenni s van het kunnen'. Een citaat: "Wat is valorisatie eigenlijk? Kennisbenutting zegt de een, maatschappelijke relevantie zegt de ander, het creëren van waarde uit kennis zegt de derde. Laten we stoppen met erover te praten en het gewoon gaan doen." Bruins slaat hier de spijker op zijn kop. Valorisatie is inderdaad vooral doen, en een van de meest succesvolle vormen is het opleiden van talentvolle jonge mensen die hun

steentje bijdragen aan de kenniseconomie.

Valorisatie van wiskunde is echter geen exclusief Nederlands aandachtspunt. Op Europees niveau zijn de laatste jaren behoorlijk wat initiatieven ontplooid en studies uitgevoerd teneinde juist het punt van 'Mathematics and Industry' aan te spreken. MACSI-net kwam in 2004 met haar eindrapport [2], het OECD Global Science Forum produceerde medio 2008 een rapport, en binnenkort start een door de European Science Foundation en de toegepaste wiskunde divisie van de European Mathematical Society geïnitieerd 'Forward Look' project, precies op het thema 'Mathematics in Industry'. Daarnaast zijn er organisaties die zich bezighouden met valorisatie, zoals het European Research Consortium for Informatics and Mathematics (ERCIM), en het European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI). Vooral ECMI heeft meer dan twintig jaar ervaring in valorisatie middels onder andere Studygroups with Industry en Modeling Weeks. Vandaar dat juist uit ECMI een aantal instituten is voortgekomen die zich bezighouden met valorisatie van wiskunde, zoals het Radon Instituut in Linz, het Fraunhofer Instituut ITWM in Kaiserslautern en LIME in Eindhoven.

Al deze onderzoeken en initiatieven zullen zeker bijdragen aan het maatschappelijk besef omtrent het belang van wiskunde. Net zoals het bedrijf Intel ons voortdurend doordringt van hun belangrijke bijdrage, zou het ook gerechtvaardigd zijn om op veel producten een stickertje 'Math Inside' te plakken. Deze slogan wordt treffend geïllustreerd door een boekje met precies deze titel dat recent is uitgegeven bij LIME in Eindhoven [3], en dat een groot aantal voorbeelden bevat van verrassende wiskundetoepassingen. Het belang van wiskunde voor bedrijfsleven en maatschappij neemt alleen maar toe. Aan ons, wiskundigen, de taak om een meer actieve houding aan te nemen teneinde dit belang ook daadwerkelijk aan te tonen. Is dit nodig? Zeker, zoals ook wordt beargumenteerd in het verhaal van Wim Schoutens in dit nummer aangaande de oorzaken van de kredietcrisis. Inzichten van wiskundigen worden vaak genegeerd, en het wordt tijd dat we onze stem eens wat krachtiger laten horen!

Wil Schilders, hoofdredacteur

NXP Semiconductors en TU Eindhoven

Referenties

1. http://www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA_7M9GUF
2. <http://www.macsinet.org/aboutus.htm>
3. <http://www.lime.tue.nl>

Agenda

Upcoming Events

maart 2009

4 maart – 22 april 2009

□ Vermoedens in de Wiskunde

Vanaf 4 maart geeft Frans Oort een reeks van acht wekelijkse lezingen over vermoedens in de wiskunde. Deze cursus wordt georganiseerd door de HOVO (Hoger Onderwijs voor Ouderen).

plaats Minnaertgebouw, Universiteit Utrecht

info www.hovoutrecht.nl/cursus.php?id=200853

10 maart 2009

□ Hoe rekent Nederland?

Oratie van Marja van den Heuvel-Panhuizen

plaats Academiegebouw, Universiteit Utrecht

info <http://www.uu.nl/NL/faculteiten/betawetenschappen/Actueel/agenda/Pages/Didaktiekvanhetwiskundeonderwijs.aspx>

11 maart 2009

□ Ageing: from trap models to spin glasses

De eerste in een reeks lezingen van Anton Bovier. De andere twee lezingen zijn op 17 en 20 maart

plaats Eurandom, Eindhoven

info http://www.eurandom.nl/abstracts_seminars/2009tot.htm

12 – 13 maart 2009

□ Nationale Rekendagen

Tweedaagse conferentie over het rekenonderwijs op de basisschool

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

13 maart 2009

□ DIAMANT seminar day

Een dag met lezingen over 'Applications of semi-definite programming'

plaats CWI, Amsterdam

info homepages.cwi.nl/~vallenti/DIAMANT2009

17 maart 2009

□ Mastercourse: Forensische statistiek

Nascholingscursus voor vwo-docenten wiskunde over de wiskundige definitie van het begrip bewijskracht in het strafrecht

plaats Van der Waals-Zeeman Inst., Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses/cursus-aanbod.cfm

20 maart 2009

□ Kangoeroewedstrijd

Internationale reken- en wiskundewedstrijd voor leerlingen tussen de acht en achttien jaar

plaats Deelnemende scholen

info www.math.ru.nl/kangoeroe

23 – 28 maart 2009

□ YEP VI

Zesde editie van de Young European Probabilists workshops met als titel 'Fragmentation, coalescence and probabilistic genetics'

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/workshops/2009/YepV1.htm

24 maart 2009

□ Lezing over L.E.J. Brouwer

Een lezing door Dirk van Dalen over leven en werk van L.E.J. Brouwer. De lezing vindt plaats in het kader van de HOVO

plaats Academiegebouw, Rijksuniv. Groningen

info www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

25 maart 2009

□ Afscheidssymposium van Henk Tijms

Symposium ter gelegenheid van het afscheid van Henk Tijms met als titel 'Besliskunde: realistisch rekenen?'

plaats Auditorium, Vrije Universiteit Amsterdam

info www.feweb.vu.nl/link.asp?itemnumber=14369

april 2009

8 april 2009

□ Grote Rekendag 2009

Voor de zevende keer zijn basisscholen op een speciale manier met rekenen en wiskunde bezig

plaats Deelnemende scholen

info www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag

14 – 15 april 2009

□ Nederlands Mathematisch Congres

Onder auspiciën van het Koninklijk Wiskundig Genootschap vindt het 45ste Nederlands Mathematisch Congres plaats in Groningen

plaats Rijksuniversiteit Groningen

info www.rug.nl/wiskunde/nmc2009

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

14 – 17 april 2009

☐ **Stieltjes Onderwijsweek**

Een aantal minicursussen onder de gemeenschappelijke titel 'Counting Points in Varieties'

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl/lc/web/2009/335/info.php3?wsid=335

20 – 24 april 2009

☐ **European Study Group with Industry**

Studiegroep waarin wiskundigen werken aan mathematische problemen uit de industrie

plaats University of Coimbra, Portugal

info www.mat.uc.pt/esgi69

20 april – 8 mei 2009

☐ **Lipschitz Lectures**

Reeks lezingen door Mark Peletier, getiteld 'Variational methods for the analysis of patterns'

plaats Bonn

info www.hausdorff-center.uni-bonn.de/event/2009/lipschitz-peletier

21 april 2009

☐ **NWO-Talent Class**

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

23 april 2009

☐ **Analytische meetkunde**

Eerste dag van de cursus in het kader van wiskunde D. De andere dagen zijn 7 mei en 28 mei.

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl

mei 2009

10 – 15 mei 2009

☐ **ICMI Study 19**

Internationale conferentie over bewijzen in wiskundeonderwijs

plaats Taipei, Taiwan

info jps.library.utoronto.ca/ocs-2.0.0-1/index.php/icmi

11 – 13 mei 2009

☐ **Climate Change and Extreme Value Theory**

Workshop over statistiek van extreme waarden in de context van klimaatveranderingen

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/workshops/2009/climate_main.htm

16 mei 2009

☐ **HKRWO-symposium**

Symposium van de Historische kring reken- en wiskundeonderwijs met als titel 'Top of Flop'

plaats Domstad Hogeschool, Utrecht

info www.fi.uu.nl/hkrwo

19 mei 2009

☐ **NWO-Talent Class**

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

27 – 29 mei 2009

☐ **DIAMANT/EIDMA Symposium**

Symposium ter ere van de 60ste verjaardag van Arjeh Cohen

plaats De Kapellerput, Heeze

info websites.math.leidenuniv.nl/diamant

juni 2009

8 – 10 juni 2009

☐ **Parameter Estimation for Dynamical Systems**

Workshop over het schatten van parameters van ODE's

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/workshops/2009/PEDS_main.htm

15 – 17 juni 2009

☐ **Academy Colloquium Immersed Boundary Methods**

Colloquium gericht op zowel de gebruikers als de ontwikkelaars van IBM's

plaats Bremen, Duitsland

info www.ahd.tudelft.nl/academy

15 – 19 juni 2009

☐ **The analytic theory of automorphic forms**

Internationale conferentie ter ere van de 65ste verjaardag van Roelof Bruggeman

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info www.math.uu.nl/rb65.html

16 juni 2009

☐ **NWO-Talent Class**

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

juli – augustus 2009

10 – 22 juli 2009

☐ **50ste Internationale Wiskunde Olympiade**

Editie 2009 van het wereldkampioenschap wiskundecompetitie voor middelbare scholieren

plaats Bremen, Duitsland

info www.imo2009.de

15 – 17 juli 2009

☐ **Lévy processes: applications to finance**

Vierde in een serie workshops over Lévy processen met als titel 'Statistical Inference for Lévy Processes with Applications to Finance'

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.nl/workshops/2009/Lévy-Processes_main.htm

20 – 24 juli 2009

☐ **27th European Meeting of Statisticians**

Europese bijeenkomst van statistici en stochastici

plaats Univ. Paul Sabatier, Toulouse, Frankrijk

info <http://www.math.univ-toulouse.fr/EMS2009/4-17613-EMS2009.php>

17 – 28 augustus 2009

☐ **Utrecht Summer School in Mathematics**

De Utrecht Summer School in Mathematics heeft dit jaar als titel 'Dynamical Systems and their Applications'

plaats Universiteit Utrecht

info www.science.uu.nl/summerschools/usms

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgevoerde activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

In zak en tas

In het Universiteitsmuseum van de Universiteit Utrecht is begin december de tentoonstelling 'Boeiende bagage' geopend. Hier worden alledaagse voorwerpen die zich in je tas kunnen bevinden, zoals een banaan/bril/mobiele telefoon, gekoppeld aan wetenschappelijk onderzoek.

Op de tentoonstelling is onder andere werk te zien van Tammo Jan Dijkema, promovendus wiskunde aan de Universiteit Utrecht. Zijn voorwerp was de mobiele telefoon en zijn onderzoek gaat over wavelets. Wavelets worden onder andere gebruikt voor datacompressie, bijvoorbeeld om foto's die gemaakt zijn met de camera van je mobiele telefoon kleiner te maken, zodat er meer foto's kunnen worden opgeslagen.

Het doel van de tentoonstelling is om te laten zien dat wetenschap niet zo ver van ons af staat als de meeste mensen denken. Wetenschap is overal te vinden, zelfs in je eigen tas, en is dus voor iedereen. De tentoonstelling duurt nog tot 2015. Op de www.vk.tv van De Volkskrant is een filmpje te zien over de tentoonstelling.

Bron: www.science.uu.nl/betanieuws

Computerproof

Er wordt hard gewerkt aan het verbeteren en uitbreiden van de functie die de computer heeft in het bewijzen van wiskundige stellingen. De manier waarop de computer het bewijzen aanpakt is gebaseerd op de notie van formeel bewijs. Dit is een bewijs waarbij iedere logische stap volledig wordt teruggevoerd op axioma's. De American Mathematical Society heeft het decembernummer gewijd aan formele bewijzen.

Een computer kan zelf alleen eenvoudige bewijzen maken, maar is wel in staat om veel ingewikkeldere formele bewijzen te controleren. Het enige wat daarvoor nodig is, is dat het bewijs in de juiste syntax is opgeschreven. Het moet een formeel bewijs zijn. Meestal leveren wiskundigen hun bewijzen niet aan in deze formele vorm. Ze proberen er vaak een enigszins leesbaar verhaal van te maken door te verwijzen naar resultaten van anderen en door details of simpele bewijzen weg te laten. Het is dan aan andere wiskundigen, bijvoorbeeld tijdens informele discussies, voordrachten of tijdens het beoordelen van een artikel voor een tijdschrift, om de bewijzen te controleren. Dit is helaas geen waterdicht proces en er zijn gevallen bekend waarin het een lange tijd duurde voordat een fout in een bewijs werd opgemerkt. Dan zijn er nog bewijzen die veel computercode bevatten, bijvoorbeeld voor het doorrekenen van een groot aantal verschillende gevallen. Al deze code controleren kost veel tijd en bovendien zijn er vaak maar weinig mensen die dat kunnen. Om deze problemen het hoofd te bieden wordt gewerkt aan een formele bewijstheorie.

In het decembernummer van de *Notices of the American Mathematical Society* zijn vier artikelen verschenen over formele bewijzen. Een van deze artikelen is van Freek Wiedijk van de Radboud Universiteit in Nijmegen. De artikelen bespreken de nieuwste ontwikkelingen op het gebied en geven ook praktische aanwijzingen voor het gebruik van de computer bij het controleren van bewijzen.

Bron: www.ams.org

Liever lui dan moe

In december wijdde de New York Times in de serie 'Year in Ideas' een stukje aan een resultaat van drie wiskundestudenten van Harvard University en Cal Tech, Scott Kominers, Justin Chen en Robert Sinnott. Ze hadden eerder vorig jaar een drie pagina's tellend artikel geschreven over een vraag die veel mensen wel eens bezigt houdt: Wat is sneller,

blijven wachten op de bus of gaan lopen?

Met gebruikmaking van een klein beetje kansrekening en speltheorie kwamen ze tot de conclusie dat de luie oplossing de beste is. Het is bijna altijd beter om op de bus te blijven wachten. Verder merkten ze op dat het helemaal geen zin heeft om te gaan lopen en dan vervolgens bij de volgende halte op de bus te stappen. De totale reistijd wordt daar immers niet korter van. Je moet alleen gaan lopen als je ook verwacht sneller aan te komen door het hele stuk te lopen.

De tevredenheid van de auteurs blijkt uit de titel: 'Walk versus Wait: The Lazy Mathematician Wins'.

Bron: www.nytimes.com

Een Pittig bedrag

In november 2008 werd er voor het eerst een chocoladeletter met een wiskundig tintje verkocht: de chocolade π . Binnen enkele weken was de voorraad op, maar inmiddels is de ChocoPI weer in productie.

Hans Wisbrun kwam in 2005 op het idee van de ChocoPI tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren (NVvW). Drie jaar later waren de ChocoPI's voor het eerst te koop tijdens de jaarvergadering van de NVvW en gingen als zoete broodjes over de toonbank. Het laatste exemplaar werd door Wisbrun per opbod verkocht via Marktplaats.nl en dat leverde uiteindelijk 314,15 euro op. Dit bedrag zal gaan naar het WereldWiskundeFonds van de NVvW, een fonds dat wiskundeonderwijs in de derde wereld ondersteunt.

Ter gelegenheid van de internationale Pi-dag (zaterdag 14 maart 2009) heeft Wisbrun nu een prijsvraag uitgeschreven in de vorm van een fotowedstrijd.

Bron: chocopi.blogspot.com, pi-dag.blogspot.com

Held van 2008

Jan van de Craats is door Marc Chavannes van het NRC Handelsblad uitgeroepen tot held van 2008, omdat hij vrijwel eigenhandig de kwaliteit van het rekenonderwijs onder de aandacht heeft gebracht.

In een uitzending van nrc.tv op 29 december werd aan drie columnisten gevraagd in dertig seconden te vertellen wie hun held en antiheld van 2008 zijn. Marc Chavannes noemt hier van de Craats als held. Volgens Chavannes dwingt de Nederlandse staat de scholen om de lessen zo in te richten dat de nadruk meer ligt op hoe leuk de lesstof is dan op het goed bijbrengen van deze lesstof. Dit speelt volgens hem vooral bij het rekenonderwijs. Hij vertelt dat van de Craats hiertegen optreedt, onder andere door het schrijven van een nieuw lesboek en met de oprichting van zijn stichting Beter Rekenen.

Chavannes noemt de huidige situatie rampzalig. Volgens hem zijn we in Nederland aan het verdommen en moeten de staatsecretaris en minister toegeven dat er een probleem is.

Bron: nrc.tv

De druppel die over de emmer loopt

John Bush, hoogleraar wiskunde aan MIT, en Tristan Gilet, student natuurkunde aan de Universit  de Liège, hebben een bijzonder simpel voorbeeld gevonden van een chaotisch dynamisch systeem. Ze lieten een kleine druppel stuiteren op een zeepvlies, dat aan het trillen werd gehouden met een goedkope luidspreker.

De twee werden voor hun onderzoek geïnspireerd door recente experimenten met druppels die stuiterden op vloeistofbaden. In één van die experimenten was een druppel te zien die over een oliebad rolde. Degenen die deze experimenten uitvoerden waren echter niet in staat om de dynamica erachter te omschrijven, omdat dat veel te ingewik-

keld was. Er moest rekening gehouden worden met stromingen in het bad, in de druppel en in de tussenliggende luchtlaag.

Bush en Gilet besloten het simpeler aan te pakken en het vloeistofbad te vervangen door een zeepvlies. Ze vonden dat het stuitergedrag van de druppel zeer precies te omschrijven was met een enkele tweede orde differentiaalvergelijking. De manier waarop de druppel stuiter hangt af van de amplitude en de frequentie van de trilling van het vlies. Bij een lage amplitude is deze periode gelijk aan die van het vlies. Als de amplitude wordt opgevoerd, verdubbelt de stuiterperiode eerst, verviervoudigt vervolgens en uiteindelijk belandt het systeem in een chaotische toestand. Dit verschijnsel heet de *period doubling cascade*. In het chaotische systeem zorgen kleine onnauwkeurigheden in de begintoestand voor grote verschillen in het uiteindelijke stuitergedrag van de druppel. De differentiaalvergelijking die Bush en Gilet hadden gevonden, verklaart ook dit gedrag.

De resultaten van Bush en Gilet zijn onlangs verschenen in de *Physical Review Letters*.

Bron: www.sciam.com

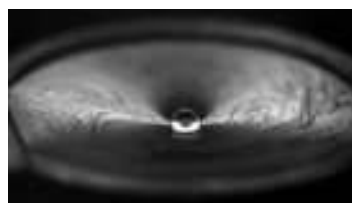


foto: John Bush en Tristan Gilet

Een druppel op een zeepvlies

Interneppen

Met gebundelde krachten hebben onderzoekers van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) te Amsterdam, de Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) in Zwitserland en de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) recentelijk laten zien dat het goed mis is met de beveiliging van dataverkeer over het internet.

Het gaat hierbij om dataverkeer via websites die beveiligd zijn met een digitaal certificaat. Zo'n certificaat wordt uitgegeven door een vertrouwde Certificate Authority (CA). De webbrowser van degene die zo'n beveiligde site bezoekt, controleert de echtheid van het certificaat door de digitale handtekening ervan te bekijken met behulp van standaard cryptografische algoritmen. De onderzoekers van het CWI, de EPFL en de TU/e hebben nu aangetoond dat het MD5 algoritme, dat nog steeds door enkele van de CA's gebuikt wordt, vatbaar is voor misbruik. Ze hebben zo het bestaande systeem met CA's gekraakt.

Voortbouwend op resultaten uit 2004 (uit China) en 2007 (van henzelf) en gebruikmakend van geavanceerde wiskunde en tweehonderd Playstation 3 spelcomputers zijn ze nu in staat om een fictieve CA te maken, die door de belangrijkste webbrowsers voor echt wordt aangezien. Als gevolg hiervan kan een nietsvermoedende internetgebruiker naar een onbetrouwbare website geleid worden, die een exacte kopie is van de website van bijvoorbeeld zijn bank, terwijl zijn webbrowser niet in staat is te achterhalen dat het om een kopie gaat. Zo kunnen wachtwoorden en andere persoonlijke gegevens heel makkelijk in verkeerde handen vallen.

Volgens de onderzoekers is het onverantwoord om MD5 te blijven gebruiken als cryptografisch algoritme.

Bron: www.cwi.nl

Een hoge lat

Op 1 december heeft IJzebrand Schuitema de prestigieuze Duitse

Wolfgang-Paul-Medaille ontvangen voor zijn verzameling rekenlinialen.

Schuitema kocht zijn eerste rekenlineaal in 1983 op een rommelmarkt. Het idee was aanvankelijk om deze weer met winst te verkopen, maar de aanschaf had zijn interesse gewekt en hij verdiepte zich in de geschiedenis van de rekenlinialen. Toen hij drie jaar later met pensioen ging, reisde hij heel Europa door om bedrijven te bezoeken die ooit rekenlinialen geproduceerd hadden. Zijn collectie groeide en bevat nu naast 3300 linealen ook 800 handleidingen, 80 boeken, 230 octrooien en andere voorwerpen die met de productie van de linealen te maken hebben. Zelf schreef Schuitema drie boeken en diverse artikelen over het onderwerp.

De hele collectie rekenlinialen is inmiddels verplaatst naar het Arithmeum, een museum voor rekenkunde dat onderdeel is van de Universiteit Bonn.

Bron: *spitsnieuws.nl*

Poort naar de zee

Nico Laan heeft de Lustrumprijsvraag 2008 gewonnen die de stichting *Ars et Mathesis* uitgeschreven had ter gelegenheid van haar 25-jarige bestaan. Deelnemers aan de prijsvraag moesten een anamorfose insturen, oftewel een vervormde afbeelding, die er slechts vanuit één gezichtspunt realistisch uitziet. Laan maakte een anamorfose in de vorm van een poort getekend op het Noordzeestrand en heeft zijn werk dan ook 'Poort naar de zee' genoemd.

De inzending van Laan was op een aantal punten verrassend. Ten eerste was de locatie en daarmee het gebruikte materiaal ongewoon. Laan had zijn anamorfose gemaakt door geulen te graven in het zand. Ten tweede was de grootte van het kunstwerk bijzonder. De poort van Laan beslaat ongeveer een half voetbalveld. Dit had tot gevolg dat het fototoestel met een vlieger opgelaten moest worden om de poort vanuit de juiste stand te kunnen fotograferen. Deze juiste stand bevond zich 18,75 meter boven de grond. Om de verhoudingen te doen kloppen, moest de exacte plaats van de lijnen berekend worden. Op de foto wordt de grootte van de poort benadrukt door de aanwezigheid van het paard dat langs de waterlijn rent.

De stichting *Ars et Mathesis* bestaat sinds 1983 en heeft tot doel de belangstelling te bevorderen voor kunst die zijn inspiratie vindt in de wiskunde. Daartoe worden ieder jaar een ontmoetingsdag en diverse excursies georganiseerd.

Bron: *www.arsetmathesis.nl*



Foto: Ars et Mathesis

'Poort naar de zee' van Nico Laan

Wiskunde werkt

Begin januari verscheen er een ranglijst van beste tot slechtste baan in de Verenigde Staten. JobsRated.com beoordeelde tweehonderd verschillende beroepen op vijf criteria: stress, werkomgeving, fysieke belasting, inkomen en werkgelegenheid. Op de eerste plaats staat wiskundige, op de voet gevolgd door actuaire en statisticus.

De lijst van tweehonderd beroepen wordt afgesloten door houthakker.

Bron: *www.careercast.com*

Hans de Rijk geridderd

Op 15 november is Hans de Rijk, alias Bruno Ernst, benoemd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau. De burgemeester van Utrecht reikte hem de Koninklijke onderscheiding uit ter gelegenheid van het 25-jarige bestaan van de stichting *Ars et Mathesis*.

De Rijk kreeg zijn onderscheiding voor zijn bijzondere verdiensten op het gebied van de popularisatie en bevordering van de wis-, natuur- en sterrenkunde. Hij schreef ongeveer 250 boeken, waarvan 31 onder het pseudoniem Bruno Ernst, en waarvan vele in het buitenland zijn verschenen en in verschillende talen zijn vertaald. Hij schreef ook een groot aantal artikelen, leverde bijdragen aan *Teleac* en was nauw betrokken bij de oprichting van zowel *Pythagoras*, een wiskundeblad voor middelbare scholieren, als *Archimedes*, een natuurkundeblad voor middelbare scholieren.

Hans de Rijk is verder nog medeoprichter van de eerste Nederlandse Volkssterrenwacht en tot op heden bestuurslid van *Ars et Mathesis*.

Bron: *www.arsetmathesis.nl*



Foto: Ars et Mathesis

Hans de Rijk ontvangt zijn Koninklijke onderscheiding

Enmaal, andermaal

Op 26 december 2008 is de internetboekenveiling *WereldWiskundeWeb* geopend. Hier kunnen tweedehands wiskundeboeken per opbod gekocht worden. De volledige opbrengst van de veiling gaat naar het *Wereldwiskunde Fonds*, dat projecten in derdewereldlanden financiert die gerelateerd zijn aan wiskundeonderwijs. Er staan 162 boeken in de veiling.

Bron: *www.wiskundepersdienst.nl*

Charlotte Vlek

Nationale PR-medewerker Wiskunde

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Postbus 94079

1090 GB Amsterdam

prmedewerker@wiskgenoot.nl

Onderwijs

Klasseposter 'Wiskunde in Perspectief'

Wiskundigen werken niet alleen als onderzoeker of leraar, maar bijvoorbeeld ook als consultant of bij banken en verzekeringsmaatschappijen. En er zijn nog veel meer beroepen mogelijk met wiskunde, zoals Design Analysis Architect bij Philips Lighting Electronics (Jaap Fijnvandraat) of Vice President Global Clinical Information bij Schering-Plough (Kit Roes). Wiskundigen zoals Fijnvandraat en Roes vertellen over hun baan op www.wiskundeinperspectief.nl, een initiatief van de Taakgroep Landelijke Wiskunde PR van het KWG. De website richt zich voornamelijk op middelbare scholieren en toont middels interviews de brede mogelijkheden van een wiskundestudie. Bij de website hoort ook een poster. Die vindt u achterop deze uitgave van het Nieuw Archief, en is te bestellen via de website.

Op www.wiskundeinperspectief.nl vertellen afgestudeerde wiskundigen zoals Jaap Fijnvandraat en Kit Roes over hun baan. Ze laten hiermee direct zien dat wiskunde meer is dan alleen sommetjes. Zo licht Nienke Valkhoff haar werkzaamheden toe met het volgende voorbeeld: "Stel je voor dat je een postkantoor hebt. Je denkt na over hoeveel klanten er binnen komen. En als je ze binnen een bepaalde tijd van dienst wilt kunnen zijn, hoeveel medewerkers je dan nodig hebt. Dat zou je wiskundig kunnen gaan onderzoeken." Valkhoff werkt als Manager training and education bij Incontrol Enterprise Dynamics, een bedrijf dat simulatiesoftware ontwikkelt. De geïnterviewden vertellen bovendien over hun eerdere banen en stages, zoals bijvoorbeeld Valentin Neevel, die een beslissingsmodel maakte voor in-vitrofertilisatie (IVF): "De vraag was hoeveel embryo's je terug moet plaatsen opdat, bij maximaal drie

pogingen en afhankelijk van de oorzaak van onvruchtbaarheid, de kans op één doorgaande zwangerschap zo groot mogelijk is. Tegelijkertijd moet de kans op een twee- of meerling zo klein mogelijk blijven," vertelt Neevel.

Ook vertellen de geïnterviewden waarom ze voor de wiskundestudie hebben gekozen, en wat er zo leuk aan is. Voor veel van hen gaat het om het hoge 'puzzelgehalte' van het vak. Maar het gaat niet alleen om het puzzelen, volgens Ruben Naeff: "Met wiskunde schep je dingen vanuit het niets. Het is eigenlijk heel creatief."

De wiskundigen op deze website laten zien dat hun opleiding lang niet altijd gepaard hoeft te gaan met het imago van een 'stoffige professor'. Bovendien blijken wiskundigen overal te zitten, zelfs in de politiek: ook Jan Terlouw, jeugdboekenschrijver en politicus, heeft in een ver verleden wiskunde gestudeerd. Op www.wiskundeinperspectief.nl

Stuur een interview in en win twee kaartjes voor Oorlogswinter

Op de website www.wiskundeinperspectief.nl zullen de komende tijd nieuwe interviews blijven verschijnen, waarvan mogelijk één van een enthousiaste lezer: tot 30 maart is het mogelijk zelf interviews in te sturen, waarvan de beste beloond wordt met twee toegangskaartjes voor Oorlogswinter, de verfilming van het gelijknamige boek van Jan Terlouw.

Vereisten voor een in te sturen interview zijn eenvoudig: de geïnterviewde in kwestie moet een wiskundestudie hebben afgerond, waar hij of zij bij voorkeur ook nog gebruik van maakt in het werk. Verder moet duidelijk in het interview naar voren komen wat dat werk precies inhoudt, en moet het een goed lopend verhaal zijn. Het beste interview wordt beloond met twee kaartjes voor Oorlogswinter, en natuurlijk plaatsing van het interview op de website!

vertelt hij: "Ik ben in de eerste plaats wetenschapper, pas in de tweede plaats politicus. (...) Ik kijk ook als exacteling. Ik denk eigenlijk dat ik dat nooit echt kan laten."



Van de voorzitter van het KWG

Ander weer op til

Op dit moment loopt een aantal initiatieven dat een zeer positieve uitwerking kan hebben op de Nederlandse wiskunde in het algemeen. Alle betreffen onderlinge samenwerking. Ik noem het initiatief *Platform Wiskunde Nederland* en het *Masterplan Toekomst Wiskunde*. Ook staan de sterren gunstig voor het samengaan van de onderzoekscholen wiskunde en, op termijn, wellicht ook voor het oprichten van een nationale graduate school. Hierbij breng ik nog in herinnering de reeds enkele jaren bestaande en zeer succesvolle organisatie *Mastermath* van een nationaal master programma wiskunde, samengesteld in coördinatie tussen alle opleidingsdirecteuren wiskunde; bij de meeste Nederlandse universiteiten nemen de wiskundestudenten uit het landelijke onderwijsaanbod ca. 30 ECTS af. Deze samenwerking leidt ertoe dat de colleges macrodoelmatig gegeven kunnen worden in de zin dat er minstens twintig studenten deelnemen, iets waartoe geen enkele instelling in haar eentje in staat is. Hierdoor kunnen colleges met grotere diepgang in de lucht worden gehouden, waarbij bovendien de beste docenten van Nederland kunnen worden ingezet. Dit heeft zeker ook een positief effect op de kwaliteit van het master onderwijs. Met de organisatie van *Mastermath* loopt de wiskunde in Nederland voorop vergeleken met andere disciplines.

Het initiatief *Platform Wiskunde Nederland* beoogt de Nederlandse wiskunde één gezicht naar buiten te geven met een goede en efficiënte organisatie van onderzoek, onderwijs, PR en publicaties. Hierbij wordt de huidige versnipperde structuur met zijn vele commissies gereorganiseerd tot iets overzichtelijks, onder een bestuur waarin onder meer de beide beroepsverenigingen KWG en NVvW vertegenwoordigd zijn. Het is een belangrijk teken van vertrouwen dat deze beide organisaties samen ten

strijde trekken. Zo is er inmiddels een domeinnaam 'WisNed' voor een algemene website. Ook is een ondersteunend en uitvoerend 'Bureau Wiskunde' gepland dat deze website zal beheren en dat algemene bureauwerkzaamheden zal verrichten, onder meer voor het publicatiewezen. De officiële installatie van het platform is gepland op 15 april 2009, tijdens de algemene ledenvergadering van het KWG. Als voorbeeld voor dit initiatief dienden de organisatie van de biologen en van de natuurkundigen. Ook de sterrenkundigen hebben een goede landelijke organisatie. Het belang is dat de organisatie als geheel efficiënter wordt, maar vooral dat de Nederlandse wiskunde één goed aanspreekpunt zal hebben naar de 'buitenwereld', in het bijzonder richting de ministeries NWO/FOM/STW, de KNAW en de VSNU.

De publicatie *Masterplan Toekomst Wiskunde* verwoordt een initiatief om het wiskundeonderzoek in Nederland nader vorm te geven. Dit is een vervolg op de succesvolle actie rond de publicatie van *Nieuwe Dimensies Ruimer Bereik*, die ongeveer vier jaar geleden aanleiding is geweest tot het inrichten van drie NWO-clusters GQT, DIAMANT en NDNS+. Hier is een belangrijke investering gedaan in de infrastructuur van het Nederlandse wiskunde onderzoek. De gedachte achter het huidige initiatief is om onder andere deze drie clusters te continueren en nog een vierde stochastiek-cluster in het leven te roepen dat gelieerd is aan EURANDOM. Dit masterplan past in een rijtje sectorplannen dat recentelijk door verschillende andere disciplines, waaronder natuurkunde, scheikunde en biologie, bij NWO is ingediend.

Belangstelling voor wiskunde

Een groot probleem dat hier steeds op de achtergrond meespeelt is de al vaak besproken lage instroom van wiskundestudenten op

de universiteiten. Ter vergelijking, in de Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule te Aken alleen al stromen jaarlijks meer studenten in dan in alle Nederlandse (technische en gewone) universiteiten bij elkaar. Deze stand van zaken heeft ernstige gevolgen voor Nederland als kennisland! De oorzaken worden allereerste gezocht in de aansluiting vwo-wo en in het vwo-onderwijs zelf. Ook op dit gebied zijn veranderingen op til, maar hier is waarschijnlijk een langere adem nodig om optimistische uitspraken waartoe kunnen maken. De vernieuwingscommissie wiskunde cTWO, ingesteld door het ministerie van OCW, is met een herziening van de vwo-havo examenprogramma's gekomen die pas na de jaren 2011, 2012 en 2013 voor het eerst goed merkbaar kan worden.

Een bijkomend probleem is de verdeeldheid binnen de wiskundige wereld over de aanpak van deze problematiek, die ook naar buiten toe zichtbaar is geworden. Ik citeer hierbij uit een brief van staatssecretaris Van Bijsterveldt aan de Tweede Kamer: "Ik moet vaststellen dat er verdeeldheid is in de wiskundewereld." Ook in de landelijke pers blijkt deze verdeeldheid telkenmale. Het gaat daarbij onder meer om de mate waarin realistisch rekenen en realistisch wiskundeonderwijs de reken- en formulevaardigheid van scholieren in de weg staan. Ik heb met beide kampen uitvoerig van gedachten gewisseld en ben ervan overtuigd dat de overeenkomsten veel groter zijn dan de verschillen. Het is voor beide partijen dan ook veel lonender zich op de overeenkomsten te concentreren dan oorlog te voeren over de verschillen, die mij bovendien met enige moeite en goede wil best lijken te overbruggen. Om met Barack Obama te spreken: "Wie de gebalde vuist ontvouwt, zal de hand worden bereikt." Verder is het naar buiten brengen van de onderlinge verdeeldheid notoir slecht, ook voor de studenteninstroom.

Een tweede bijkomend probleem is het dreigende tekort aan eerstegraads wiskundeleraren dat ontstaat door het samenspel van vergrijzing en de jarenlang lage instroom van eerstejaarsstudenten. Het onderhavige tekort is des te ernstiger in het licht van de door cTWO voorgestelde vernieuwingen. In het *Masterplan* wordt als oplossing voorgesteld om reeds aan bachelors wiskunde, met een didactische aantekening, een eerstegraads bevoegdheid toe te kennen.

Dit kan op zich een verbetering zijn, hoewel hiermee het probleem van de lage instroom nog niet direct opgelost wordt. Ik zou zeggen dat de educatieve masteropleidingen aan de universiteiten wel moeten blijven bestaan vanwege hun meerwaarde, bijvoorbeeld richting didactisch onderzoek. Er is inmiddels sprake van ministeriële maatregelen om de positie van de leraar in het algemeen weer wat aantrekkelijker te maken, onder meer via het salarieringssysteem en het terugdringen van de invloed van het management 'voor de klas'. De

effecten hiervan moeten mijns inziens niet zeer hoog worden inschat.

Conclusies en aanbevelingen

Zoals zo vaak is het nieuws een mengeling van goede en slechte berichten. Hierboven heb ik het goede nieuws het eerst genoemd: er is een duidelijk streven naar meer eenheid in de organisatie van de Nederlandse wiskunde. Het slechte nieuws betreft de problemen rond de instroom van wiskundestudenten en de onderlinge verdeeldheid omtrent de mogelijke oplossingen. Samenhangend met de lage instroom noemde ik het dreigende tekort aan eerstegraads wiskundeleraren.

Wat op z'n minst hard nodig lijkt zijn grootschalige bijscholingsprogramma's, ik noemde het al eerder in het Nieuw Archief. Hierin zouden de zittende tweedegraads wiskundeleraren (maar ook zij-instromers) de kans moeten krijgen zich te kwalificeren als eerstegrader, met een duidelijke vakinhoudelijke toetsing en met uitzicht op een substantieel salarieel voordeel. Dit lijkt me een goede besteding van vrijkomende middelen. De academische wereld staat te springen om hierbij te helpen met haar inhoudelijke expertise.

Dit laatste geldt ook voor andere aspecten van outreach. In navolging van voorbeelden elders zijn nu veel universiteiten bezig met de invoering van een Junior College of met een uitgebreid uitwisselingsprogramma met leraren en scholieren in de omgeving. Het lijkt erop dat dit alles langzamerhand resulteert in een lichte toename van de instroom wiskundestudenten.

Overigens ben ik van mening dat allen die in verband met een wiskundige beschrijving graag de termen 'model' en 'modelleren' hanteren, ter leering ende vermaeck eens kennis zouden moeten nemen van de drie delen 'De Natuurkunde van 't Vrije Veld' van M.G.J. Minnaert (ThiemeMeulenhof 1996). Onder andere zijn aanbevolen de inspirerende passages over een slingerende boomtak in verband met Lissajous figuren op de pagina's 100 en 101 van deel 3.

Uiteraard hoop ik op bestendiging van de toename van de studenteninstroom. Zoals zo vaak zal het wel met vallen en opstaan gaan. Dit is mijn laatste column als voorzitter van het KWG: bij de volgende Algemene Ledenvergadering, te houden tijdens het 45ste Nederlands Mathematisch Congres op 14 en 15 April te Groningen, treed ik reglementair af. Ik hoop velen van u te mogen begroeten tijdens dit congres. Het ga u allen goed.

Henk Broer

Voorzitter KWG

Van het KWG

| KWG activities

Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

De 232ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op woensdag 15 april 2009 tijdens het 45ste Nederlands Mathematisch Congres te Groningen.

1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 231ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap van 17 juli 2008 in Amsterdam
- 3 Verslag van de Extra Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap van 2 oktober 2008 in Utrecht
- 4 Mededelingen
- 5 Besprekingen van de jaarverslagen over 2008. De hier ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
 - a. Verslag van de Secretaris
 - b. Verslag van de Penningmeester
 - c. Verslag van de Kascommissie
 - d. Verslag van de Stichting Epsilon
 - e. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
 - f. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
 - g. Verslag van de Publicatiecommissie
 - h. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
 - i. Verslag van de Archivaris
 - j. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
 - k. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 6 Begroting 2009
- 7 Vaststelling contributie voor 2009 en voor 2010
- 8 Samenstelling Kascommissie 2009
- 9 Samenstelling van het Bestuur

Prof.dr. H.W. Broer's lidmaatschap van het bestuur liep in 2008 af, maar in verband met zijn betrokkenheid bij het initiatief om tot een vereenvoudigde structuur te komen van de belangenbehartiging van de wiskunde in Nederland is met instemming van de ALV van 17 juli 2008 zijn voorzitterschap met één jaar verlengd. Het bestuur heeft het voornemen om de ondervoorzitter prof.dr. G. Vegter (RUG) voor te dragen als opvolger van Henk Broer als voorzitter. Henk Broer is bereid nog één jaar lid te blijven van het bestuur om zijn beoogde opvolger in te werken en het bestuur bij te blijven staan bij het bovengenoemde initiatief.

Dr. W. Bosma (RU) treedt statutair af. Tijdens de vergadering zal het bestuur de leden informeren over zijn opvolging.

De overige leden van het bestuur zijn:

 - dr. S. Bhulai (VUA), penningmeester
 - dr. I. van Gulik-Gulikers (SLO Enschede), contacten met leraren
 - dr. K.P. Hart (TUD), publicaties
 - prof.dr. R. van der Mei (CWI en VUA), secretaris
 - dr.ir. H.J.J. te Riele (CWI), archivaris en Inspecteur der Boekerij
 - dr. A. Sevenster, PR en Stichting Epsilon
 - prof.dr. G. Vegter (RUG), ondervoorzitter
- 10 Platform Wiskunde Nederland: inleiding, discussie, installatie bestuur (schriftelijke documentatie wordt vooraf in maart 2009 aan de leden beschikbaar gesteld)
- 11 Statutenwijziging
- 12 Rondvraag
- 13 Sluiting

Rubriek met mededelingen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Tevens worden hier de notulen van de Algemene Ledenvergadering gepubliceerd.

2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de 231ste Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen (voorzover ze niet eerder in het Nieuw Archief voor Wiskunde gepubliceerd zijn): het financieel verslag over 2006 en de begroting 2007, en het financieel verslag over 2007 en de begroting 2008. De verslagen van de Kascommissie over 2006 en 2007 zullen tijdens de ALV van 15 april 2009 bekend worden gemaakt.

2.1 Notulen van de 231ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden tijdens het Nederlands Mathematisch Congres te Amsterdam, op 17 juli 2008

Notulist: Wieb Bosma

De vergadering werd bijgewoond door het Bestuur van het KWG en circa twintig andere leden.

1. Opening.

De voorzitter opent de vergadering om circa 16.30 uur en heet allen welkom.

In verband met de afwezigheid van de secretaris (met kennisgeving) en de penningmeester (op het laatste moment, wegens familieomstandigheden) deelt de voorzitter mee dat op een extra Algemene Ledenvergadering, te houden in oktober, de punten 4b, 4c, 5, 6, en 7 behandeld zullen worden. Tevens zullen de punten 8 en 9 in omgekeerde volgorde behandeld worden.

2. Verslag van de 230ste Algemene Ledenvergadering.

Dit verslag wordt goedgekeurd.

3. Mededelingen.

Herman te Riele deelt mee dat de nalatenschap van professor Lekkerkerker inmiddels is afgehandeld. Na aftrek van kosten en successiebelasting (laag tarief in verband met de verworven status van 'algemeen nut beogende instelling' voor het KWG) valt van het resterende bedrag 20% toe aan de Stichting Gelders Landschap en 80% aan het KWG.

4. Jaarverslagen over 2007.

Naar aanleiding van het verslag van de Publicatiecommissie worden de afgetreden hoofdredacteurs van het Nieuw Archief voor Wiskunde, Jaap Molenaar en Jaap Top, met applaus bedankt.

Bij de bespreking van het verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen wordt op aandringen van enkele leden door het bestuur toegezegd dat de commissie aangespoord zal worden om tot een pro-actieve houding met betrekking tot archieven en digitale bronnen te komen. Er wordt gesignaleerd dat bij verhuizing van universitaire afdelingen noodgedwongen materiaal wordt vernietigd.

De verslagen van de penningmeester en van de Kascommissie worden aangehouden tot een in oktober te houden extra Ledenvergadering. De overige verslagen worden besproken en goedgekeurd.

9. Belangenbehartiging wiskunde in Nederland.

Henk Broer schetst de stand van zaken met betrekking tot het beoogde 'Bureau Wiskunde'. Sinds de rapporten van de commissie Tijdeman en het businessplan van Arjen Sevenster is er niet heel veel gebeurd. Het werk van een werkgroep die tot concrete daden zou moeten komen lag direct stil door ziekte van Jan van Maanen, de voorzitter. Naar verwachting zullen er nu snel concrete stappen gezet kunnen worden, voor zover die niet te sterk van de problematische geldstroom afhankelijk zijn. Het bestuur wenst zich niet op deadlines vast te leggen.

8. Samenstelling van het Bestuur

Henk Broer en K.P. Hart treden statutair af. K.P. Hart stelt zich voor een tweede termijn beschikbaar. Wegens de betrokkenheid van Henk Broer bij het 'Bureau Wiskunde' stelt het bestuur voor de voorzitter nog voor één jaar aan te laten blijven.

Er is enige verwarring over de status van de penningmeester (afwezig), omdat tijdens de vorige Ledenvergadering nog geen kandidaat voor deze functie gevonden was.

Voor het vervolg van de behandeling van dit punt verlaat Henk Broer de zaal; Gert Vegter neemt het voorzitterschap over. Statutair is verlenging van het voorzitterschap niet mogelijk, maar het is wel eerder voorgekomen. Verandering van statuten is een kostbare en tijdrovende aangelegenheid (en is nog redelijk recent gebeurd). Bovendien zal het 'Bureau' mogelijk opnieuw statutenwijzigingen no-

dig maken.

Er worden ook enige vraagtekens gezet bij het enerzijds wegens grote inspanning voor het 'Bureau' voortzetten van het voorzitterschap en anderzijds het gebrek aan bereidheid toezeggingen met harde deadlines te doen.

Achtereenvolgens worden de verlenging van het voorzitterschap van Henk Broer, een tweede termijn voor K.P. Hart, en de benoeming van Sandjai Bhulai tot nieuw bestuurslid, in stemming gebracht. Behoudens één onthouding bij de eerste en bij de tweede stemming, stemmen alle aanwezige leden (27) in met de voorstellen.

10. Rondvraag.

Enkele leden dringen aan op goede controle van berichten die door de Nederlandse Onderwijs Commissie Wiskunde (mede) namens het KWG uitgaan, vanwege de recente commotie rond de examenprogramma's in het voortgezet onderwijs. De voorzitter repliceert dat de NOCW in hoge mate zelfstandig opereert maar wel rapporteert aan het Bestuur, en uiteindelijk ter verantwoording geroepen kan worden.

Er ontstaat enige discussie over de weinig geslaagde pogingen om wiskunde naar aanleiding van het 5ECM-congres prominent in het nieuws te krijgen. Uiteindelijk krijgen geldgebrek (voor aansprekende speciale projecten) en gebrek aan belangstelling bij de media de schuld.

Rob van der Waall vraagt aandacht voor het 'stuwmeer' aan recensies dat volgens hem op publicatie in het Nieuw Archief ligt te wachten. Het bestuur zegt toe hiernaar te kijken.

Tom Koornwinder vraagt naar de toekomst van de website met biografische gegevens van nederlandse wiskundigen (www.bwnw.nl) omdat er weinig lijkt te veranderen. Dit is geen initiatief van het KWG, maar een LiO project dat inmiddels is afgesloten. Er wordt wel gewerkt aan voortzetting in andere vorm, en de mogelijkheid van een papieren versie wordt ook onderzocht. Het bestuur zal proberen nadere informatie te verkrijgen.

11. Sluiting.

De voorzitter sluit de vergadering om ongeveer 17.30 uur.

2.2 Financieel verslag 2006 en begroting 2007

Het jaarverslag over 2006 is op dezelfde manier tot stand gekomen als dat over 2004 en 2005. Dit jaarverslag heeft betrekking op de financiën van het KWG en, daarbinnen, het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW).

Balans begin 2006

De beginbalans 2006 is identiek aan de eindbalans 2005, zoals gepubliceerd in het financieel jaaroverzicht 2005.

De post debiteuren is relatief hoog, doordat op 1 januari een aanzienlijk deel van de door Uitgeverij Giethoorn ten Brink voor het KWG geïnde contributies nog niet was overgemaakt, doordat nog niet alle instituutslidmaatschappen zijn geïnd en doordat een deel van de bijdrage van sponsors voor de Nationale PR medewerker wiskunde nog niet was geïnd (dit loopt via het KWG). Daarnaast stond op 1 januari nog een aantal rekeningen aan adverteerders in het NAW open. Tenslotte heeft het KWG in 2006 een lening verstrekt aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade, die de komende jaren zal worden terugbetaald. Nog te betalen salarissen over 2005 en 2006, waar nog deels nog geen rekeningen voor zijn binnengekomen, vormen een aanzienlijk deel van het aan crediteuren verschuldigde bedrag.

Resultatenrekening

Het eigen vermogen van het KWG is in 2006 met €4.866,54 toegenomen, zie Tabel 1:

	€
Kapitaal eind 2005	188.131,63
Resultaat boekjaar 2006	4.888,54
Kapitaal eind 2006	192.998,17

Tabel 1 Resultatenrekening 2006

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Pythagoras	4.377,18	Pythagoras	9.495,09
Debiteuren	48.253,40	Overige crediteuren totaal	67.745,50
Deelname Epsilon Uitgaven	1.028,14		
<i>Liquide middelen:</i>		Eigen vermogen	
Postbank	2.829,79		
ABN AMRO	16.064,62		
Vaste activa			
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	4.128,96		
Postbank Rentemeer rekening	119.856,85		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	68.833,28	Kapitaal eind 2006	188.131,63
	265.372,22		265.372,22

Tabel 2 Beginbalans 2006

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Pythagoras	13.777,03	Pythagoras	9.495,09
Overige debiteuren totaal	71.228,84	Overige crediteuren totaal	50.539,30
<i>Liquide middelen:</i>		Eigen vermogen	
Postbank	42.449,12		
ABN AMRO	13.760,81		
Vaste activa			
<i>Financiële vaste activa:</i>			
Aandelen	4.399,69		
Postbank Rentemeer rekening	36.518,62		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	70.898,45	Kapitaal eind 2006	192.998,17
	253.032,56		253.032,56

Tabel 3 Eindbalans 2006

Nadat in 2005 een beperkt verlies (€855) geleden was, is het resultaat over 2006 weer positief, bij gelijk gebleven contributies van de leden. Dit is redelijk in overeenstemming met de begroting.

Toelichting bij de balanspost deelname Epsilon Uitgaven aandelen.

- Het restant van de balanspost deelname Epsilon Uitgaven (€1.028,14) is zoals in het jaarverslag over 2005 aangekondigd afgeschreven.
- De totale waarde van de aandelenportefeuille bedraagt per ultimo 2006 € 4.399,69, zie Tabel 4.

Begroting en kosten 2006 en begroting 2007

Tabel 5 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2006, en de begrote kosten voor 2007.

	€
Aandelen begin 2006	4.128,96
Bij: dividend en herwaardering	270,73
Aandelen eind 2006	4.399,69

Tabel 4 Mutaties aandelenportefeuille in 2006

Toelichting bij tabel 5:

- Ad 4125: In het boekjaar 2006 werden t.b.v. het NAW de volgende betaalde functies vervuld:
 - Eindredacteur, 0,2 fte
 - Bureauredactie, twee maal 0,2 fte (gedurende enkele maanden één maal 0,2 fte)
 - Bladmanager, 0,3 fte
- Ad 4151: Het betreft hier het netto door het KWG aan portokosten bestede bedrag. Het CWI vergoedt de voor ruilabonnementen gemaakte portokosten. In 2006 ging het hierbij om € 2.409,05.
- Ad 4155: Dit betreft het netto aandeel van het KWG in de vergaderkosten. De UU vergoedt, als onderdeel van het instituutslidmaatschap, een deel van de vergaderkosten, te weten € 560,00.
- Ad 4158: de rekening voor ledenadministratie in 2007 is nog niet binnengekomen. Het betreft hier een schatting.
- Ad SBW: in 2007 en volgende jaren zullen aanzienlijke kosten gemaakt worden ten behoeve van de commissie Structuurbehartiging Wiskunde. Voor 2007 is reeds € 3.000 gereserveerd. Deze € 3.000 komen ten laste van 2006.
- Ad 4160: In 2005 bedroeg de post overige kosten € 18.383,67. In 2006 valt deze post aanzienlijk lager uit, m.n. doordat er in 2006 geen Brouwerlezing plaatsvond. Voor 2007 zijn geen uitzonderlijk hoge kosten voorzien, maar het begrote bedrag is nog altijd overschreden. Dit is gedeeltelijk het gevolg van

GrBk nr.	Omschrijving	begroot 2006 (€)	werkelijk 2006 (€)	begroot 2007 (€)
4125	Salarissen	38.000	36.857,88	38.000
4151	Porti	6.000	5.061,61	5.500
4152	Drukkosten	20.000	17.749,75	20.000
4153	Ontwerpkosten	4.500	2.972,62	3.000
4154	PR/Reclame	500	0	500
4155	Vergaderkosten	1.000	1.454,08	1.500
4158	Ledenadministratie	2.000	2.000,00	2.000
-	Activiteiten i.s.m. SBW	-	-	7.000
4160	Overige kosten	7.500	11.459,75	12.000
4162	Stichting Epsilon	2000	2.503,54	300
4170, 4729	Sponsoring	15.000	15.090,65	17.000
4200	Verzekering	400	401,25	400
4251	Afdracht EMS	1.150	1.140,00	1.150
4252	Afdracht IM	1.800	1.717,20	1.800
4253	Afdracht IMU	750	750,00	750
4980, 9152	Bankkosten	100	63,47	100
	Totaal	100.700	99.227,79	111.000

Tabel 5 Resultatenrekening 2006 en begroting 2007: kosten

de reservering die gemaakt is voor SBW-activiteiten in 2007.

7. Ad 4162: Dit betreft bij de oprichting van de Stichting Epsilon gemaakte kosten. Stichting Epsilon heeft op 1 januari 2006 Epsilon Uitgaven overgenomen. Dit is in 2006 bescheiden gevierd. De Stichting heeft van het KWG een startkapitaal van € 2.000 ontvangen, en zal verder financieel onafhankelijk zijn.
8. Ad 4170: Het KWG heeft in 2006 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:
 - a. Stichting Vierkant: € 10.000
 - b. Kaleidoscoopdag: € 150
 - c. LIMO: € 500
 - d. Nationale PR medewerker: € 1.000
 - e. Najaarssymposium ITW 2005: € 494,63

In de begroting is bij sponsoring ook uitgegaan van de grootboeken 4726 en 4729: de KWG-activiteiten (zie ook het volgende punt). Voor 2007 worden vergelijkbare uitgaven voorzien. Dit jaar wordt voor het eerst een studiereis gesponsord, waarbij de gesponsorde deelnemers als tegenprestatie lid worden van het KWG. Waarschijnlijk sponsort het KWG ook een door studenten van de filmacademie geproduceerde film over Gödel. De sponsoring voor Stichting Vierkant wordt gedekt door een tweetal instituutslidmaatschappen.

9. Ad 4726, 4729: het KWG heeft in 2006 de volgende activiteiten georganiseerd:
 - a. NMC 2006: € 2.500,00
 - b. Wintersymposium 2006: € 452,02
 Voor 2007 worden vergelijkbare activiteiten voorzien.
10. Ad 4253: De KNAW draagt op dit moment het grootste deel van de kosten van het Nederlandse lidmaatschap van de International Mathematical Union, maar heeft aangegeven dit m.i.v. 2008 te willen veranderen.

Baten 2006 en begroting 2007

Zie Tabel 6.

Toelichting bij tabel 6:

1. Ad 5150: De inkomsten uit contributies vertonen nog altijd een dalende trend, maar de daling is minder sterk dan in 2005. Het bestuur probeert met name onder studenten nieuwe leden te werven. Studentleden krijgen een gratis kennismakingslidmaatschap van een jaar, dus een mogelijk effect hiervan wordt pas met vertraging zichtbaar.
2. Ad 5151: Alleen de structurele inkomsten uit het structurele Godefrey legaat zijn begroot.
3. Ad 5153: De inkomsten uit advertenties hebben zich, na een zeer sterke daling

in 2005, gestabiliseerd.

4. Ad 5156: Deze contributies werden in 2004, 2005 en 2006 aangewend voor sponsoring van de Stichting Vierkant. Contributies van instituutsliden die ten goede komen aan Pythagoras en bijdragen in natura komen op deze begroting niet voor. In 2006 waren instituutslid: het CWI, Eurandom, Technische Universiteit Delft, Rijksuniversiteit Groningen, Technische Universiteit Eindhoven, Universiteit van Amsterdam, Universiteit Leiden, Universiteit Utrecht, Vrije Universiteit. Katholieke Universiteit Nijmegen en Universiteit Twente.
5. Ad 5160: Alleen de tegemoetkoming van de Stichting Reprorecht is begroot.
6. Ad 9090: De rente wordt geboekt in het jaar waarin deze binnenkomt, niet in het jaar waarop deze betrekking heeft.

Samenvatting en aanbevelingen

Het financieel overzicht over 2006 laat een positief resultaat zien. Voor 2007 wordt een beperkt negatief resultaat voorzien. Dit is, gezien de grootte van het eigen vermogen, geen reden de contributie te verhogen.

Het KWG maakt tot op heden gebruik van papieren overschrijfskaarten. Onlangs heeft de Postbank de mogelijkheden om elektronisch te bankieren voor zakelijke rekeninghouders aanzienlijk verruimd. Het lijkt aantrekkelijk hiervan gebruik te gaan maken.

In 2008 vind het Fifth European Congress of Mathematics in Amsterdam plaats. Onderdeel van dit congres is een Brouwerlezing. Hiermee moet in de begroting voor 2008 rekening gehouden worden.

Het KWG heeft onlangs de status van 'algemeen nut beogende instelling' gekregen. Dit heeft mogelijk consequenties voor de wijze waarop het financieel jaarverslag geproduceerd wordt.

Amsterdam, 2 oktober 2008

Fieke Dekkers, oud-penningmeester

Sandjai Bhulai, penningmeester

2.3 Financieel verslag 2007 en begroting 2008

Het jaarverslag over 2007 is op dezelfde manier tot stand gekomen als dat over 2004, 2005 en 2006. Dit jaarverslag heeft betrekking op de financiën van het KWG en, daarbinnen, het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW). Bij de wisseling van het penningmeesterschap is de boekhoudstructuur op enkele punten aangepast (zie Tabellen 11 en 12).

In 2007 heeft zich een uniek voorval voorgedaan, omdat er een groot legaat van Prof. C.G. Lekkerkerker aan het KWG geschonken is. Prof. C.G. Lekkerkerker

GrBk Nr.	Omschrijving	begroot 2006 (€)	werkelijk 2006 (€)	begroot 2007
5150, 5121, 5251, 5252	Contributies KWG-leden	85.000	84.707,31	85.000
5151	Legaten en donaties	200	222,12	200
5153	Advertenties	4.500	3.925,00	4.500
5154, 5155, 5160	Overige baten	0	475,09	400
5156	Contributies inst. leden	10.000	10.000,00	10.000
5157	Contributies bedrijfsleden	1.000	1.000,00	1.000
9052, 9090	Rente	4.500	3.764,81	4.000
	Totaal	105.200	104.094,33	105.100

Tabel 6 Resultatenrekening 2006 en begroting 2007: baten

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Debiteuren	85.005,87	Crediteuren	60.034,39
<i>Liquide middelen:</i>			
Postbank	42.449,12		
ABN AMRO	13.760,81		
Vaste activa		Eigen vermogen	
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	4.399,69		
Postbank Rentemeer rekening	36.518,62		
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	70.898,45	Kapitaal eind 2006	192.998,17
	253.032,56		253.032,56

Tabel 7 Beginbalans 2007

ACTIVA	€	PASSIVA	€
Vlottende activa		Vreemd vermogen	
<i>Vorderingen:</i>		<i>Crediteuren:</i>	
Debiteuren	107.579,93	Crediteuren	37.741,84
<i>Liquide middelen:</i>			
Postbank	129.135,42		
ABN AMRO	13.561,99		
Vaste activa		Eigen vermogen	
<i>Financiële vaste activa</i>			
Aandelen	4.318,54		
Postbank Rentemeer rekening	38.773,05	Legaat Lekkerkerker	140.258,08
ABN AMRO Kapitaalmarktindex	73.309,83	Kapitaal eind 2007	188.678,84
	366.678,76		366.678,76

Tabel 8 Eindbalans 2007

was voormalig hoogleraar in de zuivere wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Een biografie van Prof. Lekkerkerker heeft in het Nieuw Archief van de Wiskunde gestaan (NAW 5/1, nr. 3, september 2000, online beschikbaar). Het bestuur is zeer erkentelijk voor het legaat en zal er een goede bestemming aan geven.

Balans begin 2007

De beginbalans 2007 is identiek aan de eindbalans 2006, zoals gepubliceerd in

het financieel jaaroverzicht 2006.

Balans eind 2007

Tabel 8 geeft de balans eind 2007.

De post debiteuren is relatief hoog, doordat op 1 januari een aanzienlijk deel (€ 33.888,11) van de door Uitgeverij Giethoorn ten Brink voor het KWG geïnde contributies nog niet was overgemaakt. Daarnaast heeft het Lekkerkerker legaat voor een toename in het kapitaal gezorgd.

	€
Kapitaal eind 2006	192.998,17
Resultaat boekjaar 2007	-4.319,33
Kapitaal eind 2007	188.678,84

Tabel 9 Resultatenrekening 2007

	€
Aandelen begin 2007	4.399,69
Bij: dividend en herwaardering	-81,15
Aandelen eind 2007	4.318,54

Tabel 10 Mutaties aandelenportefeuille in 2007

Resultatenrekening

Het eigen vermogen van het KWG is in 2007 met €135.938,75 toegenomen. Echter, als het legaat Lekkerkerker niet meegenomen wordt, dan zien we dat het eigen kapitaal met €4.319,33 verminderd is, zie Tabel 9.

Ten opzichte van het jaar 2006, waarin een positief resultaat van €4.866,54 werd behaald, is dit jaar het resultaat, gecorrigeerd voor het legaat, negatief.

Toelichting bij de balanspost aandelen.

- De totale waarde van de aandelenportefeuille bedraagt per ultimo 2007 € 4.318,54, zie Tabel 10.

Begroting en kosten 2007 en begroting 2008

Tabel 11 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2007, en de begrote kosten voor 2008. Bij de wisseling van het penningmeesterschap is de boekhoudstructuur op kleine punten aangepast.

Toelichting bij tabel 11:

- Ad 4125: In het boekjaar 2007 werden t.b.v. het NAW de volgende betaalde functies vervuld:
 - Eindredacteur, 0,2 fte
 - Bureauredactie, drie maal 0,2 fte
 - Bladmanager, 0,3 fte
- Ad 4151: Het betreft hier het netto door het KWG aan portokosten bestede bedrag. Het CWI vergoedt de voor ruilabbonnementen gemaakte portokosten. In 2007 ging het hierbij om €2.409,05.
- Ad 4155: Dit betreft het netto aandeel van het KWG in de vergaderkosten. De UU vergoedt, als onderdeel van het instituutslidmaatschap, een deel van de vergaderkosten, te weten €560,00.
- Ad 4158: Het KWG ontvangt geen factuur meer voor de ledenadministratie. De kosten hiervoor worden verrekend met de abonnementsgelden van Giethoorn ten Brink.
- Ad SBW: In 2007 en volgende jaren zullen aanzienlijke kosten gemaakt worden ten behoeve van de commissie StructuurBehartiging Wiskunde. Het werk voor het rapport SBW is in 2007 voltooid. Voor 2008 is reeds €5.000 gereserveerd. Deze €5.000 komen ten laste van 2007.
- Ad 4160: In 2006 bedroeg de post overige kosten €15.090,65. Door herstructurering van de boekhoudstructuur zijn een deel van deze kosten onder een andere grootboek ondergebracht. Voor 2008 wordt een voorziening van €2.500 getroffen.
- Ad 4162: Dit betreft declaraties van KWG bestuursleden die betrokken zijn bij het bestuur van de Stichting Epsilon.
- Ad 4170: Het KWG heeft in 2007 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:
 - LIMO 2007: €500
 - De Leidsche Fleisch: €500
 - Studereis A-Eskwadraat: €400
 - Studereis STRAUSS: €250
 - Filmacademie Amsterdamse Hogeschool: €1.190

Voor 2008 worden vergelijkbare uitgaven voorzien. Vorig jaar werd voor het eerst een studiereis gesponsord, waarbij de gesponsorde deelnemers als tegenprestatie KWG lid worden. Dit principe is dit jaar aangehouden.

- Ad 4726, 4729: Het KWG heeft in 2006 de volgende activiteiten georganiseerd:
 - NMC 2007: €2.550,00
 - Wintersymposium 2007: €2.673,92

Voor 2007 worden vergelijkbare uitgaven voorzien.

- Ad 4171: Voor 2008 wordt voor het 5ECM congres €50.000 begroot.
- Ad 4253: De KNAW heeft dit jaar de kosten van het Nederlandse lidmaatschap van de International Mathematical Union op zich genomen, maar heeft aangeven dit te willen veranderen.

Baten 2007 en begroting 2008

Zie Tabel 12.

Toelichting bij tabel 12:

- Ad 5150: De inkomsten uit contributies vertonen een stijgende trend. Het is onduidelijk of dit het gevolg is van de sponsoring van studiereizen, waarbij studenten een gratis kennismakingslidmaatschap krijgen, of dat dit veroorzaakt wordt door nieuwe leden die geen student zijn.
- Ad 5151: Alleen de structurele inkomsten uit het structurele Godefroy legaat zijn begroot.
- Ad 5153: De inkomsten uit advertenties laten een daling zien ten opzichte van 2006.
- Ad 5156: Deze contributies werden in 2004, 2005 en 2006 aangewend voor sponsoring van stichting Vierkant. In de praktijk blijkt dat de instituutsgelden niet overgemaakt worden. Deze post verklaart grotendeels de daling van €4.319,33 van het kapitaal eind 2007. Dit is een aandachtspunt van het bestuur.
- Ad 9090: De rente wordt geboekt in het jaar waarin deze binnenkomt, niet in het jaar waarop deze betrekking heeft.

Samenvatting en aanbevelingen

Het financieel overzicht over 2007 laat een positief resultaat zien. Dit resultaat is het gevolg van een eenmalige legaat van professor Lekkerkerker. Als het resultaat gecorrigeerd wordt voor het legaat, dan is het resultaat negatief. De oorzaak hiervan ligt in het uitblijven van de contributies van institutionele leden en bedrijfsleden. De begroting laat zien dat bij gelijkblijvende omstandigheden het eigen kapitaal zal dalen. Dit is een aandachtspunt van het bestuur.

Het 5ECM congres vindt in 2008 in Amsterdam plaats. Onderdeel van dit congres is een Brouwerlezing. Hiermee is in de begroting voor 2008 rekening gehouden.

Amsterdam, 2 oktober 2008
Sandjai Bhulai, penningmeester

3 Ad punt 3 van de Agenda

Notulen van de Extra Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden op 2 oktober 2008 in Utrecht

De vergadering werd bijgewoond door het Bestuur en door twee leden (J. Stegeman en T. Koornwinder).

Tijdens deze vergadering zijn de Financiële jaarverslagen van 2006 en 2007 en de bijbehorende begrotingen voor 2007 en 2008 besproken. Deze stonden op de agenda van de ALV van 17 juli 2008 tijdens NMC44 in Amsterdam, maar konden door de onvoorziene afwezigheid van de penningmeester (door familie-omstandigheden) toen niet worden besproken. In de tussentijd zijn de stukken, na overleg met de kascontrolecommissie, op enkele plaatsen gewijzigd: de nieuwe stukken zijn na deze vergadering op de KWG-website ter inzage geplaatst.

De voorzitter van de kascontrolecommissie, Jan Stegeman, deelde mee dat gewerkt wordt aan de controle van de jaarstukken van 2006 en 2007 (die met aanzienlijke vertraging door de vorige penningmeester aan de huidige penningmeester, en aan de kascontrolecommissie, zijn overgedragen). Hij verwacht dat

GrBk nr.	Omschrijving	begroot 2007 (€)	werkelijk 2007 (€)	begroot 2008 (€)
4125	Salarissen	38.000	49.332,62	50.000
4126	PR-Taakgroep	—	-4.645,37	0
4151	Porti	5.500	6.748,93	6.500
4152	Drukkosten	20.000	26.479,31	25.000
4153	Ontwerpkosten	3.000	4.674,32	4.000
4154	PR/Reclame	500	0	—
4155	Vergaderkosten	1.500	1.989,85	2.000
4158	Ledenadministratie	2.000	0	—
—	Activiteiten i.s.m. SBW	7.000	7.348,50	5.000
4160	Overige kosten	12.000	10,25	2.500
4162	Stichting Epsilon	300	96,10	150
4170	Sponsoring	12.000	2.840,00	2.000
4171	Sponsoring 5ECM	—	—	50.000
4726, 4729	KWG activiteiten	5.000	5223,92	5.000
4200	Verzekering	400	401,25	400
4251	Afdracht EMS	1.150	1.200,00	1.250
4252	Afdracht IM	1.800	0	—
4253	Afdracht IMU	750	750,00	750
4980, 9152	Bankkosten	100	52,87	50
Totaal		111.000	102.502,55	154.600

Tabel 11 Resultatenrekening 2007 en begroting 2008: kosten

GrBk Nr.	Omschrijving	begroot 2007 (€)	werkelijk 2007 (€)	begroot 2008
5150, 5121, 5251, 5252	Contributies KWG-leden	85.000	89.545,42	90.000
5151	Legaten en donaties	200	222,12	200
5158	Legaat Lekkerkerker	—	140.258,08	—
5153	Advertenties	4.500	2.250,00	2.500
5154, 5155, 5160	Overige baten	400	1.439,23	1.000
5156	Contributies inst. leden	10.000	0	0
5157	Contributies bedrijfsleden	1.000	0	0
9052, 9090	Rente	4.000	4.726,45	4.000
Totaal		105.100	238.441,30	97.700

Tabel 12 Resultatenrekening 2007 en begroting 2008: baten

deze binnenkort kan worden afgerond.

Het bestuur heeft het voornemen om de contributie in twee jaar tijd met €10 per jaar te verhogen. Tijdens de ALV van 2009 zal het bestuur dit gemotiveerd aan de orde stellen.

4 Ad punt 5 van de Agenda

4.1 Verslag van de Secretaris

4.1.1 Leden Het genootschap had op 1 januari 2009 acht ereleden (P.C. Baayen, F. van der Blij, N.G. de Bruijn, J.C. van de Craets, D. van Dalen, J. Korevaar, J.A.F. de Rijk en F. Verhulst) en 1329 leden, van wie 220 gebruik maakten van het tarief voor gepensioneerden, 199 van het reciprociteitstarief en 119 van het studenttarief. 47 leden waren tevens lid van de European Mathematical Society.

4.1.2 Verslag van de Kaleidoscoopdag De Kaleidoscoopdag vond plaats op 18 april 2008 aan de Universiteit Nijmegen en werd georganiseerd door W.S.G. Abacus (Universiteit Twente) en W.S.V. Desda (Radboud Universiteit Nijmegen). Het thema was: 'Money Moves'. Er werden lezingen verzorgd over

Internetbankieren (digitale beveiliging), Hypotheken/beleggingen, Verzekeringen/aandelen/hypotheken, en over Eurodiffusie.

4.1.3 Verslag van het Wintersymposium Het Wintersymposium, georganiseerd door Iris van Gulik-Gulikers, werd gehouden op 12 januari 2008 in het Academiegebouw bij de Dom in Utrecht. Het thema was 'Wiskundehelden uit de Gouden Eeuw'. Sprekers en hun onderwerpen waren:

- Teun Koetsier (Vrije Universiteit Amsterdam), *Simon Stevin en Windmolens*
- Jan van Maanen (Univ. Utrecht en Freudenthal Instituut), *Van Schooten en Zonen: een familiebedrijf in wiskunde*
- Fokko Jan Dijksterhuis (Univ. Twente), *Christiaan Huygens*

Het symposium trok 155 belangstellenden.

4.1.4 Wiskunde Persdienst De Wiskunde Persdienst (www.wiskundepersdienst.nl) is een initiatief uit 2002 van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraars en het KWG. De WPD verzamelt en verspreidt wiskundig geïntereerd nieuws. Het KWG en Bauke Conijn (TU/e) verzorgen de website. Het beheer van de berichten is in handen van de TU/e, het Centrum voor Wiskunde & Informatica en leden van de Wiskunde Webmasters. Op dit moment worden nieuwsberichten gepubliceerd op de websites van de Wiskunde Persdienst, het KWG, de NVvW, Py-

thagoras en Digischool, en op WisWeb (de website van het Freudenthal Instituut voor het voortgezet onderwijs). In 2008 verschenen 35 nieuwsberichten.

4.1.5 PR-activiteiten Het Genootschap heeft bij verschillende gelegenheden PR-activiteiten ontplooid, zoals tijdens het 44ste Nederlands Mathematisch Congres, en het Fifth European Congress of Mathematics in Amsterdam (14-18 juli), bij evenementen zoals de Jaarvergadering/Studiedag en de Nationale Wiskunde Dagen van de NVvW, het Wintersymposium van het KWG, de vakantiecurssussen van het CWI, de Wetenschapsdag en de Kaleidoscoopdag. Dit gebeurde veelal in samenwerking met het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras. Ter ondersteuning van de PR-activiteiten werd promotiemateriaal gebruikt, bestaande uit de KWG-poster, WG-folder, en WG-ansichtkaarten.

4.1.6 Landelijke taakgroep wiskunde PR Deze groep bestaat uit Jan van de Craats (OU en UvA), Vincent Jonker (Freudenthal Instituut, UU), Marian Kollenveld (NVvW), Tom Koonwinder (UvA), Arjen Sevenster (KWG), Ionica Smeets (UL) en Chris Zaal (UvA), en opereert onder auspiciën van het KWG. Adviserend lid is Carl Koppeschaar (hoofdredacteur van Kennislink, www.kennislink.nl/web/show?id=134109). Tom Koonwinder fungeert als contactpersoon voor de taakgroep.

De groep beschikt sinds 1 december 2004 over een parttime PR-medewerker (0.2 fte). Vanaf oktober 2007 vervult Charlotte Vlek deze functie. Zij heeft als algemene taak om zich actief in te zetten voor een positieve beeldvorming met betrekking tot de wiskunde, met name bij scholieren. Als concreet project heeft zij de website 'wiskunde in perspectief' (www.wiskundeinperspectief.nl) verder ontwikkeld. Deze website brengt het beroepsperspectief na een wiskundestudie onder de aandacht door middel van interviews met afgestudeerde wiskundigen in een grote verscheidenheid van beroepen. De website zal verder onder de aandacht van docenten en scholieren worden gebracht door een binnenkort breed te verspreiden klassenposter. Een volgend project waar Charlotte Vlek thans aan werkt, is het project Eureka: 'Wiskundestudenten laten scholieren in een gastles het Eureka-gevoel beleven'. De Universiteit Groningen is begonnen met deze formule van promotieteams van wiskundestudenten die de scholen langsgaan om daar een gastles te geven. Nu is Charlotte bezig om iets dergelijks ook in andere universiteitssteden op te starten, zodat uiteindelijk een landelijke dekking bereikt wordt.

Verder worden via de taakgroep de werkzaamheden voor Kennislink Wiskunde (www.kennislink.nl/web/show?id=100552) van Alex van den Brandhof (redacteur van de vakpagina Wiskunde) gesponsord.

De genoemde activiteiten werden gedurende 2008 financieel mogelijk gemaakt door de onderzoekscholen Stieltjes en MRI, de Stichting Compositio, de Nederlands Vereniging van Wiskundeleraars, het STW-EW programma Wiskunde Toegepast en het KWG, terwijl het Freudenthal Instituut immateriële bijstand gaf door het beheer en onderhoud van de website www.wiskundeinperspectief.nl. Aan de productie- en verzendkosten van de klassenposter werd bijgedragen door 13 universitaire en HBO-opleidingen wiskunde.

Tom Koonwinder, contactpersoon

4.2 Verslag van de Penningmeester over 2008

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 15 april 2009 uitgereikt.

4.3 Verslag van de Kascommissie over 2008

Wordt tijdens de Algemene Ledenvergadering op 15 april 2009 uitgereikt.

4.4 Verslag van de Stichting Epsilon

Het bestuur van de Stichting bestond in 2008 uit dr. G.M. Hek (IL, Geneve): voorzitter, dr. S. Bhulai (VU): secretaris/penningmeester, dr. K.P. Hart (TUD), drs. F.L.J.M. van den Heuvel (Meridiaan College 't Hooghe Landt, vanaf nov. '08), dr. A. Sevenster (voorheen Elsevier). Voor de dagelijkse werkzaamheden in de uitgeverij is een 'managing director', in de persoon van drs. C. Boss-Reus, in dienst. De redactie van de wetenschappelijke reeks wordt voorgezeten door prof.dr. G. Vegter (RUG); de voorzitter van de Zebra-redactie is drs. P.M.G.M. Kop (ICLON).

De belangrijkste activiteit van Epsilon Uitgaven is natuurlijk het uitgeven en de verkoop van boeken. In 2008 zijn er diverse teksten uitgegeven: twee nieuwe

delen en vier herdrukken in de wetenschappelijke reeks en twee nieuwe delen in de Zebra-serie. Daarnaast zijn er inmiddels vier teksten voor wiskunde D te vinden op de website.

Al bij de oprichting van Stichting Epsilon werd gedacht over een mogelijke uitbreiding van het boekenbestand van Epsilon Uitgaven richting de (theoretische) informatica. In 2008 is een eerste tekst van de Open Universiteit (Starten met programmeren, van Marleen Sint) uitgegeven en een vervolg ligt in het verschiet. Tevens is in 2008 hard gewerkt aan een reeks bijspijkerboekjes over vwo-wiskunde, waarvan de eerste begin 2009 in de winkel zullen liggen.

Al in 2007 toonde het KWG belangstelling voor de uitgave van een schoolboekenmethode, maar het overleg met een bestaande, kleine uitgever van een dergelijke methode leverde niets op. In 2008 heeft het stichtingsbestuur nog een mogelijkheid onderzocht, maar uiteindelijk besloten in deze richting voorlopig niets te ondernemen.

Wat betreft de dagelijkse werkzaamheden is getracht verbetering te brengen in de fragiele situatie met slechts één werknemer voor alle dagelijkse zaken. Sinds eind oktober is er naast Carolien Boss een tweede (freelance) kracht werkzaam voor de uitgeverij, die vooral het afhandelen van de boekenbestellingen verzorgt. Hierdoor is er voor de overige werkzaamheden, zoals de eindredactie van nieuw uit te geven teksten, meer tijd. Om de werkzaamheden verder te vereenvoudigen heeft het bestuur, op initiatief van Carolien Boss, in het voorjaar besloten een groot deel van de nu nog handmatige werkzaamheden te gaan automatiseren. Na enig onderzoek naar geschikte software pakketten is eind oktober een opdracht gegeven tot de bouw van een pakket 'Epsilon Online'.

Geertje Hek, voorzitter Stichting Epsilon

4.5 Verslag van het Fifth European Congress of Mathematics en van het 44ste Nederlands Mathematisch Congres

Het Fifth European Congress of Mathematics werd van 14-18 juli in de RAI in Amsterdam gehouden. Het stond onder auspiciën van de European Mathematical Society, en van het KWG. Voor een verslag van de hand van Wieb Bosma, zie het september 2008-nummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde. Het 44ste Nederlands Mathematisch Congres was ingebed in het Fifth European Congress of Mathematics (5ECM). De volgende activiteiten vonden plaats:

- De 13e *Brouwerlezing* werd op maandagavond 14 juli door Phillip Griffiths van het IAS Princeton aan de VU gegeven. De lezing werd voorafgegaan door een laudatio, uitgesproken door de voorzitter van de Brouwercommissie, Eduard Looijenga. Na afloop was er een receptie.
- Op maandagmiddag 14 juli heeft Dirk van Dalen (Univ. Utrecht) in de RAI een historische lezing gegeven over Brouwer, getiteld: *Brouwer's revolution - a century later*.
- De 9de *Beeger Lezing* werd op 17 juli door Dan Bernstein (Univ. of Illinois, Chicago) gegeven en was getiteld: *Edwards curves*.
- De 3de *Philips Wiskundeprijs voor promovendi*-wedstrijd werd gehouden op 17 juli in de RAI. De volgende zes sprekers waren door de prijscommissie geselecteerd: Stefanie Donauer (VU), Willemien Ekkelkamp (CWI), Robbert de Haan (CWI), Erik Jan van Leeuwen (CWI), Arjen Stolk (Univ. Leiden) en Yana Volkovich (Univ. Twente). De prijs werd gewonnen door Erik Jan van Leeuwen. De prijscommissie bestond uit de emeriti Frans Oort (voorzitter), Floris Takens en Willem van Zwet.
- De *Zaalkaas* voor het beste artikel in het NAW in 2007 werd uitgereikt aan Jan van de Craats, voor zijn artikel: 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen' (NAW, juni 2007, pp. 132-136). De beoordelingscommissie bestond uit de wetenschapsjournalisten Hans van Maanen (vz), Bruno van Wayenburg, Arnout Jaspers en Charlotte Vlek.
- Op 17 juli werd de *Jaarvergadering* van het KWG in de RAI gehouden.
- Een *fototentoonstelling* van foto's van wiskundigen en informatici van de hand van Peter van Emde Boas
- Een tentoonstelling van *wiskundige sculpturen* van de hand van Koos Verhoeff
- Vertoning van *films* over Wolfgang Doeblin en over Kurt Gödel
- Een *KWG-stand* met informatie over het KWG en het KWG-lidmaatschap, over de KWG-tijdschriften Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras, over boeken van de KWG-uitgever 'Epsilon-uitgaven', en over het Dutch Master Pro-

gramme 'Mastermath' (in samenwerking met Freek van Schagen). Aan de stand werden de volgende wiskundige paraphernalia verkocht: een door TNT Post op 21 september 2007 ter ere van Brouwer uitgegeven postzegel; een set van 9 verschillende ansichtkaarten over de geschiedenis van het (K)WG; tafelservetten, voorstellende Gaussische priemgetallen (soortgelijke servetten werden ook verkocht tijdens het International Congress of Mathematics van 1954 in Amsterdam); scheurkalenders over optische illusies (in samenwerking met Jan Broeders van de Stichting Optische Fenomenen).

Herman te Riele, lid congrescommissie NMC2008

4.6 Verslag van de Inspecteur der Boekerij

In 2008 is een totaal van 68 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd, voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

In toenemende mate zijn tijdschriften elektronisch beschikbaar. In dit jaar zijn om die reden zes ruilovereenkomsten beëindigd. Tien ruilovereenkomsten zijn beëindigd omdat de uitgaven van de betreffende tijdschriften zijn gestagneerd. Tijdschriftuil die in 2008 gestart is:

International Journal of Mathematical Combinatorics is ruil met: Academia Sinica
Herman te Riele, Inspecteur der Boekerij

4.7 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties, en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2008 uit Sandjai Bhulai, Klaas Pieter Hart (voorzitter), Henk Broer, Rob Schrauwen en Chris Zaal. De commissie heeft haar werk voornamelijk via e-mail en telefoon afgehandeld.

Het instandhouden van de voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* in de huidige opzet en van *Pythagoras* blijft een belangrijke en soms moeilijke taak van de commissie. Net als vorige jaren dragen diverse wiskunde-instituten in het land via instituutslidmaatschappen in natura bij aan de personele lasten en enkele andere grote kostenposten bij de productie en verzending van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Pythagoras*.

Een blijvend punt van zorg is dat we als KWG alles tot aan de druk en de verzending zelf (willen) doen en dat het hele proces leunt op een paar goede, enthousiaste krachten die dit ieder jaar weer op basis van een tijdelijk contract doen.

Het bestuur onderzoekt andere manieren om de medewerkers in dienst te houden en te betalen. De hoop is dat de aanstaande bundeling van de Nederlandse Wiskundige krachten enig soelaas kan brengen in de organisatie hiervan.

Van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verscheen in 2008 deel 9 van de vijfde serie. De redactie heeft, onder leiding van hoofdredacteurs Wil Schilders en Ferdinand Verhulst, samen met de enthousiaste en bekwame eindredacteur Derk Pik en een zeer actieve bureauredactie en bladmanager ook vorig jaar weer vier fraaie nummers van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* weten uit te brengen. Om het blad aantrekkelijk te houden is en blijft een ruime hoeveelheid goede kopij nodig; de oproep uit vorige jaren de redactie te overstelpen met artikelen blijft onverminderd van kracht. Derk Pik heeft aangekondigd te willen stoppen met zijn eindredacteurschap; op het moment van schrijven van dit verslag was de zoektocht naar een opvolger in volle gang.

Van *Pythagoras* verschenen in 2008 zes nummers, drie in de jaargang 47 en drie in de jaargang 48. Hoofdredacteur Arnout Jaspers en eindredacteur Alex van den Brandhof hebben samen met hun redactie een mooie jaargang met als thema *Wiskunde en Kunst* afgesloten; jaargang 48 heeft als thema *Discrete Wiskunde*. *Pythagoras* is financieel gezond, mits derden bereid blijven in de vorm van instituutslidmaatschappen bij te dragen in de kosten van hoofd- en eindredactie.

Klaas Pieter Hart, voorzitter Publicatiecommissie

4.8 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

4.8.1 Samenstelling Commissie De commissie bestond in 2008 uit de volgende leden (in alfabetische volgorde): F. Beukers, T. Goris, C.P. Hoogland, mevr. I. van Gulik, mevr. M. Kamminga, W. Kleijne, mevr. M. Kollenveld, J. van Maanen, D. Siersma (voorzitter), J. Steenbrink, mevr. M. Steentjes (secretaris), T. Verhoeff (penningmeester), B. Zwaneveld. Mevr. I. van Gulik is sinds mei 2008 lid. Eind 2008 zijn J. Steenbrink en T. Verhoeff teruggetreden. T. Goris zal het penningmeesterschap overnemen.

4.8.2 Activiteiten in het algemeen De NOCW wil fungeren als platform voor alles wat met de rol van wiskunde in het onderwijs te maken heeft. De NOCW heeft in april 2008 aan staatssecretaris Van Bijsterveld een brief gestuurd naar aanleiding van haar besluit om in te grijpen in de voorstellen van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO. Met name de eenzijdige visie van de staatssecretaris op het wiskundeonderwijs was aanleiding tot deze reactie en het verzoek om haar standpunt te heroverwegen.

4.8.3 Nederlandse Wiskunde Olympiade In 2008 hebben er 3007 leerlingen deelgenomen aan de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We zijn verheugd dat de stijging van de afgelopen jaren doorzet. Op 201 scholen hebben de leerlingen in januari meegespeeld aan de eerste ronde. De scholenprijs is, net als twee jaar geleden, gewonnen door het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Om ook lagere klassers te stimuleren om mee te doen aan de eerste ronde is deze jaargang voor het eerst een klasafhankelijke cesuur ingevoerd. Ruim 120 leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die, zoals gebruikelijk, in september in Eindhoven is gespeeld. De prijsuitreiking heeft in november plaatsgevonden aan de TU Eindhoven. Naast de betaling van de kosten van deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade door OC&W zijn er verder bijdragen geleverd door Cito, DIAMANT, KWG, het tijdschrift Natuurwetenschap en Techniek, NS, NVvW, Ortec, Saen Options, Stichting Compositio Mathematica, Tdtf, Transtrend, TU Eindhoven en Universiteit Utrecht. Voor verdere informatie zie www.wiskundeolympiade.nl.

4.8.4 Internationale Wiskunde Olympiade Bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Spanje zijn door het Nederlands team maar liefst vier medailles behaald: tweemaal zilver en tweemaal brons. In het officiële landenklassement kwam Nederland op de 33e plaats. In de 37 voorgaande keren dat Nederland deelnam aan de Internationale Wiskunde Olympiade, deed het team het slechts drie keer beter, zowel wat betreft medailles als wat betreft relatieve rang.

4.8.5 Wiskunde A-lympiade en Wiskunde-B-dag De A-lympiade wordt in het schooljaar 2008-2009 voor de twintigste keer en de Wiskunde B-dag voor de tiende keer door het Freudenthal Instituut georganiseerd. De voorronde op de scholen vond plaats op 21 november 2008. In Nederland deden 158 scholen mee. Uit deze voorronde worden vijftien teams geselecteerd: negen uit Nederland, twee uit Duitsland, twee uit Denemarken en een team uit Aruba en een uit St Maarten. In Japan en Iran wordt ook deelgenomen, maar (nog) zonder afvaardiging naar het finaleweekend van 13 en 14 maart 2009. Afgelopen schooljaar 2007-2008 was het Heerbeeck College uit Best, net als vorig jaar, winnaar. De wiskunde B-dag kent alleen een voorronde, geen finaleweekend. Aan de wiskunde B-dag doen ook Belgische teams mee.

4.8.6 Kangoeroe Wedstrijd De Kangoeroewedstrijd wordt voor Nederland en Vlaanderen georganiseerd door Stichting Wiskunde Kangoeroe, vanuit de Radboud Universiteit Nijmegen, onder auspiciën van het KWG. De wedstrijd is bestemd voor alle leerlingen vanaf groep 5 van het basisonderwijs en alle leerlingen in het voortgezet onderwijs. In 2008 deden bijna 80.000 leerlingen mee aan de Kangoeroewedstrijd. Er zijn vier verschillende versies: wizKID, wizSMART, wizBRAIN en wizPROF. Voor verdere informatie, zie www.math.ru.nl/kangoeroe.

4.8.7 Vertegenwoordiging in ICMI Het KWG wordt door het NOCW-lid W. Kleijne vertegenwoordigd in de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) van de IMU.

Melanie Steentjes, secretaris NOCW

4.9 Verslag van de Archivaris

Het archief van het Koninklijk Wiskundig Genootschap was ook in 2008 in goede handen bij het Noord-Hollands Archief (voorheen het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland), Kleine Houtweg 18, 2012 CH Haarlem. Het archief is ontsloten via de uitgebreide 'Inventaris van de archieven van het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: 'Een onvermoeide arbeid komt alles te boven', opgericht te Amsterdam in 1778, (1782) 1798 - 1968 (1991)' door S. Neugebauer (Haarlem, 1995). Deze inventaris kan worden geraadpleegd op <http://www.wiskgenoot.nl/watis/geschiedenis.html>.

Herman te Riele, archivaris KWG

4.10 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

4.10.1 Algemeen De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland te Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven: Arch. 2 H.B.A. Bockwinkel (1881-1960); Arch. 3 R. Lijdsman; Arch. 4 G. Röhrman; Arch. 5 W.H.J. van der Stok; Arch. 6 H. Nyon; Arch. 7 L.W. Nieland (1901-1945); Arch. 8 T. van Aardenne-Ehrenfest (1905-1984), C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880-1933); Arch. 9 D.N. van der Neut (1904-1985); Arch.10 een 60-tal foto's van wiskundigen; Arch.11 C.G.G. van Herk (1900-1982); Arch.12 J.H. Wansink (1894-1985); Arch.14 H. Freudenthal (1905-1990); Arch.15 D. van Dantzig (1900-1959); Arch.16 N.H. Kuiper (1920-1994).

Arch.1 W. Kapteyn (1849-1927) berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371).

Arch. 13 M.J. van Uven (1878-1959) berust nog bij het CWI.

4.10.2 Activiteiten In 2008 zijn geen interessante archieven beschikbaar gekomen. De commissie is in het verslagjaar eenmaal bijeengeweeest, en wel op 19 december.

4.10.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2008 T. Koetsier (VU) voorzitter, M. Bakker (CWI) secretaris, G. Alberts (RU), D. Beckers (VU), G.J.A.M. Bolten (Rijksarchief Noord-Holland, Haarlem), H.W. Lenstra, jr. (UL)
Miente Bakker, secretaris CPAW

4.11 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde (ITW, www.itw.nl)

4.11.1 Bestuur Gedurende het verslagjaar had het bestuur van ITW de volgende samenstelling: prof.dr.ir. E.R. Fledderus (TNO ICT, TU/e) voorzitter; dr. F.P.H. van Beckum, secretaris/penningmeester; prof.dr. R.D. van der Mei (CWI, VU); prof.dr. J.M. Schumacher (UvT).

4.11.2 Symposia Voor september werd een symposium georganiseerd bij TNO Defensie en Veiligheid te Den Haag. Dit moest echter wegens te weinig aanmeldingen worden afgelast. Om alsnog de belangstellenden te bereiken, worden enkele van de voorbereide presentaties in ITW-Nieuws gepubliceerd.

Rob van der Mei

Jan van Neerven

Faculteit EWI/DIAM

Technische Universiteit Delft

P.O.Box 5031

2600 GA Delft

j.m.a.m.vanneerven@tudelft.nl

Oratie

Oneindige dim

Ruis zien we overal om ons heen: op het niveau van elementaire deeltjes in de vorm van quantumfluctuaties, op microscopisch niveau als Brownse beweging van stofdeeltjes in een gas of vloeistof, en op macroscopisch niveau in de vorm van turbulentie in de atmosfeer en de verstoorde ontvangst van signalen. De wiskundige modellering van ruis leidt in veel gevallen tot stochastische partiële differentiaalvergelijkingen. Jan van Neerven, Antoni van Leeuwenhoekhoogleraar aan de Technische Universiteit Delft, onderzoekt dit type vergelijkingen met behulp van oneindig-dimensionale methoden uit de functionaalanalyse en kreeg een NWO-VICI subsidie om naar verbanden met de harmonische analyse te zoeken.

Het predicaat ‘eendimensionaal’ is niet bepaald een compliment. Mensen met eendimensionale opvattingen kunt u beter mijden. Beter is het om ‘nieuwe dimensies te openen’ of, iets bescheidener, ‘een nieuwe dimensie toe te voegen’. Dit zijn geliefde bezigheden, getuige het grote aantal treffers op Google: de zoekterm ‘nieuwe dimensie’ levert bijna 200 000 treffers op. ‘New dimension’ doet het nog beter met ruim 6 000 000 treffers. Hoe meer dimensies hoe beter, zo lijkt het!

Dimensies

Ongetwijfeld heeft u zich wel eens afgevraagd hoeveel dimensies er nu werkelijk zijn. De bewoners van de bekende novelle *Flatland* [1] van de 19e-eeuwse schrijver Edwin Abbott Abbott moeten het stellen met twee dimensies, hetgeen nogal wat beperkingen blijkt op te leggen. Onze eigen wereld heeft er drie. Waarom weet eigenlijk niemand, sterker nog, fysici speculeren druk over het bestaan van extra di-

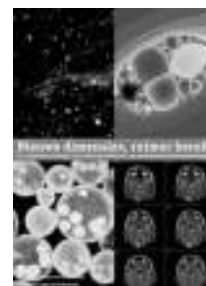
mensies, die op geheimzinnige wijze zijn opgerold en zich daardoor aan onze waarneming onttrekken.

Als het al niet duidelijk is of er méér dan drie dimensies bestaan, waarom zou men zich dan druk maken over oneindig veel dimensies? En dat aan een technische universiteit? Met tegenwerpingen als deze krijgt men als wiskundige vaak te maken. In hun nogal achteloze vanzelfsprekendheid geven zij uiting aan bekende misvattingen over de aard van wiskunde en de wijze waarop zij wordt beoefend en toegepast.

In het algemeen kan gesteld worden dat de wiskunde een problematisch imago heeft bij het algemene publiek. Als men zichzelf als wiskundige voorstelt, dan wordt steevast gereageerd met de woorden dat hij/zij vroeger ‘erg slecht’ was in wiskunde. Niet zelden gaat dit vergezeld met een gezichtsuitdrukking die verraadt dat hij/zij zich daar in het geheel niet voor schaamt. Dit is opmerkelijk, want “in fei-

te geeft men toe niet logisch te kunnen denken” [2].

Stelt u zich eens voor dat u schrijver bent en ik u met gepaste trots vertel dat ik vroeger al erg slecht in lezen was en dat ik van literatuur niets begrijp. Ongetwijfeld zou ik mijzelf meteen bij u diskwalificeren. Het leren waarderen van literatuur is onlosmakelijk verbonden met een goede educatie. Dat literatuur geen enkele bijdrage levert aan het oplossen van de problemen van deze wereld is niet van belang; ‘nut’ is immers niet het criterium waarop kunst beoordeeld wordt. ‘Begrijpelijkheid’ evenmin. Paul Dirac, een van de grondleggers van de quantummechanica en winnaar van de Nobelprijs voor natuurkunde in 1933, schijnt de volgende grap te hebben gemaakt toen hij hoorde dat Robert Oppenheimer, een ander bekend natuurkundige, in zijn vrije tijd gedichten schreef:



Nieuwe dimensies in het wiskundebeleid



Jan van Neerven

ensies

“In science one tries to tell people, in such a way as to be understood by everyone, something that no one ever knew before. But in the case of poetry, it’s the exact opposite!” [3]

In haar formele strengheid is wiskunde zelf een vorm van kunst. Een kunst die haar waarheden onweerlegbaar voor de eeuwigheid vastlegt in elegante bewijzen. Het is een paradox dat wiskunde, juist dóór haar volledige begrijpelijkheid, een kunst is met een uiterst klein publiek. Haar toepassingen daarentegen doordringen onze gehele maatschappij. Uw mobiele telefoon, uw dvd-speler, de mri-scan in het ziekenhuis, ons bankwezen, het dienstrooster van de spoorwegen, allemaal maken zij gebruik van moderne wiskunde. Dit is geen toeval: de wetten der natuur zijn immers geschreven in de taal der wiskunde. Daar waar wij de dingen om ons heen naar onze hand zetten is wiskunde als vanzelfsprekend ons gereedschap.

De houding van het grote publiek ten aanzien van wiskunde is vermoedelijk te verklaren uit een misconceptie over de aard van wiskunde. Het beeld bestaat van wiskunde als een soort hogere rekenkunst voor bollebozen. Dat is niet verwonderlijk als men naar het huidige schoolcurriculum kijkt, waar abstractie en redeneerkunst nagenoeg verdwenen zijn en de schoolboeken grossieren in onduidelijkheden. Nu is het zeker zo dat wiskun-

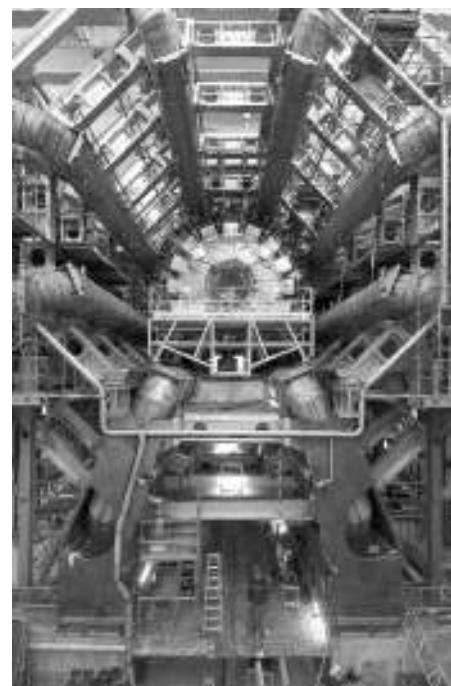
digen meestal goed zijn in rekenen. Een niet al te grote staartdeling kan ik met pen en papier zeer wel uitvoeren. Maar dat kunt u ook (als u boven de 35 bent), en als het lastiger wordt grijp ik net als u naar de rekenmachine. Men zou een wiskundige eerder kunnen typeren als iemand die slimme methoden bedenkt om rekenwerk te vermijden. Een wiskundige herkent structuren en bewijst dan algemene stellingen die een veelheid aan speciale gevallen omvatten. Daarnaast bedenkt hij snelle algoritmen om het échte rekenwerk efficiënt door een computer te laten doen. ‘Rekenen’ is een woord dat veel wiskundigen met een zekere afkeer in de mond nemen.

Partiële differentiaalvergelijkingen met ruis

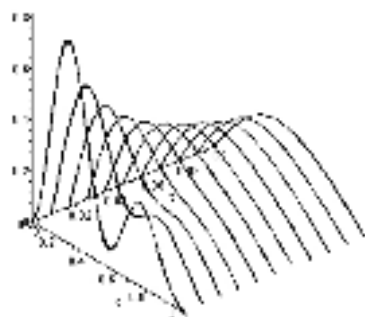
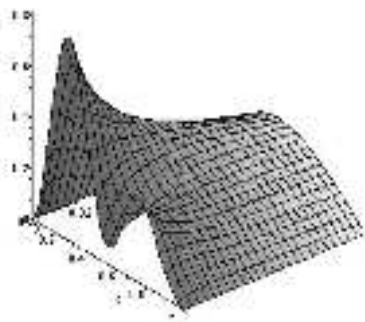
Aan de hand van een voorbeeld ontleend aan mijn eigen onderzoek en gemotiveerd vanuit de toepassingen wil ik u tonen dat wiskunde meer is dan rekenkunst. Het zal u opvallen dat er in het geheel niet gerekend wordt. Er wordt geredeneerd.

Niet alleen hoop ik u iets te laten zien van de elegantie van het wiskundige denken, tegelijk hoop ik u te overtuigen dat geavanceerde wiskunde onontbeerlijk gereedschap is voor de toegepaste wiskundige. Aan het eind van mijn rede zal ik met u stilstaan bij de consequenties van deze vaststelling voor onze opleiding tot wiskundig ingenieur.

Mijn leeropdracht behelst de ‘Stochastische Analyse’. In dat kader houd ik mij bezig met het toepassen van analytische methoden bij de bestudering van stochastische partiële differentiaalvergelijkingen. Dit zijn vergelij-



Met de Large Hadron Collider willen natuurkundigen onder andere bewijzen vinden voor het bestaan van extra dimensies in de fysica van deeltjes, zoals door de zogenaamde stringtheorie wordt gesuggereerd.



Figuur 1 Oplossing van de warmtevergelijking voor $n = 1$ en $D = (0, 1)$ in 'plakjes' geknipt

kingen die de tijdsevolutie beschrijven van een systeem dat onderhevig is aan toevallige invloeden (zogenaamde 'ruis'). Men kan denken aan objecten die blootstaan aan de interactie met luchtmoleculen, aan stromen-de vloeistof die zelf uit door elkaar heen be-



Paul Dirac (1902–1984)

wegende moleculen bestaat, of aan populaties in een habitat waar op onvoorspelbare plaatsen predatoren op de loer liggen.

Slechts in sporadische gevallen is het mogelijk om differentiaalvergelijkingen expliciet op te lossen. In het algemeen is men aangewezen op abstracte en vaak indirecte methoden om het bestaan van oplossingen te bewijzen en die op hun eigenschappen te onderzoeken. Dat laatste blijkt mogelijk te zijn zonder de oplossing expliciet te kennen; in de regel is men ook niet werkelijk geïnteresseerd in een precieze formule, maar alleen in kwalitatieve eigenschappen zoals convergentie naar een stabiele limiet. Het is hier dat technieken uit de oneindigdimensionale analyse een belangrijke rol spelen.

De warmtevergelijking

We laten de ruis nog even buiten beschouwing en nemen als uitgangspunt de *warmtevergelijking*. Stelt u zich een object in n dimensies voor: in dimensie $n = 1$ kunnen we denken aan een staaf, in dimensie $n = 2$ aan een plaat en in dimensie $n = 3$ aan een blok. Wiskundig beschrijven we het object als een niet-lege open deelverzameling D van de n -dimensionale Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ (met 'open' bedoelen we dat D geen punten van zijn rand bevat; hiermee voorkomen we dat D te grillig kan worden). We zijn geïnteresseerd in de vraag hoe de warmte zich als functie van tijd en plaats verspreidt. Dit diffusieproces wordt beschreven door de partiële differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x), & x \in D, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (1)$$

Hier is

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

de Laplace-operator. De onbekende functie u beschrijft het verloop van de temperatuur als functie van de tijd en plaats; $u(t, x)$ geeft de temperatuur op tijdstip t en plaats x . We veronderstellen dat op tijdstip $t = 0$ het temperatuurprofiel wordt gegeven door een functie f . Tenslotte specificeren we wat er op de rand van D gebeurt: we kunnen bijvoorbeeld de temperatuur op een vaste waarde houden of ervoor zorgen dat er geen warmteuitwisseling met de omgeving kan plaatsvinden. Door tijd en plaats te discretiseren kunnen we het warmtetransport in een computer simuleren. Dit levert uiteraard slechts een benadering van wat er zich in werkelijkheid af-

speelt. Dat laatste kunnen we onderzoeken met behulp van oneindigdimensionale technieken. In plaats van u te beschouwen als een reëelwaardige functie van de twee variabelen t en x knippen we u als het ware in 'plakjes', voor ieder tijdstip t een plakje. Zie figuur 1.

Zo'n plakje is een functie die alleen van de variabele x afhangt en de temperatuurverdeling ten tijde t beschrijft. Op fysische gronden is het aannemelijk om te veronderstellen dat deze plakjes *integreerbare* functies zijn; hun integralen kunnen we dan interpreteren als de totale (eindige) warmte-inhoud. De klasse van integreerbare functies op D wordt meestal genoteerd als $L^1(D)$. Het is een zogenaamde lineaire vectorruimte, wat zoveel wil zeggen dat veelvouden en sommen van integreerbare functies wederom integreerbaar zijn. Dit levert ons een functie U , met waarden in $L^1(D)$, gedefinieerd door het voorschrift

$$(U(t))(x) = u(t, x).$$

Wat helpt ons dit verder? Door de variabele x in zekere zin te elimineren (U hangt alleen expliciet van t af) hebben we de *partiële differentiaalvergelijking* voor u herschreven tot een *gewone differentiaalvergelijking* voor U :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = \Delta U(t), \\ U(0) = f. \end{cases} \quad (2)$$

Een oplossing van (2) kunnen we ons voorstellen als een 'pad' in $L^1(D)$ dat vertrekt in het 'punt' f . Op ieder tijdstip t geeft $U(t)$, als functie in $L^1(D)$, de warmteverdeling op tijdstip t .

Men kan bewijzen dat de vectorruimte $L^1(D)$ *oneindigdimensionaal* is, waarmee we bedoelen dat $L^1(D)$ niet eindigdimensionaal is (zie kader 1). Daar is niets geheimzinnigs aan; het betekent enkel dat er 'erg veel' integreerbare functies zijn. Het is de prijs die we betalen om de partiële differentiaalvergelijking (1) te beschrijven tot de gewone differentiaalvergelijking (2). Daar staat tegenover dat we goed weten hoe we gewone differentiaalvergelijkingen kunnen oplossen, en de zojuist beschreven techniek stelt ons in staat deze kennis overdragen op partiële differentiaalvergelijkingen. Dit ogenschijnlijk eenvoudige idee blijkt bijzonder effectief en heeft verstrekende consequenties.

Functionaalanalyse

We vragen ons vervolgens af hoe we de differentiaalvergelijking (2) kunnen oplossen. Vroeg in de vorige eeuw realiseerde men zich dat hiervoor een uitbreiding nodig is van de

Dimensies

We noemen een vectorruimte V *eindigdimensionaal* als we een eindige verzameling elementen in V kunnen vinden met de eigenschap dat ieder element van V op een unieke wijze geschreven kan worden als een lineaire combinatie van deze elementen. Zo'n verzameling noemen we een *basis* voor V . Er kunnen tal van verschillende bases voor een en dezelfde vectorruimte bestaan, maar iedere basis bestaat uit evenveel elementen. Dat aantal noemen we de *dimensie* van V . Voorbeelden kent u: de reële lijn $\mathbf{R}$ heeft dimensie 1, het platte vlak $\mathbf{R}^2$ heeft dimensie 2, en de driedimensionale ruimte $\mathbf{R}^3$ heeft dimensie 3 (het woord zegt het al).

analyse en lineaire algebra naar oneindigdimensionale ruimten. Deze theorie is verbonden met de namen van Volterra, Riesz, Hilbert, Banach en velen anderen.

Velen van u zullen deze hier voor het eerst horen, maar voor wiskundigen zijn het de namen van illustere helden. Het succes van de theorie waarvan zij de grondleggers zijn, de zogenaamde *functionaalanalyse*, is weergaloos. De moderne theorie van partiële differentiaalvergelijkingen is er grotendeels op gebaseerd, maar ook bijvoorbeeld de wiskundige grondslagen van de quantummechanica.

Met behulp van enige analyse en lineaire algebra kunnen we een lineaire differentiaalvergelijking in eindig veel dimensies oplossen met behulp van de exponentiële functie. Dit suggereert de volgende formule voor de oplossing van de warmtevergelijking:

$$U(t) = \exp(t\Delta)f.$$

Met behulp van functionaalanalytische methoden kan men een precieze definitie van de operatoren $\exp(t\Delta)$ geven (bijvoorbeeld als generalisatie van Eulers formule voor de exponentiële functie) en bewijzen dat de zojuist gegeven functie U de differentiaalvergelijking (2) inderdaad oplost. De operatoren $\exp(t\Delta)$ worden dan ook de *oplossingsoperatoren* voor de warmtevergelijking genoemd. Zij beelden de beginwaarde f af op de toestand op tijd t en voldoen aan de volgende algebraïsche relaties, de zogenaamde *halfgroeprelaties*:

$$\exp(0\Delta) = I, \exp(s\Delta)\exp(t\Delta) = \exp((s+t)\Delta).$$

De eerste identiteit drukt uit dat er op tijdstip $t = 0$ nog niets gebeurd is, en de tweede dat het niet uitmaakt of we de tijd eerst t eenheden laten lopen en dan nog eens s eenheden,

of $s + t$ eenheden in één keer.

Slechts voor zeer speciale gebieden D kan men de operatoren $\exp(t\Delta)$ expliciet bepalen. Als we $D = \mathbf{R}^n$ nemen geldt bijvoorbeeld

$$\exp(t\Delta)f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \exp(-|x - y|^2/4t) dy.$$

Voor de meeste gebieden D echter moet men het stellen met de wetenschap dat de existentie van een familie oplossingsoperatoren verzekerd is. Desondanks is het mogelijk om kwalitatieve eigenschappen van de oplossingen zeer precies te onderzoeken. Ook lenen deze abstracte methoden zich voor het oplossen van veel algemenere partiële differentiaalvergelijkingen, waarbij de eenvoudige Laplace-operator vervangen wordt door een meer ingewikkelde differentiaaloperator. Het is belangrijk er op te wijzen dat 19e-eeuwse methoden voor het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen, zoals scheiding van variabelen, voor deze doeleinden volledig tekortschieten.

Brownse beweging

Nu we gezien hebben hoe we met behulp van oneindigdimensionale methoden partiële differentiaalvergelijkingen kunnen oplossen is het tijd om een ruisbron te introduceren. De introductie van ruis creëert geheel nieuwe problemen, niet in de laatste plaats van modelmatige aard. Intuïtief begrijpt iedereen wat we met 'ruis' bedoelen, maar het is niet gemakkelijk er een precies wiskundig formalisme voor te ontwerpen. Ik zal schetsen hoe dit in zijn werk gaat.

We beginnen eenvoudig. Stelt u zich een puntdeeltje voor dat in één dimensie op en neer kan bewegen. Het deeltje staat bloot aan een continu bombardement van veel kleinere deeltjes. Onder invloed van de botsingen zal het op een grillige wijze heen en weer gaan bewegen.

Een grafische weergave van vier typisch paden wordt gegeven in Figuur 2. De positie van het deeltje is verticaal uitgezet tegen de tijd op de horizontale as. Het toevalsproces dat we hier beschreven hebben noemen we een *Brownse beweging*, vernoemd naar de Engelse botanist Robert Brown (1773–1858) die deze beweging (in twee dimensies) voor het eerst waarnam onder een microscoop bij het bestuderen van stuifmeel.

We keren terug naar het gebied D en stellen ons voor dat ieder punt van het gebied blootstaat een bombardement zoals hierboven beschreven. Bij iedere impact kunnen er

koude of warme deeltjes worden weggeschoten, waardoor lokaal de temperatuur iets stijgt of daalt. Deze fluctuaties hangen zowel van de tijd als van de plaats af. We modelleren zulke ruis als een *Brownse beweging over het gebied* D . Het voert te ver hier de precieze definitie te geven; we stellen ons als het ware voor dat het gebied D voortdurend getroffen wordt door toevallige *functies* gedefiniëerd op D .

De precieze wiskundige formulering leidt tot een stochastische partiële differentiaalvergelijking van de volgende vorm:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x) + \frac{\partial B}{\partial t}(t, x), \\ u(0, x) = f(x), \end{cases}$$

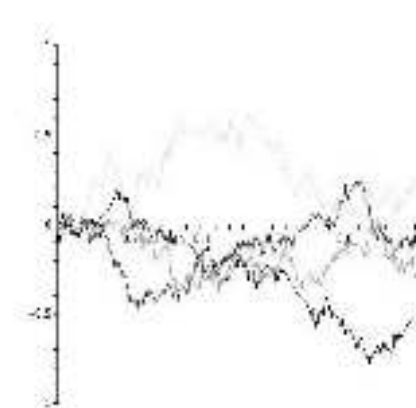
waarbij de extra term de ruis representeert. Net als eerder kunnen we deze vergelijking omschrijven tot een stochastische differentiaalvergelijking in $L^1(D)$,

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}(t) = \Delta U(t) + \frac{dB}{dt}(t), \\ U(0) = f, \end{cases}$$

waarbij B nu een Brownse beweging over D voorstelt. 'Ruis' interpreteren we dus als de 'afgeleide' van B ; een precieze rechtvaardiging hiervoor kan gegeven worden met de zogenaamde centrale limietstelling uit de kansrekening.

Nieuwe verbanden

Tot voor kort was het onduidelijk hoe vergelijkingen als deze wiskundig kunnen worden opgelost. De moeilijkheid zit hem in de vraag hoe men grip krijgt op oneindigdimensionale ruis. Dit probleem was het onderwerp van mijn NWO-VIDI project 'Stochastic integration in Banach spaces and applications



Figuur 2 Vier Brownse paden in dimensie $n = 1$ als functie van de tijd

to stochastic evolution equations'. In samenwerking met mijn toenmalige promovendus Mark Veraar en collega Lutz Weis uit Karlsruhe is het gelukt dit probleem geheel op te lossen. Hiervoor was het nodig om nieuwe oneindigdimensionale technieken te bedenken, waarbij de inspiratie in belangrijke mate werd ontleend aan recente ontwikkelingen in ander modern vakgebied in de wiskunde, de harmonische analyse. Het bestaan van verbanden tussen zulke ogenschijnlijk disjunctie vakgebieden is opmerkelijk en duidt op een diepere eenheid in de wiskunde. Deze verbanden worden nader onderzocht in mijn huidige NWO-VICI project 'Infinite-dimensional stochastic analysis and harmonic analysis'.

Figuur 3 toont een numerieke benadering van oplossing zonder en met ruis. De onderste grafiek is gebaseerd op een convergentieresultaat voor een benaderingsalgoritme dat voortvloeit uit de zojuist genoemde nieuwe theoretische resultaten.

Toegepaste wiskunde

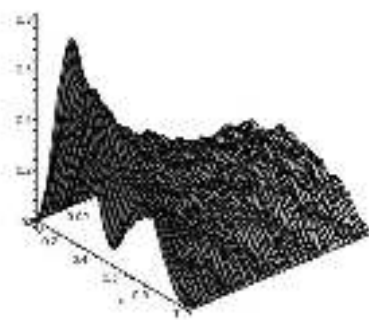
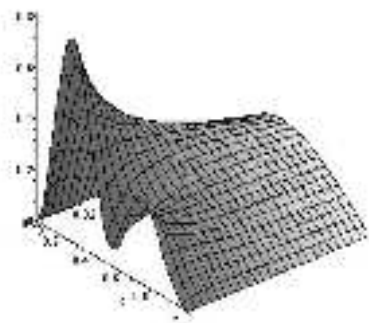
Ik hoop u te hebben laten zien dat ogenschijnlijk eenvoudige vragen uit de praktijk kunnen leiden tot complexe wiskundige problemen die enkel met geavanceerde technieken kun-

nen worden beantwoord. Voor de ingenieurspraktijk is het derhalve van belang kennis te hebben van moderne wiskunde. In de opleiding tot wiskundig ingenieur dient er dan ook voldoende aandacht aan te worden besteed. Een wiskundig ingenieur moet meer kunnen dan modelleren alleen, hij dient ook in staat te zijn de wiskundige vraagstukken die uit zijn modellen voortvloeien op te lossen. Dit vergt een forse investering, waarmee in een vroeg stadium van de studie moet worden begonnen. Het abstractieniveau van moderne wiskunde is hoog en het technisch raffinement overweldigend. De weg er naar toe is lang, maar wie hem bewandelt, wordt rijkelijk beloond.

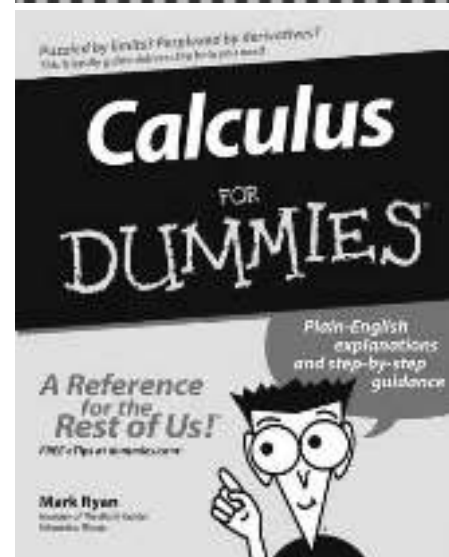
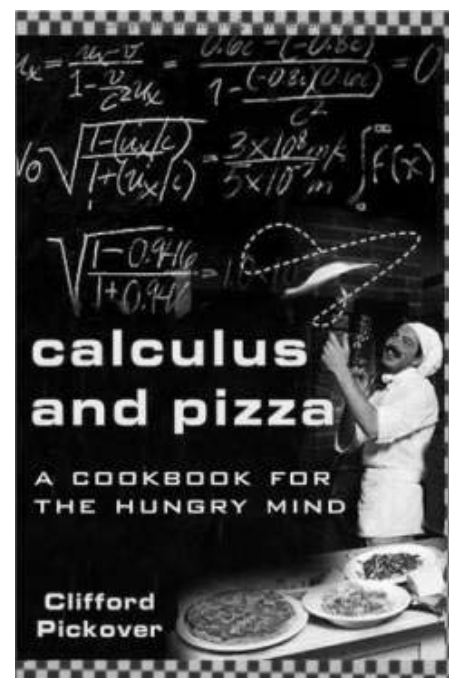
Het is in dit verband interessant om een vergelijking te maken met vooraanstaande technische universiteiten in het buitenland. In de Verenigde Staten hebben instellingen zoals het CalTech en MIT over het algemeen zowel een sectie Mathematics als een sectie Applied Mathematics. Het hier gepresenteerde onderzoek, dat op u wellicht is overgekomen als in hoge mate abstract en fundamenteel, zou aan deze instellingen zijn ondergebracht in de sectie Applied Mathematics. De secties Mathematics houden zich uitsluitend met zuiver wiskundig onderzoek van het hoogste niveau bezig; de vraag naar toepassingsrelevantie wordt daar niet gesteld. Dat hoeft ook niet: veel fundamentele wiskunde is gemotiveerd is vanuit toepassingen, bijvoorbeeld in de theoretische natuurkunde. Daarnaast vindt de meeste wiskunde, ook de meest theoretische, vroeg of laat haar weg naar goede toepassingen. De scheidslijn tussen 'toegepast' en 'zuiver' is bij nader inzien zo smal dat het onderscheid nauwelijks zinvol is. Het getuigt dan ook van visie om niet alleen in te zetten op direct toepasbaar wiskundig onderzoek, maar tevens ruimte te bieden aan meer fundamenteel onderzoek.

Onze opleiding tot wiskundig ingenieur is bij de invoering van het Ba/Ma stelsel gefuseerd met de wiskundeopleiding in Leiden en is daarbij geheel vernieuwd, met een goed evenwicht tussen theorie en praktijk. Het gemeenschappelijke curriculum met de Universiteit Leiden is verrijkend voor de studenten en biedt veel keuzemogelijkheden. Toch zie ik ook nieuwe kansen. Zo ontbreekt een initiatief om de betere student aan te lokken. Verschillende Nederlandse universiteiten hebben zo'n initiatief met veel succes gerealiseerd. Een dubbele bachelor, zoals Leiden die in combinatie met natuurkunde aanbiedt, zou binnen onze faculteit EWI gerealiseerd kunnen worden met elektrotechniek

of informatica. De eerlijkheid gebiedt echter te zeggen dat ik twijfel of die bij studenten in een werkelijke vraag zou voorzien. Mijn voorkeur gaat eerder uit naar een honours-variant met meer aandacht voor wiskundige verdieping. Door een combinatie van twee omstandigheden blijft ons curriculum op dit punt enigszins achter: met de introductie van de Ba/Ma zijn enkele wiskundige vakken gesneuveld om ruimte te creëren voor de minors, en de wens tot studeerbaarheid heeft geleid tot de introductie van calculus als gedeeltelijke vervanging van het analyseonderwijs. Een honours-variant kan hier tegenwicht aan bieden en zet onze opleiding op de kaart als een opleiding met ambities en met



Figuur 3 Oplossing van de warmtevergelijking met ruis voor $d = 1$ en $D = (0, 1)$



Calculus: (i) veel recepten, weinig bewijzen. (ii) niet voor studenten

een uitstraling naar de bovengemiddelde student.

Calculus of Analyse?

Ik wil iets langer stilstaan bij het gebruik van calculusboeken, aangezien dit het onderwijs in mijn eigen vak raakt. We hebben te maken met een landelijke trend, waarbij ook de professionalisering van het universitaire onderwijs een rol speelt. Engelstalige boeken doen het beter bij visitaties en accreditaties dan zelfgeschreven syllabi. Ook kan men verdedigen dat calculusboeken de aansluiting met het vwo verbeteren. Maar daar waar een inhaalslag broodnodig is wordt nu voortgemodderd. Calculus is voor de universitaire studie wiskunde wat realistisch rekenen is voor het vwo. Calculusboeken zijn als reusachtige puddingen, waar de theorie als kleine krenten in rondzweeft. De ervaring leert dat studenten er niet in slagen die krenten er uit te vissen. De hele pudding opeten gaat niet; dan word je ziek. Studenten concentreren zich dan ook op de toefjes slagroom boven op de pudding, de opgaven, die zij proberen te verorberen terwijl de pudding zelf onaangeroerd blijft. Als zij dan in de latere jaren gezonde kost krijgen voorgeschoteld hebben zij niet geleerd die te verteren. Deze achterstand wordt in de meeste gevallen nooit meer goedgeemaakt. De eetproblemen beginnen al eerder. Dit brengt ons bij een onderwerp waarover een

intensief maatschappelijk debat gaande is: de kwaliteit van het middelbaar onderwijs. Ik weersta de verleiding om mij er vanaf dit spreekgestoelte in te mengen en wil slechts ingaan op enkele aspecten die naar mijn mening bijzondere aandacht verdienen.

Academische vorming

In Nederland hebben de universiteiten, anders dan in de ons omringende landen, niet het monopolie op de eerstegraads lerarenopvoeding. De universitaire lerarenopleidingen leveren jaarlijks slechts een gering aantal eerstegraads bevoegde leraren af, bij lange na niet voldoende om in de landelijke vraag te voorzien. Als gevolg hiervan is academisch gevormde leraar op het vwo een steeds zeldzamer wordend verschijnsel. Dit is zorgelijk, want alleen de academisch gevormde leraar is in staat over de beperkingen van het schoolboek heen te kijken, met verbeelding méér dan alleen zijn vak te doceren, en zo verwondering en intellectuele nieuwsgierigheid bij de leerling aan te wakkeren. Sprekend in analogieën: hij leert scholieren niet alleen Griekse woorden spellen, maar leest met hen ook Homerus.

Een kleine persoonlijke anekdote illustreert mijn punt. Als scholier liep ik op een dag tegen de volgende identiteit aan:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \frac{1}{4}\pi,$$

waarbij $\pi = 3.14159265\dots$ de omtrek van een cirkel met diameter 1 voorstelt. Een wonderbaarlijke identiteit die mij buitengewoon fascineerde. Hoe kan het zijn dat de rij oneven getallen iets met het getal π te maken heeft, en waarom moet men afwisselend optellen en aftrekken? Wat had ik mij verheugd als iemand het mij had kunnen uitleggen! Achteraf blijkt vwo-wiskunde voldoende om dit te begrijpen. Hier werd een kans gemist. In de onjuiste veronderstelling dat universitaire wiskunde slechts bestaat uit het maken van steeds moeilijkere sommen heb ik voor een andere studie gekozen. Via biologie ben ik uiteindelijk toch bij wiskunde terechtgekomen, maar dat gebeurde pas nadat ik in de ban raakte van de fraaie bewijzen in een syllabus 'Analyse I' die ik min of meer toevallig had aangeschaft voor zelfstudie.

In het Masterplan Toekomst Wiskunde [4], dat onlangs vanuit de academische gemeenschap aan het ministerie van OCW is gepresenteerd, wordt gepleit voor het laten indalen van de eerstegraads leraarsbevoegdheid in de bachelorstudie. Deze aanbevelingen dienen te worden gezien tegen de achtergrond van het gegeven dat het vakinhoudelijke niveau van de huidige eerstegraads lerarenopvoeding aan het hbo achterblijft bij de universitaire wiskundepropedeuse. Door de leraarsbevoegdheid laagdrempeliger te maken kan men het aantal leraren met een academische

Het Internet Seminar

Dit is een internationale cursus op beginnend graduate niveau, met wisselende onderwerpen uit de Analyse, die via het internet aan een internationaal publiek van deelnemende studenten wordt aangeboden. Jaarlijks wordt de cursus vanuit een andere universiteit aangeboden. Initiatiefnemer van het Internet Seminar is de universiteit Tübingen (Duitsland),



De poster van het ISem 2007/08

die de eerste vijf edities bekostigde uit een beurs voor virtuele leeromgevingen van het bundesland Baden-Württemberg.

De elfde editie, die in het cursusjaar 2007/2008 met steun van een VICI subsidie vanuit Delft werd georganiseerd, ging over het onderwerp van deze rede, stochastische partiële differentiaalvergelijkingen. Er deden ruim tachtig studenten verspreid over veertig universiteiten mee. Ongeveer vijftientig van hen hebben aan de afsluitende workshop deelgenomen.

Ieder Internet Seminar bestaat uit drie delen. In het eerste deel wordt wekelijks een schriftelijk college met opgaven aangeboden. Dit deel omvat vijftien colleges en loopt van oktober tot en met maart; bij toerbeurt worden universiteiten aangewezen die de opgaven oplossen en uitwerkingen op de website posten. Het tweede deel bestaat uit projecten, waaraan de studenten



Groepsfoto van de afsluitende workshop. Gehurkt op de voorste rij in het midden de auteur

in kleine internationale groepjes werken. Tenslotte komen de studenten in juni bij elkaar op een workshop, waar zij de projecten presenteren. Hier nodigen wij ook gast-sprekers uit als aanvulling op het project-programma.

Zie <http://fa.its.tudelft.nl/isemwiki>.

achtergrond wezenlijk doen toenemen. Ik doe dan ook een beroep op onze bestuurders het pleidooi van de sectorplannen serieus in overweging te nemen. Zeker, aan onze universiteit staat het enigszins op gespannen voet met de huidige master Science, Education, and Communication, maar op voorhand onverenigbaar ermee is het geenszins.

Dit laat onverlet dat ook de status van het leraarsberoep voor academici verbeterd dient te worden. Want niet alleen hebben we steeds minder vakbekwame leraren, zij worden slecht betaald en bij de vele hervormingen is de rol van de leraar als kennisdrager en kennisoverdrager steeds verder gemarginaliseerd. Door schaalvergroting en professionalisering hebben managers en bestuurders steeds meer de overhand gekregen in het onderwijsproces. Zij bepalen hoe dat er uit ziet, en niet de leraren zelf. In zijn scherpe essay *Geschonden Beroepseer* [5] analyseert Ad Verbrugge, filosoof en oprichter van

de Vereniging Beter Onderwijs Nederland, de ze cultuuromslag als volgt:

“De hedendaagse managementcultuur - transformeert op ingrijpende wijze de context waarin werk wordt verricht. (...) Het modieuze spreken over professionaliseren is een ironische verhulling van wat er momenteel aan de hand is: de transformatie van talloze professies tot ‘processies’. (...) Hij (de werknemer, JvN) moet zich verantwoorden aan de hand van meetbare output die wordt verwerkt in een verrekenmodel waarmee hij het niet eens is. Of hij zijn werk goed of slecht doet, wordt aan de hand daarvan beoordeeld door mensen die weinig verstand hebben van zijn werk, maar wel bepalen wat zijn werkmogelijkheden zijn en wat hij moet doen.”

Academische vrijheid

Wij kunnen lering trekken uit deze fouten. Het ligt voor de hand om het essay van Verbrugge, dat betrekking heeft op de situatie in het

onderwijs en de zorg, door te trekken naar de universiteiten. Ook die zijn in hoog tempo aan het professionaliseren. De TU Delft wil zich nadrukkelijk profileren als leverancier van hoogwaardige kennis, en valorisatie staat hoog op de agenda. We zien daardoor een toenemende sturing vanuit het management. Laten we echter niet uit het oog verliezen dat de primaire missies van de universiteit nog steeds het onderwijs en het onderzoek zijn. Alle andere activiteiten zijn daarvan afgeleid. Het zijn de hoogleraren die voor de primaire missies de inhoudelijke eindverantwoordelijkheid dragen. Het creatieve proces laat zich niet van bovenaf controleren of kwantificeren, het is gebaat bij onafhankelijkheid en academische vrijheid. Gedrevenheid, nieuwsgierigheid en diletantisme zijn de bron van wetenschappelijke creativiteit, zowel in het onderwijs als in het onderzoek. De beste voedingsbodem daarvoor is vertrouwen. ↵

Referenties

- 1 E. Abbott Abbott, *Flatland. A Romance of Many Dimensions*, 1884.
- 2 Vrij naar een BBC-interview met Marcus du Sautoy
- 3 R. Jungk, *Brighter Than a Thousand Suns: A Personal History of the Atomic Scientists*, p. 22, Harcourt, 1958.
- 4 *Masterplan Toekomst Wiskunde*, november 2008
- 5 A. Verbrugge, ‘Geschonden Beroepseer’, in: *Beroepszeer: Waarom Nederland Niet Goed Werkt*, G. van den Brink, G. Mak, L. Prick (samenstellers), Uitgeverij Boom, 2005.

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidersgracht 24
1018 TV Amsterdam
j.vandecraats@uva.nl

Onderwijs

Twee bewogen jaren

Op 4 november 2008 stemde de VSNU, de Vereniging van Samenwerkende Nederlandse Universiteiten, op belangrijke punten in met de beslissingen van staatssecretaris Marja van Bijsterveldt-Vliegenghart omtrent de examenprogrammavoorstellen wiskunde van de 'commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs' (cTWO, commissie Siersma). Vier maanden eerder had ook de HBO-raad zijn instemming betuigd. De staatssecretaris hoeft haar genomen besluiten niet ongedaan te maken of aan te passen. Daarmee komt een einde aan een woelige periode van ruim twee jaar waarin naast de commissie Siersma ook de 'resonansgroep wiskunde' een belangrijke rol speelde. Jan van de Craats, voorzitter van de resonansgroep, blikst terug.

Per 1 augustus 2007 zijn voor havo en vwo vernieuwde profielen in werking getreden. De eerste eindexamens volgens de nieuwe profielen zullen worden afgenomen in 2009 (havo) en 2010 (vwo). Het gaat hierbij om aanpassingen in de reeds bestaande profielen Cultuur en Maatschappij (C&M), Economie en Maatschappij (E&M), Natuur en Gezondheid (N&G) en Natuur en Techniek (N&T). Voor de wiskunde betekende dit een herschikking, waarbij er voor havo drie wiskundevakken ontstonden: wiskunde A, wiskunde B en wiskunde D, en voor vwo vier, namelijk wiskunde A, wiskunde B, wiskunde C en wiskunde D. De vakken wiskunde D zijn nieuw: het zijn keuzevakken die alleen naast wiskunde B kunnen worden gekozen. Ze zijn bedoeld als verdieping en verbreding; het vervolgonderwijs kan ze niet als ingangseis stellen. Wiskunde A is bestemd voor de profielen E&M en N&G, Wiskunde B is bestemd voor N&T en wiskunde C voor C&M (alleen vwo). In de profielen E&M en N&G kan wiskunde B in plaats van wiskunde A worden gekozen. Wiskunde C kan in C&M vervangen worden door wiskunde A of wiskunde B.

Studentenactie Lieve Maria

Aan de totstandkoming van de nieuwe profielen ging een brede maatschappelijke en politieke discussie vooraf. Voor de wiskunde trok daarbij de studentenactie *Lieve Maria* van begin 2006 sterk de aandacht. Die actie, gericht tot de toenmalige minister van OCW Maria van der Hoeven, plaatste de al enige jaren

sluimerende aansluitingsproblemen wiskunde bij de overgang van voortgezet onderwijs (havo/vwo) naar hoger onderwijs (hbo/wo) in het volle licht van de actualiteit. Het voornemen van de minister om in de nieuwe profielen de aantallen studielasturen wiskunde op havo en vwo te reduceren, was de directe aanleiding tot het studentenprotest. Niet *minder* uren wiskunde, maar juist *meer* uren waren er volgens de studenten nodig om de problemen die zij bij de wiskunde in het hoger onderwijs ondervonden, op te lossen.

Allengs bleek echter dat het niet zozeer ging om urenaantallen, als wel om de inhoud van de wiskunde op havo en vwo. Die sloot niet aan op de wensen en behoeften van het vervolgonderwijs. Deze aansluitingsproblematiek speelde dan ook de hoofdrol in de debatten in de Tweede Kamer over deze kwestie. Kamerleden twijfelden of er op havo en vwo wel voldoende aandacht was voor 'inoefenen', zij hadden aarzelingen bij de samenstelling van de commissie Siersma die voorstellen moest doen voor nieuwe examenprogramma's wiskunde vanaf 2010, ze wezen op de bijspiijkercursussen in het hoger onderwijs en het tekort aan aandacht voor basale en abstracte wiskunde, en ze hadden aarzelingen bij de rol van instellingen als Freudenthal Instituut (FI) en de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO).

Dit alles kreeg vorm in een aantal moties, die met algemene stemmen werden aangenomen: 2005–2006, 30187, nr. 27 (Hamer en Balemans, betere aansluiting wiskunde B op

bèta studies), nr. 28 (Hamer en Mosterd, nadere eisen in verband met gewenste aansluiting), nr. 30 (Kranefeld en Lambrechts, onderhouden van basale kennis) en tenslotte nr. 33 (Lambrechts c.s.). De laatste motie riep op een *resonansgroep* in te stellen die de voorstellen van de commissie Siersma zou beoordelen op hun relevantie voor de doorstroom. De resonansgroep zou moeten bestaan uit betrokkenen die, als docent of student in het hoger onderwijs, praktische ervaring hebben met de problematiek van de aansluiting tussen voortgezet onderwijs en hoger onderwijs op het gebied van de wiskunde. De minister zegde toe de moties te zullen uitvoeren.

Een ander gevolg van de kamerdebatten was dat de minister op aandringen van de kamer de voorgenomen reductie van de urenaantallen voor wiskunde voor een deel ongedaan maakte. In tabel 1 staan per profiel de urenaantallen in de oude situatie (vóór de profielwijzigingen) en de nieuwe situatie die per 1 augustus 2007 is ingegaan.

Eerste activiteiten van de resonansgroep

Overeenkomstig de wens van de Tweede Kamer stelde minister Van der Hoeven per 1 augustus 2006 een resonansgroep wiskunde in voor de periode tot 1 december 2007. Naar verwachting zou de commissie Siersma namelijk in het voorjaar van 2007 met voorstellen voor vernieuwde wiskundeprogramma's komen. Tussentijds zou de resonansgroep al kunnen reageren op conceptvoorstellen zodat de commissie Siersma daarmee rekening zou kunnen houden, waarna in augustus 2007 experimenten zouden kunnen starten om de programmavoorstellen in een aantal scholen te beproeven. In 2010 zouden de vernieuwde en, indien nodig, nog bijgestelde programma's dan kunnen worden ingevoerd.

De resonansgroep kon onmiddellijk aan het werk, want op de valreep had de Tweede Kamer nog gevraagd of zij ook haar oor-

<i>Havo</i>	<i>oude situatie:</i>	<i>uren</i>	<i>per 1 augustus 2007:</i>	<i>uren</i>
N&T	Wiskunde B1,2	440	Wiskunde B	360
			Wiskunde D (profielkeuzevak)	320
N&G	Wiskunde B1	320	Wiskunde A (of B)	320/360
E&M	Wiskunde A1,2	280	Wiskunde A (of B)	320/360
C&M	Wiskunde A1	160		
<i>Vwo</i>	<i>oude situatie:</i>	<i>uren</i>	<i>per 1 augustus 2007:</i>	<i>uren</i>
N&T	Wiskunde B1,2	760	Wiskunde B	600
			Wiskunde D (profielkeuzevak)	440
N&G	Wiskunde B1	600	Wiskunde A (of B)	520/600
E&M	Wiskunde A1,2	600	Wiskunde A (of B)	520/600
C&M	Wiskunde A1	360	Wiskunde C (of A of B)	480/520/600

Tabel 1 De uren tellen per profiel in de oude en nieuwe situatie

deel wilde geven over de per 1 augustus 2007 in te voeren bijgestelde wiskundeprogramma's in de vernieuwde profielen. In feite was dit een onmogelijke opdracht omdat die programma's al vrijwel vastlagen: de syllabi en de schoolboeken waren al grotendeels geschreven zodat de marges voor veranderingen minimaal waren. Toch kwam de resonansgroep reeds op 13 november 2006 met inhoudelijk commentaar, met als belangrijkste punten aanpassingsvoorstellen voor vwo wiskunde A en wiskunde B. De wijzigingsvoorstellen voor wiskunde A nam de minister in haar brief van 14 december 2006 aan de Tweede Kamer voor een belangrijk deel over, het voorstel van de resonansgroep om bij vwo wiskunde B kansrekening en statistiek weer in het programma terug te brengen en de voortgezette meetkunde te schrappen haalde het niet. Bij vwo wiskunde A werd het onderdeel *Differentiaalrekening met toepassing* weer integraal in het programma voor het centraal schriftelijk eindexamen opgenomen, inclusief alle rekenregels voor differentiëren. Daarmee wordt in de nieuwe situatie bij wiskunde A, net als bij wiskunde B, weer vrijwel honderd procent van de stof ook op het centraal examen geëxamineerd.

De voorstellen van de commissie Siersma

De voortgang binnen de commissie Siersma liep minder vlot dan verwacht. Pas op 3 september 2007 kwam zij met conceptexamenprogramma's, waardoor de verwachte invoeringstermijn naar 2011 of later verschoven werd. Er was in de tussentijd wel informeel overleg geweest met leden van de resonansgroep, en mede als gevolg hiervan kon de resonansgroep op 8 november melden dat zij in grote lijnen kon instemmen met de conceptprogramma's voor havo A, havo B en vwo B (de resonansgroep heeft zich niet uitgesproken over de voorstellen voor havo D en vwo D omdat die vakken in het vervolgonderwijs geen ingangseis mogen zijn). Tegen de voorstellen voor vwo A en vwo C had de resonansgroep echter ernstige bezwaren.

In het eindvoorstel dat de commissie Siersma op 11 januari 2008 aan staatssecretaris Marja van Bijsterveldt-Vliegthart aanbod, was aan die bezwaren tegen vwo A en vwo C niet tegemoet gekomen. Ze bleven in het eindrapport van de resonansgroep van 4 februari 2008 dan ook onverminderd gehandhaafd, naast een aantal kleinere wijzigingsvoorstellen voor de andere wiskundevakken.

Aansluitingsproblemen bij vwo wiskunde A

Al jarenlang zijn er ernstige aansluitingsproblemen met wiskunde A (thans nog wiskunde A1,2) bij de universitaire opleidingen economie en bedrijfskunde, en al jarenlang proberen de docenten wiskunde en statistiek die aan die opleidingen verbonden zijn, hiervoor aandacht te vragen. Het gaat hierbij jaarlijks om vele duizenden eerstejaarsstudenten, dus een klein probleem is het niet. Voor de leden van de resonansgroep, die in meerderheid dachten dat de aansluitingsproblemen zich vooral voordeden bij de bètavakken, was het een *eye opener* om te zien dat de problemen bij wiskunde A minstens zo groot zijn, zo niet groter. In een brief aan de voorzitter van de programmacommissie wiskunde A, een subcommissie van de commissie Siersma, vatte Herman ten Napel de problemen als volgt samen:

“Ongeveer 80 procent van de eerstejaarsinstroom bij de economische faculteiten heeft op het VWO het vak Wiskunde A1,2 gevolgd. Steeds weer moeten we tot onze teleurstelling constateren dat deze studenten bepaalde basisvaardigheden van de wiskunde waar wij groot belang aan hechten onvoldoende beheersen. Het werken met breuken, wortels, haakjes en exponenten gaat aan de lopende band verkeerd. Zelfs de meest eenvoudige vergelijkingen en ongelijkheden kan men niet meer oplossen. De grafische rekenmachine wordt kwistig te pas en te onpas gehanteerd, maar welke belangrijke functies achter de knopjes ‘sin’ en ‘log’ schuilgaan weet men niet! (“Hoefden we niet te kennen.”) Het kost ons steeds meer moeite de gestelde leer-

doelen bij onze propedeutische wiskunde te behalen. De omvang en het eindniveau van dit vak hebben we de laatste jaren regelmatig naar beneden toe moeten bijstellen, hetgeen natuurlijk de kwaliteit van de opleiding niet ten goede komt. En ondanks deze bijstelling moeten we toch telkens weer aan het eind van het eerste jaar zo'n 25 procent van de eerstejaars een *bindend negatief studieadvies* verstrekken waarbij de gebrekkige wiskundevoorkennis een belangrijke rol speelt.”

Het mocht niet baten. Ook in het eindvoorstel van de commissie Siersma voor vwo A was er nog steeds onvoldoende aandacht voor het ontwikkelen van formulevaardigheden en kennis van elementaire functies zoals de goniometrische functies, de e-machtfunctie en de natuurlijke logaritme.

De resonansgroep nam de aansluitingsproblemen bij vwo A wél serieus, en keurde de voorstellen van de commissie Siersma op deze punten daarom af. Zij merkte op dat de genoemde onderwerpen niet alleen voor de economische en bedrijfskundige wetenschappen, maar ook voor de (bio)medische wetenschappen van essentieel belang zijn. Vooral deze vervolgoopleidingen is wiskunde A of wiskunde B thans de ingangseis. Een grote meerderheid van de eerstejaarsstudenten zal met wiskunde A binnenkomen. Verplicht stellen van wiskunde B voor deze studierichtingen is geen optie. Bij de komst van de nieuwe profielen hebben onder andere de universitaire opleidingen in de economie, de bedrijfskunde en de medische wetenschappen namelijk aangegeven dat het profielvak wiskunde A toegankelijkheid moet garanderen voor deze opleidingen. Slechts voor econometrie wordt wiskunde B als vooropleidingseis gehanteerd.

Ook ten aanzien van de voorstellen in het domein kansrekening en statistiek (domein E in het voorstel van de commissie Siersma) had de resonansgroep bezwaren. Zo merkte zij op dat zij geen prioriteit hechtte aan de behandeling op het vwo van de onderwerpen toetsen, schatten en regressie (onderdelen E6, E7, E8 in het voorstel). Veel meer hechtte zij eraan de leerlingen een degelijke basis te verschaffen in de basisvaardigheden op dit gebied (onderdelen E1 tot en met E5).

Het voorstel voor vwo wiskunde C

Wiskunde C richt zich op universitaire studies in onder andere de sociale wetenschappen, de juridische wetenschappen en de taalwetenschap. Ook voor deze studenten zijn algemene rekenvaardigheden en formulevaardigheden van belang. De commissie Siersma

schreef in haar programmavoorstel echter:

“De nadruk ligt minder op het reproduceren van technieken en meer op de functie, de cultuurhistorische rol en de waarde [van de wiskunde] in onze maatschappij.”

De resonansgroep maakte bezwaar tegen deze benadering. Net als bij wiskunde A en wiskunde B dient het programma van wiskunde C volgens haar gericht te zijn op die wiskunde die voor de vervolgopleidingen relevant is. Een aanzienlijk deel van het programmavoorstel is echter niet op deze doorstroom gericht, maar algemeen cultureel of historisch van aard. Zulke onderwerpen zijn in de visie van de resonansgroep zeker geschikt als keuze-onderwerp, maar niet als vaste onderdelen van het programma.

De resonansgroep stelde voor deze onderwerpen uit het verplichte deel van het programma te verwijderen. In plaats daarvan stelde zij voor meer aandacht te besteden aan het ontwikkelen en bijhouden van algemene rekenvaardigheden en formulevaardigheden. Ten aanzien van het domein kansrekening en statistiek verwees de resonansgroep naar haar opmerkingen hierover bij vwo A.

De besluiten van de staatssecretaris

Geconfronteerd met de voorstellen van de commissie Siersma, een reactie hierop van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de op enige punten, onder andere bij de vakken vwo A en vwo C, afwijzende reactie van de resonansgroep en een commentaar op deze reacties van de commissie Siersma zelf, moest de staatssecretaris knopen doorhakken. Zij maakte haar beslissingen hieromtrent op 8 april 2008 bekend. In een brief aan voorzitter Siersma van cTWO schreef zij onder meer:

“...gebleken [is] dat er op een aantal punten verschillen van mening zijn blijven bestaan. Ik heb een aantal beslissingen moeten nemen. Die vindt u, met een onderbouwing, in de bijlage bij deze brief. De beslissingen zijn het resultaat van een bestuurlijke afweging. Ik realiseer mij heel goed dat de meningen van de inhoudelijk deskundigen daarover zullen blijven verschillen. We moeten ons daarbij realiseren dat het niet gaat om definitieve examenprogramma's — er zijn niet voor niets pilots voorzien. De aangegeven beslissingen zullen moeten leiden tot aanpassingen in de voorgestelde teksten. Ik verzoek u daarvoor zorg te dragen, zodat kan worden gewerkt aan de syllabi voor het centraal examen en in augustus 2008 de pilotscholen beschikken over de tekst van de experimentele examenprogramma's.”

De beslissingen van de staatssecretaris voor de vakken havo A, havo B en vwo B weken, zoals verwacht kon worden, slechts op detailpunten af van de voorstellen van de commissie Siersma. Met deze voorstellen had de resonansgroep ook al in grote lijnen ingestemd. Anders was het bij vwo A en vwo C, waar de staatssecretaris zich door de argumenten van de resonansgroep had laten overtuigen en dienovereenkomstige besluiten had genomen.

Met deze besluiten was formeel een eind gekomen aan de werkzaamheden van de resonansgroep, die dan ook op 15 april 2008 ophield te bestaan.

Commotie en steun

De besluiten van de staatssecretaris leidden tot commotie in kringen van leraren en wiskundedidactici. Anne van Streun, lid van de commissie Siersma, startte een petitie onder de titel *Stop Kaalslag Wiskundeonderwijs* waarin hij het deed voorkomen alsof deze besluiten de doodsteek zouden betekenen voor het wiskundeonderwijs. De tekst van de petitie was zodanig, dat oningewijden een vertekend beeld voorgeschoteld kregen van de inhoud en de draagwijdte van de besluiten van de staatssecretaris. De petitie, die de staatssecretaris opriep haar besluiten ongedaan te maken, werd ondersteund door een krantenadvertentie ondertekend door Anne van Streun, Marian Kollenveld (voorzitter NVVW, lid cTWO) en Jan van Maanen (hoogleraar-directeur FI).

Er waren echter ook instemmende reacties, zowel van individuele wiskundeleraren als van groepen universitaire docenten. De docenten wiskunde en statistiek aan alle faculteiten economie en bedrijfskunde van de Nederlandse universiteiten lieten weten blij te zijn met de beslissingen van de staatssecretaris, met name die over wiskunde A. Dr. Geert Jan Franx van de Vrije Universiteit meldde:

“Dit is een zeer positieve ontwikkeling. Mijn studenten (zowel econometrie, als economie als bedrijfskunde) klagen regelmatig dat ze op het vwo veel te weinig serieuze wiskunde geleerd hebben, en dat ze geestelijk lui gemaakt zijn door de grafische rekenmachine. Ze formuleerden het letterlijk als volgt: “Wij beschouwen ons als de proefkonijnen van de mislukte onderwijsvernieuwingen.” Ze zijn er echt boos over dat ze op het vwo zo weinig substantieels geleerd hebben.” Zijn collega drs. Kees van den Hoeven voegde daaraan toe: “Voor eerstejaarsstudenten is het vaak ook een raadsel hoe het kon gebeuren dat zij op het vwo (binnen Wiskunde A1,2) niet of niet

Samenstelling resonansgroep wiskunde:

Dr. Wim Caspers, docent/afdelingsleider aan een school voor voortgezet onderwijs en als vwo-docent wiskunde tevens ingeschakeld bij het wiskunde-onderwijs aan de Technische Universiteit Delft

Ir. Nan van Geloven, tot juli 2007 studente technische wiskunde aan de Technische Universiteit Delft

Gonny Hauwert, studente wiskunde aan de Universiteit Leiden

Drs. Marjolein van Haselen, docente wiskunde en statistiek in het hoger economisch onderwijs (Hogeschool Inholland), tevens deskundige op het gebied van de aansluiting vo-hbo

Metha Kamminga, docente wiskunde in het hoger technisch onderwijs (Noordelijke Hogeschool Leeuwarden) en bestuurslid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Prof.dr. Klaas Landsman, hoogleraar wiskunde aan de Radboud Universiteit Nijmegen

Peter de Lange, student scheikunde aan de Universiteit Utrecht, eerder bestuurslid van het LAKS

Drs. Jan Los, docent wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam en leraar wiskunde aan een school voor voortgezet onderwijs

Dr.ir. Frans Martens, docent serviceonderwijs wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven

Drs. Herman ten Napel, docent wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam (Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie)

Prof.dr. Jan van de Craats (voorzitter), hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit

Drs. Kees Lagerwaard (secretaris), toetsdeskundige Cito, later opgevolgd door *drs. Johan Gademan*, onderwijskundig adviseur

goed zijn voorbereid op hun universitaire studie economie of bedrijfswetenschappen, terwijl ze formeel gesproken aan alle toelatingseisen voldoen.” Drs. Sytze Knyppstra van de Rijksuniversiteit Groningen meldde aan Herman ten Napel: “Bedankt voor je werk in de resonansgroep. Ik ben blij dat het ministerie jullie aanbevelingen voor een groot deel heeft overgenomen, met name bij vwo wiskunde A.” Soortgelijke reacties kwamen van de andere universiteiten.

De staatssecretaris reageert

Op 13 juni reageerde de staatssecretaris in een brief aan de Tweede Kamer op de ontstane situatie. Daarin schreef zij onder meer:

“De commissie Siersma, maar ook de leden van de verschillende subgroepen die door de commissie werden ingesteld met vertegenwoordigers van FI, SLO en leraren, hebben hun werk enthousiast gedaan. Ik heb er begrip voor dat zij teleurgesteld waren toen bleek dat de resultaten van de afgesproken toetsing door de resonansgroep niet eenduidig positief bleken te zijn. In de voorstellen komen vakonderdelen voor die voor de voorbereiding op hoger onderwijs niet relevant zijn. Anderzijds ontbreken onderdelen die daarvoor wel nodig zijn: basisvaardigheden op het gebied van algebra, analyse en goniometrie, aldus de resonansgroep.

Op de achtergrond speelt een tegenstelling die kort kan worden samengevat als een meer didactische (het hoe) en een op de inhoud van het vak (het wat) gerichte benadering. In het didactische kamp bevinden zich FI, SLO, hoogleraren vakdidactiek, organen van de lerarenvereniging. De inhoudelijke benadering is overheersend in het hoger onderwijs, maar ook bij veel leraren.

Ik heb de commissie erop gewezen dat ik verantwoordelijk ben voor de inhoud, het ‘wat’: de commissie moet mij dus op dat punt voorstellen voorleggen en die hebben de status van een advies. [...] Het is uiteindelijk een politieke verantwoordelijkheid alle oordelen tegen elkaar af te wegen.

[...] Ik moet vaststellen dat er verdeeldheid is in de wiskundewereld. De voorstanders van de didactische benadering claimen dat zij als enige het onderwijsveld vertegenwoordigen, wat feitelijk onjuist is. Hun petitie onderstreept die verdeeldheid, want uit toegevoegde inhoudelijke commentaren blijkt dat veel ondertekenaars reageerden op de algemene bewoordingen van de tekst van de petitie. En die biedt niet-ingevoerde lezers geen zicht op de zaak. Inhoudelijk houdt het merendeel van de commentaren eerder steun voor mijn benadering in. De reacties die mijn departement bereiken van individuele leraren en andere betrokkenen steunen ook mijn besluit.

[...] Inmiddels is op hoog ambtelijk niveau gesproken met de drie betrokken partijen (commissie Siersma, resonansgroep, lerarenvereniging). Daarbij bleek dat zowel vertegenwoordigers van de didactische als de vakinhoudelijke stroming oprecht en sterk betrokken zijn bij de vernieuwingen van het wiskundeonderwijs. Omdat die commotie veroor-

zaakt, is afgesproken dat ik mijn besluit nog eens voor zou leggen aan het hoger onderwijs (VSNU en HBO-Raad). Dat wordt immers geconfronteerd met de manco's die aanleiding waren tot de discussie in de Kamer.

Daarnaast is vastgesteld dat de pilots met het nieuwe programma niet per 1 augustus 2008 kunnen starten, maar een jaar later. Dat heeft als voordeel dat de ervaringen met het in 2007 ingevoerde programma kunnen worden meegenomen.”

Het oordeel van de HBO-raad en de VSNU

Reeds op 26 juni deelde de HBO-raad de staatssecretaris mede dat hij achter haar besluiten staat:

“[...] Een en ander afwegende is er vanuit het hbo geen reden om te twifelen aan het oordeel van de resonansgroep. Het hbo kan instemmen met het besluit van de staatssecretaris, gelet op de verschillende commentaren van resonansgroep en lerarenvereniging.”

De VSNU deed langer over haar reactie. Zij beperkte zich tot een oordeel over de vakken vwo A en vwo C, precies die vakken waarover grote controverses waren blijven bestaan. Bij wiskunde A kwam de VSNU tot een instemmend oordeel. Zij consulteerde hiertoe de Onderwijscommissie Geneeskunde van het Disciplineoverlegorgaan Medische Wetenschappen. Die deelde mede dat zij instemt met het besluit, en voegde daar aan toe: “De beslissing van de staatssecretaris houdt onder andere in dat een deel van de statistiek komt te vervallen ten gunste van een versteviging van “de kern en de eerste binnenring”. Er zal meer tijd besteed worden aan goniometrische, logaritmische en exponentiële functies, hetgeen een meerwaarde heeft voor de vervolgstudie. De onderdelen van de statistiek die komen te vervallen in wiskunde A zullen sowieso in de vervolgstudie gericht en diepgaander besproken worden.

De studenten die binnenkomen met wiskunde B in hun pakket hebben geen kennis van kansrekening en statistiek, maar meer ervaring met de genoemde functies. Het besluit van de staatssecretaris heeft in ieder geval tot gevolg dat de instroom homogener qua kennis is.”

De VSNU zelf zei in haar reactie onder meer: “wiskunde A is het profielvak voor wiskunde bij NG en EM. De universitaire opleidingen in de economische en medische sectoren hebben — indien mogelijk — geen extra wiskunde-vooropleidingseis gesteld voor de beide profielen. Bij de komst van de nieuwe profielen (2007) hebben deze opleidingen aangegeven dat het profiel NG met wiskun-

de A toegankelijkheid moet garanderen voor deze opleidingen.”

De VSNU concludeerde: “Uw besluit [over vwo wiskunde A] vindt dus steun bij zowel de economische als de medische wetenschappen.”

Over wiskunde C was de VSNU minder stellig. Zij vond het lastig een goede inschatting te geven wat doorstroomrelevant is voor wiskunde C: “De universiteiten vinden maatschappelijke factoren, context, plezier houden in wiskunde als voorbereiding op statistiek in het hoger onderwijs etc. voor wiskunde C relevante doorstroomfactoren. Tegelijkertijd moet ook van CM-leerlingen verwacht worden dat zij de basisvaardigheden beheersen. Op beide punten is het op dit moment onvoldoende duidelijk wat het standpunt is van de verschillende universitaire opleidingen en ik stel daarom voor de tijd die u hebt ingeruimd voor de pilots ook te gebruiken voor nadere informatierondes over wiskunde C bij de juridische en sociale wetenschappen.”

Hoe nu verder?

Per 1 september 2009 zullen pilotstudies worden uitgevoerd met de nieuwe programma's, die door cTWO zullen worden aangepast aan de besluiten van de staatssecretaris. Op zijn vroegst in 2012 volgt dan een evaluatie van deze experimenten, waarna de nieuwe, en eventueel opnieuw bijgestelde programma's in 2013 in de vierde klassen van havo en vwo zouden kunnen worden ingevoerd. Er is dus nog een lange weg te gaan. Wel is te hopen dat de besluiten van de staatssecretaris ook consequenties zullen hebben voor de huidige schoolboeken en examenprogramma's. De lacunes bij vwo wiskunde A dienen zo snel mogelijk te worden gecorrigeerd, zodat wiskunde A een vak wordt waarmee ook de toekomstige studenten in de economische en (bio)medische wetenschappen weer goed beslagen ten ijs komen.

Documenten op het internet

Alle in dit artikel genoemde documenten met betrekking tot de resonansgroep staan op <http://staff.science.uva.nl/~craats/resonansgroep.htm>. Voor de documenten met betrekking tot de beslissingen van de staatssecretaris, zie <http://staff.science.uva.nl/~craats/#beslissingen>. Voor een schema van de profielen in havo en vwo met de bijbehorende studielasturenverdeling, zie <http://www.minocw.nl/documenten/schema.havo.pdf> en <http://www.minocw.nl/documenten/schema.vwo.pdf>.

Klaas Pieter Hart

Faculteit EWI

TU Delft

Postbus 5031

2600 GA Delft

k.p.hart@tudelft.nl

De Continuümhypothese

In het Nieuw Archief voor Wiskunde van Maart 2007 beschreef Teun Koetsier een opera over het leven en werk van Georg Cantor, door vrijwel iedereen gezien als de vader van de Verzamelingenleer. Een belangrijk thema in de opera was het probleem waar Cantor zich vrijwel vanaf het begin van zijn opbouw van de Verzamelingenleer het hoofd over gebroken heeft: de Continuümhypothese, die in de opera uitgedrukt wordt als $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Dit artikel legt uit wat die Continuümhypothese is, wat men er mee kan doen en waarom Cantor's streven naar een bewijs tot mislukken gedoemd was.

De Continuümhypothese, vanaf nu kortweg met CH aangeduid, is onlosmakelijk verbonden met de vraag hoeveel punten er op een lijn liggen of, wat op hetzelfde neerkomt, hoeveel reële getallen er zijn.

In een brief, gedateerd Halle, d. 29^{ten} Nov. 73, stelde Cantor de volgende vraag aan Dedekind:

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

Met een schijnbaar typisch Duitse omhaal van woorden vroeg Cantor of er een bijectieve afbeelding tussen de verzamelingen $\mathbb{N}$ en het interval $(0, \infty)$ bestaat. Die omhaal was echter nodig omdat onze 'moderne' noties van afbeelding, injectie, surjectie en bijectie die namen nog niet gekregen hadden.

Het antwoord liet niet lang op zich wachten. In 1874 publiceerde Cantor het artikel [4] waarin hij twee dingen bewees.

Ten eerste liet hij zien dat het mogelijk was de verzameling van alle reële algebraïsche getallen te nummeren met behulp van de natuurlijke getallen. Het argument is te aardig om hier onbeschreven te laten. Elk algebraïsch getal is nulpunt van een polynoom

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

met gehele coëfficiënten. De som

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

noemen we de *hoogte* van het polynoom. De hoogte van het minimale polynoom van een algebraïsch getal noemen we dan de hoogte van dat getal. Bij elke N horen slechts eindig veel polynomen met hoogte N en die hebben elk weer eindig veel nulpunten en dus zijn er slechts eindig veel getallen van hoogte N .

We kunnen nu als volgt een lijst van de algebraïsche getallen maken: eerst sorteren naar hoogte en per hoogte ordenen naar opklimmende grootte binnen $\mathbb{R}$.

Het tweede resultaat was het antwoord op de vraag uit de brief:

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots \quad (4)$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \dots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Ook het bewijs van deze stelling laat zich snel schetsen. Met recursie definieerde Cantor twee rijen getallen $\langle \alpha_n \rangle$ en $\langle \beta_n \rangle$ door telkens α_{n+1} en β_{n+1} (met $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$) de eerste twee termen uit de gegeven rij te laten zijn die in het interval (α_n, β_n) liggen (beginnend met $\alpha_0 = \alpha$ en $\beta_0 = \beta$). Als dit proces stopt, omdat er nog ten hoogste één term in (α_n, β_n) ligt, laat zich het bestaat van een η snel aantonen. Als dit proces niet stopt convergeren de rijen $\langle \alpha_n \rangle$ en $\langle \beta_n \rangle$ naar respectievelijk $\alpha_\infty = \sup_n \alpha_n$ en $\beta_\infty = \inf_n \beta_n$. Dan geldt $\alpha_\infty \leq \beta_\infty$. Kies η in $[\alpha_\infty, \beta_\infty]$; dan volgt enerzijds $\eta \in \bigcap_n (\alpha_n, \beta_n)$ en anderzijds geldt voor elke v dat $\omega_v \notin (\alpha_v, \beta_v)$; η komt dus

Lineaire ordeningen

In het artikel [7] bewees Cantor, in essentie, dat een aftelbare lineair geordende verzameling zonder begin- en eindpunten die dicht geordend is (als $x < y$ dan is er een z met $x < z < y$) isomorf is met $\mathbb{Q}$, de verzameling der rationale getallen. In [8] maakte hij dit expliciet en gaf hij het ordetype van $\mathbb{Q}$ aan het η .

Zo'n stelling bestaat niet zonder meer voor lineair geordende verzamelingen van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$, de reële rechte is niet isomorf met de verzameling van irrationale getallen, bijvoorbeeld.

Om toch tot zo'n stelling te komen voerde Hausdorff de zogeheten η_1 -verzamelingen in: dit zijn lineair geordende verzamelingen die net als $\mathbb{Q}$ geen begin- en eindpunten hebben en dicht geordend zijn; meer dan dat: als A en B aftelbaar zijn en $a < b$ telkens als $a \in A$ en $b \in B$ dat bestaat een z met $a < z < b$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$.

De Continuümhypothese kan nu gebruikt worden om Cantor's stelling te generaliseren tot: elk tweetal η_1 -verzamelingen van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ is isomorf. Het bewijs is dat van Cantor; CH zorgt er voor dat het isomorfisme in 'slechts' $\aleph_1$ stappen gemaakt kan worden en de eis op de aftelbare deelverzamelingen zorgt dat elke stap ook daadwerkelijk genomen kan worden.

De notie van η_1 -verzameling is niet zo esoterisch als men zou denken: elk niet-standaard model van de reële rechte is een η_1 -verzameling. Verder is het zo dat de eis op de aftelbare deelverzamelingen geleid heeft tot de notie van *verzadiging* in de Modeltheorie en de ultieme generalisatie van Cantor's isomorfstelling: CH impliceert dat elk tweetal elementair equivalente en aftelbaar verzadigde structuren van kardinaliteit $2^{\aleph_0}$ isomorf is. Dit alles wordt in Hoofdstuk 8 van [20] netjes uitgelegd.

De isomorfstelling is equivalent met CH: als CH namelijk niet geldt kan men niet-isomorfe niet-standaard modellen van $\mathbb{R}$ vinden.

niet in de rij voor. Als de ω_ν een nummering van de algebraïsche getallen vormen geldt natuurlijk $\alpha_\infty = \beta_\infty$.

Cantor bleef over dit soort problemen met Dedekind van gedachten wisselen, getuige deze vraag uit een brief, gedateerd Halle, d. 5^{ten} Januar 74.

Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Linie und umgekehrt zu jedem Punkte der Linie ein Punkt der Fläche gehört?

Het antwoord verscheen in [5].

(A.) Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ voneinander unabhängige, veränderliche reelle Größen, von denen jede alle Werte, die ≥ 0 und ≤ 1 sind, annehmen kann, und ist t eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum ($0 \leq t \leq 1$), so ist es möglich, die Größe t dem Systeme der n Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ so zuzuordnen, daß zu jedem bestimmten Werte von t ein bestimmtes Wertesystem $x_1, x_2, \dots, x_n$ und umgekehrt zu jedem bestimmten Wertesysteme $x_1, x_2, \dots, x_n$ ein gewisser Wert von t gehört.

Cantor's eerste bewijs, in een brief aan Dedekind, bestond uit het ineen vlechten van decimale ontwikkelingen van de x_i tot één voor t en liep spaak op het niet uniek zijn van die ontwikkeling. Het gepubliceerde bewijs verliep als volgt.

STAP 1: zij $\mathbb{P}$ de verzameling irrationale getallen in $[0, 1]$; door middel van het ineen vlechten van kettingbreukontwikkelingen (die wel uniek zijn) construeert men eenvoudig een bijectie tussen $\mathbb{P}^n$ en $\mathbb{P}$.

STAP 2: construeer een bijectie tussen $\mathbb{P}$ en $[0, 1]$. Kies hiertoe een rij irrationale getallen $\langle a_n \rangle$ die naar 0 convergeert, zeg $a_n = \sqrt{2}/2^{n+1}$, en een aftelling $\langle q_n \rangle$ van de rationale getallen in $[0, 1]$. Schrijf $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ en $B = [0, 1] \setminus (A \cup Q)$. Definieer nu $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}$ door

- $b(x) = x$ als $x \in B$,
- $b(a_n) = q_{2n-1}$ en
- $b(q_n) = q_{2n}$.

STAP 3: via $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P}^n$ verkrijgt men door samenstelling een bijectie tussen $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$:

$$[0, 1]^n \rightarrow \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P} \rightarrow [0, 1]$$

Door de paren natuurlijke getallen af te tellen en zo oneindig veel kettingbreukontwikkelingen te vervlechten lukte het Cantor ook een bijectie tussen $\mathbb{P}^\infty$ en $\mathbb{P}$, en daarmee tussen $[0, 1]^\infty$ en $[0, 1]$, te maken.

In een brief aan Dedekind schreef Cantor: Je le vois, mais je ne le crois pas. Wat voortvarend concludeerde hij dat hiermee het begrip 'dimensie' op losse schroeven kwam te staan; Dedekind voerde echter aan dat Cantor's bijecties verre van continu waren. Zoals

we nu, dankzij Brouwer, weten bestaan inderdaad geen *continue* bijecties tussen $[0, 1]^n$ en $[0, 1]^m$ als $n \neq m$.

In [5] begon Cantor de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ in klassen te verdelen: hij definieerde wanneer twee verzamelingen M en N *dezelfde machtigheid* hebben, genoteerd $M \sim N$: namelijk als er een bijectie tussen M en N bestaat. De relatie $\sim$ is reflexief, symmetrisch en transitief en dus een equivalentierelatie. Deze relatie heeft oneindig veel klassen: voor elk natuurlijk getal n is er de klasse van deelverzamelingen A met $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Verder hebben we de equivalentieklassen van $\mathbb{N}$ en die van $\mathbb{R}$; deze zijn, wegens de stelling uit [4], verschillend.

Aan het eind van [5] schreef Cantor over het aantal equivalentieklassen van *oneindige* verzamelingen het volgende (een *lineaire Mannigfaltigkeit* is een oneindige deelverzameling van $\mathbb{R}$):

Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, daß die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, daß sie gleich *Zwei* ist.

Dit nu is waar dit artikel uiteindelijk over gaat: het idee van Cantor dat er voor oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ maar twee mogelijkheden zijn: gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ of gelijkmachtig met $\mathbb{R}$. Wat ook verduidelijking behoeft is hoe dit vermoeden van een probleem uiteindelijk een Hypothese geworden is.

In [7] bewees Cantor dat voor de oneindige *gesloten* deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ de dichotomie inderdaad opgaat en hij kondigde andermaal aan een bewijs van de algemene dichotomie te produceren.

De dichotomie werd door Alexandroff en Hausdorff uitgebreid tot de klasse der Borel-verzamelingen en later door Souslin tot de familie van alle analytische verzamelingen, dat zijn de continue beelden van Borelverzamelingen.

De formulering uit de opera

De lezer van [21] herinnert zich ongetwijfeld de gelijkheid

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \quad (*)$$

die in de opera zo'n belangrijke rol speelde. Wat heeft deze met het probleem van Cantor te maken? Wel, het is er, onder zekere voorwaarden, een herformulering van en vormt het samenkomen van twee lijnen van onderzoek die Cantor volgde bij zijn werk aan de struc-

tuur van de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. De ene lijn hebben we al gezien: deze betreft het *aan-tal* elementen van verzamelingen. De andere lijn had zijn oorsprong in de theorie van de trigonometrische reeksen.

Kardinaalgetallen

In [8] introduceerde Cantor het begrip *Kardinaalgetal* als volgt

‘Mächtigkeit’ oder ‘Cardinalzahl’ von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird.

Das Resultat dieses zweifachen Abstraktionsacts, die Cardinalzahl oder Mächtigkeit von M , bezeichnen wir mit

$$\overline{M}$$

Hier valt het nodige op af te dingen maar Cantor maakte duidelijk dat $\overline{M} = \overline{N}$ equivalent is met $M \sim N$ en elk bewijs van gelijkheid van kardinaalgetallen verliep door een bijectie tussen de onderhavige verzamelingen aan te geven.

Cantor liet zien hoe met kardinaalgetallen gerekend kon worden: sommen werden door middel van disjuncte verenigingen gedefinieerd, producten door middel van productverzamelingen en machtsverheffen geschiedde door naar verzamelingen afbeeldingen te kijken.

In dit artikel werd ook de $\aleph$ -notatie voor oneindige kardinaalgetallen ingevoerd met als begin $\aleph_0 = \overline{\mathbb{N}}$. Per definitie is dan $2^{\aleph_0}$ het kardinaalgetal van de verzameling van alle afbeeldingen van $\mathbb{N}$ naar $\{0, 1\}$. Cantor bewees vervolgens dat er een bijectie bestaat tussen die verzameling en het interval $[0, 1]$, met als gevolg dat $\overline{\mathbb{R}} = 2^{\aleph_0}$. Dit verklaart het linkerlid van (*); het rechterlid kwam voort uit de theorie der *ordinaalgetallen*.

Afgeleide verzamelingen

De ordinaalgetallen vloeiden in eerste instantie voort uit een onderzoek naar de structuur van bepaalde gesloten en begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Het centrale begrip hierin is dat van verdichtingspunt: x is een *verdichtingspunt* van een verzameling A als elk open interval om x punten van A bevat ongelijk aan x zelf. Zo is 0 een verdichtingspunt (het enige) van de verzameling $K = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ en is elk reëel getal een verdichtingspunt van $\mathbb{Q}$.

We noteren de verzameling van alle verdichtingspunten van A als A' . Een paar fundamentele eigenschappen van deze operatie zijn: A' is gesloten en A is gesloten dan en slechts dan als $A' \subseteq A$. Men noemt A' wel de afgeleide verzameling van A en Cantor gebruikte de notatie die wij voor hogere afgeleiden bezigen ook voor verzamelingen: $A^{(0)} = A$ en $A^{(n+1)} = (A^{(n)})'$. Uitgaande van de convergente rij K is het niet moeilijk verzamelingen K_n te maken die voldoen aan $K_n^{(n)} = \{0\}$ en met iets meer fantasie maakt men een verzameling L met $L^{(n)} \neq \emptyset$ voor alle n en $\bigcap_n L^{(n)} = \{0\}$. Wie het kunstje door heeft ziet ook wel in hoe je M en N kunt maken met $(\bigcap_n M^{(n)})' = \{0\}$ en $(\bigcap_n N^{(n)})'' = \{0\}$ enzovoort. In het begin noteerde Cantor nog $\bigcap_n A^{(n)} = A^{(\infty)}$ maar vanaf [6] gebruikte hij ω en noteerde hij de transfinitie afgeleiden als

$$A^{(\omega)}, A^{(\omega+1)}, \dots, A^{(\omega+\omega)} = \bigcap_n A^{(\omega+n)}, \dots$$

Het verband van dit alles met trigonometrische reeksen ligt in een stelling die Cantor in [3] bewees: als $P \subseteq [0, 2\pi]$ zo is dat $P^{(n)} = \emptyset$ voor een $n \in \mathbb{N}$ dan is P een *een-duidigheidsverzameling*, dat wil zeggen als $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ voor alle x buiten P dan zijn alle coëfficiënten a_k en b_k gelijk aan 0.

Nieuwe getallen

In het artikel [6] onderwierp Cantor de indices van de afgeleide verzamelingen aan een nader onderzoek. Hij beschouwde de indices als ‘nieuwe’ natuurlijke getallen die door twee ‘Erzeugungsprinzipien’ voortgebracht worden. Het eerste principe bestaat uit het telkens toe kunnen voegen van een eenheid; als men met niets begint ontstaat zo de rij 1, 2, 3, ..., n , ... van natuurlijke getallen. Aangezien er geen grootste natuurlijk getal is komt men met dit principe ook niet verder dan de natuurlijke getallen. Het tweede principe laat toe op dergelijke momenten een *nieuw* getal te introduceren dat als kleinste bovengrens voor de tot dan toe gemaakte getallen dient. Dus, ω is hiermee de kleinste bovengrens voor de rij der natuurlijke getallen. Nadat $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega + n$, ... met behulp van eerste principe gemaakt zijn laat het tweede principe toe $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ in te voeren als hun kleinste bovengrens. Men kan, in gedachten, deze principes onbeperkt blijven toepassen en zo een klasse van getallen opbouwen die Cantor als een natuurlijke generalisaties van de natuurlijke getallen beschouwde.

Belangrijk voor de structuur van de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is de vaststelling dat

voor elke deelverzameling A van $\mathbb{R}$ zo'n getal α bestaat, en wel een eerste, met de eigenschap dat $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$ en dat die eerste α aftelbaar veel voorgangers heeft. Dit leidde tot de Cantor-Bendixson-stelling: elke gesloten deelverzameling G van $\mathbb{R}$ is te schrijven als de vereniging $P \cup A$, waarbij P perfect is (oftewel $P = P'$) en A aftelbaar en open in G .

Twee klassen

De natuurlijke getallen zijn de getallen in dit systeem die zelf *eindig* veel voorgangers hebben, Cantor noemde deze verzameling de *eerste getallenklasse*; zijn *tweede getallenklasse* (II) bestaat uit de getallen met aftelbaar oneindig veel voorgangers (d.w.z. net zoveel als er getallen in de eerste klasse zijn). De klasse (II) voldoet aan de dichotomie die Cantor voor $\mathbb{R}$ vermoedde: als A een oneindige deelverzameling van (II) is dan is A gelijkmachtig met $\mathbb{N}$ of met (II) zelf. In [6] sprak Cantor daarom de hoop uit dat hij binnenkort zou kunnen bewijzen dat $\mathbb{R}$ en de klasse (II) gelijkmachtig zijn. Met behulp van de daarvoor te construeren bijectie zou de dichotomie van (II) naar $\mathbb{R}$ overgebracht kunnen worden.

In het tweedelige werk [8–9] zette Cantor zijn verzamelingenleer nog eens netjes op een rij. Zoals hierboven reeds aangestipt introduceerde hij onder meer de $\aleph$ -notatie voor kardinaalgetallen en noteerde hij het kardinaalgetal van $\mathbb{N}$ als $\aleph_0$. Hij gaf verder een betere onderbouwing van de bovenbeschreven uitbreiding van de natuurlijke getallen door middel van welgeordende verzamelingen en noemde de nieuwe getallen ook *ordinaalgetallen*. Het kardinaalgetal van de tweede getallenklasse (II) is het kleinste kardinaalgetal groter dan $\aleph_0$ en werd dus $\aleph_1$. Tegenwoordig duidt men de klasse (II) met ω_0 aan; de vereniging van (I) en (II) met ω_1 , enzovoort.

Hierboven is al vastgesteld dat $\overline{\mathbb{R}} = 2^{\aleph_0}$, zodat de vermoede gelijkmachtigheid van $\mathbb{R}$ en de tweede getallenklasse afgekort kan worden tot het bovengenoemde $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Deze gelijkheid is equivalent met de conjunctie van Cantor's dichotomie en het welordenbaar zijn van $\mathbb{R}$.

Welordeningen

Een *welordering* van een verzameling is een lineaire ordening met de eigenschap dat elke niet-lege deelverzameling een kleinste element heeft (ten opzichte van die ordening). De gewone ordening van $\mathbb{N}$ is een welordering; de gewone ordening van $\mathbb{R}$ is dat duidelijk niet (wat is het kleinste element in $\mathbb{R}$?).

Cantor's bewijs dat $\aleph_0$ het kleinste oneindige kardinaalgetal is gaat op de manier die



Epoch Of Unlight

Het Amerikaanse gezelschap Epoch of Unlight bracht in 2005 hun recentste album uit, getiteld *The Continuum Hypothesis*. De luisteraar wordt getraakteerd op een onwaarschijnlijke combinatie van abstracte wiskundige concepten en death metal muziek. Hieronder een gedeelte van de tekst van de titelsong.

*Countless years between the
fated crossings
From the mighty threshold into time
Under the ice-blue glare
of a star-filled night
Once again I had arrived...*

*Another point of transition,
another's grand design
The endless quest of a darker mind
A skewed symbiotic voyage
through the all
The legatee of a night much maligned*

*Egested innocence,
an empyrean expulsion
The ethereal levee breaks
in multicosmic explosion*

*Unbound I rise
Aleph-null was the lie
Far beyond the rubicon
In league with the Unlight!*

*Fetid crests of purulent seas
flowing over all
The cleansing streams transecting time
Guided through the propylaeum
of the lemniscate
Supposition's proof in drowning cries!*

voor de hand ligt: neem een oneindige verzameling M en construeer een injectieve afbeelding $n \mapsto x_n$ van $\mathbb{N}$ naar M door telkens x_n in $M \setminus \{x_i : i < n\}$ te kiezen.

Eenzelfde argument zou gebruikt kunnen worden om een welordering van M te maken: kies telkens voor elk ordinaalgetal α een punt x_α in $M \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, tot dit niet meer kan. Dat er een moment zal zijn waarop 'dit niet meer kan' volgt uit het ongerijmde: anders verkrijgt men een injectieve afbeelding van het geheel der ordinaalgetallen naar X . Cantor en Burali-Forti hadden al ingezien dat de ordinaalgetallen een problematische verzameling vormen: als welgeordende verzameling heeft deze een ordinaalgetal dat groter is dan alle ordinaalgetallen en dus ook groter dan zichzelf. Voor een 'onproblematische' verzameling M kan zo'n injectieve afbeelding dus niet bestaan, dus bestaat een α zó dat $M = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, waarmee M gelijk welgeordend is.

Op deze argumenten is veel af te dingen. Ten eerste is niet duidelijk hoe de x_n en de x_α gekozen worden. Ten tweede is niet duidelijk hoe die oneindig veel keuzen tot één afbeelding samengevoegd kunnen worden. Ten derde is het onderscheid tussen problematische en niet-problematische verzamelingen nogal mistig. Het wekt dan ook weinig verwondering dat niet iedereen er van overtuigd was dat elke verzameling inderdaad te welordenen was.

In [28–29] ondervindt Zermelo de eerste twee bezwaren door van te voren een afbeelding te nemen die uit elke niet-lege deelverzameling van M een vast element kiest.

Jeder Teilmenge M' denke man sich ein beliebiges Element m'_1 zugeordnet, das in M' selbst vorkommt und das 'ausgezeichnete' Element von M' genannt werden möge. So entsteht eine 'Belegung' γ der Menge M mit Elementen der Menge M von besonderer Art. Die Anzahl dieser Belegungen γ ist gleich dem Produkte $\prod m'$ erstreckt über alle Teilmengen M' und ist daher jedenfalls von 0 verschieden. Im folgenden wird nun eine beliebige Belegung γ zu grunde gelegt und aus ihr eine bestimmte Wohlordnung der Elemente von M abgeleitet.

Hier kwam het Keuzeaxioma de Wiskunde binnen met een interessante rechtvaardiging: het product van (kardinaal)getallen die ongelijk aan nul zijn is zelf ook ongelijk aan 0. In zijn latere axiomatisering van de verzamelingenleer, [30], draaide Zermelo de zaak om: het Keuzeaxioma werd ingevoerd om de uitspraak over het product af te kunnen leiden.

Dankzij die afbeelding liggen de keuzen

van de x_n en x_α ondubbelzinnig vast en kunnen deze met behulp van een recursieprincipe tot één afbeelding samengevoegd worden. Zermelo's bewijs bevatte nog wat verfiningen waardoor het in zijn geheel binnen de verzameling $P(M)$ van alle deelverzamelingen van M , en dus zonder gebruik van ordinaalgetallen, uitgevoerd kon worden.

Het Keuzeaxioma werd vrij snel geaccepteerd en werd na verloop van tijd niet als 'extra' aannahme vermeld, zoals bijvoorbeeld in Banach's bewijs van de Hahn-Banachstelling, [2]:

On prouve ce théorème par induction transfinie en appliquant succesivement le théorème 1 aux éléments de l'ensemble $E - G$ (supposé bien ordonné).

Hierin verwijst 'théorème 1' naar de mogelijkheid een functionaal uit te breiden door één extra vector aan een deelruimte toe te voegen.

Voor wie denkt dat het Keuzeaxioma pas belangrijk wordt voor 'grote' verzamelingen: analyseer het standaardbewijs dat rijtjescontinuïteit equivalent is aan ε - δ -continuïteit maar eens; ook daar moeten individuele ongespecificeerde keuzen tot één rij samengevoegd worden en zonder het Keuzeaxioma lukt dat niet.

Equivalenten/gevolgen

De methoden en taal van Cantor's verzamelingenleer werden al snel in diverse gebieden toegepast. Men denke bijvoorbeeld aan de integratietheorie van Lebesgue en de Functionaalanalyse; zonder het begrip verzameling is het moeilijk voor te stellen hoe deze van de grond gekomen zouden zijn.

Zoals hierboven aangestipt werd het Keuzeaxioma snel geaccepteerd maar de Continuüm Hypothese werd het onderwerp van veel onderzoek en in 1934 verscheen het boek *Hypothèse du Continu* van Sierpiński [25] waarin een hele reeks equivalenten en gevolgen van CH verzameld werden.

Het allereerste equivalent, P_1 genoemd, is het volgende: het vlak, $\mathbb{R}^2$, is te schrijven als de vereniging van twee (disjuncte) deelverzamelingen A en B zó dat A elke verticale lijn in slechts aftelbaar veel punten snijdt terwijl B met elke horizontale lijn slechts aftelbaar veel punten gemeen heeft. Het punt is dat het kwadraat van de getallenklasse (II) zo'n decompositie toelaat: $A = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \beta \leq \alpha\}$ en $B = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \alpha < \beta\}$; via een bijectie naar $\mathbb{R}$ is hier een decompositie van $\mathbb{R}^2$ van te maken. Andersom bewijst men relatief eenvoudig dat het kwadraat van een welgeordende

verzameling van kardinaliteit groter dan $\aleph_1$ niet als zo'n vereniging te schrijven is.

Overigens zijn A en B automatisch niet-meetbare verzamelingen van het vlak. De integralen van hun karakteristieke functies bestaat niet: zo geldt $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) dy dx = 0$ terwijl $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x, y) dx dy = \infty$.

Een interessant gevolg van CH is het volgende, genummerd C_{25} : er bestaat een bijectie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die verzamelingen van de eerste categorie overvoert in verzamelingen van Lebesgue-maat nul. Preciezer, voor elke deelverzameling A van $\mathbb{R}$ geldt: A is van de eerste categorie dan en slechts dan als $f[A]$ maat nul heeft. Er was al eerder opgemerkt dat beide noties van 'kleine deelverzameling' structurele overeenkomsten vertoonden; onder de aanname van CH worden die overeenkomsten dus versterkt tot isomorfie.

Een recenter equivalent van CH werd in [15] door Erdős gegeven: er bestaat een overaftelbare familie F van gehele functies met de eigenschap dat voor elk complex getal z de verzameling $\{f(z) : f \in F\}$ van functiewaarden aftelbaar is. Het bewijs is in **Het Boek** [1] opgenomen.

Nog recenter, uit 1984, is de volgende stelling van Morayne, [24]: de Continuüm Hypothese is equivalent met het bestaan van een surjectieve afbeelding $(f_1, f_2): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ met de eigenschap dat voor elke t (ten minste) één van de afgeleiden $f_1'(t)$ of $f_2'(t)$ bestaat. In feite liet Morayne zien dat het bestaan van de functie gelijkwaardig is aan het bestaan van een decompositie $\mathbb{R}^2 = A \cup B$ als hierboven. Terzijde: een afbeelding als die van Morayne kan niet continu zijn.

Status

Hilbert zette Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums bovenaan zijn beroemde lijst van problemen — met daarbij ook de vraag een welordering van $\mathbb{R}$ aan te geven.

Op het Internationaal Mathematisch Congres van 1904 in Heidelberg kondigde König aan, zie [22], dat $\mathbb{R}$ niet welordenbaar is en dus dat de gelijkheid $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ook niet waar zou zijn. Het bewijs berustte op een resultaat van Bernstein waarvan enige dagen later werd vastgesteld dat het niet klopte. Het bewijs van König gaf, zoals later zou blijken, de enige beperking die aan een α met $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ gesteld kan worden. Zo'n α kan geen aftelbare cofinaliteit hebben, dat wil zeggen: als er een strikt stijgende rij $\langle \alpha_n : n < \omega_0 \rangle$ ordinaalgetallen is met $\alpha = \sup_n \alpha_n$ dan is $2^{\aleph_0}$ zeker niet gelijk aan $\aleph_\alpha$. Dit bewijst men als volgt. Ten eerste: als $2^{\aleph_0} = \aleph_\beta$ dan volgt uit Cantor's rekenregels dat

$$\aleph_\beta = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_\beta^{\aleph_0}$$

Ten tweede: voor een α als boven geldt $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_0}$. Neem een verzameling A met $\overline{A} = \aleph_\alpha$ en schrijf $A = \bigcup_n A_n$, waarbij $\overline{A_n} = \aleph_{\alpha_n}$ en $A_n \subset A_{n+1}$ voor alle n . Laat $f: A \rightarrow A^{\aleph_0}$ een afbeelding zijn en kies voor elke n een punt a_n in A met de eigenschap dat $a_n \neq f(a)_n$ voor alle $a \in A_n$; dit kan omdat $\overline{A_n} < \overline{A}$. Het punt $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ zit niet in $f[A]$. Deze keuze kan expliciet gemaakt worden: omdat $\overline{A} = \aleph_\alpha$ is A welordenbaar; a_n kan dus telkens als het eerste element met de gewenste eigenschap genomen worden.

Axioma's

De vraag bleef natuurlijk CH te bewijzen of te weerleggen. En de vraag die daarbij hoort: op basis van wat? Net als de meetkunde eerder had ook de verzamelingenleer axioma's nodig. Zermelo had in [30] al een lijst opgesteld en in [16] had Fraenkel de noodzaak van nog een extra axioma aangetoond, het Vervangingsaxioma. De axioma's van Zermelo en Fraenkel bevatten niets schokkends. Ze weer spiegelen de manier waarop we met verzamelingen omgaan.

Om te beginnen: er is een verzameling zonder elementen, genoteerd $\emptyset$. De axioma's van paarvorming, vereniging en machtsverzameling spreken voor zich. Het oneindigheidsaxioma postuleert het bestaan van een verzameling x met de volgende twee eigenschappen: $\emptyset \in x$ en voor elke $y \in x$ is ook $\{y\}$ een element van x — wat men verder van zo'n verzameling moge denken, hij beantwoordt wel aan het beeld van een oneindige verzameling. Het afscheidingsaxioma laat ons verzamelingen van de vorm $\{y \in x : E(y)\}$ opschrijven, E is hierbij een eigenschap die in de taal van de verzamelingenleer te beschrijven is. Fraenkel's vervangingsaxioma doet iets dergelijks en zegt, informeel, dat het beeld van een verzameling onder een functie weer een verzameling is. Ten slotte zijn er nog het extensionaliteitsaxioma (verzamelingen zijn gelijk dan en slechts dan als ze dezelfde elementen hebben) en het regulariteitsaxioma (elk element heeft $\in$ -minimale elementen). Het laatste legt een technische maar niet essentiële beperking op aan het soort verzamelingen dat we beschouwen.

Zermelo nam het Keuzeaxioma ook in zijn lijst op maar tegenwoordig geven we met ZF het stelsel van de hierboven beschreven axioma's aan en met ZFC het stelsel plus het Keuzeaxioma. De vraag naar de bewijsbaarheid van CH is hiermee gepreciseerd tot: is CH af te leiden uit de axioma's van ZFC?

Vloeistoffen

Wie 'Continuümhypothese' of 'Continuum Hypothesis' aan Google voert krijgt veel hits die aan Cantor's probleem refereren. Het Wikipedia-artikel over CH begint echter met: "This article is about a hypothesis in set theory. For the assumption in fluid mechanics, see fluid mechanics." Veel mathematische fysici denken bij de woorden 'Continuüm Hypothese' aan de aanname dat een waterstroom een 'continuüm' is, een aaneengesloten geheel, en niet wat het in werkelijkheid is: een schier oneindige hoeveelheid over elkaar buitende watermoleculen. Die aanname vereenvoudigt de wiskundige behandeling van zo'n stroming aanzienlijk.

Niet te weerleggen

Het eerste resultaat over de bewijsbaarheid van CH kwam van Gödel in [17]. Hij toonde aan dat de samenvoeging van ZFC en CH niet tot een tegenspraak kan leiden. Hij deed dat door een universum van verzamelingen te bouwen waarin alle axioma's van ZF plus het Keuzeaxioma plus CH geldig zijn. Dat universum is een deel van het gehele universum, V , van alle verzamelingen. Het bestaat uit alle *construeerbare* verzamelingen, waarbij een verzameling 'construeerbaar' wordt genoemd als, het woord zegt het al, een specifieke constructie van die verzameling bestaat met behulp van een beperkt aantal operaties en uitgaande van alleen de lege verzameling. Het is een niet-geringe taak te laten zien dat het universum, L , van alle construeerbare verzamelingen rijk genoeg is om aan alle axioma's van ZF te voldoen. Daarnaast komt L met een definieerbare globale welordering, hetgeen zelfs een Keuzefunctie voor heel L zelf oplevert. Ten slotte: met behulp van middelen uit de logica, waaronder de Löwenheim-Skolemstelling, wist Gödel aan te tonen dat L exact $\aleph_1$ reële getallen bevat, waarmee ook CH in L was aangetoond.

Hoe bewijst dit dat CH niet te weerleggen is? Op dezelfde manier waarop men bewijst dat het Parallellenpostulaat van Euclides niet te bewijzen is. De andere axioma's van Euclides gelden in het hyperbolische vlak, al hun gevolgen dus ook. Maar het Parallellenpostulaat geldt niet in het hyperbolische vlak en is derhalve niet af te leiden uit de andere axioma's. Alle axioma's van ZFC gelden in L , en CH ook, dus de gevolgen van ZFC + CH ook en daar is $\emptyset = \{\emptyset\}$ niet bij want die geldt niet in L ; uit ZFC + CH is dus geen tegenspraak

af te leiden.

Niet te bewijzen

Na Gödel's bewijs bleven er nog twee mogelijkheden over: CH is een gevolg van ZFC of uit $ZFC + \neg CH$ is ook geen tegenspraak af te leiden.

In 1963 bewees Cohen dat het laatste het geval is: CH is niet uit de axioma's van ZFC af te leiden. Net als Gödel deed hij dat door een universum te bouwen waarin deze axioma's wel gelden maar CH niet. Dat moest op een andere manier dan die waarop Gödel het universum L had gemaakt. Eén van de eigenschappen van L is namelijk dat het het kleinste mogelijke universum van verzamelingen is. Dit volgt uit het, niet-triviale, feit dat 'construeerbaar' een absoluut concept is: ongeacht in welk universum men de constructie van L uitvoert het resultaat is altijd hetzelfde. In het bijzonder binnen L zelf, zodat L -binnen- L niets anders is dan L zelf. Aangezien L het enige 'concrete' universum was dat voorhanden was moest de oplossing liggen in het *uitbreiden* van L . Wat Cohen deed was laten zien hoe elk universum, niet alleen L , uitgebreid kan worden tot een nieuw universum waarin CH niet geldt. De methode lijkt erg op die van Gödel: in plaats van met niets begint men met het uit te breiden universum, V , plus een verzameling $G = \{r_\alpha : \alpha < \omega_2\}$ van nieuwe reële getallen. De 'construeerbare afsluiting', $V[G]$, die we hieruit maken is de uitbreiding van V die we zoeken.

Dit is makkelijker gezegd dan gedaan. De problemen die opgelost moeten worden zijn

1. Waar komen die nieuwe getallen vandaan?
2. Hoe weten we dat de axioma's van ZFC in $V[G]$ gelden?
3. Geldt $\neg CH$ wel in $V[G]$?

De eerste twee vragen liggen voor de hand; de derdewellicht iets minder, maar bij het maken van $V[G]$ zou er een bijjectie tussen ω_1 en ω_2 kunnen ontstaan, waar dan weer een bijjectie tussen ω_1 en $\mathbb{R}$ uit gemaakt kan worden. Het antwoord van Cohen op de eerste vraag gaf meteen een antwoord op de andere twee: de techniek die nu *forcing* wordt genoemd is een manier om verzamelingen aan een universum toe te voegen en wel zó dat men veel eigenschappen van de uitbreiding binnen het kleinere universum kan verifiëren. Hoe dit werkt komt in een vervolg op dit artikel aan bod, maar wat Cohen deed was $\aleph_2$ reële getallen aan L toevoegen op zo'n manier dat hij kon laten zien dat in het nieuwe universum inderdaad alle axioma's van ZFC gelden en zó dat niet per ongeluk een bijjectie van $\aleph_1$ naar $\aleph_2$ wordt gemaakt.

Toen Cohen's werk bekend werd was het hek van de dam: de theorie van forcing werd gestroomlijnd en op onnoemelijk veel problemen uit de verzamelingenleer toegepast. Ook werd duidelijk dat König's stelling scherp was: in een artikel met de veelzeggende titel *$2^{\aleph_0}$ can be anything it ought to be* liet Solovay zien dat voor elke α die niet een aftelbaar oneindige cofinaliteit heeft een universum bestaat waarin $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ geldt.

Cantor's oorspronkelijke formulering

In de oorspronkelijke formulering van CH speelden welordeningen geen rol. Er is een universum waarin deze versie waar is, zonder dat $\mathbb{R}$ een welordering toelaat. Dit hangt samen met het oneindige spel waarin twee spelers, I en II, om beurten een 0 of een 1 kiezen. De resulterende rij $\langle x_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ van nullen en enen bepaalt een reëel getal: $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot 2^{-i}$. Om dit spel spannend te maken wordt vooraf een deelverzameling A van $[0, 1]$ gekozen en afgesproken dat I wint als $x \in A$ en dat II wint als $x \notin A$.

Een verzameling heet gedetermineerd als I of II een winnende strategie heeft. Met behulp van een welordering van $\mathbb{R}$ kan men niet-gedetermineerde verzamelingen maken. Er zijn echter universa waarin *elke* verzameling gedetermineerd is en met behulp hiervan bewijst men dat elke overaftelbare deelverzameling van $[0, 1]$ een kopie van de Cantor-verzameling bevat en dus gelijkmachting is met $\mathbb{R}$.

Is CH waar?

De vraag of CH waar is is mijns inziens vooral nog meer een filosofische dan een wiskundige vraag. De reële rechte is het unieke geordende lichaam met de eigenschap dat elke niet-lege, naar boven begrensde verzameling een kleinste bovengrens heeft. Deze karakterisering is uit de axioma's van ZF af te leiden en ZF stelt ons ook in staat zo'n lichaam te construeren. Dit impliceert dat de Analyse die we uit de leerboeken kennen geheel binnen ZFC geformaliseerd en ontwikkeld kan worden en dus dat de Analyse zeker niet meer over CH te zeggen heeft dan ZFC; niets dus.

Er zijn dus twee manieren om te besluiten of CH waar is. De eerste is per decreet: we kiezen voor CH of $\neg CH$ en voegen die aan ZFC toe; dat maakt de andere mogelijkheid per definitie onwaar. Dit verdient niet de schoonheidsprijs en leidt ons naar de tweede mogelijkheid. Dat is eigenlijk de eerste maar met redenen omkleed: we ontdekken/formuleren een uitspraak over $\mathbb{R}$ die wel waar moet zijn — op filosofische/esthetische/praktische gron-

den — en die CH (of $\neg CH$) impliceert en ook nog consistent is met ZFC.

De tijd zal het leren.

Wat kunnen we ermee?

Tot slot iets over de rol van CH in de wiskunde van vandaag.

Die rol is er echt een van een *hypothese*: een bewering die onder aanname van CH bewezen is kan binnen ZFC niet meer ontkracht worden en is dus een potentiële stelling; het kan dan natuurlijk zo zijn dat, net als CH zelf, de bewering niet uitgaande van ZFC te bewijzen is.

Als voorbeeld bekijken we een probleem uit de theorie van de Banachalgebra's, in het bijzonder die van de vorm $C(K)$, de algebra van continue complexwaardige functies op een compacte ruimte K . Kaplansky wierp het volgende probleem op: zij $\|\cdot\|$ een algebranonorm op $C(K)$, dat wil zeggen een norm die aan $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ voldoet, is deze dan equivalent met de maximumnorm $\|\cdot\|_m$?

Kaplansky zelf bewees dat $\|\cdot\| \geq \|\cdot\|_m$ en met behulp van de open-afbeeldingstelling volgt hieruit dat het antwoord positief is voor volledige normen. In 1976 bewezen Dales en Esterlé onafhankelijk van elkaar met behulp van CH dat voor elke oneindige compacte K een niet-equivalente algebranonorm op $C(K)$ bestaat. Enige jaren later contrueerde Woodin een universum waarin elke algebranonorm op elke $C(K)$ equivalent is met de maximumnorm. Het boek [13] van Dales en Woodin biedt een goed overzicht van het probleem en de oplossingen.

Bewijzen onder aanname van CH geven meer zekerheid dan bewijzen onder aanname van, bijvoorbeeld, de Riemannhypothese, omdat deze laatste nog niet is bewezen noch weerlegd. Als de Riemannhypothese onjuist blijkt, is er veel werk aan de winkel om van alle gevolgen uit te zoeken of ze waar zijn of niet. Verder is het zo dat de Riemannhypothese echt eenvoudiger is dan CH: als iemand bewijst dat de Riemannhypothese uitgaande van ZFC niet te bewijzen/weerleggen is dan is deze meteen weerlegd/bewezen. De reden is dat de Riemannhypothese neerkomt op de bewering dat een open verzameling, $O = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq \frac{1}{2}\}$, en een gesloten verzameling, $F = \{z : \zeta(z) = 0\}$ een lege doorsnede hebben. Het Absoluutheidslemma van Schoenfield impliceert dat uit $O \cap F \neq \emptyset$ volgt dat $O \cap F \cap L \neq \emptyset$; dat wil zeggen: als er een niet-triviaal nulpunt is dan is er ook een niet-triviaal nulpunt in Gödel's universum L . We hebben gezien dat L in elk universum hetzelfde is. Hieruit volgt dat zodra er ook maar

één universum is waar de Riemannhypothese geldt, de Riemannhypothese in elk universum geldt en daarmee, op grond van Gödel's volledigheidsstelling, uit ZFC te bewijzen moet zijn.

Voelt u zich dus vrij bij uw aanvallen op de Riemannhypothese de Continuümhypothese aan te nemen.

Verder lezen

Dauben's biografie van Cantor, [14], is de moeite van het lezen waard; men krijgt een goede indruk van de ontstaansgeschiedenis van Cantor's verzamelingenleer.

In 1947 schreef Gödel een artikel, [18], met de titel *What is Cantor's Continuum problem?*, waarin hij uitlegt waarom hij denkt dat CH ei-

genlijk niet waar kan zijn.

Vrij recent, in [26–27], beschreef Woodin de moderne stand van zaken omtrent CH.

Het boek van Kunen, [23], is een goede plek om meer te leren over onafhankelijkheidsbewijzen in de verzamelingenleer. ←

Referenties

- Martin Aigner en Günter M. Ziegler, *Proofs from The Book (Third Edition)*, Berlin: Springer-Verlag (2004)
- S. Banach, *Sur les fonctionelles linéaires*, *Studia Mathematica*, **1** (1929), 211–216.
- Georg Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, *Mathematische Annalen*, **5** (1872), 123–132.
- Georg Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, *Crelles Journal für Mathematik*, **77** (1874), 258–262.
- Georg Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, *Crelles Journal für Mathematik*, **84** (1878), 242–258.
- Georg Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 5*, *Mathematische Annalen*, **21** (1883), 545–586.
- Georg Cantor, *De la puissance des ensembles parfaits de points*, *Acta Mathematica*, **4** (1884), 381–392.
- Georg Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Erster Artikel)*, *Mathematische Annalen*, **46** (1895), 491–512.
- Georg Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Zweiter Artikel)*, *Mathematische Annalen*, **49** (1897), 207–246.
- Paul Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **50** (1963), 1143–1148.
- Paul Cohen, *The independence of the continuum hypothesis. II*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **51** (1964), 105–110.
- Paul J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc. (1966).
- H. G. Dales en W. H. Woodin, *An introduction to independence for analysts*, *London Mathematical Society Lecture Note Series* 115, Cambridge: Cambridge University Press (1987).
- Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor. His mathematics and philosophy of the infinite*, Princeton, NJ: Princeton University Press (1990).
- P. Erdős, *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, *The Michigan Mathematical Journal*, **11** (1964), 9–10.
- Abraham Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, *Mathematische Annalen*, **86** (1922), 230–237.
- Kurt Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, *Annals of Mathematics Studies*, no. 3, Princeton, NJ: Princeton University Press (1940).
- Kurt Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, *The American Mathematical Monthly*, **54** (1947), 515–525.
- Felix Hausdorff, *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen*, *Mathematische Annalen*, **77** (1916), 430–437.
- Wilfrid Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press (1997).
- Teun Koetsier, *Die Vermessung des Uneindlichen*, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **8** (2007), 31–33.
- Julius König, *Zum Kontinuumproblem*, *Mathematische Annalen*, **60** (1905), 177–180.
- Kenneth Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 102, Amsterdam: North-Holland Publishing Co. (1980).
- Michael Morayne, *On differentiability of Peano type functions*, *Colloquium Mathematicum*, **48** (1984), 261–264.
- Wacław Sierpiński, *Hypothèse du continu*, *Monografie Matematyczne* 4, Warszawa-Lwów: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej (1934).
- W. Hugh Woodin, *The continuum hypothesis. I*, *Notices of the American Mathematical Society*, **48** (2001), 567–576.
- W. Hugh Woodin, *The continuum hypothesis. II*, *Notices of the American Mathematical Society*, **48** (2001), 681–690.
- Ernst Zermelo, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, *Mathematische Annalen*, **59** (1904), 514–516.
- Ernst Zermelo, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, *Mathematische Annalen*, **65** (1908), 107–128.
- Ernst Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, *Mathematische Annalen*, **65** (1908), 261–281.

Gunther Cornelissen

Universiteit Utrecht

Mathematisch Instituut

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

Boekbespreking The Princeton Companion to Mathematics

Waardig gezelschap aan de koffietafel

Alweer een encyclopedisch werk over wiskunde, klaar om snel te verouderen en ongebruikt in de kast te staan? Internet is immers sneller en meer up-to-date. De Princeton Companion probeert het net ietsje anders te doen. Wiskundig veelvraat Gunther Cornelissen test het boek.

Op mijn werkkamer staat een gammal IKEA-tafeltje naast het espressotoestel. Dit is de 'koffietafel'. Er ligt een stapel papier op, hoofdzakelijk stukjes 'What is a ...?' gescheurd uit de Notices van de American Mathematical Society, preprints van het ArXiv, en algemene stukjes over wiskunde waar ik graag een indruk van wil krijgen. Nog erger is de dikke map met label 'Ex-koffietafel' in de kast: het merendeel van de papieren verdwijnt hier natuurlijk ongelezen in. Helaas. Als ik op pensioen ga neem ik dit mee naar het spreekwoordelijke eiland.

Nu ligt het vuistdikke, duizend pagina's tellende *The Princeton Companion to Mathematics* thuis naast de kerstboom, een 'cadeautje' van de boekenredactie. Ik begon eraan met gezonde scepsis ten opzichte van al dit soort encyclopedische werken, vooral in tijden van google, wikipedia, scholarpedia, etc [1]. Maar een boek is nog wat anders dan internet. Stel dat er geen stroom is, dan kun je wel nog lezen, desnoods bij kaarslicht.

Dit soort boeken kan nooit zo allesomvattend zijn als Diderot en d'Alembert het bedoelden, en zelfs beperkt tot de wiskunde is het onbegonnen werk. De twee Japanse volumes *Encyclopaedic Dictionary of Mathematics* [2] heb ik wel eens zinvol gebruikt voor een definitie — het zijn zoals de naam aangeeft een soort woordenboeken, consistent in verzamelingenleer-taal geschreven. In het Hazewinkel-project [3] vind ik nooit wat ik zoek; en ook al is de Russische *Encyclopaedia of Mathematical Sciences* van Springer natuurlijk fantastisch (ik heb er enkele volumes

van gekocht), het is toch een reeks monografieën in plaats van een coherent naslagwerk [4].

Dit boek

Het hier besproken boek, onder hoofdredactie van Fields-medailist Timothy Gowers, ook bekend van het boekje over wiskunde in de reeks 'Very short introductions' van Oxford University Press, blijkt een aangename verrassing [5]. De redacteurs kennen precies de bezwaren hierboven en hebben een ander soort boek gemaakt. Het is de betere versie van mijn ex-koffietafel-map, en dat bedoel ik heel positief.

De doelgroep is duidelijk de onderzoekswiskundige. Het niveau en de taal zijn hedendaags en de informatie is up-to-date (ca. 2005).

Een keur aan grote namen heeft artikelen van een kolom tot een paar bladzijden geschreven over grote gebieden en resultaten in de wiskunde. En het werkt, want de meeste stukjes ademen bij het lezen de volgende sfeer uit: het is alsof je naar een expert bent toegestapt, hebt gezegd: "leg me dit uit, maar let op: ik weet niets". De expert stapt naar zijn krijtbord en legt het je uit, door met een eenvoudig voorbeeld te beginnen, de achtergrond uit te leggen, een niet-technische formulering te kiezen, etc.

Je wilt bijvoorbeeld weten wat Mostow-rigiditeit is. Artikel V.23 van David Fisher legt het in twee bladzijden uit. Of het P versus NP -probleem: een deel van IV.20 'Computational Complexity' door Oded Goldreich en Avi Wigderson geeft een formulering die meteen te begrijpen is (weliswaar in 29 pagina's, maar dan meteen veel meer dan P vs. NP , nu weet ik ook wat een 'Zero knowledge proof' is).

Natuurlijk werken niet alle artikelen op deze manier — daardoor zijn er teveel auteurs en dus veel verschillende smaken —, maar tot mijn verrassing de meeste wel. De kwalite

teit van de gekozen auteurs zegt ook wel wat.

Ik durf zelfs te beweren dat dit boek in traditionele zin een 'koffietafelboek' kan zijn. Er staan weliswaar geen mooie kleurenplaatjes in, maar voor wiskundigen is er veel te bladeren: even een stukje lezen, een formule bekijken. Een mooi panorama.

De uitgevers weten dat ze niet de hele wiskunde kunnen afdekken, en dus hebben ze keuzes gemaakt. Zo is 'toegepaste wiskunde' ondervertegenwoordigd. Daarvoor in de plaats is er dan wel weer deel VII over 'The Influence of Mathematics', dat o.a. gaat over chemie en biologie, wavelets, cryptografie, financiële wiskunde en muziek. En er is een mooi overzichtsstuk over numerieke wiskunde waarin van der Vorst niet ontbreekt.

Maar zelfs de zuivere wiskunde past niet in duizend pagina's. De keuzes die dan worden gemaakt zijn duidelijk beïnvloed door de wiskundige omgeving van Gowers, grofweg de Fieldsmedailles en Nevanlinna-prijzen van de afgelopen decennia.

Bijvoorbeeld: geen Kolmogorov-Arnold-Moser theorie in het boek. Bij 'dynamica', een mooi stuk van Bodil Branner, ligt de nadruk op complexe dynamica à la Lyubich, McMullen, etc.

Bij 'Logic and Model Theory' van David Marker gaat het duidelijk richting onbeslisbaarheid, stabiliteitstheorie en ω -minimaliteit. Als je in dit boek 'Lattices' zoekt, dan kom je op allerlei roosters terecht (elliptische krommen, het Leechrooster), niet bij tralietheorie.

Nog een overduidelijke keuze: bij het artikel over partiële differentiaalvergelijkingen (PDE) en andere stukken analyse komt steeds de Ricci-stroom aan bod. Ik denk niet dat dit een paar jaar geleden zo prominent aanwezig zou zijn geweest.

Opbouw

De opbouw van het boek is wat onconventioneel. Het is niet gewoon een alfabetische lijst

Stellingen en problemen in deel V

- The ABC Conjecture
- The Atiyah-Singer Index Theorem
- The Banach-Tarski Paradox
- The Birch-Swinnerton-Dyer Conjecture
- Carleson's Theorem
- The Central Limit Theorem
- The Classification of Finite Simple Groups
- Dirichlet's Theorem
- Ergodic Theorems
- Fermat's Last Theorem
- Fixed Point Theorems
- The Four-Color Theorem
- The Fundamental Theorem of Algebra
- The Fundamental Theorem of Arithmetic
- Gödel's Theorem
- Gromov's Polynomial-Growth Theorem
- Hilbert's Nullstellensatz
- The Independence of the Continuum Hypothesis
- Inequalities
- The Insolubility of the Halting Problem
- The Insolubility of the Quintic
- Liouville's Theorem and Roth's Theorem
- Mostow's Strong Rigidity Theorem
- The P versus NP Problem
- The Poincaré Conjecture
- The Prime Number Theorem and the Riemann Hypothesis
- Problems and Results in Additive Number Theory
- From Quadratic Reciprocity to Class Field Theory
- Rational Points on Curves and the Mordell Conjecture
- The Resolution of Singularities
- The Riemann-Roch Theorem
- The Robertson-Seymour Theorem
- The Three-Body Problem
- The Uniformization Theorem
- The Weil Conjectures

van lemmata.

Na de inleiding volgt in deel II een historisch stuk van circa honderd pagina's; voor zover ik kan beoordelen competent geschreven, door geschiedenis-coryfeeën als Jeremy Gray en Karen Hunger Parshall.

In deel III staan 'Mathematical Concepts' zoals Categories, Distributions, Hilbert spaces, K -theory (een ronduit teleurstellende halve kolom), Modular forms, Quantum computation.

Deel IV is het meest volumineus (350 pp.), en heet 'Branches of Mathematics', en dit lijkt wat op de artikelen in de oude Duitse 'Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften

mit Einschluß ihrer Anwendungen' van Klein-Meyer-Weber [7], met langere artikelen die een inleiding vormen tot Algebraic Topology (Burt Totaro), Moduli Spaces (David Ben-Zvi), PDE (Sergiu Klainerman). Voor de bijna onmogelijke stukken Mirror Symmetry en Vertex Operator Algebras zijn respectievelijk Eric Zaslow en Terry Gannon aangetrokken, die zich in elk geval de moeite getroosten eerst even de natuurkunde uit te leggen. François Le Gall doet stochastische processen, en Gordon Slade percolatie. Het zijn niet alleen de toppers van het veld, maar ze doen ook echt hun best om het 'up to date' uit te leggen. Ik heb zoals hierboven beschreven de indruk dat de meeste auteurs doen of ze me tegenkomen bij de koffieautomaat en 'even' hun vakgebied gaan uitleggen. Het zijn doorwrochte stukken die doen of ze spontaan zijn.

Deel V heet 'Theorems and Problems' en is vijftig pagina's lang snoepen. Kijk bijvoorbeeld eens naar 'Ergodic Theorems' van Vitaly Bergelson. In het kader staat de lijst met onderwerpen van dit deel.

In deel VI staat een overzicht van belangrijke wiskundigen. Omdat hier voornamelijk biografische gegevens en grote resultaten worden verschaft, had wat mij betreft dit deel gerust uit het boek gekund, hiervoor is echt genoeg alternatief op internet en elders. Een positieve uitzondering is het artikel over Descartes van onze eigen Henk Bos, die erin slaagt zijn eigen boek over de Géometrie (en de misvattingen daarover) in twee bladzijden samen te vatten.

Een grappig stukje van het boek staat aan het eind van deel VIII ('Final Perspectives', 50 pp.): advies aan jongere wiskundigen door zulke goden als Atiyah en Connes. Ik zal het niet verklappen.

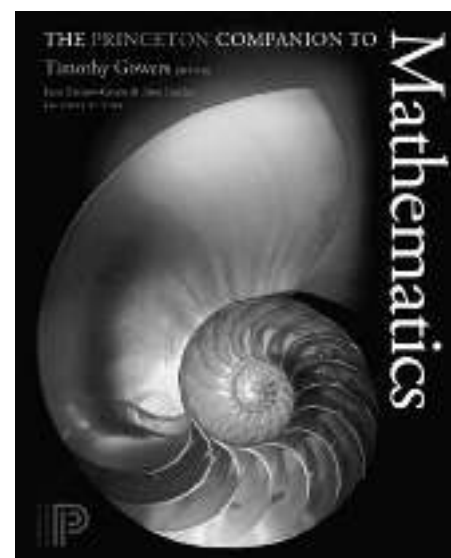
Conclusie

Het boek is in het algemeen heel grondig gecontroleerd en ik kon weinig fouten vinden. Een leuke is op de laatste bladzijde van het boek, waar de opmerking "profoundly

reshaped much of algebraic number theory" bij het kopje 'Non-standard Analysis' staat in plaats van bij het Langlands-programma, waar het hoort. Op de blog van Gowers worden dit soort uitschuivers opgesomd, helaas niet in een handige lijst, maar gewoon tussen de andere posts.

Dit boek ga ik niet verticaal in de kast zetten, maar nog lang op mijn koffietafel laten liggen. Nu maar hopen dat de gammele pootjes de bijna drie kilo kunnen dragen. Zo heb ik nog iets leuks over als straks mijn espressomachine om brandveiligheidsredenen is geconfisqueerd en de computer het niet doet door Kwaliteitsverbeterende Centralisatie der Diensten.

Zoals het een compagnon behoort, staat hij ons bij in barre tijden, en voor de prijs hoeft U de aanschaf zelfs in deze zogenaamde crisistijden niet te laten.



The Princeton Companion to Mathematics, Timothy Gowers (ed.), June Barrow-Green en Imre Leader (ass. eds.), 1034pp., Princeton University Press (2008), ISBN 978-0-691-11880-2, prijs: \$99. Webpagina: <http://press.princeton.edu/titles/8350.html> Blog van Gowers: <http://gowers.wordpress.com>

Noten

- 1 Typische veelgebruikte bronnen: www.google.com, www.wikipedia.org, www.scholarpedia.org, mathworld.wolfram.com, www-history.mcs.st-and.ac.uk.
- 2 Nieuwe uitgave bij M.I.T. Press (2 vol. pbk.), K. Ito (eds.), 2de ed., \$130, 2168 pp. (1993).
- 3 *Encyclopaedia of Mathematics*, gepubliceerd door Kluwer in 2000 in 10 delen, kostprijs ca. 2500 euro (vertaling van een Russisch werk), nu ook online: <http://eom.springer.de>.
- 4 *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer Verlag, ca. 75 volumes, sommige in goed-

kope(re) paperback; er is een soortgelijk werk (wat ik ervan heb gezien van lagere kwaliteit) met rode covers *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* bij Cambridge University Press met ca. 140 volumes.

- 5 Ook lezenswaardig van Gowers: 'Does mathematics need a philosophy?' in: Reuben Hersch (ed.), *18 unconventional essays on the nature of mathematics*, Springer Verlag, 2006. Gowers werkt nu aan 'The Tricky', een website waar men op problemen kan zoeken i.p.v. concepten (zoals in wiki). En wist U trouwens dat zijn vader

de componist is van de tune van de Sherlock Holmes reeks met Jeremy Brett?

- 6 Notices of the A.M.S. vol. 54, nr. 6, p. 694 (June 2007), www.ams.org/notices/200706/tx070600694p.pdf
- 7 Ca. 30 volumes werden gepubliceerd in het begin van de 20e eeuw.

Wieb Bosma

Radboud Universiteit Nijmegen

Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics

Postbus 9010

6500 GL Nijmegen

bosma@math.ru.nl

Een rubriek van P.H. Schoute in *Eigen Haard*, 1882–84

Wiskundige Verpoozingen

Het gebeurt niet zo heel vaak dat je bij wiskundig onderzoek stuit op verwijzingen naar Nederlandstalige artikelen. Wieb Bosma vond bij toeval binnen een paar jaar relevante verwijzingen naar twee artikelen van dezelfde auteur. Beide in hetzelfde obscure — althans voor wiskundigen — tijdschrift *Eigen Haard*.

Tijdens een (vergeefse) poging het mijne bij te dragen aan de analyse van de Torens van Hanoi, vond ik een verwijzing [1] naar een artikel van P.H. Schoute in het tijdschrift *Eigen Haard*. Uit de context van de verwijzing was wel duidelijk wat de auteur in dat artikel had gedaan, en ik nam niet de moeite om deze referentie na te trekken. Maar toen ik een paar jaar later bij het voorbereiden van een college Discrete Wiskunde een verwijzing naar een ander artikel van Schoute vond (over koninginnen op een schaakbord [2]), weer in *Eigen Haard*, besloot ik eens op zoek te gaan naar die artikelen, naar het tijdschrift met die intrigerende naam, en naar hun auteur.

Eigen Haard

Volgens de catalogus van de Nijmeegse universiteitsbibliotheek verscheen *Eigen Haard*, met als ondertitel *Geïllustreerd Volkstijdschrift*, van 1875 tot 1941 en is de eerste helft van die jaargangen er vrijwel compleet aanwezig. Dat was goed nieuws, want mijn verwijzingen waren naar de jaren 1882 en 1884. Het kostte me dan ook vrij weinig moeite om elf bijdragen van P.H. Schoute te lokaliseren (en ik ben er vrij zeker van dat dit de complete verzameling is). Vanwege aard en omvang van het

tijdschrift verschenen sommige bijdragen in twee delen, elk van twee of drie bladzijden. Op de laatste bijdrage na — juist degene over de Torens van Hanoi — verschenen alle afleveringen als rubriek onder de titel ‘Wiskundige Verpoozingen’; de eerste zeven waren nog genummerd I–VII.

Wiskundige Verpoozingen

De eerste Verpoozing, verschenen in aflevering 24 van jaargang 18 (1882), begint zo:

“Onder het groot aantal lezers van *Eigen Haard* zullen er waarschijnlijk velen gevonden worden, die in het praedicaat ‘wiskundige’ van den titel van dit stukje aanleiding vinden om het zonder eenige aarzeling over te slaan. Want ook nog in dezen tijd wordt alles, wat zich als wiskundig komt aanmelden, door het groote publiek onverbiddelijk uit de conversatiezaal gebannen en naar de studeerkamer verwezen. In de schatting van velen is de wiskunde nog steeds “een moderne zwarte kunst, alleen onder de bevatting van wezens met een afzonderlijken aanleg”. Zeker is het hier de plaats niet te onderzoeken, wat de oorzaak is van dit verschijnsel en hoe de nadeelige werking er van kan worden tegengegaan. Veeleer ligt het — en het hoofdwoord ‘verpoozingen’, dat op het prae-

dicaat ‘wiskundige’ volgt, wijst dit reeds aan — in mijne bedoeling te ontspannen; alleen zoek ik daarbij mijn materiaal op wiskundig terrein.”

De volgende alinea maakt direct duidelijk waar het materiaal op gebaseerd is, en ook de ambitie van de auteur om iets nieuws toe te voegen:

“Aanleiding tot het schrijven van dit stukje was mij de verschijning van een zeer lezenswaardig werk: *Récréations mathématiques* (wiskundige uitspanningen) in het begin van dit jaar. De schrijver, E. Lucas, leeraar aan een der instellingen van Parijs, is boven mijn lof verheven. Voor zoover ik het genoeg had dezen wiskundige bij onze samenkomsten te leeren kennen, is zijn boek de getrouwe afspiegeling van geheel zijn wezen, tintelend van vernuft en tot in de uiterste consequentie de volkomen uitdrukking van den franschen landaard. In verschillende hoofdstukken worden de schijnbaar meest verschillende, maar toch in werkelijkheid nauw met elkaar samenhangende onderwerpen op een frissche en ongedwongen wijze behandeld; telkens blijkt het talent van den schrijver om ingewikkelde zaken helder, en bijna altijd voor het groote publiek verstaanbaar, uiteen te zetten opnieuw. Alleen met zulk een gids durf ik het wagen wiskundige beschouwingen, zijn het dan ook verpoozingen, aan *Eigen Haard* ter plaatsing aan te bieden. Echter zal ik hem niet blindelings kunnen volgen. Vooreerst dwingt de ruimte, die ik mij stel, tot besnoeiing. Dan

is het noodig enkele onderwerpen, die ons als Hollanders minder belang inboezemen door andere van meer nationalen aard te vervangen of weg te laten. En eindelijk wensch ik aan zijne beschouwingen enkele nieuwe hoofdstukken toe te voegen.”

Schoute wijdt tenslotte een alinea aan het nut van deze beschouwingen. Ik citeer deze inleiding zo uitvoerig vanwege de herkenbaarheid, en om iets van de in onze ogen mischien wat archaïsche, maar toch rake stijl te laten zien:

“Hebben deze beschouwingen haar nut? Het zij mij vergund met een aanhaling van onzen schrijver hierop te antwoorden: ‘Waarom heeft men al niet het verwijt toegevoegd geen rechtstreeksch nut op te leveren?’ Toen een fransch wiskundige een belangrijke toelichting gegeven had op een geschrift der oudheid, vroeg Malherbe: ‘Of hierdoor nu het brood goedkooper worden zou?’ In de gulden eeuw van het treurspel riep Roberval bij het uitgaan van den schouwburg: ‘Maar wat bewijst dit spel?’ Altijd waren er, en zullen er geleerden zijn, die de kracht der verbeelding miskennen, en dichters, die vragen waar toe de wetenschap dient. En dat is wel gelukkig. Onderstelt niet de verdeeling van den arbeid, deze laatste vrucht der beschaving, en de ontwikkeling van den hoofdaanleg, dit grondgebed van den modernen schoonheidszin, in het individu onbekwaamheden en verblindingen, die voor onze hersenen, even als het ledige vakje bij het *Vijftienspel*, de ruimte uitmaken, welke tot ontwarring en schikking der denkbeelden noodig is, de ruimte zonder welke al de verleiding der stelsels, al de werkracht der onverdraagzaamheden, al de wonderen der specialiteiten zich zouden oplossen in de stelselloosheid van den onnoozele en de gevoelloosheid van den redeloze? Maar laat ik thans tot het onderwerp zelf overgaan.”

Boten en bruggen

In de eerste Verpoozing, getiteld ‘De overvaart’, behandelt Schoute enkele problemen van het type *de wolf, de geit, en de kool*, ook nu nog in zwang als puzzel. Beslist onaanvaardbaar zou het tegenwoordig echter in een publiekstijdschrift zijn om de oplossing in Latijnse versregels te vervatten en er bij op te merken dat het geheel overbodig is daaraan een vertaling toe te voegen. Schoute deed dat met een variatie van de puzzel, over het overvaren van drie echtparen met jaloerse mannen in een roeiboortje. Hij maakt van dit probleem vervolgens wiskunde, door de vraag op te werpen hoeveel personen het bootje moet

kunnen bevatten om n paren over te zetten zonder dat vrouwen bij afwezigheid van hun man in gezelschap van een vreemde man verkeren. Met als variant een versie waar in de rivier een eiland kan worden aangedaan; in dat geval volstaat altijd een bootje met maar twee zitplaatsen! En het kan altijd met $7(n-1)$ vaarten ... maar of dit minimaal is laat Schoute in het midden, want ‘ik mag niet te veel van het geduld van mijn lezers vergen’. Maar, werpt Schoute in deel II op, “Is dat nu wiskunde? [...] behoorlen zulke raadseltjes niet eerder in de kinderkamer thuis?”. Het antwoord dat hij zelf geeft is dat hij enerzijds eenvoudig wil beginnen en allengs ingewikkelder onderwerpen zal aansnijden “zonder de grenzen van het gewone gezond verstand, dat geen bijzondere ontwikkeling op het gebied van de ‘moderne kaballa’ bezit, te overschrijden”. Anderzijds wijst hij op een grote geest als Euler, die zich hier niet te goed voor achtte. Daarmee een mooi bruggetje leggend naar het onderwerp van deze Verpoozing: graphentheorie, in de vorm van Hamiltoncykels en het Koningsberger bruggenprobleem, het tekenen van figuren zonder het potlood van papier te halen, en de vraag over het minimale aantal knopen dat bij het ontwarren van een getekende Gordiaanse knoop overblijft — maar die vraag “voert óf op het gebied der hoogere wiskunde, [...] óf op dat der dameshandwerken”.

Dwalen en toveren

Voortdurend is duidelijk dat Schoute niet aarzelt over de geschiedenis — klassiek of van de wiskunde — te beginnen, of over onze nationale identiteit. Hij citeert beroemde auteurs, en rept over diepgang, nut en bewijzen van zijn wiskunde. Zo leidt hij ook de derde aflevering in — waarin hij bewijst dat het in elk doolhof mogelijk is een weg te vinden die alle paden in het doolhof in beide richtingen precies één maal doorloopt — met een uitvoerige beschouwing over de historie van doolhoven, inclusief een beschrijving van het gangenstelsel onder de Maastrichtse Sint Pietersberg. De, als algoritme geformuleerde, oplossing laat “uit theoretisch opzicht niets te wensen over”. In de vierde Verpoozing gaat het over magische vierkanten, ook nu weer populair. Uitgangspunt is het dan juist een eeuw eerder verschenen fameuze artikel (in het Frans) van Euler in de *Verhandelingen van het Zeeuwsch Genootschap*. “Zeker is het een merkwaardig feit dat een in Petersburg woonachtige Duitser zich, ter plaatsing van zijn fransch geschrift, tot een sedert korten tijd in een der kleinere steden van ons land opgericht genootschap wendt.” Kom daar nu reis om, verzucht Schou-

te met Stastok van Beets; “Waarschijnlijk is het verschijnsel nog een naflikking van het licht waarmee de goede naam van ons volk op elk gebied van ontwikkeling vroeger naar buiten heeft gestraald.”

Paarden en dames

In deel V gaan de beschouwingen verder met de paardesprong: is het mogelijk een ‘gesloten kringloop’ over het hele schaakbord te maken met een paard? en in deel VI gaat het over het probleem acht koninginnen zo op het schaakbord te plaatsen dat zij elkaar niet aanvallen. In de eerste helft beschrijft Schoute, onder verwijzing naar brieven van Gauss, de symmetrieën en het aantal verschillende oplossingen; in het tweede deel beschrijft hij een paar methoden om alle oplossingen te bepalen, waaronder het backtracken. “Zo heeft Laquière een kind op een achtermiddag al de oplossingen laten opschrijven, en bij het nazien waren er maar 3 fouten in; een oplossing was weggelaten en in twee waren de cijfers onjuist neergezet.”, Schoute geeft alle (92) verschillende oplossingen op het gewone 8×8 schaakbord, en past één methode ook toe op het 9×9 schaakbord, met als resultaat het aantal van 348 verschillende oplossingen. Dit aantal moest in de rubriek Correspondentie later nog gecorrigeerd worden tot 352, maar niettemin: het schijnt een primeur voor Eigen Haard geweest te zijn (!) en het wordt ook nu nog geciteerd in de vakliteratuur.

Eenzaam en tweetallig

In zijn behandeling van het *eenzaamheidsspel*, tegenwoordig meestal met *Solitaire* aangeduid, wordt naar een artikel van Leibniz verwezen, om te laten zien dat het in ieder geval in het begin van de achttiende eeuw in Europa bekend was. Het eerste deel bestaat verder uit een groot aantal opgaven met oplossingen, waarin een deel van het bord gebruikt wordt, of het doel is een bepaald patroon over te laten. De tweede aflevering van Verpoozing VII beschrijft dan uitvoerig alle oplossingen van het hele spel, met enkele varianten in de bordvorm. Overigens zonder details van de afleidingen te geven, want “hoe vernuftig de theorie van het spel ook door wiskundigen van naam als wijlen Reiss en Hermay, een kapitein bij het fransche leger, moge behandeld zijn, zoo moet ik mij hier toch het genoegen ontzeggen deze beschouwingen te ontwikkelen; want de ontwikkeling dezer theorie zou mij noodzaken te veel te vergen van het voorstellingsvermogen der lezers van *Eigen Haard*”. Er volgen dan 2 verwijzingen voor de ‘wiskundi-



Figuur 1 P.H. Schoute, geschilderd door Thérèse van Duyl-Schwartz in 1911. Het schilderij hangt in het Academieggebouw van de Rijksuniversiteit Groningen.

ge lezer'. In de achtste rubriek, *Het tweetallig talstelsel* worden enkele historische opmerkingen bij andere dan het decimale stelsel gemaakt. Er wordt ook uitgelegd hoe de kruide-nier met een balansweegschaal en gewichtjes van 3^n gram (voor $n = 0, 1, 2, \dots$) alle mogelijke gewichten in grammen kan bepalen (met andere woorden: hoe het drietallig stelsel met cijfers $-1, 0, 1$ werkt) en hoe de melkboer met drie kannen, waarvan de inhoud openevolgende termen uit de Fibonacci reeks zijn, door overgieten elke gehele inhoudsmaat kan bepalen. Afgezien van de context (melkboer, balansweegschaal) die in Schoutes expositie een ondergeschikte rol speelt, een zelfs nu voor de man in de straat volkomen heldere uitleg! Ook de 'volmaakte' getallen (wij noemen

zulke getallen, die gelijk zijn aan de som van hun echte delers, nu meestal 'perfect') komen in deze drie pagina's aan bod, omdat hun binaire schrijfwijze bestaat uit p enen gevolgd door $p - 1$ nullen, voor zekere priemgetallen p (dat wil zeggen: de even volmaakte getallen zien er noodzakelijkerwijs zo uit, er zijn geen oneven voorbeelden bekend). Het lijstje $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ van Schoute geeft de stand van zaken rond de tijd van het verschijnen van de rubriek weer, hoewel Per-vouchine juist in 1883 had laten zien dat ook $p = 61$ tot het lijstje behoort, omdat $2^{61} - 1$ priem is. In feite had Lucas, met een mooie, later naar hem en Lehmer vernoemde methode, in 1877 ook laten zien dat $p = 127 = 2^7 - 1$ tot het lijstje behoort, maar hij was daar zelf

niet eens helemaal door overtuigd, omdat hij de grote berekening slechts één keer had voltooid. Schoute geeft het verband tussen de primaliteit van $2^p - 1$ en het volmaakt zijn van $2^{p-1}(2^p - 1)$ zelfs helemaal niet, behalve in het intrigerende zinnetje: "Ook zou het stelsel, wanneer men tegenwoordig niet de bewonderenswaardige rekenmachine van Thomas (van Kolmar) bezat, zich veel gemakkelijker dan ieder ander tot het samenstellen van zulk een werktuig leenen. En bij het zoeken van groote ondeelbare getallen heeft het groote diensten bewezen." De arithmometer van Thomas de Colmar was de eerste in serie (van enige omvang) geproduceerde rekenmachine: er kon mee worden opgeteld, afgetrokken, vermenigvuldigd en, met wat meer moeite, gedeeld. Een exemplaar bevindt zich in het Museon in Den Haag. Ook Van Schooten wordt nog even genoemd, als vinder van twee paren bevriende getallen (die elkaars som van echte delers zijn), hoewel de paren al door Fermat en Descartes, en nog veel eerder door Arabische wiskundigen, gevonden waren.

Chinezen en schuiven

Eigenlijk is die hele achtste rubriek bedoeld als inleiding op de volgende, over De Chineesche Ringen. Dit speelgoed bestaat uit een handvat met een spoel en daarop een aantal van n ringen, die via staafjes aan een plankje vastgemaakt zijn. Doel is om de ringen, die via de staafjes aan elkaar en de spoel geschakeld zijn, los te maken. In 1872 had Gros laten zien hoe de beginstand van de puzzel zich laat vertalen naar een binair geschreven getal N van n bits (namelijk $1010 \dots$). Het oplossen ervan bestaat uit het doorlopen van standen corresponderend met N tot en met de stand corresponderend met 0, in N stappen dus. En passant vond Gros uit wat later de Graycode is gaan heten: een Hamiltonpad in de n -dimensionale kubusgraaf, waarin de hoekpunten corresponderen met n -tallen bits, en twee hoekpunten verbonden zijn dan en slechts dan als hun binaire schrijfwijze op precies één plaats verschilt. Aan de geschiedenis van dit spel hangt Schoute nog enkele beschouwingen over Cardano en Wallis op. Het *Vijftienspel*, dat eerst in Amerika, en kort daarna in Europa, rond 1880 kennelijk een enorme rage vormde, is het bekende schuifpuzzeltje met 15 genummerde vierkante blokjes en 1 open vakje in een 4×4 opstelling. "Al brengt nu ook de amerikaansche geest van humbug en reclame onze lachspieren in beweging, wanneer we in de bladen van de nieuwe wereld lezen, dat het vruchteloos zoeken naar de oplossing van het spel sommigen

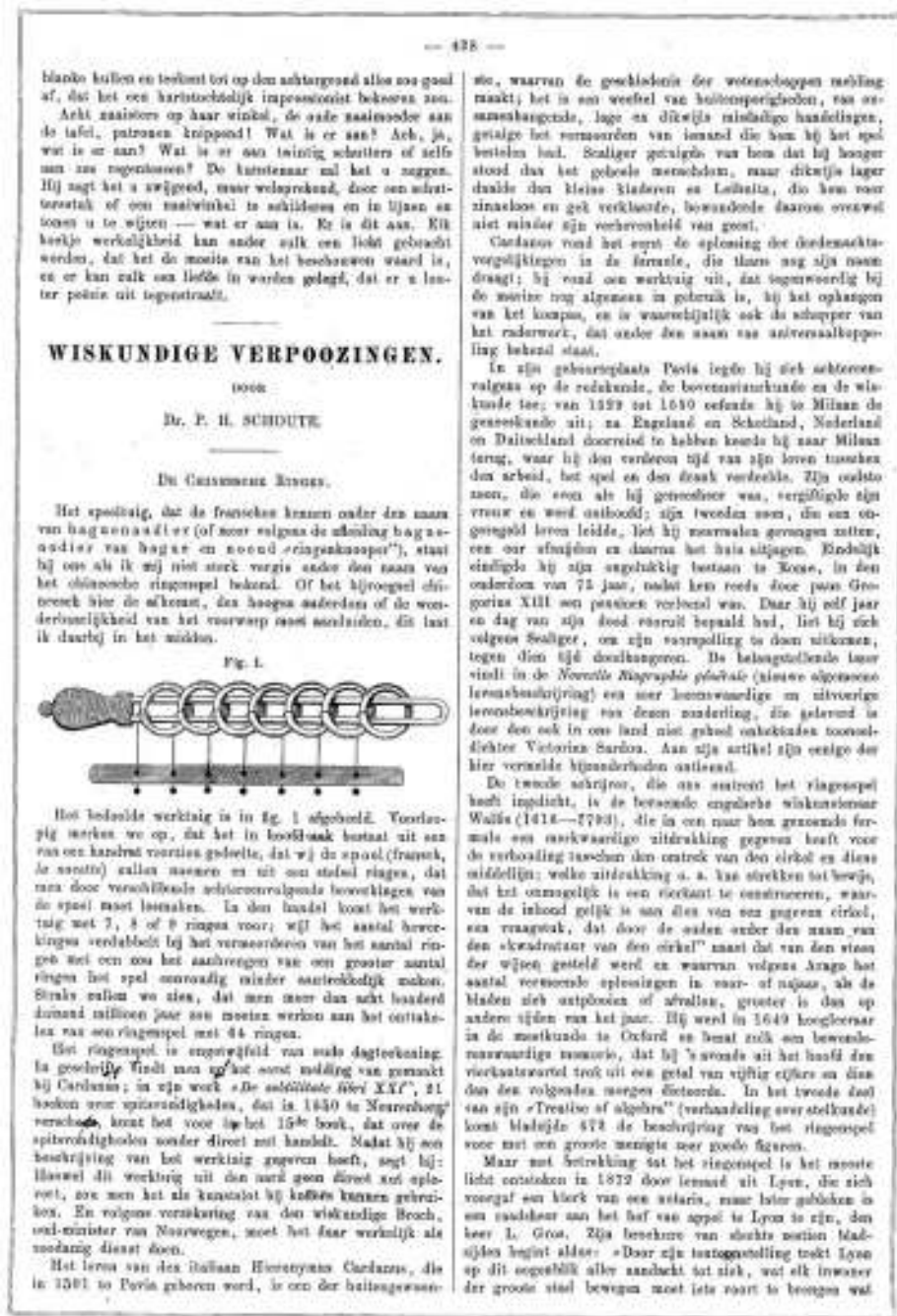


Figure 2 Chinese Ringen

het verstand beneveld heeft, — iets wat m.i. een twijfelachtige aanbeveling voor een spel genoemd mag worden, — zeker is het, dat het menigeen eenige uren hoofdbreken heeft gekost." Schoute beschrijft hoe de oplossing van de puzzel gevonden kan worden, en bewijst (door een invariant, het teken, aan te geven) dat precies de helft van alle mogelijke beginstanden door schuiven tot de natuurlijke oplossing (met een leeg vakje aan het eind) gebracht kan worden. In het vervolg van dit ar-

tikel bespreekt hij vele varianten (van rechthoeken tot meer bizarre vormen opgebouwd uit vierkante blokjes), en eindigt met "Deze eindspelen voeren tot het moeilijkste der wiskundige vraagstukken, die met ons spel in verband staan. Dit bestaat in het bepalen van den stand der blokjes waarbij het kleinste aantal zetten, dat men ter verkrijging der natuurlijke volgorde noodig heeft, zoo groot mogelijk is." Deze laatste opmerking legt een prachtig verband met een soortgelijke puzzel,

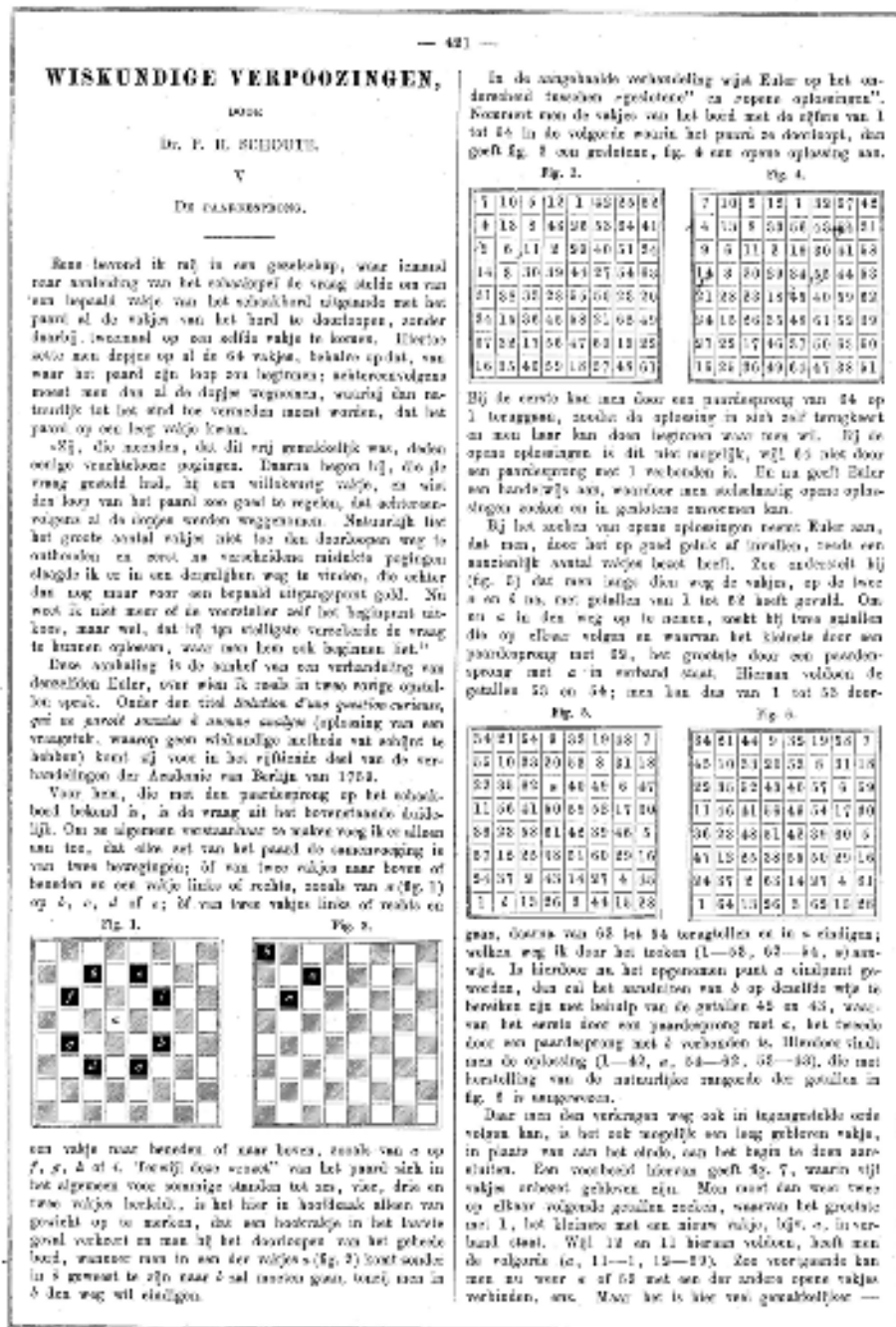
die honderd jaar later tot een soortgelijke rage en soortgelijke wiskundige vragen zou leiden: Rubik's kubus!

Brahma en Correspondentie

De laatste Verpoezing, die weer in twee afleveringen verscheen, gaat over de 'Ringen van Brahma'. Het gaat hier om een mystificatie van Lucas, die zo het spel introduceerde dat later als de 'Torens van Hanoi' bekend werd: acht schijven van aflopende grootte op een staafje, die verplaatst moeten worden naar één van twee lege staafjes, door ze stuk voor stuk te verplaatsen, zonder ooit een schijf op een kleinere te plaatsen. Generaties studenten wiskunde en informatica wordt hiermee tegenwoordig algoritmisch en recursief denken bijgebracht, namelijk voor het beantwoorden van de vraag hoeveel verplaatsingen van schijven er minimaal nodig zijn om de taak te volbrengen. Dat de stukken van Schoute ook gelezen werden, is voor ons alleen af te leiden uit de rubriek Correspondentie, waarin Schoute 'volgaarne de zeer aardige vinding van mevr. S.B. uit Amsterdam' weergeeft, over het *Vijftienspel*. Bovendien worden enige correcties aangebracht.

Schoute en Lucas

Schoute was duidelijk een bewonderaar van Lucas. Ze hebben elkaar ongetwijfeld getroffen bij de jaarlijkse bijeenkomsten van de Franse vereniging voor de bevordering van wetenschappen (l'AFAS), waaraan Schoute, net als Lucas, in de loop der jaren een fiks aantal bijdragen heeft geleverd, soms wel drie per bijeenkomst, blijkens de (inmiddels geheel gedigitaliseerde) verhandelingen. Bij vergelijking valt op hoe dicht Schoute in de eerste drie Verpoelingen bij het origineel uit het in 1882 verschenen eerste deel van de *Récréations Mathématiques* blijft. Sommige stukken zijn letterlijke vertalingen, soms dicht Schoute het origineel wat in, en een enkele keer voegt hij wat toe. Over magische vierkanten, onderwerp van de vierde Verpoezing, schrijft Lucas pas in het veel later verschenen deel IV, maar er waren al wel voorstudies in tijdschriften verschenen. Over dit onderwerp sprak Schoute zelf op het AFAS-congres in Grenoble van 1885. De verhandelingen over koninginnen op het schaakbord, solitaire en het tweetallig stelsel, de Chinese ringen, en de schuifpuzzel, corresponderen weer met *Récréations* vier tot en met acht van Lucas. Het AFAS-congres van 1891 had als hoofdtHEMA 'hygiène'. Tijdens het slotbanket werd Lucas in het gezicht geraakt door een scherf van een bord dat een serveerster liet vallen. Hij



Figuur 3 Paardesprong

liep een infectie op, kreeg wondroos aan zijn wang en stierf enkele dagen later op 49-jarige leeftijd.

Wie was Schoute?

Biografisch materiaal over Schoute is te vinden in een artikel van Struik [3], en in necrologiën van Korteweg voor de KNAW [4] en in het Nieuw Archief voor Wiskunde [5]. Het werd ook samengevat door Irene Polo [6], die een proefschrift schreef over de collectie meetkundige modellen in Groningen, grotendeels

aangeschaft voor en door Schoute.

Pieter Hendrik Schoute, geboren in Wormerveer op 21 januari 1846, studeerde civiele techniek in Delft, en promoveerde in 1870 in Leiden op een meetkundig onderwerp *Over homographie, toegepast op de oppervlakken van den tweeden graad*. Hij werd leraar in Nijmegen en Den Haag, en daarna van 1881 tot zijn dood in 1913 hoogleraar 'elementaire Wiskunde en Analytische, Beschrijvende en Hogere Meetkunde' in Groningen. Schoute wordt omschreven als een typische *geometer*, aan-

vankelijk in de 19de eeuwse vorm van projectieve en enumeratieve meetkunde van kwadrieken en krommen, maar later maakte hij vooral naam met zijn meetkunde van de vier- en hoger-dimensionale euclidische ruimte, en reguliere polytopen daarin. Deze belangstelling deelde hij met Alice Boole Stott, waarmee hij ook samen ging publiceren. Zij staat ook op een van de twee foto's die ik ken waarop Schoute is afgebeeld; er is ook een geschilderd portret in het Groninger Universiteitsmuseum. Vermeldenswaard is verder misschien nog dat hij (volgens John Stillwell) in zijn standaardwerk *Mehrdimensionale Geometrie* als eerste het woord simplex lijkt te hebben gebruikt (in de zin van de algebraïsche topologie). Schoute was jarenlang redacteur van het Nieuw Archief, en vanaf het begin hoofdredacteur van de ook door het Wiskundig Genootschap uitgegeven *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques*, een soort voorloper van de *Current Mathematical Publications* met korte beschrijvingen van recent verschenen artikelen. Hij werd in 1886 lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Een volledige bibliografie lijkt niet te bestaan; in de bibliotheek van het Korteweg-de Vries Instituut in Amsterdam trof ik tot mijn verrassing wel *Verzamelde Werken* aan, maar dat bleek letterlijk genomen te moeten worden: het waren twee ordners met overdrukken. Schoute trouwde in 1872 met Mathilde Pekelharing, telg uit een ander Zaans geslacht [7]. Een van haar broers, Baltus Hendrik, werd een vooraanstaand jurist. Hij had vanaf 1892 twee jaar zitting in een Staatscommissie inzake de afsluiting van de Zuiderzee; Schoute publiceerde in 1893 in *The Geographical Journal* over 'The reclamation of the Zuiderzee'.

Eigen Haard?

Het bovenstaande laat wel zien welke bijdrage Schoute in zijn rubriek heeft geleverd aan de wiskundige literatuur. Maar het verklaart nog niet wat de rubriek deed in *Eigen Haard*. Wat was dat eigenlijk voor blad, en verschenen er meer wiskundige bijdragen in? Het antwoord op de laatste vraag is relatief gemakkelijk: voor zover ik heb kunnen nagaan waren de bijdragen van Schoute de enige wiskundige artikelen die in het blad zijn verschenen. Vragen over aard en de opzet van dit blad zijn lastiger, en laten zich slechts ten dele beantwoorden door een het lezen van *Eigen Haard* zelf. Gelukkig zijn er enkele recente bronnen die wat meer inzicht verschaffen [8,9,10]. In het laatste kwart van de 19e eeuw ontstonden er tientallen geïllustreerde tijdschriften in Eu-



Figuur 4 Eigen Haard

ropa. Dat werd mogelijk door technologische vorderingen en lagere kosten, en tegelijkertijd nam de belangstelling mede door toenemende welvaart en vrije tijd sterk toe. De diversiteit werd versterkt door de verzuiling in Nederland, waar katholieken, protestanten, en vrijdenkenden hun eigen verenigingen en organen kregen. Bovendien nam de belangstelling voor onderwijs, wetenschap en technologie toe: Nederland ging optimistisch de tijd tegemoet die wel de Tweede Gouden eeuw (in de natuurwetenschappen) wordt genoemd. Er werd in de bladen een sterk vooruitgangsgeloof beleden, gekoppeld aan trots op de Nederlandse prestaties in het verleden. *Eigen Haard* afficheerde zich als progressief liberaal, modernistisch protestant (hetgeen vooral moet worden opgevat als niet-katholiek) en stelde zich expliciet een beschavend op-

voedkundig doel, door informatie te bieden over wetenschap, techniek, kunst en cultuur. De oplage van het weekblad (dat ongeveer zestien pagina's in twee kolommen besloeg) steeg tot ongeveer zesduizend rond de tijd waarin Schoute er in schreef. Het blad onderging toen juist een modernisering, nadat het was overgedaan door de oprichter, Kruseman, ook de grondlegger van de Maatschappij tot Nut van het Algemeen in Nederland. Concurrent De Katholieke Illustratie was overigens bijna tien keer zo populair, en een vergelijkbaar blad als *Die Gartenlaube* in Duitsland had wel 400.000 abonnees! *Eigen Haard* liep voorop bij de toepassing van nieuwe druktechnieken voor illustraties: de gravure in diverse vormen, en kort na de tijd van Schoute de eerste foto's, en nog later kleurenfoto's. Regelmatig werden losse prenten toege-

voegd aan het blad. De moderne lezer valt onmiddellijk het nagenoeg ontbreken van humor en ironie op, en van politieke onderwerpen. Misschien zijn de bladen nog het best te vergelijken met de tegenwoordige weekendbijlagen over cultuur en wetenschap van kwaliteitskranten. Hoewel je zou hopen dat daarin, net als in *Eigen Haard*, ook eens geëxperimenteerd zou worden met het loslaten van het ridicule taboe op formules en wiskundige redeneringen, biedt het achterwege blijven van enige navolging van de 'Wiskundige Verpoelingen' in de 19de (of 20ste!) eeuw daartoe weinig perspectief.

Schoutes bewijs

Mijn aanvankelijke oordeel dat het niet zinvol was de originele tekst van Schoute over de Torens van Hanoi op te zoeken, bleek om twee redenen fout. In de eerste plaats heb ik veel plezier beleefd aan deze speurtocht. Maar bovendien bleek Hinz een foutief oordeel over het werk van Schoute gegeven te hebben; hij schrijft (in mijn vertaling van zijn Engels) dat het oorspronkelijke probleem van de Torens van Hanoi "in essentie was opgelost in het eerste jaar na het verschijnen", en wel in drie artikelen, waaronder dat van Schoute in *Eigen Haard*, "door de constructie van een recursieve oplossing en het analyseren hiervan, maar verrassenderwijs, is een volledig bewijs van de minimaliteit van die oplossing niet eerder dan in 1981 (door Wood) gegeven!" Bij herlezing van wat Schoute schrijft blijkt dat onzin te zijn: zijn oplossing en analyse laten "uit theoretisch opzicht niets te wensen over"! 

Referenties

- Andreas M. Hinz, 'The tower of Hanoi', *l'Enseignement Mathématique* 35 (1989), 289–321.
- M. Kraitchik, *Mathématique des Jeux, ou Récréations Mathématique*, Ch. XIII, Bruxelles, 1930.
- Dictionary of Scientific Biography*, New York: Scribner, 1970–1990, 213.
- Zittingsverslagen KNAW 1913*, 1036–1040.
- Nieuw Archief voor Wiskunde*, Amsterdam: Wiskundig Genootschap, tweede reeks, deel 10, 1912/13.
- Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen*, www.bwnw.nl
- Jan Maarten Pekelharing, *Zaanse zonen, De wereld van mijn voorouders*, Zutphen: Walburg Pers 2007.
- Barbara Allart, *De wetenschap heeft 't uitgemakt. Wetenschapsbeelden in de Nederlandse Publiekstijdschriften 1840–1900*, proefschrift, Enschede 2003.
- Peter J.H. van den Berg, *Welkom in 't leven. Een beschrijving van het geïllustreerde tijdschrift Eigen Haard 1875–1941*, Amsterdam: Otto Cram-
- winckel, 2003. Publieksversie van proefschrift aan de Universiteit van Tilburg.
- Marieke van Delft, Nel van Dijk, Reinder Storm, *Magazine! 150 jaar Nederlandse publiekstijdschriften*, Zwolle: Waanders/Den Haag: Koninklijke Bibliotheek, 2006.
- Joan Hemels, Renée Vegt, *Het geïllustreerde tijdschrift in Nederland. Bron van kennis en vermaak, lust voor het oog*, Bibliografie, Amsterdam: Cramwinckel, 1993/1997 (2 dln).
- Irene Polo Blanco, *Theory and History of Geometric Models*, Groningen: Academic Press Europe, 2007 (proefschrift Rijksuniversiteit Groningen).
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen I. De overvaart', *Eigen Haard* 8 (1882), 160–162.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen II. De bruggen over den Pregel', *Eigen Haard* 8 (1882), 248–251.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen III. Het doolhof', *Eigen Haard* 8 (1882), 286–288.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen IV. De toovervierkanten', *Eigen Haard* 8 (1882), 345–348.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen V. De paardesprong', *Eigen Haard* 8 (1882), 421–424.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen VI. De acht koninginnen op het schaakbord', *Eigen Haard* 8 (1882), 580–582, 592–594.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen. VII. Het eenzaamheidsspel', *Eigen Haard* 9 (1883), 200–203, 212–215.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen. Het tweetallig stelsel', *Eigen Haard* 9 (1883), 345–348.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen. De Chineesche Ringen', *Eigen Haard* 9 (1883), 428–431.
- P.H. Schoute, 'Wiskundige Verpoelingen. Het Vijftienspel', *Eigen Haard* 9 (1883), 540–543, 588–591.
- P.H. Schoute, 'Correspondentie en Verbeteringen', *Eigen Haard* 9 (1883), 604.
- P.H. Schoute, 'De ringen van Brahma', *Eigen Haard* 10 (1884), 274–276, 286–287.
- zie ook: www.math.ru.nl/~bosma/schoute

Klaas Landsman

IMAPP, Faculty of Science

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld 1, 6525 ED Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Onderwijs

Terug naar de werkelijkheid

De realistische, contextrijke aanpak van het wiskundeonderwijs heeft zich inmiddels geheel losgezongen van de realiteit aan de universiteiten. Studenten kunnen niet meer rekenen en zijn nauwelijks meer in staat tot abstract redeneren. Deficiëntiecurussen zijn aan alle universiteiten ingevoerd om beginnende studenten klaar te stomen voor de universitaire colleges. In het onlangs verschenen Masterplan Toekomst Wiskunde, dat in opdracht van het ministerie van OC&W is opgesteld, is een substantieel gedeelte gewijd aan het wiskundeonderwijs. De auteurs bepleiten een aantal verstrekkende maatregelen om de koers van het wiskundeonderwijs te wijzigen. Klaas Landsman, hoogleraar mathematische fysica aan de Radboud Universiteit en co-auteur van het Masterplan, licht de plannen toe.

Terwijl ik dit schrijf woedt in Nederland ogenschijnlijk een nieuwe Brede Maatschappelijke Discussie, deze keer niet over kernenergie maar over het rookverbod in de horeca. Verbitterde kroegbazen op de rand van hun failissement, aangejaagd door een aantal eveneens aan de sigaret verslaafde dagbladjournalisten, wekken de indruk dat 'de politiek' zich vanuit een ivoren toren tegen het gemeene volk heeft gekeerd en zich met alle macht vastklamt aan een door vrijwel niemand gewenste wet.

Niet alleen de rokers zijn boos op de politiek. In de petitie 'Stop Kaalslag Wiskundeonderwijs' (zie www.ipetitions.com/petition/wiskunde) lezen we zinnen als: "Maar op voorhand weet de ambtelijke staf van de Staatssecretaris [d.i. Marja van Bijsterveldt-Vliegthart] het beter en wordt op een achternamiddag het veld gepasseerd" en worden we opgeroepen "massaal te protesteren tegen deze visie op ons wiskundeonderwijs". Het artikel van Theo van den Bogaart in het NAW van december 2008 (pp. 283-284) heeft een soortgelijke inzet en is nog maar de top van een ijsberg van woedende artikelen en editorials in *Euclides* (orgaan van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraars) en de *Nieuwe Wiskrant* (een publicatie van het Freudenthal-Instituut). Zelfs de anders zo ai-

mabele Dirk Siersma ergert zich in zijn afscheidsrede (zie ook het NAW van december 2008, p. 282).

Realistisch wiskundeonderwijs en de belanghebbenden

Heeft het kabinet na het roken nu ook de wiskunde verboden? Je zou het bijna gaan denken. De eruptie van ongenoegen blijkt te zijn ontstaan naar aanleiding van de "beslissing over het voorstel examenprogramma [van de vernieuwingscommissie wiskunde cTWO onder voorzitterschap van Siersma] na de commentaren van de resonansgroep wiskunde en de lerarenvereniging" door Van Bijsterveldt-Vliegthart d.d. 8 april 2008. In dit besluit omtrent de centrale eindexamens wiskunde A, B en C per 2011 (het precieze jaartal waarin de nieuwe programma's in moeten gaan blijkt echter een functie van de tijd, die waarden aanneemt tussen 2011 en 2015) neemt zij niet alle voorstellen van cTWO over, maar waagt zij het om deze wat betreft wiskunde A en C te amenderen, zoals voorgesteld door de zogenaamde resonansgroep wiskunde. Deze laatste commissie was naar aanleiding van een met algemene stemmen aangenomen motie van De Tweede Kamer op 1 augustus 2006 ingesteld door de toenmalige minister van OC&W Maria van der Hoeven, en had tot taak

de examenvoorstellen van cTWO te beoordelen op hun doorstroomrelevantie voor het hoger onderwijs. De resonansgroep werd voorgezeten door Jan van de Craats en bestond uit vertegenwoordigers van dit hoger onderwijs. Zo zaten er maar liefst drie studenten in, onder wie Gonny Hauwert (een van de twee initiatiefnemers van de actie 'Lieve Maria' in januari 2006).

De precieze inhoud van het oorspronkelijke voorstel van cTWO [1], de reactie daarop van de resonansgroep, en het uiteindelijke besluit van de staatssecretaris [2] doen er nu even minder toe dan haar vaststelling, geciteerd uit haar brief aan de Tweede Kamer d.d. 22 mei 2008 [3]:

"Er waren twijfels over de 'realistische wiskunde' (...). Op de achtergrond speelt een tegenstelling die kort kan worden samengevat als een meer didactische (het hoe) en een op de inhoud van het vak (het wat) gerichte benadering. In het didactische kamp bevinden zich FI [Freudenthal Instituut], SLO [Stichting Leerplan Ontwikkeling], hoogleraren vakdidactiek, organen van de lerarenvereniging (NVvW). De inhoudelijke benadering is overheersend in het hoger onderwijs, maar ook bij veel leraren. (...) Ik moet vaststellen dat er verdeeldheid is in de wiskundewereld."

Deze laatste vaststelling slaat de spijker op de kop, want als er verdeeldheid heerst is er ook geen 'veld' dat je kunt passeren, laat staan zelfbenoemde woordvoerders daarvan. In werkelijkheid gaat het zowel bij de rokers als bij de didactici om een achterhoedegevecht van een slinkende maar des te luider roepende minderheid, die het maar moeilijk kan accepteren dat zij niet meer het primaat heeft in de besluitvorming rond 'het hoe' van

het Nederlandse wiskundeonderwijs. Want laten we wel wezen: de meeste academische wiskundigen hebben niet zozeer 'twijfels' over het realistische wiskundeonderwijs en de daarbij behorende verhaaltjessommen en grafische rekenmachine: zij ergeren zich daar nu al twintig jaar kapot aan!

cTWO heeft daar ondanks haar evenwichtige samenstelling (al ontbraken studenten en scholieren) en ervaren voorzitter niet of onvoldoende mee afgerekend: het woord 'context(en)' komt maar liefst 47 keer voor in haar Visiedocument, waarbij mag worden aangetekend dat 'realistische' wiskunde tegenwoordig als 'contextrijke' wiskunde te boek staat en dat het bij aanvragen van een Dudocsubsidie van het Platform Bèta Techniek voor didactisch onderzoek 'ter ondersteuning van de vernieuwingscommissies' verplicht was het concept-context model te hanteren.

Standpunt van het hoger onderwijs

Het is opvallend hoe breed de steun uit het hoger onderwijs voor het besluit van de staatssecretaris is: zowel de HBO-raad als de VSNU deelden haar op resp. 26 juni en 4 november mee daar achter te staan (geheel resp. grotendeels, met een voorbehoud voor wiskunde C). Ook het op 8 december verschenen *Masterplan Toekomst Wiskunde* (d.i. het nieuwe sectorplan) stelt zich achter 'de politiek' op. Bij al deze drie steunbetuigingen mag worden opgemerkt dat uitgebreide consultaties hebben plaatsgevonden voor men tot een standpunt kwam, en dat in ieder geval bij het Masterplan zelfs geen discussie nodig was om consensus over dit standpunt te bereiken.

Intussen moeten de wiskundigen en de didactici wel 'samen verder'. Grof gezegd weet de eerste groep veel van wiskunde en weinig van didactiek, terwijl voor de tweede het omgekeerde geldt; je zou zowaar hopen dat ze elkaar kunnen aanvullen en misschien zelfs iets van elkaar zouden kunnen leren. Bovendien moet je wel een enorme hekel aan het Freudenthal Instituut hebben om niet te kunnen genieten van de jaarlijkse Nationale Wiskunde Dagen in Noordwijkerhout. De door Siersma in zijn afscheidrede gesignaleerde polarisatie is natuurlijk niet nieuw, ze was er al minstens twintig jaar, maar ze was grotendeels onuitgesproken, met enkele uitzonderingen als de oratie 'Naar de knoppen' van Frans Keune [4].

Nu de vulkaan dan eindelijk is uitgebarsten, wordt het tijd om zijn hellingen tot vruchtbaar akkerland om te ploegen en mogelijk zelfs weer een dansje te wagen op de



Figuur 1 Het wiskunde toernooi 2007 in Nijmegen

Fotograaf: Dick van Aalst

rand van de krater.

Masterplan Toekomst Wiskunde

Het Masterplan Toekomst Wiskunde biedt daar duidelijke handreikingen toe, die onderdeel zijn van een veel breder pakket maatregelen die met name het probleem van de lage instroom het hoofd moeten bieden. In het vervolg zal ik vrijelijk uit dit plan citeren, soms parafraserend. In tegenstelling tot het op persoonlijke titel geschreven bovenstaande, kan het onderstaande dan ook worden beschouwd als de mening van de gehele groep auteurs van het Masterplan: Arjen Doelman (voorzitter), Jan van Neerven, Peter Steenhagen, Evgeny Verbitskyi, Arjen Vestjens en ondergetekende, met Petra de Bont als secretaris vanuit NWO. Zoals reeds opgemerkt heeft dit plan bovendien de instemming van een klankbordgroep onder voorzitterschap van Jan Karel Lenstra, welke op zijn beurt weer de steun van een grote academische achterban waarborgt [5].

Het Masterplan formuleert om te beginnen een aantal ambities voor de Nederlandse wiskunde, waaronder als allereerste "het terugdringen van het grote tekort aan wiskundigen in onderwijs en bedrijfsleven". Dit tekort betreft zowel academisch opgeleide leraren als stafleden aan universiteiten en wiskundigen in het bedrijfsleven, en wordt onder meer toegeschreven aan de gedurende de afgelopen decennia dramatisch afgenomen belangstelling van middelbare scholieren voor wiskunde. De universitaire wiskundestudies in Nederland hebben daarom al ruim vijftientig jaar te kampen met een lage en tot voor kort

steeds verder dalende instroom. In de afgelopen twee jaar is er weliswaar sprake van een voorzichtige kentering, maar nog steeds blijft het aantal wiskundestudenten in ons land opvallend achter bij de ons omringende landen. Het totale aantal eerstejaars wiskundestudenten in heel Nederland is zelfs vergelijkbaar met dat aan één enkele grotere Duitse of Engelse universiteit als Keulen of Warwick.

Academisch gevormde leraar verdwijnt

De universiteiten hebben pas in een laat stadium adequaat op de dalende instroom gereageerd. Inmiddels ontplooiën echter vrijwel alle instellingen prikkelende activiteiten zoals Masterclasses (voor zowel scholieren als docenten), interactieve Webclasses, en begeleiding van profielwerkstukken. Het succesvolle Nijmeegse wiskundetoernooi, waarmee getalenteerde scholieren tegenwoordig een reis naar New York kunnen winnen, verdient daarbij een speciale vermelding. Op het Lowlands Festival staat sinds 2007 een kleine wiskundetent, en de topwiskundigen Robbert Dijkgraaf en Hendrik Lenstra gaven er in het kader van Lowlands University voordrachten voor 1400 festivalgangers. Met dergelijke activiteiten hopen de betrokkenen aan de scholieren (en hun ouders en schooldecanen!) te laten zien dat wiskunde leuk en uitdagend kan zijn, en bovendien een uitstekend beroepsperspectief biedt. Vermoedelijk mede als gevolg van deze inspanningen nam de instroom in 2007 en in mindere mate 2008 weer enigszins toe. Het moge echter duidelijk zijn dat de genoemde activiteiten geen vervanging kunnen bieden voor structurele maatre-

gelen om het enthousiasme voor de wiskunde onder scholieren te bevorderen en met name de vicieuze cirkel tussen het vwo en het wo te doorbreken: te weinig eerstegraads bevoegde wiskundedocenten, dus te weinig studenten wiskunde, dus nog minder eerstegraads bevoegde wiskundedocenten, enz. Nederland is nu zelfs in de situatie terechtgekomen dat de meeste wiskundeleraars die in het vwo lesgeven aan het hbo opgeleid zijn, en bovendien op een aanzienlijk lager wiskundig niveau dan vroeger. Hier komt bij dat het aantal wiskundestudenten dat jaarlijks na een (educatieve) universitaire masteropleiding kiest voor het onderwijs, op de vingers van twee handen is te tellen. Onder de nu beginnende wiskundedocenten komen dan ook nauwelijks nog academici voor.

Verdwijnen van abstractie uit het onderwijs

Hoe is dit zo gekomen? Vanaf de wet Middelbaar Onderwijs van 1863 waren er tot 1987 twee kwalificaties voor de lesbevoegdheid in het middelbaar (c.q. voortgezet) onderwijs, namelijk de universitaire titel van doctorandus (met onderwijsaantekening) en de MO-akte (A of B), die overigens ook op de meeste universiteiten kon worden behaald.

In 1987 werden de buiten het universitaire bestel bestaande MO-opleidingen (soms genaamd 'leergangen'), die op dat moment bijna de helft van de docenten in het voortgezet onderwijs leverden, ondergebracht in het hbo. De aandacht verschoof daarbij van vakinhoudelijke bekwaamheid naar een veelheid van competenties, waarvan kennis van (in het onderhavige geval) de wiskunde er slechts één is. Veel sterker dan bij de vroegere MO-opleidingen, wordt in de hbo-opleiding aandacht besteed aan onderwijskunde, sociologie, didactiek en psychologie. De vak-kennis was bij het behalen van de MO-A en MO-B akten vrijwel gelijk aan respectievelijk die van het universitaire kandidaats- en doctoraalexamen, terwijl momenteel zelfs degenen die een volledig eerstegraads (M.Ed.) traject op het hbo hebben doorlopen, nauwelijks het wiskundige niveau van de universitaire propedeuse halen. Dit blijkt uit de moeilijkheden die studenten met een dergelijke achtergrond ondervinden als zij overstappen naar een universitaire wiskundestu-

die, en uit het speciale, aangepaste, niveau van de (enkele) colleges die door universiteiten aan aanstaande eerstegraads hbo-leraren gegeven werden.

Tegelijk nam de instroom in de universitaire lerarenopleidingen om een aantal redenen dramatisch af. Men kan hierbij denken aan de enorme toename in de beroepsmogelijkheden voor academisch opgeleide wiskundigen, de salarisreducties voor beginnende docenten en de honorering naar andere maatstaven dan vakbekwaamheid, en ten slotte het feit dat de inspanningen die nodig zijn om het academisch traject succesvol af te leggen zo veel groter zijn dan voor het hbo-traject. Tevens zorgden allerlei vernieuwingen in zowel de uitvoering als de organisatie van het onderwijs ervoor dat de centrale positie van de leraar in de verdrukking kwam. In de jaren '80 werd bovendien het al genoemde realistische wiskundeonderwijs ingevoerd. De methodiek waarbij ieder wiskundig begrip direct in een context wordt beschouwd en de vervolgstap naar abstractie in het algemeen ontbreekt, heeft zeker haar positieve kanten, met name in het toegankelijker worden van het vak. Voor de wiskundig getalenteerde leerlingen is zij echter funest, omdat het kind zo met het badwater wordt weggegooid: met de abstractie verliest de wiskunde haar essentie en universaliteit. De wiskunde ontleent haar kracht aan het samenspel tussen abstractie, toepassing, en generalisatie. Toepassingen met enige diepgang zijn zonder een voorafgaande fase van abstractie niet mogelijk, en het realistisch gehalte van dit type wiskundeonderwijs is de facto dan ook uiterst beperkt. Academisch opgeleide docenten kunnen binnen deze methodiek hun eigen kennis en visie niet kwijt. Wiskundig getalenteerde leerlingen krijgen niet de gelegenheid de onderliggende abstracties te herkennen en raken dus niet geïnspireerd door de kracht van de wiskunde. Beide factoren hebben een sterke negatieve invloed op een mogelijke keuze van deze leerlingen voor een wiskundestudie. Deze zorgen zijn de afgelopen jaren in brede kring geuit, onder meer door de Onderwijsraad en de Tweede Kamer.

Het masterplan stelt een aantal onorthodoxe maatregelen en nieuwe investeringen voor om deze problemen het hoofd te bieden:

Lesbevoegdheid via bachelor

De academische eerstegraads lerarenopleiding wiskunde dient in te dalen in de universitaire bacheloropleiding. Zij neemt daarin de vorm aan van een educatieve minor. Studenten kunnen zo de eerstegraads lesbevoegdheid wiskunde behalen via het bachelordiploma. Dit voorstel kan op relatief korte termijn een significant aantal nieuwe, enthousiaste en hooggekwalficeerde wiskundedocenten opleveren. Deze ogenschijnlijke verlaging van de academische standaard is in werkelijkheid een verhoging van de kwaliteit van de instroom van wiskundeleraars in het vwo en draagt er toe bij dat het bachelordiploma wiskunde tot een volwaardig diploma wordt en niet, zoals het vroegere kandidaatsdiploma, een afronding van een halve opleiding.

Universiteit en middelbare school

Om de aansluiting tussen vwo en universiteit te verbeteren pleit het masterplan voor duale aanstellingen tussen universiteit en middelbare school. Dit voorstel is geïnspireerd door een tweetal reeds bestaande best practices, namelijk het Junior College Utrecht en het tutorsysteem dat bijvoorbeeld op de Radboud Universiteit in gebruik is.

Universiteit en universitaire lerarenopleiding

Om de vakdidactiek beter aan te laten sluiten bij de academische wiskunde stelt het masterplan voor duale aanstellingen tussen het wiskundeinstituut en de lerarenopleiding van de betreffende universiteit te creëren. Op deze wijze verkrijgt men nieuwe, structurele, contactpunten tussen de universitaire wiskunde en de wiskundige vakdidactiek. Studenten worden zo door een docent die zij kennen enthousiast gemaakt voor de educatieve minor in de bachelor (d.i. de vernieuwde eerstegraads lerarenopleiding), terwijl de medewerker in kwestie zijn collega's van de wiskundeafdeling behulpzaam kan zijn bij didactische kwesties.

Zal dit pakket maatregelen, als het al door minister Plasterk gefinancierd wordt, leiden tot een daadwerkelijke koerswijziging in het wiskundeonderwijs? Laten we het hopen! ➡

Referenties

- 1 Zie www.ctwo.nl
- 2 Voor beide zie staff.science.uva.nl/~craats/resonansgroep.htm
- 3 Brief van Staatssecretaris van Onderwijs Marja van Bijsterveldt-Vliegthart aan de Tweede Kamer, 22 mei 2008, nr. VO/OK/21463
- 4 Frans Keune, Oratie 'Naar de knoppen', www.math.ru.nl/~keune/oratie/oratie.html
- 5 De tekst van het *Masterplan Wiskunde* is te vinden op www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA-7M9GUF, waar het ook kan worden besteld.

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Hendrik Lenstra



Bjorn Poonen

De favoriet van Hendrik Lenstra

Bjorn Poonen

Elke maand vragen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun weblog www.wiskundemeisjes.nl aan een bekende wiskundige wie zijn favoriete nog levende wiskundige is. In het vorige nummer van het Nieuw Archief was Hendrik Lenstra de favoriet, dit keer mag hij zelf een wiskundige aanwijzen.

Stiekem wisten we al dat de beroemde Jean-Pierre Serre de favoriete (nog levende!) wiskundige van Hendrik Lenstra is. Maar omdat Serre al eerder genoemd was door zowel Manjul Bhargava als Michael Atiyah, was Lenstra bereid om over een andere favoriet te praten: Bjorn Poonen.

Bjorn Poonen is professor aan MIT. Hij doet vooral onderzoek in de getaltheorie en de algebraïsche meetkunde, maar heeft ook gepubliceerd over kansrekening en informatica. Hij studeerde aan Harvard en schreef er een mooie scriptie bij John Tate. Daarna ging hij naar Berkeley, waar hij in 1994 bij Ken Ribet promoveerde.

De eerste eigenschap van Poonen die Lenstra bewondert is zijn slimheid. Maar, zoals Lenstra opmerkt: slimheid is geen zeldzame eigenschap.

Er zijn verschillende manieren om om te gaan met slimheid. Wat vaak gebeurt is dat een slim persoon een succes behaalt op jonge leeftijd en er daarna op voortzeilt. Poonen is juist doorgegaan met het aanpakken van nieuwe uitdagingen. Dan zijn er nog twee soorten toponderzoekers te onderscheiden. In bijvoorbeeld de combinatoriek komt het vaak voor dat de problemen door iedereen te begrijpen zijn, maar alleen door enkelen op te lossen. Deze onderzoekers zijn heel breed: ze hebben een geweldig arsenaal aan methoden tot hun beschikking, oftewel een brede trucendoos. Dat is een heel andere manier van onderzoek doen dan die van de topwiskundigen die de diepte ingaan: zij hebben 'zitvlees'. Ze weten ontzettend veel van een zeer klein gebiedje. Poonen heeft duidelijk allebei deze kanten, en dat vindt Lenstra ontzettend leuk.

De tweede eigenschap van Poonen die Lenstra bewondert is zijn luciditeit: Poonen schrijft en praat precies op die manier waarop je het zelf zou willen leren of begrijpen. Zelfs van zeer moeilijke dingen geeft hij je het idee dat het een ontginbaar terrein is. Deze eigenschap deelt hij overigens met Serre. Verder is ook Poonens persoonlijkheid opvallend. Hij is heel stil en verlegen, maar voor een schoolbord transformeert hij volledig en heeft hij de hele zaal in zijn greep.

Poonen werkt aan Diophantische vergelijkingen, en ook aan wat hij zelf wel eens de 'dark side of number theory' noemt: het bewijzen van onbeslisbaarheidsresultaten, die een grens stellen aan wat berekenbaar is. Dat is niet mainstream in de getaltheorie. Het tiende Hilbertprobleem luidt: bestaat er een algoritme waarvan de input een systeem Diophantische vergelijkingen is, en de output het antwoord 'ja' of 'nee': is er een geheeltallige oplossing of niet? Dat zo'n algoritme niet bestaat werd bewezen door Matiyasevich in 1970. Of zo'n algoritme wel bestaat als de oplossing *rationaal* mag zijn, is een onbeantwoorde vraag waar Poonen aan werkt. Hij denkt van niet.

Dit onderwerp is niet populair in de getaltheorie, en dat is in zekere zin jammer, zegt Lenstra. Het ligt heel dicht bij de logica, maar het oplossen van dergelijke problemen is niet het werk van de logici. Zij komen aanzetten met het probleem, maar de ingrediënten van de oplossing moeten uit de getaltheorie komen. Volgens Lenstra is Poonens reden om aan deze problemen te werken dat zeer veel mensen bezig zijn met het echt oplossen van Diophantische vergelijkingen, terwijl hij het ook heel verstandig vindt om te weten waar de grenzen liggen van wat je kunt doen.

Poonen heeft dezelfde wiskundige smaak als Lenstra, hij doet vergelijkbare dingen, en hij doet ze beter, aldus Lenstra zelf. "Als jongere mensen het dan overnemen, is dat een geruststelling voor de toekomst!"



Johan Wolswinkel

Vrije Universiteit Amsterdam
 Faculteit der Rechtsgeleerdheid
 De Boelelaan 1105
 1081 HV Amsterdam
 c.j.wolswinkel@rechten.vu.nl

Geschiedenis Kansen in het recht

La probabilité des jugements

Rechtspraak baseert zich graag op ondubbelzinnig en onomstotelijk bewijs. De werkelijkheid is lang zo mooi niet en soms moeten bij gerechtelijke uitspraken ook statistische argumenten worden meegenomen. Belangrijker nog is de vraag wat eerlijke en voor het publiek aanvaardbare rechtspraak is. Moet een veroordeling unaniem gebeuren, of met meerderheid plus een? Is een onschuldig veroordeelde erger dan een vrijgesproken schuldige? Hoe kunnen dergelijke probleemstellingen worden gekwantificeerd? Johan Wolswinkel geeft een historisch overzicht. Hij studeerde rechten en wiskunde aan de Vrije Universiteit en doet momenteel promotieonderzoek naar de verdeling van schaarse vergunningen in een door NWO gefinancierd Toptalent-project. Dit artikel is een bewerking van zijn afstudeerscriptie voor de master Mathematics.

Stel dat twee rechtbanken zich over dezelfde strafzaak buigen. Elke rechter oordeelt onafhankelijk van zijn collega's en is even bewaam als zijn collega's. Dat wil zeggen, elke rechter heeft dezelfde kans om juist te oordelen. Een juist oordeel houdt in dat een verdachte wordt vrijgesproken indien hij onschuldig is en veroordeeld indien hij schuldig is.

Stel dat de eerste rechtbank, bestaande uit drie rechters, de verdachte met 3 tegen 0 stemmen heeft veroordeeld, terwijl de tweede rechtbank, bestaande uit zeven rechters, de verdachte met 5 tegen 2 stemmen heeft veroordeeld. Welke van de twee rechtbanken heeft waarschijnlijker juist geoordeeld: de kleine, unaniem oordelende rechtbank of de grote, niet-unaniem oordelende rechtbank? Dit is een van de centrale vragen op het terrein van de *probabilité des jugements*.¹

Kansrekening en recht

De toepassing van kansrekening en statistiek in het recht is de laatste jaren onder-

werp van (fel) debat geweest, vooral rond de zaak Lucia de B.² Toch wordt dit debat niet voor de eerste keer gevoerd: sinds de Verlichting is meermalen de vraag naar de betekenis van kansrekening voor juridische vraagstukken aan de orde geweest.³ Minder bekend is dat juridische vraagstukken aan de basis hebben gestaan van de kansrekening. De reden hiervoor is dat deze vraagstukken zich in de zeventiende eeuw reeds zodanig in een 'quasi-kwantitatieve' richting ontwikkeld hadden dat ze rijp waren voor een kanstheoretische benadering.⁴

In de privaatrechtelijke sfeer doen kans-theoretische vragen zich voor bij contracten die niet nageleefd kunnen worden. Zo handelt de briefwisseling tussen Pascal en Fermat uit 1654, die wel wordt beschouwd als het begin van de moderne kansrekening, over een eerlijke verdeling van de opbrengsten van een kansspel als het spel plotseling niet kan worden voortgezet. De Nederlander Christiaan Huygens levert in 1660 een belangrijke bijdrage met zijn *Van Rekeningh in Spelen*

van Geluck, waarin hij het concept van verwachting benadert vanuit het perspectief van een 'rechtmatig spel', d.i. een spel waarbij niemand in het nadeel is.

Een strafrechtelijk vraagstuk betreft de betrouwbaarheid van een getuigenverklaring. Deze vraag komt naar voren in het eerste standaardwerk op het terrein van de kansrekening: *Ars conjectandi* van Jakob Bernoulli, in 1713 postuum gepubliceerd door zijn neef Nicolaas Bernoulli. Deze zelfde neef schrijft in 1709 een dissertatie over de toepassing van het werk van zijn oom in het recht: *De usu artis conjectandi in jure*.

Probabilité des jugements

In de achttiende eeuw komt een nieuwe juridische vraag naar voren: hoe kunnen besluitvormingsorganen (parlementen, rechtbanken) optimaal worden ingericht? Het is niet verwonderlijk dat deze vraag uitgerekend in Frankrijk opkomt: de filosofen van de Verlichting vragen zich af hoe een nieuwe staatsinrichting eruit zou moeten zien zonder kwetsbaar te zijn voor de negatieve uitwassen die zich onder het *ancien régime* hadden voorgedaan. Een van de belangrijkste vragen heeft betrekking op meerderheidsbeslissingen: waarom zouden vrije mensen zich onderwerpen aan beslissingen waarmee zij zelf niet hebben ingestemd?

De 'quasi-kwantitatieve' benadering van dit vraagstuk zien we terug bij Rousseau. In zijn beroemde werk *Le contrat social* (Het

maatschappelijk verdrag) uit 1762 geeft hij de volgende rechtvaardiging voor het gehoorzamen van de meerderheid. Indien iedere persoon bij het stemmen tot uitdrukking brengt of een bepaalde beslissing volgens hem in overeenstemming is met de algemene wil (het algemeen belang), dan zal de minderheid moeten erkennen dat ze zich heeft vergist indien de meerderheid anders oordeelt. Met andere woorden, door de stemmen te tellen blijkt de algemene wil. Hierbij geldt dat hoe unaniem de vergadering oordeelt, hoe meer de algemene wil overheerst. Daarom dient bij belangrijke en gewichtige zaken unaniem te worden beslist, terwijl volstaan kan worden met een meerderheid van één stem indien een zaak onmiddellijk dient te worden beslist.

De quasi-kwantitatieve benadering blijkt in het bijzonder uit het volgende citaat: “Er is dikwijls een aanzienlijk verschil tussen de wil van allen en de algemene wil; de laatste heeft slechts het gemeenschappelijk belang op het oog, de andere beoogt het privé-belang en is slechts de som van de afzonderlijke willen. Neemt men echter van deze zelfde de plussen en de minnen die elkaar opheffen weg, dan blijft als som van de verschillen de algemene wil over.”⁵

Condorcet

Condorcet is de eerste persoon die zich bezighoudt met de *probabilité des jugements*. Hij geldt als een veelzijdig Verlichtingsfilosoof en richt zich in het bijzonder op de toepassing van de wiskunde in de zogenaamde *sciences morales et politiques*. Vanwege deze wetenschappelijke belangstelling is het niet verwonderlijk dat Condorcet politiek zeer actief betrokken raakt bij de Franse Revolutie, onder andere als lid van de nationale vergadering, de *Assemblée*. De uitwassen van de Franse Revolutie leiden er echter toe dat in 1794 aan zijn leven voortijdig een einde komt.⁶

Centraal in het werk van Condorcet staat de idee van de *homo suffragans*, de rationeel kiezende mens. In 1785 verschijnt zijn belangrijkste werk op dit terrein: *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Dit werk bestaat uit een voorwoord van 191 pagina's, gevolgd door de eigenlijke tekst van 304 pagina's met wiskundige berekeningen. In zijn slotwoord stelt Condorcet zich bescheiden op: hij hoopt dat zijn werk zal leiden tot betere werken op dit terrein.

Wat is de kans dat een beslissing die genomen is bij meerderheid van stemmen, juist is? Dat is een van de centrale vragen in dit



Illustratie: Ryu Tajiri

werk. Om deze vraag te beantwoorden gaat Condorcet uit van een drietal variabelen: n , i en v . De variabele n geeft het aantal stemmers ('votants') weer, i het aantal stemmen van de minderheid ($i < \frac{n}{2}$) en $n - i$ het aantal stemmen van de meerderheid. De relatieve meerderheid is gelijk aan het verschil tussen voor- en tegenstemmen: $n - 2i$. De variabele v geeft de kans weer dat de stem van een individuele stemmer in overeenstemming is met de waarheid. Indien we aannemen dat v gelijk en constant is voor elk individu, dan kan met deze drie variabelen de kans berekend worden dat een meerderheid van exact $n - i$ stemmen 'juist' oordeelt, dus in overeenstemming met de waarheid. Deze kans is gelijk aan:

$$\binom{n}{i} v^{n-i} (1-v)^i$$

Vaak zal niet een bepaalde meerderheid, maar *tenminste* een bepaalde meerderheid noodzakelijk zijn om een bepaalde beslissing te nemen. Indien de vergadering bestaat uit een oneven aantal personen ($n = 2m + 1$) en een minimale meerderheid voldoende is voor het nemen van een beslissing ($n - i = m + 1$), dan is de kans dat een juiste beslissing wordt genomen gelijk aan:

$$V^m = \sum_{i=0}^m \binom{2m+1}{i} v^{2m+1-i} (1-v)^i$$

Deze kans V^m is stijgend in v : hoe meer iedere rechter in staat is om juist te oordelen, hoe groter de kans dat de meerderheid juist oordeelt. V^m is echter ook stijgend in m , mits $v > \frac{1}{2}$, met limiet 1. Dit betekent dat de kans dat de meerderheid juist oordeelt, stijgt naarmate meer personen oordelen. Echter, als $v < \frac{1}{2}$, dan is V^m dalend in m met limiet 0.⁷ Dit resultaat staat bekend als *Condorcet's Jury Theorem*.

De vraag is dus of v groter of kleiner is dan $\frac{1}{2}$. Condorcet zelf meent dat vooroordelen en onwetendheid onder het volk ertoe leiden dat v waarschijnlijk kleiner is dan $\frac{1}{2}$. Een zuivere democratie is daarom volgens hem in principe niet wenselijk.

Condorcet richt zich niet alleen op de kans dat (tenminste) een bepaalde meerderheid tot een juist oordeel zal komen. Hij behandelt ook de kans dat een bepaald oordeel juist is, gegeven dat het is genomen door (tenminste) een bepaalde meerderheid. Indien blijkt dat $n - i$ personen voor een bepaalde beslissing hebben gestemd en i personen tegen deze beslissing, dan is de *voorwaardelijke* kans dat deze beslissing juist is, gelijk aan:

$$\frac{v^{n-2i}}{v^{n-2i} + (1-v)^{n-2i}}$$

De kans dat een juist oordeel is gegeven, hangt dus alleen af van v en van het verschil tussen voor- en tegenstemmen: $n - 2i$. Hieruit volgt dat een vergadering van 212 personen die met 112 tegen 100 stemmen een bepaalde beslissing heeft genomen, met dezelfde kans juist heeft geoordeeld als een vergadering van 12 personen die unaniem besloten heeft. Sluit dit resultaat aan bij hetgeen we intuïtief zouden verwachten? In elk geval niet bij het gezond verstand van Laplace, zoals wij hierna zullen zien.

In de context van straftribunalen bepleit Condorcet besluitvorming door $n = 30$ rechters, die slechts met een relatieve meerderheid van tenminste 8 stemmen een veroordeling kunnen uitspreken. De kans op een onjuiste veroordeling is in dat geval kleiner dan de door Condorcet toelaatbaar geachte foutmarge van $\frac{1}{144768}$.⁸ Indien echter gekozen wordt voor $n = 12$ rechters, dan zijn, uitgaande van $v = \frac{9}{10}$, tenminste tien stemmen voldoende voor een veroordeling en is geen unanimiteit noodzakelijk, zoals het Engelse systeem vereist.

In 1790, vijf jaar na het verschijnen van het werk van Condorcet, wordt de Franse wet gewijzigd: een meerderheid van tenminste 10 van de 12 stemmen is vereist voor een veroordeling.

Laplace

Laplace is de tweede Fransman die zich uitgebreid heeft beziggehouden met kansrekening in relatie tot rechterlijke oordelen. Zijn wetenschappelijke werk heeft zich echter vooral op de mechanica gericht. Een bekend resultaat op dit terrein vormt de zogenaamde Laplace-vergelijking.

Behalve een grote wetenschappelijke ambitie, resulterend in het lidmaatschap van de toonaangevende *Académie des Sciences*, toont Laplace ook een grote politieke betrokkenheid. In 1799 wordt Laplace door Napoleon benoemd tot minister van Binnenlandse Zaken. Omdat Laplace volgens Napoleon politieke problemen teveel als wiskundige problemen benadert, wordt hij na zes weken alweer vervangen, waarna Laplace lid wordt van de Franse Senaat.

Op het terrein van de kansrekening verscheint in 1812 zijn monumentale *Théorie analytique des probabilités*, gevolgd door zijn *Essai philosophique sur les probabilités* in 1814. De *Théorie analytique* wordt beschouwd als het nieuwe standaardwerk op het terrein van

de kansrekening dat de *Ars conjectandi* van Bernoulli vervangt.⁹

Laplace lijkt te hebben geworsteld met de vraag hoe de kans op rechterlijke beslissingen moet worden gemodelleerd. In zijn *Théorie analytique* volgt hij Condorcet, zij het dat hij een methode voorstelt om v te benaderen aan de hand van empirische data. Immers, als bekend is hoeveel uitspraken j unaniem tot stand zijn gekomen, dan zou met behulp van een groot aantal uitspraken k , de kans op een unanieme rechterlijke uitspraak benaderd moeten worden door de fractie $\frac{j}{k}$.¹⁰ Dit resulteert in de volgende vergelijking:

$$v^n + (1-v)^n = \frac{j}{k}$$

Toegepast op de situatie waarin een rechtbank oordeelt met $n = 3$ rechters, volgt

$$v = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{j}{3k} - \frac{1}{12}},$$

met een oplossing voor $\frac{j}{k} \geq \frac{1}{4}$. Als bijvoorbeeld de helft van de uitspraken unaniem tot stand is gekomen ($\frac{j}{k} = \frac{1}{2}$), vinden we $v = 0.79$. Op basis van deze waarde kan de kans berekend worden dat een uitspraak juist is, gegeven dat deze unaniem of met een minimale meerderheid (twee stemmen voor en één stem tegen) tot stand is gekomen. In het eerste geval is deze kans gelijk aan 0.98, in het tweede geval aan 0.79. Maar deze laatste waarde is, overeenkomstig het resultaat van Condorcet, precies gelijk aan de kans dat één enkele rechter juist heeft geoordeeld!

Laplace heeft kennelijk moeite met deze uitkomst, want in zijn *Essai philosophique* betoogt hij dat dergelijke resultaten in strijd zijn met het gezond verstand (*le simple bon sens*): "One might believe that in a tribunal where a majority of twelve votes is required, whatever the number of judges may be, the votes of the minority would neutralize an equal number of votes of the majority, and the remaining twelve votes would represent unanimity of 12 members [...]. But this would be a serious error. Common sense shows that there is a difference between the decision of a tribunal of 212 judges, 112 of whom convict the accused while the other 100 acquit him, and that of a dozen judges who vote unanimously for conviction."¹¹

In dit *Essai philosophique* kiest Laplace dan ook voor een andere benadering, die hij verder uitwerkt in een supplement uit 1816

bij zijn *Théorie analytique*. Omdat sommige strafzaken moeilijker zijn te beoordelen dan andere, laat Laplace de veronderstelling vallen dat de waarde van v vaststaat. In plaats daarvan introduceert hij een stochastische variabele V , die onafhankelijk en gelijk verdeeld is voor elke rechter. Laplace neemt aan dat V uniform verdeeld is op het interval $[\frac{1}{2}, 1]$. Zijn argumentatie hiervoor is als volgt: hoewel we niet weten welke waarde V aanneemt, kan deze waarde in elk geval niet kleiner zijn dan $\frac{1}{2}$. Als dat namelijk wel het geval zou zijn, zouden we nog liever een munt werpen dan de strafzaak aan de rechter voorleggen. Zolang we dit niet doen, moeten we aannemen dat V tenminste gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

Deze nieuwe benadering leidt tot andere resultaten. De kans dat een beslissing juist is, gegeven een meerderheid van $n - i$ tegen i stemmen, is nu gelijk aan:

$$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 v^{n-i}(1-v)^i dv}{\int_0^1 v^{n-i}(1-v)^i dv} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!}$$

De kans dat een enkelvoudige rechter juist heeft geoordeeld, is nu gelijk aan $\frac{3}{4}$, terwijl die kans voor een niet-unaniem oordelende rechtbank van drie rechters gelijk is aan $\frac{11}{16}$ en voor een unaniem oordelende rechtbank van drie rechters aan $\frac{15}{16}$. In woorden: we hebben het meeste vertrouwen in een rechtbank die unaniem heeft geoordeeld en geven bovendien (nipt) de voorkeur aan een oordeel van een enkelvoudige rechter boven dat van een rechtbank die niet-unaniem heeft beslist. Sluiten deze resultaten beter aan bij het gezond verstand?

Laplace keert zich met zijn nieuwe model in elk geval tegen het systeem uit zijn tijd, daterend uit 1808, dat minstens 7 van de 12 stemmen nodig zijn voor een veroordeling: hij bepleit een meerderheid van tenminste 9 van de 12 stemmen.

Poisson

Poisson is in vele opzichten een volgeling van Laplace. Ook zijn wetenschappelijke belangstelling richt zich voornamelijk op de mechanica, hetgeen onder andere resulteert in de Poissonvergelijking die een aanvulling vormt op de Laplacevergelijking. In politiek opzicht reiken de ambities van Poisson minder ver: volgens hem is het leven niets anders dan wiskunde leren en wiskunde onderwijzen. Niettemin neemt hij wel zitting in de zogenaamde *Chambre des pairs*, het Franse Hogerhuis.¹²

Ook als het gaat om de kansrekening gaat Poisson zijn leermeester achterna. Niet zonder succes: zijn naam is voor eeuwig verbonden

aan de kansverdeling die naar hem genoemd is. Wat weinigen weten, is dat deze verdeling door hem is geïntroduceerd in een werk over kansrekening toegepast op rechterlijke beslissingen. Dit werk uit 1837 is getiteld *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Bij wijze van eufemisme vermeldt het voorblad: *précédées des règles générales du calcul des probabilités* (voorafgegaan door algemene regels inzake de kansrekening). Feit is echter dat het ruim 400 pagina's tellende werk bestaat uit vijf hoofdstukken waarvan twee betrekking hebben op kansrekening in het algemeen, twee op kansrekening in relatie tot grote aantallen en alleen het laatste op de toepassing van kansrekening op rechterlijke beslissingen. Behalve de introductie van de Poissonverdeling formuleert Poisson ook een wet van grote aantallen die een uitbreiding vormt van Bernoulli's klassieke wet van grote aantallen.¹³

Ogenschijnlijk met de nodige tegenzin ziet Poisson zich in het laatste hoofdstuk genoodzaakt kritiek te leveren op de resultaten van zijn leermeester Laplace. Zo meent hij dat diens aanname rond V niet *a priori* gerechtvaardigd is. Ook andere keuzes dan een uniforme verdeling op $[\frac{1}{2}, 1]$ zijn mogelijk onder de aanname dat iedere rechter eerder geneigd is om juist dan onjuist te oordelen.

Verder maakt Poisson onderscheid tussen veroordelingen en vrijspraken. Een rechter oordeelt onjuist als een onschuldige verdachte wordt veroordeeld of als een schuldige verdachte wordt vrijgesproken. Indien wij nu de kans dat een verdachte die voor een rechtbank moet verschijnen, schuldig is, aanduiden met g en aannemen dat g onafhankelijk is van v , dan is de kans dat een verdachte wordt veroordeeld door één rechter:

$$gv + (1 - g)(1 - v)$$

In geval van n rechters is de kans dat een verdachte wordt veroordeeld door een meerderheid van $n - i$ rechters gelijk aan:¹⁴

$$g \binom{n}{i} v^{n-i}(1-v)^i + (1-g) \binom{n}{i} v^i(1-v)^{n-i}$$

De voorwaardelijke kans dat een verdachte die veroordeeld is door $n - i$ rechters ook daadwerkelijk schuldig is, is gelijk aan:

$$\frac{gv^{n-2i}}{gv^{n-2i} + (1-g)(1-v)^{n-2i}}$$

We zien hier, evenals bij Condorcet, dat de kans op een juist oordeel wordt bepaald door de relatieve meerderheid $n - 2i$. In feite is het

resultaat van Condorcet een bijzonder geval van het model van Poisson, namelijk met $g = \frac{1}{2}$.

Anders dan Condorcet en Laplace gaat Poisson niet uit van een vaste waarde van v of een verdeling van V . Het bepalen van deze waarde of verdeling is volgens hem onmogelijk omdat deze per persoon en per strafzaak verschilt. Wel kan met behulp van empirische data over strafzaken en de wet van grote aantallen de gemiddelde waarde $\hat{v}$ bepaald worden. In grote lijnen komt zijn benadering hierop neer: in de periode 1825–1830 zijn 7 van de 12 stemmen voldoende voor een veroordeling. Vanaf 1831 zijn tenminste 8 van de 12 stemmen nodig voor een veroordeling. Nu het jaarlijks aantal veroordelingen bekend is als empirisch gegeven en redelijk constant blijkt in de periode 1825–1830, kunnen aan de hand van twee onafhankelijke vergelijkingen, een voor de periode 1825–1830 en een voor het jaar 1831, de twee onbekende variabelen $\hat{v}$ en $\hat{g}$ worden afgeleid. Poisson vindt $\hat{v} = 0.75$ en $\hat{g} = 0.64$.

Op basis hiervan concludeert Poisson dat de door Laplace bekritiseerde meerderheidsregel niet zo slecht is als wel wordt gesuggereerd, zeker als niet wordt gekeken naar de voorwaardelijke kans dat een gegeven oordeel onjuist is, maar naar de onvoorwaardelijke kans dat een onjuist oordeel wordt gegeven. Hoewel Poisson zich niet nadrukkelijk uitlaat over de gewenste meerderheid, is hij wel neergezet als een conservatief.¹⁵ In elk geval wordt in 1835 de wetgeving zodanig gewijzigd dat een meerderheid van 7 van de 12 stemmen weer voldoende is voor een veroordeling.

Discussie

Het bovenstaande laat zien dat de zogenaamde *probabilité des jugements* op verschillende manieren in een kansmodel kan worden uitgewerkt. Kennelijk was voor de Franse wiskundigen de vraag of een kansmodel mogelijk was een gepasseerd station; de centrale vraag was *hoe* het kansmodel moest worden vormgegeven. Toch kan niet zomaar voorbij worden gegaan aan de vraag of een kansmodel mogelijk is voor een 'juridisch' verschijnsel als rechterlijke besluitvorming.

In het algemeen kan een model worden omschreven als een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. De kwaliteit van een model hangt af van de mate waarin het model erin slaagt een bepaald verschijnsel te *beschrijven* en juiste *voorspellingen* te doen.¹⁶ Geldt dit ook in het onderhavige geval?

De complicatie bij modellen inzake de *probabilité des jugements* ligt mede in het feit dat uitspraken die op basis van het model worden gedaan over de juistheid van rechterlijke beslissingen niet getoetst kunnen worden aan empirische data. Hoe zouden we immers moeten vaststellen of een veroordeling juist is? De enige resterende mogelijkheid om een model in een dergelijk geval te toetsen is de vraag te stellen of de aannames intuïtief gezien overtuigend zijn.¹⁷

Daarnaast dient bedacht te worden dat, los van de vraag of dit mogelijk is, het toetsen van het model aan empirische data niet altijd wordt *beoogd*. Integendeel, bij Condorcet gaat het niet om een *feitelijke beschrijving* van een politiek of juridisch stelsel, maar om een *normatieve rechtvaardiging* van dit stelsel: waarom zouden we een bepaalde meerderheidsregel gehoorzamen? Staande in de traditie van de *sciences morales* is Condorcet niet geïnteresseerd in de vraag hoe men zich daardwerkelijk gedraagt, maar in de vraag hoe men zich als verlicht persoon (*l'homme éclairé*) zou moeten gedragen.

Anders dan bij Condorcet, staat bij Poisson wel *l'homme moyen* centraal: hij richt zich op het bepalen van de gemiddelde waarde $\hat{v}$. Door de introductie van een extra variabele g slaagt Poisson er bovendien in zijn kansmodel te relateren aan het jaarlijks aantal veroordelingen als empirisch gegeven. De vraag is overigens op welke wijze de betekenis van het kansmodel hierdoor is toegenomen: ook al zou op basis van het model en de empirische data worden geconcludeerd dat de kans op een onterechte veroordeling zeer klein is, dan wil dit niet zeggen dat in een concrete strafzaak een verdachte terecht is veroordeeld.

In de modellen van Condorcet, Laplace en Poisson staat vooral de juistheid van een rechterlijke uitspraak centraal. Deze vraag lijkt in de loop der tijd op de achtergrond te zijn geraakt.¹⁸ De aandacht voor het toepassen van kwantitatieve modellen op rechterlijke uitspraken is echter gebleven: dit 'jurimetrische' onderzoek richt zich echter nu niet meer op de juistheid van een rechterlijk oordeel, maar op het voorspellen van een rechterlijk oordeel.¹⁹ Zo is in recent onderzoek ingegaan op de kans op cassatie in strafzaken: welke factoren, zoals het aantal rechters, bepalen of tot cassatie wordt overgegaan?²⁰ Er heeft zich dus een verschuiving voorgedaan naar onderzoek dat wel empirisch getoetst kan worden, waarbij veel meer factoren worden betrokken dan de vereenvoudigde variabelen v en g .

De kansmodellen van Condorcet, Laplace en Poisson blijven daarentegen nuttig om intuïtieve vermoedens over de juistheid van rechterlijke beslissingen te toetsen. De 'beschrijvende waarde' van het model betreft dan de mate waarin een model erin slaagt deze intuïties te incorporeren. De 'voorspellende waarde' houdt in dat, gegeven de keuze voor een model, op basis daarvan nieuwe uitspraken kunnen worden gedaan, waarna weer de vraag gesteld kan worden in hoeverre die aansluiten bij intuïtieve noties. Als dat niet het geval is, kan dat een reden zijn om hetzij het model hetzij onze intuïtie bij te stellen. Dit wil ik illustreren aan de hand van het model van Condorcet en het Nederlandse stelsel van strafvordering.

Toepassing

Voor het gemak reduceren we het Nederlandse stelsel van strafvordering tot drie regels. Uit artikel 268 Wetboek van Strafvordering (Sv) volgt dat strafzaken in beginsel worden behandeld door een meervoudige kamer van drie rechters. Een strafzaak kan echter door een enkelvoudige rechter worden behandeld indien de zaak van eenvoudige aard is (artikel 368 Sv). Tenslotte bepaalt artikel 424 Sv dat een verdachte die in eerste aanleg is vrijgesproken, in hoger beroep slechts kan worden veroordeeld met eenparigheid van stemmen, dus unaniem door drie rechters.

Hoewel dit niet meer expliciet in de huidige wetgeving is bepaald, volgt uit het oude artikel 27 Wet op de Rechterlijke Organisatie (RO) dat besluiten worden genomen in overeenstemming met het gevoel van de meerderheid. In principe volstaat dus een meerderheid van één stem. Omdat op grond van artikel 7 RO de beraadslagingen van de rechtbank geheim dienen te blijven, kan echter niet worden vastgesteld of de beslissing met een minimale meerderheid of unaniem is genomen. Evenmin is op grond van dit artikel duidelijk hoe onafhankelijk rechters van elkaar oordelen: enerzijds dient elke rechter afzonderlijk zijn oordeel te geven, anderzijds dient hij deel te nemen aan de beraadslagingen en de besluitvorming.

Laten we beginnen met de 'beschrijvende' kant van het model. De vraag is dan: wat is intuïtief gezien de ratio achter de wettelijke bepalingen en wordt die ratio bevestigd door het model? We richten ons eerst op de keuze tussen een rechtbank van drie rechters en één rechter. Waarschijnlijk hebben we liever dat een strafzaak door meerdere rechters wordt beoordeeld, omdat we dan eerder een

juist oordeel verwachten.²¹ Het model bevestigt deze voorkeur voor een rechtbank van drie rechters boven een enkelvoudige rechter. Indien drie rechters oordelen, dan is de (on)voorwaardelijke kans dat deze rechters met tenminste twee van de drie stemmen juist oordelen altijd groter dan de kans dat een enkele rechter juist oordeelt:

$$v^3 + 3v^2(1 - v) > v \text{ als } v > \frac{1}{2}$$

Het kan echter voorkomen dat een strafzaak van eenvoudige aard is. We zouden deze omstandigheid zodanig kunnen modelleren dat we aannemen dat v hoger is in een dergelijk geval: de rechter heeft dan een grotere kans om juist te oordelen, zodat het niet bezwaarlijk is dat de strafzaak slechts door één rechter wordt beoordeeld. Met een hogere waarde van v kan voor een enkelvoudige rechter dezelfde kans op een juist oordeel bereikt worden als met een lagere waarde van v voor drie rechters.

Laten we tenslotte naar de unanimiteitsregel kijken. Indien iemand in eerste aanleg is vrijgesproken, willen we een grotere garantie dat een veroordeling in hoger beroep ook daadwerkelijk juist is. Dit kan worden bereikt met de regel van unanimiteit. De kans dat een unanieme veroordeling juist is, is altijd groter dan de kans dat een veroordeling met tenminste een minimale meerderheid juist is:

$$\frac{v^3}{v^3 + (1 - v)^3} > v^3 + 3v^2(1 - v) \text{ als } v > \frac{1}{2}$$

Dit kan ook intuïtief worden ingezien. Stel dat we aannemen dat rechters eerder juist dan onjuist oordelen en dat we weten dat een unanieme beslissing is genomen. We zijn dan eerder geneigd te vermoeden dat deze beslissing juist is dan in het geval dat we zouden weten dat de beslissing met tenminste twee van de drie stemmen was genomen. In dat laatste geval is het namelijk niet ondenkbaar dat de rechtbank met stemverhouding twee tegen één onjuist heeft geoordeeld. Dus zullen we in dat geval de kans dat de rechtbank juist heeft geoordeeld minder hoog inschatten. Hoewel de voorwaarde van unanimiteit leidt tot minder veroordelingen dan onder een simpele meerderheid, zullen de veroordelingen die zijn uitgesproken wel met een grotere waarschijnlijkheid juist zijn.

De conclusie is dus dat het model de ratio achter de wettelijke bepalingen ondersteunt. Met andere woorden: de 'beschrijvende' waarde van het model is gevestigd. De volgende vraag is of andere uitspraken op basis van dit mo-

del eveneens aansluiten bij onze intuïtie. Met andere woorden: hoe zit het met de ‘voorspelende’ waarde van het model?

Laten wij daartoe terugkeren naar het voorbeeld uit de inleiding.²² Met de formule van Condorcet kunnen we uitrekenen dat de kans op een juist oordeel voor beide rechtbanken gelijk is. Dit kan worden ingezien door onszelf de vraag te stellen hoeveel rechters van stem hadden moeten wisselen om dezelfde stemverhouding te krijgen, maar de tegengestelde uitkomst (veroordeling in plaats van vrij spraak of vice versa). Dit aantal is precies de relatieve meerderheid $n - 2i$. Het verschil tussen een juist en een onjuist oordeel — hetzij de veroordeling, hetzij de vrij spraak is juist — wordt dus bepaald door de relatieve meerderheid. Inderdaad kunnen we de stemmen voor en tegen een bepaalde beslissing tegen elkaar wegstrepen, zoals Rousseau reeds opmerkte en Laplace betwistte.

Maar wat moeten wij dan met *le simple bon sens* van Laplace? Laplace zou stellen dat de unanieme beslissing met grotere waarschijnlijkheid juist was geweest. Immers, als we bepalen voor welke waarde van $v > \frac{1}{2}$ een bepaalde stemverhouding het meest waarschijnlijk is, dan is dat verder verwijderd van $\frac{1}{2}$ en dichter bij 1, naarmate de beslissing meer unaniem is genomen. Dit ‘gezond verstand’ van Laplace is niet per se verkeerd, maar dan dient wel beseft worden dat zijn model uitgaat van andere aannames.

Afsluiting

De nadruk op het toetsen van intuïtieve noties, zoals hierboven is geïllustreerd, leidt ertoe dat de waarde van het kansmodel niet zo zeer gelegen is in kwantitatieve als wel in kwalitatieve inzichten: het gaat niet zo zeer om de vraag hoeveel vertrouwen we hebben in een bepaald oordeel als wel om de vraag of we in

een bepaald oordeel meer of minder vertrouwen hebben. Het model is in staat te verklaren waarom (of wanneer) we in een unaniem oordelende rechtbank van drie rechters meer vertrouwen hebben dan in een enkelvoudige rechter. We zien echter dat verschillende modellen mogelijk zijn, terwijl nog vele andere variaties denkbaar zijn, bijvoorbeeld door de aanname van onafhankelijkheid van v los te laten.²³

Samenvattend bestaat er niet zoiets als *het* model inzake de *probabilité des jugements*. De verschillende modellen laten zien welke verschillende keuzes mogelijk zijn en stellen ons bovendien, door hun sterk vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid, in staat om intuïtieve noties inzake rechterlijke besluitvorming te toetsen. Op deze manier beschouwd blijkt de relatie tussen recht en kansrekening, behalve gecompliceerd, ook waardevol te zijn. ◀

Noten

- 1 Bij gebrek aan een geschikte vertaling laat ik dit begrip onvertaald.
- 2 Hierbij moet worden aangetekend dat dit debat vooral door de wiskundigen is gevoerd en minder door de juristen.
- 3 De statistiek laat ik hier verder buiten beschouwing. Deze discipline werd echter aanvankelijk aan de juridische faculteit ontwikkeld als systematische beschrijving van de staat. Zie met verdere verwijzingen: I.H. Stamhuis (2008), ‘Miscommunicatie in de Nederlandse 19^e-eeuwse statistiek’, *Euclides* 83:4, pp. 150-153.
- 4 Zie L. Daston (1988), *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton: Princeton University Press, pp. 3-48.
- 5 J.-J. Rousseau (2005), *Het maatschappelijk verdrag of Beginselen der Staatsinrichting*, vertaald door S. van den Braak en G. van Roermund, Amsterdam: Boom klassiek, pp. 69-70. Zie meer in het algemeen boek II, hoofdstuk 3 en boek IV, hoofdstuk 2.
- 6 Zie uitgebreider over leven en werk van Condorcet: K.M. Baker (1975), *Condorcet. From Natural Philosophy to Social Mathematics*, Chicago: the University of Chicago Press.
- 7 Als $v = \frac{1}{2}$, dan $V^m = \frac{1}{2}$ voor elke m .
- 8 Deze waarde is gelijk aan het verschil van de door Condorcet op basis van sterftetabellen bepaalde kansen dat een 37-jarige respectievelijk 47-jarige persoon binnen een week komt te overlijden. Volgens Condorcet mag de kans op een onjuiste uitspraak niet groter zijn dan deze waarde, omdat dergelijke verwaarloosba-

- re kansen leiden tot een ‘morele zekerheid’ die noodzakelijk is om burgers te onderwerpen aan een juridisch stelsel. Overigens is de kans op een onjuiste veroordeling niet noodzakelijk gelijk aan de kans op een onjuiste vrij spraak. Dit sluit aan bij een adagium als “liever honderd schuldigen vrijgesproken dan één onschuldige veroordeeld”.
- 9 Zie I. James (2002), *Remarkable Mathematicians. From Euler to von Neumann*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 28-36.
- 10 Het probleem is echter dat Laplace niet over dergelijke data beschikte.
- 11 P.S. Laplace (1995), *Philosophical Essay on Probabilities*, translated by A.I. Dale, New York: Springer Verlag, p. 79.
- 12 Zie I. James (2002), *Remarkable Mathematicians. From Euler to von Neumann*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 69-76.
- 13 De kern van het verschil is dat Poisson de aanname van een identieke verdeling laat vallen.
- 14 Evenzo kan een uitdrukking worden gegeven voor de kans dat een verdachte wordt veroordeeld door een meerderheid van *tenminste* $n - i$ rechters.
- 15 I. Hacking (1990), *The Taming of Chance*, Cambridge: Cambridge University Press, p. 94: “His book on the jury [...] was a mathematical vindication of conservative opinion. The elegance of Poisson’s mathematics is uncontested. It was intended, however, to be an implement of information and control. It was as much a political tract as a mathematical one.”

- 16 Zie bijvoorbeeld onlangs: J. Molenaar (2007), ‘De kracht van wiskundig modelleren’, *NAW* 5/8, nr. 4, pp. 245-246.
- 17 L. Brilmayer en K. Kornhauser (1978), ‘Review: Quantitative Methods and Legal Decisions’, *The University of Chicago Law Review* 46:1, pp. 116-153.
- 18 Zie voor een uitzondering: A.E. Gelfand en H. Solomon (1974), ‘Modeling Jury Verdicts in the American Legal System’, *Journal of the American Statistical Association* vol. 69, pp. 32-37. Deze auteurs vinden voor het Amerikaanse rechtssysteem $\hat{v} = 0.90$ en $\hat{g} = 0.70$.
- 19 Zie voor een goede illustratie van de klassieke modellen en de nieuwe modellen: S. Sidney Ulmer (1963), ‘Quantitative Analysis of Judicial Processes: Some Practical and Theoretical Applications’, *Law and Contemporary Problems*, vol. 28, pp. 164-184.
- 20 J.C.M. Couzijn (2007), *Kans op cassatie in strafzaken. Empirisch onderzoek naar cassatieberoepen in dagvaardingszaken afgehandeld door de Hoge Raad in de periode van 1997 tot en met 2001*, Nijmegen: Wolf Legal Publishers.
- 21 Hetzij omdat de rechters onderling kunnen overleggen, hetzij omdat een onjuist oordelen-de rechter kan worden overstemd.
- 22 Een vergelijkbare situatie doet zich voor bij een enkelvoudige rechter en een rechtbank van drie rechters die niet-unaniem oordeelt.
- 23 Zie bijvoorbeeld S. Berg (1993), ‘Condorcet’s Jury Theorem: dependency among jurors’, *Social Choice and Welfare* 10:1, pp. 87-95

Wim Schoutens

Departement Wiskunde
Katholieke Universiteit Leuven
Celestijnenlaan 200 B
B-3001 Leuven, België
wim.schoutens@wis.kuleuven.be

Onderzoek

Wiskunde en Modellen voor Financial Weapons of Mass Destruction

De kredietcrisis beheerst de media alweer geruime tijd. Er wordt veel aandacht besteed aan de zakken met geld in diverse reddingsoperaties, en het aanwijzen van schuldigen dan wel redders in nood. Maar wat is de rol van wiskunde in de huidige koersval en in de toekomst? Wim Schoutens zet de recente ontwikkelingen in historisch en wiskundig perspectief.

De jaren 2007 en 2008 zullen zeker een belangrijke pagina krijgen in de geschiedenis van de financiële markten. De zogenaamde credit crunch heeft toegeslagen. Wat begon als een ineenstorting van een bepaald segment van de huizenmarkt in de VS, is via allerlei financiële constructies tot in elke huiskamer terecht gekomen. De verliezen in de huizenmarkt zijn als een lopend vuurtje verlies geworden in allerlei afgeleide producten die financiële instellingen aanhouden. Gevolg: verschillende financiële instellingen raakte in problemen. Als je zelf problemen ziet opdoemen, kun je er van op aan dat ook jouw concurrent zulke problemen heeft. Banken vertrouwen elkaar niet meer. De problemen zouden wel eens zo gigantisch kunnen zijn dat als je geld aan een andere financiële instelling leent, je dit niet meer terug krijgt. Dus leent niemand meer aan niemand en het systeem blokkeert, de verliezen lopen op. Bepaalde veiligheidsmarges worden geschonden, extra kapitaal moet gezocht worden, maar is moeilijk te vinden. Mensen halen hun geld weg bij de bank wat opnieuw leidt tot een acuut liquiditeitsprobleem. Bij het schrijven van dit artikel weet niemand hoe het nu verder zal evolueren. Komt er een herstel of gaan we naar een complete meltdown?

Van Nobelprijs naar bankroet

De financiële markten zijn niet meer weg te denken uit onze huidige maatschappij. Allerlei beleggingsproducten kom je tegenwoordig niet alleen tegen in beperkte milieus, maar ook in vele gewone huishoudens. Op het nieuws en in de krant vindt men de laatste beursgegevens. We doen aan pensioensparen en beleggen in clickfondsen of worden door onze bankier aangespoord om bepaalde beleggingsfondsen aan te kopen. Verder kent iedereen wel de beelden van heftig handelende traders. Ze staren tegelijkertijd naar vier grote computerschermen, spreken in drie telefoons en maken wilde gebaren naar andere delen van de handelsvloer. Beurshandelaren beheren grote hoeveelheden geld, die ze zo goed mogelijk proberen te investeren in aandelen, afgeleide producten zoals opties en andere financiële activa. De beste combinatie en de prijzen van deze activa veranderen doorlopend en dit brengt grote risico's met zich mee.

Voor velen blijft het een mysterie hoe handelaars erin slagen om in de ogenschijnlijke chaos op de financiële markten vaak meer dan hun brood te verdienen. En hoe komen ze aan de prijzen die ze naar elkaar toeschreeuwen? Bij het bepalen van de juiste prijs voor een

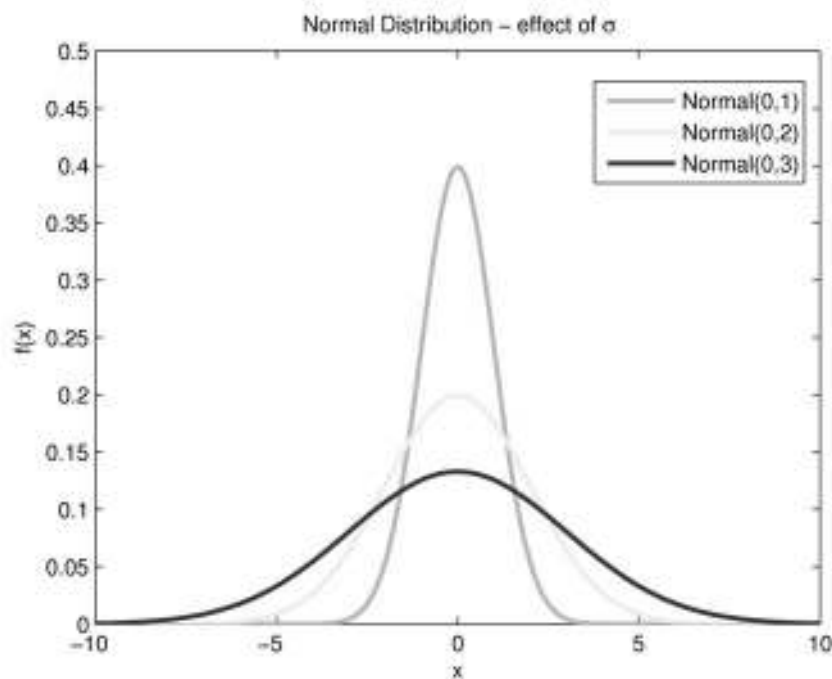
optie of nog ingewikkeldere producten komt heel wat wiskunde kijken. Essentieel hierin is een goed wiskundig model dat de onzekerheid in de werkelijkheid zo goed mogelijk beschrijft en tevens computationeel gezien snel genoeg prijzen kan afleveren.

Het mooiste voorbeeld is het nu wereldberoemde Black-Scholes model. Myron Scholes en Fisher Black ontwikkelden dit model voor de beweging van aandelenkoersen op basis van de Brownse beweging, en lieten zien hoe je daarmee de juiste prijs voor de bijbehorende optie kunt berekenen. De Brownse beweging is in zeker zin de grote broer van de alom bekende Gaussische Normaalverdeling (zie figuur 1). Een Brownse beweging is feitelijk een stochastisch proces waarbij de toename over een tijdsperiode normaal verdeeld is.

Toen het artikel van Black en Scholes in 1973 gepubliceerd werd, had het meteen een enorme invloed. Binnen enkele maanden gebruikten traders over de hele wereld het nieuwe model, en de Black-Scholes formule werd in de rekenmachine van elke handelaar geprogrammeerd. In oktober 1997 kreeg Myron Scholes samen met Robert Merton, die ook nauw betrokken was bij de ontwikkeling van het model, de Nobelprijs in de Economie (Fisher Black was inmiddels overleden). De ironie is dat beide heren ook hun deel hebben in een zwarte bladzijde in de geschiedenis van Wall Street. Een beetje gedreven beurspeler herinnert zich misschien nog de

Normal distribution $Normal(\mu, \sigma^2)$ on $(-\infty, \infty)$:

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Figuur 1

kronieken van Long Term Capital Management (LTCM), een hedgefonds onder leiding van een zeer gerenommeerd gespecialiseerd team met onder andere Scholes en Merton. Negen maanden na de uitreiking van de Nobelprijs voor Economie spatte LTCM uiteen en stonden zij op het punt om bankroet te gaan (na tot twee maal toe verliezen van 500 miljoen dollar op één dag). Maar met de gigantische stapel geld die in LTCM zat, zou het faillissement een deel van Wall Street met zich meesleuren. Sterker nog, de Fed, de centrale bank van de VS, en in het bijzonder de voorzitter Alan Greenspan vreesde dat het hele systeem omviel nu LTCM met vele honderden miljoenen dollars van internationale zakenbanken dreigde te verdwijnen. De Fed speelde uiteindelijk de reddende engel door een reddingsfonds van 3,65 miljard dollar op te brengen.

Mass destruction

In het recente verleden is het eigenlijk al verschillende keren flink mis gegaan. In 1995 ging de Engelse Barings bank helemaal ten onder, doordat een optiehandelaar onverantwoorde risico's nam. Zeer recent nog kwam Jérôme Kerviel in het nieuws, een Franse

effectenhandelaar van Société Générale die door ongeoorloofde speculaties op de futuresmarkt een verlies maakte van 4,9 miljard euro. De resulterende gigantische beursverliezen hebben laten zien hoe kwetsbaar grote financiële instellingen zijn als er iets fout gaat. Bovendien zijn de markten de laatste jaren fel geëvolueerd. Zo heeft de markt van afgeleide financiële producten (call en put opties, turbos, speeders, maar ook nog veel complexer structuren) de laatste decennia een explosieve groei gekend en afgeleide producten worden heden ten dage in enorme volumes verhandeld op beursvloeren en Over the Counter (OTC) markten. Producten worden uitgeschreven op een enorme variëteit van onderliggende activa zoals klassieke aandelen en indices, maar ook op rentevoeten, wisselkoersen, inflatiecijfers, goud, olie et cetera. Verder zijn er ingewikkelde producten gecreëerd die indekking leveren tegen het bankroet gaan van bedrijven (credit risk). Recente cijfers van de International Swap and Derivatives Association spreken over een kredietderivatenmarkt met een onderliggend bedrag van meer dan 45 biljoen dollar (ter vergelijking: het bnp van Nederland is ongeveer een zeventigste hiervan) en met een jaarlijkse

groei van rond de 100 procent. Op de credit markt zijn het voornamelijk de grote spelers die posities innemen (credit derivatives kopen/verkoen); particulieren nemen typisch niet rechtstreeks deel aan de markt. Zij zijn echter via allerlei beleggingsproducten (structured products, levensverzekering, ...) indirect wel verbonden. De credit markt is de klassieke equity markt (aandelen en indexen) ver voorbij gestreefd, deze handelt 'maar' over 10 biljoen USD. Voorts is securitization — het bundelen, verpakken en herverpakken van allerlei financiële contracten zoals leningen of credit-card tegoeden in een verhandelbaar product — zeer gewoon geworden. Deze producten hebben intrinsiek nog altijd een belangrijk 'credit risk' component. Het zijn deze producten die aan de basis liggen van de huidige crisis in de financiële markten. Rating agencies hebben vele van deze deals een te laag risicoprofiel gegeven. Beleggers in deze producten dachten dat het hele veilige beleggingen waren, maar de geschiedenis heeft het tegendeel bewezen. Zo heeft een slabakkende huizenmarkt in de VS via allerlei securitization deals voor een wereldwijde verspreiding gezorgd met als gevolg dat ogenschijnlijk veilige beleggingen toch grote verliezen hebben geleden en vele banken aldus immense verliezen op hun portefeuilles hebben moeten boeken. Voor Bear Stearns, de vijfde bank van de VS, waren de verliezen te groot. De reddingsoperatie, die in een weekend werd doorgevoerd onder leiding van de Bush-regering en de Amerikaanse Centrale Bank, had als bedoeling een grote vertrouwenscrisis in het internationale financiële systeem te vermijden. Alles moest zeer snel gaan en een overname moest voor de opening van de Aziatische beurzen rond zijn. JPMorgan Chase nam de bank over. Het aandeel van Bear Stearns werd gewaardeerd op 2 dollar, terwijl het een week voordien nog 30 dollar waard was en een jaar geleden 170 dollar. De overnameprijs is ondertussen wel bijgestuurd naar 10 dollar, een magere troost voor vele beleggers. Een paar maanden later was Lehman Brothers aan de beurt. Hiervoor werd geen reddingsplan opgesteld en een van de meest gerenommeerde investeringsbanken ging volledig ten onder en sleurde het hele systeem met zich mee. Na dit faillissement doken de beurzen dag na dag verder de afgrond in en verschillende andere banken en verzekeraars kwamen in zware problemen (Fortis, Kaupthing, AIG, ...). In tabel 1 vindt men de tien grootste na-oorlogse dalingen terug van de Dow Jones Industrial Average index. Drie van deze dalingen vonden in eind september of oktober 2008 plaats. Septem-

Wiskundig onderzoek heeft in dit alles een belangrijke rol te spelen. Zo is het onder-tussen duidelijk geworden dat het klassieke Black-Scholes-model voor het beschrijven van het stochastische gedrag van financiële activa en voor het prijzen van financiële afgeleide producten, verschillende ernstige tekortkomingen heeft. Als men bijvoorbeeld, op basis van de statistisch gefundeerde schattingsmethode volgens Black-Scholes, zou berekenen wat de kans is dat we een crash van de aandelenmarkt zouden zien zoals op Black Monday, 19 oktober 1987, komt men tot ridicule cijfers. Die dag crashte bijvoorbeeld de Dow Jones Index met 22,6 procent. Zo'n crash zouden we volgens Black-Scholes (op basis van de normaalverdeling) ongeveer eens om de 1000000000000000000000000-000000000000000000000000 jaar zien. De Big Bang vond plaats slechts ongeveer 1500000000 jaar geleden. De huidige generatie moet dus wel zeer bijzonder zijn dat God hen zo'n exceptionele gebeurtenis heeft laten meemaken. Een crash van dezelfde omvang vond trouwens ook nog plaats in okto-



Figuur 3

ber 1929.

Uit de formule van de Gaussische verdeling gegeven in figuur 1, kan men na wat werk uitrekenen wat de kans is om bijvoorbeeld een schommeling van dag tot dag groter dan x procent te zien. Alles hangt hierbij af van de zogenaamde standaarddeviatie van de verdeling, genoteerd met σ . Historisch gezien ligt deze rond de 25 procent op jaarbasis, wat vertaalt naar 1,5 procent per dag. Een schommeling van meer dan 1,5 procent (1σ) vindt dan ongeveer eens om de 3 dagen plaats. Een schommeling van meer dan 3 procent (2σ) vindt eens per maand plaats. Een schommeling van meer dan 4,5 procent (3σ) vindt eens per jaar plaats en schommeling van meer dan 6 procent (4σ) eens per eeuw. Zie ook figuur 2. Vele financiële producten zijn gewaardeerd op basis van dit model met standaarddeviaties in de buurt van bovengenoemde waarden (25 procent op jaarbasis). Echter, de markt heeft in de huidige crisis een heel andere σ . Uit de VIX index (zie figuur 3), ook wel eens de 'Fear Index' genaamd, kan men vrij accuraat aflezen, hoe de markt op dit moment σ inschat. Op 24 oktober 2008 stond de VIX bij slot op bijna 80 (en heeft in de loop van die dag zelfs waarden van net geen 90 gehaald). Dit betekent dat de markt σ op jaarbasis nu niet 25 procent inschat maar 80 procent. Op

dagbasis betekent dit 5 procent. Een schommeling van meer dan 5 procent (1σ) vindt dan ongeveer eens om de 3 dagen plaats. Een schommeling van meer dan 10 procent (2σ) vindt eens per maand plaats. Een schommeling van meer dan 15 procent (3σ) vindt eens per jaar plaats en schommeling van meer dan 20 procent (4σ) vindt eens per eeuw plaats.

Ondertussen is het voor velen duidelijk geworden dat een verbetering van het Black-Scholes model verkregen kan worden door de onderliggende bron van onzekerheid, de Brownse beweging, te vervangen door flexibeler processen zoals bijvoorbeeld een Lévyproces. Waar een Brownse beweging normaal verdeelde toenames heeft, is een Lévyproces gebaseerd op toenames die een flexibeler, realistischer verdeling volgen. Onder andere Dilip Madan en Benoît Mandelbrot (ja, die van de fractals) zijn pioniers in dit gebied.

De laatste jaren zijn deze Lévyprocessen het onderwerp geworden van vele theoretisch en toegepaste studies en hebben geleid tot vele verbeteringen in verschillende deelgebieden van de financiële wiskunde. Het werken met Lévyprocessen maakt het mogelijk de verschillende en zeer gewenste kans theoretische eigenschappen van de onderliggende returns accurater te modelleren. Omdat

een Lévyproces gebaseerd is op een flexibeler en dus realistischer verdeling, kan men vrij precies de verdeling van de historische returns hiermee vangen. Bovendien geven juist Lévyprocessen aanleiding tot sprongen in het prijsproces. Verder heeft recent werk geleid tot een betere kennis van vele probabilistische en analytische eigenschappen van deze stochastische processen, waardoor ze uitgegroeid zijn tot aantrekkelijk modelleergereedschap in verschillende gebieden.

Impopulaire interventies

Wiskundigen en quants (de modelbouwers bij de banken) hebben in het verleden gepleit voor fundamentele en accurater wiskundige modellen. Maar als er een beursfeestje aan de gang is (zoals we de voorbije jaren hebben meegemaakt), zijn deze profeten niet altijd welkom met hun onheilspellende berichten. Nieuwe modellen brengen consequenties met zich mee. Ze zijn minder intuïtief voor een trader die al jaren met zijn populaire model werkt. Ze zijn vaak ook trager: men heeft meer computerkracht en numerieke investeringen nodig en grootschaligheid is dus een probleem. Tenslotte, als je in je model de kansen op crashes beter inbouwt, dan betekent dit ook dat je model zal aangeven dat je hogere reserves moet aanhouden voor het geval dat. Meer geld geblokkeerd als buffer betekent ook dat er minder beschikbaar is om te laten renderen en mee te feesten. En het moet gezegd: een model blijft een model, de werkelijkheid is vaak nog veel complexer.

Maar, zien we dit fenomeen eigenlijk niet heel vaak in onze huidige maatschappij? Wetenschappers hebben inzichten maar vaak worden deze genegeerd. Neem nu de klimaatveranderingen. Alle wetenschappers trekken aan de alarmbel. Binnen 30 jaar ziet Europa er anders uit! Maar zien we drastische maatregelen? Misschien nemen we iets vaker de fiets, maar gaat dat verschil uitmaken? We zijn eigenlijk allemaal ook een beetje schuldig. En het beursfeestje daar waren we eigenlijk ook wel graag van de partij, onze bankier moest die ene belegging geven met dat ietsje meer rendement. Maar er is een fundamentele wet. Bij meer potentieel rendement, is er ook meer risico. En ja, soms loopt het dan heel grondig mis...

De derde wet

| Solicited Comments

Het onderstaande is een reactie op het artikel 'Wat reeksen zijn, is niet te zeggen' [1] van Hessel Pot.

Wat reeksen zijn, is niet te zeggen

Ik ben het helemaal eens met wat Pot naar voren brengt omtrent de onhoudbaarheid van de gangbare definities van 'reeks', maar ik schrijf deze reactie vanuit een ander gezichtspunt. Mij gaat het om de problemen van de student die met zo'n definitie geconfronteerd wordt.

Ik open met hetzelfde citaat uit het calculusboek van Stewart waarmee ook Pot zijn artikel begint:

"If we try to add the terms of an infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ we get an expression of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

which is called an *infinite series* (or just a *series*)."

"Glashelder" suggereert Pot in de rol van advocaat van de duivel. En Stewart vindt het vermoedelijk inderdaad glashelder. Mijn eerste reactie is: "nonsens", en voor mij is de kous daarmee af; dat kan ik me permitteren. Dat kan niet de student die het vak nog moet leren en niet weet wat de bedoeling is. Die wordt geconfronteerd met een bewering waar kop noch staart aan te vinden is.

Want zo is het toch. Mijn "nonsens" is niet een opwelling van ongenoegen maar een oordeel. De definitie die Stewart geeft is voos, omdat de uitdrukking ' $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ' zonder betekenis is. (Let wel, we hebben het niet over de som. Die komt pas later aan de orde, en $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ is ook een reeks, al bestaat de som niet.)

Varianten op de passage van Stewart tref je aan in allerlei calculusboeken. Meestal directer, zoals "An infinite series is an expression of the form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ ", of helemaal lapidair als "Consider the infinite series $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ which is also denoted by $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ or $\sum a_k$ ". Jawel, dit is de introductie van het begrip. Wat moet een student met zoiets?

In de praktijk hoeft hij er niets mee: De definitie speelt voor hem geen enkele rol. Als je maar weet wat "de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ heeft som s " betekent, is er niets aan gelegen wat een reeks voor een ding is. Net zoals je geen definitie hoeft te hebben voor vergelijking of variabele, als je ze maar herkent wanneer je ze tegenkomt.

Maar waar is de definitie dan goed voor? Net als Pot concludeer ik dat je hem beter kunt schrappen.

Zelf heb ik vele jaren een eerstejaars-analysecollege gegeven zonder het woord 'reeks' te gebruiken. In plaats van convergente reeksen heb je dan sommeerbare rijen, en alles is in orde. Een bonus is dat je het woord 'convergent' niet in twee betekenissen gebruikt. Om de studenten voor te bereiden op de boze wereld buiten het schoolplein, waar ze ongetwijfeld machtreeksen e.d. tegen zullen komen, dien je ze wel te vertellen hoe andere mensen met hun taal omspringen, maar dat doe je later, wanneer de *begrippen* verwerkt zijn.

Een andere oplossing is, het woord 'reeks' alleen in context te definiëren. Voor een gegeven rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spreek je dan af wat je bedoelt met, bijvoorbeeld, de zin "de reeks $\sum a_n$ divergeert", zonder dat je aan het symbool $\sum a_n$ betekenis geeft.

In deze stijl komt in de literatuur ook wel voor dat 'reeks' niet zelfstandig gedefinieerd wordt, maar wel "de reeks die behoort bij de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ". Meestal is dat dan de rij der partiële sommen. In principe kun je het zo doen, maar ik heb geen tekst gevonden die deze definitie geeft en er consequent mee omgaat. Logischerwijze is de derde term van de reeks $\sum a_n$ op deze manier $a_1 + a_2 + a_3$, maar in de boeken is hij steevast a_3 .

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

Nu gaat het mij er niet om, de bestaande boeken in de hoek te zetten; wat ik wil graag weten is wat er in feite met onze studenten gebeurt. Daarom richt ik me hier tot de docenten die bij het calculus-onderwijs betrokken zijn. Hoe gaat u met dit probleem om? Gebruikt u teksten waarin reeksen wél goed ingevoerd worden? Of laat u een definitie achterwege? Of staat u heel anders tegenover de hele kwestie dan ik?

Ik kan de verleiding niet weerstaan om de opvattingen van menig calculusboek te illustreren door een zinnetje uit *Calculus for Engineers* van Donald Trim (blz. 651), al gaat dat over rijen en niet over reeksen: "Now that we know what it means for a sequence to have a limit [...] we can be more precise", gevolgd door de definitie van 'limiet'. Wat Trim bedoelt kan ik wel vermoeden. Wat hij ermee beoogt ontgaat me, maar dat geeft niet. Wat hij ermee bereikt is alleen dat de lezer zijn schouders ophaalt.

Arnoud van Rooij (Radboud Universiteit Nijmegen)

Referenties

1. H. Pot, 'Wat reeksen zijn, is niet te zeggen', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 9, nr 4 (2008), pp. 285–286.

Het onderstaande is een voortzetting van de discussie over zinvol computergebruik in wiskundeonderwijs. Zie NAW-artikelen 'Computergebruik en demathematisering' van Henk Broer [1] en 'Dynamische systemen: aanzet tot een curriculum' van Edwin Savelsbergh [2], de reacties van Paul Bezembinder en Joost Hulshof in het NAW-maartnummer van 2008, en de reactie van Edwin Savelsbergh in het NAW-decembernummer van 2008.

Dynamisch modelleren: gevaarlijke aandacht voor de computer

De kritiek die ik heb geuit op de Drijvers/Savelsbergh module is al eerder op een voorlichtingsbijeenkomst voor leraren door Drijvers samengevat als "teveel ICT". Ook Savelsbergh gebruikt in zijn brief in het decembernummer van NAW nu deze dooddooener om inhoudelijke discussie te vermijden. Ik memoreer dat een eerdere nota over Dynamisch Modelleren, besproken in een bijeenkomst op de VU met Savelsbergh, vanaf regel 3 over ICT ging.

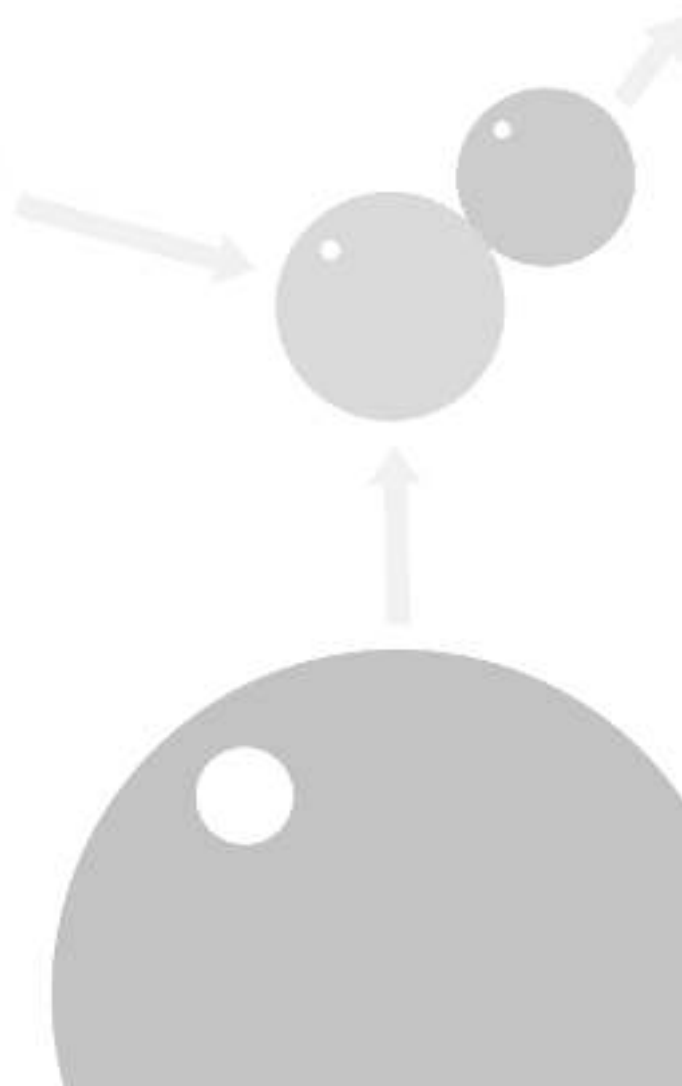
Het is niet zo dat ik of wij een angst voor de computer hebben. Maar wat wij constateren is dat de heren niet meer kunnen denken over de mogelijkheid om iets zonder de computer te doen. En dat is een gevaarlijke ontwikkeling, op elk niveau waarop wetenschap bedreven wordt, of je nou twee of honderd bent, of ergens daartussen; scholier of hoogleraar; in onderwijs of in onderzoek.

Wat Dynamisch Modelleren zelf betreft, Dynamisch Modelleren, Dynamische Systemen en Systeem Dynamica zijn verschillende dingen. Zoals de onderwijsmodules van Drijvers en Savelsbergh er nu uitzien, gaat alle aandacht naar het gebruik van computerprogrammatuur. Dat vloeit voort uit de eerder door Drijvers verkondigde mening dat Systeem Dynamica de wereldstandaard is op het gebied van Dynamisch Modelleren. Ach ja. 'Knoppen-drukken' is niet iets waar je wiskunde of wetenschap van leert, en het leidt niet tot Inzicht waarmee later het het spelen met de computer wel stimulerend kan worden. Ook niet bij *Natuur, Leven en Technologie*, waarvoor deze module dankzij het onder één hoedje spelen op het Freudenthal Instituut nu geaccrediteerd is.

Joost Hulshof (Vrije Universiteit)

Referenties

1. H. Broer, 'Computergebruik en demathematisering', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 8, nr 3 (2007), pp. 201–205.
2. E. Savelsbergh, 'Dynamische systemen: aanzet tot een curriculum', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 8, nr 3 (2007), pp. 207–213.



In de verdediging

| In defence



Two-level preconditioned conjugate gradient methods with applications to bubbly flow problems

Jok Tang

‘Wiskundige maakt mayo lekkerder’, kopte *De Telegraaf* een dag na de promotie van Jok Tang op 8 september 2008 aan de Technische Universiteit Delft. Zo’n kop maakt stiekem nieuwsgieriger dan de titel van zijn proefschrift: *Two-level preconditioned conjugate gradient methods with applications to bubbly flow problems*. De vraag rijst wat de relatie tussen lekkere mayonaise en de tweelaags gepreconditioneerde Krylovmethoden uit zijn proefschrift is. Korte tijd na zijn promotie legt Jok het uit: “Mayonaise is eigenlijk een emulsie van kleine oliedruppeltjes in water. Wanneer de druppeltjes van deze emulsie niet klein genoeg zijn geworden tijdens het productieproces, zoals vaak bij handgemaakte mayonaise gebeurt, vindt na verloop van tijd ontmenging plaats. Dat gaat ten koste van de kwaliteit van de mayonaise. Om het productieproces te testen en te begrijpen hoe de ontmenging plaatsvindt, kunnen experimenten gedaan worden. Het gedrag van de emulsie kan echter net zo goed met computersimulaties bestudeerd worden: er moet dan een stroming van oliedruppels in water berekend worden.” Dat is echter gemakkelijker gezegd dan gedaan, want met de huidige rekenmethodes kan het zelfs op een supercomputer dagen of weken duren om het gedrag van een bellenstroom voor één minuutje te voorspellen. Onder begeleiding van promotor Kees Vuik ontwikkelde Jok snellere methoden die de rekentijd aanzienlijk kunnen verkorten.

Bellen in vloeistof simuleren

Het gedrag van bellen in een vloeistof is niet alleen van belang bij het maken van mayonaise en andere producten in de levensmiddelenindustrie, maar bijvoorbeeld ook bij de scheiding van olie en water in de olie-industrie, of het gedrag van inktdruppeltjes bij printers. Wiskundige modellen voor de beschrijving van een vloeistof met bellen zijn gebaseerd op de niet-samendrukbare Navier-Stokesvergelijkingen met daaraan gekoppeld vergelijkingen voor de beweging van de bellen. Deze worden doorgaans numeriek opgelost, waarbij grote lineaire systemen een belangrijke rol spelen. De lineaire systemen kunnen efficiënt worden opgelost met behulp van iteratieve methoden, zoals Krylovmethoden. De convergentie daarvan hangt echter nauw samen met de conditie van de coëfficiëntenmatrix en helaas is die voor problemen met vele bellen in een vloeistof doorgaans slecht. Langzame convergentie van huidige Krylovoplosmethoden is het gevolg. In het proefschrift van Jok worden nieuwe oplosmethoden aangedragen, zogenaamde ‘tweelaags gepreconditioneerde Krylovmethoden’. Deze kunnen de systemen vele malen sneller oplossen. De truc is eigenlijk om de vertragende componenten in de slecht-geconditioneerde coëfficiëntenmatrix te projecteren, zodanig dat ze niet meer worden herkend door het iteratieve proces. Daardoor versnelt het proces. Voor problemen met een op te lossen lineair systeem met een miljoen onbe-

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

kenden scheelt het aantal benodigde iteraties al gauw een factor 10 en wordt de rekentijd ongeveer een factor 3 kleiner. Deze factoren worden alleen maar groter wanneer het aantal onbekenden wordt opgevoerd om realistischer testproblemen door te rekenen. Derhalve kunnen simulaties van bellen in een vloeistof veel efficiënter worden uitgevoerd dan voorheen. Dat vindt Jok ook meteen het belangrijkste resultaat in zijn proefschrift: "Diverse praktische problemen die in eerste instantie niet op te lossen leken zijn nu ineens wel benaderbaar. Tweelaags gepreconditioneerde Krylovmethoden zijn eigenlijk onontbeerlijk voor het doorrekenen van modellen om bellen te simuleren."

Vruchtbare samenwerkingen

Het leven als aio vond Jok geweldig. Hij heeft niet alleen veel geleerd en gedaan maar ook veel plezier gehad. Hij is in al die jaren naar eigen zeggen uitstekend begeleid door zijn promotor Kees Vuik en heeft veel aan hem te danken. Het onderzoek kon hij uitvoeren in volledige vrijheid. Bijna wekelijks besprak hij de voortgang met Kees Vuik, die actief meedacht met het onderzoek en hielp wanneer het vastliep of als Jok zijn advies nodig had. De aanpak van Kees zorgde voor een hoge productiviteit en vele gezamenlijke publicaties.

Op de afdeling had Jok niet echt sparring partners. Omdat Kees Vuik al een expert was op het onderzoeksgebied, kon hij met zijn begeleiding en hulp gemakkelijk in het wereldje rollen. Zijn sparring partners kwamen meer van andere instituten die soortgelijke methoden gebruiken. Met hen heeft Jok vele tweelaags gepreconditioneerde Krylovmethoden vergeleken en relaties tussen de diverse methoden gelegd. Iets wat nog vrij weinig werd gedaan, vanwege de complexiteit van de methoden en het feit dat ze uit diverse werelden komen, elk met zijn eigen notaties en interpretaties.

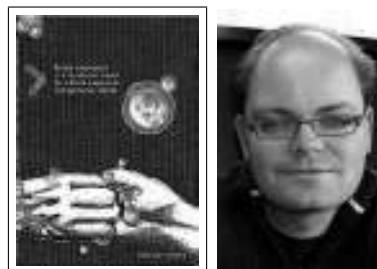
Jok is twee keer op werkbezoek geweest naar de TU Berlin om te werken met professor Reinhard Nabben, die eerder al samenwerkte met Kees Vuik. Beide bezoeken waren zeer vruchtbaar, getuige de diverse papers die ze samen hebben geschreven. Jok heeft bovendien samengewerkt met Scott MacLachlan, voorheen postdoc aan de TU Delft en nu assistent professor aan Tufts University in de VS. Ook met deze expert in multigrid methodes heeft Jok veel vruchtbaar onderzoek verricht. Het reizen vond Jok geweldig en het samenwerken met toponderzoekers uitdagend. Sterker nog: "Deze samenwerkingen met toppers hebben wezenlijk bijgedragen tot hoe en wie ik nu ben. Ik voel me dankzij hen een volwassen wetenschapper."

Het publiceren van je resultaten geeft veel voldoening volgens Jok, maar raakt tegelijkertijd aan het voor hem moeilijkste aspect van het aio-schap. Het gepubliceerd krijgen van wetenschappelijke artikelen viel hem tegen: Het uitwerken van een wiskundig idee vergde natuurlijk tijd, maar om het daarna door het reviewproces heen te krijgen bleek nog lastiger, omdat de reviewers vaak uit verschillende disciplines kwamen en daardoor allemaal anders tegen zaken aankeken.

Iets totaal anders

Ter afsluiting van deze terugblik citeert Jok de volgens hemzelf mooiste stelling bij zijn proefschrift: "De vliegtaks en verpakkingstaks zijn recente vormen van milieu- en taalterror." Taks is formeel geen Nederlands woord. De twee belastingen hebben als doel om het milieu een handje te helpen, maar hij, en vele mensen met hem, zijn van mening dat de twee maatregelen juist slecht zijn voor het milieu en alleen ingevoerd zijn om de staatskas te spekken. Als lezers hierover met hem in discussie willen, moeten ze niet naar de TU Delft gaan, want na zijn promotie is Jok iets totaal anders gaan doen. Hij is vanaf 1 november analist bij Deloitte op de afdeling pensioenen en actuariaat.

Een hele andere richting in een nieuwe omgeving, maar dat is ook precies wat hij wilde. Hij wil graag bijleren in andere disciplines en diverse vaardigheden verder ontwikkelen.



Partial localisation in a variational model for diblock copolymer-homopolymer blends

Yves van Gennip

Yves van Gennip heeft een groot deel van zijn aio-tijd de agenda- en nieuwsrubrieken van het Nieuw Archief voor Wiskunde onder zijn hoede gehad. Op 8 oktober 2008 promoveerde hij bij Mark Peletier aan de Technische Universiteit Eindhoven. Hij is inmiddels begonnen aan een nieuwe uitdaging: hij werkt als postdoc bij Rustum Choksi aan de Simon Fraser University in Burnaby (Vancouver, Canada). Vlak voor de verdediging van zijn proefschrift *Partial localisation in a variational model for diblock copolymer-homopolymer blends* blikte hij terug op de afgelopen vier jaar.

Om een indruk te geven van de inhoud van zijn proefschrift, plaatst Yves zijn onderzoek eerst in een wat bredere context: overal in de natuur zien we patronen, denk bijvoorbeeld aan de kleurpatronen op vissen of de strepen in het zand van woestijnen. Door patronen te modelleren en de modellen vervolgens wiskundig te onderzoeken, kunnen we inzicht krijgen in de fysica achter de patroonvorming. Zijn er overeenkomsten of juist verschillen tussen de uiteenlopende patronen die we tegenkomen? Tegelijkertijd leren we op deze manier ook meer over het gedrag van de wiskundige systemen: wat is er nodig om bepaalde structuren te beschrijven, wat voor een gedrag vertoont een bepaald systeem? In het proefschrift van Yves stond een specifiek voorbeeld van patroonformatie centraal. Hij heeft een model onderzocht voor zogenoemde diblockcopolymeer-homopolymeermengsels, mengsels van polymeren die in experimenten bijzondere structuren laten zien: partieel gelokaliseerde patronen. Zulke structuren zijn klein in sommige richtingen en uitgestrekt in andere; denk aan krommen of oppervlakken in drie dimensies.

Diblockcopolymeren en een variationeel model

Een polymeer is een lang kettingachtig molecuul, een keten van kleinere groepjes atomen. Deze atoomgroepen worden monomeren genoemd. Een diblockcopolymeermolecuul heeft een speciale opbouw. Een gedeelte van het molecuul bevat monomeren van een soort, zeg soort U , en de rest van het molecuul bestaat uit monomeren van een andere soort, zeg soort V . Deze beide soorten monomeer stoten elkaar af, maar omdat ze met elkaar verbonden zijn in een diblockcopolymeermolecuul is er een grens aan hoe ver ze uit elkaar kunnen gaan. De interactie tussen deze twee invloeden leidt tot patroonvorming in diblockcopolymeersmeltels. In het door Yves bestudeerde systeem is ook nog een homopolymeer aanwezig, waarin de moleculen uit slechts één soort monomeer zijn opgebouwd.

Het gebruikte model om het systeem te beschrijven is een variationeel model: er is een functionaal gegeven die aan elke structuur een energiewaarde toekent. De structuren die deze energie minimaliseren, zijn precies de patronen die volgens het model in het systeem aangetroffen kunnen worden. De wiskundige moeilijkheid is nu om erachter te komen hoe deze minimaliserende structuren eruit zien.

Meer concreet ziet het eruit als volgt. $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ is het fysieke domein voor het mengsel. Twee functies $u, v : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ beschrijven de volumefracties van U- en V-monomeren. Aangenomen wordt, dat de gebieden in Ω waar zich geen U- of V-monomeren bevinden gevuld zijn met het homopolymeer, dat daarom een volumefractie $1 - u - v$ heeft. De energiefunctie heeft de volgende vorm:

$$\mathcal{F}(u, v) = \begin{cases} d_{u0}\mathcal{H}^{N-1}(S_{u0}) + d_{v0}\mathcal{H}^{N-1}(S_{v0}) \\ \quad + d_{uv}\mathcal{H}^{N-1}(S_{uv}) + \|u - v\|_{H^{-1}}^2 & \text{als } (u, v) \in \mathcal{K}, \\ \infty & \text{elders.} \end{cases}$$

Hierin wordt de verzameling van toegestane functies waarop de functionaal eindig is gegeven door

$$\mathcal{K} := \left\{ (u, v) \in (BV(\Omega))^2 : \begin{array}{l} u(x), v(x) \in \{0, 1\} \text{ bijna overal,} \\ uv = 0 \text{ bijna overal, en } \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} v \end{array} \right.$$

met BV de verzameling van functies met *bounded variation*. Verder is d_{u0} een niet-negatieve parameter voor de sterkte van de afstoting tussen U-monomeren en homopolymeren, en geven d_{v0} en d_{uv} de sterkte van de afstoting tussen de andere bestanddelen aan, is $\mathcal{H}^{N-1}$ de $(N - 1)$ -dimensionale Hausdorffmaat en zijn S_{u0}, S_{v0}, S_{uv} de interfaces tussen de verschillende monomeergebieden:

$$\begin{aligned} S_{u0} &= \partial^* \text{supp } u \setminus \partial^* \text{supp } v, \\ S_{v0} &= \partial^* \text{supp } v \setminus \partial^* \text{supp } u, \\ S_{uv} &= \partial^* \text{supp } u \cap \partial^* \text{supp } v. \end{aligned}$$

∂^* is de essentiële rand van een verzameling (voor verzamelingen met een gladde rand is deze gelijk aan de rand).

De term $\|u - v\|_{H^{-1}}^2$ bestraft het ruimtelijk scheiden van U- en V-monomeren, zij het in een zwakke vorm. In de continuümopzet waarvoor in dit model is gekozen zijn afzonderlijke monomeermoleculen namelijk niet meer te onderscheiden, slechts $\text{supp } u$ en $\text{supp } v$ zijn terug te vinden. Genoemde term prefereert sterke menging van deze twee verzamelingen, of in andere woorden, snelle oscillaties van de functie $u - v$ tussen -1 en 1 .

Slimme wiskundige constructies

Voor een beetje gecompliceerde energiefunctie is het doorgaans niet direct in te zien wat de minimaliserende structuren zijn, maar in het geval van Yves is dit in één dimensie wel volledig gelukt. Zijn favoriete resultaten betreffen echter de hogere dimensies. Er zijn in dat geval slimme wiskundige constructies nodig om iets over de minimaliserende structuren te kunnen zeggen, zoals bijvoorbeeld Γ -convergentie. Dit is een speciaal type convergentie voor functionalen met de mooie eigenschap dat minimaliserende structuren van de functionalen in de limietrij convergeren naar een minimaliserende structuur van de Γ -limiet van de functionalen. Met behulp van deze techniek wordt in Yves' proefschrift een asymptotische ontwikkeling bewezen voor een functionaal die sterk lijkt op de energiefunctie in het model voor

diblokcopolymeer-homopolymeermengsels ("Helaas niet precies dezelfde", aldus Yves). Deze ontwikkeling laat zien dat die functionaal, die 'leeft op' structuren die rond een kromme gelokaliseerd zijn, energie toekent aan bepaalde meetkundige eigenschappen van de kromme. Als de kromme gebogen is, wordt dit bestraft door de energiefunctie, maar op een 'lager niveau' dan open eindjes bestraft worden. Dit betekent dat een gesloten kromme lagere energie heeft dan een open kromme. Op dezelfde manier is ook te zien dat open eindjes op hun beurt op een lager niveau gepenaliseerd worden dan de lengte van de kromme. De kromme breekt dus liever dan dat deze opgerekt wordt.

Hoewel deze resultaten niet voor de originele energiefunctie zijn, geven ze toch een goed inzicht in het gedrag dat partieel gelokaliseerde structuren kunnen vertonen. En Yves vindt het mooi dat deze asymptotische ontwikkeling hard gemaakt kan worden met behulp van Γ -convergentie.

Lekker bezig zijn met wiskunde

Ondanks de goede afloop heeft Yves zich niet altijd zeker gevoeld over zijn aio-schap. In het begin wist hij vaak niet zo goed of hij wel op zijn plaats was in het wereldje waar hij terechtgekomen was en stelde hij zich vragen die menig aio of gepromoveerde zal herkennen en die, aldus Yves, bij het aio-schap lijken te horen: was hij wel goed genoeg, waar deed hij het allemaal voor? Maar naarmate hij wat meer in zijn rol groeide en meer resultaten geboekt had, ebde dat allemaal weg. Het leven als aio is hem uiteindelijk prima bevallen. Hij had veel vrijheid, maar toch ook intensief contact met Mark, zijn promotor. Hij was lekker met wiskunde bezig en beleefde vele mooie momenten. Yves had bovendien een groep collega-aio's waar in de loop der jaren een mooie vriendschap tussen ontstaan is en kan dan ook zonder overdrijven stellen dat hij vier fijne jaren gehad heeft.

Gevraagd naar een specifiek mooi moment noemt hij zijn reizen, en dan eentje in het bijzonder. Hij heeft het geluk gehad conferenties en collega's te kunnen bezoeken op uiteenlopende plekken in Europa en de VS en zelfs een keer in Tokio. Dat laatste was een heel speciale ervaring. Hij was pas een jaar aio, was nog op zoek waar hij precies thuishoorde en waar hij mee bezig was en toch mocht hij al in z'n eentje op weg naar Japan. En hoewel hij er nog geen week geweest is en een groot deel van die tijd in beslag genomen werd door de conferentie, heeft hij het als een bijzonder bezoek ervaren.

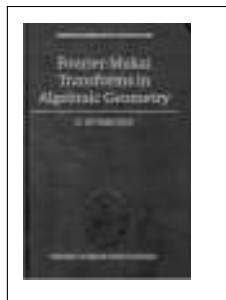
Zuiver of toegepast?

Wordt aan menige (wiskundige) lunchtafel weleens over Ajax en PSV gebakkeleid, bij Yves hebben deze clubs zelfs zijn stellingen gehaald: "Het 'verschil' tussen 'zuivere' en 'toegepaste' wiskunde is een beetje zoals het verschil tussen PSV en Ajax. Beide spelen hetzelfde spelletje; een spelletje dat veel minder interessant zou zijn als een van beide van het toneel zou verdwijnen. Desondanks is er een beeldbepalende groep mensen die tegen alle rationele overwegingen in blijft volhouden dat er fundamentele verschillen bestaan die het zelfs waard zijn om sociale verhoudingen voor te ontwrichten. Ik wil overigens geenszins suggereren dat een van beide takken van wiskunde al jarenlang geen aansprekende resultaten meer geboekt zou hebben en alleen maar beoefend zou worden door mensen die de naam hebben arrogant te zijn." Voor zijn promotie kreeg hij al veel reacties op deze stelling: hij vindt bovendien dat de stelling mooi aansluit bij het voorwoord van Wil Schilders uit het septembernummer 2008 van NAW. Deze stelling kan zeker ook als stof voor een goede lunchtafel discussie dienen! $\leftarrow$

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



D. Huybrechts
Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry

Oxford Mathematical Monographs

Oxford: Clarendon Press, 2006

307 p., prijs £ 59

ISBN 0-19-929686-3

Afgeleide categorieën van coherente schoven op gladde projectieve variëteiten bestaan al sinds de jaren zestig, toen Grothendieck en Verdier die categorieën invoerden om op een conceptueel handige manier met cohomologie van schoven op een variëteit te kunnen omgaan. Bijvoorbeeld dualiteit voor coherente schoven op een variëteit laat zich goed op die manier uitdrukken. Maar afgeleide categorieën (van zulke abelse categorieën) werden voornamelijk op een theoretische manier gebruikt en niet als interessante invarianten van een variëteit. Waarom ook, zou de vraag kunnen zijn. Immers, als X en Y twee gladde projectieve variëteiten zijn zodat de begrensde afgeleide categorieën van coherente schoven equivalent zijn, dan zijn X en Y isomorf als de kanonieke of anti-kanonieke bundel van X ampel is, zoals we nu weten. Maar de laatste jaren is er een intensieve belangstelling ontstaan voor de afgeleide categorieën van coherente schoven op gladde projectieve variëteiten als invarianten van zulke variëteiten. De oorsprong van die belangstelling gaat terug op het werk van Mukai begin jaren tachtig waarin hij op meetkundige manier functoren tussen zulke categorieën construeerde en equivalenties tussen afgeleide categorieën van niet-isomorfe variëteiten verkreeg (voor abelse variëteiten en K3-oppervlakken). Deze zogenaamde Fourier-Mukai-functoren zijn een algebraïsch-mmeetkundig analogon van de Fouriertransformatie en vormen dan ook een krachtig hulpmiddel.

Maar het kwam pas goed op gang toen Kontsevich voorstelde de mysterieuze, door de snarentheorie geïnspireerde, spiegelsymmetrie van Calabi-Yau variëteiten te interpreteren als een equivalentie tussen de afgeleide categorie van coherente schoven op een Calabivariëteit en de zogenaamde Fukayacategorie van de symplectische meetkunde van de spiegelvariëteit.

Werken met de afgeleide categorieën maakt het mogelijk allerlei 'lineaire' constructies uit te voeren met O_X -modulen in plaats van direct met variëteiten te werken. In dit verband is het aardig op te merken dat resoluties van schoven vroeger voornamelijk een theoretisch hulpmiddel waren, maar men heeft gemerkt dat als je cohomologie op de computer uit wilt rekenen resoluties zo ongeveer de enig doelmiddel van werken vormen.

Voor diegenen die aansluiting zoeken bij de zich sterk ontwikkelende frontlinie op dit gebied is dit boek een zeer geschikte inleiding. De eerste drie hoofdstukken brengen getrianguleerde en afgeleide categorieën in herinnering, waarna de auteur afstevent op Orlov's resultaat dat zegt dat equivalenties van afgeleide categorieën van Fourier-Mukai functoren komen. Helaas wordt deze stelling in het boek niet bewezen. De centrale vraag van het boek is onder welke omstandigheden verschillende gladde projectieve variëteiten equivalente afgeleide categorieën van coherente schoven hebben. Aparte hoofdstukken behandelen de gevallen van abelse variëteiten, K3-oppervlakken, het effect van flips en flops, en oppervlakken. In het laatste hoofdstuk worden enige verwij-

zingen naar de nieuwste ontwikkelingen gegeven. Die ontwikkelingen borduren voort op spiegelsymmetrie en gaan door het leven als de 'stabiliteitscondities van Bridgeland'. Deze ontwikkelingen zien er veelbelovend uit, maar de spectaculaire doorbraak moet nog komen.

De auteur doet duidelijk moeite om de lezer wegwijs te maken in de achtergronden en het boek is helder en duidelijk, zij het niet echt opwindend geschreven. Maar dat komt wellicht ook doordat de recente theorie nog geen hoogtepunten kent.

Gerard van der Geer



Olof Staffans

Well-Posed Linear Systems

Encyclopedia of Mathematics and its Applications, no. 103

Cambridge: Cambridge University Press, 2005

776 p., prijs £97

ISBN 0-521-82584-9

Well-posed linear systems zijn een klasse van abstracte lineaire, tijdsinvariante systemen, waarin vele (zo niet alle) partiële differentiaalvergelijkingen (pdv's) met besturingen en waarnemingen kunnen worden beschreven. Het uitgangspunt van deze klasse is echter niet de pdv, maar de oplossing. Een systeem wordt gekarakteriseerd door middel van drie Banach ruimtes, U , X , en Y , en vier begrensde lineaire operatoren $\mathfrak{A}_0^t$, $\mathfrak{B}_0^t$, $\mathfrak{C}_0$ en $\mathfrak{D}_0$. Het systeem wordt weergegeven als

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathfrak{A}_0^t x_0 + \mathfrak{B}_0^t u \\ y &= \mathfrak{C}_0 x_0 + \mathfrak{D}_0 u\end{aligned}$$

Hierin is $x_0 \in X$ de begintoestand, u de ingang (een functie met waarden in U), en y de uitgang (een functie met waarden in Y). Dus X is de toestandruimte, en $\mathfrak{A}^t$ is een sterk continue halfgroep op X , $\mathfrak{B}_0^t$ is de afbeelding van de ingang naar de toestand, enz.

De eenvoudige pdv

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, \eta) = \frac{\partial x}{\partial \eta}(t, \eta) \quad \eta \in (0, 1), t \geq 0, \quad x(0, \eta) = x_0(\eta)$$

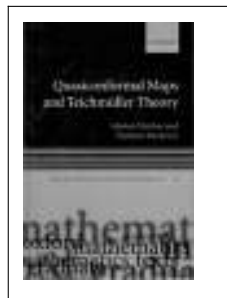
$$x(t, 1) = u(t)$$

$$x(t, 0) = y(t)$$

heeft als oplossing $x(t, \eta) = f(t + \eta)$, waarbij $f(\xi) = x_0(\xi)$ voor $\xi \in (0, 1)$ en $f(\xi) = u(\xi - 1)$ voor $\xi > 1$. Hieruit zijn gemakkelijk de operatoren $\mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{D}$ te achterhalen. Verder zien we dat de klasse toegelaten ingangs-, uitgangs- en toestandsfunctie een verband hebben. *Well-posed* geeft nu precies aan dat men de juiste keuze heeft gemaakt. Dus elke toegelaten ingangsfunctie leidt tot een oplossing in de toestandruimte, die weer een toegelaten uitgangsfunctie geeft.

Ofschoon de inspiratie voor de problemen die in het boek besproken worden duidelijk uit regelproblemen voor pdv's of tijdsvertraagde systemen komen, vindt men deze link nauwelijks terug in het boek. De benadering en formulering blijven zeer sterk operator-theoretisch. Dit heeft als groot nadeel dat het nauwelijks onderzoekers zal aantrekken die geen sterke basis hebben in functionaalanalyse, maar wel geïnteresseerd zijn in regelproblemen voor pdv's. Aan de andere kant geeft het boek voor een onderzoeker met een solide kennis van functionaalanalyse een schat

aan informatie. Zo wordt bijvoorbeeld het verband gelegd tussen de klasse van *well-posed* systemen en de Lax-Phillips halfgroepen. Verder heeft de auteur vele recente resultaten over deze belangrijke klasse van systemen verzameld, zoals stabiliteit, stabiliseerbaarheid, regelbaarheid, realisatietheorie, enzovoort. Hans Zwart



Alastair Fletcher en Vladimir Markovic Quasiconformal Maps and Teichmüller Theory

Oxford graduate texts in mathematics, no. 11

Oxford: Oxford University Press, 2007

189 p., prijs £49.95

ISBN 0-19-856926-2

Een oriëntatie-behoudend homeomorfisme f van een gebied $G \subset \mathbb{C}$ heet quasiconform als voor iedere rechthoek R in G met zijden evenwijdig aan de assen geldt: 1) f is op bijna ieder horizontaal en op bijna ieder verticaal lijnstuk in R absoluut continu (hier volgt uit dat f bijna overal partiële afgeleiden heeft), en 2) er is een constante $k < 1$ zo dat $\sup |\partial f / \partial \bar{f}| \leq k$ bijna overal op G . Conforme afbeeldingen zijn quasiconform: we kunnen $k = 0$ kiezen.

Quasiconforme afbeeldingen zijn flexibeler dan conforme en daarom als gereedschap vaker inzetbaar in die gevallen waar conformiteit niet echt vereist is. Hun grootste interesse ontleen ze aan het feit dat je het moduli probleem voor Riemann oppervlakken goed kunt beschrijven met behulp van quasiconforme afbeeldingen. In de jaren tussen 1940 en 1943 heeft Teichmüller gewerkt aan de constructie van een ruimte waarvan de punten klassen van conform equivalente Riemann oppervlakken zijn en waarbij de afstand tussen twee punten groter is naarmate de conforme structuren van representanten van die punten meer verschillen. Zijn formuleringen waren erg onduidelijk en hij bewees maar enkele van zijn beweringen. Het is de verdienste van Ahlfors en van Bers dat uit de vage ideeën van Teichmüller een wiskundige theorie gemaakt is. Ahlfors is de eerste die de naam Teichmüllerruimte gebruikt heeft. Ahlfors heeft een mooie beknopte versie van die theorie gepresenteerd in het uiterst informatieve boekje *Lectures on Quasiconformal Mappings*, dat in 1966 verscheen. Omdat Teichmüller's theorie over Riemann oppervlakken gaat is er natuurlijk ook een algebraïsch-meetkundige versie.

Het boek van Fletcher en Markovic geeft, na een inleiding over quasiconforme afbeeldingen, een aantal versies van de analytische theorie van Teichmüllerruimten. Veel aandacht gaat naar de analytische structuur die op de Teichmüllerruimte van Riemann oppervlakken van geslacht $g > 1$ aangebracht kan worden. De auteurs geven een acceptabele introductie tot Teichmüller's theorie, maar ik heb desondanks nogal wat op- en aanmerkingen. Allereerst het erg houterige Engels dat gebruikt wordt. Oxford University Press had er goed aan gedaan de tekst te laten bekijken door een eindredacteur. In de tweede plaats permitteren de auteurs zich nogal wat slordigheden; kleinigheden zoals: een functie μ uit een of andere verzameling heet 'uniquely extremal' als voor alle functies ν uit die verzameling geldt $\|\mu\|_\infty < \|\nu\|_\infty$, maar ook grotere onachtzaamheden. Een ander blijk van onzorgvuldigheid is het (meer dan eens) verkeerd spellen van namen. Zo kom je zowel Grötzsch (correct) als Grötszh en Grötszch tegen. Daarnaast zijn er veel drukfouten en verschrijvingen. Voorts

doet het wat onnozel aan om een eenvoudig gevolg van de convexiteit van de functie $x \rightarrow x \log x$, een lemma uit de statistische mechanica te noemen; duidelijk onderscheid tussen eenvoudige zaken en diepe beweringen wordt niet altijd gemaakt. Er had ook best wat meer aandacht aan de index mogen worden besteed. Een wiskundig onderlegde eindredacteur zou de tekst aanmerkelijk hebben kunnen verbeteren.

Er zijn over dit onderwerp al een aantal boeken op de markt. Ik noemde al het beknopte maar bijzonder elegante boek van Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, en daarnaast is er het werk van Lehto uit 1987, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*. Hierover schreef ik in een recensie in de *Mededelingen van het Wiskundig Genootschap* in 1987: "Recensent kan dit boek van harte aanbevelen". Na 20 jaar vind ik dat nog steeds. Voor niet-specialisten die kennis willen maken met Teichmüllerruimten zijn deze klassieke meesterwerken een meer voor de hand liggende keuze dan het boek van Fletcher en Markovic. Ronald Kortram



Steven R. Finch
Mathematical Constants
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, no. 94
Cambridge: Cambridge University Press, 2003
602 p., prijs £74
ISBN 0-521-81805-2

Toen ik dit boek opensloeg was mijn eerste reactie verbazing over het onderwerp. Natuurlijk spelen constanten in alle takken van de wiskunde een rol. Maar, zo dacht ik, waarom zou het begrip *constante* een zinvolle invalshoek zijn voor een boek? Komt wiskunde niet het beste tot zijn recht in een behandeling van een stuk theorie op een consistente en redelijk volledige wijze? Daarin kunnen constanten wel een rol spelen, maar niet de hoofdrol.

Welnu, dit boek heeft mij van gedachten doen veranderen. Het blijft een beetje een merkwaardig boek, omdat het vele honderden — belangrijke en (naar mijn smaak, de uwe zal anders zijn) minder belangrijke — constanten behandelt, die vaak niets met elkaar te maken hebben. Daardoor krijgt het boek een wat fragmentarisch karakter. Maar de constanten worden wel thematisch ingedeeld, verwante constanten zo veel mogelijk bij elkaar behandeld, en altijd staat de context waarin een constante optreedt centraal. Hoewel vaak kort (een à twee pagina's voor een groepje verwante constanten) is de behandeling overal netjes, leesbaar, redelijk compleet, en voorzien van een overvloed aan verwijzingen.

Al lezend in het boek kom je juweeltjes tegen. Regelmatig zie je dat een bepaalde constante in verschillende contexten terugkomt. Dat opent het zicht op dwarsverbanden die je in thematische tekstboeken minder gauw zult tegenkomen. Ook is het mij al enkele malen gebeurd dat ik, bezig met een of ander wiskundig probleem, op een mij onbekende constante stuitte waarvan ik wel eens wat context wilde weten. Iedere keer vond ik die direct in dit boek, en daarom ben ik uiteindelijk voor dit boek gevallen.

Na een eerste hoofdstuk over bekende constanten (zoals e , π , γ , enzovoort) behandelt het boek constanten gerelateerd aan: getaltheorie, analytische ongelijkheden, functie-approximaties, tellen van discrete structuren, functie-iteratie, complexe analyse, en meetkunde. Noem de in uw specialisme belangrijkste constanten,

en de kans is groot dat ze er in staan. Natuurlijk heeft de auteur subjectieve keuzes gemaakt, maar ik ben onder de indruk van de breedte, diepgang en ogenschijnlijke volledigheid in dit boek, tot en met recente literatuur.

Het boek bevat een index, geordend naar decimale ontwikkeling. Dat deed me denken aan *Plouffe's Inverter* (<http://pi.lacim.uqam.ca/eng>), een website met achterliggende database en slimme software, waarin je de decimale ontwikkeling van een getal kunt intikken, en dan suggesties krijgt wat het getal zou kunnen voorstellen. Het boek van Finch gaat, veel meer dan Plouffe's Inverter dat kan, in op de wiskunde achter de constanten. Samen, en ieder op hun eigen wijze, zijn boek en website een krachtig hulpmiddel voor het traceren van de context van constanten, en helpen ze de onderzoeker verbanden te leggen.

Van harte aanbevolen, en een verplichte aanschaf voor academische bibliotheken. Benne de Weger



Ibrahim Assem, Daniel Simson en Andrzej Skowronski
Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Vol. 1, Techniques of Representation Theory
London Math. Soc. Student Texts, no. 65
Cambridge: Cambridge University Press, 2006
458 p., prijs £28.99
ISBN 0-521-58631-3

Gedurende de jaren dertig van de afgelopen eeuw begon Emmy Noether de representaties van associatieve algebra's als module te interpreteren. Dat maakte het mogelijk dat het arsenaal van technieken, ontwikkeld voor de studie van halfenkelvoudige algebra's, van homologische algebra en categorieëentheorie toepasbaar werd op de studie van representaties. Als zodanig is de theorie de afgelopen dertig jaren sterk gegroeid. Nu wordt het bestuderen van representaties van een eindig-dimensionale algebra over een algebraïsch afgesloten lichaam bekeken vanuit de classificatie van (eindig voortgebrachte) onontbindbare module over die algebra en hun onderlinge homomorfismen.

De schrijvers bouwen in dit eerste deel het volgende op. Achtereenvolgens vinden we theorie/definities voor algebra's en module, quivers, representaties en module, Auslander-Reiten theorie, Nakayama algebra's, zogenaamde hellingstheorie, representatie-eindige overerfbare en hellende algebra's, enzovoort, om te eindigen met zogeheten richtende module en n-projectieve bestanddelen. Elk hoofdstuk bevat een aantal opgaven. Er staat veel in dit boek; de schrijvers vermelden dat de stof goed is voor een cursus van acht maanden, maar noemen niet de hoeveelheid tijd die men geacht wordt erin te steken, zowel wat de docent betreft als de student.

De inhoud is tamelijk volledig en, voorzover in kort bestek valt te beoordelen, heel nauwkeurig opgeschreven. Er zijn 149 referenties.

De eerlijkheid gebiedt me te zeggen dat het ontrafelen van de grote hoeveelheid van dergelijke algebraïsche structuren op zichzelf mogelijk nodig is om ermee te kunnen werken, maar dat dit alles wel zwaar op de maag drukt. Bibliotheken kunnen het boek aanschaffen, particulieren alleen indien echt nodig.

Kortom, het strekt de schrijvers tot eer dit alles bijeen te hebben gebracht. En dat is het wel zo'n beetje. Rob van der Waall

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is June 1, 2009.

Problem A (folklore)

Let s be a real number. Find all continuous functions $f: \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ that satisfy

$$f(xy) = f(x)^{y^s} f(y)^{x^s}$$

for all x and y .

Problem B (proposed by Lee Sallows)

In the accompanying picture, nine numbered counters occupy the cells of a 3×3 board so as to make a magic square. They form 8 collinear triples, and each triple yields the same sum 15.



Place nine counters, numbered 1 through 9, on the same board, again one in each cell, so that they form 8 collinear triples, now showing a common sum of 16 rather than 15.

Problem C (folklore)

If n is a nonnegative integer, define $a(n)$ to be the number of decimal digits of 2^n that are larger than or equal to 5. For example, $a(8) = 2$. Evaluate the infinite sum

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i}.$$

Problem * (proposed by Ronald van Luijk)

Prove or disprove that for each rational number r there exist rational numbers a, b, c, d such that

$$r = \frac{a^4 - b^4}{c^4 - d^4}.$$

Eindredactie:

Lenny Taelman, Ronald van Luijk

Redactieadres:

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Edition 2008/3

We received submissions from Rik Bos (Bunschoten), Rob van der Waall (Huizen), Tejaswi Navilarekallu (Amsterdam), Rohith Varma (Chennai), the Fejéntaláltuka Szeged Problem Group (Szeged), Peter Bruin (Leiden), Noud Aldenhoven & Frans Clauwens (Nijmegen), F.N. Aliyev & Y.N. Aliyev (Baku), Sander Kupers (Utrecht).

We regret that in the last issue we forgot to mention Paolo Perfetti's correct solution to problem 2008/1-C.

Problem 2008/3-A Let a and b be integers. Show that the following are equivalent:

1. n divides $a^n - b^n$ for infinitely many positive integers n ,
2. $|a - b| \neq 1$.

Solution This problem was solved by Noud Aldenhoven & Frans Clauwens, Rik Bos, Tejaswi Navilarekallu, F.N. Aliyev & Y.N. Aliyev, the Fejéntaláltuka Szeged Problem Group and Rob van der Waall. The book token goes to Noud Aldenhoven & Frans Clauwens.

The following solution is based on several of these submissions.

First we show that (1) implies (2). So assume that there exists an $n > 1$ that divides $(a + 1)^n - a^n$. Since n divides the difference of an even and an odd number it is odd. Let p be the smallest prime dividing n . Then the numbers $p - 1$ and n are coprime, so there exist integers s and t with $sn + t(p - 1) = 1$.

Since p does not divide a nor $a + 1$, Fermat's little theorem says that a^{p-1} and $(a + 1)^{p-1}$ are both congruent to 1 modulo p , so in particular:

$$(a + 1)^{t(p-1)} \equiv a^{t(p-1)} \pmod{p}.$$

Since p divides $(a + 1)^n - a^n$ we also have

$$(a + 1)^{sn} \equiv a^{sn} \pmod{p}.$$

Combining both congruences gives

$$(a + 1)^{sn+t(p-1)} \equiv a^{sn+t(p-1)}.$$

Hence $a \equiv a + 1$, which is a contradiction.

For the other implication, if $|a - b| \neq 1$ then there exists a prime number p such that p divides $a - b$. But in that case is not hard to show that for all positive integers k

$$p^k \text{ divides } a^{p^k} - b^{p^k},$$

which gives infinitely many n with the desired property.

Problem 2008/3-B Let G be a finite group and a be an element of G . Show that the number of elements $g \in G$ that satisfy both $ga \neq ag$ and $ga^2 = a^2g$ is divisible by 4.

Solution This problem was solved by Rik Bos, Rob van der Waall, Tejaswi Navilarekallu, Rohith Varma, the Fejéntaláltuka Szeged Problem Group and Peter Bruin. The book token goes to Rik Bos. The shortest solution we received is the following one-line proof by Peter Bruin:

The map $g \mapsto ag^{-1}$ induces a free action of a cyclic group of order 4 on the set of elements of G that commute with a^2 but not with a .

Rik Bos proved a generalisation, namely he showed:

Let G be a finite group, a an element of G and p be a prime number. Then p^2 divides the number of elements of G that commute with a if and only if it divides the number

of elements of G that commute with a^p . It is not difficult to deduce the original problem from this statement.

Problem 2008/3-C Let p be an odd prime number and A and B two $n \times n$ matrices with entries in $\mathbf{Z}$ such that $A^p = B^p = 1$, and such that the rank of $A - B$ is 1. Show that $n \geq p$.

Solution This problem was solved by Rik Bos and Tejaswi Navilarekallu. The book token goes to Tejaswi Navilarekallu. The following solution is based on both submissions.

Assume that $n < p$. An n by n matrix M with $M^p = 1$ is either the identity matrix, or has $(x^p - 1)/(x - 1)$ as characteristic polynomial. In the latter case n is necessarily $p - 1$. So if $n < p - 1$ then $A = B = 1$ which contradicts the hypothesis on the rank of $A - B$.

Hence we may assume that $n = p - 1$ and that $A \neq 1$. We have to consider two cases: $B = 1$ and $B \neq 1$.

First case: $B = 1$. Define ζ to be the p -th root of unity $e^{2\pi i/p}$. The eigenvalues of $A - 1$ are $\zeta - 1, \zeta^2 - 1, \dots, \zeta^{p-1} - 1$. So the rank of $A - B = A - 1$ is $p - 1$ which is a contradiction.

Second case: $B \neq 1$. In this case there is an invertible matrix Q with rational entries and with $B = Q^{-1}AQ$. Define C to be the matrix $AQ - QA$. Since $C = Q(A - B)$, it has rank 1.

Claim: For all vectors v and for integers i we have the equality $CA^i Cv = 0$.

Proof of the claim: the rank of CA^i is at most 1 and we have

$$\text{trace}(CA^i) = \text{trace}(AQ A^i - QA^{i+1}) = \text{trace}(A \cdot QA^i) - \text{trace}(QA^i \cdot A) = 0,$$

from which we deduce that CA^i has no non-zero eigenvalues. Since the rank of CA^i is at most one, $CA^i w$ is an eigenvector of CA^i for all vectors w , so in particular, taking $w = A^{-i}v$, we find that Cv is an eigenvector of CA^i . Hence $CA^i Cv = 0$, which proves the claim.

Now let $v \in \mathbf{Q}^n$ be such that $Cv \neq 0$. Let W be the vector space spanned by $Cv, ACv, A^2Cv, \dots$. Then W is a non-zero A -invariant subspace of $\mathbf{Q}^n$. Since W is contained in the kernel of C , the dimension of W is strictly smaller than n . It follows that the characteristic polynomial of A is reducible over $\mathbf{Q}$, which is a contradiction.

