

Inhoud

| Contents

- 234 Colofon
- 235 Redactioneel *Ferdinand Verhulst*
- 236 Agenda
- 238 Afscheid *Derk Pik*
- 240 Nieuws

Onderzoek | Research

-
- 248 Interview met Thompson en Tits *Martin Raussen, Christian Skau*
 - 256 Semidefinite Programming in Combinatorial and Polynomial Optimization *Monique Laurent*
 - 266 Meer gewas in gesloten kas *Bennie Mols*
 - 287 Over luie studenten, groepsdynamica en pokeren *Michael Muskulus, Hans de Waal*

Onderwijs | Education

-
- 279 Nostalgische terugblik op de staartdeling *Kees Hoogland*
 - 282 Visie op wiskundeonderwijs *Dirk Siersma*
 - 283 Vakinhoud wiskunde A- en C-programma's *Theo van den Bogaart*
 - 285 Wat reeksen zijn, is niet te zeggen *Hessel N. Pot*

Samenleving | Society

-
- 246 Ambities en mogelijkheden *Ferdinand Verhulst*
 - 268 Over de machtsverhoudingen in de EU *Harrie de Swart*
 - 274 Lof der Lezing *Tom Körner*

Boeken | Books

-
- 291 Descartes over emoties *Cees Andriessse*
 - 296 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

-
- 255 De favoriet van Jeffrey Shallit *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
 - 263 In de verdediging: rubriek voor proefschriften *Geertje Hek*
 - 273 Duitsland – Nederland: 1–0: The Architect Sketch, part 2 *Gunther Cornelissen*
 - 294 De derde wet *Ferdinand Verhulst*
 - 302 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
naw@math.leidenuniv.nl
www.nieuwarchief.nl

Hoofredactie

Wil Schilders (w.h.a.schilders@tue.nl)
Ferdinand Verhulst (f.verhulst@uu.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@math.leidenuniv.nl)

Redactie

Gerard Alberts (G.Alberts@uva.nl)
Gunther Cornelissen (g.cornelissen@uu.nl)
Charlene Kalle (c.c.c.j.kalle@uu.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@nlda.nl)
Nellie Verhoef (N.C.Verhoef@gw.utwente.nl)

Bureau redactie

Floris Olsthoorn, Harm de Vries

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Johan Bosman (UL), Matthijs Coster (Min.Def.), Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Klaas Landsman (RU), Hans Sterk (TUE), Lenny Taelman (UL), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementensperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Math  matique de France*, the *Gesellschaft f  r Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink

Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Gert Vegter (RUG, ondervoorzitter), Rob van der Mei (CWI en VU, secretaris), Sandjai Bhulai (VU, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Iris van Gulik - Gulikers (SLO), Klaas Pieter Hart (TUD), Arjen Sevenster, Herman te Riele (CWI)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	09-03-2009	–
2	08-06-2009	27-01-2009
3	07-09-2009	27-04-2009
4	07-12-2009	27-07-2009

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Het onder scholieren zeer populaire pokerspel verheugt zich tegenwoordig ook in een toenemende wetenschappelijke belangstelling. Zie pagina 287.

Leve de Meetkunde

Van een aantal dingen realiseer je je het belang niet als ze er zijn, maar pas als ze er niet zijn. Vrienden van mij waren op vakantie in Afrika en logeerden in een hotel. Ze wilden met hun huurauto op bezoek gaan in een andere plaats en, zoals dat gaat in die streken, vroeg de hotelhouder hen om een aantal pakketten uit die plaats bij een leverancier op te halen. Dat wilden ze natuurlijk wel en op de plaats van bestemming stonden dozen van uiteenlopend formaat klaar om te worden ingeladen. “Laden jullie maar vast in” zeiden ze tegen de twee jongens die het magazijn beheerden, “wij gaan even rondkijken”. Na een uur kwamen ze terug en vonden de jongens nog steeds met de pakketten bij de auto. “Ze passen er niet in” was het commentaar. “O nee?” zeiden mijn vrienden en in drie minuten hadden ze alle pakketten in de bagageruimte geplaatst. Ruimtelijk inzicht!

Het is zo vanzelfsprekend voor ons, maar het begint al met allerlei pas-en-meetspelletjes voor kleuters. Dat ruimtelijk inzicht wordt dan verder gevormd in de dagelijkse praktijk en in het meetkundeonderwijs. Het blijft een rol spelen in ons leven, bij het navigeren met een auto in de stad, maar ook bij het inrichten van een huis. Om maar niet te spreken over het ontwerpen van nieuwe wijken door stadsarchitecten.

Laatst in het NRC Handelsblad mengde zich iemand met een ingezonden brief in de discussie over onderwijs. Hij tekende met Ir. Zo-en-Zo en vond “planimetrie het mooiste vak dat hij op school had gevolgd. Hij had het echter zijn hele leven niet meer nodig gehad”. Een interessant misverstand. Hoe overtuig je zo iemand van het belang van de meetkunde als je niet alleen wilt wijzen op de vormende waarde van meetkundebewijzen (dat is juist, maar het zegt de meeste mensen niets). Misschien kan dat door aan te geven waar meetkundedeprivatie toe leidt. Zoals vitamine C-gebrek leidt tot ziekte, zo leidt ook meetkundedeprivatie tot ernstige gebreken.

De geschiedenis van de wiskunde leert ons daar wel iets over. Tot in het begin van de 18e eeuw was de mathematische fysica, bijvoorbeeld in het werk van Huygens of van Newton, doordrongen van meetkunde. In de tweede helft van de 18e eeuw ontdekten men de grote kracht van het puur analytisch manipuleren. Een belangrijk wiskundige als Lagrange was daar een meester in: je vindt dan ook geen enkele afbeelding of figuur in zijn vele werken. Met een sprong naar de tweede helft van de 19e eeuw vind je bij Weierstrass mooie analyse en ellenlange berekeningen, maar geen plaatjes. Toch was een deel van de mathematische fysica

toen al vastgelopen. Er kon veel worden uitgerekend, maar het inzicht bleef achter. Dit werd doorbroken door Henri Poincaré die in zijn werk liet zien hoe kwantitatieve berekeningen en kwalitatief inzicht (meetkunde) hand in hand gingen en zo tot schokkende nieuwe resultaten leidden. De moderne ontwikkelingen van de mathematische fysica zijn onverbrekkelijk verbonden met zijn inzichten in het combineren van geavanceerde analytisch-algebraïsche algoritmes en meetkundig inzicht. Je kunt zelfs stellen dat het nog niet goed kunnen bevatten van een nieuwe theorie vaak wordt veroorzaakt door het ontbreken van het synthetische, meetkundige element. Het denken en begrijpen van de mens maakt altijd gebruik van metaforen, ook meetkundige.

Hoe bereidt ons huidige vwo-onderwijs hier op voor? Nu heeft in dit verband het woord ‘huidig’ een wel erg vluchtige betekenis, de veranderingen en aanpassingen van het programma buitelen over elkaar heen. Op de NVvW website vindt je gelukkig een actueel overzicht van de eindtermen en van de mogelijke keuzeonderwerpen. Zebra’s en wiskunde D. Daar zouden wiskundigen die op een universiteit werken regelmatig naar moeten kijken. Bij het verplichte deel heeft de vlakke meetkunde een plaats gekregen, ruimtemeetkunde zal het vooral van de vrije keuzes moeten hebben. Op dit gebied hebben de wiskundededidactici die zich met meetkunde bezighouden, onder andere op het Freudenthal Instituut, de afgelopen jaren prachtig materiaal aangeleverd. Aan het lesmateriaal ligt het niet als er minder aan meetkunde wordt gedaan. Het gerechtvaardigde roepen om meer rekenvaardigheid heeft natuurlijk wel als gevolg het reduceren of zelfs verdwijnen van andere onderwerpen zoals delen van de meetkunde. Bovendien heeft de vorige minister van onderwijs, zonder inhoudelijk overleg met het veld, het aantal lessen wiskunde behoorlijk verminderd (deze minister reageerde alleen op het veld als je haar aansprak met ‘Lieve’). Wat de ruimtemeetkunde betreft moet het dus helaas van de keuzeonderwerpen komen.

Wat is het indertijd een goed idee geweest om deze mogelijkheid te scheppen; zo kun je als docent op eigen houtje het officiële programma een beetje bijstellen. Dat geldt natuurlijk ook voor andere delen van de wiskunde. Gebruik en stimuleer die mogelijkheid!

Ferdinand Verhulst, hoofdredacteur
Mathematisch Instituut, Universiteit van Utrecht

Agenda

Upcoming Events

december 2008

10 december

□ SBL: Lerarenregister en beroepskwaliteit

Conferentie van de Stichting Beroepskwaliteit Leraren (SBL) over de mogelijkheden van het lerarenregister

plaats Antropia, Driebergen

info www.lerenvandocenten.nl/agenda/sbl.conferentie.lerarenregister.en.beroepskwaliteit

10 december

□ Biostatistiek als taal in de geneeskunde

Symposium ter gelegenheid van het afscheid van Dick Bezemer

plaats Restaurant Café de Veranda, Amsterdam

info www.vumc.nl/afdelingen/EB/EB_agenda/Symp.Bezemer

11 december

□ Special functions and quantum groups

Symposium ter gelegenheid van het afscheid van Tom Koornwinder

plaats Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam

info staff.science.uva.nl/~jstokman

11 december

□ Monna Lecture

Monna lecture door Toshiyuki Kobayashi

plaats Universiteit Utrecht

info www.math.uu.nl/announcements/stafcol

12 december

□ De speciale functie van de wiskunde

Afscheidscollege 'De speciale functie van de wiskunde', ter gelegenheid van het emiraat van Tom Koornwinder.

plaats Korteweg-de Vries Instituut, Amsterdam

info staff.science.uva.nl/~jstokman

15 – 19 december

□ ACTM13

13de Internationale conferentie over het gebruik van technologische ontwikkelingen bij onderwijs en onderzoek op het gebied van wiskunde

plaats Bangkok, Thailand

info atcm.mathandtech.org

16 december

□ Het ABCD van de wiskunde

Studiedag voor wiskundeleraren over de invulling van het wiskundeonderwijs

plaats Bernoulliborg, Groningen

info www.rug.nl/wiskunde/informatievoor/docenten/studiedagvoorwiskundeleraren/20081/index

januari 2009

7 – 10 januari 2009

□ American Mathematical Society Annual Meeting

Lezingen van Gregory Margulis, Maria Chudnovsky, Percy Deift, Peter M. Winkler, Maryam Mirzakhani en Douglas Arnold

plaats Washington DC, USA

info www.ams.org/amsmtgs/national.html

10 januari 2009

□ Wintersymposium KWG

Thema: Wiskunde en kunst

plaats Academiegebouw Universiteit Utrecht

info www.wiskgenoot.nl/watbiedt/wintersymposium09

13 – 15 januari 2009

□ Conferentie Mathematische Besliskunde

Sprekers: Satoru Iwata, Zhi-Quan Luo, Sean Meyn, Gennady Samorodnitsky en Berthold Vöcking. Uitreiking Gijs de Leve-prijs

plaats Lunteren

info www.lnmb.nl/conferences/lunteren2009

15 januari 2009

□ Wiskunde-D bijeenkomst

Bijeenkomst over de onderwerpen 'Kansrekening' en 'Optimalisatie in netwerken' voor het wiskunde-D onderwijs op het vwo

plaats Hoofdgebouw VU, Amsterdam

info www.feweb.vu.nl/link.asp?itemnumber=13992

15 januari 2009

□ De sublieme eenvoud van relativiteit

Nascholingscursus voor vwo-docenten natuurkunde en wiskunde over een aantal aspecten van speciale relativiteit

plaats Van der Waals-Zeeman Inst., Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

19 – 21 januari 2009

❑ **Winter School Mathematical Finance**

De achtste editie van de winterschool over financiële wiskunde met als speciale onderwerpen 'Portfolio Optimization' en 'Risk Measures'

plaats Congrescentrum De Werelt, Lunteren

info staff.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool.html

21 – 23 januari 2009

❑ **27ste Panama Conferentie**

Conferentie over reken- en wiskundeonderwijs

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

23 januari 2009

❑ **Landelijke bètadag 2009**

Derde editie van de landelijke bètadag, waarop studenten in vijf verschillende steden laten zien waarom ze hun studie zo interessant vinden

plaats Utrecht

info betadagen.nl

26 januari 2009

❑ **7de Reehorstconferentie wiskunde**

Jaarlijkse conferentie voor docenten wiskunde vmbo en onderbouw havo/vwo

plaats Utrecht

info www.aps.nl/APSSite/Onderwijssectoren/Projecten/Wiskunde/Agenda/Reehorstconferentie+2009.htm

26 – 30 januari 2009

❑ **Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009**

De 67ste editie van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, waarin wiskundigen werken aan open problemen uit de industrie

plaats Conferentiecentrum WICC, Wageningen

info www.swi2009.wur.nl

28 januari – 1 februari 2009

❑ **CERME 6**

Conferentie van de European Society for Research in Mathematics

plaats Lyon, Frankrijk

info cerme6.univ-lyon1.fr

28 januari

❑ **Zelf digitale wiskundeactiviteiten ontwerpen**

Cursus van het Freudenthal Instituut

plaats Freudenthal Instituut, Utrecht

info www.fi.uu.nl/nl

29 januari

❑ **Dyscalculie**

Studiemiddag voor docenten wiskunde vmbo en onderbouw havo/vwo over de zin en onzin rond dyscalculie

plaats Utrecht

info www.aps.nl/APSSite/Agenda

29 januari

❑ **Inspiraties in de wiskundeles**

Studiedag voor docenten wiskunde vmbo en onderbouw havo/vwo met Cees de Hoog en Bert van der Windt.

plaats Utrecht

info www.aps.nl/APSSite/Agenda

30 januari

❑ **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009**

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

februari 2009

2 – 3 februari

❑ **Velov Congres**

Congres van de Vereniging Lerarenopleiders Vlaanderen met als titel 'Botsende verwachtingen? De lerarenopleider als bruggenhoofd bij verandering'

plaats Gent, België

info www.velov-velon.be

6 – 7 februari

❑ **Nationale Wiskunde Dagen**

Dag voor leraren in het voortgezet onderwijs. Plenaire sprekers: Jan de Lange, Robert Devaney. De derde spreker is een verrassing

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

16 – 20 februari

❑ **Lambda Calculus and Term Rewriting Systems**

Vijfdaagse minicursus, waarin een introductie wordt gegeven in de theorie van lambda calculus

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma/index.html

17 februari 2009

❑ **Spelen tegen het toeval**

Nascholingscursus voor vwo-docenten wiskunde en natuurkunde over de theorie van de eerlijke kansspelen

plaats Van der Waals-Zeeman Inst., Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

24 februari 2009

❑ **Golven als dynamische systemen**

Nascholingscursus voor vwo-docenten wiskunde en natuurkunde over het modelleren en het simuleren van eenvoudige fysische processen

plaats Van der Waals-Zeeman Inst., Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

maart – april 2009

12 – 13 maart 2009

❑ **Nationale Rekendagen**

Ontmoetingsplaats voor leerkrachten basisonderwijs

plaats Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

13 – 14 maart 2009

❑ **Finale Wiskunde A-lympiade**

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats Garderen

info www.fi.uu.nl/alympiade

17 maart 2009

❑ **Forensische statistiek**

Nascholingscursus voor vwo-docenten wiskunde over de wiskundige definitie van het begrip bewijskracht in het strafrecht

plaats Van der Waals-Zeeman Inst., Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

20 maart 2009

❑ **Kangoerowedstrijd**

Internationale reken- en wiskundewedstrijd voor leerlingen tussen de acht en achttien jaar

plaats Deelnemende scholen

info www.math.ru.nl/kangoeroe

Afscheid

Acht jaar geleden, in januari 2001, werd ik eindredacteur van het Nieuw Archief voor Wiskunde. Ik was in de voorafgaande maanden ingewerkt door Chris Zaal en bureaumedewerker Annelies Hafkenscheid. Het blad in de nieuwe vorm was door Chris Zaal opnieuw opgezet en bestond net een jaar. Door mijn komst konden de diverse functies die hij bij het tijdschrift vervulde uit elkaar worden getrokken. Hij vormde samen met Ger Koole het eerste tweetal hoofdredacteurs. Ik startte als eerste eindredacteur en was verantwoordelijk voor de vorm en voor het op tijd verschijnen van het blad en de daarbij behorende bedrijfsvoering. In december 2002 stopte Chris Zaal met het hoofdredacteursschap en sindsdien is deze rol elke twee jaar door twee andere wiskundigen vervuld.

Wat wilde ik eigenlijk met het Nieuw Archief? Ik was weliswaar eindredacteur, maar de kopij kwam van de hoofdredactie. Wat voor betekenis kon deze functie hebben?

De manier waarop de artikelen in het blad terecht kwamen, wordt voor een groot gedeelte door de eindredactie bepaald. Vanaf het begin heb ik geprobeerd zowel de theoretische als toegepaste artikelen, waar dat kon, in een breder wiskundig verband te plaatsen en een maatschappelijk gezicht te geven, voor een lezerspubliek dat vrijwel geheel uit professionele wiskundigen bestaat. Daartoe zijn er diverse middelen: het schrijven van de inleiding, het vragen van toelichtingen aan auteurs, en het maken van kaders waarin zaken worden toegelicht.

Een zeer belangrijk middel is de beeldredactie. Vaak hebben we illustraties gezocht die op het eerste gezicht weinig te maken lijken te hebben met het onderwerp, maar waarmee we wel allerlei associaties hopen op te roepen bij de lezer. Al spoedig hebben we kunstenaar Ryu Tajiri ruimte gegeven om paginagrote illustraties te maken. Het is steeds fascinerend om te zien wat zij als niet-wiskundige uit de te illustreren artikelen haalt. Haar werk geeft ons blad een aparte sfeer.

Het nieuw opgezette blad heeft als doel de Nederlandse wiskunde te informeren over wat er op het gebied van de wiskunde plaatsvindt in de wereld. Wiskundige ontdekkingen zijn echter vaak geweldig moeilijk te begrijpen, zelfs voor wiskundi-

gen. Daarom had ik als ideaal om regelmatig kaders te plaatsen waarin moeilijke zaken in begrijpelijke stukken uit elkaar zouden worden gehaald en liefst op grafisch aantrekkelijke wijze zouden worden gepresenteerd, bijvoorbeeld zoals dit in de Scientific American gebeurt. Hierin zijn we slechts ten dele geslaagd. Dat ligt niet alleen aan ons: auteurs kunnen het zich dikwijls slecht voorstellen dat voor hen elementaire onderwerpen een toelichting behoeven. Het grootste probleem is echter het gebrek aan tijd en capaciteit om dergelijke goede kaders te maken.

In de afgelopen acht jaar hebben we een substantiële toename gezien van abonnees. Ik wil er sterk voor pleiten nooit te bezuinigen op de professionele grafische kwaliteit van het blad. We publiceren echte foto's van echte fotografen, illustraties onder copyright van echte illustratoren en cartoonisten. Met de verslechterende economie kan de verleiding ontstaan om te bezuinigen. Juist een bezuiniging op dit terrein zal abonnees kosten. De lezer verwacht kwaliteit.

Met veel plezier zal ik terugdenken aan de brainstormsessies op de redactievergaderingen in Utrecht, waarvan ik er ongeveer dertig heb meegemaakt. Ze vinden om de drie maanden plaats. Wat zijn er veel rubrieken, zoals bijvoorbeeld 'Differentiëren en Integreren' ontstaan uit discussies bij het diner.

Op de bureauredactie in Leiden is een hele muur volgeplakt met ideeën die we niet hebben uitgevoerd, met kaften die het niet hebben gehaald. Vaak hangen we een hele serie illustraties op, om te bepalen welke ons het meest bevalt. Allerlei eigengemaakte illustraties hebben als stand-in gefungeerd als de echte illustratie te lang op zich liet wachten. Zo is er een fles van Klein die is ingebed in een schilderij van Jeroen Bosch en een koninklijke nepoorkonde waarmee ook het Nieuw Archief het predicaat koninklijk verwerft (en vanaf dat moment KNAW mag worden genoemd). Er staan diverse lastige Texroutines en er hangen kleutertekeningen van kinderen die nu op de middelbare school zitten. Deze muur is inmiddels een museum waar mijn opvolger vast graag van af wil.

Ik wil graag een aantal mensen bedanken: ten eerste Chris Zaal en Annelies Hafkenscheid. Zij stonden aan het begin van het

Nieuw Archief en hebben mij er meteen vol bij betrokken. Ze zijn beide wat karakter betreft ongeveer mijn tegenpolen. Chris, die de helft van een artikel schraapt als het hem niet bevalt: ik heb er veel aan gehad.

De hoofdredacteurs Chris Zaal, Ger Koole, Jaap Top, Jaap Molenaar, Ferdinand Verhulst en Wil Schilders hebben allemaal hun eigen stempel kunnen drukken op het blad. Het is merkwaardig hoe mensen met zulke verschillende karakters allemaal zulke goede hoofdredacteurs kunnen zijn.

We ondervonden veel steun van het KWG en de publicatiecommissie: van deze groep mensen wil ik in het bijzonder Klaas Pieter Hart en Jan van Mill bedanken. Zij kwamen meerdere keren speciaal naar Leiden om te kijken wat er allemaal beter kon.

Zonder de bureauredactie van Leidse studenten zou het blad niet bestaan. De rol van Annelies Hafkenscheid, eerst student wiskunde, daarna rechten, is nauwelijks te overschatten. Zij heeft mij zonder meer geleerd hoe je een tekst kan verbeteren; zij besteedde soms een hele dag aan één column of een redactioneel. Door deze koppigheid, waar ook ik onmogelijk tegen in kon gaan, heeft het blad in de beginjaren meteen een goed niveau gekregen. De andere bureauredacteurs Maxim Hendriks, Jos Brakenhoff, Arno Kret en Wendy Ellens hebben allemaal hun eigen bijdrage aan het blad gegeven; bijna iedereen heeft wel een nieuwe 'hack' aan het mooie, maar bug-rijke zetprogramma toegevoegd. (In het bijzonder is het 'lege onderwerp' van Arno Kret een meesterzet gebleken.) Nu zijn Harm de Vries en Floris Olsthoorn de twee bureauredacteurs. Het is een groot plezier om met hen te werken; zij denken in alles met mij mee en voelen zich verantwoordelijk voor het blad. Tevens brengt hun zeer onregelmatige studentenleven mooie herinneringen bij mij naar boven.

Het was fijn om te werken met de ontwerper van het blad Kitty Molenaar. Het tijdloze karakter van het blad danken we aan haar. Susanne Laws verzorgt als grafische vormgever sinds december 2003 de kaft en het binnenwerk: het is altijd weer spannend om ons eindproduct aan haar te tonen, vlak voordat het naar de drukker gaat.

De Texondersteuning van Hans Hagen, Taco Hoekwater, Marco Boon, Michael van Hartkamp en Klaas Pieter Hart bevond zich op de achtergrond, maar was ook essentieel. Het systeembeheer in Leiden onder leiding van Martijn Feleus wil ik bedanken voor hun goede zorgen. De internetplanners, geprogrammeerd door Willem Jan Palenstijn hebben het runnen van het tijdschrift vanuit andere plaatsen in de wereld mogelijk gemaakt.

De redacteurs wil ik allemaal bedanken en een aantal met name, zonder daarbij de anderen tekort te willen doen. Ten eerste Robbert Fokkink, Jan van Neerven, Matthijs Coster, Johan Bosman en Lenny Taelman voor het in stand houden van de kwali-

tatief hoogstaande en zeer gevarieerde problemenrubriek. Deze rubriek is al zeer oud. Menige lezer opent het blad bij ontvangst aan de achterkant om te zien of er leuke problemen zijn. Geertje Hek wil ik bedanken voor het tot twee keer toe realiseren van losse ideeën van onze kant tot een echte rubriek zoals 'In de Verdediging'. Dit is in mijn ogen een van de mooiste bijdragen van het NAW van de laatste jaren. Van de kritische houding van Gerard Alberts heb ik veel geleerd: hij toonde ons telkens het journalistieke standpunt. Zonder hem zou het Nieuw Archief zijn afgegeleden tot een felicitatieorgaan voor wiskundigen. In dit verband moet Ferdinand Verhulst ook worden genoemd: de wiskundige wereld is zo klein, dat men vaak maar weinig zin heeft om met elkaar van mening te verschillen. De rubriek 'De derde Wet' probeert daar iets aan te veranderen. Yves van Gennip nam vanaf september 2005 de Agenda en de Nieuwsrubriek van de eindredactie over: dit gaf een verfrissende impuls aan het blad en zorgde voor een blik naar buiten met veel meer internationaal nieuws. Op dit moment heeft Charlene Kalle het van hem overgenomen. Jaap Top en later Hans Sterk en Hans Cuypers zullen misschien wel eens boos op ons zijn geweest, wanneer we weer eens pagina's reviews hadden doorgeschoven naar het volgende nummer. Zij hebben het echter niet één keer laten afweten met het op tijd verzorgen van de reviews. Wieb Bosma wil ik bedanken voor de discussies met hem in de begintijd van het tijdschrift en Jan van de Craats, Patrick Oonincx en Teun Koetsier voor hun opbouwende feedback. Met Rainer Kaenders hadden we een genuanceerde redacteur onderwijs, die er altijd weer in slaagde om de diverse zeer uiteenlopende standpunten die er op dit terrein bestaan in ons blad te krijgen. De nieuwe onderwijsredacteur Nelly Verhoef heeft een onafhankelijke koers ingezet: ik hoop dat ze deze zal blijven vervolgen. Gunther Cornelissen is een aanwinst in de redactie. Ik ben erg blij met zijn grote energie, al zijn plannen en zijn gevoel voor humor. Ook heb ik erg genoten van zijn imitaties van Russische post-docs. Ik hoop dat Klaas Landsman zich nog lange tijd voor het Nieuw Archief zal inzetten. Er zijn weinigen die zo goed schrijven. Ik bewonder zijn oprechtheid en zijn scherpe en persoonlijke aanpak, waarbij hij zichzelf niet spaart.

Met Reinie Ern  bemande ik samen de bureauredactie. Zij vulde de gaten die ik liet vallen en nam op essentiële momenten veel stress weg. Daarvoor ben ik haar zeer dankbaar. 

Derk Pik
Eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

*Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
drpik@math.leidenuniv.nl*

Nieuws

| News

DCSE Customer Day brengt wetenschap en industrie samen

Het *Delft Center for Computational Science and Engineering* (DCSE) organiseerde 19 september voor het eerst een 'customer day'. Naast genodigde sprekers was er 's middags een kennismarkt, waar vijf bedrijven en vijftien Delftse onderzoeksgroepen hun werk middels posters en proefopstellingen presenteerden.

Waar baanzoekende promovendi wellicht meer bedrijven hadden gewaardeerd, was de brede academische vertegenwoordiging zeer interessant voor de bedrijven. Open praktijkproblemen werden voorgesteld, verklaringen voor simulatieproblemen werden geopperd en inspiratie tot nieuwe (en voortgaande) samenwerking werd gegeven. De informele sfeer tijdens de middag droeg hier zeker aan bij.

's Morgens wisten de sprekers de circa honderd aanwezigen goed te boeien. Jacob Fisch van Rensselaer's School of Engineering vertelde over hun multiscale design system. Barry Koren toonde de succesvolle aanpak van two-fluid flow simulaties. TNO was goed vertegenwoordigd met twee sprekers. Peter Paul van 't Veen van TNO Glas vertelde over de combinatie van CFD en warmteprocessen bij het simuleren van glasproductie. Roland Schmehl van TNO Automotive toonde de praktijkproblemen bij het simuleren van een strak opgevouwen airbag en het opblazen hiervan. Pier Siebesma van het KNMI toonde de nieuwe generatie atmosferische simulaties. Toevoegen van brute rekenkracht is hierin niet voldoende meer, er zijn fundamentele aanpassingen aan de modellen en solver nodig. Tenslotte onthulde Johan Kok van het NLR enkele details over hun werk aan vliegtuigen met 'open-rotor propulsion'. Deze hebben belangrijk minder CO₂-uitstoot, maar geven meer geluidsoverlast. Simulaties testen nieuwe ontwerpen op geluidsdemping.

De organisatie heeft een afwisselende dag neergezet door niet één thema te kiezen. Als de opkomst komende jaren zo groot blijft, en toenemende bekendheid meer bedrijven en niet-Delftse groepen aantrekt, is wellicht een goede nieuwe traditie geboren.

Arthur van Dam

Reken maar

Er zijn dit jaar landelijke voorrondes geweest voor het Bartjens Rekendictee. Tussen 10 oktober en 10 november konden mensen zich plaatsen voor de finale van dit dictee door op de websites van diverse regionale dagbladen het internetdictee te maken. Alleen de beste en snelste deelnemers kregen een plaatje in de finale. Deze grote finale vond plaats op vrijdag 21 november en werd gepresenteerd door Marjolein Kool. Jan Terlouw was de juryvoorzitter. Helaas was tijdens het schrijven van dit stukje nog niet bekend wie er heeft gewonnen.

Het Groot Zwolsch Bartjens Rekendictee werd voor het eerst georganiseerd in 2004 en had de afgelopen vier edities steeds een regionaal karakter.

Bron: www.wiskundebrief.nl

Toekomstmuziek

Afgelopen zomer heeft de Japanse robotspecialist Atsuo Takanishi, van de *Waseda University* in Tokyo, een robotfluitist gepresenteerd. Hij heeft enkele jaren aan dit project gewerkt en het resultaat is een fraaie robot met alles wat nodig is om fluit te kunnen spelen: tong, lippen, longen, ogen, armen en vingers. Om het optimale fluitgeluid te krijgen, maakte Takanishi wiskundige modellen van onder andere de lipspanning en de beweging van de vingers. Ook vertaalde hij en zijn collega's de geluiden zelf in wiskundige formules. Daarna werd de robot zo geprogrammeerd dat al zijn bewegingen en de manier waarop hij

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Charlene Kalle

lucht door de fluit blaast, precies lijken op die van een beroepsfluitist. Omdat er erg veel mogelijkheden moesten worden uitgetoetst voor onder andere de positie van de lippen en vingers en de snelheden van de luchtstroom door de longen, duurde het jaren voordat de optimale combinatie was gevonden.

Volgens Takanishi draagt het ontwikkelen van dergelijke robots bij aan een beter begrip van de menselijke motoriek. Ook helpt het bij het verbeteren van bestaande robots met een specifieke taak. Hierdoor kunnen robots steeds complexere taken vervullen en zich nuttiger kunnen maken voor de maatschappij. Hun takenpakket kan langzaam uitgebreid worden van het laten halen of brengen van voorwerpen, naar bijvoorbeeld het verplegen in ziekenhuizen.

Takanishi is nu bezig aan een saxofonist. Hij is op dit moment 52 jaar oud en hoopt voor zijn pensioen een volledig robotorkest bij elkaar te hebben.

Bron: www.kennislink.nl



foto: Takanishi Laboratory

De robotfluitist van Atsuo Takanishi

En het geluksgetal is ...

Meer dan de helft van de Nederlanders heeft een geluksgetal en zet dat ook regelmatig in bij bijvoorbeeld spelletjes. Dat bleek uit een onderzoek van de Lotto. Van de mensen met een geluksgetal heeft tien procent de acht als geluksgetal, dertien procent gebruikt het getal dertien en voor 21 procent is het getal zeven het geluksgetal. Erg origineel zijn we dus niet in het kiezen van een geluksgetal. Het actualiteitenprogramma *Editie NL* wijdde er een item aan en vroeg Jan Hoogendijk, professor geschiedenis van de wiskunde, om een verklaring.

Hoogendijk legt uit dat het getal zeven op veel spirituele plaatsen in de geschiedenis voor komt. Zo neemt het getal een bijzondere plaats in in het scheppingsverhaal, God schiep de aarde in zes dagen en de zevende dag was een rustdag, en zijn er aan de hemel zeven bewegende lichten te ontwaren met het blote oog, namelijk de zon, de maan en de vijf planeten. Volgens Hoogendijk zijn mensen daarom onbewust een bijzondere waarde aan het getal toe gaan kennen.

Bron: www.rtl.nl/actueel/editienl

Balletje balletje

Het is al langer bekend dat zowel mensen als dieren een aangeboren getalgevoel hebben. Als we een plaatje te zien krijgen met daarop twee kleine groepen voorwerpen, dan kunnen we in één oogopslag zien welke van de twee groepen de meeste voorwerpen bevat. Onderzoekers van de *Johns Hopkins University* hebben onderzocht of er een correlatie is tussen dit aangeboren gevoel en de schoolprestaties van middelbare scholieren op het gebied van wiskunde. Het team onderzoekers bestond uit Justin Halberda, Michèle Mazzocco en Lisa Feigenson, alle

drie werkzaam binnen psychologie.

De onderzoekers hebben van 64 veertienjarigen hun getalgevoel getest door ze op een computerscherm een reeks plaatjes te tonen met verschillende aantallen blauwe en gele ballen en ze na ieder plaatje te vragen van welke kleur ze de meeste ballen hadden gezien. Daarna hebben ze de schoolresultaten van deze leerlingen vanaf de kleuterschool naast de uitslagen van de test gelegd. Er bleek dat leerlingen met een beter getalgevoel al vanaf de kleuterschool beter presteerden op het gebied van wiskunde dan leerlingen die de test minder goed hadden gemaakt.

Halberda benadrukt wel dat uit dit onderzoek niet geconcludeerd moet worden dat genetisch bepaald is of iemand goed of slecht is in wiskunde. Wat volgens hem bijzonder is aan dit resultaat, is dat goed presteren op het gebied van formele wiskunde gerelateerd lijkt te zijn aan een goede intuïtie voor wiskundige basisprincipes. Een mogelijkheid voor verder onderzoek is dan ook om na te gaan wat de invloed is van het trainen van getalgevoel bij jonge kinderen op hun latere wiskundeprestaties.

Het artikel van Halberda en zijn collega's verscheen in het septembernummer van *Nature*.

Bron: www.sciencedaily.com

Junior Wiskunde Olympiade

Op 3 oktober werd voor de eerste keer de *Junior Wiskunde Olympiade* (JWO) gehouden aan de VU in Amsterdam. De deelnemers waren geselecteerd uit de groep van 78.000 leerlingen die meededen aan de Kangoeroewedstrijd eerder dit jaar. Van deze 78.000 leerlingen zaten er 37.744 in klas 1, 2 of 3 van het havo en het vwo en van deze groep waren de beste dertig per leerjaar uitgenodigd voor de JWO.

De wedstrijd bestond uit twee onderdelen. Voor het eerste onderdeel moesten de leerlingen vijftien meerkeuzevragen beantwoorden en het tweede onderdeel bestond uit tien open vragen. Voor de meerkeuzevragen kregen de deelnemers twee punten per goed antwoord en voor de open vragen waren per vraag drie punten te verdienen. De hoogst haalbare score was dus zestig punten. En, er waren leuke prijzen te verdienen.

De beste deelnemer van alle leerlingen uit klas 1 was Thijs Douwes uit Wijk bij Duurstede. Hij haalde 49 punten. Van de tweedeklassers is het beste resultaat behaald door Guus Berkelmans uit Amstelveen met 52 punten. Degene die van alle deelnemers de meeste punten haalde, namelijk 58, en daarmee natuurlijk ook de beste was van alle derdeklassers, was Rens Bloom uit Hilversum.

Op de dag was nog meer te doen. Ronald Meester gaf een lezing over kansen en Erjen Lefeber leidde een workshop over grafen.

Bron: <http://www.math.vu.nl/juniorolympiade>



foto: Wim Berkelmans en Birgit van Dalen

Rens Bloom

Wintersymposium KWG

Op 10 januari 2009 zal het wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, met als titel *Wiskunde een Kunst*, gehouden worden.

Ferdinand Verhulst, emeritus hoogleraar dynamische systemen aan de Universiteit Utrecht, opent het symposium met een voordacht over wiskunde en literatuur. Aline Honingh, 'research fellow' in de Music Informatics Research Group aan de City University in Londen, zal spreken over wiskunde en muziek. Albert van der Schoot, als kunst- en cultuurfilosoof verbonden aan de faculteit Geesteswetenschappen van de Universiteit van Amsterdam, en als lector Kunst en Reflectie aan ArtEZ Hogeschool voor de Kunsten, sluit het symposium af met een lezing over de geschiedenis van de gulden snede.

Het symposium wordt gehouden in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht. Het programma start om 10:00 uur en eindigt ca. 14:45 uur. U wordt verzocht u van te voren on line aan te melden via de bovenstaande website. Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.

De kosten voor het symposium bedragen 17 euro voor KWG-leden en 22 euro voor niet-leden. Deze bijdrage is onder andere voor een lunch en andere consumpties gedurende de dag.

Bron: www.wiskgenoot.nl/watbiedt/wintersymposium09/index.html

Wat een toestand

Quasikristallen zijn materialen met een ingewikkelde chemische structuur en bijzondere fysieke eigenschappen. Een stof heet een quasikristal als de atomen zich in een a-periodiek rooster bevinden. Dit rooster correspondeert met de beroemde a-periodieke Penrosebetegeling. Vaak zijn deze stoffen samengesteld uit een aantal verschillende metalen en dit zorgt er samen met de ingewikkelde atoomstructuur voor dat ze moeilijk te bestuderen zijn. Daarom besloten Jules Mikhael en Clemens Bechinger van de *Universität Stuttgart* de atoomstructuur na te bootsen op een iets grotere schaal en zonder de scheikundige complicaties. Het artikel over hun bevindingen is eind juli in *Nature* verschenen.

Om de eigenschappen van quasikristallen te onderzoeken, legden Mikhael en Bechinger een groot aantal kleine plastic balletjes in een bak met water. Door hun negatieve lading, vormen de balletjes in water een perfect periodiek, driehoekig rooster. De balletjes proberen zo ver mogelijk uit elkaar te gaan liggen. Stoffen waarbij de atomen zich in een soortgelijk rooster bevinden, heten kristallen. Vervolgens werden er vijf laserstralen door de bak water heen gestuurd. De balletjes worden aangetrokken door de plaatsen waar de intensiteit van de laserstralen het grootst is, dat wil zeggen door de snijpunten van de laserstralen. Daardoor konden Mikhael en Bechinger de lasers zo plaatsen dat de balletjes zich na inschakeling van de lasers verplaatsten naar de gewenste a-periodieke toestand. Zo waren ze in staat de karakteristieke atoomstructuur van quasikristallen na te bootsen.

In het proces ontdekten ze echter iets onverwachts. Ze speelden wat met de intensiteit van de laserstralen en merkten op de balletjes bij een hele lage intensiteit terugkeerden naar hun oorspronkelijke, periodieke toestand. Dat was zoals verwacht. Bij een tussenliggende intensiteit ontstond er echter ook een tussenliggend patroon, een patroon dat leek op een Archimedische vlakvulling. Dit is een vlakvulling met twee of meerdere soorten regelmatige veelvlakken, waarvan de zijden allemaal even lang zijn en waarbij alle punten waar verschillende veelvlakken elkaar raken identiek zijn. In de tussenliggende toestand vormden de balletjes afwisselend rijen van driehoeken en rijen van

vierkanten, zoals in het plaatje te zien is. Het zo verkregen rooster zou een Archimedische vlakvulling zijn, maar de periodieke structuur wordt onderbroken, doordat er om de zoveel rijen een extra rij driehoeken is. Hierdoor zijn er punten waar twee vierkanten en drie driehoeken elkaar raken, maar ook punten waar zes driehoeken samenkomen. Niet al deze punten zijn dus identiek. Opmerkelijk is het dat de rij rangnummers van plaatsen waar zo'n extra rij driehoeken voorkomt, de rij van Fibonacci vormt.

Volgens Mikhael is het zo goed als zeker dat materialen die een dergelijke tussenliggende atoomstructuur hebben, ook bijzondere eigenschappen hebben. Wat voor eigenschappen dit dan zijn, is voorlopig nog niet duidelijk.

Bron: www.sciencenews.org

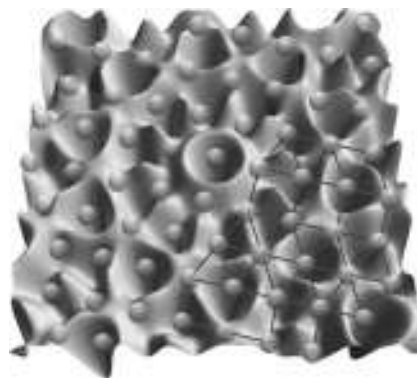


Foto: Jules Mikhael

Het patroon bij een tussenliggende laserintensiteit

Wiskunde tegen leukemie

Wiskunde en biologie gaan hand in hand in de strijd tegen leukemie. In een artikel dat op 20 juni verscheen in het tijdschrift *PLoS Computational Biology*, wordt uitgelegd hoe nieuwe biologische data en wiskundige modellen kunnen worden gebruikt om een behandelingsmethode voor chronische myeloïde leukemie (CML) te ontwerpen, die per patiënt kan worden aangepast. CML is een van de meest voorkomende vormen van leukemie.

De schrijvers van het artikel, Doron Levy van de *University of Maryland*, Peter Lee van de *Stanford Medical School* en Peter Kim van de *École Supérieure d'Électricité* in Gif-sur-Yvette in Frankrijk, onderzochten vier jaar lang de gegevens van patiënten met CML en lieten daarbij speciaal op de reacties van het immuunsysteem van deze patiënten gedurende de gebruikelijke behandeling. CML wordt vaak bestreden met het medicijn *imatinib* en de onderzoekers merkten op dat het immuunsysteem actiever gaat optreden tegen de leukemiecellen vanaf het moment dat het medicijn wordt toegediend. De activiteit van het immuunsysteem neemt vanaf dan toe, tot er op een bepaald moment nog maar zo weinig leukemiecellen in het lichaam zijn, dat het immuunsysteem weer kalmeert. Dit gebeurt meestal als de behandeling al een flink eind op gang is. Helaas is dat wel het perfecte moment voor de leukemiecellen om resistentie te ontwikkelen tegen het medicijn, waardoor de behandeling zijn effectiviteit verliest. Dit probleem kan worden tegengegaan door het immuunsysteem op het juiste moment te stimuleren. Een manier om dat te doen is door het toedienen van kankervaccins. Deze bestaan uit bloed van de patiënt zelf, dat afgenomen wordt voordat de behandeling wordt gestart en waarin de leukemiecellen onschadelijk zijn gemaakt.

Het is noodzakelijk om deze vaccins op precies het juiste moment toe te dienen. Wordt dit te vroeg in de behandeling gedaan, dan heeft het geen enkel effect, maar als het op het juiste moment wordt toege-

diend, zou deze behandelmethode de ziekte volledig kunnen genezen. Het optimale moment hangt echter af van de reacties van het immuunsysteem en die kunnen sterk per patiënt verschillen. Levy en collega's hebben een wiskundig model ontwikkeld dat op basis van een aantal patiënt-afhankelijke parameters het optimale toedieningsmoment kan geven. Zo kan de behandeling per patiënt worden aangepast. Ook heeft dit model, volgens Levy, geholpen bij het begrijpen van de mechanismen die achter de ziekte schuilgaan. *Bron: www.eurekalert.org*

In groten getale

In september zijn twee grote toevoegingen gedaan aan de lijst van bekende Mersennepriemgetallen. Mersennegetallen zijn getallen van de vorm $2^n - 1$. Ze zijn vernoemd naar de Franse monnik en amateurwiskundige Marin Mersenne, die leefde van 1588 tot 1648. Mersennepriemgetallen zijn priemgetallen van de vorm $2^n - 1$. De gevonden getallen zijn $2^{43112609} - 1$ en $2^{37156667} - 1$ en als je ze volledig uitschrijft, hebben ze respectievelijk 12978189 en 11185272 cijfers. In totaal zijn er nu 46 Mersennepriemgetallen bekend.

De eerste van deze twee getallen is gevonden door de computer van de Amerikaan Edson Smith en de tweede door die van de Duitser Hans Michael Elvenich. Hun computers rekenden mee in het project *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS). Mensen kunnen de ongebruikte rekencapaciteit van hun computer aan het project beschikbaar stellen om berekeningen uit te voeren via internet. Het is dan ook niet echt de verdienste van deze heren dat hun computers deze getallen hebben gevonden. De computers krijgen via internet een getal toegewezen en rekenen dan na of het een priemgetal is of niet. Daarna worden de vonsten nog gecontroleerd door de initiators van GIMPS.

Dat deze twee getallen zo dicht op elkaar zijn gevonden is opmerkelijk, want priemgetallen zijn behoorlijk dun gezaaid. De laatste vondst van GIMPS dateerde uit 2006 en dat priemgetal bestond uit ongeveer 9,7 miljoen cijfers. Voor Mersennegetallen is relatief makkelijk na te gaan of ze priem zijn. Het kost een computer tot twee maanden rekentijd om dit voor een groot Mersennegetal te verifiëren. Bij andere getallen van dezelfde grootte kan deze rekentijd oplopen tot enkele jaren. De grote priemgetallen die de laatste jaren zijn gevonden, zijn dan ook allemaal Mersennepriemgetallen.

Grote priemgetallen spelen een belangrijke rol bij moderne coderingsmethodes. De priemgetallen die in september zijn gevonden, zijn echter veel te groot om hiervoor gebruikt te kunnen worden.

GIMPS had honderdduizend dollar uitgelooft voor de eerste vinder van een priemgetal dat bestaat uit meer dan tien miljoen cijfers. Deze prijs gaat dus naar Edson Smith. *Bron: www.kennislink.nl*

1, 2, 3, 4

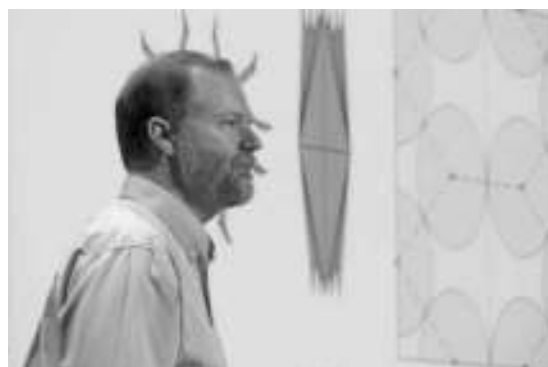
Robert Lang, van huis uit natuurkundige, is al meer dan dertig jaar een verwoed origamist en expert op het gebied van de wiskunde erachter. In augustus werd er een aflevering van de televisieserie *Discoveries and Breakthroughs Inside Science* aan hem gewijd en hierin vertelde Lang over de invloed van origami op verschillende ontwikkelingen in de technologie. Zo is de manier waarop airbags opgeborgen worden in auto's gebaseerd op het algoritme voor het vouwen van insecten uit een enkel blaadje papier. Ook in de ruimtevaart wordt veel gebruik gemaakt van origami-achtige technieken om grote, platte voorwerpen de ruimte in te krijgen.

Op de website *Technology, Entertainment, Design* (TED) staat ook

een presentatie van Lang over origami. Hierin gaat hij wat dieper in op de wiskunde achter het maken van een ontwerp. Hij vertelt dat de origamikunst een hoge vlucht heeft genomen sinds men er wiskunde bij is gaan betrekken. Van ieder origamiwerk is een vouwinstructie te geven door middel van vouwlijnen op het blad waarvan het werk gevouwen gaat worden. Deze vouwlijnen verdelen het blad in vlakken en om uitvoerbaar te zijn, moet de vouwinstructie voldoen aan vier eenvoudige regels. Ten eerste moet het blad met twee kleuren zo in te kleuren zijn, dat er nooit twee vakken met dezelfde kleur naast elkaar liggen. Nummer twee is dat in ieder hoekpunt, dat is een punt waar meerdere vouwlijnen samenkomen, het verschil tussen het aantal vouwen naar beneden en het aantal vouwen omhoog gelijk moet zijn aan 2. De derde regel is dat als je naar de hoeken rond een hoekpunt kijkt en ze met de klok mee nummert, alle even hoeken bij elkaar moeten optellen tot 180 graden en alle oneven hoeken ook. De laatste regel zegt dat als je naar de verschillende lagen van het vouwwerk kijkt, dat het blad nooit een vouw kan doorsnijden.

Verder legt Lang uit hoe je van een idee naar een origamiwerk komt. Eerst maak je een lijntekening van het originele voorwerp. Dan maak je een 'simpel' origamiontwerp, dat voor iedere lijn een flap of uitsteeksel heeft en daarna ga je dit model verfijnen. De moeilijkheid zit hem in de tweede stap. Hoe maak je voor iedere lijn een flap? Om een flap te maken is een deel van een cirkel op het papier nodig. Om iets te maken met veel uitsteeksel, moet het stuk papier op de juiste manier gevuld worden met evenveel cirkels. Er bestaat een algoritme dat bij een lijntekening de juiste cirkelpakking geeft en een computer kan dan ook van een lijntekening een vouwinstructie maken.

Lang zegt dat de wiskunde achter origami een mooi voorbeeld is van wiskunde die alleen is ontwikkeld voor de kunst en later allerlei prachtige toepassingen blijkt te hebben. *Bron: www.maa.org/news*



Robert Lang bij zijn voordracht bij TED

Drie keer raden

Stel je hebt een vaas gevuld met knikkers en vraagt aan wat mensen om het aantal knikkers in de vaas te raden. Het zal niemand verbazen dat het gemiddelde van alle antwoorden dicht bij het juiste antwoord ligt dan de meeste van de afzonderlijke antwoorden. Dit principe van 'groepswijsheid' kennen we ook uit spelprogramma's als Lotto Weekend Miljonairs, waarbij vragen beantwoord moeten worden en het publiek als hulplijn kan worden ingeschakeld.

Hetzelfde principe geldt ook als de antwoorden niet van verschillende mensen komen, maar van één en dezelfde persoon. Dat is wat Edward Vul van de *Massachusetts Institute of Technology* en Harold Pashler van de *University of California* schreven in hun artikel dat in het julinummer van *Psychological Science* verscheen. Ze werven 428

proefpersonen en legden hen acht vragen voor uit de *World Factbook*, zoals: hoeveel procent van de vliegvelden op de wereld bevindt zich in de Verenigde Staten? De ene helft van de deelnemers werd meteen na het beantwoorden van de vragen gevraagd om op iedere vraag nog een (ander) antwoord te geven. Aan de andere helft van de groep werd drie weken later gevraagd alle vragen nog een keer te beantwoorden. De deelnemers wisten allemaal van te voren niet dat ze de vragen twee keer zouden moeten beantwoorden.

In beide groepen was het gemiddelde van de twee antwoorden beter dan elk van de twee antwoorden afzonderlijk. Dit kon niet komen, doordat de deelnemers in de tussentijd meer informatie hadden gekregen, want in het algemeen was het tweede antwoord slechter dan het eerste. Bij de groep die langer de tijd had gehad tussen de eerste en de tweede ronde lag het gemiddelde van de twee antwoorden dicht bij het goede antwoord dan dat van de andere groep. Dit komt, volgens Vul en Pashler, omdat de twee antwoorden onafhankelijker worden als er meer tijd tussen zit.

Volgens de twee wetenschappers toont dit experiment aan dat de antwoorden van een enkel persoon beter opgevat kunnen worden als uitkomsten van kansexperimenten, dan als de uitkomst van een deterministisch proces, waarbij de proefpersoon op basis van alle informatie die op dat moment ter beschikking is tot een antwoord komt. Voor het beantwoorden van de vraag construeert de persoon in zijn hoofd een kansruimte met daarin alle volgens hem of haar mogelijke antwoorden. Hoe meer tijd er tussen de verschillende antwoorden zit, hoe meer de antwoorden zich gedragen als twee onafhankelijke trekkingen uit deze ruimte en hoe dicht het gemiddelde van de antwoorden ligt bij het werkelijke antwoord, aldus Vul en Pashler. Ergens een nachtje over slapen is dus helemaal zo gek nog niet.

Bron: www.sciam.com en www3.interscience.wiley.com

De tijd zal het leren

In oktober werd op BBC 4 een vierdelige serie uitgezonden over de geschiedenis van de wiskunde, *The Story of Maths*. Marcus du Sautoy, Professor aan de *Oxford University*, neemt de kijkers mee op een reis door de tijd en om de wereld, om iedereen van het belang en de schoonheid van de wiskunde te overtuigen.

Het eerste deel, getiteld *The Language of the Universe*, begint met een uiteenzetting over het belang van de wiskunde voor ons dagelijks leven. Daarna gaat Du Sautoy achtereenvolgens naar Egypte, Babylonië en Griekenland om onder andere te praten over verschillende getallensystemen en grote Griekse wiskundigen als Euclides en Archimedes. Ook Pythagoras komt uitgebreid aan bod.

Het tweede deel heet *The Genius of the East* en hierin begint Du Sautoy zijn reis in China, waar hij de Chinese fascinatie voor patronen in getallen bespreekt. Vervolgens gaat hij naar India, waar de ontdekking van het getal nul aan de orde komt en naar het Midden-Oosten, waar het gaat over de nieuwe taal van de algebra. Hij besluit zijn reis in Italië als symbool voor de overtocht van de wiskundige kennis van het oosten naar het westen. In Italië is er onder andere aandacht voor Fibonacci.

De derde uitzending heet *Frontiers of Space* en richt zich op de wiskunde vanaf de zeventiende eeuw. Du Sautoy bespreekt Descartes en Fermat in Frankrijk en Newton in Engeland. Verder komen vele beroemde wiskundigen als Euler, Gauss en Riemann aan de orde.

In de laatste uitzending, *To Infinity and Beyond*, wordt aandacht besteed aan belangrijke onopgeloste problemen. Er wordt gesproken over wiskundigen als Cantor, Poincaré en Gödel, maar ook Weil en Grothendieck krijgen een plaatsje.

Marcus du Sautoy is wel vaker te zien en te horen in de media om te praten over wiskunde, zoals in de *Royal Institution Christmas Lectures* in 2005 en in het televisieprogramma *Mind Games*.

Bron: www.open2.net/storyofmaths

Realistisch blijven?

Het rekenonderwijs op de basisschool ligt onder vuur. Zoals ergens anders in dit nieuws wordt geschreven, is er een onderzoek geweest naar de kwaliteit van het rekenonderwijs op basisscholen en kwam daaruit naar voren dat een kwart van de scholen 'rekenzwak' is. Eerder dit jaar had een verslag van het Cito over onderzoek naar het onderwijsniveau al aan het licht gebracht dat kinderen minder goed zijn gaan rekenen.

Een groot discussiepunt is het realistisch rekenen. Hierbij worden rekensommen verpakt in een realistische context en bij het oplossen ligt de nadruk meer op begrijpen wat je doet, dan op het vinden van de juiste oplossing. Leerlingen krijgen niet één, maar meerdere oplossingsmethodes aangereikt en mogen zelf kiezen welke ze het fijnste vinden werken. Ook worden ze gestimuleerd om zelf oplossingsmethodes te bedenken. Volgens velen zijn de onderwijsmethodes hierbij te ver doorgeschoten en hebben vooral rekenzwakke leerlingen meer baat bij het aanreiken van één enkele oplossingmethode en het maken van kale sommetjes. Deze kinderen zouden door de verschillende methodes node-loos in de war gebracht worden.

Volgens voorstanders van het realistisch rekenen kost het leerlingen wel meer tijd om zich de methodes eigen te maken, maar snappen ze daarna wel wat ze aan het doen zijn. Dit zou beter werken, omdat inzicht altijd blijft, maar je een trucje kunt verliezen.

Een aantal scholen heeft nu gekozen voor een tussenweg. Naast het realistisch rekenen wordt ook een aantal minuten per dag geoefend met het maken van kale sommen en het uit het hoofd leren van tafels.

Het ministerie van onderwijs heeft een onderzoek gestart naar de problemen in het rekenonderwijs en wil weten wat bekend is over effectieve rekendidactiek.

Bron: www.nrc.nl

Nederlands Mathematisch Congres 2009

Het 45-ste Nederlands Mathematisch Congres (NMC 2009) vindt plaats in Groningen op dinsdag 14 en woensdag 15 april 2009. Dit jaarlijks congres is de ontmoetingsplek bij uitstek van wiskundig Nederland. Tevens zal de Algemene Ledenvergadering van het KWG tijdens deze dagen plaatsvinden.

Naast een tiental hoofdvoordrachten zijn er minisymposia over verschillende onderwerpen uit de zuivere en toegepaste wiskunde en enkele speciale voordrachten, onder andere over de didactiek van de wiskunde. Op de slotavond wordt de jaarlijkse Groningse Johann Bernoullilezing gehouden. Ook dit jaar bieden we weer de gelegenheid aan promovendi hun resultaten aan een breed publiek te presenteren. De beste presentatie zal worden beloond met de Philips NMC Prijs.

Voor meer informatie over programma, sprekers, minisymposia en inschrijving verwijzen we naar de webpagina van het congres: nmc2009.nl

Bron: www.nmc2009.nl

Het Wiskundetoernooi

Op 19 september van dit jaar werd in Nijmegen weer een succesvolle editie van het wiskundetoernooi afgewerkt. Zo'n vijfhonderd leerlingen uit het voortgezet onderwijs streden een dag lang voor de felbegeerde

hoofdprijs, een reis naar New York. Het was de zeventiende keer dat de Radboud Universiteit Nijmegen dit toernooi organiseerde.

De opzet van het toernooi is als volgt. Ongeveer honderd teams van vijf leerlingen komen met hun docent wiskunde naar de sporthal van het Gymnasium in Nijmegen om daar een ochtend- en een middagwedstrijd te spelen. De docenten worden bij andere teams gezet om daar als scheidsrechter op te treden. 's Morgens is er een estafettewedstrijd en 's middags een thema wedstrijd. Aan het eind van de dag worden de punten geteld en wordt de winnaar bekend gemaakt.

Zo ook dit jaar. Rond tien uur druppelen de eerste teams binnen. Zij worden ontvangen met koffie en thee en gevulde koeken. Voor de wedstrijd begint wordt iedereen welkom geheten door showmaster Ruben van den Brink. Er is nog een korte videoverbinding met de Universiteit van Keulen, waar dit jaar voor het eerst een wiskundetoernooi wordt gehouden. Dan gaat de estafettewedstrijd van start. Het is de bedoeling dat er in een uur zoveel mogelijk opgaven worden opgelost.

Om twaalf uur is het tijd voor de lunch in het Huygensgebouw. Tussen de bedrijven door kunnen de teams nog op de 3D-foto en is er een Kubuswedstrijd. De finale daarvan is aan het einde van de lunchpauze en wordt in 27 seconden gewonnen door Sjoerd Bosma.

Om half twee zitten de teams weer op hun plaats in de sporthal. Zij worden toegesproken door Jan Terlouw. Er klinken mooie woorden over de wiskunde terwijl onder de leerlingen de spanning stijgt. Zij staan te popelen om te beginnen met de middagwedstrijd, genaamd 'Sum of Us'. De teams hebben zich in de weken voor het toernooi verdiept in de speltheorie en komen dus goed beslagen ten ijs. In totaal zijn er vijf opdrachten. Bij twee daarvan moet er zelfs met andere teams onderhandeld worden om zo hopelijk een Nashevenwicht te vinden. Na anderhalf uur is de wedstrijd afgelopen.

In het Huygensgebouw wachten de teams op de uitslag van de wedstrijd. Op het podium speelt een band en er zijn hapjes en drankjes. Tegen half vier is er een tweede videoverbinding met Keulen. Daar zijn de winnaars al bekend, in Nijmegen laat de uitslag nog even op zich wachten. Thom de Graaf, de burgemeester van Nijmegen reikt de prijzen uit. De nummers een en twee zijn de teams van het Vossius Gymnasium en het Barleus Gymnasium, beiden uit Amsterdam. Zij winnen de reis naar New York, waar ze onder meer bij John Nash aanschuiven voor de lunch. De nummers drie, vier en vijf zijn het Gomar College Groningen, het Christelijk Gymnasium Utrecht en het Stedelijk Gymnasium Nijmegen. Zij winnen een reis naar Parijs.

De showmaster sluit het toernooi af door de deelnemers, de vrijwilligers en in het bijzonder de toernooidirectrices Dion Coumans en Mirte Dekkers, hartelijk te bedanken voor deze grandioze editie van het wiskundetoernooi.

Maarten van Puijssen

Rob Tijdeman geridderd

Op 29 augustus is Prof. dr. Robert Tijdeman benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. De benoeming vond plaats direct na zijn afscheidscollege en werd uitgevoerd door de burgemeester van Leiderdorp, waar Tijdeman woont.

Robert Tijdeman is een van de meest vooraanstaande onderzoekers op het gebied van de getaltheorie. Hij kreeg onder meer een eredoctoraat van de Universiteit van Debrecen in Hongarije en is hij lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW).

Hij is al vele jaren actief op veel verschillende vlakken. Zo heeft hij meer dan twintig promovendi begeleid, was hij hoofdredacteur van het tijdschrift *Indagationes Mathematicae*, voorzitter van de Akade-

mie Raad voor de Wiskunde van de KNAW, lid van het hoofdbestuur van de KNAW, directeur van het Thomas Stieltjes Instituut, voorzitter van de visitatiecommissie voor de accreditatie van het universitaire wiskunde-onderwijs en is hij zes keer uitgenodigd om plaats te nemen in de organisatie van prestigieuze wetenschappelijke bijeenkomsten in Oberwolfach.

De toekomst van de wiskunde was het thema van het symposium dat op 29 augustus ter ere van zijn afscheid werd georganiseerd.

Bron: www.nieuws.leidenuniv.nl

Gouden medaille voor Van der Weijden

Het kan maar weinig mensen ontgaan zijn dat de gouden medaille voor de tien kilometer open water zwemmen tijdens de Olympische Spelen in Peking van afgelopen zomer is gegaan naar de Nederlander Maarten van der Weijden. Heel indrukwekkend is het verhaal van de boomlange man, bij wie in 2001 Acute Lymfatische Leukemie werd geconstateerd. Na zijn herstel, waar vier chemokuren en een stamceltransplantatie aan vooraf gingen, legde hij zich volledig toe op het zwemmen.

Wat veel minder mensen weten is dat Maarten van der Weijden een bachelor wiskunde op zak heeft. In 2005 haalde hij zijn diploma aan de Universiteit Utrecht.

Bron: www.maartenvanderweijden.com

Prijs voor Wackers

Op 30 juni is tijdens het vijfde *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* (ECCOMAS 2008) de prijs voor beste Europese proefschrift van 2007 op het gebied van de computational science en engineering uitgereikt aan Jeroen Wackers.

Jeroen Wackers promoveerde in november 2007 cum laude aan de Technische Universiteit Delft. Hij deed zijn promotieonderzoek bij het CWI onder begeleiding van ondergetekende. De titel van zijn proefschrift is *Surface Capturing and Multigrid for Steady Free-Surface Water Flows* en zijn onderzoek was volgens de commissie zeer innovatief en hoogstaand, zowel vanuit natuurkundig als wiskundig opzicht.

De prijs die Wackers in ontvangst mocht nemen bestond uit een certificaat en tweeduizend euro en hij werd gevraagd een lezing te geven op het congres.

Barry Koren



Jeroen Wackers krijgt zijn prijs uitgereikt

Foto: ECCOMAS

Ferdinand Verhulst

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

F.Verhulst@uu.nl

De toekomst van de wiskunde

Ambities en mogelijkheden

Op 29 augustus 2008 werd, in het kader van het bereiken van het emeritaat van Rob Tijdeman, een ochtend gewijd aan de Toekomst van de Wiskunde. Dat onderwerp trok enkele honderden wiskundigen, afkomstig uit maatschappelijk nogal uiteenlopende delen van het vakgebied. Arjen Doelman, voorzitter van de Strategiecommissie Wiskunde zette het Masterplan Toekomst Wiskunde uiteen, dat in opdracht van het ministerie van OC&W is opgesteld door de Strategiecommissie. Ferdinand Verhulst doet verslag.

De bijeenkomst werd soepel, zij het wat breedsprakig voorgezeten door Harald Tepper (Nationale DenkTank). Er waren voordrachten van Joop Sistermans (Adviesraad Wetenschaps- en Technologiebeleid), Rinooy Kan (SER) (meer anecdotisch) en een amusante presentatie van de wiskundemeisjes Jeanine Daems en Ionica Smeets. Het kernverhaal werd echter gehouden door Arjen Doelman (voorzitter Strategiecommissie Wiskunde). Dit was gebaseerd op het Masterplan Toekomst Wiskunde dat in opdracht van het ministerie van OC&W is opgesteld door de Strategiecommissie.

Nieuwe dimensies, ruimer bereik

Er is de afgelopen decennia veel over de toekomst van de wiskunde geschreven, soms lokaal, soms nationaal. Veel invloed heeft echter het rapport *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* gehad dat in 2002 onder leiding van Rien Kaashoek en Henk van de Vorst werd opgesteld. De aanbevelingen van dit rapport waren ambitieus: formeel onderzoekclusters, creëer vele, nieuwe vaste posities en ver-

groot het NWO-wiskundeonderzoeksbudget. Dat leidde de afgelopen vijf jaren tot de formatie van drie clusters:

- DIAMANT (discrete, interactive & algorithmic mathematics, algebra & number theory)
- GQT (geometry and quantum theory)
- NDNS (nonlinear dynamics of natural systems)

Er is plaats voor een vierde cluster die de stochastiek bevat. De totale investering in de clusters bedroeg 10 miljoen Euro.

Verder zijn er in deze periode 24 nieuwe vaste aanstellingen tot stand gekomen, echter zonder dat het totale aantal vaste wiskundeposities is toegenomen. Er waren in 1980 circa 450 universitaire wiskunde stafleden, waarvan bijna 140 hoogleraren. In 2005 waren dat circa 280 stafleden, waarvan ongeveer 80 hoogleraren. Indien je bovendien bedenkt dat in de 'grote' industrie de onderzoeksgroepen nog drastischer ingekort zijn, dan kun je wel van een aardverschuiving op het gebied van de wiskundebeoefening spreken.

Het is interessant om dat met de situatie in

landen als Duitsland, Frankrijk of de VS te vergelijken. Ook daar wordt natuurlijk geklaagd, maar per miljoen inwoners heeft Frankrijk 54 wiskundeonderzoekers, Duitsland 41 en Nederland 18. Elke Amerikaan besteedt per jaar 57 Eurocenten aan wiskunde onderzoek, elke Duitser 44 Eurocenten, elke Nederlander 19 Eurocenten (een nieuw spreekwoord: voor twee dubbeltjes op de eerste rij willen zitten?). Robbert Dijkgraaf zegt daar over in zijn inaugurele rede als president van de KNAW:

“Nederlandse onderzoekers zijn wat impact betreft nummer drie in de wereld. Nergens werken, relatief gesproken, zó weinig onderzoekers, zó hard, met zóveel effect en met zó weinig middelen. Die kwaliteit is grotendeels te danken aan investeringen uit het verleden. De huidige inspanningen behoren tot de laagste in Europa en nemen ook nog verder af.”

Verder is in de periode 2002–2008 het NWO-budget voor de wiskunde nauwelijks vergroot.

Aanbevelingen

De Strategiecommissie die in 2008 haar rapport heeft uitgebracht, wil voortgaan op de weg die in 2002 door 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' is ingeslagen. We hebben goede uitgangsposities. De Nederlandse wiskunde is relevant en vitaal en speelt een sleutelrol in de (inter)nationale kenniseconomie.

Goed nieuws is dat de eerstejaars-instroom voor wiskunde zich lijkt te herstellen. Onderwijs en onderzoek krijgt bij nationale visitaties goede tot uitstekende beoordelingen.

De commissie beveelt allereerst *concentratie* van vakgebieden aan in de bestaande drie clusters met als vierde de stochastiek-cluster. Deze clusters moeten samen de hele wiskunde overdekken plus de interdisciplinaire contacten.

De commissie vindt het vervolgens essentieel dat er *dynamiek* is en blijft. De grenzen van de clusters en de deelname moeten niet bevroren zijn, er moet voortdurend herschikking mogelijk zijn. De clusters hebben langetermijninvesteringen nodig voor het aantrekken van jonge, getalenteerde wiskundigen, post-docs en vaste posities. Een en ander brengt met zich mee dat de clusters regelmatig serieus geëvalueerd dienen te worden.

Dan beveelt de commissie nog een aantal acties aan. Ik noem:

- Verbind de eerstegraads lesbevoegdheid aan de bachelor met educatieve minor.
- Verbeter de interactie tussen universiteiten, vwo en lerarenopleidingen (dit heeft onder andere te maken met de tegenstellingen tussen wiskundigen over vwo-didactische zaken; die tegenstellingen moeten inderdaad worden overwonnen).
- versterk regionale en nationale samenwerking in het wetenschappelijk onderwijs.
- Initieer bètabrede samenwerking in de Computational Science.
- Verhoog de participatie van vrouwen in de wiskunde (hoe hoger de positie, hoe lager de vrouwenparticipatie, bijvoorbeeld van de hoogleraren 4.4 %, van de promovendi 16.2 %).
- Richt het transferpunt Wiskunde en Innovatie op.
- Organiseer de Nederlandse wiskunde in WisNed.

Nu, over die acties is het laatste woord nog niet gesproken.

De reorganisatie van de wiskundebeoefening is al tientallen jaren bezig en de cynici onder ons zullen waarschijnlijk hun schouders ophalen. Zij hebben ongelijk. De Nederlandse wiskunde heeft nog een goede uitgangspositie, maar bevindt zich aan de rand van een steile helling. Vergeleken met de mogelijkheden en investeringen in de andere Westerse landen houden we het midden tussen een derdewereldland en het Westen. Nu is het moment om met élan het tij te keren. De rapporten 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik' uit 2002 en de nieuwe strategienota bieden daartoe een realiseerbaar perspectief. ◀



Foto: Christoph Achenbach © iStockphoto

Martin Raussen

Aalborg Universitet
Postbox 159
9100 Aalborg
Denemarken
raussen@math.auc.dk

Christian Skau

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
7491 Trondheim
Noorwegen
csk@math.ntnu.no

Interview John G. Thompson en Jacques Tits

Wiskunde ontwikkelt zich met een natuurlijke snelheid, en dat is snel

Op 20 mei 2008 is voor de zesde keer de Abelprijs toegekend aan John G. Thompson en Jacques Tits "voor hun buitengewone bijdragen aan de algebra en in het bijzonder voor de wijze waarop zij de hedendaagse groepentheorie hebben vormgegeven". De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering als wiskundige tegenhanger van de Zweedse Nobelprijs. Elk jaar zal een commissie van vijf Noorse wiskundigen een kandidaat aanwijzen. Aan de prijs is een bedrag van zes miljoen kronen (760.000 euro) verbonden. Onderstaand interview met John G. Thompson en Jacques Tits is afgenomen op 19 mei.

Wij willen u namens de Noorse, Deense en Europese Wiskundige Genootschappen feliciteren met uw Abelprijs. Als eerste zouden wij willen weten wanneer u voor het eerst belangstelling kreeg voor wiskunde. Waren er wiskundige resultaten of stellingen die in het bijzonder indruk op u gemaakt hebben tijdens uw jeugd? Heeft u zelf in die tijd wiskundige resultaten behaald die u zich nog kunt herinneren? Tits: "Ik heb de basis van de rekenkunde erg vroeg geleerd; ik kon als klein kind al tellen, ik denk voor mijn vierde. Op mijn dertiende las ik wiskundeboeken uit de kast van mijn vader en kort daarna begon ik bijles te geven aan jongeren die vijf jaar ouder waren dan ik en het toelatingsexamen voor de École Polytechnique in Brussel voorbereid-

den. Dat is mijn eerste herinnering. In die tijd was ik geïnteresseerd in analyse, maar later werd ik meetkundige. Wat mijn werk in die tijd betreft, ik kan zeker geen grote ontdekkingen noemen, maar ik denk dat sommige resultaten die ik toen behaald heb niet zonder belang zijn.

Ik begon mijn wiskundeonderzoek met het bestuderen van de strikt drievoudig transitieve groepen; dit was zo ongeveer het onderwerp dat mijn professor (Paul Libois) mij gegeven had. Het vraagstuk was als volgt: we kenden de axiomatische projectieve meetkunde in dimensie groter dan een. Voor het eendimensionale geval had nog niemand een axiomatische definitie. Dit geval komt overeen met $PSL(2)$. Mijn promotor gaf mij de opdracht om axioma's te formuleren voor deze groepen. Het idee was om als eerste axioma drievoudige transitiviteit te nemen. Ik begon dus met het volgende soort probleem: axioma's voor de projectieve meetkunde geven gebaseerd op drievoudige transitiviteit. Daarna ging ik natuurlijk ook viervoudige en vijfvoudige transitiviteit bestuderen. Dit is hoe ik alle Mathieugroepen herontdekt heb, behalve, vreemd genoeg, de grootste, de vijfvoudig transitieve. Die moest ik in de literatuur vinden!"

U kende de Mathieu-groepen dus nog niet toen u dit werk deed? Tits: "Nee, die kende ik nog niet."

Hoe oud was u toen? Tits: "Een jaar of 18 ge-

loof ik. Ik vond in feite eerst alle strikt viervoudig transitieve groepen. Camille Jordan kende deze al. Maar ik kende toen zijn werk nog niet. Dat heb ik herontdekt."

U zult veel jonger geweest zijn dan uw medestudenten in die tijd. Was het een probleem om u aan te passen aan een omgeving waarin u verreweg de jongste was? Tits: "Ik ben erg dankbaar voor mijn medestudenten en ook voor mijn familie. Want ik was wat je soms een wonderkind noemt. Ik was veel sneller dan de anderen. Maar niemand merkte dat, ze deden er niets mee. Mijn vader was een beetje bang dat ik te snel zou gaan. Mijn moeder wist dat dit bijzonder was, maar ze heeft er nooit over opgeschept. Een buurvrouw heeft ooit tegen mijn moeder gezegd dat als zij zo'n zoon zou hebben, ze rond zou gaan om op te scheppen. Mijn moeder vond dat onzin. Ik ben niet op een voetstuk geplaatst."

Hardy zei eens dat wiskunde een spel voor jonge mannen is. Bent u daar mee eens? Tits: "Ik denk dat dit tot op zekere mate waar is. Maar er zijn mensen die zeer moeilijke dingen doen op latere leeftijd. Chevalley deed zijn belangrijkste werk na zijn veertigste en mogelijk zelfs nog later. Het is geen absolute regel. Mensen vinden het leuk dit soort regels te stellen. Ik vind ze niet echt leuk."

Thompson: "Het is wel waar dat er geen wonderkinderen zijn in de politiek. Maar in schaken, muziek en wiskunde is er ruimte voor jeugdige genialiteit om zich te manifes-

teren. Dit is duidelijk zichtbaar bij muziek en schaken en in zekere mate ook bij wiskunde. Dit kan de verkeerde indruk wekken.

Wat de opmerking van Hardy betreft, ik weet niet hoe hij over zichzelf dacht toen hij hem maakte. Het kan een manier zijn geweest om te zeggen: 'Ik stap er nu uit, ik heb de leeftijd bereikt waarop ik niet verder wil.' Ik weet niet wat de sociologen en psychologen hiervan zeggen; dat laat ik aan hen over. Ik zie het niet als een absolute regel. Gezien onze leeftijd zijn Tits en ik zeker in geen positie er iets over te zeggen."

John von Neuman zei, wat overdrijvend, dat wat je in de wiskunde boven je dertigste doet niet de moeite waard is, tenminste vergeleken met wat je voor je dertigste gedaan hebt. Maar toen hij zelf de dertig passeerde schoof hij deze limiet op. Thompson: "Maar hij was een wonderkind." Tits: "Wij kennen allemaal zeer jonge en slimme wiskundigen. Waar het om gaat is dat je om diepe wiskundige resultaten te behalen niet noodzakelijk alle technieken nodig hebt. Ze kunnen diepe resultaten vinden zonder al die technieken ter beschikking te hebben."

Hoe zit het met uw vroege wiskundige herinneringen, Professor Thompson?

Thompson: "Ik heb geen bijzonder sterke herinneringen. Ik had een drie jaar oudere broer die heel goed in wiskunde was. Het kwam, denk ik, voor een groot deel door hem dat ik mijn interesseerde in zeer elementaire dingen. Hij was natuurlijk verder dan ik."

Wij speelden ook kaart in de familie. Ik hield van de combinatoriek in het kaartspel. In die tijd, ik was tien of twaalf, schaakte ik ook. Ik ben er nooit goed in geworden, maar ik vond het leuk. Toen mijn broer naar de universiteit ging leerde hij calculus en probeerde hij dat mij uit te leggen. Ik vond het compleet onbegrijpelijk, maar het maakte mij toch nieuwsgierig. Ik haalde zelf boeken uit de bibliotheek. Maar ik kwam zonder hem niet veel verder."

Vroege groepen theorie

U heeft de Abelprijs van dit jaar gekregen voor uw resultaten in de groepentheorie. Kunnen we beginnen met een korte historische inleiding in het onderwerp? Wij zouden u willen vragen om ons te vertellen hoe het begrip groep ontstaan is en hoe het in de 19e eeuw ontwikkeld is. Hebben Noorse wiskundigen er niet een vrij belangrijke rol in gespeeld? Tits: "Wel, als je het over groepen hebt is het natuurlijk om aan Galois te denken. Ik denk dat Abel geen groepen gebruikte in zijn theorie – weet jij dat?" Thompson: "Minstens impli-



Van links naar rechts: Christian Skau, Martin Raussen, Jacques Tits, John G. Thompson

ciet. Ik denk dat de vijfdegraadsvergelijking er mee te maken heeft. Het was een grote verrassing. Ik heb zelf een zeer bekend artikel van Lagrange bestudeerd, ik denk van rond 1770, vóór de Franse revolutie. Hij bestudeerde vergelijkingen en zei ook iets over vijfdegraadsvergelijkingen. Hij kwam zeker in de buurt van het begrip groep. Ik weet niet hoe het zit met de formule-definitie. Ik denk dat we dat aan Galois kunnen toekennen. Hij was in ieder geval degene die het concept van een normale ondergroep bedacht. Ik ben vrij zeker dat dat een idee van Galois was. Hij bedacht normale ondergroepen, wat echt fundamenteel is." Tits: "Maar ik denk dat de stelling over de vijfdegraadsvergelijking eerst door Abel ontdekt is. Galois had natuurlijk een techniek die bij veel verschillende soorten vergelijkingen hielp, en die Abel niet had. Galois was voornamelijk een algebraïcus, terwijl Abel duidelijk ook een analyticus was. Wanneer we het over abelse functies hebben: die ideeën komen van Abel."

Kunt u uitleggen waarom simpele groepen zo belangrijk zijn voor de classificatie van eindige groepen in het algemeen? Dat besef kwam, denken wij, met Camille Jordan en zijn ontbindingsstelling. Klopt dat? Tits: "Ziet u, ik denk dat een van de dromen van deze mensen altijd is geweest om alle groepen te beschrijven. En als je alle groepen wilt beschrijven, dan ontbind je ze. De factoren zijn dan simpel. Ik denk dat dit een van de doelen was van wat zij deden. Maar zij gingen natuurlijk niet zo ver. Het is pas kort geleden dat men

alle eindige simpele groepen kon vinden, een oplossing voor het probleem waar Thompson een grote bijdrage aan geleverd heeft."

Hoe zit het met Sylow en Lie aan het begin van de groepentheorie? Thompson: "Dat zijn twee andere Noren." Tits: "Lie heeft een belangrijke rol gespeeld in mijn carrière. In feite concentreerde het hoofdonderwerp van mijn onderzoek zich zowat vanaf het begin op de exceptionele Liegroepen. Dus het werk van Lie is fundamenteel voor wat ik gedaan heb."

Kunt u iets zeggen over het werk van Frobenius en Burnside? Thompson: "Zeker. Één van de dingen die Frobenius in de tweede helft van de 19e eeuw deed is een sterke basis leveren voor de karaktertheorie van eindige groepen. Hij bewees de orthogonaliteitsrelaties en sprak over reciprociteit. Burnside kwam er op dit punt bij. En uiteindelijk bewees hij zijn $p^a q^b$ -stelling, dat groepen van deze ordes oplosbaar zijn, met gebruik van representatietheorie. Volgens mij was dat een mooie stap vooruit. Het toonde de kracht van het stuk representatietheorie dat Frobenius al ontwikkeld had. Frobenius bestudeerde ook de representatietheorie van de symmetrische groepen en van de k -transitieve permutatiegroepen. Ik weet niet in hoeverre hij over de Mathieugroepen nagedacht heeft. Maar dit waren nogal vreemde objecten die al vóór de representatietheorie ontdekt waren. Een tijd lang was er vrij veel belangstelling voor k -transitieve permutatiegroepen: dit vereiste nogal ingewikkelde combinatorische argumenten. Burnside en Frobenius zaten er

Over John Griggs Thompson

John Griggs Thompson werd geboren op 13 oktober 1932 te Ottawa (Kansas, U.S.A.). Na een jaar theologie gestudeerd te hebben, begon hij met de wiskundestudie. Hij behaalde zijn B.A. aan de Yale University in 1955 en zijn doctoraat aan de University of Chicago in 1959. Vervolgens vervulde hij professoraten aan de universiteiten van Harvard (1961–1962), Chicago (1962–1968), Cambridge (Engeland) (1970–1993), Florida (1993–heden). In zijn dissertatie bewees hij het (oude) vermoeden van Frobenius en Burnside dat de Frobeniuskern van een eindige Frobeniusgroep nilpotent is. Daartoe bedacht hij nieuwe methoden die elders in de groepentheorie nog steeds gebruikt worden. Ook in het bewijs van de stelling ‘Elke groep van oneven orde is oplosbaar’ (1963, 253 blz. lang; gezamenlijk werk met Feit) gebeurde iets dergelijks. Verder vindt hij de zogeheten locale analyse op eindige groepen uit, en wendt die onder meer aan om die enkelvoudige eindige groepen te bepalen wier echte ondergroepen alle oplosbaar zijn (410 blz., 1968–1974). Voor al dit werk zijn hem vele prijzen ten deel gevallen, zoals onder meer de Cole Prize in Algebra (1965), de Fields Medal (1970), en mede ook voor later werk, o.a. de Wolff Prize (1992), de Poincaré Prize (1992), de National Medal of Science (VS) (2000), en dan nu de Abel Prize (2008); bovendien is hij in het bezit van tenminste vier eredoctoraten. Zijn latere werk verwijst naar essentiële bijdragen aangaande zelfduale even codes, het niet-bestaan van het eindige projectieve vlak van orde 10, inverse Galoistheorie, eindige enkelvoudige groepen zoals die van Ree, Suzuki en het Monster van Fischer-Griess, en zijn ‘eigen’ sporadische enkelvoudige groep. Er zijn zeker een stuk of tien ver reikende, fundamentele stellingen naar Thompson vernoemd die alle voortdurend bijdragen tot nieuwe ontwikkelingen in de groepentheorie maar ook in disciplines daarbuiten zoals bijvoorbeeld de j -functie en de ‘moonshine’ rond Fischer’s Monster groep. (Rob van der Waall)

toen midden in.” Tits: “Als jonge wiskundige wist ik weinig van de literatuur. Ik heb bijvoorbeeld veel bekende resultaten over k -transitieve groepen opnieuw ontdekt; in het

bijzonder over de strikt viervoudige en vijf-voudige transitieve groepen. Gelukkig deed ik dit met andere methoden dan degenen die eerder gebruikt waren. Dus mijn resultaten waren in zekere zin nieuw.”

Was het een teleurstelling toen u leerde dat deze resultaten al eerder ontdekt waren? Tits: “Dat viel wel mee.”

Burnside was ook interessant omdat hij problemen stelde en vermoedens uitsprak waar u en anderen later aan gewerkt hebben, niet-waar? Thompson: “Inderdaad, ik ben zo ongeveer begonnen aan het vermoeden van Frobenius, dat nog open was. Ik denk dat Reinhold Baer of misschien Marshall Hall mij over het vermoeden verteld had: dat de Frobenius kern van een Frobenius groep nilpotent was. Ik hield om de volgende reden van dit vermoeden: als je de groep van oriëntatie-behoudende isometrieën van het Euclidische vlak neemt, dan is het een meetkundig feit dat dit de translaties en de rotaties zijn. Ik hoop dat kinderen dat nog steeds leren. Het is een vreemd fenomeen. En de translaties vormen een normale ondergroep. Dat is iets waarvan de oorsprong werkelijk in de Oudheid ligt.

Frobenius wist dit ongetwijfeld. Dus toen hij zijn stelling over het bestaan van een normaal complement bewees was dat een link naar hele oude meetkunde. Dat was één van de dingen die het aantrekkelijk maakten. En daarna de poging om de stelling van Sylow en wat representatietheorie, wat dan ook, te gebruiken om het probleem aan te pakken. Dat is hoe ik het eerst geboeid werd door de zuivere wiskunde.”

Mathieu ontdekte de eerste sporadische simpele groepen, de Mathieugroepen, in jaren '60 en '70 van de 19e eeuw. Waarom denkt u dat wij honderd jaar hebben moeten wachten voordat de volgende sporadische groep gevonden werd door Janko, na uw artikel met Feit? Waarom heeft dit zo lang geduurd?

Thompson: “Een deel van het antwoord is de loop van de geschiedenis. De aandacht van de wiskundige gemeenschap was op andere onderwerpen gericht. Ik zou niet zeggen dat groepentheorie, en zeker niet de theorie van eindige groepen, in de 19e eeuw in het middelpunt van wiskundige ontwikkelingen stond. Één ding is zeker, Riemann kwam opdagen, topologie won invloed en oefende het ook uit, en zoals Jacques opmerkte, analyse was erg moeilijk en trok zeer begaafde wiskundigen aan. Het is waar, zoals u eerder opmerkte, dat Frobenius er was, en Burnside; dus de groepentheorie was niet volkomen op een zijspoor beland. Maar er gebeurde weinig. Nu is er natuurlijk erg veel aan de

gang, zowel binnen de zuivere als binnen de toegepaste wiskunde. Er zijn veel dingen die mensen kunnen boeien. Waarom er dit gat was tussen de groepen die Mathieu vond en de nogal snelle ontwikkeling van de simpele groepen, inclusief de sporadische groepen, in de tweede helft van de 20e eeuw, dat moeten de historici maar verder uitzoeken. Maar ik vind het niet echt verbazend. Weet u, de wiskunde is een zeer uitgebreid vakgebied.”

De Feit-Thompsonstelling

De bekende Feit-Thompsonstelling — eindige groepen van oneven orde zijn oplosbaar — die u begin jaren '60 bewees; dat was oorspronkelijk een vermoeden van Burnside, niet waar? Thompson: “Burnside had er mee te maken, ja. Hij had zelfs naar een aantal bijzondere gehele getallen gekeken en bewezen dat groepen van die orde oplosbaar waren. Hij had dus een begin gemaakt.”

Toen u en Feit aan dit project begonnen, waren er bijzondere resultaten voor uw aanval op het Burnside vermoeden die u optimistisch stelden over de uitkomst? Thompson: “Zeker. Een geweldig resultaat van Michio Suzuki, de zogenaamde CA-stelling. Volkomen fundamenteel! Suzuki werd volwassen aan het einde van de tweede wereldoorlog. Hij is in Japan opgegroeid. Gelukkig kwam hij naar de University of Illinois. Ik denk dat het in 1952 was dat hij zijn artikel over CA-groepen van oneven orde publiceerde en bewees dat ze oplosbaar waren door karaktertheorie te gebruiken. Het is geen erg lang artikel. Maar het is vreselijk ingenieus, lijkt mij. Ik vind het nog steeds een erg mooi artikel. Ik vroeg hem later hoe hij erop gekomen was, en toen zei hij dat hij er twee jaar lang over nagedacht had, en hard aan gewerkt had. Toen lukte het uiteindelijk. Dat was echt een opening voor Feit en mij. Die opening werd breder en breder.” Tits: “Kunt u mij vertellen wat een CA-groep is?” Thompson: “Een CA-groep is een groep waarin de centralisator van elk niet-triviaal element abels is. Hier zie je Abel weer opduiken: abelse centralisator, dat is waar de A voor staat.”

Het bewijs dat uiteindelijk door u en Feit opgeschreven is was 255 pagina's lang en het vulde bij publicatie een heel nummer van de Pacific Journal. Thompson: “Ja, het was erg lang.”

Het is zo'n lang bewijs en er moesten veel stukken met elkaar verbonden worden. Was u zenuwachtig dat er een gat in het bewijs zou zitten? Thompson: “Ik denk van wel, ja. Het bewijs openbaarde zich in wat ons een vrij natuurlijke manier leek; een deel groepen-

theorie, een deel representatietheorie en een grappig stukje getaltheorie aan het einde. Het leek allemaal goed in elkaar te passen. Maar we hadden een fout kunnen maken, zeker. Sindsdien heeft een aantal mensen er naar gekeken. Ik heb er geen slapeloze nachten van.”

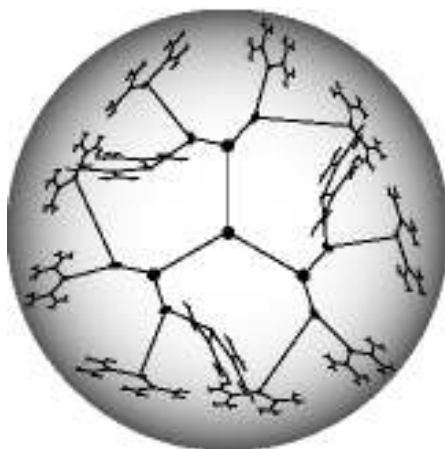
Het lijkt of er toen, zeker in de theorie van eindige groepen, weinig aanknopingspunten zijn met andere wiskundegebieden zoals de analyse. Hierdoor moest u uw hulpmiddelen min of meer vanuit het niets opbouwen, met ingenieuze argumenten. Is dat een van de redenen waarom de bewijzen zo lang zijn? Thompson: “Het zou kunnen. Het kan ook zijn dat de bewijzen korter kunnen. Ik weet niet of dat zo zal zijn. Ik denk in elk geval niet dat de bewijzen tijdens mijn leven significant korter zullen worden. Het zijn verfijnde dingen, die bestudeerd moeten worden.” Tits: “Ziet u, er zijn resultaten die intrinsiek moeilijk zijn. Ik zou zeggen dat dit het geval is met het Feit-Thompsonresultaat. Ik geloof zelf niet dat het bewijs naar bijna niets teruggebracht zal worden.” Thompson: “Ik weet niet of het wel of niet zal gebeuren. Ik denk niet dat de wiskunde al uitgeput is.” Tits: “Het kan natuurlijk gebeuren dat men deze zeer mooie bewijzen, zoals dat van John, kan vermijden door zware machinerie te gebruiken zoals functionaal-analyse. Dan krijgt men ineens een grote machine die het resultaat verplettert. Dat is niet volstrekt onmogelijk. Maar de vraag is of het de moeite waard is.”

De theorie van gebouwen

Professor Tits, u noemde Liegroepen al als beginpunt. Simpele Lie groepen waren al voor een groot deel geclassificeerd eind 19e eeuw, eerst door Killing, en daarna door Elie Cartan, wat geleid heeft tot een serie matrixgroepen en de vijf exceptionele simpele Lie groepen. Hiervoor moest de theorie van Lie algebra's ontwikkeld worden. Toen u begon te werken aan lineaire algebraïsche groepen waren er weinig hulpmiddelen beschikbaar. Chevalley had baanbrekend werk gedaan, maar het beeld werd pas duidelijk in het kader van gebouwen: meetkundige objecten geassocieerd met groepen. Kunt u ons uitleggen hoe het idee van gebouwen, bestaande uit appartementen, kamers, al die suggestieve woorden, bedacht werd, wat het bereikt heeft en waarom het zo productief gebleken is? Tits: “Ten eerste moet ik zeggen dat de terminologie zoals gebouwen, appartementen en zo niet van mij komt. Ik ontdekte deze dingen, maar Bourbaki gaf er namen aan. Zij schreven over mijn werk en vonden mijn terminologie een war-

boel. Ze ordenden het beter en zo zijn de begrippen zoals appartementen enzo ontstaan.

Ik bestudeerde deze objecten omdat ik de exceptionele Liegroepen meetkundig wilde begrijpen. Ik ben via de projectieve meetkunde in de wiskunde terecht gekomen. In de projectieve meetkunde heb je punten, lijnen, enzovoorts. Toen ik exceptionele groepen ging bestuderen zocht ik gelijksoortige objecten. Ik ontdekte, bijvoorbeeld – of liever, iemand anders ontdekte – dat de groep E_6 de automorfismengroep is van het projectieve vlak over de octonionen. En wat later vond ik een automatische manier om dergelijke resultaten te bewijzen, door vanuit de groep het projectieve vlak opnieuw op te bouwen. Ik kon deze procedure gebruiken om meetkundige interpretaties te geven voor de andere exceptionele groepen, bijvoorbeeld, E_7 en E_8 . Dat was eigenlijk mijn beginpunt. Daarna probeerde ik deze meetkundige objecten abstract te construeren. In dit kader gebruikte ik termen zoals skelet, wat later appartement zou worden. Veel opgaven uit een van de boeken van Bourbaki zijn in feite gebaseerd op mijn vroegere werk.”



De Bruhat-Tits boom van $PGL(2, \mathbb{Q}_2)$, zie: *Notices of the AMS*, vol. 52, nr. 7, pp. 720–727

Nog een vraag over gebouwen: Dit begrip is erg productief gebleken en heeft verbanden met veel gebeiden in de wiskunde. Had u dat indertijd verwacht? Tits: “Voor mij waren het echt de meetkundige interpretaties van deze mysterieuze groepen, de exceptionele groepen, die mij inspireerden. Ander mensen hebben daarna deze gebouwen voor hun eigen werk gebruikt. Er zijn bijvoorbeeld analytici die ze gebruiken. Maar in het begin wist ik niets af van deze toepassingen.”

U vroeg een paar minuten geleden over CA-groepen. Misschien kunnen wij u vragen over BN-paren: wat zijn ze en waar zijn ze van toepassing bij het construeren van gebouwen?

Tits: “Ik herhaal dat ik een axiomatische aanpak had van deze groepen. De BN-paren waren een axiomatische manier om een aantal algemene stellingen over simpele algebraïsche groepen te bewijzen. Een BN-paar is een paar bestaande uit groepen B en N met een aantal eenvoudige eigenschappen. Ik merkte dat deze eigenschappen voldoende waren om niet zozeer diepe maar verstrekkende resultaten te bewijzen; bijvoorbeeld, om de simpelheid te bewijzen. Als je een groep met een BN-paar hebt, dan krijg er gratis simpele ondergroepen bij. De notie van BN-groep ontstaat op een natuurlijke manier bij het bestuderen van gespleten simpele Liegroepen. Dergelijke groepen hebben een gegeven conjugatieklasse van ondergroepen, namelijk de Borel ondergroepen. Dit zijn de B 's van een gegeven klas BN-paren.”

De classificatie van eindige simpele groepen

Wij willen u vragen, professor Thompson, naar het classificatieproject, de poging om alle eindige simpele groepen te classificeren. Ook hier heeft het artikel door u en Feit uit 1962 een aantal technieken ontwikkeld. Is het eerlijk om te zeggen dat het project zonder het artikel niet te doen of zelf niet realistisch zou zijn geweest? Thompson: “Dat kan ik niet zeggen.” Tits: “Ik zou ja zeggen.” Thompson: “Misschien, maar de geschiedenis heeft vertakkingen, dus we weten niet wat had kunnen gebeuren.”

De classificatiestelling voor eindige simpele groepen was waarschijnlijk de meest monumentale samenwerking in de wiskunde, en het heeft erg lang geduurd. Veel mensen zijn erbij betrokken geweest, het uiteindelijke bewijs was oorspronkelijk tienduizend pagina's lang. Een groep mensen, oorspronkelijk geleid door Gorenstein, werkt nog steeds aan het meer toegankelijk maken van het bewijs.

Vijf jaar geleden hebben wij de ontvanger van de eerste Abelprijs, Jean-Pierre Serre, geïnterviewd. Toen vertelde hij ons dat er een gat in het bewijs gezeten had, dat zo ongeveer ten tijde van het interview gevuld zou worden. Daarvóór zou het voortijdig zijn geweest te zeggen dat men een bewijs had. Het 'quasi-thin'-geval was nog over. Hoe is de situatie nu? Kan men erop vertrouwen dat de stelling eindelijk bewezen is? Thompson: “In elk geval is het 'quasi-thin'-geval nu gepubliceerd. Het is zelf al een vrij massief werk, door Michael Aschbacher en Stephen Smith; vrij lang, meer dan duizend pagina's. Een aantal sporadische simpele groepen komen erin voor. Zij karakteriseren ze omdat deze voor de 'quasi-thin' groepen nodig hebben. Ik vergeet

Over Jacques Tits

Jacques Tits werd geboren op 12 augustus 1930 te Ukkel in België. Hij studeerde aan de Université Libre de Bruxelles/Vrije Universiteit Brussel, promoveerde als twintigjarige over veralgemeniseringen van drievoudig transitieve groepen, werkte aan zijn Alma Mater tot 1962, in Bonn (Duitsland) tussen 1964 en 1973, en vanaf 1974 had hij de leerstoel voor groepentheorie aan het Collège de France. In het werk van Tits komt de visie van Felix Klein uit het Erlangenprogramma tot leven, dat “een meetkunde” hetzelfde is als “een transformatiegroep”. Vanuit de groepentheorie en incidentiemeetkunde kwam Tits tot de theorie van *gebouwen*, misschien wel zijn meest bekende bijdrage tot de wiskunde, alhoewel niet de enige. De transformatiegroep van een meetkunde leidt tot deze incidentiestructuur, waarvan Tits vervolgens een onafhankelijke puur groepentheoretische karakterisatie in termen van zgn. *BN*-paren gaf. Tits levenswerk omvat classificatiesresultaten voor gebouwen, en de constructie van families enkelvoudige groepen op basis van deze theorie.

De gebouwen van Tits, opgetrokken uit mooie keien, werden zelf de bouwsteen voor de theorie van p -adische algebraïsche groepen, en hebben ondertussen toepassingen in de theorie van bomen, moduli ruimten van vectorbundels en het meetkundige Langlands vermoeden, in de abstracte groepentheorie, arithmetische groepen, automorfe vormen, incidentiemeetkunde, dynamica van groepen, discrete Laplacianen, uniformisatietheorie voor algebraïsche krommen, Arakelov meetkunde, groepenschema's, p -adische snaartheorie, maar ook in de praktische constructie van optimale expanderende grafen.

welke voorkomen, maar de Rudvalisgroep zit er zeker tussen. Het is verschikkelijk gedetailleerd.

Het lijkt mij dat ze een gedegen stuk werk geleverd hebben. Of men deze dingen echt kan geloven is moeilijk te zeggen. Het is zo'n lang bewijs dat er een aantal basisfouten in kunnen zitten. Maar ik zie wel ongeveer de grote lijn. Ik kan het nu volgen. Ik begrijp ongeveer waarom er waarschijnlijk niet meer sporadische simpele groepen zijn. Maar er is niet echt een bevredigende conceptuele re-

den ervoor.

Het lijkt alsof de wereld zo in elkaar zit. Dus gaan we verder. Ik hoop dat mensen naar deze artikelen zullen kijken en zien wat de argumenten zijn en hoe die in elkaar passen. Geleidelijk zal dit massief stuk werk zijn plaats innemen tussen de aanvaarde canon van wiskundige stellingen.” Tits: “Er zijn twee soorten groepentheoretici. Sommige zijn als de ongelovige Thomas: zij geloven niet omdat zij niet alle details van het bewijs gezien hebben. Ik ben niet als zij, en ik geloof het uiteindelijk resultaat ook al weet ik er niets vanaf. De mensen die werken aan of gewerkt hebben aan de classificatiestelling kunnen natuurlijk ergens een klein detail vergeten zijn. Maar ik geloof niet dat die details erg belangrijk zijn. Ik ben vrij zeker dat het eindresultaat correct is.”

Mogen wij u vragen naar de groepen die naar u vernoemd zijn? U heeft een sporadische simpele groep die de Thompsongroep heet. Hoe is deze tevoorschijn gekomen? Hoe was u betrokken bij het vinden ervan? Thompson: “Dit is in feite een bijproduct van de Monstergroep. De zogenaamde Thompsongroep is in wezen de centralisator van een element van orde drie in het Monster. Conway en Norton en nog een aantal werkten – dit was voordat Griess het Monster construeerde – hard aan de interne structuur toen deze groep tevoorschijn kwam, samen met de Harada-Nortongroep en het Baby-Monster. We probeerden allemaal de karakters te vinden.

Het Monster zelf was te groot. Ik denk niet dat het met de hand gedaan kan worden. Livingstone vond de karaktertabel, de complexe irreducibele karakters van het Monster. Maar ik denk dat hij veel gebruik heeft gemaakt van een computer. En ik denk niet dat hij uitgesloten is. Dat is hoe het getal 196883 opkwam, de graad van de kleinste trouwe complexe representatie van de Monstergroep. Het is gewoon te groot om met de hand te doen. Maar we kunnen wel de kleinere ondergroepen doen.”

De Titsgroep is met de hand gevonden, niet waar? En waar gaat dat over? Tits: “Dat was echt een soort trivialiteit. Men verwacht dat er daar een groep is, behalve dat men een ondergroep van index twee moet nemen om hem simpel te maken. En dat is alles wat ik ervan afweet.”

Professor Tits, er is een verrassend verband tussen de Monstergroep, de grootste van de sporadische groepen, en elliptische functie theorie, of elliptische krommen via de j -functie. Zijn er verbanden met andere exceptionele groepen, bijvoorbeeld in de meetkun-

de? Tits: “Ik ben geen specialist wat betreft deze verbanden tussen de Monstergroep, bijvoorbeeld, en modulaire functies. Ik schaam mij om het toe te geven, maar ik weet hier niet echt wat van. Ik denk dat niet alleen de Monstergroep verband heeft met modulaire vormen, maar ook een aantal andere sporadische groepen. Maar het geval van het Monster is bijzonder bevredigend omdat de relaties in dat geval zeer eenvoudig zijn. Op een of andere manier geven kleinere groepen ingewikkeldere resultaten. In het geval van het Monster vallen de zaken mooi op hun plaats.”

Het inverse Galoisprobleem

Mag ik u vragen, Professor Thompson, over uw werk aan het inverse Galoisprobleem? Kunt u eerst uitleggen waar het probleem over gaat? En wat de huidige stand van zaken is? Thompson: “Het inverse Galoisprobleem komt waarschijnlijk al van Galois. Hij associeerde een welgedefinieerde eindige groep aan een vergelijking; in het bijzonder aan vergelijkingen in één onbekende met gehele coëfficiënten. Deze groep heet nu de Galoisgroep. Het legt vrij veel eigenschappen vast van de wortels, de nulpunten van de vergelijking. Als men eenmaal het begrip lichaam heeft, dan heeft het lichaam voortgebracht door de wortels van een vergelijking bepaalde automorfismen en deze automorfismen geven ons Galoisgroepen.

Het inverse probleem is: Gegeven een eindige groep, is er een vergelijking, een polynoom in een onbekende met gehele coëfficiënten, waarvan het de Galoisgroep is? Voorzover ik weet is het nog open of dit waar is of niet. Neem bijvoorbeeld een eindige simpele groep: komt hij op deze manier voor? Is er een vergelijking die erbij hoort? Als er een vergelijking was, dan zouden er oneindig veel zijn. Dus we zouden niet weten hoe een standaard kanonieke vergelijking bij de groep te kiezen. Zelfs in het geval van simpele groepen is het inverse Galoisprobleem niet opgelost. Voor de meest algemene eindige groepen laat ik het aan algebraïsch meetkundigen of wie nog meer goede ideeën heeft over of het probleem hanteerbaar is. Veel van ons hebben eraan gewerkt en hebben er mee gespeeld, maar ik denk dat wij aan de oppervlakte van het probleem gebleven zijn. Het Monster is bijvoorbeeld een Galoisgroep over de rationale getallen. Dat kun je niet over alle sporadische groepen zeggen. De reden dat het Monster een Galoisgroep over de rationale getallen is, komt uit de representatietheorie. Het wordt gewoon gegeven.”

Tits: “Dit is erg verrassend: je hebt dit groot

object, en de deskundigen kunnen je vertellen dat het een Galoisgroep is. Ik zou graag een vergelijking willen zien.”

Is er iets bekend over een vergelijking?

Thompson: “Het zou graad minstens 10^{20} moeten hebben. Ik vond het indrukwekkend, toen ik rondkeek in de literatuur over j -functies van vóór de computers, dat mensen zoals Fricke en anderen deze berekeningen konden doen. Als je kijkt naar de coëfficiënten van de j -functie, dan zie je dat deze al snel groeien naar honderden miljoenen. Deze zijn berekend in het boek van Fricke. Het doet echt plezier dat deze getallen er al voor de computers waren. Getallen rond de 123 miljoen, die allemaal met de hand gevonden moesten worden. En nog correct ook.” Tits: “Het is echt geweldig, wat ze gedaan hebben.”

Zijn er resultaten in deze oude artikelen van Fricke en anderen waar men niet van op de hoogte is? Thompson: “Nee, men heeft helemaal door gespit.” Tits: “Specialisten hebben deze artikelen bestudeerd.”

Het E_8 -verhaal

Kort geleden is er een andere samenwerking geweest, voor E_8 : een groep wiskundigen heeft de representaties van E_8 uitgewerkt. In feite hebben ze de complete karaktertabel van E_8 uitgewerkt. Het resultaat is vorige jaar in een aantal Amerikaanse kranten gepubliceerd met als kop ‘Een berekening zo groot als Manhattan’ of iets vergelijkbaars. Thompson: “Het was misschien een beetje verdraaid. Ik heb het artikel wel gezien.” Kunt u uitleggen waarom wij allen geïnteresseerd zouden moeten zijn in een dergelijk resultaat? Als groeptheoreticus, algemene wiskundige, of man van de straat? Thompson: “Het is op veel manieren interessant. Het kan zijn dat fysici contacten hebben bij de kranten. Fysici zijn als groep totaal onbevreesd. Elk wiskundig object dat zij kunnen gebruiken maken zij zich meteen eigen en zetten zij in een context waarin zij het kunnen gebruiken, wat goed is. In die zin is wiskunde een dienstmaagd

voor andere dingen. En de fysici zijn zeker geïnteresseerd in exceptionele Liegroepen. En E_8 komt echt bij hen voor. Het is daar iets belangrijks.”

Is er enige reden om te geloven dat een aantal van deze exceptionele groepen of sporadische groepen ons iets belangrijks vertellen – in de wiskunde of in de natuur? Thompson: “Ik ben geen fysicus. Maar ik weet dat fysici over dit soort dingen denken.” Tits: “Het is misschien naïef dit te zeggen, maar ik denk dat wiskundige structuren die zo mooi zijn als het Monster iets met de natuur te maken moeten hebben.”

Wiskundig werk

Zijn er bepaalde resultaten waar u het meest trots op bent? Thompson: “Een van de hoogtepunten van mijn wiskundig leven is natuurlijk mijn lange samenwerking met Walter Feit. Wij genoten ervan samen te zijn en genoten van het werk dat wij deden; en, natuurlijk, van de versmelting van ideeën. Ik voel mij bevoorrecht om dat contact gehad te hebben en trots dat ik meedeed.” Tits: “Ik heb een groot deel van mijn carrière een zeer productief contact gehad met François Bruhat en het was zeer aangenaam om met elkaar te werken. Het was echt samen werken, zoals jij het, neem ik aan, met Walter Feit deed.”

Was Armand Borel niet ook erg belangrijk voor uw werk? Tits: “Ja, ik heb ook veel samengewerkt met Borel. Maar in zekere zin was dat anders. Toen ik met Borel werkte had ik vaak de indruk dat wij beiden hetzelfde gevonden hadden. Wij voegden onze resultaten samen om het niet te dupliceren. Wij schreven onze artikelen voornamelijk over resultaten die wij elk afzonderlijk gevonden hadden. Terwijl het met Bruhat echt gezamenlijk werk was, complementair werk.”

Heeft een van u ooit de plotselinge gewaarwording meegemaakt zoals beschreven door Poincaré; ineens de oplossing zien voor een probleem waar je lang mee geworsteld hebt? Tits: “Ik denk dat dit in wiskundig onderzoek vrij vaak gebeurt; dat men ineens ontdekt dat iets werkt. Maar ik kan geen specifiek voorbeeld geven. Ik weet dat het mij overkomen is en dat het John zeker overkomen is. Het is zeker zo dat een aantal ideeën die men heeft inderdaad werken, maar het verdwijnt zowaar in een waas.” Thompson: “Ik denk dat mijn vrouw kan getuigen dat wanneer ik ’s morgens opsta ik meteen aan de slag wil gaan. Mijn naïeve gedachte is dat er dingen doorgaan terwijl ik slaap. En dan word je wakker en zeg je: ‘Laten we aan de slag gaan en het doen’. En dat is een geweldig gevoel.”

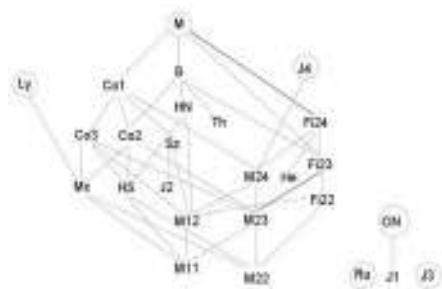


© Hergé/Moulinsart 2008

U hebt allebei in verschillende landen als hoogleraar gewerkt. Kunt u wat zeggen over de verschillende werkomgevingen in deze plaatsen en de mensen waar u mee gewerkt heeft en waar u het beste mee kon samenwerken? Tits: “Ik denk dat het land waar het beste met jonge mensen wordt samengewerkt Rusland is. De Fransen hebben natuurlijk een lange traditie en hebben zeer goede zeer jonge mensen. Maar ik denk dat de Russische wiskunde in zekere zin levendiger is dan de Franse. De Franse wiskunde is meteen al veel te precies. Ik zou zeggen dat dit de twee landen zijn waar de toekomst van de wiskunde het duidelijkst is. En tegenwoordig zijn de Verenigde Staten een soort middelpunt van de wiskunde geworden, omdat ze zoveel geld hebben. Omdat ze ...”

... de beste onderzoekers kunnen kopen? Tits: “Dat is een te negatieve manier om het te verwoorden. Natuurlijk gaan veel jonge mensen naar de VS omdat zij niet genoeg geld verdienen in hun eigen land.”

En er waren de rampzalige gebeurtenissen in Europa in de jaren '30, met het nazisme. Veel mensen zijn naar de VS gegaan. Hoe zit het met u, Professor Thompson? U was lang in Engeland. Hoe was die ervaring vergeleken met het werken aan een Amerikaanse universiteit? Thompson: “Nou, ik ben meer of min gewend mijn eigen gang te gaan, om mijn eigen rol te vervullen. Mensen vielen mij in geen enkel plaats veel lastig. Ik heb aangename herinneringen aan alle plaatsen die ik bezocht heb, voornamelijk in de VS. Maar ik heb ook een aantal andere landen bezocht, voor kortere perioden, zoals Rusland, Duitsland en Frankrijk. Wiskundig voel ik mij vrij op mijn gemak waar ik ook ben. Ik ga mijn eigen gang. Ik ben niet echt betrokken geweest bij besissingen in het voortgezet onderwijs. Wat dat betreft ben ik niet echt bevoegd om te oordelen over wat er internationaal gebeurt.”



Figuur 1 Diagram met sporadische eindige groepen en sporadische ondergroepen. ‘Th’ staat voor de Thompson groep.

Over de ontwikkeling van de wiskunde

U heeft geleefd in een tijd van snelle wiskundige ontwikkeling, in het bijzonder in uw eigen vakgebieden, waaronder uw eigen bijdragen. Een tijd terug zei Lennart Carleson, die twee jaar geleden de Abelprijs ontving, in een interview dat de 20e eeuw mogelijk het gouden tijdperk van de wiskunde was, en dat het moeilijk zou zijn zich een ontwikkeling voor te stellen die even snel zou gaan. Wat denkt u? Hebben wij al het gouden tijdperk van de wiskunde gehad, of zullen de ontwikkelingen nog sneller doorgaan? Tits: "Ik denk dat het op zijn natuurlijke snelheid door zal gaan, en dat is snel; sneller dan het vroeger was." Thompson: "Ik herinner mij ooit een citaat gelezen te hebben dat aan Laplace toegeschreven was. Hij zei dat wiskunde zo moeilijk zou kunnen worden dat wij zo diep zouden moeten graven, dat het in de toekomst niet zou lukken om alles te doorgronden. Dat is eigenlijk een nogal beangstigende gedachte. Het is waar dat de vereisten aanzienlijk zijn, maar mensen zijn vindingrijk. Onderwijstechnieken kunnen veranderen. De basis van wat men leert kan veranderen. Maar de wiskunde is een dynamisch geheel. Ik hoop dat het niet stopt." Tits: "Ik heb er vertrouwen in dat het door zal groeien."

Traditioneel is de wiskunde voornamelijk verbonden met de natuurkunde. Veel motivatie komt daarvandaan, en veel toepassingen zijn in de natuurkunde. De laatste jaren zijn er ook biologie, bijvoorbeeld met het menselijke genoomproject, economie mij haar financiële wiskunde, informatica en computerwerk geweest. Wat denkt u van deze nieuwe verbanden? Zullen zij in de toekomst even belangrijk voor de wiskunde worden als de natuurkunde? Tits: "Ik zou zeggen dat de wiskunde die afkomstig is van de natuurkunde van hoge kwaliteit is. Sommige van de beste resultaten die we in de wiskunde hebben zijn door fysici ontdekt. Ik ben minder zeker over sociale wetenschappen en de menswetenschappen. Ik denk dat de biologie een zeer belangrijk onderwerp is maar ik weet niet of het moeilijke problemen heeft opgeleverd in de wiskunde. Maar ik kan mij vergissen. Ik weet bijvoorbeeld dat Gromov, een eerste-klas wiskundige, zich nu in de biologie interesseert. Ik denk dat dit een geval is waar wiskunde, zware wiskunde, met de biologie meegaat. Wat ik eerder over de sociale wetenschappen zei, bijvoorbeeld, is niet waar voor de biologie. Sommige biologen zijn ook zeer goede wiskundigen." Thompson: "Ik accepteer dat er zeer slimme mensen zijn, verspreid over de intellectuele wereld. Als zij wiskunde nodig

hebben bedenken zij wiskunde. Ofwel ze vertellen de wiskundigen wat ze nodig hebben ofwel ze bedenken het zelf."

Over het onderwijzen van wiskunde

Hoe moet wiskunde aan jongeren onderwezen worden? Hoe zou u jongeren stimuleren om zich in wiskunde te verdiepen? Thompson: "Ik raad altijd het boek *One Two Three ... Infinity* van Gamow aan en *What is Mathematics* van Courant en Robbins en nog wat overzichtswerk dat je in de bibliotheek kunt vinden. Het is geweldig om nieuwsgierigheid te stimuleren. Als er recepten waren, dan zouden die al bekend zijn. Sommige kinderen worden geprikkeld, anderen zijn gewoon niet ontvankelijk. Hetzelfde geldt voor muziek. Sommige kinderen zijn zeer ontvankelijk voor muziek, anderen niet. We weten niet waarom." Tits: "Ik weet niet wat ik moet zeggen. Ik heb weinig contact met zeer jonge mensen. Ik heb een aantal zeer goede studenten gehad, maar altijd gevorderde studenten. Ik ben zeker dat het fascinerend is te zien hoe jonge mensen hier over denken. Maar ik heb er geen ervaring mee."

Jean-Pierre Serre zei eens in een interview dat men jongeren niet moest stimuleren om wiskunde te doen. In tegendeel zou men ze moeten ontmoedigen. Degenen die daarna nog verlangen om wiskunde te doen moet je koesteren. Thompson: "Dat is nogal bestraffend. Maar ik begrijp het. Je probeert ze terug te houden en als ze zich verzetten laat je ze uiteindelijk los. Daar zit wat in. Maar ik denk niet dat Serre zijn bibliotheek zou afsluiten en de kinderen er niet in zou laten."

Misschien wil hij benadrukken dat onderzoek in de wiskunde niet voor iedereen is. Thompson: "Ja, dat zou kunnen." Tits: "Maar ik zou zeggen dat, al is wiskunde voor iedereen, niet iedereen er in kan slagen. Het is zeker niet goed om jongeren zonder aanleg aan te moedigen iets te proberen, want dat zou niet goed eindigen."

Persoonlijke interesses

In onze laatste vraag willen wij informeren naar uw persoonlijke interesses buiten de wiskunde. Wat doet u in uw vrije tijd? Waar bent u verder in geïnteresseerd? Tits: "Ik ben vooral geïnteresseerd in muziek, en eigenlijk in geschiedenis. Mijn vrouw is een geschiedkundige; daarom ben ik altijd zeer geïnteresseerd in geschiedenis."

Naar welke soorten muziek luistert u? Welke componisten? Tits: "Oh, nogal oude componisten."

En de geschiedenis: is dat oude of moder-

ne geschiedenis? Tits: "Zeker geen hedendaagse geschiedenis, maar moderne en middeleeuwse geschiedenis. Alles wat met de specialisatie van mijn vrouw te maken heeft." Thompson: "Ik zou een aantal dezelfde interesses noemen. Ik houd van muziek. Ik speel een beetje piano. Ik houd van lezen. Ik houd van bibliografieën en geschiedenis; algemene lectuur, zowel hedendaagse als oudere schrijvers. Mijn vrouw is een wetenschapper. Ik ben geïnteresseerd in haar wetenschappelijk werk. Negentiende-eeuwse Russische literatuur; dat was een tijd van fantastische prestaties. Zeer interessante dingen! Ik volg ook de groei van mijn kleinkinderen." Tits: "Ik ben ook zeer geïnteresseerd in talen, bijvoorbeeld het Russisch."

Spreekt u Russisch? Tits: "Nee, maar ik heb wat Tolstoj in het Russisch gelezen. Ik ben het een beetje vergeten. Ik lees vrij veel. Ik heb wat Chinees geleerd. Ik heb een aantal jaren lang elke zondagochtend een uur lang Chinees gestudeerd. Maar ik was al vrij oud toen ik begon, dus ik vergat wat ik leerde."

Zijn er bepaalde schrijvers waar u van houdt? Tits: "Zeg maar alle goede schrijvers." Thompson: "Ik denk dat we beide lezers zijn. Eindeloos."

Laat ons, tenslotte, u hartelijk bedanken voor dit plezierige interview; namens de Noorse, Deense en de Europese Wiskundegenootschappen. Hartelijk dank. Thompson: "Dank u." Tits: "Dank u voor het interview. U heeft ons veel interessante onderwerpen gegeven om over te praten!"

Verantwoording

Dit interview is eerder verschenen in *Newsletter of the European Mathematical Society*, Issue 69 September 2008.

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Jeffrey Shallit



Hendrik Lenstra

De favoriet van Jeffrey Shallit

Hendrik W. Lenstra, Jr.

Al meer dan twee jaar brengen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun blog wiskundemeisjes.nl in kaart welke levende wiskundigen bewonderd worden. Inmiddels vertellen wiskundigen hen vaak ongevraagd wie hun favoriete nog levende wiskundige is. Eerder dit jaar bijvoorbeeld vertelde iemand tijdens een conferentiediner ineens dat hij Jeffrey Shallit zou kiezen. De wiskundemeisjes besluiten deze Shallit maar eens te mailen om hem te vragen wie hij op zijn beurt bewondert.

De Amerikaan Jeffrey Outlaw Shallit studeerde wiskunde aan Princeton en Berkeley. Sinds 1990 werkt hij in Waterloo, Canada. Zijn onderzoeksinteresses zijn onder andere combinatoriek van woorden, algoritmische getaltheorie en fundamentele talen. Shallits hobby is het ontmaskeren van pseudowetenschappers, op zijn blog *Recursivity* [1] trekt hij ten strijde tegen creationisten, kwakzalvers en crackpots.

Shallit is verheugd dat hij aan een Nederlands publiek iets over zijn favoriete nog levende wiskundige kan vertellen, want als hij uit zijn lange lijst bewonderde wiskundigen één iemand moet kiezen, dan noemt hij Hendrik Lenstra.

Iedereen in Nederland weet natuurlijk wie Hendrik Lenstra is, dus we slaan de biografie over en gaan gelijk door naar wat Shallit voor moois over hem zegt. Shallit bewondert de schoonheid van Lenstra's resultaten en zijn talent om dingen helder uit te leggen: 'Ten eerste heeft Hendrik Lenstra een werkelijk diep inzicht in algebra, hij is er zo mee vertrouwd dat hij bijna onmiddellijk de oplossing ziet voor een probleem dat anderen uren of dagen zou kosten. Zijn uiteenzettingen zijn ten tweede altijd precies. Veel eerste klas-wiskundigen zijn vaak iets te gemakkelijk in hun bewijzen, maar Hendrik vindt het niet be-

neden zijn waardigheid om details te geven. Als je een artikel van hem leest, dan krijg je het gevoel dat elke zin is gekozen met efficiëntie en duidelijkheid als doel.

Shallit waardeert het daarnaast dat Lenstra niet aarzelt om serieus na te denken over onderwerpen die anderen zouden afdoen als 'recreatief'. Shallit wijst in het bijzonder op het werk aan de wiskunde achter Escher [2] en zijn heerlijke artikel over pro-eindige Fibonacci-getallen in het Nieuw Archief van december 2005 [3].

Ook de persoonlijkheid van Lenstra vindt Shallit prachtig: "Hij is het toonbeeld van de Europese intellectueel; altijd onberispelijk gekleed in een pak met das, goed geïnformeerd op veel gebieden en niet bang om dat te laten zien. Soms gaat dat ten koste van anderen; ik herinner me dat hij me eens uitlachte omdat ik niet wist of een woord oorspronkelijk uit het Latijn of Grieks kwam." Ondanks dat uitlachen beschrijft Shallit Hendrik als een buitengewoon vriendelijk persoon. Toen Shallit in Nederland in het ziekenhuis belandde, kwam Lenstra dagelijks op bezoek.

Shallit waardeert tenslotte de speelse humor van Lenstra. Hij weet nog dat Hendrik een keer grapte dat Shakespeares toneelstukken niet waren geschreven door Shakespeare, maar door een *andere* man met dezelfde naam. Hoe meer je erover nadenkt, des te diepzinniger het wordt. . .

Referenties

1. recursed.blogspot.com
2. www.ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf
3. www.math.leidenuniv.nl/~hw1/papers/fibo.pdf



Monique Laurent

Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI),
Kruislaan 413,
1098 SJ Amsterdam
monique@cwi.nl

Research

Semidefinite Programming in Combinatorial and Polynomial Optimization

In recent years semidefinite programming has become a widely used tool for designing more efficient algorithms for approximating hard combinatorial optimization problems and, more generally, polynomial optimization problems, which deal with optimizing a polynomial objective function over a basic closed semi-algebraic set. The underlying paradigm is that while testing nonnegativity of a polynomial is a hard problem, one can test efficiently whether it can be written as a sum of squares of polynomials by using semidefinite programming. In this note we sketch some of the main mathematical tools that underlie this approach and illustrate its application to some graph problems dealing with maximum cuts, stable sets and graph colouring.

Linear optimization has become a well established area of applied mathematics that is widely and successfully used for modelling and solving many real-world applications. It is also extensively used for attacking integer or 0/1 linear problems, which are linear problems that arise naturally in combinatorial optimization where the variables are additionally constrained to take integer or 0/1 values respectively. While efficient algorithms exist for solving linear programming problems, most problems become intractable as soon as integrality constraints are added to them. Linear programming techniques are sometimes not powerful enough for designing good and efficient approximation algorithms for 0/1 linear problems. Semidefinite programming, an extension of linear programming where vector variables are replaced by matrix variables constrained to be positive semidefinite, turns out to be a more powerful technique for some problem classes. While semidefinite programming is also widely used in other areas like system and control theory (see for example [3]), we focus here on its application to combinatorial optimization and, more generally, to polynomial optimization. There is a vast amount of information on semidefinite programming in the literature; we now briefly introduce semidefinite programs and refer for example to [19, 42–43] and references therein for a detailed exposition.

Semidefinite programs

Linear programming deals with optimizing a linear function over a set defined by finitely many linear inequalities. Any linear program (LP) can be brought into the form

$$\max\{c^T x \mid a_j^T x = b_j \ (j = 1, \dots, m) \text{ and } x \geq 0\}, \quad (1)$$

where $c, a_1, \dots, a_m \in \mathbf{R}^n$ and $b = (b_j)_{j=1}^m \in \mathbf{R}^m$ are given and $x \in \mathbf{R}^n$ is the vector variable, constrained to be nonnegative. A semidefinite program (SDP) is the analogue of the LP (1) where we replace the vector variable $x \in \mathbf{R}^n$ with a matrix variable $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$, constrained to be symmetric positive semidefinite. Recall that a symmetric matrix $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ is positive semidefinite, written as $X \succeq 0$, if $u^T X u \geq 0$ for all $u \in \mathbf{R}^n$ or, equivalently, if $X = (v_i^T v_j)_{i,j=1}^n$ for some vectors $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n$. In other words, a semidefinite program reads

$$\sup \{ \text{Tr}(C^T X) \mid \text{Tr}(A_j^T X) = b_j \ (j = 1, \dots, m) \text{ and } X \succeq 0 \}, \quad (2)$$

where $C, A_1, \dots, A_m \in \mathbf{R}^{n \times n}$ and $b \in \mathbf{R}^m$ are given and X is the matrix variable, required to lie in the cone S_n^+ of positive semidefinite matrices. While the feasible region of (1) is a polyhedron, that of (2) is a convex, in general non-polyhedral, set. Note that the SDP (2) reduces to the LP (1) when all C, A_j are diagonal matrices, and c, a_j denote their main diagonals.

Given an $n \times n$ rational symmetric matrix X , one can test in polynomial time (e.g. using Gaussian elimination) whether X is positive semidefinite and, if not, find a rational vector $u \in \mathbf{R}^n$ for which $u^T X u < 0$, thus giving a hyperplane separating X from the cone S_n^+ . In technical terms, one can solve the separation problem over the positive semidefinite cone in polynomial time. Therefore, semidefinite programs can be solved in polynomial time to any fixed precision using the ellipsoid method (see [11]). Algorithms

based on the ellipsoid method are however not practical since their running time is prohibitively high. Instead, interior-point algorithms are widely used in practice; they return an approximate optimum solution (to any given precision) in polynomially many iterations and their running time is efficient in practice for medium size problems.

Semidefinite programming in combinatorial optimization

We have chosen to illustrate the use of semidefinite programming in combinatorial optimization on the following basic problems: maximum stable sets, minimum graph colouring and maximum cuts in graphs. For these problems, some milestone results have been obtained in recent years that have spurred intense research activity and results for other optimization problems; we refer to [9, 19, 27, 30] and references therein for a detailed exposition. First we introduce some ‘basic’ SDP relaxations and then we indicate how to strengthen them and construct hierarchies leading to the full representation of the combinatorial problem at hand.

Maximum stable sets and graph colouring

Consider the problem of determining the *stability number* $\alpha(G)$ of a graph $G = (V, E)$, i.e. the maximum cardinality of a stable set in G , where a stable set is a set of pairwise non-adjacent vertices. A closely related problem is the *graph colouring problem*, which asks for the minimum number $\chi(G)$ of colours that are needed for colouring the nodes in such a way that adjacent nodes receive distinct colours. Thus $\chi(G)$ equals the minimum number of stable sets covering the vertex set V . Note that

$$\chi(G) \geq \omega(G), \quad (3)$$

where $\omega(G)$ is the largest cardinality of a *clique* in G , i.e. a set of pairwise adjacent vertices. Obviously, $\omega(G) = \alpha(\bar{G})$, where $\bar{G}$ is the complement of G , with the same set V of vertices and two distinct vertices being adjacent in $\bar{G}$ precisely when they are not adjacent in G .

For some graphs the inequality (3) is strict. For instance, it is strict for any circuit C_n of odd length $n \geq 5$, as $\omega(C_n) = 2 < \chi(C_n) = 3$, and for the complement $\bar{C}_n$ of C_n as well. However there are many interesting classes of graphs for which equality $\omega(G) = \chi(G)$ holds. This is the case e.g. for bipartite graphs, line graphs of bipartite graphs, comparability graphs and chordal graphs, and their complements as well. In fact the class of graphs for which equality $\omega(G) = \chi(G)$ holds not only for G but also for all its induced subgraphs, i.e. all those graphs that can be obtained by deleting vertices in G , turns out to be very interesting; following Berge, graphs in this class are called *perfect graphs*. Thus C_n and its complement $\bar{C}_n$ are not perfect for odd $n \geq 5$. Berge conjectured in 1962 that a graph is perfect if and only if its complement is perfect, which was proved a decade later by Lovász [28]. Berge also conjectured that a graph is perfect if and only if it does not contain any odd circuit or its complement of length at least 5 as an induced subgraph, which was proved only recently by Chudnovsky et al. [4] and is known as the *strong perfect graph theorem*. It is intriguing to determine the complexity of computing $\alpha(G)$ and $\chi(G)$ for perfect graphs. As we indicate below this can be done in polynomial time but to show this one has to use semidefinite programming. Both problems of computing the

stability number $\alpha(G)$ and the chromatic number $\chi(G)$ are NP-hard [7]. Lovász [29] introduced his celebrated *theta number* $\vartheta(G)$, which serves as bound for both $\alpha(G)$ and $\chi(G)$. The theta number is defined via the semidefinite program

$$\begin{aligned} \vartheta(G) := \max \{ & \text{Tr}(JX) \mid \text{Tr}(X) = 1, \\ & X_{ij} = 0 \ (ij \in E), \ X \succeq 0 \}, \end{aligned} \quad (4)$$

where J denotes the all-ones matrix. Hence it can be computed in polynomial time to any fixed precision. A basic property of the theta number is that it satisfies the so-called *sandwich inequality*

$$\begin{aligned} \alpha(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(\bar{G}), \text{ or equivalently,} \\ \omega(G) \leq \vartheta(\bar{G}) \leq \chi(G). \end{aligned} \quad (5)$$

Indeed if $x = \chi^S \in \{0, 1\}^V$ is the incidence vector of a stable set S in G (seen as a column vector) then $X := xx^T/|S|$ is feasible for the program (4) with objective value $|S|$, which gives $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$. On the other hand, if X is a feasible solution to (4) and $V = C_1 \cup \dots \cup C_k$ is a partition into $k := \chi(\bar{G})$ cliques of G , then

$$\begin{aligned} 0 & \leq \sum_{h=1}^k (k\chi^{C_h} - e)^T X (k\chi^{C_h} - e) \\ & = k^2 \text{Tr}(X) - ke^T X e = k(k - \text{Tr}(JX)), \end{aligned}$$

where e is the all-ones vector, which implies $\text{Tr}(JX) \leq k$ and thus $\vartheta(G) \leq \chi(\bar{G})$.

Hence, for perfect graphs, equality holds throughout in (5), which implies $\alpha(G) = \vartheta(G)$ and $\chi(G) = \vartheta(\bar{G})$. As the theta number can be computed in polynomial time to any fixed precision, the stability number and the chromatic number can be computed in polynomial time for perfect graphs. Moreover, a maximum stable set and a minimum colouring can also be computed in polynomial time for a perfect graph G (by iterated computations of the theta number of certain induced subgraphs of G). These computations thus rely on using semidefinite programming and as of today no alternative efficient algorithm is known.

Lovász’ original motivation for introducing the theta number was to bound the *Shannon capacity* of a graph G , which is defined as

$$\Theta(G) := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(G^k)^{\frac{1}{k}}. \quad (6)$$

Here G^k denotes the product of k copies of G , with vertex set V^k and with two distinct vertices $(u_1, \dots, u_k)$ and $(v_1, \dots, v_k)$ being adjacent in G^k if $u_h = v_h$ or $u_h v_h \in E$ for each position $h = 1, \dots, k$. If we view V as an alphabet and adjacent vertices $u, v \in V$ as letters that can be confounded, then $\alpha(G^k)$ is the maximum number of words of length k that cannot be confounded, since for any two of them there is a position h where their h th letters cannot be confounded. One can verify that $\alpha(G^k) \geq \alpha(G)^k$ and $\vartheta(G^k) \leq \vartheta(G)^k$, which implies

$$\alpha(G) \leq \Theta(G) \leq \vartheta(G). \quad (7)$$

Therefore, when G is perfect, $\Theta(G) = \vartheta(G)$ can thus be computed via semidefinite programming. Lovász could also compute the Shannon capacity of the circuit C_5 using the theta number. He showed that $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$, which follows from $\alpha(C_5^2) \geq 5$ (easy to verify) and $\vartheta(C_5) = \sqrt{5}$; the latter follows e.g. from the fact that $\vartheta(G)\vartheta(\bar{G}) = |V|$ when G is vertex transitive and that C_5 is vertex transitive and isomorphic to its complement. The exact value of the Shannon capacity of C_n is not known for odd $n \geq 7$.

Maximum cuts

Another successful application of semidefinite programming to combinatorial optimization is the celebrated 0.878-approximation algorithm of Goemans and Williamson [10] for the max-cut problem, which we briefly sketch below.

Given a graph $G = (V, E)$ and edge weights $w \in \mathbf{R}_+^E$, a cut is a set of edges of the form $\delta_G(S) := \{ij \in E \mid i \in S, j \in V \setminus S\}$ for some $S \subseteq V$, and its weight is $w(\delta_G(S)) = \sum_{ij \in \delta_G(S)} w_{ij}$. The *max-cut problem* asks for a cut of maximum total weight, whose weight is then denoted as $\text{mc}(G)$. While a minimum weight nonempty cut can be found in polynomial time (using flow algorithms), the max-cut problem is NP-hard [7].

Erdős proposed in 1967 the following simple algorithm for constructing a cut of weight at least half the optimum cut. Colour the vertices $v_1, \dots, v_n$ of G with two colours blue and red as follows: first colour v_1 with blue. Assuming $v_1, \dots, v_i$ are already coloured, colour v_{i+1} with blue if the total weight of the edges joining v_{i+1} to the red vertices in $\{v_1, \dots, v_i\}$ is more than the total weight of the edges joining v_{i+1} to the blue vertices in this set; otherwise colour v_{i+1} red. Then the cut formed by the edges connecting blue and red vertices has weight at least $w(E)/2$ and thus at least $\text{mc}(G)/2$. This simple algorithm is thus an efficient 1/2-approximation algorithm for max-cut. There is an even easier randomized 1/2-approximation algorithm. Namely colour randomly each node blue or red independently, with probability 1/2. The probability that an edge belongs to the cut determined by this partition into blue and red vertices is 1/2 and thus the expected weight of this cut is $w(E)/2$. Can one construct in polynomial time a cut achieving a better approximation ratio? Goemans and Williamson [10] showed that this is indeed possible. For this they use a semidefinite program as relaxation for the max-cut problem and a suitable rounding of its optimum solution to a cut. To start with, they model the max-cut problem using ± 1 -valued variables as

$$\text{mc}(G) = \max \left\{ \sum_{ij \in E} w_{ij}(1 - x_i x_j)/2 \mid x \in \{\pm 1\}^V \right\}. \quad (8)$$

Observe that, for $x \in \{\pm 1\}^V$, the matrix $X := xx^T$ can be characterized by the constraints: (i) $X \succeq 0$, (ii) $X_{ii} = 1 \ \forall i \in V$ and (iii) $\text{rank}(X) = 1$. If we omit the rank condition (iii) then we find the semidefinite relaxation

$$\text{sdp}(G) := \max \left\{ \sum_{ij \in E} w_{ij}(1 - X_{ij})/2 \mid X \succeq 0, X_{ii} = 1 \ (i \in V) \right\}. \quad (9)$$

Let X be an optimum solution to (9). Goemans and Williamson

propose the following random rounding procedure for constructing a good cut from X . Compute the Cholesky decomposition of X , i.e. vectors v_i ($i \in V$) such that $X_{ij} = v_i^T v_j \ \forall i, j \in V$. Select a random unit vector $r \in \mathbf{R}^n$. The hyperplane with normal r splits the vectors v_i into two sets, depending on the sign of $r^T v_i$. Let $S := \{i \in V \mid r^T v_i \geq 0\}$. As the probability that an edge ij lies in the cut $\delta_G(S)$ is equal to $\frac{1}{\pi} \arccos(v_i^T v_j)$, the expected weight of the cut $\delta_G(S)$ is equal to

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} w_{ij} \frac{\arccos(v_i^T v_j)}{\pi} &= \sum_{ij \in E} w_{ij} \frac{1 - v_i^T v_j}{2} \frac{2}{\pi} \frac{\arccos(v_i^T v_j)}{1 - v_i^T v_j} \\ &\geq \alpha_{\text{GW}} \text{sdp}(G) \geq 0.878567 \text{mc}(G), \end{aligned}$$

after setting $\alpha_{\text{GW}} := \min_{0 < \vartheta \leq \pi} \frac{2}{\pi} \frac{\vartheta}{1 - \cos \vartheta}$ and observing that $\alpha_{\text{GW}} > 0.878567$. This randomized algorithm can be derandomized to yield in polynomial time a deterministic cut achieving the same performance ratio.

Much research has been done trying to improve the Goemans-Williamson approximation algorithm for max-cut and to extend and apply it to other problems (see for example the survey [27] and references therein). However, although improved algorithms could be designed for special graph classes, no better approximation ratio could yet be shown for the general max-cut problem. It is in fact proved that α_{GW} is the best possible approximation ratio for max-cut that can be achieved in polynomial time (if $P \neq NP$) under the so-called *Unique Games Conjecture* (see [17] and [18]). On the negative side, Håstad [15] proved that if $P \neq NP$ then no polynomial time approximation algorithm exists for max-cut with performance guarantee better than $16/17 \sim 0.94117$.

Hierarchies of semidefinite programming relaxations

We saw above how to define in a natural way a semidefinite relaxation for the maximum stable set problem (via the SDP (4)) and for the max-cut problem (via the SDP (9)). Several procedures have been proposed for constructing stronger SDP relaxations (discussed in [22, 27, 31] and references therein). We now describe a simple method for constructing a hierarchy of SDP relaxations, which finds the exact representation of the combinatorial problem at hand in finitely many steps. We present it for simplicity on the instance of the stable set problem.

Given a graph $G = (V, E)$, let P_G denote the convex hull of the incidence vectors of all stable sets in G ; in other words,

$$P_G = \text{conv} \left\{ x \in \{0, 1\}^V \mid x_i + x_j \leq 1 \ (ij \in E) \right\},$$

called the *stable set polytope* of G . Then maximizing the linear function $\sum_{i \in V} x_i$ over P_G gives the stability number $\alpha(G)$, while maximizing it over a relaxation of P_G gives an upper bound on $\alpha(G)$. The basic idea is to 'lift' a vector $x \in \{0, 1\}^V$ to the higher dimensional vector

$$\begin{aligned} x^{(t)} &= \left(x_I := \prod_{i \in I} x_i \right)_{I \in P_t(V)} \\ &\text{indexed by } P_t(V) = \{I \subseteq V \mid |I| \leq t\} \end{aligned}$$

and to consider the matrix

$$X = x^{(t)} \left(x^{(t)} \right)^T.$$

Here are some obvious conditions satisfied by X : (i) $X \succeq 0$ and (ii) any (I, J) -entry of X depends only on the union $I \cup J$ (as $X_{I,J} = x_{I \cup J}$).

A matrix indexed by $P_t(V)$ satisfying (ii) is of the form

$$C_t(y) := (y_{I \cup J})_{I, J \in P_t(V)} \text{ for some } y \in \mathbf{R}^{P_{2t}(V)}; \quad (10)$$

then $C_t(y)$ is called the *combinatorial moment matrix* of order t of y .

Summarizing, we just saw that, if $y = x^{(2t)}$ for some $x \in \{0, 1\}^V$, then its combinatorial moment matrix satisfies the SDP condition $C_t(y) \succeq 0$. Moreover, $y_\emptyset = 1$ and, if x is the incidence vector of a stable set in G , then y satisfies the edge equations $y_{ij} = 0$ for all $ij \in E$. This motivates the following definition. For any integer $t \geq 1$, consider the set

$$\left\{ y \in \mathbf{R}^{P_{2t}(V)} \mid C_t(y) \succeq 0, y_\emptyset = 1, y_{ij} = 0 \ (ij \in E) \right\} \quad (11)$$

and its projection onto the space $\mathbf{R}^V$, denoted $P_G^{(t)}$. As $P_G \subseteq P_G^{(t+1)} \subseteq P_G^{(t)}$, we obtain a hierarchy of SDP relaxations for the stable set polytope P_G . It finds P_G in $\alpha(G)$ steps, i.e. $P_G^{(t)} = P_G$ for $t \geq \alpha(G)$. Optimizing the function $\sum_{i \in V} x_i$ over $P_G^{(t)}$ yields an upper bound on $\alpha(G)$, which coincides with $\alpha(G)$ for $t \geq \alpha(G)$. This upper bound can be computed in polynomial time (to any precision) when t is fixed, since it is expressed via an SDP involving a matrix of size $O(n^t)$. Moreover, for $t = 1$, one can verify that this upper bound coincides with the theta number $\vartheta(G)$ from (4). Therefore, the above construction is a systematic procedure for producing a hierarchy of upper bounds for the stability number, starting with the theta number.

As t grows we obtain a tighter approximation of $\alpha(G)$, however at a higher computational cost. More economical block-diagonal variations of the above hierarchy have been proposed, which are based on considering, instead of the full matrix $C_t(y)$, a number of smaller blocks arising from principal submatrices of it. Computational experiments for the stable set and graph colouring problems show that such relaxations can give approximations for $\alpha(G)$ and $\chi(G)$, which may improve substantially the theta number (see [12–14, 20, 25]). When G is a Hamming graph, with vertex set $\{0, 1\}^n$ and with edges the pairs of nodes with Hamming distance below a prescribed value, $\alpha(G)$ corresponds to the maximum cardinality of a code correcting a prescribed number of errors, $\vartheta(G)$ corresponds to the well-known LP bound of Delsarte [6], and the next bounds in the hierarchy are studied e.g. in [8, 25, 39]; as G has a large number of vertices, a crucial ingredient for the practical computation of these bounds is exploiting symmetry in the SDP formulations and using the explicit block-diagonalization of the Terwilliger algebra given in [39].

Semidefinite Programming in Polynomial Optimization

We now turn to the application of semidefinite programming to polynomial optimization. Given $p, g_1, \dots, g_m \in \mathbf{R}[x]$ the ring of polynomials in n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$, consider the problem

$$p^{\min} := \inf \{ p(x) \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0 \} \quad (12)$$

of minimizing the polynomial p over the basic closed semi-algebraic set

$$K := \{ x \in \mathbf{R}^n \mid g_1(x) \geq 0, \dots, g_m(x) \geq 0 \}. \quad (13)$$

This is a hard problem. For instance, it contains 0/1 linear programming, as 0/1 variables can be modelled by the quadratic equations $x_i^2 = x_i \ \forall i$. It also contains the max-cut problem (8) where the objective and the constraints are quadratic polynomials (expressing $x_i = \pm 1$ by $x_i^2 = 1$).

We fix some notation. For $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ is the monomial with exponent α , whose degree is $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$. For an integer d , $\mathbf{N}_d^n = \{ \alpha \in \mathbf{N}^n \mid |\alpha| \leq d \}$ corresponds to the set of monomials of degree at most d . For $g = \sum_\alpha g_\alpha x^\alpha \in \mathbf{R}[x]$, set $d_g := \lceil \deg(g)/2 \rceil$ and let $\vec{g} = (g_\alpha)_\alpha$ denote the vector of coefficients of g . Finally, for K as in (13), set

$$d_K := \max \{ d_{g_1}, \dots, d_{g_m} \}.$$

Several authors (see [21, 32, 34, 40]) have proposed approximating the problem (12) by convex (semidefinite) relaxations, obtained by using sums of squares representations for nonnegative polynomials and the dual theory of moments. We give below a brief sketch of this approach and refer e.g. to the survey [26] and references therein for more details. The basic idea underlying this approach is that, while testing whether a polynomial is nonnegative is a hard problem, the relaxed problem of testing whether it can be written as a sum of squares of polynomials is much easier since it can be reformulated as a semidefinite program.

Of course, as Hilbert already realized in 1888, not every nonnegative polynomial p can be written as a sum of squares of polynomials. This is true only in the following three exceptional cases: when p is univariate (in which case one can easily verify that p is a sum of two squares), when p is quadratic (which corresponds to the fact that a positive semidefinite matrix A can be written as BB^T for some matrix B) and when p is a quartic polynomial in 2 variables (in which case Hilbert proved that p can be written as a sum of three squares - a non-trivial result). In all other cases Hilbert proved that there exists a nonnegative polynomial that is not a sum of squares of polynomials. His proof was not constructive. Concrete examples of such polynomials were found only much later; for instance, the following polynomial $x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3) + 1$ is due to Motzkin (see [41] for a detailed account). Hilbert asked at the 1900 International Congress of Mathematicians in Paris whether every nonnegative polynomial can be written as a sum of squares of *rational* functions, known as Hilbert's 17th problem. This was settled in the affirmative by Artin in 1927, whose work laid the foundations for the field of real algebraic geometry. See for example [35–36] for a detailed exposition.

Sums of squares of polynomials and semidefinite programming

We first recall how to test whether a polynomial can be written as a sum of squares of polynomials using semidefinite programming: a polynomial $p = \sum_\alpha p_\alpha x^\alpha$ of degree $2d$ is a sum of squares of polynomials (s.o.s. for short), i.e. $p = \sum_{j=1}^m u_j^2$ for some $u_j \in \mathbf{R}[x]$, if and only if the SDP

$$X \succeq 0, \quad \sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbf{N}_d^n \\ \beta + \gamma = \alpha}} X_{\beta, \gamma} = p_\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{N}_{2d}^n) \quad (14)$$

is feasible, where the matrix variable X is indexed by $\mathbf{N}_d^n$. Indeed, setting $\mathbf{z} := (\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}_d^n}$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m u_j^2 &= \sum_{j=1}^m (\mathbf{z}^T \tilde{u}_j)^2 = \mathbf{z}^T \left(\underbrace{\sum_{j=1}^m \tilde{u}_j \tilde{u}_j^T}_{=: X \succeq 0} \right) \mathbf{z} \\ &= \sum_{\beta, \gamma \in \mathbf{N}_d^n} \mathbf{x}^\beta \mathbf{x}^\gamma X_{\beta, \gamma} = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}_{2d}^n} \mathbf{x}^\alpha \left(\sum_{\substack{\beta, \gamma \in \mathbf{N}_d^n \\ \beta + \gamma = \alpha}} X_{\beta, \gamma} \right), \end{aligned}$$

which shows that the s.o.s. decompositions for p correspond to the solutions X of (14).

We now introduce some SDP relaxations based on sums of squares for the polynomial optimization problem (12). Observe first that (12) can be rewritten as

$$p^{\min} = \sup \{ \lambda \mid p(x) - \lambda \geq 0 \ \forall x \in K \}. \quad (15)$$

Then define, for any integer $t \geq \max(d_K, d_p)$, the parameter

$$p_t^{\text{sos}} := \sup \left\{ \lambda \mid p - \lambda = s_0 + \sum_{j=1}^m s_j g_j \right. \quad (16)$$

$$\left. \text{such that } s_0, s_j \text{ s.o.s. with } \deg(s_0), \deg(s_j g_j) \leq 2t \right\},$$

which is obviously a lower bound for $p^{\min}$. Moreover, it follows from the above that p_t^{sos} can be computed via semidefinite programming. As $p_t^{\text{sos}} \leq p_{t+1}^{\text{sos}} \leq p^{\min}$, we obtain a hierarchy of SDP bounds for (12).

Positive semidefinite moment matrices and polynomial optimization

We now give a ‘dual’ SDP hierarchy for $p^{\min}$ in terms of moment matrices. For this let us go back to problem (12) and observe that it can be reformulated as

$$\begin{aligned} p^{\min} &= \inf \left\{ y^T \tilde{p} \mid \exists \mu \text{ probability measure on } K \text{ such that} \right. \\ &\quad \left. y_\alpha = \int_K x^\alpha \mu(dx) \ \forall \alpha \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

here the variable y is constrained to have a representing measure μ , in which case the quantity $\int_K x^\alpha \mu(dx)$ is called its *moment* of order α . Indeed, if μ is a probability measure on K then $\int_K p(x) \mu(dx) \geq \int_K p^{\min} \mu(dx) = p^{\min}$, giving $\inf(17) \geq p^{\min}$. On the other hand, if $x_0 \in K$ and μ is the Dirac measure at x_0 , then $p(x_0) = \int_K p(x) \mu(dx) \geq \inf(17)$, thus giving the reverse inequality $p^{\min} \geq \inf(17)$.

Characterizing the sequences y having a representing measure on K is the object of classical moment theory. Well-known necessary conditions include (i) $M_t(y) \succeq 0$, and the *localizing conditions* (ii) $M_{t-d_{g_j}}(g_j y) \succeq 0$ ($j \leq m$) for any $t \geq d_K$. Here $M_t(y) := (y_{\beta+\gamma})_{\beta, \gamma \in \mathbf{N}_d^n}$ is the *moment matrix* of order t of y and, for a polynomial $g = \sum_\alpha g_\alpha x^\alpha$, $gy \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^n}$ is the sequence with α th entry $\sum_\beta g_\beta y_{\alpha+\beta}$. Hence, for any $t \geq \max(d_K, d_p)$, the parameter

$$p_t^{\text{mom}} := \inf \{ y^T \tilde{p} \mid y_0 = 1, M_t(y) \succeq 0, M_{t-d_{g_j}}(g_j y) \succeq 0 \ (j = 1, \dots, m) \} \quad (18)$$

is an SDP lower bound for (12). The two programs (14) and (17) give ‘dual’ formulations for $p^{\min}$, corresponding to the known duality between the cone of nonnegative polynomials on K and the cone of sequences having a nonnegative representing measure on K , while the two programs (16) and (18) are dual SDPs (see [21] for details). We have $p_t^{\text{sos}} \leq p_t^{\text{mom}} \leq p^{\min}$, with equality $p_t^{\text{mom}} = p_t^{\text{sos}}$, e.g. when K has a nonempty interior. We see below some conditions under which the SDP relaxations are exact, i.e. equality $p_t^{\text{mom}} = p_t^{\text{sos}} = p^{\min}$ holds.

Convergence, optimality certificate and extracting global minimizers

We group here some basic properties of the SDP hierarchies (14) and (17), regarding convergence and extraction of a global minimizer for the original problem (12).

Assume that the quadratic module $M_K := \{s_0 + \sum_{j=1}^m s_j g_j \mid s_0, s_j \text{ s.o.s.}\}$ is Archimedean, i.e. $\forall p \in \mathbf{R}[x] \ N \pm p \in M_K$ for some $N \in \mathbf{N}$. As shown by Schmüdgen [38], M_K is Archimedean if and only if the set $\{x \in \mathbf{R}^n \mid u(x) \geq 0\}$ is compact for some $u \in M_K$. Thus M_K Archimedean implies K compact. On the other hand, if K is compact and if we know an explicit ball of radius R containing K , then it suffices to add the quadratic constraint $R^2 - \sum_i x_i^2 \geq 0$ to the description of K to make M_K Archimedean. The important fact for our treatment here is that if M_K is Archimedean then there is asymptotic convergence of p_t^{sos} (and thus of p_t^{mom}) to $p^{\min}$ as $t \rightarrow \infty$. As pointed out in [21], this follows directly from the following representation result of Putinar [37]: if M_K is Archimedean then any polynomial that is positive on K belongs to M_K .

Sometimes there is even *finite* convergence to $p^{\min}$. For instance, $p_t^{\text{sos}} = p_t^{\text{mom}} = p^{\min}$ (or $p_t^{\text{mom}} = p^{\min}$) for t large enough when the description of K contains a set of equations having finitely many common complex (or real) roots (see [24, 26]). Finite convergence occurs in particular in the 0/1 case considered earlier, corresponding to the presence of the equations $x_i^2 = x_i$ ($i = 1, \dots, n$). Note that, in the presence of these equations, one can eliminate all variables y_α with some $\alpha_i \geq 2$ in the moment matrices $M_t(y)$ in (18), so that we find again the combinatorial moment matrices $C_t(y)$ considered in (10).

Another interesting case of (finite) convergence is for the problem (12) of minimizing a polynomial p over its gradient variety

$$K_p := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \partial p / \partial x_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n\},$$

which follows from the following result of Nie et al. [33]: if p is positive on K_p then p is an s.o.s. modulo its gradient ideal I_p , defined as the ideal generated by $\partial p / \partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$); moreover the same conclusion holds when p is nonnegative on K_p and I_p is a radical ideal.

Henrion and Lasserre [16] give the following optimality criterion for the SDP hierarchy (18): if y is an optimum solution to (18) satisfying

$$\begin{aligned} \text{rank } M_s(y) &= \text{rank } M_{s-d_K}(y) \\ \text{for some } \max(d_K, d_p) &\leq s \leq t \end{aligned} \quad (19)$$

then equality $p_t^{\text{mom}} = p^{\min}$ holds and, moreover, all common roots to the polynomials lying in the kernel of $M_s(y)$ are global minimizers of p over the set K . Therefore one can compute these roots (e.g. using the so-called eigenvalue method for solving polynomial equations) and thus obtain global minimizers for the original problem (12). Here is a brief sketch of the proof for this optimality criterion. It relies on the following results of [5] for moment matrices: firstly, if $\text{rank} M_s(y) = \text{rank} M_{s-1}(y)$ then y can be extended to $\tilde{y} \in \mathbf{R}^N$ in such a way that $\text{rank} M_\infty(\tilde{y}) = \text{rank} M_s(y)$. Secondly, if $M_\infty(\tilde{y}) \succeq 0$ with finite rank then $\tilde{y}$ has a representing measure. Combining these two results one can derive that, under the rank condition (19), y has a representing measure μ on K up to order $2s$; this implies that $p_t^{\text{mom}} = y^T \tilde{p} = \int_K p(x) \mu(dx) \geq p^{\min}$ and thus equality $p_t^{\text{mom}} = p^{\min}$ holds and, moreover, the support of μ is contained in the set of global minimizers. See for example [26] for a detailed exposition.

Conclusions

We have given here a brief sketch of how to use semidefinite programming for designing hierarchies of convex relaxations for polynomial optimization problems, which include 0/1 linear optimization problems as special instances. The underlying paradigm is that, while testing whether a polynomial is nonnegative is a hard problem, one can test whether it can be written as a sum of squares efficiently using semidefinite programming. The duality between nonnegative polynomials and moment theo-

ry leads to dual SDPs in terms of sums of squares and in terms of positive semidefinite moment matrices, the latter lending themselves to possible extraction of global optimizers. There are many further interesting aspects that were not discussed here. To name just a few: how often do positive polynomials admit s.o.s. decompositions? Various answers may be given depending whether one lets the number of variables or the degree vary; how do you reduce the size of the SDPs using structural properties of the problem, like equations, sparsity or symmetries? This is indeed crucial as SDPs that are too large could not be handled by the current SDP solvers; and how do these hierarchies (based on Putinar's representation theorem) compare to other hierarchies based on other representation results, like e.g. Pólya's representation theorem for positive homogeneous polynomials on the standard simplex?

Finally let us mention some recent work showing that semidefinite programming combined with invariant theory and harmonic analysis can also be very useful for attacking various problems on the unit sphere. In particular, Bachoc and Vallentin [1] obtain the best upper bounds for the famous kissing number in dimension up to 10, while Bachoc et al. [2] introduce an analogue of the theta number for compact metric spaces, leading e.g. to new lower bounds for the measurable chromatic number of distance graphs on the unit sphere. $\leftarrow$

Thanks This work was supported by the Netherlands Organization for Scientific Research under grant NWO 639.032.203.

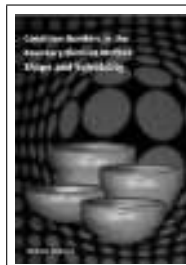
References

- 1 C. Bachoc and F. Vallentin, 'New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming', *Journal of the American Mathematical Society* 21(3): 909–924, 2008
- 2 C. Bachoc, G. Nebe, F. Mario de Oliveira Filho, F. Vallentin, 'Lower bounds for measurable chromatic numbers', arXiv:0801.1059, 2008
- 3 S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Studies in Applied Mathematics, volume 15, SIAM, 1994
- 4 M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas, 'The strong perfect graph theorem', *Annals of Mathematics* 164:51–229, 2006
- 5 R.E. Curto and L.A. Fialkow, 'Solution of the truncated complex moment problem for flat data', *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 119, n. 568, 1996
- 6 P. Delsarte, *An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory*, Philips Research Reports Supplements (1973) No. 10, Philips Research Laboratories, Eindhoven, 1973
- 7 M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of*
- 8 D. Gijswijt, *Matrix Algebras and Semidefinite Programming Techniques for Codes*, PhD thesis, Univ. Amsterdam, 2005
- 9 M.X. Goemans, 'Semidefinite Programming in Combinatorial Optimization', *Mathematical Programming* 79:143–161, 1997
- 10 M.X. Goemans and D. Williamson, 'Improved approximation algorithms for maximum cuts and satisfiability problems using semidefinite programming', *Journal of the ACM* 42:1115–1145, 1995
- 11 M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, 1988
- 12 N. Gvozdenović, *Approximating the Stability Number and the Chromatic Number of a Graph via Semidefinite Programming*, PhD thesis, Univ. Amsterdam, 2008
- 13 N. Gvozdenović and M. Laurent, 'Computing semidefinite programming lower bounds for the (fractional) chromatic number via block-diagonalization', *SIAM Journal on Optimization* 19 (2): 592–615, 2008
- 14 N. Gvozdenović, M. Laurent and F. Vallentin, 'Block-diagonal semidefinite programming hierarchies for 0/1 programming', arXiv:0712.3079, 2007
- 15 J. Håstad, 'Some optimal inapproximability results', in *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, ACM, New York, pp. 1–10, 1997
- 16 D. Henrion and J.-B. Lasserre, 'Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly', in *Positive Polynomials in Control*, D. Henrion and A. Garulli (eds.), LNCIS 312:293–310, 2005
- 17 S. Khot, 'On the power of unique 2-prover 1-round games', in *Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, ACM, New York, pp. 767–775, 2002
- 18 S. Khot, G. Kindler, E. Mossel, and R. O'Donnell, 'Optimal inapproximability results for Max-Cut and other 2-variable CSPs?', in *Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, Washington, pp. 146–154, 2004
- 19 E. de Klerk, *Aspects of Semidefinite Programming - Interior Point Algorithms and Selected Applications*, Kluwer, 2002

- 20 E. De Klerk, D.V. Pasechnik, 'A note on the stability number of an orthogonality graph' *European Journal of Combinatorics* **28**:1971–1979, 2007
- 21 J.B. Lasserre, 'Global optimization with polynomials and the problem of moments', *SIAM Journal on Optimization* **11**:796–817, 2001
- 22 J.B. Lasserre, 'An explicit exact SDP relaxation for nonlinear 0 – 1 programs', in K. Aardal and A.M.H. Gerards, eds., *Lecture Notes in Computer Science* **2081**:293–303, 2001
- 23 M. Laurent, 'A comparison of the Sherali-Adams', Lovász-Schrijver and Lasserre relaxations for 0 – 1 programming', *Mathematics of Operations Research* **28**(3):470–496, 2003
- 24 M. Laurent, 'Semidefinite representations for finite varieties', *Mathematical Programming* **109**:1–26, 2007
- 25 M. Laurent, 'Strengthened semidefinite programming bounds for codes', *Mathematical Programming* **109**(2-3):239–261, 2007
- 26 M. Laurent, 'Sums of squares, moment matrices and optimization over polynomials', in *IMA volume Emerging Applications of Algebraic Geometry*, M. Putinar and S. Sullivant (eds.), 2008
- 27 M. Laurent and F. Rendl, 'Semidefinite Programming and Integer Programming', in *Handbook on Discrete Optimization*, K. Aardal, G. Nemhauser, R. Weismantel (eds.), pp. 393–514, Elsevier B.V., 2005
- 28 L. Lovász, 'Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture', *Discrete Mathematics* **2**:253–267, 1972
- 29 L. Lovász, 'On the Shannon capacity of a graph', *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-25**:1–7, 1979
- 30 L. Lovász, 'Semidefinite programs and combinatorial optimization', in *Recent Advances in Algorithms and Combinatorics*, B.A. Reed and C.L. Sales (eds.), Springer, 2003
- 31 L. Lovász and A. Schrijver, 'Cones of matrices and set-functions and 0 – 1 optimization', *SIAM Journal on Optimization* **1**:166–190, 1991
- 32 Y. Nesterov, 'Squared functional systems and optimization problems', in J.B.G. Frenk, C. Roos, T. Terlaky and S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, Kluwer, pp. 405–440, 2000
- 33 J. Nie, J. Demmel and B. Sturmfels, 'Minimizing polynomials via sums of squares over the gradient ideal', *Mathematical Programming* **106**:587–606, 2006
- 34 P.A. Parrilo, *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*, PhD thesis, California Institute of Technology, 2000
- 35 V.V. Prasolov, *Polynomials*, Springer, 2004
- 36 A. Prestel and C.N. Delzell, *Positive Polynomials - From Hilbert's 17th Problem to Real Algebra*, Springer, 2001
- 37 M. Putinar, 'Positive polynomials on compact semi-algebraic sets', *Indiana University Mathematics Journal* **42**:969–984, 1993
- 38 K. Schmüdgen, 'The K -moment problem for compact semi-algebraic sets', *Mathematische Annalen* **289**:203–206, 1991
- 39 A. Schrijver, 'New code upper bounds from the Terwilliger algebra and semidefinite programming', *IEEE Transactions on Information Theory* **51**:2859–2866, 2005
- 40 N.Z. Shor, 'An approach to obtaining global extremums in polynomial mathematical programming problems', *Kibernetika* **5**:102–106, 1987
- 41 B. Reznick, 'Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem', In *Real Algebraic Geometry and Ordered Structures*, C.N. Delzell and J.J. Madden, eds., *Contemporary Mathematics* **253**: 251–272, 2000
- 42 L. Vandenberghe and S. Boyd, 'Semidefinite Programming', *SIAM Review* **38**(1):49–95, 1996
- 43 H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe (eds.), *Handbook of Semidefinite Programming*, Kluwer, 2000

In de verdediging

| In defence



Condition numbers in the boundary element method: shape and solvability

Willem Dijkstra

“Het is een misvatting dat wij steeds meer weten. Weliswaar vergaart het mensdom steeds meer kennis, de doorsnee mens heeft echter steeds minder kennis.” Zo luidt één van de stellingen bij het proefschrift *Condition numbers in the boundary element method: shape and solvability* van Willem Dijkstra. Op 17 april 2008 promoveerde hij aan de TU/e bij Bob Mattheij en Michiel Hochstenbach. Willem vond het fijn om eens een keer een onderwerp tot op de bodem uit te zoeken, maar beseft dat zulk diepgaand onderzoek een keerzijde heeft. Dat is een reden voor deze stelling: naar eigen zeggen gaat de kennis die hij de afgelopen vier jaar heeft opgedaan weliswaar vrij diep, maar is die kennis gelijk ook heel smal. De stelling zinspeelt daarnaast op de algemene doelstellingen met betrekking tot het vergaren van kennis, die voortdurend naar beneden worden bijgesteld: van basisschool tot en met universiteit wordt het curriculum steeds verder uitgetekend.

Schaal van een gebied is bepalend voor oplosbaarheid

In zijn proefschrift heeft Willem de conditiegetallen van matrices in de Boundary Element Method (BEM) onderzocht. De BEM is een numerieke methode om randwaardeproblemen mee op te lossen. In de BEM moet uiteindelijk een lineair stelsel vergelijkingen worden opgelost. De oplosbaarheid van dat stelsel wordt onder andere bepaald door het conditiegetal van de bijbehorende systeemmatrix. Dat conditiegetal wordt berekend door de grootste en kleinste singuliere waarde van de matrix op elkaar te delen; bij symmetrische matrices kunnen de grootste en kleinste eigenwaarden gedeeld worden. Als het conditiegetal klein is, dat wil zeggen, dicht bij een, dan is de matrix goed geconditioneerd, en kan het bijbehorende stelsel gemakkelijk worden opgelost. Als het conditiegetal oneindig groot is, dan is het stelsel niet op te lossen.

Het belangrijkste resultaat in het proefschrift is dat de schaal van een gebied uitmaakt of een randwaardeprobleem oplosbaar is met de BEM. Dit gaat geheel in tegen de intuïtie; of een gebied nu wordt geschaald in centimeters of inches, dat zou geen verschil mogen maken voor de oplosbaarheid van het probleem. Voor de BEM is dit dus voor sommige problemen wel het geval. Sterker nog, voor dergelijke problemen blijkt het conditiegetal van matrices in de BEM niet alleen af te hangen van de grootte van het gebied waarop het randwaardeprobleem gedefinieerd is, maar kan elk gebied dusdanig geschaald worden dat het conditiegetal oneindig groot wordt. Dit geldt voor verschillende randwaardeproblemen, zoals de Laplacevergelijking, de bi-harmonische vergelijking, en de Stokesvergelijkingen. Bijvoorbeeld, voor de Laplacevergelijking op een cirkel is het conditiegetal oneindig groot als de straal van de cirkel één is. In dat geval kan de BEM dus niet gebruikt worden om het probleem op te lossen.

Willem legt uit, dat de oorzaak voor dit verschijnsel ligt bij de inte-

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

graalvergelijkingen waarop de BEM gebaseerd is. In die vergelijkingen komt een logaritmische term voor, afkomstig van de fundamenteel oplossing voor de differentiaaloperator. Deze term zorgt ervoor dat een herschaling van het gebied verandert in een additieve term. Dit wijzigt het karakter van de integraalvergelijkingen dusdanig dat ze singulier kunnen worden bij bepaalde schalingen. Dit heeft dan weer directe gevolgen voor de lineaire stelsels in de BEM; ook die kunnen singulier worden. Uiteraard geeft het proefschrift een aantal strategieën om ervoor te zorgen dat de stelsels wel altijd oplosbaar zijn.

Puzzelstukjes vallen op hun plaats

Hoewel Willems promotieonderzoek naar eigen zeggen behoorlijk soepeltjes is verlopen, waren er toch ook lastige periodes. Vooral wanneer hij een numeriek bewijs had dat zijn hypothese wel klopte, maar het wiskundige bewijs niet rond kreeg, had hij het weleens moeilijk. Maar net als hij de moed bijna had opgegeven, kwam dan toch de doorbraak, en was het bewijs alsnog waterdicht. Mooie momenten als beloning voor stug doorzetten!

Gevraagd naar een specifieke goede herinnering, noemt Willem een congres over de BEM, waar hij zijn werk had gepresenteerd. Een wiskundige uit Zuid-Afrika sprak hem na afloop aan om te vertellen dat hij nu eindelijk begreep waarom zijn BEM-implementatie verkeerde resultaten gaf op de eenheidscirkel. Veiligheidshalve schaalde hij zijn cirkels altijd naar cirkels met een straal kleiner dan één, al had hij geen idee waarom hij dan wel goede resultaten kreeg. Nu vielen alle puzzelstukjes op hun plaats.

Vrijheid

Willem roemt de vrijheid die je als aio hebt. Hij vond het heerlijk om zelf zijn weg te vinden, zijn onderzoek te sturen. Wat dat betreft is hij zijn promotor dankbaar dat die hem zoveel heeft vrijgelaten, en ook altijd vertrouwen had in een goed afloop. Zoals gezegd vond hij het ook fijn om eens een keer een onderwerp tot op de bodem uit te zoeken, iets wat hij tijdens zijn afstudeerproject wel een beetje had gemist. Naast zijn promotor was er ook nog de copromotor, met wie hij heerlijk heeft kunnen steggelen over wiskundige details. Het was zeer inspirerend om gezamenlijk door een bewijs heen te lopen, en het indien nodig te verbeteren. De samenwerking was altijd erg plezierig en heel vruchtbaar.

Hoewel Willem het duidelijk erg naar zijn zin heeft gehad tijdens zijn promotieperiode, heeft hij toch de overstap gemaakt naar het bedrijfsleven. Sinds mei 2008 werkt hij als technisch specialist bij Mecal, een ingenieursbureau in Veldhoven. Hij voert op consultancybasis thermische analyses uit voor bedrijven in de halfgeleidersindustrie. Daarvoor wordt veelal de eindige elementen methode gebruikt. Intussen probeert hij wel om toch een beetje contact te houden met 'de echte wiskunde', en hij sluit zelfs niet uit dat hij ooit nog terugkeert naar de academische wereld. Maar voorlopig probeert hij zijn draai te vinden als technisch consultant.



Crack propagation on highly heterogeneous composite materials

Miguel Dias

Before he came to the Netherlands, Miguel Patrício Dias studied pure mathematics in Portugal, his home country. Even though he learned a lot, he figured that he would be better motivated by something more applied. When he asked around to find out where to go, The Netherlands and in particular the group of Bob Mattheij in Eindhoven were among the places that were recommended. At the time, Miguel happened to have a brother living in The Netherlands, and when visiting him, he took the opportunity to also pay a visit to the Technical University of Eindhoven. He met up with Bob Mattheij, had a brief chat with him and was then guided around by a Ph.D. student. Everything was very unpretentious and practical and people were very open, so that he immediately realised that the group working in CASA was what he was looking for: a great group with a very practical spirit that enables them to do mathematics that the industry can use.

Disappointing lunches

As a result, Miguel became a member of CASA four years ago, and on September 23 he successfully defended his Ph.D. thesis *Crack propagation on highly heterogeneous composite materials*. He enjoyed being a student in The Netherlands, where he easily felt like at home. In CASA, the work environment was great, people were friendly and he had lots of fun with his colleagues. The only problem Miguel still has with the Netherlands, is the Dutch food: in particular lunch has always been a disappointment for him. Although he is afraid he will never get used to the food, The Netherlands have become like a second home country. At the time of writing, he didn't know yet what would be the next step in his career, but he was certain that his next job would be either in Portugal or in The Netherlands.

Crack propagation in heterogeneous media

The problem Miguel worked on was mostly a theoretical problem that is however definitely of practical interest and was posed by Bert de With, a TU/e chemist. His thesis, written under guidance of Bob Mattheij and Michiel Hochstenbach, deals with the problem of crack growth in composite materials, which are composed of several different linear elastic constituents that do not dissolve or blend into each other. This heterogeneity makes the problem much more complicated, both to model and to solve, than a similar problem in a homogeneous material. Based on the existing model for crack propagation in homogeneous linear elastic media and on studies of crack behaviour at the interface between two materials, Miguel and his advisors tried to model the situation where the crack is propagating in composite materials. Their basic idea was to look at this problem at the length scale of the constituents only in the vicinity of the crack tip and at the macroscale everywhere else.

The more complicated bit was that several elasticity problems had to be solved. As the crack propagates, its tip changes position and,

since the crack is modelled as a long 'hole', the geometry of the problem changes as well. Therefore, in every next numeric step, the crack tip occupies a different position and the geometry of the problem is updated. As for homogeneous materials, the next position of the crack tip is found as a function of the stresses in the crack tip region. This implies that the underlying elasticity problem needs to be solved at every step (i.e., the stresses and displacements fields must be determined everywhere for the cracked plate). To complicate things even more, the highly heterogeneous material now implies that the coefficients of the partial differential equations vary along the domain. Thus, employing something like finite element methods directly is not an option, because very fine meshes would have to be employed, which would lead to prohibitive computational costs. Now, Bert de With, an experienced chemist, wanted the best of both worlds, a process that was accurate but computationally feasible. This is why Miguel started to look at the problem on the two scales mentioned above. His 'hybrid approach' is to solve the problem on short length scales around the crack tip. Then homogenisation techniques are employed far away from the crack tip, and finally domain decomposition is used to couple this analysis with the analysis over the crack tip region. Indeed, if homogenisation were used everywhere, the heterogeneous nature of the problem would be disregarded. But when one is interested in crack propagation, the heterogeneities far away from the crack can indeed be ignored.

Several best moments

The first couple of years of Miguel's Ph.D. were a bit hard. The problem he had to deal with was very complex and it had little to do with his experience until then. He tried employing several different approaches but it seemed like he would always bump into complications and dead ends. It was a period of doing a lot of work but not seeing the results, which was frustrating. On the other hand, it was quite a learning experience and he perhaps learned his most valuable lessons during this period. Of course he had many good moments, too, for example when he

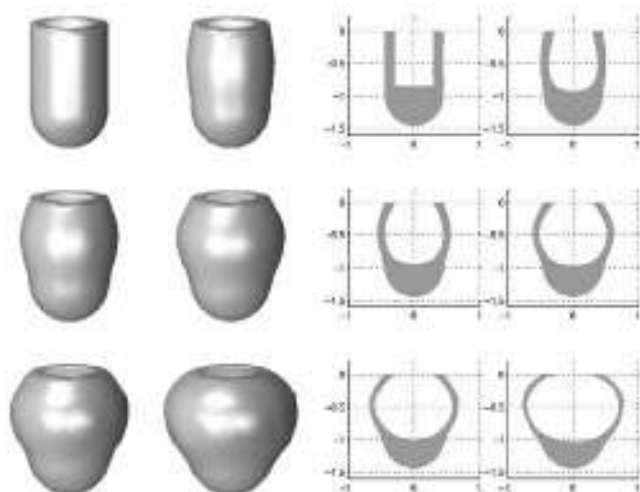
got his first paper accepted, whenever he had the chance to present his work to colleagues and get their feedback and naturally when he handed in the draft and later the final version of his thesis. But the first 'best moment' that comes to mind is a conference he went to. He was not very keen on going to such events because they often felt a bit useless, particularly in the first couple of years of his studies. That's why he did not attend any major conference during a long period. His thesis advisor, who was not very pleased with this, then made him go to a conference which happened to be in Hawaii. Not only did Miguel learn a lot, but – needless to say – he also had a lot of fun.

With his thesis advisor Bob Mattheij he had weekly meetings, where they talked about mathematics and many other things. Every aspect of Miguel's work was discussed with him. Bert de With had a very important role, too. The idea for the project originally stemmed from his experience and his discussions with professor Mattheij, and Miguel also had regular meetings with him. Finally, his thesis co-advisor was always critical and gave many useful tips. He helped Miguel out many times when he had smaller questions and in the review of his work.

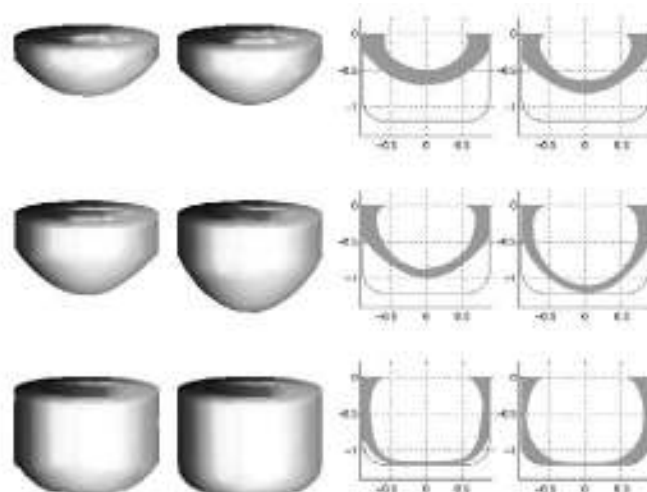
Pretty modest

When Miguel was asked which of the results in his thesis is his favourite or the most important one, he answered that most of his results are pretty modest per se, but that he particularly likes the algorithm in the last chapter of the thesis. It gives a way to predict the path that will be followed by a crack propagating in a layered material. According to Miguel it is sometimes important to write things in the form of algorithms, because it allows people to reproduce the results easily by themselves and even to adapt the procedures for their own problems. He likes this algorithm in particular because even though it is simple, it required so much work. It was only possible to write it after all other chapters were complete.

With such rewarding results, it is not surprising that he hopes to stay in academia to continue scientific research. ←



Enkele glasblaasmodellen uit het proefschrift van Willem Dijkstra



Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

bmols@orange.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2007

Meer gewas in gesloten kas

In een nieuw type tuinbouwkas kunnen zowel warmte als kou onder de grond worden opgeslagen en hoeven de ramen nooit meer open. De vraag wordt hoe de tuinder de klimaatregeling in de kas zo efficiënt mogelijk kan regelen.

Een gewone tuinbouwkas heeft een simpele klimaatcontrole. Met de verwarmingsketel regel je de warmtetoevoer, en de koeling regel je door de ramen open of dicht te doen. Als het koud is, zijn de ramen dicht en staat de ketel aan. Als de zon gaat schijnen, gaat de ketel uit. Maar dan kan het al snel te warm worden in de kas, en moeten de ramen open. In een tuinbouwkas is eerder de koeling een probleem dan de verwarming.

Een bijkomende complicatie is dat de plant water verdampt om zichzelf te koelen. Dat vocht hoopt zich in de kas op. Wordt de kas nu te vochtig, dan moeten de ramen open. Zo kan het gebeuren dat in een gewone kas zowel de verwarming aan moet — omdat het buiten koud is — als de ramen open — omdat de kas anders te vochtig wordt. Om de kas niet te vochtig te laten worden, verbruikt hij dus veel energie.

Adviesbureau Ecofys — gespecialiseerd in duurzame energie, energiebesparing en klimaatbeleid — vermoedde dat het energieverbruik van een kas efficiënter moest kunnen en bedacht het idee van een gesloten kas. Het basisidee is om de ramen voortdurend dicht te houden, en de warmte of koude niet weg te gooien, maar op te slaan en te gebruiken als

het nodig is. Gebruik 's zomers de kou die je 's winters hebt opgeslagen en omgekeerd. Zo kunnen de ramen dicht blijven, wat als extra voordeel heeft dat de concentratie koolstofdioxide hoger wordt, waardoor de planten nog beter groeien. Zonlicht, temperatuur, vochtigheid en koolstofdioxidegehalte bepalen samen hoe de plant groeit.

De warmte wordt in de grond opgeslagen in een warmtebron, en de koude in een aparte koudebron. De bronnen liggen typisch enkele honderden meters uit elkaar en zijn zo'n honderd meter diep. In beide gevallen is de bron een *aquifer*: een poreuze zandlaag met daarin water, afgeschermd door een ondoordringbare kleilaag. 's Zomers kan er koud water uit de koudebron worden gepompt, en kan warm water in de warmtebron worden opgeslagen. 's Winters gaat het omgekeerd. Omdat de warmte-uitwisseling met de aquifers relatief langzaam verloopt, heeft de gesloten kas ook nog twee bovengrondse watertanks die snel warmte of koude kunnen leveren.

Het Nederlandse bedrijf Innogrow is net als Ecofys een dochter van Econcern. Innogrow ontwikkelt nu het idee verder tot een nieuw type tuinbouwkas voor de teelt van gewassen: de *GeslotenKas*®. Een model van

de GeslotenKas bestaat uit vier belangrijke componenten: de plant (waarvoor een biologisch model wordt gebruikt); het klimaat in de kas (afhankelijk van de interne klimaatregulering maar ook van het weer); de energievoorziening (productie van warmte en koude en elektriciteit) en tenslotte de kosten en de opbrengsten (een economisch model). Een aantal van deze kassen is al verkocht en gebouwd.

Energieverbruik minimaliseren

De vier componenten van de kas moeten nu zo op elkaar zijn afgestemd dat het gewas tegen zo min mogelijk kosten zoveel mogelijk geld op de markt opbrengt. Innogrow wil graag weten hoe de GeslotenKas geoptimaliseerd kan worden en legde dit probleem voor aan de studiegroep.

Wiskundige Jaap Molenaar van de Wageningen Universiteit: "De vraag is gemakkelijk te stellen, maar we hebben lang gediscussieerd over wat je precies wilt en kunt optimaliseren. In het probleem zitten namelijk veel moeilijk grijpbare factoren. De prijs van gas en elektriciteit bijvoorbeeld. Die wordt bepaald door het energiebedrijf. Bij een andere prijs krijg je ongetwijfeld een andere optimale oplossing. Maar ook de prijs van de tomaten of de sla op de markt speelt een rol. Je kunt wel veel tomaten produceren, maar als op dat moment de prijs laag is, schiet het nog niet op

met je omzet. En wat doe je met de verwachte hoeveelheid zonneschijn?”

In overleg met Innogrow koos de studiegroep uiteindelijk voor het optimaliseren van het energieverbruik. Lou Ramaekers van Innogrow: “Het deelprobleem wordt dan om de gebruikte energie te minimaliseren, gegeven dat de tuinder weet welk klimaat hij in de kas moet aanleggen, en gegeven de energieprijzen. Wij hadden zelf wel eens wat gerekend met een genetisch algoritme, maar dat werd al snel erg bewerkelijk. Wij hoopten dat de studiegroep een slimmere oplossing zou bedenken.”

Lineair programmeren

De studiegroep stortte zich vervolgens op het minimaliseren van de verbruikte energie voor een gemiddeld jaar. Innogrow heeft gegevens over hoeveel zonneschijn er gemiddeld is te verwachten op elk uur van de dag in dat gemiddelde jaar. De input die de wiskundigen gebruikten, bestaat uit de gemiddelde hoeveelheid zonneschijn per uur en de geschatte prijzen van gas en elektriciteit per uur.

Molenaar: “Het probleem blijkt vervelende randvoorwaarden te hebben. Zo moeten de aquifers na een jaar net zoveel warmte en koude hebben afgegeven als opgenomen. Anders zou het systeem de grond opwarmen of afkoelen en dat is wettelijk niet toegestaan. En zowel de boven- als ondergrondse vaten hebben een beperkte capaciteit. Datzelfde geldt voor de warmtepompen en de boilers. Nog lastiger wordt het met een speciaal soort boiler, die Combined Heat Power heet. Deze werkt op gas, en genereert behalve warmte ook elektriciteit. En die elektriciteit kun je in de kas weer gebruiken, maar je kunt hem ook aan het energiebedrijf leveren tegen een prijs die het energiebedrijf bepaalt. Dan moet je gaan uitrekenen wat financieel het meeste opbrengt: zelf gebruiken in de kas, of terugkopen aan het energiebedrijf. Dat zorgt voor lastige terugkoppelingen in het systeem. Alle randcondities samen bepalen wat wel en niet kan.”

Het wiskundige model voor het energieverbruik van de GeslotenKas is nu een reeks van energievergelijkingen die bepaald wordt doordat op elk knooppunt in het netwerk evenveel energie in moet komen als er uit gaat. De beperkte capaciteiten van pompen en reservoirs vormen de randvoorwaarden.

Zo ontstaat een stelsel van vijftien energiebehoudsvergelijkingen, met vijftien randvoorwaarden. Molenaar: “De toestand van de GeslotenKas wordt op elk uur beschreven door een toestandsvector van ongeveer der-



Een inktij in een GeslotenKas® waarin tomatenplanten groeien in een goot op substraat. Daaronder lopen de luchtslangen die dienen om het kasklimaat te conditioneren. In de wanden van de slangen zitten gaten waardoor koude of warme lucht de kas wordt ingeblazen. Aan het begin van de slang (in de achtergrond op de foto) staan kasten met ventilatoren die de lucht in de slang blazen.

Foto: Innogrow ©

tig componenten: bijvoorbeeld hoe vol is een reservoir, wat zijn de warmte- of koudestromen in een verbindingspijp en wat is de energiebehoefte op dat uur? Vervolgens moet je op elk uur in een jaar die componenten zodanig kiezen dat de energiekosten voor het gehele jaar zo laag mogelijk zijn. Dit optimalisatieprobleem heeft dus zo'n $365 \times 24 \times 30 = 262.800$ onbekenden.”

De grote stap voorwaarts is volgens Molenaar behaald doordat de vergelijkingen en de te optimaliseren functie lineair zijn gemaakt in de toestandsvector. Daardoor wordt het probleem zelfs voor een periode van een heel jaar behapbaar. De wiskundigen pakten standaard software op het terrein van het lineair programmeren uit de kast en brachten het model precies in de juiste vorm voor het softwarepakket.

“Voor het doorrekenen van een heel jaar, ontbrak ons de tijd”, zegt Molenaar “maar met de methode die er nu ligt, kan Innogrow dat zelf doen. Daaruit volgt dan hoe ze de regeling voor een gemiddeld jaar moeten instellen en daaruit volgen waarschijnlijk ook adviezen over de capaciteiten van reservoirs en pompen. Een echt jaar wijkt uiteraard af van het gemiddelde jaar dat wij als invoer hebben gekozen, maar je kunt je voorstellen dat de tuinder in de praktijk een beetje om de optimalisatie voor een gemiddeld jaar heen regelt – een soort fijnafstemming dus.”

Hoe niet-lineair is het probleem?

Wat Innogrow concreet aan de resultaten heeft, is volgens Lou Ramaekers van het bedrijf nog onduidelijk. “Ik vind het interessant wat er is uitgekomen, maar er zitten ook veel benaderingen in. Het is een allereerste begin. Om echt te weten wat deze aanpak oplevert, hebben we toch de berekeningen voor een heel jaar nodig, en daar gaan we nog verder naar kijken.”

De studiegroep concentreerde zich nu op het energieverbruik omdat het probleem anders te ingewikkeld werd om in een week aan te pakken. “Door alleen naar de energie te kijken, kon het probleem gelineariseerd worden”, vertelt Ramaekers. “In werkelijkheid werk je met waterstromen en temperaturen, en die twee vermenigvuldig je met elkaar om de energie-inhoud te berekenen.

Ze zijn onafhankelijk van elkaar. Een waterstroom varieert continu. En de temperatuur bepaalt niet alleen hoeveel energie het water met zich meedraagt, maar ook hoe efficiënt een apparaat in het systeem werkt. De watertemperatuur bepaalt bijvoorbeeld mede het rendement van een warmtepomp. Dat is een belangrijke ontwerpfactor en zo ontstaat een niet-lineair probleem. Het kan zijn dat de linearisatie voor het optimaliseren van het probleem toch een verantwoorde aanneme is, maar dat moeten we nog verder onderzoeken.”



Harrie de Swart

Departement Wijsbegeerte

Universiteit van Tilburg

Postbus 90153

5000 LE Tilburg

H.C.M.deSwart@uvt.nl

Maatschappij

Over de machtsverhoudingen in de EU

In juni 2007 heeft Polen geprobeerd het stemgewicht binnen de Europese Unie op een eerlijker manier verdeeld te krijgen: elk land krijgt het aantal stemmen dat evenredig is met de vierkantswortel van het aantal inwoners. Dit leidde tot forse weerstand vanuit allerlei grote Europese landen en diplomatiek bezoek van de leiders van Frankrijk, Oostenrijk en Spanje. In Polen werd het huidige stemgewicht als onrechtvaardig gezien en de vierkantswortel als wetenschappelijk gebaseerd. De tweelingbroer van de Poolse premier, Jaroslaw Kaczynski, kondigde aan dat hij desnoods bereid was om te sterven voor de vierkantswortel. Waar is de vierkantswortel op gebaseerd? Harrie de Swart, hoogleraar logica en taalanalyse aan de Universiteit van Tilburg, geeft uitleg.

In de context van stemgewichten in een Unie kan het begrip *macht* (van een lid in de Unie) op adequate wijze gedefinieerd worden: de *Penrose-Banzhafmachtsindex*. In de Ministerraad (MR) van de Europese Unie (EU) hebben verschillende landen verschillende gewichten. Een voorstel wordt aangenomen als de som van de gewichten van de voorstemmers groter of gelijk is aan een zeker vastgesteld quotum. Onder het verdrag van Nice, dat tot 2009 van toepassing is, is het quotum zo hoog (ongeveer 74%) dat de kans dat een voorstel in de MR wordt aangenomen ongeveer 1 op 50 is. Onder de Conventie (2003) wordt voor het eerst het stemgewicht van een land evenredig genomen met de bevolkingsomvang. Hierdoor wordt het principe van *één Burger, één Stem* geschonden, hoewel men zegt dit principe juist te onderschrijven. Penrose toonde in 1946 al aan dat realisatie van dit principe vereist dat de macht van ieder land evenredig is met de wortel van het aantal kiezers in dat land.

Gewicht versus macht

Op het eerste gezicht zou men kunnen denken dat een groter aantal zetels of stemmen in een besluitvormend orgaan, zoals de Tweede Kamer of de Ministerraad (MR) van de Europese

Unie (EU), een grotere macht voor de betreffende partij of het betreffende land betekent. Dat hoeft echter geenszins het geval te zijn, zoals het onderstaande voorbeeld illustreert.

Beschouw drie landen, NL, B en L, die een fictieve Unie vormen, waarbij ieder land een zeker gewicht heeft in termen van het aantal zetels of stemmen. Veronderstel dat het gewicht van een land evenredig wordt genomen met de bevolkingsomvang, en dat besluiten bij meerderheid worden genomen. Als we dan L 1 stem geven, moet B 22 stemmen krijgen en NL 34. Dan is het totaal aantal stemmen dus 57 en besluiten bij meerderheid betekent dan dat een voorstel wordt aangenomen als er minstens 29 stemmen voor dat voorstel zijn. We noemen 29 dan het *quotum* q : het minimum aantal stemmen dat voor een gegeven voorstel moet zijn, wil het voorstel worden aangenomen.

Wat blijkt nu? Dat NL de absolute macht heeft: als NL voor een voorstel is, wordt het aangenomen; is NL tegen een voorstel, dan wordt het verworpen, omdat B en L samen onvoldoende stemmen hebben om een voorstel zonder steun van NL aangenomen te krijgen. De stem van B en L doet er niet toe; zij hebben geen enkele macht. De stem van NL is in alle gevallen doorslaggevend. We drukken dit uit

door te zeggen dat de machtsindex van NL 1 is en die van B en L 0.

	NL	B	L	
gewicht:	34	22	1	$q = 29$
machtsindex:	1	0	0	

Dit is uiteraard onbevredigend voor B en L. Laten we daarom het quotum verhogen tot bijvoorbeeld $q = 35$. Dan krijgen we de volgende situatie:

	NL	B	L	
gewicht:	34	22	1	$q = 35$

NL heeft nu de steun nodig van minstens één van de twee andere landen om een voorstel aangenomen te krijgen; anderzijds B en L samen zijn zonder de steun van NL nog steeds niet in staat een positieve uitkomst te bewerkstelligen. Om een indruk te krijgen van de 'macht' van NL onderscheiden we 4 gevallen:

1. B en L stemmen beide voor;
 2. B stemt voor en L tegen;
 3. B stemt tegen en L voor;
 4. B en L stemmen beide tegen.
- In 3 van de 4 gevallen, nl. in geval (1), (2) en (3), is de stem van NL beslissend voor de uitslag. Daarom zeggen we dat de machtsindex van NL $\frac{3}{4}$ is.

Om de machtsindex van B te bepalen bekijken we eveneens 4 gevallen:

1. NL en L stemmen beide voor;
 2. NL stemt voor en L tegen;
 3. NL stemt tegen en L voor;
 4. NL en L stemmen beide tegen.
- In 1 van de 4 gevallen, nl. in geval (2), is de stem van B beslissend voor de uitslag. Derhalve zeggen we dat de machtsindex van B $\frac{1}{4}$ is. Ook de machtsindex van L blijkt $\frac{1}{4}$ te zijn. De relatieve macht van ieder lid wordt gevonden door de machtsindex te delen door de som

van alle machtsindices, in dit voorbeeld door $\frac{5}{4}$.

	NL	B	L	
gewicht:	34	22	1	$q = 35$
machtsindex:	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
relatieve macht:	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	(normaliseren)

Merk op: B en L hebben gewicht 22, resp 1, maar dezelfde machtsindex! Dus: de machtsindex van een land of partij hoeft niet evenredig te zijn met het gewicht van dat land, respectievelijk partij. De machtsindex hangt niet alleen af van het gewicht, maar ook van het quotum!

Laten we ter illustratie NL en B beide gewicht 22 geven en weer bij meerderheid stemmen ($q = 23$):

	NL	B	L	
gewicht:	22	22	1	$q = 23$
machtsindex:	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	
relatieve macht:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(normaliseren)

Om bijvoorbeeld de machtsindex van L te berekenen beschouwen we weer de volgende vier gevallen:

1. NL en B stemmen beide voor;
2. NL stemt voor en B tegen;
3. NL stemt tegen en B voor;
4. NL en B stemmen beide tegen.

In 2 van de 4 gevallen, nl in geval (2) en (3), is de stem van L beslissend voor de uitslag. Derhalve is de machtsindex van L $\frac{2}{4}$.

NL en B met minstens 22 keer zoveel inwoners als L hebben nu dezelfde machtsindex als L! Dit illustreert wederom dat de machtsindex niet evenredig hoeft te zijn met het gewicht. Ook het volgende voorbeeld illustreert dit nog eens op wel heel overtuigende wijze.

Beschouw de Tweede Kamer met 150 zetels, quotum $q = 75$ en 3 partijen L(inks), M(idden) en R(echts):

	L	M	R	
gewicht:	74	2	74	$q = 75$
machtsindex:	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	
relatieve macht:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

Men gaat eenvoudig na dat de partij met 2 zetels dan evenveel 'macht' heeft als de partijen met 74 zetels! Elke partij heeft de instemming nodig van minstens één andere partij om een voorstel goedgekeurd of afgekeurd te krijgen. Derhalve is de relatieve macht van elk van de drie partijen $\frac{1}{3}$.

De machtsindex van een land (partij, kiezer) is in 1946 geïntroduceerd door Lionel Penrose in de context van de Verenigde Naties, in 1965 herontdekt door Banzhaf en gedefinieerd als de kans dat een land (partij, kiezer) beslis-

send of doorslaggevend is voor de uitslag, dwz. in een positie is om de uitslag te bepalen, zulks onder de veronderstelling dat elke stemconfiguratie even waarschijnlijk is.

Stel er zijn n leden (landen, partijen, kiezers). Dan zijn er voor ieder lid 2^{n-1} mogelijke combinaties van stemmen (stemconfiguraties) van de overige $n - 1$ leden. Bijvoorbeeld, bij 3 leden, NL, B en L, bestaan er voor ieder lid $2^2 = 4$ mogelijke combinaties van stemmen van de overige 2 leden.

Definitie 1 De Penrose-Banzhaf machtsindex van lid i is per definitie het aantal stemconfiguraties van de overige leden waarbij i beslissend of doorslaggevend is voor de uitslag, gedeeld door 2^{n-1} .

In de literatuur treft men vele andere machtsindices aan, met name de Shapley-Shubik index (zie o.a. [1]), maar men kan overtuigend argumenteren dat de hier genoemde de enige adequate is; zie [6]. Als we verderop over macht spreken, zullen we daarmee steeds de Penrose-Banzhaf machtsindex bedoelen.

Het Vermogen om te Handelen

Het heeft natuurlijk geen enkele zin om een besluitvormende instantie in te richten die nooit een positief besluit zal kunnen nemen, zoals wanneer het quotum hoger is dan de som van het aantal stemmen. Ook als we bijvoorbeeld unanimiteit eisen, wordt de kans dat een voorstel wordt aangenomen bij een wat groter aantal besluitvormers wel erg klein.

Laten we eens kijken naar ons voorbeeld van de Tweede Kamer met drie partijen L, M en R met respectievelijk 74, 2 en 74 stemmen/zetels. Wat is in dit voorbeeld de kans dat een voorstel wordt aangenomen, veronderstellende dat elke stemconfiguratie even waarschijnlijk is? Gemakshalve introduceren we een stukje notatie: met bijvoorbeeld stemconfiguratie MR bedoelen we de configuratie waarbij zowel M als R beide voor stemmen en L tegen stemt. Bij drie partijen zijn er dan in totaal 8 verschillende stemconfiguraties. Bij 4 van die 8 configuraties, namelijk bij LM, LR, MR en LMR, wordt het betreffende voorstel aangenomen. Daarom drukken we het vermogen om te handelen van de Tweede Kamer in ons voorbeeld uit met de index $\frac{4}{8}$.

Stel N is een verzameling van n leden (landen, partijen, kiezers). Een stemconfiguratie heet *winnend* indien een voorstel bij die stemconfiguratie wordt aangenomen.

Definitie 2 (Coleman, 1971) Het vermogen

van N om te handelen is het aantal winnende stemconfiguraties gedeeld door het totale aantal stemconfiguraties (2^n).

Voorbeeld:

	NL	B	L	
gewicht:	6	4	1	$q = 7$
machtsindex:	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
relatieve macht:	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
NL	B	L	winnend	beslissend
+	+	+	ja	NL
+	+	-	ja	NL B
+	-	+	ja	NL L
+	-	-	nee	
-	+	+	nee	
-	+	-	nee	
-	-	+	nee	
-	-	-	nee	

2^3 stemconfiguraties

Bij de gegeven gewichten en het gegeven quotum is het vermogen van de unie, bestaande uit NL, B en L, om te handelen dus gelijk aan $\frac{3}{8}$.

De Europese Unie (EU)

We beperken ons hier tot de beslisregel van de Europese Ministerraad (MR), het voornaamste wetgevende orgaan van de Europese Unie.

De EU is een unie van staten en een unie van burgers. Het ligt voor de hand – of het is op zijn minst verdedigbaar – om de MR te baseren op het principe van *één staat, één stem*, zoals in de senaat van de USA; en het Europees Parlement (EP) te baseren op het principe van *één burger, één stem*, zoals in het Amerikaanse Huis van Afgevaardigden. Echter, men heeft er voor gekozen

1. ook de MR te baseren op het *één burger, één stem* principe;
2. – voor het eerst in de Conventie (2003) – zulks te doen door het gewicht van een land evenredig te nemen met de bevolkingsomvang.

We zullen verderop zien dat (2) onjuist is, zoals in 1946 aangetoond door Lionel Penrose.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van de eerste vijf perioden van de Europese Unie, met tussen haakjes de huidige bevolkingsomvang in miljoenen, voorts de gewichten en quota, en het vermogen (A) om te handelen, uitgedrukt in percenten. Dus A is 15% betekent dat in 15 van de 100 gevallen een voorstel wordt aangenomen, onder de veronderstelling dat elke stemconfiguratie even waarschijnlijk is.

Bij elke uitbreiding werd de kiesregel voor

		Rome				
Land		1958	1973	1981	1986	1995
Duitsland	D (82)	4	10	10	10	10
Italië	I (57)	4	10	10	10	10
Frankrijk	F (58)	4	10	10	10	10
Nederland	NL (16)	2	5	5	5	5
België	B (10)	2	5	5	5	5
Luxemburg	L (0,5)	1	2	2	2	2
Groot Brittanië	GB (59)		10	10	10	10
Denemarken	DK (5)		3	3	3	3
Ierland	IRL (4)		3	3	3	3
Griekenland	GR (10)			5	5	5
Spanje	E (39)				8	8
Portugal	P (10)				5	5
Zweden	S (9)					4
Oostenrijk	A (8)					4
Finland	SF (5)					3
totaal		17	58	63	76	87
quotum		12	41	45	54	62
quota %		70,6	70,7	71,4	71,0	71,2
A %		21	15	14	10	8

de MR ad hoc, na onderhandelingen, afgesproken. Merk op dat de landen met een grote bevolkingsomvang verhoudingsgewijs minder gewicht hebben dan de kleinere landen. Zo heeft Italië bijna 4 keer zoveel inwoners als Nederland, maar het stemgewicht van Italië is in de eerste 5 perioden slechts 2 maal zo groot als dat van Nederland. Merk voorts op dat de besluitvaardigheid van de EU, het vermogen (A) om te handelen, monotoon afneemt over de jaren.

In 2001 werd het *Verdrag van Nice* gesloten, dat geldig is van 1 Januari 2005 tot 31 Oktober 2009. Dit verdrag voorziet in diverse scenario's:

– een scenario met de 15 bestaande leden: D, I, F, NL, B, L, GB, DK, IRL, GR, E, P, S, A, SF; en
– een scenario met 25 (27) leden: de vorige aangevuld met Polen (PL), Tsjechië (CS), Hongarije (H), Cyprus (CY), Malta (M), Slowakije, Litouwen, Letland, Slovenië, Estland (Roemenië en Bulgarije).

De belangrijkste wijzigingen in het verdrag van Nice ten opzichte van eerdere kiesregels voor de MR zijn:

1. Nieuwe gewichten worden toegekend aan de bestaande leden en aan de 12 potentiële leden;
2. Het quotum q in het scenario van 27 leden wordt verhoogd van ongeveer 71% tot bijna 74% van het totale gewicht;
3. Twee nieuwe condities worden toegevoegd: minstens de helft van het aantal landen moet voor stemmen en hun bevolkingsomvang moet minstens 62% van de

totale bevolking van de EU zijn.

Vooraf vanwege het hoge quotum in het Nice scenario van 27 leden is Coleman's index van de MR van de EU om te handelen ongeveer $\frac{1}{50}$. Dus de kans dat er in de MR een voorstel passeert is ongeveer 1 op 50.

Voor een uitgebreide analyse van het verdrag van Nice zie [2].

Bij de *Conventie* (2003) wordt voor het eerst het gewicht van een land evenredig genomen aan de bevolkingsomvang. Dit is in strijd met de *regel van Penrose* (1946): "In a federal assembly of nations ... the voting power of each nation ... should be proportional to the *square root* of the number of people on each nation's voting list". Als gevolg hiervan is de relatieve macht van de 4 grootste leden (D, F, GB en I) groter dan gerechtvaardigd op grond van het *één burger, één stem* principe. Hetzelfde geldt voor de 6 kleinste landen (Letland, Slovenië, Estland, CY, L, M). De relatieve macht van de tussenliggende landen (waaronder NL, B en PL) is kleiner dan waar zij aanspraak op kunnen maken op grond van genoemd principe.

Voor een precieze analyse van de kiesregel volgens de conventie, zie [3].

De regel van (Lionel) Penrose

Stelling 1 De kans dat bij een referendum een kiezer beslissend is, is ongeveer

$$\sqrt{\frac{2}{\pi n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

waarbij n het aantal kiezers is, als we aanne-

men dat de kiezers onafhankelijk van elkaar stemmen, met kans $1/2$ 'ja' of 'nee' stemmen en dat een referendum wordt aangenomen als meer dan de helft van de kiezers "ja" stemt.

Bewijsschets (met dank aan Tom Koornwin-der): Laten we aannemen dat er een oneven aantal kiezers is, zeg $n = 2m + 1$. Een kiezer is beslissend of doorslaggevend als van de overige $2m$ kiezers er precies m vóór stemmen (en dus m tegen).

Het aantal stemconfiguraties waarbij precies m van de $2m$ personen vóór stemmen is gelijk aan $\binom{2m}{m}$ (i). Het totaal aantal stemconfiguraties van de andere $2m$ kiezers is 2^{2m} (ii). Dus de kans dat een kiezer beslissend is, is gelijk aan (i) gedeeld door (ii), dit is $\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}$.

Nu zegt de Formule van Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Dus de kans dat een kiezer beslissend is, is bij benadering

$$\frac{1}{\sqrt{\pi m}} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}},$$

waarbij $n = 2m + 1$ het aantal kiezers is. □

Voor een meer uitvoerig bewijs zie [8].

Dus voor Nederland met $n = 16$ miljoen, is de kans dat een kiezer beslissend is, met andere woorden, de kans dat zijn stem doorslaggevend is voor de uitslag, ongeveer $1/4000$. Voor Duitsland met $n = 82$ miljoen, is die kans ongeveer $1/9000$.

In wat volgt nemen we aan dat bij gegeven voorstel:

- a. ieder land een referendum houdt, en dat vervolgens
- b. de minister van elk land in de MR van de EU stemt conform de uitslag van het referendum in zijn land.

Stel n_i is het aantal kiezers in land i en p_i is de Penrose-Banzhaf machtsindex (power) van land i in de MR van de EU.

Stelling 1 zegt dat de kans, dat een burger in land i bij een referendum beslissend is voor de uitslag van dat referendum, evenredig is met $1/\sqrt{n_i}$. (1)

Bij een machtsindex p_i van land i in de MR

is (per definitie) de kans dat de stem van dat land doorslaggevend is in de MR gelijk aan p_i . (2)

Uit (1) en (2) volgt dan, onder de veronderstellingen a) en b), dat de kans dat de stem van een burger van land i doorslaggevend is met betrekking tot de uiteindelijke beslissing in de MR, evenredig is met het product van (1) en (2), dus met $p_i/\sqrt{n_i}$. (3)

Hieruit volgt onmiddellijk de volgende stelling.

Stelling 2 (De regel van Penrose): *Opdat elke burger in ieder land evenveel macht heeft met betrekking tot de uiteindelijke beslissing in de MR, dient p_i evenredig te zijn met $\sqrt{n_i}$. Alleen dan is $p_i/\sqrt{n_i}$ constant, dat wil zeggen, voor alle landen hetzelfde.*

Uit (3) volgt onmiddellijk: Als we p_i evenredig kiezen aan n_i , zoals in de Conventie van 2003, dan is de macht van een burger in land i met betrekking tot beslissingen in de MR evenredig met $n_i/\sqrt{n_i}$, dus met $\sqrt{n_i}$. Derhalve, hoe groter het land, hoe meer macht een burger van dat land dan heeft.

Een wetenschappelijk onderbouwde kiesregel

Moshe Machover en anderen hebben een fair kiessysteem ontwikkeld voor de MR van de EU, dat wil zeggen een waarbij iedere burger uit elk land evenveel macht krijgt met betrekking tot beslissingen in de MR. Om dat te bereiken moet volgens de regel van Penrose de *macht* van elk land in de MR evenredig zijn met de wortel van het aantal kiezers (de bevolkingsomvang).

Zij beginnen met ieder land een *gewicht* te geven dat evenredig is met de wortel van de bevolkingsomvang. Het blijkt dan dat bij een quorum van 62% bij 25 lidstaten en 60% bij 27 lidstaten de *macht* van elk land met grote nauwkeurigheid evenredig is met de wortel van de bevolkingsomvang.

De kans dat een voorstel wordt aangenomen is dan ongeveer 1 op 5. Dit lijkt redelijk: de status quo verdient een zekere voorkeur behandeling.

De voorgestelde, wetenschappelijk verantwoorde procedure (W), nader beschreven in [7], heeft de volgende voordelen:

1. Iedere burger in ieder land van de EU heeft

evenveel macht met betrekking tot beslissingen in de MR.

2. De procedure is eenvoudig en wetenschappelijk gerechtvaardigd.
3. De procedure kan ook worden toegepast bij toekomstige uitbreidingen; er hoeft niet meer telkens ad hoc onderhandeld te worden.
4. De voorgestelde procedure lijkt een goed compromis tussen die van Nice en die van de Conventie (zie de tabel verderop).

Een groot aantal wetenschappers heeft aan de EU en nationale regeringen een open brief (zie [9]) hierover doen toekomen, maar geen noemenswaardige reacties mogen ontvangen.

Overigens is in Juni 2004 in Brussel een nieuwe overeenkomst betreffende de kiesregel voor de MR vastgesteld met als belangrijkste aanvulling op de kiesregel van de Conventie:

Een voorstel van de Europese Commissie of de EU Minister van Buitenlandse Zaken is aangenomen als het ondersteund wordt door minstens 15 lidstaten, waarvan de bevolking tenminste 65% van de EU bevolking omvat;



Het Europees parlement in Straatsburg (december 2007)

of door tenminste 24 lidstaten (onafhankelijk van de bevolking). Zie [4] voor een gedetailleerde analyse.

Samenvatting en Conclusies

De EU heeft besloten de Ministerraad van de EU te baseren op het *één burger, één stem* principe, in plaats van op het *één staat, één stem* principe. Al in 1946 maakte Lionel Penrose duidelijk dat om dit principe te realiseren de macht, niet het gewicht, van elk land evenredig dient te zijn met de wortel van het aantal kiezers in dat land.

Onder het verdrag van Nice is de macht van een land dichter in de buurt van 'evenredig met de wortel van de bevolkingsomvang' dan bij de conventie, maar is het quotum zo hoog ($\pm 74\%$) dat de kans dat een voorstel wordt aangenomen in de buurt van 1/50 ligt.

Onder de conventie is het *gewicht* van een land evenredig met de bevolkingsomvang, waardoor de *macht* van een land niet meer in de buurt evenredig is met de wortel van de bevolkingsomvang; daardoor wordt het *één burger, één stem* principe geschonden; doordat het quotum verlaagd is naar ongeveer 60% is de kans dat een voorstel wordt aan-

genomen ongeveer 2 op 9.

Hieronder is in tabelvorm een vergelijking voor 8 van de 27 EU landen onder Nice, de Conventie, B(russel) en onder het wetenschappelijk onderbouwde systeem (W). Hierbij is w het gewicht en nBz is de relatieve (genormalizeerde) (Banzhaf) machtsindex in percenten.

Relatieve macht onder Nice, Conventie, B en W

	Nice		Conventie		B	W
	w	nBz	w	nBz	nBz	nBz
D	118	7,71	825	12,79	11,87	9,61
F	117	7,71	596	9,11	8,73	8,13
GB	117	7,71	591	9,04	8,69	8,14
I	117	7,71	571	8,77	8,43	8,03
E	108	7,37	407	6,54	6,37	6,62
PL	108	7,37	382	6,30	5,88	6,56
NL	52	3,99	162	3,39	3,50	4,16
B	48	3,70	104	2,69	2,79	3,35

Dus volgens de wetenschappelijk verantwoorde procedure W zou bijvoorbeeld NL een aandeel van 4,16 percent van de totale macht in de MR moeten hebben, terwijl onder de kiesregels van Nice, de Conventie en Brussel dit aandeel respectievelijk slechts 3,99, 3,39 en 3,50 percent is.

Merk op: vanuit wetenschappelijk perspectief

1. hebben de vier grootste landen te weinig macht onder Nice en te veel macht onder de Conventie en onder Brussel;
2. heeft NL te weinig macht onder Nice en nog minder macht onder de Conventie en Brussel;
3. hebben B en PL te veel macht onder Nice en te weinig macht onder de Conventie en Brussel.

De Poolse regering heeft in 2007 nog geprobeerd de wetenschappelijk verantwoorde procedure ingevoerd te krijgen, volgens welke Polen en de meeste andere landen meer relatieve macht zouden krijgen. Merkwaardig genoeg werd Polen daarin niet gesteund door de meeste andere EU landen, die daar ook belang bij hebben, maar juist afgeschilderd als een lastige partner. Het kan verkeren!

Vermogen tot handelen bij 27 lidstaten

Nice	0,020 :	1 op 50
Conventie	0,219 :	11 op 50
Brussel	0,129 :	6,5 op 50
W	0,198 :	10 op 50

Voor een algemeen populair wetenschappelijk overzichtsartikel, zie [5].

Referenties

- 1 Rob Bosch, 'Politieke Macht en Onmacht', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2003, 294-301.
- 2 Dan S. Felsenthal and Moshé Machover, 'The Treaty of Nice and qualified majority voting', *Social Choice and Welfare*, 18, 2001, 431-464. www.lse.ac.uk/collections/VPP/VPP-pdf/niceqmv.pdf
- 3 Dan S. Felsenthal and Moshé Machover, 'Analysis of QM rules in the draft constitution for Europe proposed by the European Convention, 2003', *Social Choice and Welfare*, 23, 2004, 1-20.
- 4 Dan S. Felsenthal and Moshé Machover, *Analysis of QM Rule adopted by the EU Inter-Governmental Conference Brussels, 18 June 2004*, www.lse.ac.uk/collections/VPP/VPPpdf/QMRule040618.pdf
- 5 Dan S. Felsenthal and Moshé Machover, 'Qualified Majority Voting Explained', *Homo Oeconomicus*, Vol. 21, 2004, 573-596.
- 6 Dan S. Felsenthal and Moshé Machover, 'Voting Power Measurement: a story of Misreinvention', *Social Choice and Welfare*, 25, 2005, 485-506.
- 7 Werner Kirsch, Moshé Machover, Wojciech Slomczynski and Karol Zyczkowski, *Voting in the EU Council - A Scientific Approach*, <http://silly.if.uj.edu.pl/~karol/pdf/KMSZo4.pdf>
- 8 Tom Koornwinder, *De stemverhoudingen in de Europese ministerraad*, <http://www.science.uva.nl/~thk/art/popular/EUstemmen.pdf>
- 9 *Letter to the Governments of the EU Member States*, www.esiz.us.es/~mbilbao/pdf/letter.pdf

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

Column Duitsland – Nederland 1–0

The Architect Sketch, part 2

Het Europees kampioenschap wiskundevoetbal gaat verder. België is ondertussen uitgeschakeld, maar Nederland komt vandaag uit tegen Duitsland ... Gunther Cornelissen, die vier jaar in Duitsland werkte, vergelijkt de renovatie van Nederlandse en Duitse wiskunde-instituten.

In dit stukje willen we uw wiskunde-instituut gaan herinrichten, gaan *restylen*. Iemand wist mij te vertellen dat Nijmegen weer meer wiskundestudenten trekt dankzij het *sexy* Huygensgebouw. Ik vind dit zelf een aanfluiting voor de tomeloze energie die de Nijmeegse wiskundigen in *outreach* stoppen, maar stel even dat er een grond van waarheid in zit. Studenten willen een mooie *school* (zo noemen ze dat tegenwoordig). Hoe ga je dat stoffige wiskunde-instituut van jou vernieuwen?

In Bonn maakte ik de geboorte van het nieuwe Max Planck-instituut mee. De directeuren werden maandenlang door de architect bestookt met vragen over de kleur van het behang, en het formaat van de deurklinken. Fieldsmedaillist Gerd Faltings die urenlang tussen twee tinten groen staat te twijfelen. *Was meinen Sie, Frau Meckerstein?* En uiteindelijk ontstond hieruit een prachtig open gebouw, met discussieruimtes, werkkamers rond een centraal open traphuis, en een auditorium met zes krijtborden. De echte wiskundige komt al het speeksel in de mond. Een *Hausmeister* die bijna alle wiskundigen persoonlijk leert kennen en hun niet-wiskundige problemen oplost (geen *Good Will Hunting*, vrees ik). Exemplarisch zijn ook de krijtborden in de toiletten van het Newton Institute, waar je dus met enige verbeelding de fouten in de formules van je collega's meteen kan wegstralen (iets moeilijker bij de dames).

Nu gaan we even met de architect van twee recente Nederlandse *total make-over's* van wiskundegebouwen praten.

ARCHITECT: U heeft behoefte aan een kantoor, ik geef U een kantoor*tuin*: iedereen een rolwagentje met zijn boeken en een laptop, open ruimte met tafels. 's Ochtends kiest U een werkplek uit, 's avonds pakt U weer in. Spaart lekker veel vierkante meter, dus geld. Geld. Geld. Dus alleen nog een vraagje: hoeveel meter boeken heeft u op uw werkkamer in de kast, en hoeveel daarvan gebruikt U minstens één keer per week? Dit

om de grootte van de rolwagen correct in te schatten.

WISKUNDIGE: Huh?

A: U krijgt open ontmoetingsruimten. Een hoog meubel in het midden van de kamer met ronddraaiende barkrukken, en een 1 maal 1 meter glazen viltstiftenbord, geplakt over uitvergrote plantenfoto's.

W: Maar wij willen een bank in de hoek, een paar vierkante meter krijtbord en een espressomachine.

A: Kan niet. Ik heb voor U een leuk meanderend concept dat de tuin naar binnen trekt, inclusief dure glazen handgemaakte tafels die niet meer kunnen worden afbesteld, en waarvan we alleen nog maar hoeven te kijken hoe we ze überhaupt het gebouw in krijgen. Hiervoor moesten wij trouwens wel twee kleine zaaltjes met krijtborden verwijderen.

W: Waar gaan de medewerkers en studenten dan zitten als ze samen willen discussiëren?

A: O, doen jullie dat dan?

JOHN CLEESE: Oh, I see. I hadn't correctly divined your attitude towards your tenants. You see I mainly design slaughter houses.

A: Omdat in dit nieuwe zaaltje tapijt ligt kunnen er geen krijtborden in.

W: In dit zaaltje moet het tapijt weg, want er moeten krijtborden in. Grote krijtborden.

A: O, zijn uw formules dan zo lang?

In tegenstelling tot de beruchte architectendialoog van Godfried Bomans, of de *Architect Sketch* van Monty Python betreft het voorgaande helaas een bijna letterlijke weergave. En jammer genoeg is deze bladzijde te klein om een dialoog over het herinrichten van een wiskundebibliotheek te plaatsen. Nou goed dan, nog één zin:

A: Het enige probleem met uw bibliotheek is dat er te veel boeken in staan.

Op de achtergrond

Godfried Bomans, *De architect* Typoscript voor KRO-radio uitzending 'Cursief' (1971), Verzameld Werk, deel VI.
Monty Python's Flying Circus, *Architect Sketch*, Episode 17, tekst beschikbaar via <http://www.ibras.dk/montypython/justthewords.htm> en video via <http://www.youtube.com/watch?v=nwQerFAh4Wk>

Tom Körner

Centre for Mathematical Sciences

Wilberforce Road

Cambridge CB3 0WA

United Kingdom

twk@dpmms.cam.ac.uk

Wiskundig Werktuig

Lof der Lezing

In de reeks Wiskundig Werktuig gaat het om de dagelijkse praktijk van het wiskunde-onderzoek. Hoe luister je naar een wiskundelezing? Hoe houd je een goed wiskundig praatje? De eeuwige vraag: krijtbord, whiteboard, overhead of beamer? Hoe zorg je voor zinvolle citeringen in je artikelen? Hoe kan je computeralgebra inzetten, en welk pakket moet je dan kiezen? Tom Körner, hoogleraar in de Fourieranalyse in Cambridge en auteur van het wiskundeboek voor middelbare scholieren *'The Pleasures of Counting'*, bijt de spits af met een artikel over luisteren naar wiskundige lezingen. Heeft u ook altijd moeite gehad met onbegrijpelijke colloquia?

De ibis was voor de Egyptenaren een heilige vogel en gelovigen konden voorrechten verwerven door hen met gepaste ceremonie te begraven. Jammer genoeg overschreed het aantal gelovigen het aantal ibissen dat op natuurlijke wijze stierf sterk, zodat tempels ibissen gingen fokken om te kunnen doden en op correcte manier te kunnen begraven.

Ceremonie en ritueel

Voor veel wiskundestudenten voldoen wiskundecolleges aan de universiteit hetzelfde patroon. Voor hen heeft het bijwonen van een college eerder een magische dan een reële betekenis. Ze wonen regelmatig —devoot, zou men kunnen zeggen— colleges bij, waarbij ze zo ver mogelijk van de docent gaan zitten —het is geen goed idee om de aandacht te trekken van weinig begrepen doch sterke krachten— en maken uitgebreid aantekeningen. Sommige docenten geven informatie met zo'n tempo —vaak gebruikmakend van het technologische equivalent van een Tibetaans gebedswiel: de beamer— dat

het gehoor in continue strijd is verwickeld om alles op te schrijven, hetgeen het merendeel niet lukt. Eventuele korte stiltes worden door de meer asociale luisteraars gevuld door het zacht (of minder zacht) voeren van een gesprek¹, het lezen van een krant etc., terwijl de rest van het gehoor wat op zijn papier krabbelt of wegdroomt. De aantekeningen bij het college blijven vervolgens onaangeroerd liggen tot de vakantie of —vaker— tot een week voor het examen wanneer ze zorgvuldig gemarkeerd worden met fluorescerend gele pen- nen (dit heet 'studeren'). Als meer dan 50% van de aantekeningen gemarkeerd is, is men klaar met studeren. (Soms worden de aantekeningen aan het einde van de universitaire opleiding ceremonieel verbrand, waarmee op levendige wijze aanschouwelijk wordt gemaakt welke waarde wordt gehecht aan de academische kant van vijftien jaar onderwijs.)

Veel studenten zullen mijn omschrijving enigszins karikaturaal noemen. Ze zouden ermee instemmen dat de colleges die zij bijwonen onbegrijpelijk en saai zijn, maar ze zou-

den ook beweren dat zij erheen gaan om erachter te komen wat er getoetst gaat worden. Echter, was dit het geval, dan nog zou hun gedrag irrationeel zijn. Sinds de uitvinding van het kopieerapparaat hoeft slechts één student elke voordracht bij te wonen, waardoor de rest vrij is voor gezamenlijke activiteiten en voor het sociale leven, etc.² Verder zou deze ene student geen uitgebreide aantekeningen hoeven maken aangezien alles wat in de voordracht behandeld wordt, beter in de studieboeken staat.

Boek versus collegeaantekeningen

Zelfs de minst ervaren waarnemer ziet dat een gemiddelde spreker veel kleine fouten maakt. Meestal zijn dit spreekfouten of schrijffouten die soms door de spreker zelf worden opgemerkt, soms hardop verbeterd door een oplettend lid van het gehoor, soms stillemkes verbeterd door degene die aantekeningen maakt, maar ook vaak onopgemerkt opgenomen in de aantekeningen van studenten om er later door in verwarring te worden gebracht. De ervaren waarnemer zal opmerken dat, ook al wordt de grote lijn van een bewijs redelijk goed weergegeven, de fijne details vaak onvoldoende efficiënt of precies worden gepresenteerd, met bijvoorbeeld een bewijs van vier regels waar een enkele regel had kunnen volstaan. Een college vindt plaats in reële tijd, om het maar eens zo te noemen, waarbij



vijftig minuten wiskunde ook vijftig minuten van het college vullen, terwijl een hoofdstuk uit een boek dat men in tien minuten leest, misschien wel tien dagen heeft gekost om het te schrijven.

Wanneer de auteur van een boek een probleem tegenkomt kan zij stoppen en erover nadenken; de spreker moet hoe dan ook verder. Wanneer de notatie te ingewikkeld wordt of het duidelijk wordt dat een bepaalde variant van een vroegere definitie handig zou zijn geweest, kan de auteur teruggaan en het veranderen; de spreker zit vast aan haar eerdere keuze. Wanneer haar boek af is kan de auteur het herlezen en het op haar gemak verbeteren. Zij zal haar vrienden vragen het manuscript te lezen en ieder, die het met een verse blik bekijkt, zal correcties of verbeteringen aan kunnen dragen. Tenslotte, als zij slim is, zal zij een promovendus een geschikt geldbedrag bieden voor elke gevonden fout. Zelfs met al deze voorzorgsmaatregelen blijven er fouten voorkomen, maar het is bijna zeker dat het boek een duidelijker, simpeler en nauwkeuriger uiteenzetting zal geven dan welke collegeaantekeningen dan ook...³

Voordelen van de voordracht

Studenten ervaren mogelijk enige dwang om naar colleges te gaan; hun docenten niet. Toch gaan ook wiskundigen naar seminars, colloquiumvoordrachten, doctoraalcolleges: allemaal colleges in vermomming. Maar waarom, terwijl voordrachten alle hierboven beschreven nadelen hebben? Het verrassende antwoord is dat veel wiskundigen het gemakkelijker vinden om vanuit voordrachten te leren dan vanuit boeken. Volgens mij zijn hier meerdere onderling verbonden redenen voor.

- In een voordracht is wiskunde een groeiend geheel en niet een starre momentopname. Wij leren meer van het kijken naar het bouwen van een huis dan van het inspecteren ervan.
- Zoals ik eerder al zei: de wiskunde van een voordracht wordt in reële tijd opgeschreven. Als wiskunde ingewikkeld is zal de spreker, en daarmee ook haar gehoor, langzamer gaan, terwijl ze weinig tijd hoeft te besteden aan eenvoudige stukken. In een boek komt de wiskunde, of die nu ingewikkeld of eenvoudig is, steeds in hetzelfde regelmatige tempo voorbij.
- Sommige sprekers zijn te verlegen, sommige te paniekerig en een (gering) aantal is te verwaand of te lui om te reageren op de stemming van het gehoor. De meeste sprekers voelen aan wanneer een gehoor in de war is en zullen reageren door een

nieuwe uitleg of met een illustratie. Wanneer een voordracht naar wens verloopt kan een spreker de gelegenheid te baat nemen om het gehoor net iets verder te laten gaan dan voorafvoor mogelijk werd gehouden. Een boek gaat daarentegen niet in op onze stemmingen.

- De auteur van een boek kan de verleiding bijna nooit weerstaan om net iets meer toe te voegen. (Waarom ook niet: kopers en uitgevers hebben liever met 'echte' boeken te maken dan met dunne pamfletten!) De spreker wordt door de opzet van de voordracht gedwongen om zich tot de hoofdzaak te beperken.
- In een boek laat de auteur haar beste kant zien; opmerkingen die het goed doen in een lezing lijken zwart op wit wat vlak. Een spreker kan "Dit is saai maar noodzakelijk" of "Het nam mij drie dagen om dit uit te werken" zeggen op een manier die een auteur niet kan.

Voordrachten hebben een ander voordeel dat voor beginners van bijzonder belang is. Er is een devies: 'wiskunde leert men door het te doen', dat net als veel andere deviezen een achterliggende waarheid bevat. We leren geen viool spelen door een viool te bespelen of bergklimmen door een berg te beklimmen. We leren het door experts te observeren en hen na te doen. Oefening is een essentieel onderdeel van leren maar oefenen zonder begeleiding is over het algemeen nutteloos en vaak erger dan dat. Mensen die zichzelf leren programmeren verwerven een massa slechte programmeergewoontes die ze vervolgens (tenzij ze hun hele leven hacker willen blijven) met veel moeite af moeten leren. Wiskundige leerboeken laten ons zien hoe wiskundigen wiskunde opschrijven (zeker een belangrijke vaardigheid), maar voordrachten laten ons zien hoe wiskundigen daadwerkelijk wiskunde bedrijven.

In zijn boek *Ontwakende wetenschap* maakt Van der Waerden de volgende suggestieve opmerkingen over de aftakeling van de oude Griekse wiskundige traditie.

"Het lezen van een bewijs van Apollonius vereist uitgebreide en geconcentreerde studie. In plaats van een korte algebraïsche formule vindt men een lange zin, waarin elk lijnstuk aangegeven is door twee letters die teruggevonden moeten worden in de figuur. Om de gedachtengang te begrijpen wordt men gedwongen deze zinnen in moderne korte formules te herschrijven. De oude Grieken hadden dit hulpmiddel niet; in plaats daarvan hadden zij de mondelinge overdracht.

Mondelinge overdracht maakt het moge-

lijk de lijnstukken met je vingers aan te geven; men kan dan de hoofdzaak benadrukken en aangeven hoe het bewijs gevonden is. Dit allemaal verdwijnt in de geschreven bewoording van de streng klassieke stijl. De bewijzen zijn logisch gezien deugdelijk, maar ze spreken niet tot de verbeelding. Men voelt zich gevangen in een logische muizenval, maar men slaagt er niet in de grote lijn te ontdekken.

Zolang dit proces niet werd onderbroken en elke generatie zijn methode aan de volgende kon doorgeven, ging alles goed en bloeide de wetenschap op. Maar toen de mondelinge overlevering door externe oorzaken staakte en enkel nog de boeken overbleven, werd het moeilijk om zich het werk van de grote voorgangers nog eigen te maken en bijna onmogelijk om het te overtreffen."

Dialog

Veel studenten verwachten tegelijkertijd te weinig en te veel van hun colleges⁴. Als het hen gevraagd zou worden, zouden ze mogelijk zeggen 'Een college helpt mij de stof te begrijpen' of 'Het volgen van colleges helpt bij het maken van de sommen'. Aangezien de colleges niet aan deze verwachtingen voldoen, zullen de studenten aannemen dat ofwel de spreker ofwel zichzelf incompetent zijn. Vaak zijn beide aannames fout.

Stel dat je een grote stad bezoekt en dat je de omgeving wilt verkennen. Een manier om dit te leren is om te voet een rondleiding te volgen die langs de belangrijkste oriëntatiepunten gaat. Aan het einde van de wandeling zul je echter de stad niet even goed kennen als je gids, zelfs al heb je alles onthouden wat de gids je heeft laten zien (ofte wel 'je hebt de bewijzen uit je hoofd geleerd'). Om de stad als een inwoner te leren kennen, zul je het zelf moeten onderzoeken. In plaats van de route van de markt naar het station steeds via de hoofdweg te lopen, moet je ook andere routes proberen en kijken of die werken. (Je zult natuurlijk zo nu en dan de weg kwijt raken, maar aangezien je de routes tussen de belangrijkste oriëntatiepunten gezien hebt, zul je de weg ook terug kunnen vinden.) Je gids heeft mogelijk uitgelegd dat de straten lopen zoals ze dat doen, omdat er maar drie bruggen over de rivier zijn, echter alleen door zelf door de straten te lopen kun je deze kennis echt verwerven. Hoe hard je gids ook haar best gedaan heeft, er zijn duidelijke grenzen aan hetgeen je tijdens de eerste wandeling kunt leren. Echter, zonder die eerste rondleiding door een inwoner zul je het erg moeilijk vinden om je weg te weten in de stad. Colleges geven op zichzelf niet een volledig begrip

van een stuk wiskunde, maar zonder colleges die je op weg helpen is het erg moeilijk om iets volledig te begrijpen.

Naar mijn mening zouden studenten hun colleges niet moeten gebruiken als een mogelijkheid om aantekeningen te maken, maar als een dialoog tussen henzelf en de spreker. Ze zouden moeten proberen de argumenten te volgen zoals deze tevoorschijn komen en niet door deze slechts blindelings op te schrijven. 'Maar' zal de lezer uitroepen 'dit is een onmogelijke en nutteloze raad om perfectie na te streven', en nadat zij haar aantekeningen in de dichtstbijzijnde prullenbak gegooid heeft, zal zij mogelijk haar verontwaardiging omzetten in een reeks vragen.

Hoe zit het met aantekeningen maken?

Als je kijkt naar ervaren wiskundigen tijdens een voordracht zul je zien dat het maken van aantekeningen een automatisch proces is dat hen de vrijheid laat zich op de voordracht te concentreren. De meeste wiskundige sprekers volgen twee conventies die het mogelijk maken automatisch, of minstens halfautomatisch, aantekeningen te maken.

- Alles wat opgeschreven wordt op het bord dient overgeschreven te worden en niets dat gezegd wordt hoeft opgeschreven te worden.
- Het is de verantwoordelijkheid van de spreker om ervoor te zorgen dat wat op het bord verschijnt zonder meer fatsoenlijke aantekeningen geeft. Halfautomatisch aantekeningen maken is een vaardigheid die geleerd moet worden, maar deze schijnt gemakkelijk te verwerven te zijn.

Zou het beter zijn geen aantekeningen te maken?

Sommige wiskundigen maken nooit aantekeningen, maar de meesten vinden dat het maken van aantekeningen hen helpt om zich te concentreren op het huidige onderwerp van de lezing. (Wanneer het gehoor tijdens een seminarium stopt met het maken van aantekeningen weet de ervaren spreker dat hun aandacht weg is en dat zij haar lezing vanaf dit moment gaan gebruiken als een babbelende bron van witte ruis voor hun eigen gedachten). Overigens zal zelfs het grootste bord uiteindelijk gewist worden en aantekeningen staan je dan toe om je eerdere delen van de voordracht weer voor de geest te halen.

Wat moet je doen als je het niet meer kunt volgen?

Het eerste en belangrijkste om te onthouden is het feit dat de meeste wiskundigen het

grootste deel van de tijd de voordrachten niet kunnen volgen. (Vraag maar om je heen als je dit niet gelooft.) Een wiskundige voordracht bijwonen is als een nachtelijke tocht door een onweersstorm. De meeste tijd ben je de weg kwijt, nat en ellendig, maar tijdens zeldzame tussenpozen is er een lichtflits en is het hele platteland opgelicht. Zodra je je realiseert dat je toestand noch een ondubbelzinnig teken van ongeneeslijke stomheid noch een duidelijke aanwijzing van volledige incompetentie van de spreker is, maar een normale gebeurtenis, is het duidelijk wat je moet doen. Je moet doorgaan met aantekeningen maken, terwijl je er steeds goed op let wanneer de spreker van onderwerp verandert (of een bewijs, of wat dan ook, afmaakt) en je haar voordracht weer als actieve partner kunt volgen.

Het is duidelijk dat als je je aantekeningen na het college bestudeert *met als doel de stof te begrijpen tot op het punt waar de spreker ook is aangekomen*, je een betere kans zult hebben het volgende college te begrijpen. Als je behoort tot de meerderheid van studenten die vinden dat ik hiermee onhaalbare perfectie nastreef, dan kun je op zijn minst de laatste vijf minuten voor het college gebruiken om het laatste deel van je aantekeningen door te nemen. (Als je dat niet eens doet, vraag jezelf dan tenminste wel af waarom je het niet doet.)

Wat moet je doen als je helemaal niets begrijpt van wat er verteld wordt?

Op geavanceerd niveau is het mogelijk dat een volledige reeks van 24 lezingen gewijd wordt aan het bewijs van een enkele stelling. Als je in zo'n college echt de draad kwijt bent (en waarschijnlijk is aan het einde iedereen, behalve mogelijk de spreker, de draad echt kwijt), dan blijf je de draad kwijt zijn. Eerst en tweedejaarscolleges worden opgemaakt uit meerdere korte onderwerpen die aan elkaar gekoppeld zijn in een redelijke volgorde. Zelfs al lukt het je volstrekt niet een onderwerp te begrijpen, dan is er geen reden waarom je het volgende onderwerp niet zou kunnen begrijpen. (Je kunt Cauchy ook toepassen zonder het bewijs te begrijpen.) Aan de andere kant, als het ene na het andere onbegrijpelijke onderwerp wordt opgedist, dan is het maken van aantekeningen in de hoop dat je alles duidelijk wordt zodra je het doorneemt niet de juiste oplossing. In dit geval moet je je trots inslikken en raad vragen bij je studiebegeleider.

Hoe zit het met vragen?

Het gehoor kan drie soorten vragen stellen.

- *Vragen met correctie als doel* Als je denkt dat de spreker een minteken gemist heeft of een α geschreven heeft in plaats van een β , dan moet je dit altijd vragen. Geen enkele spreker vindt het prettig om een bord met berekeningen te vullen die steeds verder het moeras in zakken, omdat het gehoor heeft nagelaten om een fout in de eerste regel aan te wijzen. Soms wachten zeer beleefde studenten tot na de voordracht om de fouten door te geven met als gevolg dat de spreker weet dat zij een fout gemaakt heeft maar ook dat zij hem niet kan verbeteren. De regel is dus vragen, en wel meteen.
- *Vragen met extra uitleg als doel* Het eist aanzienlijke moed om in de aanwezigheid van anderen toe te geven dat je iets niet begrijpt. Echter, als je iets niet begrijpt is het aannemelijk dat veel anderen in het gehoor zich in dezelfde situatie bevinden en je stilzwijgend zullen bedanken. Je zult meestal de hoorbare en welgemeende dank van de spreker hebben, omdat, zoals ik eerder al zei, meeste sprekers graag in contact blijven met hun gehoor.⁵ (Er is een kleine en ongelukkige minderheid die liever voor een lege zaal spreekt; geef je spreker het voordeel van de twijfel en vraag vooral.)
- *Vragen met uitbreiding als doel* Als je in de gelukkige positie verkeert dat je alles begrijpt wat de lezer vertelt, dan zou je mogelijk willen dat zij dieper op de stof ingaat. Je bescheiden verzoek om meer over het algemene geval te horen valt hoogstwaarschijnlijk niet in goede aarde bij de rest van het gehoor, die nog steeds met het huidige geval aan het worstelen is. Dergelijke vragen zijn behouden voor na de lezing, wanneer de spreker met plezier antwoord zal geven (weinig wiskundigen kunnen een uitnodiging om meer over hun onderwerp te vertellen weerstaan). Als je meer dan één vraag per voordracht stelt, onderzoek dan je beweegredenen.

De eenvoudige vraag

Bij seminaria valt op dat het vaak de meest eminente wiskundigen zijn die de eenvoudigste vragen stellen. (Als de wiskundigen niet zo eminent waren zouden we ze naïef kunnen noemen.) Het zou kunnen zijn, dat zij slechts met het stellen van vragen zijn begonnen, nadat ze eminent werden, maar ik geloof dat de bereidheid om te vragen wat je niet weet een kenmerk van vele grote geesten is.⁶

Wiskundige anekdotes neigen ertoe aan meerdere bronnen te worden toegeschreven

(misschien omdat wiskundigen eerder processen onthouden dan geïsoleerde feiten als namen). De volgende anekdote werd door de Grieken onder andere aan Euclides toegeschreven. Ptolemaeus, koning van Egypte, vroeg aan Euclides om hem meetkunde te on-

derwijzen. 'O, koning' antwoordde Euclides 'in Egypte zijn er koninklijke wegen en wegen voor het gewone volk, maar er zijn geen koninklijke wegen in de meetkunde.' Wiskunde is moeilijk, er zijn geen eenvoudige manieren om het te begrijpen, maar een voordracht, op

de juiste manier gebruikt, is de meest gemakkelijke manier die ik ken. ↩

Bronvermelding

Een engelstalige versie van dit stuk is te lezen op <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~twk>

Noten

- 1 Een *college* (of *voordracht*) is een openbaar optreden vergelijkbaar met een concert of theateruitvoering. Dit in tegenstelling tot *televisiekijken*: dit laat het zogenaamde zappen en het voeren van een gesprek toe. Bij openbare optredens zijn privégesprekken, hoe interessant ze ook mogen wezen voor de gesprekspartner, afleidend voor de rest van het gehoor. Het moet gezegd worden dat net zoals een goede eter een goede kok creëert, zo maakt een goed gehoor ook een goede spreker. Een spreker zal een betere voordracht geven voor een gehoor dat stil en aandachtig luistert, dan voor publiek dat zich lawaaiig en onoplettend betoont.
- 2 In het verleden hebben sommige universiteiten het bijwonen van colleges verplicht gesteld. In Cambridge, in het begin van de negentiende eeuw, was aanwezigheid niet verplicht bij colleges, maar wel bij kerkdiensten. De 'keuze', beweerden voorstanders van verplichte kerkdiensten, 'is tussen verplichte godsdienst en geen godsdienst.' 'Het verschil' antwoordde

een tegenstander '... is te subtiel voor mij.'

- 3 Ooit was het de gewoonte dat beginnende docenten hun eerste paar jaar besteedden aan het schrijven van een perfecte serie college-aantekeningen: in feite een boek. De rest van hun werkzame leven bestond hun college uit het op dicteersnelheid voorlezen van deze aantekeningen. Hun uiteenzetting was dan helder, eenvoudig en nauwkeurig, maar gezien de ontwikkeling van de drukpers enige eeuwen eerder had hetzelfde resultaat efficiënter bereikt kunnen worden.
- 4 'Ik ben naar een lezing gegaan over de viool, maar toen ik probeerde om erop te spelen klonk het vreselijk. Die spreker kan niet goed geweest zijn.'
- 5 Ik heb vaak gedacht dat de technologie van spelprogramma's op de televisie aangepast zou moeten worden voor gebruik in collegezalen. Elke stoel zou een verborgen knop moeten hebben waarop de mensen in het gehoor kun-

nen drukken wanneer ze willen dat de spreker langzamer gaat. De 'stemmen' zouden opgeteld kunnen worden, waarbij het resultaat op een wijzerplaat getoond zou worden die alleen zichtbaar is voor de spreker. Deze is dan in dezelfde positie als een automobilist die zich aan een snelheidslimiet moet houden.

- 6 Er is echter geen uniek recept voor grootheid. Toen de zeer vooraanstaande natuurkundige Bohr de vooraanstaande natuurkundige Landau in Moskou bezocht, werd hij uitgenodigd een voordracht voor promovendi te houden, waarbij Landau zou vertalen. Bohr concludeerde zijn voordracht met de bewering 'Ik schrijf mijn succes toe aan het feit dat ik nooit bang geweest ben om mij door mijn studenten te laten vertellen, wat een dwaas ik ben'. De Russische vertaling eindigde met 'Ik schrijf mijn succes toe aan het feit dat ik nooit bang ben geweest mijn studenten te vertellen wat een dwazen zij zijn'.

Kees Hoogland

APS – nascholing docenten

Zwarte Woud 2

3524 SJ Utrecht

K.Hoogland@aps.nl

Onderwijs

Nostalgische terugblik op de staartdeling

Het realistisch rekenen staat onterecht in een negatief daglicht: zo betoogt Kees Hoogland. Uitgaande van de staartdeling zoals die veertig jaar geleden in het basisonderwijs werd gedoceerd, legt hij uit waarom de manier om kinderen te leren delen is veranderd en waarom in het algemeen het realistisch rekenen een betere strategie is om kinderen te leren rekenen. Kees Hoogland is senior internationaal consultant bij het Algemeen Pedagogisch Studiecentrum (APS) en was vele jaren hoofdredacteur van het tijdschrift Euclides.

Eind jaren zestig van de vorige eeuw zat ik op de basisschool. In wat toen nog klas 5 heette, heb ik de staartdeling geleerd. Die fascineerde me mateloos. Ik hield erg van sommen maken. Ook op de middelbare school bleef dat zo. Uiteindelijk ging ik wiskunde studeren in Leiden en kreeg daar college van een groep jonge enthousiaste docenten als Rob Tijde- man, Frits Beukers, Jozef Steenbrink en Jan van de Craats. Wiskunde, maar meer nog wiskundeonderwijs, werd mijn beroep.

Lagere school

Ik probeerde laatst te reconstrueren wat mij nu eigenlijk aan die staartdeling boeide. Als de deler onder de tien was vond ik het niet zo spannend, dan was het toch vooral stug doorwerken tot het eind. De vraag hoe vaak 7 in 40 paste of hoeveel keer 6 uit 19 genomen kon worden was voor mij blijkbaar vrij triviaal.

7/402598\ 6/190278\

Ik kan me nog wel herinneren dat het spannender werd met delers tussen de tien en honderd. Hoeveel keer 23 paste in 140 of hoe-

veel keer 58 paste in 376. Dan moest je goed oppassen of je niet eentje te laag of eentje te hoog zat.

23/140277\ 58/376246\

Delers boven de honderd vond ik meer van hetzelfde. Blijkbaar lette ik alleen op de eerste twee cijfers van de deler.

231/1408869\ 582/3775434\

Ik kan me niet meer precies herinneren of ik wist wat staartdelingen te maken hadden met delen of verdelen. Op dat moment wist ik zeker niets van plaatswaarde en de rol die dat speelde in dit algoritme. Ook had ik geen idee over hoe specifiek deze werkwijze was. En hoe dat eventueel in andere landen ging. Ik weet nog wel dat die staartdeling voor veel van mijn klasgenoten in Vlaarding en erg moeilijk was. Dat merkte ik omdat mijn meester mij soms vroeg of ik andere kinderen kon helpen. Ik vond het erg vreemd dat veel andere kinderen deze procedure maar moeizaam konden leren en onthouden. En ik vond het ook

vreemd dat die leerlingen soms geïrriteerd of gefrustreerd reageerden op mijn uitleg van zoiets eenvoudigs. Veel later zou ik pas ervaren dat dit onderwijs een grote groep mensen geen bruikbare en duurzame pen-en-papiermethode had opgeleverd voor het uitvoeren van delingen. Het was te abstract voor ze en ze konden zich er weinig bij voorstellen.

Voortgezet onderwijs

In het begin van de jaren zeventig deed ik gymnasium B aan een scholengemeenschap. Ik denk dat wij de eerste generatie waren die vanaf klas 3 een rekenmachine mochten gebruiken. Peperduur waren die dingen toen, wel over de honderd gulden. Maar machtig mooi vond ik het. Alle logaritmen, sinussen en e-machten zo bij de hand. Interessant om $\log 3$, $\log 30$, $\log 300$ in te typen en dan te zien wat er gebeurde. Of net zo lang de wortel te trekken tot er onvermijdelijk 1 verscheen op het scherm en dan weer kwadrateren en heel ergens anders uitkomen. Ben ik op de middelbare school de staartdeling wel eens tegengekomen? O ja, één keertje: bij het delen van een eerstegraadspolynoom op een hogeregraadspolynoom, waarschijnlijk om bij een gebroken functie de primitieve te berekenen.

Actief in wiskundeonderwijs

Tijdens en na mijn studie ben ik gaan lesgeven in de onderbouw en de bovenbouw van havo en vwo, nog weer later ook op eerste-

1417:13-1 01	1417:13-1 0117	1417:13-10 0117	1417:13-109 0117 000
13 op 14 gaat 1 keer 14-13 = 01 opschrijven		13 op 11 gaat 0 keer	13 op 117 gaat 9 keer 117-117 = 000

Figuur 1 Delen op de Balkan

en tweedegraadslerarenopleidingen. In de jaren tachtig kwamen veel allochtone leerlingen het onderwijs binnen. Er was opeens veel aandacht in onderwijskringen voor allerlei deelmethodeën en notatiewijzen die in andere landen, andere culturen en andere tijden gebruikt worden en werden. Soms waren dat methoden die hetzelfde waren als bij ons, soms methoden die minder uitgelijnd waren op het positiestelsel. In figuur 1 zien we bijvoorbeeld hoe het delen op de Balkan gaat en in figuur 2 hoe het delen in Marokko gaat. Deze voorbeelden zijn ontleend aan het artikel Buitenlandse rekenmethoden uit de *Nieuwe Wiskrant* (Berwald, 1988). Rond die tijd kwam ik ook in aanraking met het realistisch rekenen. Daar zag ik voor het eerst de volgende notatie.

$$7/15232 \setminus 2000 + 100 + 70 + 6 = 2176$$

14000

1232

700

532

490

42

42

0

Vergelijk dit eens met het standaardalgoritme hieronder dat ik geleerd heb.

$$7/15232 \setminus 2 - 1 - 7 - 6$$

14

12

7

53

49

42

42

0

De verschillen zijn marginaal, maar niet verwaarloosbaar. Bij de eerste notatie hoort de vraag: "Als je 15232 dingen deelt met zijn zevenen, hoeveel krijg je dan?" De notatie geeft

de meest effectieve strategie weer om dat te bepalen: je geeft iedereen er eerst 2000, vervolgens heb je er nog 1232 over en geef je iedereen er nog 100 et cetera. Kortom bij de meest effectieve verdeelstrategie doe je cognitief vrijwel hetzelfde als bij het uitvoeren van de staartdeling. Het sprak mij aan omdat bij deze notatie het onderliggende deelprobleem in beeld is, inclusief de orde van grootte van het antwoord. Ook vangt het de meest voorkomende fout — het vergeten van een nul in het antwoord — bij het traditionele algoritme af.

$$7/1435 \setminus 200 + 5 = 205$$

1400

35

35

0

Van die meest effectieve verdeelstrategie is het nog maar een kleine stap naar het staartdelingalgoritme zoals ik dat vroeger leerde. Op veel basisscholen zetten ze die stap wel voor de betere leerlingen. Op andere scholen doen ze het niet. Het is het eindpunt van een leerlijn. Maar wat is dan een didactische route die leidt tot die meest effectieve strategie? Er wordt veelal gebruik gemaakt van de natuurlijke kennis die leerlingen hebben over eerlijk delen. Als je leerlingen die nog nooit een deling hebben uitgevoerd het vraagstuk geeft hoe 196 te verdelen over 7 leerlingen dan geven ze iedereen eerst maar eens 10 en rekenen uit dat ze nog 126 over hebben. Vervolgens geven ze iedereen nog eens 10 en rekenen uit dat ze nog 56 over hebben dan geven ze iedereen nog 8. In die fase kun je ze dat laten opschrijven zoals ze willen. Als ze

het probleem maar leren oplossen. Zwakkere leerlingen nemen vaak uit onzekerheid nog kleinere porties. Dan doen ze er langer over, maar lossen het probleem wel op. En is dat het dan? Nee, dan komen er nog vele lessen die er op gericht zijn om de strategie slimmer en algemener te maken. Het onderwijs dient er op gericht te zijn om met zoveel leerlingen als mogelijk verkortingen aan te brengen in de strategie en te streven naar de meest effectieve strategie en te streven naar een efficiënte en overzichtelijke manier van noteren. In de discussie over rekenonderwijs wordt vaak het optimaal uitgevoerde algoritme gezet tegenover allerlei dingen die leerlingen soms doen in de aanloop naar effectieve strategieën. Dat verheldert de discussie niet.

Kwaliteit en doorschieten

Is het realistisch rekenen dan probleemloos? Nee, zeker niet. Moderne benaderingen in het onderwijs streven altijd naar toename in kwaliteit. Maar als je in sommige uitgangspunten doorschiet, ontstaan ook zo maar flinke vervormingen. Ik zet er even een paar op een rijtje.

- Realistisch rekenen legt de verbinding tussen rekenen en de werkelijkheid waarin dat rekenen functioneert. Goed voor de bruikbaarheid en voor de motivatie en het begrip van leerlingen. Te eenzijdig doorgeschoten is dat die verbinding met de werkelijkheid veel te veel is vormgegeven in een boek met sommen met te talige contexten.
- Realistisch rekenen erkent dat er rekenmachines op grote schaal voorhanden zijn en dat daar dus aandacht aan besteed moet worden. Als mensen beweren dat je niet meer hoeft te leren rekenen omdat er rekenmachines zijn, is dat een vervorming.
- Realistisch rekenen benadrukt dat inzicht belangrijk is voor het beklijven van kennis en vaardigheden. Als mensen beweren dat er daarom niet meer veelvuldig geoefend hoeft te worden, is dat een vervorming.
- Realistisch rekenen benut de verschillende strategieën die kinderen van nature

1417:13-1 01	1417:13-1 0117	1417:13-10 0117	1417:13-109 0117 000	1417:13-109 0117 000
13 op 14 gaat 1 keer 14-13 = 01 opschrijven		13 op 11 gaat 0 keer	13 op 117 gaat 9 keer 117-117 = 000	

Figuur 2 Delen in Marokko

inzetten bij rekenproblemen. Vervorming treedt op als kinderen allerlei verschillende strategieën aangeboden krijgen in plaats van dat gestreefd wordt naar de meest effectieve strategie.

- Realistisch rekenen probeert een zo breed mogelijke populatie bruikbaar rekenen aan te leren. Vervorming treedt op als de top 10% van de leerlingen niet in de gelegenheid wordt gesteld hun plafond te bereiken.

Om het rekenonderwijs op een hoger plan te brengen moeten de kwaliteiten van realistisch rekenen benadrukt en gepraktiseerd worden. Maar op dit moment is het minstens zo belangrijk de vervormingen stevig aan te pakken. Opleiding en professionalisering van

leerkrachten die zich daar expliciet op richt, is cruciaal. In de rekenverbetertrajecten die nu op 375 scholen starten, staat dit centraal.

De discussie over het rekenen

Ook de discussie over het rekenonderwijs kun je op deze manier bekijken.

- Het is heel belangrijk als er wordt benadrukt dat je in rekenlessen zoveel mogelijk moet halen uit de top 10% van de leerlingen op de basisschool. Die leerlingen kunnen al behoorlijk abstracte structuren en algoritmen aan en die moet je niet vermijden. Een vervorming in de discussie treedt op als de top 10% van de leerlingen als norm wordt genomen en benaderingen die recht doen aan grote groepen andere leer-

lingen worden weggezet als ineffectief of sektarisch.

- Het is prima als er kritisch wordt stilgestaan bij het onderwijs in rekenen en de soms vreemde onderbrekingen in de loopbaan van leerlingen die daarin zitten, zoals de commissie Meijerink heeft gedaan. Er treedt vervorming op als de discussie gevoerd wordt via ingezonden brieven, via internetfora en in de media waarbij vermeende tegenstellingen op populistische wijze worden opgeblazen. En als met cynisme de huidige onderwijspraktijk voortdurend in een negatief daglicht wordt geplaatst.

Vanuit die laatste vervorming is namelijk onderwijs nog nooit beter geworden. En dat is evidence based. 



Foto: Wikipedia

Een moderne wetenschappelijke rekenmachine, zoals tegenwoordig bij het vmbo-t in gebruik

Dirk Siersma

*Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Postbus 80010
3508 TA Utrecht
d.siersma@uu.nl*



Dirk Siersma

Onderwijs

Visie op wiskundeonderwijs

In zijn afscheidscollege, gehouden op 10 september 2008 aan de Universiteit Utrecht, vertelde Dirk Siersma onder andere over zijn werk binnen de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs. Deze commissie houdt zich bezig met het samenstellen van een nieuw eindexamenprogramma wiskunde voor havo en vwo. Uit onderstaande tekst, afkomstig uit deze rede, blijkt dat hij zich zorgen maakt over de polarisatie in de onderwijsdiscussie.

Er wordt wel gezegd, dat wiskunde ontstaan is door tellen, meten en gokken. Op elk van deze gebieden is het duidelijk dat rekenen en wiskunde hierin een belangrijke rol spelen (algebra, meetkunde, stochastiek). Men zou het basiselementen van wiskunde kunnen noemen.

In de oude tijd was het nut van deze basiselementen direct zichtbaar. Tegenwoordig wordt veel wiskunde gebruikt, onder meer in toepassingen. Veel van die wiskunde is echter uit het zicht verdwenen, bijvoorbeeld in rekenmachines, software en modelleertools. Bijvoorbeeld zijn CT-scans, weersvoorspellingen onmogelijk zonder gebruik te maken van moderne wiskunde. Leven met wiskunde is dus rondom, maar het is niet direct nodig dat de patiënt of de laborant zich precies alle wiskundeformules eigen maakt voordat de scan wordt gemaakt.

Welke onderwerpen?

Men kan snel tot de conclusie komen dat bepaalde onderdelen uit het traditionele onderwijs compleet overbodig zijn en dus wel weggelaten kunnen worden. De problematiek is niet simpel, het gaat om wat te leren, rekening te houden met de wensen van vervolgoopleidingen, de mogelijkheden van de leerlingen en de samenhang met andere vakken en de beschikbare onderwijstijd. De wensen van de vervolgoopleidingen spelen een belangrijke rol, maar zodra men wat dieper graaft ontstaat er een diffuser beeld. Dit geldt voor alle vormen van onderwijs. Praat men met de scheikundigen over het wiskundige bacheloronderwijs voor chemici, dan is de mening van de fysisch chemicus al snel verschillend van

de biochemicus.

Bij programma's voor het vwo en het havo speelt dit ook een rol: de wensen zijn niet eenduidig. De wensen van de vervolgoopleidingen zijn een belangrijk uitgangspunt, maar niet het hele verhaal. Een belangrijke vraag is ook wat je leerlingen van twaalf tot achttien jaar kunt onderwijzen en hoe. De specialist op dit gebied is de zowel vaktechnisch als educatief competente leraar. Hij kent de verschillen tussen de capaciteiten van leerlingen onderling en per profiel en weet welke begrippen, abstracties en toepassingen behandeld kunnen worden. Nieuwe onderwijsprogramma's dienen tot stand te komen in samenspraak tussen vakdeskundigen, leraren en vakdidactici, die elk vanuit hun achtergrond een inbreng hebben.

Wij zitten nu in Nederland in een uniek vernieuwingsproces voor wiskundeonderwijs, waarbij de betrokkenen op basis van gelijkwaardigheid bij elkaar aan tafel zitten in de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO). Deze commissie werd ingesteld door het zogenaamde Voorzittersoverleg Wiskunde en kreeg kort daarna de opdracht van de Minister van Onderwijs om ondermeer een samenhangend eindexamenprogramma wiskunde voor havo en vwo te maken (Wiskunde A, B, C en D). De commissie, waarvan ik de eer heb om voorzitter te zijn was verre van homogeen. Aan tegenstrijdige standpunten dus geen gebrek, met name in het begin van de rit. Door duidelijk naar elkaar te luisteren en zich te willen verdiepen in het standpunt van de ander kon men tenslotte komen tot een gemeenschappelijke visie en uitwerking in de vorm van (concept) examen-

programma's. Werkelijk een uniek proces in Nederland. Dit is de enige manier om tot een goed resultaat te komen!

Blikverruiming

Zoals bij velen van u bekend, is dit nog niet het einde van het verhaal. Er zijn ernstige stoorzenders, die goed bedoeld, maar uitgaande van een eenzijdige opdracht of invalshoek en soms onjuiste interpretatie op een aantal punten andere accenten wensen. De discussie is opgelaaide en kent een duidelijke polarisatie, waarbij in eerste instantie kleine verschillen van inzicht worden uitvergroot.

Het is erg gemakkelijk om kritiek te hebben. Iets anders is het om een samenhangend programma te maken, dat voldoet aan de eerder genoemde reële doorstroomeisen, onderwijsbaarheid en samenhang. Er is nu tijd om alles nog eens te bezien en in experimenten uit te proberen. Tenslotte komt alles wel op zijn pootjes terecht. Vergeet niet dat het hier gaat om programma's die pas vanaf 2013 in de vierde klas worden ingevoerd.

Bij een dergelijke discussie verdwijnen andere belangrijke punten naar de achtergrond. Zo is de omvang van het vak wiskunde op havo en vwo voor aanstaande bètastudenten de afgelopen jaren verminderd en lager dan in vele andere landen. Wil men een voldoende breed scala van wiskundeonderwerpen met een verantwoord begrip- en beheersingsniveau op havo en vwo dan dient het aantal contacturen wiskunde te worden uitgebreid. Ook is het van groot belang om de doorgaande leerlijn te benadrukken. Die begint al met vierjarigen in de basisschool. Het gaat er steeds om inzicht en vaardigheden te koppelen, maar ook om de band te leggen met de wereld om ons heen. Dit moet in samenhang meer aandacht krijgen in het onderwijs en dat is iets heel anders dan de discussie realistisch rekenonderwijs versus algoritmen oefenen.

Theo van den Bogaart

Freudenthal Instituut

Universiteit Utrecht

Aldadreef 12

3561 GE Utrecht

t.vandenbogaart@fi.uu.nl



Theo van den Bogaart

Onderwijs

Laat onvrede over ingangsniveau bètastudenten niet leiden tot waardeloze A- en C-programma's

Op 8 april heeft staatssecretaris Van Bijsterveldt de inhoud van de nieuwe examenprogramma's wiskunde A, B, C en D bekendgemaakt. Deze vakinhoud zal gedurende drie jaar op een aantal scholen worden uitgetoetst. In haar beslissing heeft zij de aanbevelingen van de commissie vernieuwing wiskundeonderwijs (cTWO) voor een belangrijk deel naast zich neergelegd. Zij heeft zich daarbij gebaseerd op het commentaar van de Resonansgroep, die is ingesteld om de aansluiting met het hoger onderwijs te bewaken. In onderstaand artikel bekritiseert Theo van den Bogaart deze eenzijdige besluitvorming die volgens hem schadelijk is voor de vakken Wiskunde A en C. Hij is docent wiskunde en natuurkunde aan College De Heemlanden te Houten en is lid van het cTWO-projectteam. Hij studeerde wiskunde in Utrecht en promoveerde in juni 2008 te Leiden op een proefschrift over algebraïsche meetkunde.

Begin dit jaar stuurde de vernieuwingscommissie cTWO voorstellen voor nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo naar de staatssecretaris. Het idee was dat deze programma's in 2013 landelijk zouden worden ingevoerd, na bijstellingen op grond van experimenten die volgend schooljaar op enkele scholen zouden starten. Tot veler verbazing verwierp de staatssecretaris in april het voorstel en kwam zij met een eigen besluit op de proppen. Dit leidde tot veel boosheid onder docenten en didactici. Die boosheid is terecht: de besluitvorming heeft op een dermate rare manier plaatsgevonden dat onderwijsbaarheid, leerbaarheid en het algemeen vormend karakter van de programma's geheel uit het oog is verloren.

De staatssecretaris en de Resonansgroep

De cTWO heeft getracht evenwichtige examenprogramma's te maken die recht doen aan alle facetten van het wiskundeonderwijs, door een zorgvuldige procedure te volgen waarbij inbreng van zowel docenten, didactici als experts uit het vervolgonderwijs is meegewogen. Daarbij is óók getracht zo goed mogelijk rekening te houden met het commentaar van de Resonansgroep, een commissie ingesteld door de Tweede Kamer met als doel

het beoordelen van de doorstroomrelevantie van de programma's. Dit is het enige waarover de resonansgroep behoort en, gezien haar samenstelling, kan oordelen. De staatssecretaris neemt in haar besluit echter klakkeloos alle wijzigingsvoorstellen van de resonansgroep over, waardoor het evenwicht dat door de cTWO is gevonden grof wordt verstoord en zaken als onderwijsbaarheid dus buiten beeld worden gezet.

Dit is niet de enige fout die de staatssecretaris maakt. Zij legt in haar besluit namelijk uit, op geheel ongefundeerde en foute wijze, hoe wiskunde in elkaar steekt. De staatssecretaris hoort politieke belangen te wegen en, aangezien zij geen expertise op het gebied van wiskunde heeft, niet inhoudelijk een bijdrage te leveren aan de discussie!

Wiskunde A en C

Dat alles zou niet zo erg zijn, als het resultaat —de examenprogramma's— maar goed is. Bij Wiskunde B, het wiskundevak dat verplicht wordt gevolgd door de aankomende studenten wis- en natuurkunde, is dat nog wel het geval (hoewel er discussie is over de juiste aanpak van meetkunde). Schadelijk zijn echter de besluiten over de programma's voor Wiskunde A en C.

Wiskunde A is een lastig te plaatsen vak: het bereidt voor op zowel economische als biomedische studies. Voor de eerste studie is het analysegedeelte het belangrijkste, terwijl de medische faculteiten juist aangeven met name statistiek relevant te vinden. De cTWO heeft getracht het kansrekening- en statistiekonderdeel te revitaliseren door het accent te leggen op statistiek van grote datasets zoals dat ook in vervolgoopleidingen gebeurt. Tot nu toe werd er bij Wiskunde A veel meer aandacht besteed aan kansrekening en combinatoriek. Door het besluit van de staatssecretaris blijft er van de vernieuwde statistiek slechts een onsamenhangende losse flard over.

Met de gewonnen tijd komt men de economie tegemoet door meer analyse toe te voegen. Zou dit komen omdat er twee economie, en geen biomedici, in de Resonansgroep zitten? Bij Wiskunde C geldt wat betreft statistiek hetzelfde bezwaar sterker: Wiskunde C beoogt helemaal niet voor te bereiden op economie, maar op juridische, taal-, cultuur-, gedrags- en maatschappijwetenschappen.

Leerlingen die Wiskunde C volgen zijn in het algemeen zwak in wiskunde en niet erg gemotiveerd voor het vak. De cTWO heeft geprobeerd, uitgaande van politieke ideeën geformuleerd bij de invoering van het vak, een programma te maken dat naast uitgebreide aandacht voor algebraïsche vaardigheden ook aandacht besteedt aan voor leerlingen in het cultuur- en maatschappijprofiel interessante en motiverende onderwerpen zoals perspectief en logica. De staatssecretaris neemt in haar besluit de mening van de Resonansgroep over dat de cTWO hierin is doorgeschoten door vrijwel alle vernieuwende en profielspecifieke onderdelen te schrappen. Hier

wordt een kans gemist om leerlingen die over het algemeen zeer zwak in wiskunde zijn te laten ervaren dat wiskunde leuk of relevant kan zijn. Dat is althans iets wat de kleinschalige experimenten met Wiskunde C op dit moment al laten zien.

Het lijkt erop dat Wiskunde C een deelverzameling wordt van Wiskunde A, dat op zijn beurt weer meer op een deelverzameling van Wiskunde B gaat lijken. Dit is een stap terug in de tijd naar de situatie van vóór 1985. Wiskundeonderwijs aan toekomstige bètaleerlingen was toen wellicht degeleijk, voor niet wiskundegeörienteerde leerlingen was het een ramp. Vakrelevante contexten zijn voor deze zwakkere of minder gemotiveerde leerlingen buitengewoon belangrijk.

Tunnelvisie van bètafaculteiten

Wiskunde A en C zijn irrelevant voor een stu-

die wis- of natuurkunde. Het gevaar bestaat daarom dat wiskundigen op de Nederlandse universiteiten het standpunt innemen dat er niet zoveel valt aan te merken op het genomen besluit. Vanuit de nauwe optiek van het ingangsniveau van hun toekomstige studenten is dat ook zo. Er wordt, zowel in het voorstel van de cTWO als het besluit van de staatssecretaris, gelukkig weer veel aandacht besteed aan algebraïsche vaardigheden en 'wiskunde zonder rekenmachine'. Deze tendens is het afgelopen jaar overigens al ingezet met een herziening van de huidige examenprogramma's en een verbetering van de schoolboeken.

Inmiddels heeft de cTWO een jaar respijt gekregen om haar plannen bij te stellen. In dit jaar wordt op kleine schaal geëxperimenteerd met nieuwe onderwerpen, wordt een inventarisatie gedaan naar het niveau van de alge-

braïsche vaardigheden in havo en vwo en worden gedetailleerde suggesties gedaan voor een revitalisering van wiskunde in leerjaren 1 tot en met 3 van havo en vwo. Bovendien worden de HBO-raad en de VSNU om een oordeel gevraagd over het programma, daarbij in overweging nemend zowel het belang van de doorstroomrelevantie als de algemene wiskundige vorming van de leerlingen.

Het is ernstig te betreuren dat er door deze gang van zaken een onnodige controverse is ontstaan tussen docenten wiskunde enerzijds en het wetenschappelijke wiskundeonderwijs anderzijds, temeer omdat beide partijen elkaar dringend nodig hebben gezien de voortdurende geringe belangstelling voor exacte vakken.



De eerste planten



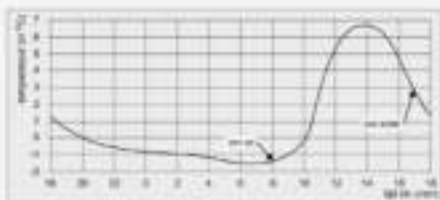
De eerste planten die in de kas geplaatst worden zijn tomaten. De tomatenplanten groeien het beste onder de volgende omstandigheden:

- overdag moet het minimaal 18°C zijn, 's nachts mag de temperatuur dalen tot hooguit 10°C
- er is dag en nacht maximaal tien uur

De tomaten zal problemen opleveren omstandigheden te realiseren voor acht en ongeschikt voor tomaten en CHP. Het is niet mogelijk, naast tomaten, bijvoorbeeld in een kas van CHP en de tomaten aan elkaar hangen. Het is niet mogelijk om de tomaten omstandigheden van de dag en de nacht veranderende omstandigheden in de kas.

Hier zijn de omstandigheden van een tomaten kas:

- Het is de hele dag bewolkt
- De zon komt op om 0.00 uur en gaat onder om 17.00 uur
- De buitentemperatuur varieert volgens onderstaande grafiek.



Wat moet de tomaten kas met de CHP en tomaten aan elkaar hangen? Het is niet mogelijk, naast tomaten, bijvoorbeeld in een kas van CHP en de tomaten aan elkaar hangen. Het is niet mogelijk om de tomaten omstandigheden van de dag en de nacht veranderende omstandigheden in de kas.

Opdracht 2

In deze op de tomaten kas met de CHP en tomaten aan elkaar hangen. Het is niet mogelijk, naast tomaten, bijvoorbeeld in een kas van CHP en de tomaten aan elkaar hangen. Het is niet mogelijk om de tomaten omstandigheden van de dag en de nacht veranderende omstandigheden in de kas.

- De nacht**
Om 22 uur daalt de CHP uit. Alle tomaten dalen. De temperatuur in de kas is op dat moment precies 18°C .
Om 23 uur schakelt de CHP over het aan- en uitgaan van de CHP en de tomaten. Zodat de temperatuur in het kas de hele nacht (tot 0.00 uur) op de juiste waarde blijft. Geef de schakeltemperatuur over het aan- en uitgaan van de CHP en de tomaten in de kas.

- De dag**
Bij het opstarten van de tomaten kas met de CHP en tomaten aan elkaar hangen. Het is niet mogelijk, naast tomaten, bijvoorbeeld in een kas van CHP en de tomaten aan elkaar hangen. Het is niet mogelijk om de tomaten omstandigheden van de dag en de nacht veranderende omstandigheden in de kas.

Het hoofd koel houden



Hessel N. Pot

Tournoysveld 67

3443 ER Woerden

h.n.pot@hetnet.nl

Onderwijs

Wat reeksen zijn, is niet te zeggen

Het onderwerp reeksen is altijd een smakelijk onderdeel van het eerstejaarsprogramma van studenten in de bètavakken. Hessel Pot beweert dat een begrip reeks niet goed te definiëren valt. Heeft hij hierin gelijk? Hessel Pot is wis- en natuurkundige en was een aantal jaren eindredacteur van het tijdschrift Pythagoras.

Haast ieder calculusboek bevat een hoofdstuk over 'reeksen'. Echter, de manier van definiëren van die term wijkt nogal af van wat we in de wiskunde gewend zijn. De betekenis van 'rij' is geen probleem, bij elke auteur is dat: een functie op de natuurlijke getallen. Maar bij 'reeks' is het geven van een nette definitie onmogelijk, domweg omdat die term in minstens drie verschillende betekenissen door elkaar gebruikt wordt! (Behalve bij een auteur die in navolging van Cauchy, eenvoudigweg elke oneindige getallenrij aanduidt met: *série*/reeks.) Ik zag nog nooit ergens een definitie in de recht-toe-recht-aan-vorm: Onder een reeks verstaan we een

De gangbare praktijk

Het aan veel Nederlandse universiteiten gebruikte calculusboek van James Stewart geeft de volgende 'definitie':

If we try to add the terms of an infinite sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ we get an expression of the form

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

which is called an **infinite series** (or just a **series**).

Glashelder, ... of toch eigenlijk niet helemaal?

An infinite series is often defined to be 'an expression of the form $\sum_1^{\infty} a_n$ '. It is recognised that this has many defects. In order to avoid some of these, we adopt the following definition: "An infinite series of real numbers is a pair of real sequences $\{a_n\}$ and $\{A_n\}$ whose terms are connected by ...". (B.Creighton Buck; *Advanced calculus*, 1956).

Drie verschillende betekenissen

De aanduiding

$$\text{de reeks } a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$(\text{of: de reeks } \sum a_n)$$

moet bij de meeste auteurs gelezen als

- ofwel de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ (als het gaat over z^n som, of over z^n termen),
- ofwel de rij $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$ (als het gaat over z^n convergentie),
- ofwel noch 1, noch 2 (als het gaat over z^n absolute convergentie).

Echte ongelukken ten gevolge van die meervoudige betekenis van 'reeks' blijven uit, zolang auteurs dat woord uitsluitend gebruiken in een beperkt aantal standaardzinnnetjes waarvan de betekenis vast te leggen is met het bekende begrip 'rij'. Zulke reeksnetjes zijn:

- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ convergeert / divergeert
- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ heeft som S
- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ is absoluut convergent
- de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ is relatief convergent.

Echter, zo gauw 'reeks' of 'reeksen' gebruikt wordt op een manier waarbij de suggestie wordt gewekt dat er welbepaalde wiskundige objecten mee worden bedoeld (zoals bijvoorbeeld in een hoofdstuktitel als 'Rijen en reeksen'), dan moet de lezer weten dat dat nooit het geval is.

REEKSEN BESTAAN NIET! (tenzij de term gebruikt is als synoniem voor 'oneindige rij').

Problemen, veroorzaakt door het niet-gedefinieerd zijn van 'reeks', komen onder meer aan het licht waar sprake is van *reeksontwikkelingen* (waar staat wat dit voor din-

gen zijn?), en van *tweezijdig oneindige reeksen* en *dubbelreeksen*. (Bij zulke rijachtige dingen met een index die loopt van $-\infty$ tot $+\infty$, of bij matrixachtige dingen met twee onafhankelijke indices van 1 tot ∞ , is niet zonder meer duidelijk op welke manier de partiële sommen gevormd moeten worden. Waarvoor het, bij een mix van positieve en negatieve termen, onmogelijk is om te zeggen of zo'n 'reeks' al dan niet convergent is.)

De oorsprong van de mist rond reeksen

De Fransman Cauchy was in 1821 de eerste die precies omschreef wat hij bedoelde met 'de som van een oneindige getallenrij': de limiet van z^n (oneindige) rij partiële sommen. Dus de rij $1, -1, 1, -1, 1, \dots$ had volgens Cauchy geen 'som'. In Google staat onder *Cauchy Cours d'analyse* de originele Franse tekst; zie met name de eerste zinnen van Ch.VI. Helaas koos Cauchy voor een wat curieuze, om misverstand vragende, terminologie: hij noemt een rij met een termenlimiet *convergerend*, en een rij met ook nog een partiële sommenlimiet *convergent*! Hij presenteerde *convergent* als een nieuwe vakterm, naast het (voor hem) spreektaal-werkwoord *convergeren*. Dit

In de gedrukte versie van het *Kollege Integralekening* door H.B.A. Bockwinkel (1932) staat op p.3 een kritische bespreking van reeks-definitie van enige anderen, met als conclusie: gewoonlijk blijft men min of meer in 't vage omtrent dat begrip.

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \&c \dots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. (Cauchy, 1821, 1823, 1827, 1829)

The statement that $\{a_n\}$ is, or is not, summable is conventionally replaced by the statement that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ does, or does not, converge. This terminology is somewhat peculiar, because ... (Michael Spivak, *Calculus* (edities van 1967 tot 2006))

A pair of sequences $\{a_n\}$ and $\{s_n\}$ such that ... is called a series. (*Encyclopaedia of mathematics*, Vol.8, 1992)

nogal subtiele verschil is door latere auteurs maar heel beperkt overgenomen (misschien ook vaak niet opgemerkt?). Haast altijd wordt gekozen voor constructies met 'reeks' waarin dat woord niet te vervangen is door 'oneindige rij'; formuleringen die als geheel een welbepaalde betekenis hebben, echter zonder dat eenduidig te zeggen is waar het losse woord 'reeks' voor staat.

Mogelijke remedie

Het betekenisloze 'reeks' is met een kleine aanpassing van het woordgebruik als volgt te vermijden:

- noem een rij *sommeerbaar* als die een (Cauchy-)som heeft;
- noem een rij *absoluut sommeerbaar* als z'n absolute term-waarden sommeerbaar zijn;
- en vermijd het woord 'reeks' overal waar het niet synoniem is met 'oneindige rij'.

Kan het eenvoudiger?

In Google is te zien dat summable/som-mable/summierbar echt gebruikt worden. En de benaming 'absoluut sommeerbaar' wordt bijvoorbeeld ook gebruikt door Arnoud van Rooij (Nijmegen).

Onderwijs

Overigens zal in onderwijssituaties natuurlijk wel gewezen moeten worden op de meerdubbele betekenis van het woord 'reeks' bij een groot aantal auteurs. Naast de al genoemde betekenissen 'rij' en 'de rij partiële sommen van de rij ...' staat de term ook nog vaak voor enkele speciale manieren van schriftelijk noteren van een rij.

Voorbeeld:

De rij van partiële sommen van de harmoni-

Het taalgebruik ten aanzien van reeksen is traditioneel slecht. (N.G. de Bruijn, Eindhoven, 1978: *Bijlage college Taal en Structuur van de Wiskunde*, deel V-21)

sche rij $n \rightarrow 1/n$ kan genoteerd worden als

$$1, 3/2, 11/6, 25/12, 137/60, \dots$$

Deze manier van weergeven zou je een *begintermen-vorm* kunnen noemen. Om duidelijker het onderliggende rij-voorschrift te laten uitkomen zul je die rij vaak bij voorkeur 'als reeks' (in een *reeks-vorm*) schrijven, een vorm waarin de verschillen tussen de termen direct zichtbaar zijn. Dan kan in de *grote-sigma-vorm*.

$$\sum 1/k \quad (\text{evt. met nog iets onder en boven de sigma}),$$

of in de *plussen-en-puntenvorm*

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots \\ (\text{evt. met } + 1/k + \dots).$$

De rij-met-somrij definitie

Al minstens een halve eeuw zijn er auteurs van calculusboeken die de betekenis van de term 'reeks' beschrijven als: de (geordende) combinatie van een rij en z'n rij partiële sommen. Ik vond dit bij: Creighton Buck 1956, Zamsky 1958, Apostol 2nd ed. 1974, K. Maurin 1976, Protter & Morrey 1977, *Encycl. of Mathematics* (uit het Russisch) 1992, Gaughan 1998, Boos 2000, Edward Azoff 2005.

Diezelfde benadering is ook te vinden in de internetencyclopedie Wikipedia waar het trefwoord 'reeks' in een tiental talen besproken wordt. De manier van 'definiëren' van dat trefwoord verschilt onderling sterk, de Engelse, Franse en Italiaanse versies hebben juistgenoemde koppelvorm. In de Nederlandse tekst gaat het niet om een koppel van rijen, maar om een rij van koppels.

Nu is het inderdaad mogelijk om af te spreken wat te verstaan is onder de termen, het convergeren, het absoluut-convergeren, en de som van zo'n rij-somrijkoppel. ('Een reeks noemen we *convergent* als het tweede lid van het koppel een convergente rij is,' en 'onder de *termen* van een reeks verstaan we de termen van de rij in z'n eerste lid,' etc.) Ook is af te spreken dat eerdergenoemde grote-sigmavormen en plussen-en-puntenvormen eigenlijk staan voor zulke speciale rij-somrijkoppels. Op het eerste gezicht lijkt een en ander het courante gebruik van de term 'reeks' in calculusteksten wel te kunnen legitimeren. Ik acht deze kunstgreep echter zo kunstmatig en vergezocht dat ik er bij het formuleren van de rest van dit stukje, inclusief de titel, geen rekening mee hield. Want het is weinig duidelijk in welk opzicht het bij een rij-somrijcombinatie om een wezenlijk ander

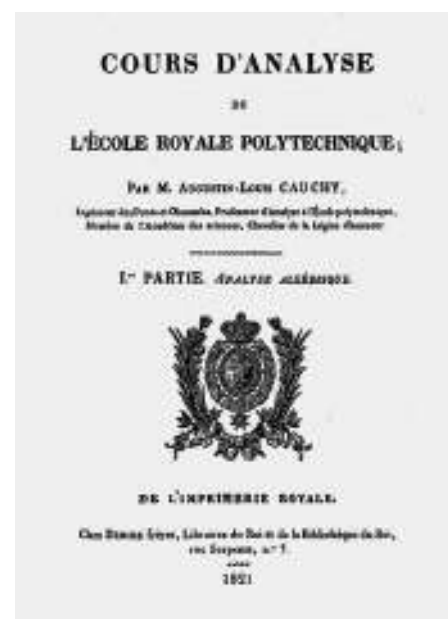
In de reclametekst op de achterflap van het Epsilonboekje *Analyse voor beginners* van Arnoud van Rooij, wordt de uitvoerige behandeling van rijen en reeksen geprezen. Dit ondanks het feit dat de auteur het gebruik van het woord reeks in de tekst van het boekje met opzet volledig heeft vermeden.

ding zou gaan dan bij een rij-zonder-meer. Bij elke rij ligt toch al automatisch vast wat z'n somrij is? Je zou evengoed kunnen definiëren dat je onder 'een reeks' verstaat: de combinatie van een rij a en de maan; en dat je zo'n rij-maankoppel 'convergent' noemt als de partiële sommen van die rij a convergeren. (Allemaal onder de voorwaarde dat het om rijen met optelbare termen gaat.)

Slot

De nu en dan opblaaiende discussie rond het gebruik van het woord reeks heeft veel, zo niet alles te maken met het feit dat Cauchy in 1821 op blz. 123 van zijn *Cours d'analyse* koos voor het adjectief *convergente* in plaats van *sommable*. Ik blijf erbij dat het het eenvoudigst is om de woorden rij en reeks gewoon als synoniemen te zien, en het alleen te hebben over *sommeerbare* rijen naast *convergente/convergerende* rijen. (Zo wordt het ook in schoolboeken haast altijd gedaan, voorzover het onderwerp daar aan de orde komt.)

Met betrekking tot het gebruik van de benaming 'oneindig product' geldt iets dergelijks.



Cours d'analyse, 1821, Augustin-Louis Cauchy

Michael Muskulus

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Niels Bohrweg 1
2333 CA Leiden
muskulus@math.leidenuniv.nl

Hans de Waal

Protestantse Theologische Universiteit
Vestiging Leiden
Matthias de Vrieshof 1
2311 BZ Leiden
jadewaal@pthu.nl

Onderzoek

Over luie studenten, groepsdynamica en pokeren

Welke wiskundige theorie kan aanspraak maken inzicht in het menselijk gedrag te geven, biologische fenomenen te verklaren, en onderwijl de optimale strategische keuzes in kansspelen te bepalen? De auteurs geven een beknopt overzicht van de speltheorie gemotiveerd door enkele eenvoudige toepassingen die verrassende inzichten geven. Omdat Nederland sinds enige jaren volledig in de ban is van het pokeren, richten ze hun aandacht vooral op dit gok- en familiespel.

Speltheorie is een interdisciplinaire onderneming met als doel het opstellen en analyseren van intelligent gedrag in situaties waar beslissingen moeten worden genomen. Dit streven opent niet alleen deuren voor belangrijke toepassingen in biologische, economische en sociale contexten [11], maar levert ook interessante *gemotiveerde wiskunde* op [7]. Omdat de grondlagen van de speltheorie met elementaire wiskundige kennis te begrijpen zijn, en de inzichten vaak verrassen, is dit vak ook een ideale aanvulling op de standaard lesstof in het onderwijs. Frank Thuisman's *Spelen en Delen* in de Zebra-reeks is een voorbeeld voor een benadering op vwo-niveau [23], en Edward Packel's *The Mathematics of Games and Gambling* bevat ook een hoofdstuk over speltheorie op vergelijkbaar niveau [21].

Sinds zijn ontstaan wordt speltheorie op kansspelen toegepast. Zo bespreken von Neumann en Morgenstern in hun klassieke *Theory of Games and Economic Behavior* een eenvoudig model voor pokeren [24]. Door de opkomst van het internet en de mogelijkheid online te spelen is de populariteit van pokeren de laatste jaren overal ter wereld erg gestegen. De aandacht van de media is enorm

sinds de inzet van online Monte Carlo berekeningen van winkansen en miniatuur camera's die onder de kaarten van de spelers kijken. Ook in Nederland is *Texas Hold'Em* poker extreem populair geworden, vooral onder de jonge generatie [1]. De speltheoretische benadering wordt evenwel snel ingewikkeld, maar eenvoudige wiskundige modellen leveren al belangrijke inzichten op.

Filosofische grondlagen

Zoals elke goede theorie is ook de speltheorie filosofisch gemotiveerd [2]. Uitgangspunt is de aanname dat mensen de consequenties van hun handelingen kunnen overzien en beoordelen met betrekking tot hun gewenstheid, en op basis daarvan de voor hun meest voordelige uitkomst kiezen. Het centrale concept in de speltheorie is daarom de wenselijkheid, in het engels *utility* genoemd. De filosoof Jeremy Bentham beschouwde deze als het plezier dat onze handelingen ons geven [8]. In het *utilitarism* van Bentham en John Stuart Mill wordt de maxime van het maximaliseren van de utility toegepast op moreel en politiek vlak. In de economie werd dit idee populair door Léon Walras, die een consument

beschouwde als een automaat die probeert een utility functie te maximaliseren onder beperkingen die hem door zijn omgeving opgelegd zijn.

De utility in economische toepassingen is meestal gelijkgesteld aan de monetaire winst omdat geld, tenminste in theorie, een universeel ruilmiddel is. Daardoor ontstaan eenvoudig paradoxen, bijvoorbeeld wanneer wij altruïstisch gedrag willen verklaren [9]. Juist daarom moeten wij utility in zijn oorspronkelijke, ethische dimensie opvatten, namelijk als de winst voor het *goede leven* van een mens [6], temidden van zijn medemensen, waarbij dus ook esthetische, culturele en sociale aspecten een rol spelen.

Strategische spellen

Omdat mensen niet alleen op de wereld zijn, kan niet iedereen zijn utility zomaar maximaliseren: vaak hebben mensen tegenstrijdige belangen, een situatie die door het argeloos klinkende woord *spel* wordt omschreven [3].

Wiskundig wordt een spel gemodelleerd door een verzameling van mogelijke acties voor elke speler, en een pay-off-functie die de utility van de uitkomst voor elke speler beschrijft. Deze functie is afhankelijk van de keuzes van alle spelers. In het geval van een tweepersoons spel kunnen we de pay-off-functie van elke speler als een matrix weergeven, met de mogelijke acties van de eerste speler als rijen, en de acties van de tweede speler als kolommen. Verder wordt aangenomen

men dat utility numeriek meetbaar is, en de elementen van de matrix reële getallen zijn, zodat hun orde overeenkomt met de orde van voorkeuren die elke speler aan de uitkomsten geeft. De eenheid van de utility wordt ook *util* genoemd.

Het begin van de moderne speltheorie wordt gekarakteriseerd door de uitgave van von Neumann en Morgensterns boek, waarin de auteurs gedetailleerd beschrijven hoe een utility functie geconstrueerd kan worden. Deze methode is verwant met degene die de Bayesianen, voor wie kans een subjectieve uitdrukking van een geloof is, gebruiken om waarschijnlijkheden te bepalen (en die ook in soms wat twijfelachtige tv shows wordt gebruikt). Stel dat wij een keuze A de voorkeur boven B geven, maar dat wij óf A óf B plus wat toegevoegde 'aantrekkelijkheid' X aangeboden krijgen. Hoeveel van deze extra utility is nodig tot het ons niets uitmaakt welke van de twee uitkomsten gerealiseerd wordt? Hoe veel overtuigingskracht is er nodig om iemand een 'indecent proposal' te laten accepteren?

David Kreps' omvattende inleiding in de theorie van de rationale keuze beschrijft deze methode en enkele alternatieven [17]. De moderne, psychologische kant van de beslissingstheorie wordt in het boek van Hastie en Dawes gepresenteerd [13].

Luie studenten

Twee studenten moeten samen een werkstuk voor een college indienen. De afspraak is dat iedereen vandaag in zijn eentje werkt, en dat de volgende dag alleen nog maar de resultaten worden samengevoegd. Elke student wil graag een goed cijfer, maar het liefst zonder hard te werken. Eenvoudig gemodelleerd heeft elke student een keuze tussen twee acties: *hard werken* (H) of helemaal *niets doen* (N). De beste uitkomst voor elk student is dat hij niets doet, maar zijn partner wel. De slechtst mogelijke uitkomst is dat hij hard werkt, maar zijn partner niet, omdat hij niet wil worden uitgebuit. Wat is de rationele keuze voor beide studenten?

De volgende matrix modelleert dit spel dat wij *werken aan een gemeenschappelijk project* zullen noemen, Martin Osborne volgend [20]. Elk element (a, b) van de matrix geeft de utility van de uitkomst voor de eerste speler (a) en de tweede speler (b) aan.

		speler 2	
		Hard werken	Niets doen
speler 1	Hard werken	2, 2	0, 3
	Niets doen	3, 0	1, 1

De wiskundige John Nash, de tragische held van Sylvia Nasars boek *A beautiful mind*, redeneerde als volgt: Stel dat een speler weet wat zijn partner gaat doen. Dan kan hij gebaseerd op deze informatie een *beste antwoord* kiezen. Een *Nashequilibrium* is nu een strategische keuze voor elke speler, zodanig dat de strategie van elke speler het beste antwoord is op de acties van alle andere spelers. Zoals Ken Binmore heeft opgemerkt, verlost een Nash equilibrium ons van de cirkel die begint met 'ik denk dat hij denkt dat ik denk dat...' [9] en voorziet in een stabiele strategie, die ervaren spelers kiezen.

In het geval van ons voorbeeld, dat ook het *prisoner's dilemma* genoemd wordt, is helaas de strategie (N, N) het unieke Nashequilibrium. Zou dit de reden zijn waarom studenten het vaak zo moeilijk vinden om productief samen te werken?

Gemengde strategieën

De volgende matrix modelleert een eenvoudig spel dat *matching pennies* heet, waarbij twee spelers allebei of *kop* (K) of *munt* (M) kiezen. Als zij hetzelfde zeggen, wint de eerste speler een util van de tweede, en anders wint de tweede een util van de eerste [4].

		speler 2	
		Kop	Munt
speler 1	Kop	1, -1	-1, 1
	Munt	-1, 1	1, -1

Het is duidelijk dat de enige manier voor een speler om niet een heleboel geld te verliezen is, om *onvoorspelbaar* te zijn. De actie die een speler kiest moet dus door een element van toeval bepaald zijn. Wiskundig wordt dit gemodelleerd door een kansverdeling over de acties; wij noemen dit een *gemengde strategie*, in tegenstelling tot de *pure strategieën* (K) en (M). John Nash heeft laten zien dat ook voor gemengde strategieën altijd tenminste één Nash equilibrium bestaat, waarbij de deterministische uitkomst door een verwachting moet worden vervangen.

Stel dat de eerste speler de gemengde strategie $(p, 1 - p)$ speelt. Dat wil zeggen dat hij elk keer met een waarschijnlijkheid van $p > 0$ kop kiest, en munt met een kans van $1 - p$. De tweede speler speelt een gemengde strategie $(q, 1 - q)$. Stel verder dat (p, q) een Nashequilibrium vormen, zodat er voor geen van beide spelers een reden is om van zijn strategie af te wijken. Meer nog, in een Nash equilibrium is de verwachting van de pure strategieën voor elke speler gelijk: anders zou het namelijk beter zijn om voor een van

de pure strategieën te kiezen in plaats van de gemengde, als gevolg van de lineariteit van de verwachting. Dit zogenoemde *neutraliteitsargument* leidt tot

$$\begin{aligned} E[K] &= pq - p(1 - q) \\ &= (1 - p)(1 - q) - (1 - p)q = E[M], \end{aligned}$$

met als oplossing $q = 1/2$. Op dezelfde manier zien we dat ook $p = 1/2$ optimaal is, en het unieke Nash equilibrium van *matching pennies* is dus $(1/2, 1/2)$, zoals verwacht.

Groepsdynamica

Een niet-triviale toepassing is het volgende spel dat vaak *reporting a crime of the good Samaritan* genoemd wordt [20]. Er zijn N spelers die allen getuige zijn van een crimineel incident. Iedereen heeft er baat bij dat de politie wordt gebeld omdat daarmee het slachtoffer wordt geholpen. Aan de andere kant geeft iedereen er de voorkeur aan dat iemand anders belt. Elke speler heeft dus de keuze tussen de twee acties *bellen* (B) of *niets doen* (N). De payoff van een speler is 0 als niemand belt, een beloning van $v > 0$ als tenminste één andere speler belt, en een beloning van $v - c > 0$ als tenminste hij belt — en eventueel ook nog iemand anders. Met een neutraliteitsargument kunnen wij, als zoëven, een gemengd Nashequilibrium vinden. Laten we de kans waarmee een van de spelers belt p noemen. De kans dat niemand van de $N - 1$ andere spelers belt is $(1 - p)^{N-1}$. Dan is

$$\begin{aligned} E[B] &= v - c = E[N] \\ &= v \cdot P[\text{iemand anders belt}] \\ &= v \cdot (1 - P[\text{niemand anders belt}]), \end{aligned}$$

wat uiteindelijk $p = 1 - (c/v)^{1/(N-1)}$ oplevert. We zien dat wanneer het aantal spelers toeneemt, de waarde van p afneemt. De kans dat niemand de politie belt is

$$(1 - p)^N = (c/v)^{1+1/(N-1)},$$

en deze neemt asymptotisch af tot een waarde van c/v . Hoe kunnen we dit resultaat interpreteren? Stellen wij bijvoorbeeld $v = 10$ en $c = 1$, dan wordt bij een voldoende aantal spelers in één van tien gevallen de politie *niet* gebeld.

Wat dit in de praktijk voor gevolgen kan hebben, laten wij aan de verbeelding van de lezer over. Het bijbelverhaal over de barmhartige Samaritaan stemt echter hoopvol: drie spelers bleek al voldoende om tot het gewen-

ste resultaat te komen (Lukas 10, 30–37).

Optimaal pokeren

De wiskundige analyse van het pokeren heeft met enkele moeilijkheden te maken, onder andere veroorzaakt door het feit dat de orde van winkansen van pokerhanden (de verzameling kaarten die tot de beschikking van een speler staan) niet transitief is [5]. Daarom worden er vooral eenvoudige modellen bestudeerd. Hiervan is het voordeel dat deze modellen meestal breed toepasbaar zijn, en ook niet van de pokervariant die gespeeld wordt, afhangen. Juist daarom hoeven wij hier ook niet de regels van poker tot in detail uitleggen (een goede introductie is te vinden in [18]) en werken we met algemene principes.

In het begin van het spel moet elke speler een verplichte inzet doen, de zogenoemde *ante*, pas daarna worden de kaarten uitgedeeld. Daarop volgen een aantal ronden van bieden. Voor het begin van van het bieden kunnen in sommige ronden kaarten gewisseld worden, of komen er kaarten open op tafel bij.

Een speler die aan de beurt is heeft een aantal strategische mogelijkheden. Het is altijd mogelijk om uit het spel te stappen (*fold*) en de verzamelde inzet (de *pot*) aan de resterende spelers over te laten. Als er in een ronde tot nu toe geen bod gedaan is, is het ook mogelijk niets te doen (*check*), of een speler kan een inzet doen (*bet*) die door alle andere spelers moet worden gematched. Maar als er al een bet bestaat, moet deze gematched worden (*call*) om in het spel te blijven, en kan zelfs verhoogd worden (*raise*). In de *limit poker* varianten zijn deze inzetten aan sterke beperkingen onderworpen, in *no-limit* poker bestaat er geen bovengrens.

Een eerste niet-triviaal inzicht is dat de ante het spel pas mogelijk maakt. Zonder ante zou het veel te gevaarlijk zijn om met iets anders dan de (unieke) beste hand een inzet te doen. Aan de andere kant, als de ante erg hoog is, dan moet een speler bijna elk bod beantwoorden, omdat zijn verwachting van een aandeel uit de pot (zijn *pot odds*) zelfs bij slechte kaarten nog steeds positief is [22].

De aard van het bluffen

De dynamica van pokeren komt voort uit het bestaan van niet-toegankelijke informatie. Omdat een deel van de kaarten van de tegenstanders onbekend zijn, kan een speler niet weten of hij de winnende hand (*the nuts*) heeft, of een verliezende hand (*dead hand*). Als hij dit zou weten, dan zou een speler in eerste instantie alleen maar met de

nuts spelen en bieden (*value bets*), en anders folden. Maar deze strategische keuze is voorspelbaar, zodat zijn tegenstanders bij een bod altijd zullen uitstappen, wat een gemiddelde winst van nul oplevert.

Om winst bij poker te maken, moet een speler dus zoveel mogelijk informatie over zijn eigen hand voor de andere spelers verbergen (*information hiding*). Het middel om dit te doen is de *bluff*: af en toe ook met zwakke kaarten inzetten — en daarbij betrappt worden!

Veel mensen overschatten de functie van een *bluff*. Het is niet primair bedoeld om winst mee te maken, maar werkt indirect. In de woorden van Chen en Ankenman [10]: “Bluffing in optimal poker play is often not a profitable play in itself. Instead, the combination of bluffing and value betting is designed to ensure the optimal strategy gains value no matter how the opponent responds. Opponents who fold too often surrender value to bluffs while opponents who call too often surrender value to value bets.”

Een voorbeeld zal dit verduidelijken. In dit *heads-up clairvoyant half-street* spel nemen wij aan dat speler *Y* weet of hij de nuts of een *dead hand* heeft, en hij heeft een keuze tussen een *bet* (met een vaste inzet van *S*) of een *check* (zonder inzet). Er is maar een tegenstander, speler *X*, die daarna kan kiezen tussen een *call* of een *fold*. Ook hier komt weer een neutraliteitsargument aan te pas. Laat *c* de frequentie zijn waarmee *X* de inzet evenaart, en stel dat *Y* gebluft heeft. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} E[Y \text{ bluffs}] &= (1 - c)P - cS \\ &= 0 = E[Y \text{ checks dead}] \end{aligned}$$

moet zijn, waar $P > S$ de waarde van de pot is, die *X* aan een bluff verliest als hij uitstapt. De optimale calling frequentie is dus $c = P/(P + S)$, wat betekent dat wanneer de pot groter is, *X* vaker de inzet moet matchen, om de bluffs van *Y* tegen te houden. Als *X* minder vaak voor een *call* kiest, stijgt de verwachting van *Y* door zijn bluffs.

Aan de andere kant, laat *b* de frequentie van bluffs van *Y* zijn, als hij de verliezende hand heeft (wat met een waarschijnlijkheid *q* gebeurt), dan geldt dat

$$\begin{aligned} E[X \text{ calls}] &= -qS + b(1 - q)(P + S) \\ &= 0 = E[X \text{ checks}], \end{aligned}$$

wat

$$\begin{aligned} b &= S/(P + S) \cdot q/(1 - q) \\ &= (1 - c) \cdot q/(1 - q) \end{aligned}$$

oplevert.

De totale verwachting van *Y* is

$$\begin{aligned} E[Y] &= cqS + b(1 - q)((1 - c)P - cS) \\ &= q(c^2S + (1 - c)^2P). \end{aligned}$$

Omdat

$$dE[Y]/dc = 2q(-P + c(S + P)),$$

stijgt de verwachting van *Y* ook als

$$c > P/(P + S).$$

Wij zien verder dat de optimale frequentie van bluffs daalt als de pot groter wordt.

Headsup Jam-or-Fold

Een ander eenvoudig model is de *no-limit heads-up jam-or-fold* [0, 1] spel. Twee spelers *X* en *Y* hebben allebei een voorraad *S* aan chips die hun maximale inzet beperkt. Speler *X* heeft een ante van een chip ingezet, speler *Y* een halve chip. We nemen aan dat speler *Y*, die aan de beurt is, óf alle *S* chips gaat inzetten (*jam*) óf uitstapt (*fold*). Om op een eenvoudige manier de winstkansen te berekenen, maken wij gebruik van het [0, 1] pokermodel, waarbij elke hand gemodelleert wordt als een toevalsvariable uit een uniforme verdeling over [0, 1] en een kleiner getal van een grotere getal wint. Dan bestaat er een drempelwaarde $y \in [0, 1]$, zodat *Y* met elke hand die beter dan *y* is inzet, en anders uitstapt. Voor speler *X* bestaat een drempelwaarde $x \in [0, 1]$, zodat hij met elke hand die beter is dan *x* de inzet van *Y* *callt*, en anders uitstapt.

De verwachtingen van *Y* voor zijn twee strategische keuzes zijn dan

$$\begin{aligned} E[Y \text{ folds}] &= -1/2, \\ E[Y \text{ jams}] &= -xS + (1 - x), \end{aligned}$$

waarbij wij gebruik maken van het feit dat ook $x < y$ moet gelden. Uiteraard heeft het geen zin voor speler *X* om met een slechtere hand dan *y* met een bod van *Y* mee te gaan. De waarde $x = 3/(2 + 2S)$ waar de twee verwachtingen overeenkomen is de optimale calling-frequentie van speler *X*.

De verwachtingen voor *X* zijn

$$\begin{aligned} E[X \text{ calls}] &= -S \frac{x}{y} + S \frac{y - x}{y}, \\ E[X \text{ folds}] &= -1 \end{aligned}$$

wat $y = 3S/(1 + S)^2$ oplevert.

Voor grote waardes van S kunnen beide spelers alleen maar met de unieke beste hand (twee azen in Hold'Em, met een winkans van rond 85%) spelen. Zelfs met de een na beste hand (twee koningen in Hold'Em, met een winkans van rond 82%) kan niet worden gespeeld, omdat de tegenstander alleen met de beste hand meegaat. Meer nog, als S daalt, is de eerste hand die behalve twee azen kan worden gespeeld een hand met één aas, omdat dit de kans verlaagt dat de tegenstander twee azen heeft. Deze zogenoemde *card removal* effecten maken de analyse van poker juist zo interessant.

Chen en Ankenman bespreken dit model uitgebreid en wijzen op een interessante analogie. De waarde van S kan beschouwd worden als een temperatuur, waarbij $S \rightarrow \infty$ het absolute nulpunt representeert, en het spel voor kleinere waardes van S heter wordt. Bij bepaalde waardes van S treden er fasetransities op, namelijk als verdere handen met positieve verwachting gespeeld kunnen worden.

In hun boek presenteren zij tabellen met waardes van S , die aangeven wanneer bepaalde handen kunnen gespeeld worden of juist niet [10], en merken op dat alleen al het gebruik van deze tabellen de aanschafprijs

van hun boek ruimschoots vergoedt. En dat dagelijks.

Het gulden getal van Poker

Ook voor de hoogte S van een inzet in no-limit poker bestaat een optimale oplossing volgens de speltheorie. Laat een speler Y met een frequentie $b = 1/(S+1)$ bluffen, zoals wij eerder hebben bepaald (waarbij wij $P = 1$ normaliseren en $q = 1/2$ aannemen), en zijn tegenstander X met een frequentie $c = 1 - b$ callen. Laten wij aannemen dat X in de helft van de gevallen callt, omdat hij zeker is de winnende hand te hebben. De frequentie c' waarmee hij in de rest van de gevallen callt, met een verlies van S , volgt uit

$$\frac{1}{2}c' + \frac{1}{2} = \frac{1}{S+1} = c$$

en is $c' = (1 - S)/(1 + S)$. De verwachting van Y is dus

$$E[Y] = k \cdot \frac{S(1 - S)}{1 + S}$$

waarbij k een constante is, die aangeeft hoe vaak dit geval tot stand komt. Maximaliseren van deze verwachting levert de oplossing $S = \sqrt{2} - 1$ op: de optimale waarde van een bet in dit spel.

Omdat de waarde $\sqrt{2} - 1$ vaak in de

wiskundige analyse van no-limit poker voorkomt, werd het door Chen & Ankenman ook *het gulden getal van poker* (golden mean of poker) genoemd.

Spellen en evolutie

Nadat wij enkele modellen hebben gepresenteerd die door de lezer makkelijk op zijn of haar eigen spellen kunnen toegepast worden, besluiten we met een uitkijk naar de toekomst.

Wij hebben gezien dat de speltheoretische analyse optimale strategieën kan bepalen, maar zij geeft tot zover geen antwoord op de vraag hoe deze in realistische situaties realiseerd worden. De dynamica van herhaalde spellen wordt echter in de *evolutionaire speltheorie* onderzocht, vooral in biologische context [14, 19]. Op het gebied van pokeren is, dankzij de complexiteit van dit spel, nog niet veel onderzoek gedaan (een eenvoudig voorbeeld is [16]; zie ook [25]).

Misschien is de een of andere lezer nu gemotiveerd genoeg, zodat er in de nabije toekomst wel wat afstudeer projecten (of ander onderzoek) in Nederland te verwachten zijn op dit gebied...

Referenties

- 1 Veel spelers beseffen daarbij niet dat de deelname aan pokertoernooien buiten het aanbod van Holland Casino, bijvoorbeeld op internet, illegaal is. Een officiële reden hiervoor is het gevaar van verslaving. Voor meer informatie zie [12].
- 2 Al in Plato's *Laches* en zijn *Symposium* zijn speltheoretische beschouwingen te vinden wanneer hij de dapperheid van soldaten bespreekt.
- 3 De RAND Corporation, een Amerikaanse denktank, heeft veel speltheoretische modellen op militair vlak onderzocht. Herman Kahn's studie over de thermonucleaire oorlog is een bekend voorbeeld waarin op enkele pagina's speltheoretische overleggingen aan te pas komen [15]. Zie verder: <http://www.rand.org/>
- 4 Een hilarische filosofische benadering van het wezen van het lot door middel van (onder andere) dit spel is te vinden in Tom Stoppard's theaterstuk *Rosencrantz & Guildenstern are dead* en in de gelijknamige film.
- 5 Bijvoorbeeld wint AK met rond 62.25% van JT, JT met rond 50.95% van 22, en 22 met rond 52.72% van AK in Texas Hold'Em poker.
- 6 Aristotle, *The Nicomachean Ethics*, Penguin Books, London, 2004.
- 7 J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- 8 J. Bentham, *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, Dover Publications, Mineola, 2007.
- 9 K. Binmore, *Game Theory: A Very Short Introduction*, Oxford University Press, New York, 2007.
- 10 W. Chen, and J. Ankenman, *The Mathematics of Poker*, ConJelCo, Pittsburgh, 2006.
- 11 A. M. Colman, *Game Theory & its Applications in the Social and Biological Sciences*, Routledge, London, 1999.
- 12 J. Franssen, E.-J. Koning, and C. Kolar. *Het gezicht van Poker. Onderzoek naar Poker in Nederland*, College van toezicht op de kansspelen, Den Haag, 2007.
- 13 R. Hastie, and R. M. Dawes, *Rational Choice in an Uncertain World*, Sage Publications, Thousand Oaks, 2001.
- 14 J. Hofbauer, and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 1998.
- 15 H. Kahn, *On Thermonuclear War*, Princeton University Press, Princeton, 1960.
- 16 G. Kendall, and M. Willdig, 'An Investigation of an Adaptive Poker Player', in: J. G. Carbonell, and J. Siekmann, editors, *AI 2001: Advances in Artificial Intelligence*, LNCS 2256, pp 217–229, 2001.
- 17 D. M. Kreps, *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press, Boulder, 1988.
- 18 M. Malmuth, and L. Loomis, *Fundamentals of Poker*, Two Plus Two Publishing, Henderson, 1999.
- 19 J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, New York, 1982.
- 20 M. J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, New York, 2004.
- 21 E. Packel, *The Mathematics of Games and Gambling*, The Mathematical Association of America, Washington, 2006.
- 22 D. Sklansky, *Theory of Poker*, Two Plus Two Publishing, Henderson, 1999.
- 23 F. Thuijsman, *Spelen en Delen*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2005.
- 24 J. von Neumann, and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- 25 <http://www.cs.ualberta.ca/~games/poker>

Cees Andriessse

Brugakker 68.03

3704 RS Zeist

c.d.andriessse@planet.nl

Boekbespreking Descartes: De passies van de ziel

Descartes over emoties

Niet alleen Spinoza schreef in logische termen over onderwerpen die het innerlijke leven betreffen. Ook Descartes deed dit in 1647, in zijn boek 'Les passions de l'âme'. Theo Verbeek heeft het vertaald. Cees Andriessse, emeritus hoogleraar natuurkunde, historicus, en auteur van onder andere de biografie 'Titan kan niet slapen' van Christiaan Huygens geeft zijn commentaar. Dit laatste boek van René Descartes verscheen in 1649 zowel in Amsterdam als Parijs en in 1650 nog eens in Amsterdam met de titel 'Passiones animae'.

Velen zullen weten dat René Descartes (1596–1650) de analytische meetkunde ontdekt heeft — los van Pierre de Fermat, die deze coördinatenmeetkunde met haar symbolische algebra bijna op hetzelfde ogenblik ontdekte — en dat hij, in directe samenhang met deze wiskunde, een methode gepropageerd heeft waarmee de wereld onderzocht zou moeten worden — een 'logische' methode die door haar eis van duidelijkheid en distinctie van de begrippen veel heeft bijgedragen aan de wetenschappelijke revolutie van de zeventiende eeuw. Maar het zullen er vast niet veel zijn die weten dat hij op die manier niet alleen de wereld onderzocht heeft, maar ook geesten die er niet in thuis leken te horen, namelijk de emoties. Toch geldt zijn *Passions de l'âme*, een boek uit 1649, dat tot diep in de achttiende eeuw bestudeerd werd, nog steeds als het begin van de wetenschappelijke emotiepsychologie [1]. Descartes als psycholoog ... Voor een beter inzicht in de soms ook duistere 'logica' van deze man met het veelzeggende motto *bene vixit, bene qui latuit* (goed leeft hij die goed verborgen heeft), is het toe te juichen dat Theo Verbeek dit werk over de emoties met een vertaling en uitgebreid com-

mentair opnieuw onder onze aandacht heeft gebracht.

Het nieuwe woord emotie

Waarom heb ik het over emoties, en niet over passies, zoals Verbeek *passions* vertaalt? Ik doe dat omdat de Van Dale aan 'passie' vijf betekenissen toekent en aan 'emotie' in wezen maar één: (plotselinge) ontroering of gemoedsbeweging. En ik doe het omdat Descartes zelf met dit woord voor de dag gekomen is. Nico Frijda zegt in een recent interview [2]: 'In 1632 is het woord 'emotie' bedacht, als een alternatief voor 'passie', als de onderstreping van het feit dat passies zoveel wanorde bij mensen teweeg brengen. Want het woord emotie komt van het oude Franse woord voor oproer, émeute. Het was Descartes die het prachtig vond om dat als beeld te gebruiken voor al die beroering die in het lichaam werd aangericht door de passies.' Hij was de eerste die geprobeerd heeft de manier waarop zo'n beroering zich uitte — de ene beroering was de andere niet! — in verband te brengen met een specifiek mechanisme ergens binnen in het lichaam.

Welnu, werd het hart niet van oudsher

gezien als de zetel der gevoelens, en wordt een sterke emotie zoals de begeerte niet nog steeds een 'hartstocht' genoemd? Dat Descartes in eerste instantie aan mechanismes in het hart dacht hoeft ons dus niet te verbazen. In 1632 had hij *De motu cordis* gelezen, het boek van William Harvey over de ontdekking van de harts slag en de bloedsomloop, en had hij, zeker mede onder invloed van Isaac Beeckman — de Dordtse rector die ook tot de conclusie was gekomen dat het hart door drukopbouw en voortstuwing (dus mechanisch) op het bloed inwerkte [3] — een mechanistisch wereldbeeld ontwikkeld waar hij vijf jaar later over publiceren zou in zijn bekende *Discours de la méthode*. In het overigens vrij uitgebreide en erudiete commentaar van Verbeek heb ik een verwijzing naar de rol van Beeckman gemist, terwijl een volgeling, de Utrechtse medicus Henricus Regius, wél genoemd wordt (p 70). Laat ik, voor de goede orde, de inhoud van het boek van Verbeek nu eerst even beschrijven.

Korte beschrijving van het boek

Descartes' *De passies van de ziel* telt 232 pagina's, waarvan 71% (van p 63 t/m p 228) bestemd is voor Verbeeks vertaling van de 212 paragrafen van *Passions de l'âme* (PA), die op haar beurt echter weer voor circa 30% bestaat uit 111 noten met kruisverwijzingen en historische uitleg die Verbeek heeft toegevoegd, zodat de helft van het boek uit toelichtingen bestaat. Verbeek kennende, durf ik

zeggen dat de vertaling voortreffelijk is — ik heb geen behoefte gevoeld haar met het origineel te vergelijken, en iedereen die de vloeiende zinnen leest, ziet het statige zeventiende eeuwse Frans als het ware voor zich. Ook de toelichting is, op nog een paar puntjes van kritiek na (waar ik op terugkom), voortreffelijk. Ze bestaat uit een inleidend stuk over de ontstaansgeschiedenis van het boek (pp 9–14) en een analyse van de inhoud (pp 15–29), die duidelijk maakt waarom het hier echt om nieuwe inzichten gaat: ‘Passies — zo concludeert Descartes in paragraaf 26 — zijn de gewaarwording van een uitzonderlijke toestand van het lichaam, en hebben als object iets dat door ons gekend of waargenomen wordt’ (p. 18), wat naadloos aansluit bij de moderne visie dat ze ‘cognities tot emotionele (boosmakende, vreeswekkende enz.) cognities maken’. [4] Voordien zag men ze vooral als ziekmakende of zelfs dodelijke animale geesten, die alleen bestreden konden worden als men het hoofd koel hield. Aan het eigenlijke boek gaan nog brieven vooraf (pp 31–62), van en aan een Parijse vriend die gevraagd was de uitgave van het boek te verzorgen en er een voorwoord bij te schrijven over het verband met zijn eerdere boeken.

Het hart onder invloed van emoties

Aan welke mechanismes in het hart dacht Descartes? Niet aan variaties in de druk op het bloed als gevolg van samentrekkingen van het hart — wat Harvey en Beeckman in feite al bewezen hadden — nee, hij dacht aan variaties in een ‘vuur zonder licht’ dat in het hart brandt en ‘het beginsel van alle bewegingen in en van het lichaam is’ (paragraaf 8). Voor hem moesten variaties in druk en in warmte hetzelfde effect hebben, want als het bloed in de hartholten verwarmd wordt ‘zet het zich uit, zodat het niet genoeg ruimte meer heeft en zich met grote kracht [uit de holten vandaan] een weg baant naar [de aders]’ (paragraaf 9). Hij zag het hart dus als een warmtemachientje zoals in het begin van de zeventiende eeuw links en rechts gedemonstreerd werd [5]. Maar los van de vraag wat die warmte veroorzaakte — Descartes zou aan fermentatie van het bloed gedacht hebben (noot 13, p. 73) en een student merkt dan op dat zo’n chemische reactie dus in stootjes van hooguit een seconde aan en uit zou moeten gaan — lag er de vraag hoe ze specifiek kon zijn voor een emotie.

Wat was eigenlijk anders in de hartbeweging bij zo tegengestelde emoties als vreugde (joie) en droefheid (tristesse)? Een essentiële vraag voor een filosoof die duidelijke en goed

onderscheiden (distinct) begrippen wenste te gebruiken. Welnu, bij vreugde zou die beweging gelijkmatig en snel zijn, met daarbij een aangename warmte (paragraaf 99), en bij droefheid zwak en traag, zonder veel warmte — het hart zou dan als ijs aanvoelen (paragraaf 100). Dacht hij niet alleen aan verschillen in frequentie (snel → traag) maar ook aan die in intensiteit (sterk → zwak)? Even lijkt het erop, want bij liefde (amour), een hevige vorm van vreugde, noemt hij de beweging weer snel en tegelijk ook ‘krachtiger’ (paragraaf 97) dan bij vreugde, maar bij haat (haine), die als een hevige vorm van droefenis gezien zou kunnen worden, blijkt de intensiteit toch niet groter te zijn. Hij noemt deze beweging tenminste nog steeds zwak en ‘vaak ook sneller’ (paragraaf 98), waarmee ze nauwelijks te onderscheiden is van die bij vreugde. En nog zo iets: Bij een vijfde primaire emotie, de begeerte (désir), zou de beweging bijzonder heftig zijn, ‘meer dan bij enige andere passie’ (paragraaf 101), maar de combinatie (snel en erg sterk) maakt dat ze nauwelijks te onderscheiden is van de combinatie (snel en sterk) van de liefde. Descartes maakte het zich moeilijk door nog een zesde primaire emotie in te voeren, de verwondering (admiration), die iets intellectueels is en, zoals hijzelf inzag, niets aan de beweging van het hart verandert (paragraaf 71). Overigens noemde hij ook bijna vijftig secundaire (samen gestelde) emoties.

Spinoza

Nu weet ik wel dat het niet aangaat de ideeënwereld uit de zeventiende eeuw met die van nu te confronteren, maar hoe is een mechanistische theorie serieus te nemen, die, zoals deze, door geen enkele meting ondersteund wordt? Als we lezen over de frequentie en de intensiteit van de hartslag, dan worden we geacht te vergeten dat de hartslag alleen maar sneller wordt als we ons inspannen, en dat elke slag ongeveer evenveel bloed wegpompt. Verbeek heeft er echter op gewezen dat ook de Cartesiaanse medici in de zeventiende eeuw al inzagen dat metingen nodig waren om de intuïties van Descartes te bewijzen — wat tot debatten tussen iatrochemici en iatrofysici geleid heeft [6]. Verder worden we geacht niet te weten dat van Descartes’ primaire emoties alleen maar de vreugde, droefheid en begeerte op de lijst staan van prototypische (aan actietendenzen gelieerde) emoties die nu onderscheiden worden (waaronder de angst, vrees, schrik, walging, woede) [7]. Maar Verbeek had er ons toch wel op kunnen wijzen dat het drietal vreugde-droefheid-

begeerte het enige is dat Baruch de Spinoza in zijn bekende *Ethica* als primair erkent [8]. Spinoza, deze jongere tijdgenoot die dit in 1665 (?) schreef maar pas in 1677, na zijn dood, liet publiceren, vond dat liefde en haat de vormen zijn die vreugde en droefheid aannemen als ze, zoals hij zegt, vergezeld gaan van het idee van een externe oorzaak. Voor hem was de verwondering ook geen emotie.

De naam van Spinoza mis ik met name als het paradoxale in *Passions de l’âme* aan de orde komt. Voor Descartes, die dacht dat mensen dankzij hun *geest* in vrijheid over hun bewegingen (dus hun gedrag) beslissen, moeten onvrijwillige animale bewegingen die door emoties worden ingegeven een probleem geweest zijn. Het pijn-haat-model dat Verbeek ons voorlegt (pp 20–25) om duidelijk te maken hoe hij denkt dat onvrije bewegingen met vrije kunnen samengaan, maakt echter helemaal niets duidelijk, of het moest zijn ‘s mans ‘logica’: Omdat de mens ook een *ziel* heeft zou hij alleen maar tot op zekere hoogte vrij zijn om te denken (paragraaf 50). Voor Spinoza is dit voldoende om het hele argument af te wijzen: [9] ‘Voorzover ik weet heeft nog niemand vastgesteld wat de aard en de macht van de emoties is, en ook niet wat de geest kan doen om ze in toom te houden. Natuurlijk weet ik dat de beroemde Descartes [net zoals ik] geloofde dat de geest absolute macht over zijn bewegingen heeft, maar ook hij heeft weer geprobeerd de emoties uit hun oorzaken af te leiden, zodat hij er meteen bij moest bewijzen dat de geest ze [toch] in zijn macht heeft. Volgens mij heeft hij er alleen maar zijn slimheid mee bewezen.’

De mechanistische visie op het lichaam

Wat zegt Descartes over de oorzaken van de (deels emotionele) hartbeweging? In zijn mechanistische denkwereld kunnen het natuurlijk geen enzymreacties zijn, maar zijn het stootjes van fijne deeltjes die door de bloedvaten en de zenuwdraden stromen, en tegelijk ook de lever, de maag, de milt, de nieren etc. in werking zetten. De impuls van deze deeltjes dacht hij zich afkomstig uit de ziel (l’âme, anima), die midden in hersenen zou moeten zitten omdat ze alleen daar ‘aandeel heeft aan alle indrukken’ (paragraaf 34). Dus lokaliseerde hij haar in de epifyse, een klier die er precies midden in zit, zodat de ‘gewaarwordingen van dingen buiten onszelf’ (paragraaf 23) precies kon samenvallen met de bron van de stootjes. Descartes’ ontdekking van het visuele systeem van de hersenen en, daarop gebaseerd, zijn notie van een *sensus communis* (de gemeenschappelijk-

ke waarneming, of geïntegreerde gewaarwording), worden tegenwoordig hoger aangeslagen dan zijn ideeën over de motorische reacties [10]. Omdat visuele indrukken voor emoties zo belangrijk zijn, had Verbeek Descartes' boek over die ontdekking en de menselijke fysiologie in algemene zin (*L'homme*, geschreven in 1632) eigenlijk even moeten noemen, al is het pas na zijn dood, in 1662, gepubliceerd. Nu is het wat ongelukkig, ofschoon niet onjuist, dat hij alleen maar zegt dat *De passies van de ziel* voor veel mensen de eerste gelegenheid waren om kennis te maken met een mechanistische theorie van het lichaam (p 17).

De onmiskenbare historische betekenis van dit laatste boek van Descartes zal daarom gezocht moeten worden in de plastisch beschreven en als 'logisch' voorgestelde menselijke fysiologie, waarin de mens geboren wordt als een machine. De 'logica' heeft echter haar beperkingen en is ook niet op wiskundige wijze (more geometrico) aangetoond, zoals Spinoza gedaan heeft met de definities, stellingen en bewijzen in zijn *Ethica*. Dit zal de lezers van dit blad teleurstellen. Ik geef een typisch voorbeeld (uit paragraaf 42):

"Als de ziel de wil heeft zich iets te herinneren, dan zorgt die wil ervoor dat de klier zich in

allerlei verschillende richtingen buigt, waardoor ook de geesten zich naar allerlei plaatsen in de hersenen bewegen, totdat ze op de plek komen waar zich de sporen bevinden die zijn achtergelaten door datgene wat men [zij?] zich wilde herinneren."

Subtiële schoonheid

Aan duidelijkheid en distinctie van de begrippen laat dit veel te wensen over, maar kennelijk hebben vele generaties er nog hun voordeel mee gedaan — in tegenstelling tot de duidelijkheid en distinctie in Descartes' *Principia philosophiae* uit 1644, waarvan al binnen een generatie, ja eigenlijk al meteen, werd vastgesteld dat zijn botsingsregels praktisch allemaal fout waren en dat zijn regel van het impulsbehoud niet eenduidig was [11]. In deze twee laatste werken zien we Descartes' hope-loze ambitie om ook de meest complexe natuurverschijnselen met een enkel slecht begrepen mechanisme te verklaren. Voor liefhebbers der exactheid valt er in de *Passions de l'âme* echter nog veel te genieten, want de redeneertrant van de filosoof Descartes is subtiel. Laat ik ook daar een voorbeeld van geven (paragraaf 209), opnieuw in de vertaling van de filosoof Verbeek:

"Spijt is [eveneens] een soort droefheid en

wel één van een bijzondere bitterheid, aangezien ze [namelijk?] altijd verbonden is met wanhoop en met de herinnering aan het genoegen dat ons het genot van iets gegeven heeft. Spijt richt zich immers altijd op een goed dat we ooit genoten, maar dat nu zo definitief voorbij is dat we geen enkele hoop meer kunnen hebben om het te hervinden op het tijdstip en op de manier die we ons in spijt herinneren."



Theo Verbeek (vertaler en commentator), Descartes: De passies van de ziel (Groningen, Historische Uitgeverij, 2008), prijs €27.50.

Referenties

- 1 Nico Frijda, *De Emoties*, Amsterdam, Bert Bakker, 1988, p 193.
- 2 *NRC Handelsblad*, katern Wetenschap & Onderwijs 14/15 juli 2007.
- 3 Frank Huisman, in: Klaas van Berkel & al., *History of Science in the Netherlands*, Leiden, Brill, 1999, p 253.
- 4 Frijda (zie referentie 1) p 193.
- 5 Jacques Payen, in: René Taton & al., *Huygens et la France*, Vrin, Paris, 1982, pp. 198–199.
- 6 Theo Verbeek, in: Allan Charles Kors & al., *Encyclopedia of the Enlightenment*, Oxford, 2003, p. 203.
- 7 Frijda (zie referentie 1) p 101.
- 8 Edwin Curley, *Collected Works of Spinoza*, Princeton, 1985, p 532.
- 9 Curley (zie referentie 8), 1 pp 491–492.
- 10 Erhard Oeser, *Geschichte der Hirnforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 2002, p 52.
- 11 Julian B. Barbour, *Absolute or Relative Motion?*, Cambridge, 1989, pp. 457–461.

De derde wet

| Solicited Comments

Dynamisch modelleren: inzichtelijk computergebruik

In het maartnummer van NAW reageerden Bezembinder en Hulshof op mijn artikel over dynamisch modelleren waarin ik betoogde dat:

- het modelleren van dynamische verschijnselen aandacht verdient in het voortgezet onderwijs, zowel vanuit wiskundig als vanuit natuurwetenschappelijk perspectief;
- de relatie tussen model en werkelijkheid daarbij een belangrijk aandachtspunt moet zijn, omdat inzicht in de gemaakte aannames en keuzen nodig is om modelvoorspellingen te interpreteren en op hun waarde te toetsen;
- numerieke oplosmethoden voor leerlingen een krachtig hulpmiddel bieden om het gedrag van een systeem te onderzoeken en dat zulke methoden inzichtelijk te gebruiken zijn voorafgaand aan, en als aanloop naar, de analytische behandeling van de differentiaalrekening.

De bezwaren van Bezembinder berusten kortweg op guilt by association: zijn zoontje speelt het computerspel Lineage II en het gesprek daarover stukt als de zoon hem probeert uit te leggen dat King Midas een sorcerer is die elementals kan summonen; ergo, ook bij ict-toepassingen in het wiskundeonderwijs klikken leerlingen op onbegrepen objecten waarover je geen gesprek met ze kunt voeren. Ik ben het zonder meer met Bezembinder eens dat het onbegrepen handelingen met onbegrepen objecten ongewenst zijn en dat juist het gesprek over de eigenschappen van die objecten moet bijdragen tot inzicht. De vraag is dus of, voor een NT-leerling in 5 vwo, het gebruik van bijvoorbeeld Excel om een eenvoudig epidemiemodel voor een groot aantal stappen door te rekenen beroep doet op onbegrepen handelingen of objecten. De basisfuncties in een spreadsheet, maar ook in bijvoorbeeld de tekst-modelleromgeving van Coach (BASIC-syntax) zijn, met een goede uitleg, mijns inziens tamelijk transparant. Grafische modelleertools scoren in dit opzicht inderdaad slechter, maar dergelijke tools zijn wel weer heel geschikt om, nadat de leerling de beginselen van de numerieke integratie onder de knie heeft gekregen, de structuur van een complexer model bespreekbaar te maken.

Hulshof noemt allerlei punten van kritiek (op zijn homepage noemt hij er nog veel meer). Veel van zijn opmerkingen betreffen onnauwkeurigheden in de terminologie en onderscheidingen die onderbelicht blijven. In zijn eigen woorden: 'Savelsbergh [gooit] zo'n beetje alles waar ik onderscheid tussen zou willen maken op een grote hoop, bij voorkeur zonder er ook maar een woord aan vuil te maken'. Soms begrijp ik zijn kritiek en kan ik er wat mee, in andere gevallen lijkt Hulshof vooral een onwelwillende lezer die een artikel voor wiskundigen beoordeelt als ware het een leerlingtekst. Hij schrijft bijvoorbeeld: 'hoe bestaat het dat je een niet-lineaire differentiaalvergelijking uit de lucht laat vallen bij een populatieverhaal nadat de lineaire versie onvermeld is gebleven bij radioactief verval?' Ik heb inderdaad geen differentiaalvergelijking opgenomen bij het onderwerp radioactief verval. In de tekst is echter wel sprake van het onderzoeken van het limietgedrag voor $t \rightarrow 0$ en van een analytische oplossing. Hulshof noemt vervolgens het verschil tussen kans en verwachte waarde en kans dat ik zou negeren en constateert dat 'alle modellen [...] opeens deterministisch [zijn] als er gesimuleerd wordt'. In mijn tekst staat bij de ontwikkeling van een epidemiemodel: 'de voorgaande beschrijving benadrukt de lotgevallen van individuen en het vraagt een vertaalslag om van daar uit te komen tot het aantal genezingen of besmettingen per tijdseenheid'. Natuurlijk valt daar meer over te zeggen, en dat zal in het onderwijs ook moeten gebeuren. De gepresenteerde contexten bieden daar zeker aanleiding

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

toe.

Ik verwacht echter niet dat toelichtingen en detailaanpassingen Hulshof veel milder zullen stemmen: uiteindelijk vreest hij, net als Bezembinder, de computer die in algemene zin het inzicht in de weg zal staan. Vanwaar die angst? Het is zonder meer waar dat er veel lelijks gebeurt met computers in het (wiskunde)onderwijs, maar de computer biedt ook nieuwe mogelijkheden om voorheen onoplosbare vraagstukken op te lossen en vruchtbare dwarsverbanden te leggen met bijvoorbeeld natuurwetenschappelijke toepassingen. Goed computergebruik biedt bovendien kansen voor nieuwe wiskundige vragen, zoals: hoe kun je zeker weten of de gevonden numerieke oplossing de enig mogelijke is? De kunst is die kansen in het onderwijs te benutten.

Elwin Savelsbergh

Hoe goed is de Nederlandse wiskunde?

Een legitieme vraag, een delicate ook, en niet een die eenvoudig te beantwoorden is. Voor alle duidelijkheid: ik doel op de kwaliteit van het wiskundig onderzoek en niet op die van de opleiding. Bovendien zou ik de vraag nog willen preciseren als: hoe ziet het Nederlands wiskundige landschap er uit? Zijn er toppen en zo ja, waar? Wat volgt is niet de doorwrochte verhandeling die deze vraagstelling verdient, maar wel een vermelding van enkele feiten die bij de beantwoording hiervan een rol zouden moeten spelen.

Mijn aanleiding is de constatering dat deze zomer tijdens het vijfde Europees Mathematisch Congres geen van de tien prijzen voor jonge Europese Wiskundigen een landgenoot ten deel viel. In het (recente) verleden was dat niet beter, want sedert zijn instelling in 1992 zijn er vijftig van zulke prijzen uitgereikt, waarvan slechts een aan een Nederlander (Johan de Jong). Niettemin suggereren documenten die ik in de loop der jaren onder ogen heb gehad dat wij het internationaal goed doen en dat als het ergens aan schort, dan vooral aan het aantal beoefenaren, en niet aan hun kwaliteiten.

Het is goed mogelijk dat daarin een belangrijk deel van de verklaring schuilt. Laten we daarom het tijdsinterval vergroten naar een halve eeuw (vanaf 1954, om precies te zijn), waardoor het genoemde probleem enigszins geëlimineerd wordt (de klacht van het kleine aantal dateert immers van veel later). Bovendien komt er dan een indicator voorhanden die voor kortere perioden vermoedelijk minder betekenis heeft, namelijk het aantal voordrachten op uitnodiging voor een International Congress of Mathematicians. Ter herinnering: dat zijn in de regel voordrachten van 45 minuten in een zogenaamde Sectie (voorbeelden daarvan zijn Number Theory en Probability and Statistics) of plenaire voordrachten van een uur. Genoemd congres vindt eens in de vier jaar plaats. Het aantal voordrachten binnen een Sectie varieert, maar is gemiddeld ongeveer acht, dus de competitie hiervoor is zwaar. Voor een enkel persoon is daarom een uitnodiging voor zo'n voordracht veelzeggend, maar het is ook duidelijk dat daarmee niet alle kwaliteit gedetecteerd wordt. Dat wordt anders als we niet zozeer letten op personen als wel op de vakgebieden die zij vertegenwoordigen en tegelijk een langere periode in beschouwing nemen; uitgangspunt hierbij is dat een voldoende massa aan kwaliteit een of meerdere toppen heeft, en dat die zich dus uiteindelijk op deze wijze zal manifesteren.

Nu is de indeling in Secties in de loop van dit tijdvak veranderd. Sommige Secties zijn tussentijds in het leven geroepen, zoals Mathematical Aspects of Computer Science, dat (na een kortstondig onderdak bij Discrete Mathematics) in 1986 werd ingevoerd, en andere

werden gespleten, wat bijvoorbeeld History of Mathematics and Education overkwam. Dit heb ik geprobeerd te ondervangen door mij te bedienen van het gelegenheidsbegrip Rubriek, wat een tijdsafhankelijke cluster van een of meer Secties beoogt te zijn. Het toekennen van een Rubriek aan een Sectie is niet altijd eenduidig, maar ik hoop toch een redelijke indeling voor het beschouwde tijdvak te hebben gemaakt.

In onderstaande tabel geeft het getal vóór iedere Rubriek aan met hoeveel Secties dat in 2010 zal corresponderen (dat geeft daarmee een ruw idee van de grootte) en daarachter staat in welk jaar wiskundigen die in ons land hun graad behaalden daarin een voordracht hielden. Een asterisk beduidt dat het iemand was die zich naderhand in het buitenland gevestigd heeft en (p) dat het een plenaire voordracht betrof. (Een groot deel van de hier gebruikte gegevens is ontleend aan de webpagina's onder <http://www.mathunion.org/o/ICM/Speakers/Search.php>.)

Opvallend is de hoge score van Discrete Mathematics and Combinatorics als ook die van de in ons land kleine groepen History of Mathematics and Education en Control Theory and Optimization. Verder zijn Algebra and Lie theory, Number Theory, Algebraic Geometry goed en is de grote Rubriek Analysis redelijk vertegenwoordigd. Anderzijds valt op dat we sedert 1970 afwezig zijn in Geometry and Topology en over de hele periode met maar met één spreker in Analysis (applied) (in 1958 sprak Van Wijngaarden), Probability and Statistics (de plenaire voordracht in 1954 werd gegeven door Van Dantzig) en Mathematical Logic, Foundations and Mathematical aspects of Computer Science (de in het buitenland gevestigde spreker was Van den Dries). Ook al is de uitkomst gevoelig voor de wijze van rubricering (zo is het wellicht verdedigbaar Control Theory and Optimization bij Analysis (applied) onder te brengen), het lijkt er toch op dat het relief van ons wiskundelandschap minder uniform is dan menig een denkt. Verder zou men kunnen vinden dat het Nederlandse aandeel van 27 op de ongeveer 2000 ICM-voordrachten die in de beschouwde periode gegeven zijn niet bijzonder groot is.

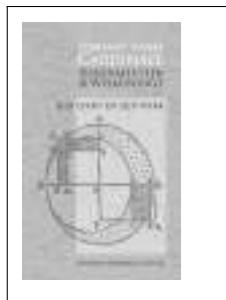
Eduard Looijenga

# secties in 1 rubriek	Rubriek	Jaar van voordracht
(2)	Algebra and Lie theory	1978, 2006, 2006
(1)	Number theory	1978, 1986(p)
(1)	Algebraic geometry	1978, 1990, 1998
(2)	Geometry and Topology	1954, 1958*, 1970
(5)	Analysis	1974, 1986, 1998
(2)	Analysis (applied)	1958
(1)	Probability and Statistics	1954(p)
(1)	Discrete Mathematics and Combinatorics	1983, 1986, 2002, 2006
(2)	Math. Logic, Foundations and Math. Asp. of Computer Science	1990*
(1)	Control Theory and Optimization	1998, 2006
(2)	History of Mathematics and Education	1983, 1986, 1994, 2006

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



M.H. Sitters

Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647
Rekenmeester en wiskundige
Zijn leven en zijn werk

Hilversum: Uitgeverij Verloren, 2008

654 p., prijs €59,-

ISBN 9789087040024

Op 16 november 2007 promoveerde te Groningen Harry Sitters bij Henk Broer en Jan van Maanen op een breed opgezet onderzoek naar de uit Harlingen afkomstige wiskundige Sybrandt Hansz Cardinael (1578-1647). Sitters wilde met zijn onderzoek de betekenis van het werk van Sybrandt Hansz Cardinael duidelijk maken en diens leven beschrijven. Tot dusverre was alleen bekend dat Cardinael een aanzienlijk wiskundige was, meer niet. Cardinaels grootse werk *Hondert Geometrische Questien* staat centraal in het onderzoek. Inderdaad passeren honderd meetkundige vraagstukken de revue. Ergens daarin gebruikt Cardinael een regel die, indien in algebraïsche termen verrat, gelijkwaardig zou zijn aan de latere stelling van Stewart (genoemd naar M. Stewart, 1717-1785). Vanwege zijn grondige meetkundekennis verdiende Cardinael volgens Joost van den Vondel de erenaam 'De Vriesche Euclides'. Cardinael was er in de *Hondert Geometrische Questien* in geslaagd een veelheid aan meetkundige vraagstukken zuiver meetkundig op te lossen — en Sitters slaagde erin deze te doorgronden. Zuiver meetkundig wil zeggen: zonder algebraïsche hulpmiddelen. Cardinael gebruikte in principe nooit algebra, maar wel stelde hij een onbekende lengte soms gelijk aan 1, waarmee hij verder rekende tot hij een gegeven lengte ontmoette. Dit zette hij voort totdat hij een gegeven lengte tegenkwam, waarna hij een evenredigheid kon opstellen om zo de onbekende lengte te berekenen. Een enkele maal schreef hij toch ook $GE = 2 \cdot EF$ (in Questie 32, opgemerkt door Sitters) als hij een evenredigheid zal hebben bedoeld. De beperking tot zuivere meetkunde valt op, omdat in de tijd van Cardinael algebraïsche hulpmiddelen opkwamen en gewaardeerd werden. Cardinael wist hier ook van. Het is zelfs zo dat Descartes hem bezocht, overigens niet om Cardinael te wijzen op efficiëntere methoden, maar om zich nader op de hoogte te stellen van diens zienswijze omtrent het copernicaanse stelsel. Cardinael schreef namelijk een werk waarin hij het stelsel van Copernicus afwees. Sitters vond uit waar in dat werk een discutable stap werd gezet. De *Hondert Geometrische Questien* is en blijft Cardinaels hoofdwerk. Het gaat hoofdzakelijk om planimetrische vraagstukken, waarvan sommige behoorlijk pittig zijn. In bovengenoemde Questie 32 gaat het om een driehoek ABC met top A , basis $BC = 26$ en hoogte 12. Gevraagd wordt AB en AC te berekenen als hun lengtes zich verhouden als $2 : 3$. Sitters schreef bij deze opgave een analyse om de methoden van Cardinael in het juiste licht te plaatsen. Talrijk zijn de verdelingsvraagstukken, zoals Questie 77: gegeven zijn een driehoek ABC met $AB = 13$, $BC = 15$ en $CA = 14$, en een punt D tussen B en C met $DC = 6$; gevraagd wordt punten E en F op AB respectievelijk AC te vinden, zodanig dat de lijnstukken DE en DF de driehoek in drie delen met gelijke oppervlakte verdelen. Questie 77 is nog niet bijzonder lastig, maar er volgen andere die wel lastig mogen heten. De 13-14-15-driehoek die Cardinael in Questie 77 had gekozen is voor puzzelaars een goede bekende, omdat de oppervlakte

ervan een geheel getal is. Deze driehoek wordt door Cardinael ook gebruikt in een stereometrisch vraagstuk, Questie 76, waarin een viervlak voorkomt waarvan alle zijvlakken een 13-14-15-driehoek zijn, en waarvan onder meer de hoogte moet worden berekend. De berekening verloopt plezierig, wat wel met de keuze van dit viervlak te maken heeft. Het is een gelijkvlakkig viervlak (ook gelijkbenig of gelijkzijdig viervlak genoemd). Molenbroek geeft een berekening van de hoogte in een algemeen gelijkvlakkig viervlak (P. Molenbroek, *Leerboek der Stereometrie*, Groningen, 1934, pp. 169–172). Elders blijkt waardoor de berekening zo prettig verloopt (N.A. Court, *Modern Pure Solid Geometry*, New York, 1964, pp. 103–111): het omgeschreven parallellepipedum van een gelijkvlakkig viervlak is rechthoekig.

Cardinael verdiept zich niet in existentiekwesties. Hoe hij aan zijn vraagstukken komt is niet zomaar te zeggen. Het zijn oefeningen voor de geest, en tegelijk uiteraard producten van de toenmalige tijd; men ziet geen vraagstukken over de bijzondere punten in een driehoek. Op het titelblad van de *Hondert Geometrische Questien* staat een dissectiebewijs van de stelling van Pythagoras, dat in tot nu toe bekende overzichten van bewijzen van deze stelling niet voorkomt. Het lijkt geen toeval dat Cardinael dit bewijs op het titelblad plaatste. Het plaatje alleen is reeds voldoende om het te begrijpen. Cardinael is niet mededeelzaam over de grondslagen voor zijn methoden. Sitters concludeert dat Cardinaels werkwijze heel gewoon was. Men rekent, zonder een goede fundering, met lengtes en oppervlakten en al dan niet met wortelvormen. Sitters verheldert zijn beschouwing hierover met uitleg over het denken van tijdgenoten als Viète, Stevin en Descartes. Cardinael schreef ook rekenboeken, die nog tot ver na zijn overlijden werden gebruikt, met name door zijn dochter, die het onderwijs dat hij gaf voortzette. Niet voor niets was Cardinael rekenmeester, en het lijkt erop dat hij zo in zijn levensonderhoud kon voorzien. Met landmeten en wijnroeien was hij zeer zeker vertrouwd. Het brede onderzoek dat Sitters uitvoerde betreft ook de herkomst van Cardinael uit Harlingen, zijn doopsgezinde overtuiging, zijn verhuizing naar Amsterdam, zijn lidmaatschap van een commissie die zich moest buigen over het probleem van de lengtemeting op zee, en zijn kortdurende professoraat aan de academie van Samuel Coster. Dit alles is bijzonder interessant, onder meer omdat duidelijk wordt waarom Cardinaels professoraat zo kort duurde (1617–1618). De rechtzinnigheid vierde hoogtij, en Cardinael, met name als doopsgezinde, mocht daarom geen colleges meer geven. Amsterdam had in 1606 nog goedgekeurd dat doopsgezinde huwelijken in eigen kring plaatsvonden, met alleen een kennisgeving aan het stadsbestuur (W.J. Kühler, *Geschiedenis der Nederlandse Doopsgezinden in de zestiende eeuw*, Haarlem, 1961, p.451). Als de kennisgeving zoekraakte is er van zo'n huwelijk geen officieel bewijs meer. Cardinael huwde in 1607, mogelijk in Amsterdam. Sitters ging Cardinaels familiebetrekkingen na en verdiepte zich in stromingen onder de doopsgezinden, waardoor hij het wedervaren van Cardinael kon doen begrijpen. Misschien stond Cardinaels conservatieve manier van meetkunde bedrijven in verband met zijn geestelijke overtuiging. Tegelijk blijken Cardinaels contacten met de kaartenmakers Willem Blaeu en Plancius, met de letterkundigen Vondel, Hooft en Brederode, en met de rekenmeester Willem Bartjens, terwijl Descartes hem bezocht en Christiaan Huygens les kreeg uit een werk van hem. Hij was een geacht wiskundige. Sitters heeft een mooi boek geschreven over Sybrandt Hansz Cardinael, de Friese Euclides. Zijn onder-

zoek werd mogelijk door een NWO-beurs in het kader van het project Leraar in Onderzoek. Harry Sitters was de eerste die zo'n onderzoek kon bekronen met een promotie. *Martinus van Hoorn*



B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S.L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli
**Fundamental algebraic geometry:
Grothendieck's FGA explained**

Mathematical Surveys and Monographs, 123
Providence: American Mathematical
Society, 2005 342 p., prijs \$ 79.00
ISBN 0-8218-3541-6

In 1957–1962 Alexander Grothendieck gave eight talks in Séminaire Bourbaki, collected under the title *Fondements de la Géométrie Algébrique* (FGA). His texts have been on the desks of algebraic geometers since. Here we see the birth of a revolutionized algebraic geometry. Reading these texts is a fascinating and rewarding task.

Grothendieck's ideas have been expanded and partly incorporated in later texts such as the *Séminaire de Géométrie Algébrique*, the seminars 1960–1969, and in *Eléments de Géométrie Algébrique* by J. Dieudonné and A. Grothendieck 1960–1967. However, the contents of FGA is still worth studying.

M. S. Narasimhan took up the plan to have the contents of FGA explained in a summer school at the ICTP in Trieste, Italy. That plan materialized in 2003. The contents of the lectures is recorded in the present volume.

Throughout the whole book we feel the admiration for the original text and its author: "The book is not intended to replace [FGA]; indeed, nothing can ever replace a master's own words, and reading Grothendieck is always enlightening." The authors made some fundamental choices: "This book is not meant to provide a quick and easy introduction. Rather, it contains demanding detailed treatment." I enjoyed every page of this book, seeing difficult theory well explained, original ideas by Grothendieck placed in historical context and presented in a transparent but also thorough way. Furthermore, the authors, although their styles in the five parts are very different, come to a nice coherent treatment of these central ideas in algebraic geometry. The authors made the wise choice to include some further developments, and to follow modern language and notation (for example, a 'simple morphism' is now called a 'smooth morphism'). But that is only the outside: the original ideas of Grothendieck are central and very well exposed.

Here is a short survey of the five contributions:

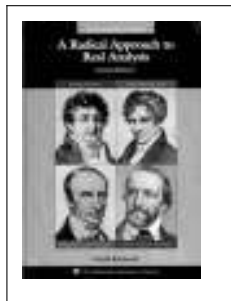
Angelo Vistoli: 'Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory'; Nitin Nitsure: 'Construction of Hilbert and Quot schemes'; Barbara Fantechi and Lothar Göttsche: 'Local properties and Hilbert schemes of points'; Luc Illusie: 'Grothendieck's existence theorem in formal geometry with a letter of Jean-Pierre Serre'; Steven L. Kleiman: 'The Picard scheme'.

Every one of these has great merits. As I read them, I found on several occasions points of view which were new to me, but which were present in seminal form in Grothendieck's writings, and which are explained and exposed well by these authors.

This volume is ideal as detailed study material, for coming to a further understanding of the topics treated, to see the insi-

de of Grothendieck's first attempts to reconstruct the foundations of algebraic geometry. The authors describe the 'Advanced school in basic algebraic geometry' in 2003 by: "Everyone had a memorable experience". We are lucky that it also gave them the opportunity to create this volume full of ideas and reading material for everyone interested, students, but also the experienced researcher.

Frans Oort



D.M. Bressoud

A Radical Approach to Real Analysis

Classroom Resource Materials Series

Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 2007 (2nd ed.)

323 p., prijs \$ 52.95

ISBN 0-88385-747-2

A: Zijn die epsilons en delta's nou allemaal echt nodig?

B: Jawel. Strikte definities en bewijzen maken juist het verschil tussen de calculus als verzameling van rekenmethodes en de analyse als wiskundige theorie.

A: Dat zal wel, maar dat bedoel ik niet. Ik wil immers vooral rekenen, en dat kan toch net zo goed zonder epsilons en delta's?

B: Dit klopt niet helemaal. Het blijkt namelijk dat puur intuïtief rekenen en toepassen van op zich redelijke rekenregels in bepaalde situaties tot tegenstrijdigheden en onzinnigheden leidt. . .

A: Oh ja? En waar gebeurt dat dan? En hoe?

Dialogen van deze soort zijn bij iedereen bekend die — in de rol van B — de noodzaak van strikte definities en bewijzen in het analyse-onderwijs van de grondslagen tot geavanceerdere onderwerpen als Fourierreeksen verdedigt.

Bressouds boek is een uitstekende informatiebron voor B als die op A's laatste vraag zo overtuigend mogelijk antwoord wil geven, namelijk door te verwijzen naar de historische ontwikkeling van het vak. De rekenprocedures van de calculus (sommities, differentiatie, integratie, reeksontwikkelingen enzovoort) zijn immers meer dan een eeuw ouder dan hun precieze rechtvaardiging door het vinden van exacte voorwaarden voor hun geldigheid, in het tegelijkertijd op te bouwen kader van hiervoor geschikte begrippen. Het werk hieraan door negentiende-eeuwse wiskundigen als Cauchy, Riemann, Weierstrass en anderen, is de insteek van dit bijzondere analyseleerboek. De centrale definities en stellingen verschijnen in hun historische context, dat wil zeggen als uitkomst van een onderzoeksproces.

De auteur draagt niet alleen een grote hoeveelheid wiskundig, historisch en didactisch interessant materiaal aan, maar geeft ook een levendigheid aan zijn verhaal die het boek tot een waardevolle toevoeging maakt op een plaats tussen traditionele leerboeken en werken over geschiedenis van de wiskunde. Zo worden bijvoorbeeld, uitvoerig en gedetailleerd, de pogingen van Cauchy tot het bewijs van de middelwaardstelling beschreven, en wordt uitgelegd waar en waarom deze ontoereikend bleken. Hierdoor opent de auteur een nieuwe weg voor de lezer naar een dieper begrip van de onderliggende problemen en een betere appreciatie voor de uiteindelijk gevonden oplossingen. Op deze manier levert het boek de 'historisch echte' motivaties voor de gebruik-

kelijke basisconcepten van de moderne analyse, die in klassieke boeken en curricula vaak onderbelicht (moeten) blijven.

Desalniettemin deelt de recensent niet de mening van de auteur dat de benadering van de reële analyse langs haar historische ontwikkeling de juiste manier voor een eerste kennismaking met deze theorie is. De prijs die hiervoor betaald wordt, ligt in een soort achterwaartse ordening van de stof: er moeten functiereeksen voor reeksen aan de orde komen, reeksen voor rijen, differentieerbaarheid voor continuïteit enzovoort. Dit lijkt mij hooguit dan haalbaar als de studenten al over zeer uitgebreide voorkennis en vaardigheden in de calculus beschikken. Zo begint het boek met een beschrijving van de crisis in de grondslagen van de analyse die onstond door Fouriers werk over trigonometrische reeksen in verband met de warmtevergelijking. Dit is boeiend uit historisch en wiskundig oogpunt, maar vereist (tenminste in onze Nederlandse situatie) een niveau van voorkennis dat duidelijk het niveau van een eerste- of tweedejaars wiskundestudent overstijgt.

Een groot aantal opgaven van verschillende moeilijkheidsgraad en aanvullend materiaal op internet (<http://www.macc.lester.edu/aratra>) maken inhoudelijke verdieping voor verschillende onderwerpen mogelijk en verhogen de bruikbaarheid van het boek voor zelfstudie. Op de website staan ook enkele correcties, waaronder een, betreffende helaas gepleegd misbruik van het begrip 'analytisch' in plaats van C^∞ .

Het boek lijkt mij uitermate geschikt als materiaal voor cursussen of zelfstudie over geschiedenis van de wiskunde, een onderwerp dat recentelijk hernieuwde belangstelling geniet met het oog op academische vorming in onze curricula. *Georg Prokert*



N.J. Cutland, M. Di Nasso, D.A. Ross (eds.)

Nonstandard Methods and Applications in Mathematics

Lecture Notes in Logic 25

Natick, MA: A.K. Peters, Ltd., 2006

262 p., prijs \$ 75.00

ISBN 1-56881-291-4

Voor wie het nog niet wist: de niet-standaard analyse is een logische onderbouwing van het aloude rekenen met infinitesimalen. Wie, bijvoorbeeld, de werken van Euler inkijkt, komt regelmatig oneindig kleine reële getallen en oneindig grote natuurlijke getallen tegen. Wat die dingen waren werd nooit geheel duidelijk maar de resultaten die Euler en anderen er mee behaalden leren wij nu nog aan onze studenten, zij het dat we alles nu formuleren in termen van ϵ en δ of met behulp van convergente rijen.

Rond 1960 bedacht A. Robinson een manier waarop die oneindig kleine en grote getallen zinvol ingevoerd kunnen worden. Op basis van een paar bekende stellingen uit de logica en modeltheorie is een model van de theorie van $\mathbb{R}$ te maken waar $\mathbb{R}$ zelf een deellichaam is en waarin positieve getallen voorkomen die kleiner zijn dan elk positief element van $\mathbb{R}$ zelf. Dat grotere lichaam is een andere, niet-standaard, versie van $\mathbb{R}$ en zo is de term niet-standaardanalyse ontstaan.

Wat de niet-standaardanalyse betreft beschouw ik mij als een geïnteresseerde buitenstaander en deze bundel, die voortgekomen is uit een conferentie in 2002, leek mij een aardige gelegen-

heid voor een hernieuwde kennismaking. Het kan aan mij liggen, maar het viel mij tegen. Ik kon me niet aan de indruk onttrekken dat er minder nieuws onder de zon is dan de redacteurs ons in hun voorwoord willen doen geloven. Van de tien artikelen zijn er zeker zes die oude en nieuwe fundamenteën bespreken, standaard resultaten op een niet-standaard manier pogen te doen of zich afvragen waarom de rest van de wereld de niet-standaard methoden niet omarmt. Zo kan men *acht* manieren vinden om niet-standaardanalyse te onderbouwen. Die veelheid komt voort uit twee problemen. Wie niet-standaardanalyse wil bedrijven moet een gevoel ontwikkelen voor wat wel en niet kan met de infinitesimalen en daar is enige kennis van de logische achtergrond toch wel nodig; sommige onderbouwingen proberen die logica weg te moffelen, met wisselend succes. Het andere probleem betreft het 'universum' waarin men wil werken; als het alleen om $\mathbb{R}$ gaat is een ultramacht genoeg, maar als men maat- en integratietheorie en functionaalanalyse wil bedrijven is er meer nodig — machtsverzameling, functieruimten, ... — en een beschrijving van dat 'meer' kost onevenredig meer moeite.

De andere artikelen laten enige toepassingen zien in de getaltheorie en bij het oplossen van stochastische Navier-Stokesvergelijkingen. Het allerlaatste artikel beschrijft het gebruik van infinitesimalen op een middelbare school in Genève; op de website van de auteurs blijkt dat de vreugde over de positieve resultaten alweer getemperd is: juist het verschil tussen wat wel en niet 'mag' bleek toch weer een struikelblok.

K.P. Hart



G.R. Sell, Y. You

Dynamics of evolutionary equations*Applied mathematical sciences, vol. 143*

New York : Springer Verlag, 2002

670 p., prijs €94,95

ISBN 0-387-98347-3

Vanaf het begin heeft men geprobeerd de geometrische theorie van gewone differentiaalvergelijkingen, die teruggaat op Poincaré, dienstbaar te maken aan de analyse van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, door deze op te vatten als evoluties in een oneindig dimensionale ruimte, vaak een Banachruimte. Het standaardvoorbeeld is de moderne theorie van de Navier-Stokesvergelijkingen.

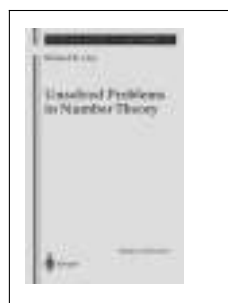
De strategie is om begrippen die in het eindigdimensionale geval hun nut hebben bewezen te generaliseren naar oneindig veel dimensies en omgekeerd om de oneindig dimensionale dynamica, daar waar dat mogelijk is, te reduceren tot een eindig dimensionale evolutie op een zogeheten 'inertiaalvariëteit' van het systeem; dit laatste maakt vrijwel altijd gebruik van één of andere vorm van dissipativiteit.

Dit is het programma van het voorliggende boek, maar voordat dit programma vruchtbaar gemaakt kan worden, moet de lezer geschoold worden in de technische kanten van evoluties op Banachruimten; het hoofdzakelijke probleem is dat de stelling van Picard-Lindelöf (existentie en eenduidigheid van oplossingen) ontbreekt, en dat daarom vaak de oplossings-(semi-)flow' moeizaam geconstrueerd moet worden. De auteurs gaan er prat

op dat ze alle details van deze constructies geven, en dat doen ze ook. Wie het boek heeft doorgeworsteld, houdt er een flinke inleiding in de theorie van niet-lineaire evoluties aan over, met een speciaal hoofdstuk gewijd aan semi-flows van de Navier-Stokes vergelijkingen voor vloeistoffen.

Dat was het voornaamste gedeelte van het boek; wat nog volgt zijn het oneindig dimensionale analogon van de storingstheorie van invariante variëteiten, en de existentie van inertiaalvariëteiten, samen met algemenere opmerkingen over (voornamelijk) de eindig-dimensionale dynamische systemen, gelardeerd, zoals trouwens overal elders in het boek ook, met uitgebreide literatuurverwijzingen. Om de pijn van de toch veelal erg droge stof te verzachten, bezigen de auteurs een vlot taalgebruik, dat soms een tikje jolig wordt. Al met al een boek voor doordouwers.

F. Wagener



Richard K. Guy

Unsolved Problems in Number Theory*Problem Books in Mathematics**Unsolved problems in intuitive Mathematics, vol 1*

New York : Springer Verlag, 2004 (3rd ed.)

437 p., prijs €64,15

ISBN 0-387-20860-7

Dit boek richt zich op mensen die graag met getaltheorie bezig zijn en inspiratie zoeken voor hun onderzoek. Het bevat een enorme hoeveelheid materiaal, open vragen en onopgeloste problemen, opgediept uit de oudere en recente literatuur, van de meer centrale klassieke gebieden in de getaltheorie tot diep in allerlei uithoeken. Daarbij heeft de auteur wel een duidelijke voorkeur voor de elementaire, combinatorische, of zo u wilt wat meer laag bij de grondse getaltheorie. De abstractere getaltheorie die aanleunt tegen algebra en algebraïsche meetkunde, en ook de zwaardere analytische getaltheorie, zijn ondervertegenwoordigd. Dat is wel te begrijpen, want de onopgeloste problemen in die gebieden zijn doorgaans minder makkelijk in enkele zinnen neer te zetten, en vereisen veel meer specialistische voorkennis van de oplosser.

De doelgroep van dit boek is echter breed, en de auteur richt zich expliciet ook op amateurs en beginnende beroepswiskundigen. Wiskundigen op zoek naar een getaltheoretisch probleem om hun tanden in te zetten (of dat hun promovendi, studenten, vrienden, enzovoort te laten doen), hebben ze hier voor het oprapen. Er zitten problemen bij waar zowel ervaren professionals als vrolijke amateurs enthousiast mee aan de slag kunnen. De geselecteerde problemen liggen wel duidelijk op onderzoeksniveau, het zijn geen opgaven zoals die bij een college opgegeven zouden kunnen worden. Ieder opgelost probleem zou goed kunnen zijn voor een serieus artikel.

Een typische paragraaf bestaat uit een beschrijving van een aantal resultaten en gerelateerde problemen of vragen door elkaar heen. Met andere woorden, bij de onopgeloste problemen wordt altijd een stukje relevante context kort beschreven. Dat maakt dat het boek niet alleen maar een problemenverzameling is geworden, maar ook zijn nut kan hebben als naslagwerk.

De eerste editie van dit boek verscheen in 1981, en telde 161

bladzijden. De tweede editie, uit 1994, had al 285 bladzijden. Nu is er de derde editie, die is uitgedijld tot 437 bladzijden. Wellicht kan dat gezien worden als een fraaie illustratie van de gedachte dat voortgang in de wetenschap niet alleen gemeten dient te worden aan het aantal opgeloste problemen, maar ook, of misschien wel juist, aan het aantal onopgeloste. Bladeren in dit boek maakt je wel bescheiden... Niettemin blijft het de bedoeling van de auteur dat het boek zo snel mogelijk achterhaald zal blijken te zijn, omdat er weer het nodige is opgelost.

Vergeleken met de tweede editie is er een klein aantal paragrafen bijgekomen. De verdikking komt vooral doordat in de bestaande paragrafen de tekst flink is uitgebreid. Zo ook de lijsten met verwijzingen, die een substantieel en zeer waardevol deel van het boek zijn gaan vormen.

Dit is een boek dat een groot publiek verdient, met voor elk wat wils. Jammer is dat de uitgever de laatste versie voor de drukker niet goed nagegaan heeft op onjuiste $\text{\TeX}$ -code: er is een aantal heel storende fouten blijven hangen, de eerste zelfs vetgedrukt op de eerste tekstbladzijde (bladzijde 3).

B.M.M. de Weger



Jeremy Gray
**Worlds Out of Nothing:
A course in the history of geometry
in the 19th century**

London : Springer-Verlag, 2007
Springer Undergraduate Mathematics Series
396 p., prijs €35,26
ISBN 1-84628-632-8

De grote bloei van de meetkunde vond plaats in de eeuwen voor onze jaartelling bij de Grieken. In feite is het daarna met het vastleggen van het bouwwerk van de euclidische meetkunde die als absolute en enige meetkunde werd beschouwd een kleine tweeduizend jaar stil geweest. Een hernieuwde bloei kwam met name in de negentiende eeuw toen de fundamente van de meetkunde werden herbeschouwd. Het verifiëren van die fundamente leidde via allerlei bevestigingen, vertwijfelingen, vooral naar nieuwe en spectaculaire ontdekkingen, zoals die van de projectieve meetkunde, de niet-euclidische meetkunde, het vervolg op de analytische meetkunde en de differentiaalmeetkunde.

Jeremy Gray heeft deze periode beschreven in zijn nieuwe boek *Worlds Out of Nothing*, waarvan de titel verwijst naar een zin uit een brief van Bolyai, die hij schreef aan zijn vader toen hij de niet-euclidische meetkunde had 'uitgevonden'. Het is een prachtig boek geworden. We kennen Jeremy Gray van zijn inspanningen om de geschiedenis van de wiskunde op een begrijpelijke maar toch indrukwekkende manier neer te zetten en daar materiaal bij te leveren dat inspirerend is voor studenten. Hij maakte onder andere, samen met Fauvel, het indrukwekkende bronnenboek voor de Open University: *The History of Mathematics*.

Veel van de hoofdstukken in het nieuwe boek zijn neerslagen van zijn colleges, waarbij ook verwerkingsopdrachten zijn opgenomen. Andere stukken zijn geschreven als verbindingen tussen die neerslagen van colleges om de geschiedenis van de meetkunde in de negentiende eeuw compleet te beschrijven. Hij heeft daarbij de chronologie als uitgangspunt genomen, maar de hoofdstukken gecentreerd rond personen die in die tijd belangrij-

ke bijdragen geleverd hebben. Die aanpak is meestal goed gelukt.

Het eerste deel van het boek beschrijft uitvoerig de ontwikkelingen van de projectieve en niet-euclidische meetkunde waarvan Poncelet, Monge, Gauss, Bolyai en Lobachevskii de grote namen waren. Na die periode (tot 1850 ongeveer) volgt in het boek een hoofdstuk (12) met aanwijzingen voor studenten hoe zij een werkstuk over de voorafgaande hoofdstukken verstandig kunnen aanpakken, een nuttige pas op de plaats, waardoor het aan waarde voor gebruik in een lessituatie wint. Er volgen nog twee van dergelijke hoofdstukken in het boek (21 en 31). Het volgende deel van het boek gaat over de ontwikkeling van de invoering van (verschillende soorten) coördinaten in de meetkunde, zoals de barycentrische en de homogene. Daarbij is veel aandacht voor de parametrisering van krommen in het platte vlak. Natuurlijk volgen dan ook de Riemannoppervlakken en de differentiaalmeetkunde. Na hoofdstuk 21, *Writing*, gaat het laatste deel van het boek vooral over de hernieuwde fundamente van de meetkunde zoals in de projectieve meetkunde en de meetkunde van Hilbert en Poincaré. De laatste hoofdstukken raken de fysische toepassingen en met name de (filosofische) discussies rond de grondslagen. Het boek sluit af met een appendix, over von Staudt, waarvan het niet zo duidelijk is waarom die daar is opgenomen en niet gewoon in de hoofdstukken (met name in hoofdstuk 22, *Projective Geometry as the Fundamental Geometry*) verwerkt kon worden.

Het boek is rijkelijk voorzien van originele teksten en verwijzingen naar bronnen. In die zin is het zeer compleet, een prachtig boek met zeer veel goed gedocumenteerde geschiedenis van de wiskunde. Die periode van de negentiende eeuw komt er uit naar voren als een wiskundig zeer rijke en inspirerende periode waarin de basis is gelegd voor moderne ontwikkelingen. Het boek schuwt de wiskunde zelf zeker niet. In die zin is het volledig genoeg, met veel bewijzen die, jammer genoeg, veelal analytisch zijn, terwijl in sommige gevallen, gezien de periode die op dat moment besproken wordt, een meetkundig bewijs meer voor de hand zou liggen. Het is voor studenten zeker niet een eenvoudig boek, maar met enkele verstandige keuzes is het zeer inspirerend en zullen studenten zeker de rijkheid van de ontwikkelingen ervaren. Het is jammer dat in een dergelijk boek toch zoveel storende fouten staan. Dat betreft met name typografische fouten zoals accentjes, letters en indices, die in wiskundige teksten zeer storend kunnen zijn, maar ook links die niet werken en slechte tekeningen, die gewoon niet kloppen. Desondanks is het een boek dat zeer de moeite waard is en niet mag ontbreken in de boekenkast van een meetkundig en historisch geïnteresseerde wiskundige.

Hans Krabbendam



P. Brass, W. Moser, J. Pach
**Research Problems in
Discrete Geometry**
New York : Springer Verlag, 2005
499 p., prijs €58,80
ISBN 0-387-23815-8

Dit boek verschilt aanzienlijk van meer gebruikelijke wiskundeboeken. In plaats van te vertellen wat er bekend is in een vak-

gebied, stelt dit boek vragen. Dit wordt op een bijzonder heldere manier gedaan. Elke sectie van het boek begint met een beknopte definitie van de relevante concepten, en gaat al snel door met het beschrijven van de problemen en vermoedens. Het geeft aan welke deelresultaten er bekend zijn, en aan het einde van de sectie staat een uitgebreide bibliografie.

De behandelde problemen gaan meestal over configuraties van objecten in een metrische ruimte. Vragen over de dichtheid van stapelingen en overdekkingen, over stevigheid, en over beperkingen op de onderlinge afstanden vormen een groot deel van de behandelde problemen. Opvallend is vaak dat zelfs met grote beperkingen op de objecten en de toegestane transformaties (bijvoorbeeld de beperking tot verzamelingen bollen met vaste straal en met hun middelpunt op een roosterpunt) niet bijzonder veel over een probleem gezegd kan worden. Later in het boek verschuift de focus naar configuraties van punten en tekeningen van grafen. Maar vrijwel alle problemen vallen onder de 'klassieke' meetkunde: eigenlijk altijd ligt er wel een metrische ruimte (in veel gevallen $\mathbb{R}^n$, en vaak met $n = 2, 3$) aan de problemen ten grondslag.

Sommige problemen zijn obscuur, andere zijn al bekend onder een breed publiek. Maar geen van alle lijken ze eenvoudig, en waarschijnlijk zijn ook gedeeltelijke oplossingen al interessant. Dat het beantwoorden van de opgeworpen vragen toch niet onmogelijk is blijkt uit de website die door de derde auteur wordt bijgehouden. Daar is een lijst te vinden van meer dan twintig problemen uit het boek die sinds de uitgave geheel of gedeeltelijk opgelost zijn.

Een obstakel dat een geïnteresseerde lezer zal tegenkomen, is het maken van een keus uit de gepresenteerde problemen: zelfs als je interesse in een specifiek deelonderwerp ligt, is er nog een keur aan problemen beschikbaar. Voor beginnende onderzoekers is het nuttig als startpunt van onderzoek, wellicht in overleg met een begeleider. En zelfs als men al aan een probleem in dit gebied werkt, dan kan het boek een waardevolle context leveren.

Ik heb de materie met plezier doorgenomen, en verwacht het boek in de toekomst nog regelmatig open te slaan. *Stefan van Zwam*



C.T.C. Wall
Singular Points of Plane Curves
London Mathematical Society Student Texts,
no. 63
Cambridge : Cambridge University Press,
2004
370 p., prijs £32.00
ISBN 0-521-547741

Dit boek is zowel een goed inleidend leerboek over krommesingulariteiten als een prima introductie tot het moderne onderzoek op dit gebied. De eerste vijf hoofdstukken zijn gebaseerd op M.Sc. colleges in Liverpool, gegeven vanaf 1975. Hierop volgen nog zes hoofdstukken op hoger niveau.

Singulariteitentheorie ligt op het snijvlak van algebra, algebraïsche meetkunde, topologie en combinatoriek. Een goed voorbeeld van de interactie van ideeën, methoden en technieken van verschillende oorsprong wordt gevormd door het meest klassieke deel van de theorie, de studie van krommesingulariteiten.

Hoe singulier een analytische kromme lokaal is, kan op verschillende manieren gemeten worden. De doorsnede van een kromme door de oorsprong in $\mathbb{C}^2$ met de rand van een voldoende kleine bol geeft een knoop (of schakel, als de kromme meer dan een tak heeft) in een 3-sfeer, en wel een geïtereerde torusknoop. Topologische equivalentie van zulke knopen kan ook algebraïsch-meetkundig beschreven worden. De eerste methode gaat terug op Newton en Puiseux. In een singulier punt geldt de impliciete functiestelling niet meer, maar we kunnen y toch als machtreeks in x schrijven, als we gebroken machten toelaten. Een andere manier maakt gebruik van de ingebedde resolutie. Beide methoden leveren discrete invarianten, die het topologische type volledig bepalen.

Het eerste deel van het onderhavige boek geeft een samenhangende beschrijving van al deze benaderingen. Met volledige bewijzen heeft de schrijver hier toch slechts 130 pagina's voor nodig. Daarbij komen zaken aan de orde, die anders moeilijk te vinden zijn, zoals het feit dat het Alexanderpolynoom van de knoop de Puiseuxinvarianten bepaalt — dit via een elegante beschrijving van cyclotomische polynomen. Voor het eerst in boekvorm vinden we de Eggers-Wallboom (hier natuurlijk Eggersboom genoemd).

De tekst bevat geen literatuurverwijzingen, maar ieder hoofdstuk wordt afgesloten met een aparte paragraaf met opmerkingen, zowel van historisch karakter als over generalisaties (bijvoorbeeld karakteristiek p of het reële geval). Hier blijkt de grote ervaring en het enorme overzicht van de auteur. Ook zijn er altijd opgaves.

Centraal in het tweede deel staat de Milnorvezeling. Verscheidene berekeningsmethoden voor het Milnorgetal komen aan bod. In een apart hoofdstuk worden de ideeën toegepast op projectieve krommen, voor een bewijs van de meest algemene vorm van de Plückerformules. Kleinsformule voor reële krommen wordt à la Viro bewezen met het formalisme van construeerbare functies. Daartoe geeft de schrijver eerst een erg nuttige beknopte inleiding tot de algemene theorie daarvan.

De volgende hoofdstukken gaan over de berekening van de monodromie. Hier komt ook de topologische zetafunctie aan de orde. De kanonieke decompositie van het complement van de schakel wordt behandeld. Nieuw hier is het verband tussen Eisenbud-Neumanndiagrammen en de Eggers-Wallboom. Over de klassifikatie van Seifertvormen gaat een heel hoofdstuk, waarin duidelijk te merken is dat de schrijver een expert is op het gebied van kwadratische vormen. Tenslotte geeft het laatste hoofdstuk een verfrissende kijk op de theorie van volledige idealen en clusters.

Dit boek heeft veel te bieden. Het is inderdaad zowel geschikt als collegeboek en als standaardwerk over vlakke krommesingulariteiten.

J. Stevens

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone; everybody is encouraged to send in solutions and propose problems. Group contributions are welcome.

For each problem, the most elegant correct solution will be rewarded with a book token worth 20 euro. At times there will be a Star Problem, to which the proposer does not know any solution. For the first correct solution sent in within one year there is a prize of 100 euro.

When proposing a problem, please either include a complete solution or else indicate that it is intended as a Star Problem. Electronic submissions of problems and solutions are preferred (problems@nieuwarchief.nl).

The deadline for solutions to the problems in this edition is March 1, 2009.

Problem A (folklore)

If x is a real number then we denote by $\lfloor x \rfloor$ and $\lceil x \rceil$ the largest integer smaller than or equal to x and the smallest integer larger than or equal to x , respectively. Prove or disprove: for all positive integers n we have

$$\left\lceil \frac{2}{2^{1/n} - 1} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n}{\log(2)} \right\rfloor.$$

Problem B (folklore)

Let (a_i) be a sequence of positive real numbers such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

for some real number a . Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n}{n^2} = \frac{a^2}{2}.$$

Problem C (proposed by Hendrik Lenstra)

Let x be a real number, and m and n positive integers. Show that there exist polynomials f and g in two variables and with integer coefficients, such that

$$x = \frac{f(x^n, (1-x)^m)}{g(x^n, (1-x)^m)}.$$

Problem * (see 2008/1-B below)

Let $n > 1$ be an integer. Let S be a set consisting of n integers such that for every $s \in S$ there exist $a, b \in S$ with $s = a + b$. Prove or disprove that there exists a subset $T \subset S$ of cardinality at most $n/2$ whose elements add up to zero.

Edition 2008/1

We received submissions from Johan de Ruiter (Leiden), H. Reuvers (Maastricht), R.A. Kortram (Nijmegen), Jaap Spies, Paolo Perfetti (Dipartimento di Matematica, Roma 2, Rome), Hans Montanus, Noud Aldenhoven & Daan Wanrooy (Nijmegen), Sander Kupers (Utrecht), Jacky Chow (Sydney) en Thijmen Krebs (Delft).

Eindredactie:

Lenny Taelman, Ronald van Luijk

Redactieadres:

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512, 2300 RA Leiden

problems@nieuwarchief.nl

www.nieuwarchief.nl/problems

Problem 2008/1-A Denote the fractional part of a positive real number x by $\{x\}$, for example $\{\pi\} = \pi - 3$. Evaluate the following double integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{x} \right\} dx dy.$$

Solution We received correct solutions from Johan de Ruiter, H. Reuvers, R.A. Kortram, Jaap Spies, Paolo Perfetti, Hans Montanus, Noud Aldenhoven & Daan Wanrooy, Sander Kupers, Jacky Chow en Thijmen Krebs.

All submitted solutions were similar to one another. The book voucher goes to Noud Aldenhoven and Daan Wanrooy, whose names were pulled out of a hat due to the difficulty of splitting one 20 euro voucher into 10 equal redeemable parts (the lowest existing denomination being 5 euro).

Let Δ_n be the triangle bounded by $x = 1$, $y = x/n$ and $y = x/(n+1)$. Let A_n be the area of Δ_n . Then we have

$$\int_{\Delta_n} \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{x} \right\} dx dy = A_n - \frac{n}{4} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

The same holds for the triangle obtained by interchanging the roles of x and y . Summing over all triangles we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{x} \right\} dx dy &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Problem 2008/1-B Let S be a set consisting of 15 integers, and such that for all $s \in S$ there exist $a, b \in S$ with $s = a + b$.

1. Show that there exists a non-empty subset $T \subset S$ of at most seven elements that add up to 0.
2. Show that this does not need to be true for S with 16 elements.

Solution We received no submissions for problem B. This is not so surprising as our own solution turned out to be incorrect. However, we also do not have a counterexample. Therefore, this problem has been promoted to the starred problem above.

Problem 2008/1-C Let $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be a C^∞ function (that is, all higher derivatives of f exist and are continuous) such that

1. $f(x) = 0$ if $x \leq 0$,
2. $f(x) > 0$ if $x > 0$.

Is it true that $\sqrt{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ is a C^1 function (that is, that its derivative exists and is continuous)?

Solution We received a correct solution from R.A. Kortram. Several people made the mistake of using l'Hôpital's rule where it is not applicable.

Bastien Marmeth from Rennes pointed out to us that this problem is solved in the literature: see e.g. J. Dieudonné, *Sur un théorème de Glaeser*, J. Anal. Math. 23, 1970.

The following solution is based on R.A. Kortram's.

Put $g(x) := \sqrt{f(x)}$. It is not too hard to show that g is differentiable everywhere, continuously differentiable outside $x = 0$ and that $g'(x) = 0$ for all $x \leq 0$. It remains to show that

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} g'(x) = 0,$$

or, equivalently, that

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f'(x)^2}{f(x)} = 0. \quad (1)$$

This is the crux of the problem.

If there is a positive δ such that $f'(x) \neq 0$ for all $x \in (0, \delta)$ then by *l'Hôpital* we have that

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{f'(x)^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{2f'(x)f''(x)}{f'(x)} = 2f''(0) = 0.$$

If there is no such δ we proceed as follows. Let $\epsilon > 0$ be given and choose a $d > 0$ such that $|2f''(x)| < \epsilon$ on the interval $(0, d)$ and such that $f'(d) = 0$. We claim that

$$\frac{f'(x)^2}{f(x)} < \epsilon$$

for all $x \in (0, d)$, which suffices to show (1).

Indeed, consider the open set

$$U := \{x \in (0, d) : f'(x) \neq 0\}.$$

It is a countable union of disjoint intervals (p_n, q_n) . Note that $f'(p_n) = f'(q_n) = 0$ and that f' has a constant sign on (p_n, q_n) , so f is either monotonously increasing or decreasing on (p_n, q_n) . Assume that f is increasing on (p_n, q_n) (the other case is similar). Then for all $x \in (p_n, q_n)$ we have that

$$\frac{f'(x)^2}{f(x)} < \frac{f'(x)^2}{f(x) - f(p_n)} = \frac{f'(x)^2 - f'(p_n)^2}{f(x) - f(p_n)}.$$

But by *Cauchy's mean value theorem* applied to the functions $f'(x)^2$ and $f(x)$ there is a point $t \in (p_n, x)$ such that

$$\frac{f'(x)^2 - f'(p_n)^2}{f(x) - f(p_n)} = \frac{2f''(t)f'(t)}{f'(t)}$$

and the latter is bounded by ϵ by the definition of d .

