

Contents

- 162 Colofon
- 163 Redactioneel *Wil Schilders*
- 164 Agenda
- 166 Nieuws

5ECM |

- 171 On the work of Phillip A. Griffiths *Eduard Looijenga*
- 174 Het vijfde Europese wiskundecongres *Wieb Bosma*

Oratie | Inaugural lecture

- 176 Tussen strengheid en stroperigheid *Han Slot*

Onderzoek | Research

- 184 Modulaire vormen en berekeningen in Galoistheorie *Johan Bosman*
- 188 Bliksem boven de wolken *Bernard Meulenbroek*
- 224 Schaalpartituren (herplaatsing) *Remco Duits*

Samenleving | Society

- 192 Abelprijs 2007: Srinivasa Varadhan *Frank den Hollander*
- 198 Interview met Ingrid Daubechies *Dirk Huylebrouck*

Onderwijs | Education

- 208 Zelf ervaren hoe leuk en veelzijdig wiskunde is *Sophie Krabbenbos*

Boeken | Books

- 214 De vorm van het heelal *Jan van de Craats*
- 217 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 205 De derde wet *Ferdinand Verhulst*
- 204 De favoriet van Marcus du Sautoy *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
- 197 Wiskundigen in den vreemde: Werken bij de Oosterburen *Bert Greevenbosch*
- 207 België–Nederland: 2–0: De laatste der Bourbakisten *Gunther Cornelissen*
- 211 In de verdediging: rubriek voor proefschriften *Geertje Hek*
- 221 Problemen

Eenheid van wiskunde

Belangrijke recente gebeurtenissen hebben mij geïnspireerd tot de volgende gedachten op het gebied van de industriële wiskunde. Ten eerste is daar het 5ECM, dat van 14–18 augustus in de RAI te Amsterdam werd gehouden. In 2005, toen de organisatie van dit evenement nog in het beginstadium was, heb ik de organisatoren een brief geschreven met daarin een verhandeling over toegepaste en industriële wiskunde. Kern van de zaak was dat er mijns inziens meer toegepaste en industriële wiskunde in het programma van 5ECM zou moeten zitten. Immers, vrijwel iedere wiskundige discipline kent zowel een zuivere als een toegepaste kant. Helaas is de perceptie van velen dat de Europese Mathematische Congressen vooral zuiver van aard zijn. Het is jammer dat de nog immer bestaande tweedeling tussen zuivere en toegepaste wiskunde blijft voortbestaan. ‘De wiskundigen’ spreken niet met één stem. Hierdoor worden kansen gemist, die noodzakelijk zijn om wiskunde beter op de politieke kaart te zetten.

Politici observeren de tweespalt, en zien verschillende organisaties op zich af komen: EMS, ECMI, ECCOMAS, ERCIM, ... Het kan hen niet kwalijk genomen worden dat zij zich niet geroepen voelen om wiskunde op de agenda te zetten, bijvoorbeeld als kerndiscipline in Europese projecten. Ik denk dat dit aan ons zelf te wijten is. In plaats van ons zo sektarisch op te splitsen, zouden we gezamenlijk op dienen te treden. Gelukkig zijn er wel kenteringen zichtbaar. Zo had de European Mathematical Society begin dit jaar nog plannen om een aparte ‘toegepaste’ conferentie te gaan houden, twee jaar uit fase met de ECM-serie. Beter ten halve gekeerd dan ten hele gedwaald was gelukkig van toepassing: recent heeft het EMS-bestuur besloten hiervan af te zien. Een goede zaak, het zou immers betekenen dat toegepaste wiskunde verbannen zou worden van de ‘normale’ ECM-congressen.

Tijdens de begin juli gehouden ECMI conferentie was er een levendige paneldiscussie betreffende industriële wiskunde, waarin onder andere ook het artikel ‘Confessions of an industrial mathematician’ (NAW, juni 2008) aan bod kwam. Een van de belangrijkste observaties was dat er een wereldwijd patroon herkenbaar is. Eind van de negentiende eeuw ontstonden grote gecentraliseerde industriële researchlaboratoria. Gedurende vrijwel de gehele twintigste eeuw onderhielden deze nauwe contacten met de academische wereld, en waren voor een groot deel gericht op langere-termijnonderzoek. Medio de jaren negentig kwam hierin een kentering: vrijwel alle grote bedrijven besloten dat wiskundige, fysische, chemische groepen opgeheven moesten worden, en dat er veel meer aandacht voor multidisciplinair onderzoek moest komen. Industriële onderzoek richtte zich op produkt vernieuwing en was vrijwel geheel afhankelijk van de wens van ‘de klant’. Dit alles onder het motto dat research geld omzet in kennis, maar dat innovatie kennis omzet in geld. Ik heb deze kentering aan den lijve ondervonden, en in andere bedrijven geobserveerd. Het heeft er toe geleid dat in het afgelopen decennium het ‘laaghangende

fruit’ van de wiskundige bomen is geplukt.

Industriële wiskunde werd sinds die tijd vooral bedreven door niet-wiskundigen, en de aandacht voor de langere-termijnproblematiek verdween langzaam maar zeker. Wiskundigen (maar ook fysici, chemici etc.) verlieten de industriële laboratoria, en zochten hun heil in de academische wereld. Een zeer zorgelijke ontwikkeling, die in de farmaceutische industrie heeft geleid tot een absoluut minimum aan nieuwe produkten, bij gestaag stijgende onderzoekskosten. Ook hier observeren we een kentering. In mijn eigen omgeving (NXP Semiconductors, voormalig onderdeel van Philips) heeft dit geleid tot het opnieuw opzetten van een wiskundegroep. Terugkijkend op de afgelopen twee jaar zie ik dat het goed is om zo’n groep te hebben. Ten eerste is er de zichtbaarheid, men weet waar men terecht kan voor wiskundige problemen. Voorts is er aandacht voor de langere termijn, hetgeen broodnodig is, want de problemen die spelen zijn verre van triviaal, en behoeven een grondige aanpak: door wiskundigen, en niet alleen toegepaste!

De hierboven geschetste problematiek heeft ook geleid tot het ontstaan van een wereldwijde werkgroep betreffende ‘Mathematics in Industry’, geïnitieerd door het Global Science Forum van de OECD (Organization for Economic Co-operation and Development). De vraag was om de huidige status van het interface tussen innovatie, wetenschap en wiskunde in de deelnemende landen in kaart te brengen, en mechanismen te identificeren voor het versterken van de betrekkingen tussen wiskunde en de industrie. Middels een aantal interessante bijeenkomsten en discussies is een rapport tot stand gekomen dat recent een officiële status binnen de OECD heeft gekregen, en beschikbaar is op www.oecd.org/sti/gsf. Inmiddels is ook een vervolgactie gestart, waarin de meest succesvolle van de geïdentificeerde mechanismen nog eens extra worden belicht en gestaafd met voorbeelden uit de praktijk. Hiertoe behoren onder andere de zeer succesvolle ‘Studygroups with Industry’, en de verschillende centra voor industriële wiskunde waaronder het recent gestarte Laboratory for Industrial Mathematics Eindhoven (LIME) aan de TU/e.

Het moge duidelijk zijn dat er veel activiteit is rondom industriële wiskunde. Ook het NAW probeert haar steentje bij te dragen, door industrieel wiskundigen uit te nodigen om bijdragen te leveren, en door rubrieken zoals ‘De Overval’. Het belangrijkste is echter om er voor te zorgen dat wiskunde één gezicht heeft, en niet uiteenvalt. Dat laatste berokkent enkel schade, terwijl wiskunde juist een van de belangrijkste sleutels is tot innovatie in onze maatschappij, en wij onze politici, maar ook de captains of industry en andere beleidsmakers, hiervan moeten overtuigen.

Wil Schilders, hoofdredacteur

NXP Semiconductors & TU Eindhoven

Agenda

Upcoming Events

september 2008

10 september

Leven met Wiskunde

Afscheidscollege 'Leven met Wiskunde', ter gelegenheid van het emiraat van Dirk Siersma

plaats Academiegebouw, Utrecht

info lc.leidenuniv.nl

12 september

Finale Nederlandse Wiskunde Olympiade 2008

De tweede ronde en tevens finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De prijsuitreiking vindt plaats op 14 november in Eindhoven

plaats TU Eindhoven, Eindhoven

info www.wiskundeolympiade.nl

15 – 16 september

E.W. Beth Centenary Conference

Conferentie ter ere van de 100ste geboortedag van E.W. Beth over zijn bijdragen aan de logica en de geschiedenis van de logica en filosofie van de wiskunde en de wetenschap

plaats KNAW, Amsterdam

info www.knaw.nl

15 – 19 september

Summer School on Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography

DIAMANT-Summer school over cryptografie op basis van elliptische en hyperelliptische krommen

plaats Eindhoven

info www.hyperelliptic.org/tanja/conf/summer-school08

17 september

E.W. Beth-symposium

Symposium voor een breed, Nederlandstalig publiek over wetenschappelijke filosofie ter nagedachtenis van E.W. Beth

plaats KNAW, Amsterdam

info www.knaw.nl

18 – 19 september

Math tutoring: tools and feedback

Symposium over ontwikkeling en gebruik van interactieve tools voor wiskunde onderwijs.

plaats Open Universiteit Nederland, Heerlen

info lc.leidenuniv.nl

22 – 24 september

Workshop on Elliptic Curve Cryptography

Jaarlijkse workshop over cryptografie op basis van elliptische krommen en aanverwante gebieden

plaats Utrecht

info www.hyperelliptic.org/tanja/conf/ECCo8

22 – 26 september

Logic and information security

Interdisciplinaire workshop over de logische analyse van protocollen voor veilige communicatie

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

23 september

NWO-Talent Class

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

26 september – 17 april

From Plato to Predicativity

Seminar op het gebied van de filosofie van de wiskunde, bedoeld voor iedereen met wiskundige rijpheid vanaf masterniveau. Het seminar vindt plaats op diverse vrijdagmiddagen

plaats Nijmegen, Utrecht

info www.math.ru.nl/~landsman/PP.html

oktober 2008

3 oktober

Junior Wiskunde Olympiade

Eerste Wiskunde Olympiade voor leerlingen van klassen 1, 2 en 3

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info www.math.vu.nl/juniorolympiade

3 oktober

Curious Minds Too

Tweede internationale symposium van het onderzoeksprogramma TalentenKracht, waarbinnen onderzoek gedaan wordt naar de bètatalenten van kinderen in de leeftijd van 3 tot 5 jaar

plaats KNAW, Amsterdam

info www.knaw.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

6 – 8 oktober

□ **Young European statisticians Workshop-YES II**
Workshop met als doel jonge statistici kennis te laten maken met de laatste ontwikkelingen op het gebied van de analyse van hoogdimensionale data

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

8 – 10 oktober

□ **Woudschoten Conferentie**

33ste Woudschouten Conferentie voor Nederlandse en Vlaamse numerici met als thema's het numeriek oplossen van hoogdimensionale problemen en biowiskunde

plaats Conferentiecentrum Woudschoten, Zeist

info wsc.project.cwi.nl/woudschoten.php

24 – 25 oktober

□ **Fast Fourier Transform: de wiskunde van MP3 en CT-scan masterclass**

Masterclass voor leerlingen van 5/6 VWO met een N&G of N&T profiel

plaats Universiteit Utrecht, Utrecht

info www.science.uu.nl/voorscholen/wiskunde

29 oktober

□ **De wiskundige onmogelijkheid van democratie**
Eerste in een serie van vier lezingen, waarin de sprekers laten zien hoe alomtegenwoordig wiskunde is en hoeveel plezier er aan te beleven valt. De eerste spreker is Vincent van der Noort.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.sg.uu.nl

november – december 2008

3 – 7 november

□ **EIDMA/DIAMANT minicourse on Lambda Calculus**

Vijfdaagse minicursus over lambda calculus door Henk Barendregt en Jan Willem Klop

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

4 november

□ **NWO-Talent Class**

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

5 november

□ **De overeenkomst tussen wiskunde en kunst**

Tweede in een serie van vier lezingen. Spreker is Jan van de Craats. Zie ook 29 oktober

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.sg.uu.nl

8 november

□ **Studiedag/jaarvergadering NVvW**

De jaarlijkse studiedag van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren*

plaats Anna van Rijn College, locatie Albatros, Nieuwegein

info www.nvww.nl

10 – 14 november

□ **PDE approximations in Fast reaction - Slow diffusion scenarios**

Workshop over het modelleren, analyseren en simuleren van fast reaction-slow diffusion scenario's

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

12 november

□ **Wiskunde als misdaaddroom**

Derde in een serie van vier lezingen. Spreker is Robbert Dijkgraaf. Zie ook 29 oktober en 5 november

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.sg.uu.nl

13 – 14 november

□ **Farewell workshop in honor of Geert Jan Olster**

Workshop met voordrachten van Melikyan, Ho, Başar, Haurie, Heidergott, Cohen, Baccelli, Hautus, Bernhard, Filar, Pourtallier en Van der Woude

plaats Technische Universiteit Delft

info www.tudelft.nl

15 november

□ **Ars et Mathesis-dag 2008**

Lustrumbijeenkomst van de stichting *Ars et Mathesis* over het grensgebied tussen kunst en wiskunde

plaats Paper Dome, Utrecht

info www.arsetmathesis.nl

17 – 19 november

□ **Stochastics Meeting Lunteren 2008**

Jaarlijkse bijeenkomst van Nederlandse stochastici en statistici

plaats Lunteren

info www.stieltjes.org/activities.php

19 november

□ **Liefde en wiskunde**

Vierde in een serie van vier lezingen. Spreker is Ionica Smeets. Zie ook 29 oktober, 5 en 12 november.

plaats Academiegebouw, Utrecht

info www.sg.uu.nl

1 – 5 december

□ **KAM Theory and its applications**

Workshop over Kolmogorov-Arnold-Moser theorie in de theorie van dynamische systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

3 – 5 december

□ **Distributed Sensing**

Internationale workshop over de mogelijkheden en uitdagingen die nieuwe technologische trends bieden voor de monitoring van veranderingen in biodiversiteit.

plaats CWI, Amsterdam

info lc.leidenuniv.nl

9 december

□ **NWO-Talent Class**

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

2009

26 – 30 januari 2009

□ **Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2009**

De 67ste editie van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie, waarin wiskundigen werken aan open problemen uit de industrie

plaats Conferentiecentrum WICC, WUR, Wageningen

info www.swi2009.wur.nl

30 januari

□ **Nederlandse Wiskunde Olympiade 2009**

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade.

plaats Deelnemende scholen

info www.wiskundeolympiade.nl

Nieuws

| News

Inhaken op wiskunde

Wat hebben koraalriffen, haakwerk en wiskunde met elkaar gemeen? Het antwoord is Daina Taimina. Het haakwerk van deze wiskundige, geboren in Letland en werkzaam aan *Cornell University* in Ithaca, New York, werd van half juni tot half augustus tentoongesteld in het *Southbank Centre* in Londen.

Taimina is aan het haken geslagen in 1997 met als doel om een stevig en flexibel model te maken van het hyperbolische vlak. Tijdens een workshop die ze toen bezocht werd gewerkt met een papieren model, dat duidelijk zijn beste tijd had gehad. Omdat het hebben van een tastbaar model bij het begrijpen van iets als hyperbolische meetkunde erg handig is, is Taimina toen met haar haak in de weer gegaan. De resultaten vertoonden een verrassende gelijkenis met een kroppen sla of koraal.

Taimina begint haar haakwerken met een enkele rij steken. Ze laat het aantal steken dan van rij tot rij toenemen door iedere keer na een vast aantal steken een steek toe te voegen. De factor waarmee het aantal steken per rij toeneemt, bepaalt hoe snel het hyperbolische vlak groeit. Op haar website www.math.cornell.edu/~dtaimina zijn de haakinstructies te vinden, evenals een artikel waarin bewezen wordt dat het haakwerk inderdaad een isometrisch model is van het hyperbolische vlak. Taimina is ook een boek aan het schrijven over het verband tussen haken en meetkunde.

De tentoonstelling met als titel *Hyperbolic crochet coral reef* is bedoeld om aandacht te vragen voor de koraalriffen, die wereldwijd aan het verdwijnen zijn als gevolg van vervuiling en de opwarming van de aarde. Het wordt georganiseerd door het Amerikaanse *Institute For Figuring*, dat zich tot doel heeft gesteld de kunstzinnige dimensie van de wetenschap meer aan het licht te brengen. *Bron: www.timesonline.co.uk*



foto's: Daina Taimina

Een hyperbolisch vlak en een hyperbolische broek, die verkregen wordt door van een hyperbolische achthoek twee keer twee zijden met elkaar te identificeren.

Hogere wiskunde op Lowlands

Ook dit jaar konden Lowlandsgangers tijdens het festival in augustus weer met al hun wiskundige problemen terecht in de SIGMA-tent op het festivalterrein. Twee studenten wiskunde en natuurkunde van de Universiteit Utrecht, Rob Wesselink en Mark Koenen, hebben onder begeleiding van Freek van der Blij van het Freudenthal Instituut een aantal workshops gegeven. Hierin boden ze wiskundige oplossingen voor problemen waar de gemiddelde festivalbezoeker zoal tegenaan kan lopen. Zo kwam een wiskundig verantwoorde wijze van bierverdelen aan bod en werd uitgelegd hoe je kunt bepalen wat de snelste manier is om een verloren iPod terug te vinden op het kampeerterrein van de Lowlands.

Het initiatief voor de workshops kwam van de *Special Interest Group Mathematic Activities*, kortweg SIGMA. Dit is een groep die op zoveel mogelijk manieren probeert om de aansluitingsproblemen op het ge-

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

bied van de wiskunde tussen het voortgezet onderwijs en het hoger onderwijs aan te pakken. *Bron: www.science.uu.nl/betanieuws*

Stap voor stap

In het septembernummer van 2007 van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* stond een artikel over de wiskunde achter de Rubik-kubus. Het is bekend dat de kubus zo gedraaid kan worden, dat er vanaf die begintoestand ten minste twintig stappen nodig zijn om de kubus op te lossen. Gene Cooperman en Dan Kunkle van de *Northeastern University* in Boston bewezen dat de kubus vanaf iedere begintoestand op te lossen is in ten hoogste 26 stappen. In maart dit jaar is Tomas Rokicki erin geslaagd om deze bovengrens naar 25 te verlagen. Op zijn website 63.197.151.31 is het artikel met het bewijs te vinden. Hij beweert er ook dat hij de bovengrens inmiddels op 23 heeft gekregen en dat het bewijs hiervoor vrijwel identiek is aan het bewijs dat hij gaf voor de bovengrens van 25. *Bron: tweakers.mobi/nieuws/52662*

Grote taxinummers

In juni is er definitief een nieuw Cabtaxi-getal toegevoegd aan het lijstje van negen dat al bestond. Dit tiende Cabtaxi-getal, 933528127886302221000, is het kleinste getal dat op tien manieren te schrijven is als de som of het verschil van twee derdemachten. Het getal zelf was al in 2006 gevonden, maar pas afgelopen juni slaagde Uwe Hollerbach erin te bewijzen dat het echt het kleinste getal is dat zo geschreven kan worden. Eerder dit jaar werd ook het zesde Taxicab-getal gevonden, namelijk 24153319581254312065344. Dit is het kleinste getal dat op zes manieren te schrijven is als de som van derdemachten.

De Taxicab- en Cabtaxi-getallen danken hun naam aan een anekdote over de wiskundigen Hardy en Ramanujan. Toen Hardy in 1913 een keer met de taxi een bezoek bracht aan Ramanujan, merkte hij op dat het nummer van de taxi, 1729, oninteressant was geweest. Ramanujan moet toen onmiddellijk gezegd hebben dat het juist een heel interessant getal was, omdat het het kleinste getal is dat je op twee manieren kunt schrijven als de som van twee derdemachten. Het is namelijk gelijk aan $1^3 + 12^3$ en aan $9^3 + 10^3$. *Bron: www.kennislink.nl*

Emathcipatie

Het verschil in prestaties tussen jongens en meisjes op het gebied van wiskunde wordt voor een belangrijk deel bepaald door culturele factoren. Dit is wat Luigi Guiso, Ferdinando Monte, Paola Sapienza en Luigi Zingales schrijven in een artikel dat onlangs verscheen in *Science*. Van een grote groep jongens en meisjes uit veertig verschillende landen analyseerden ze het verschil in wiskundescores tussen de beide seksen. Deze wiskundescores kwamen uit het onderzoek van PISA van 2003, een groot internationaal onderzoek waarbij vijftienjarigen onder andere getest worden op hun vaardigheden op het gebied van wiskunde en lezen en op hun probleemoplossend vermogen. Vervolgens werden deze verschillen in wiskundescores vergeleken met de mate waarin mannen en vrouwen in de deelnemende landen maatschappelijk gelijke posities innemen. Hieruit bleek dat in landen waar de maatschappelijke verschillen tussen man en vrouw kleiner waren, ook het verschil tussen de wiskundescores van de jongens en meisjes kleiner was. Een hogere emancipatiegraad heeft een kleinere wiskundekloof tot gevolg.

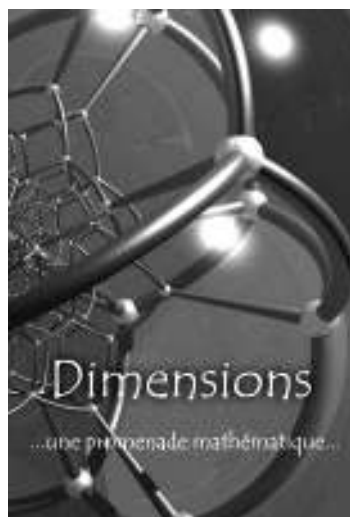
In hetzelfde onderzoek werd ook naar het verschil in leesvaardigheid tussen jongens en meisjes gekeken. In weinig geëmancipeerde landen zijn jongens over het algemeen beter in wiskunde, terwijl meisjes een voorsprong hebben met lezen. Verrassend was dat het verschil in leesvaardigheid niet gerelateerd lijkt aan de sociale gelijkheid tussen man en vrouw in een land. *Bron: www.kennislink.nl*

Dimensions

Vanaf afgelopen 18 juni is het mogelijk om de wiskundige animatiefilm *Dimensions* te bekijken en te downloaden van de website www.dimensions-math.org. De makers zijn Jos Leys en wiskundigen Étienne Ghys en Aurélien Alvarez.

De film duurt twee uur en gaat, zoals de titel al doet vermoeden, over dimensies. De film is zo opgebouwd dat het voor een breed publiek interessant kan zijn. De negen hoofdstukken, van ieder dertien minuten, kunnen grotendeels onafhankelijk van elkaar bekeken worden en worden geleidelijk moeilijker. De tweede, derde en vierde dimensie worden in de eerste vier hoofdstukken besproken. In hoofdstuk 5 en 6 komen de complexe getallen aan bod en hoofdstuk 7 en 8 gaan over de Hopfvezelingen. Het laatste hoofdstuk staat weer een beetje op zichzelf en is qua moeilijkheid vergelijkbaar met de eerste twee hoofdstukken. Het gaat over wiskundige bewijzen. Bij ieder hoofdstuk is een begeleidende internetpagina met extra uitleg.

De film is te downloaden onder de *Creative Commons licentie*, wat betekent dat de film gratis is, verspreid mag worden en publiekelijk getoond mag worden. De film mag alleen niet voor commerciële doeleinden gebruikt worden. *Bron: www.dimensions-math.org*



Math Mov!es maakt indruk

De makers van de website *Math Mov!es* hebben dit jaar de Oracle-competitie *ThinkQuest* gewonnen. Dit is een competitie waarin scholieren en studenten in een team onder begeleiding van een coach een website maken voor leeftijdsgenoten. De makers van de website *Math Mov!es* wilden jongeren interesseren voor wiskundige vraagstukken en ze laten zien hoe wiskunde verankerd is in het dagelijks leven. Het team bestaat uit zes jonge mensen uit verschillende landen met leeftijden variërend van veertien tot negentien jaar. Ze wonnen in de categorie voor deelnemers tot en met negentien jaar. De website is te vinden op <http://library.thinkquest.org/07aug/01801>. *Bron: www.computable.nl*

Toegepaste wordt technische wiskunde

Het ministerie van OCW heeft een aantal opleidingen in het hoger onderwijs gedwongen hun naam te veranderen, ook als deze naam al jarenlang werd gebruikt. Uit een onderzoek dat het ministerie heeft uitgevoerd was namelijk gebleken dat een aantal opleidingen niet de naam gebruikt die in het officiële Croho-register is opgenomen. Zo stond de opleiding toegepaste wiskunde van de Universiteit Twente geregistreerd als technische wiskunde. Het ministerie vond dat het verschil in naamgeving verwarrend of zelfs onbedoeld misleidend kon zijn.

Bron: www.utnieuws.utwente.nl

Eén getal to rule them all

De *International Mathematical Union* heeft samen met twee andere internationale wiskundeorganisaties een rapport uitgegeven waarin ze pleiten voor een voorzichtig gebruik van citatiestatistiek bij de beoordeling van de kwaliteit van onderzoek. Citaties worden onder andere gebruikt om het niveau van tijdschriften te bepalen of binnen sommige universiteiten en departementen om de financiële middelen te verdelen.

Veelgebruikte argumenten voor het gebruik van citatiestatistiek zijn eenvoudigheid en objectiviteit. De schrijvers van het rapport erkennen dat de huidige gang van zaken eenvoudig en goed uitvoerbaar is, maar zetten wel vraagtekens bij de objectiviteit van citaties. Ze zeggen dat in het algemeen niet duidelijk is in hoeverre een citatie iets zegt over de invloed van een artikel. Ze waarschuwen ervoor dat citaties alleen een zeer beperkt en onvolledig beeld geven van de kwaliteit van onderzoek en vinden dat onderzoek veel te belangrijk is om gevangen te worden in een enkel getal.

Bron: www.mathunion.org

Geen taartdeling

Moeten we leerlingen over breuken leren door ze stukken taart voor te schotelen of moeten we juist kiezen voor een abstracte aanpak? Een onderzoek van Jennifer Kaminsky, Vladimir Sloutsky en Andrew Heckler, dat eerder dit jaar in *Science* verscheen, doet vermoeden dat de tweede aanpak waarschijnlijk beter werkt, terwijl over het algemeen gedacht wordt dat de eerste aanpak de beste is.

De drie wetenschappers legden negentien kinderen van rond de twaalf jaar een nieuw wiskundig concept uit, een abelse groep van orde 3. De kinderen werden in twee groepen onderverdeeld. De ene groep kreeg de uitleg met behulp van abstracte plaatjes, terwijl de andere groep met een concreet voorbeeld werkte. Zij kregen plaatjes van maatbekers te zien die op drie verschillende hoogtes gevuld konden zijn. Er werd ze steeds gevraagd hoeveel er over zou blijven als ze de inhoud van twee maatbekers bij elkaar zouden doen en dan de volle maatbekers zouden vergeten. De kinderen kregen ook wat oefeningen om zich de nieuwe stof eigen te maken en een test om te kijken in hoeverre dat gelukt was. Vervolgens werd aan de kinderen gevraagd een spelletje spelen, waarbij ze gebruik konden maken van de net verworven kennis. Dit laatste werd ze expliciet verteld. Ook werd aan de hand van een tweede test onderzocht in hoeverre de kinderen het wiskundige concept hadden herkend in deze nieuwe context.

Uit de resultaten bleek dat tijdens het leerproces de kinderen die de uitleg aan de hand van het voorbeeld hadden gekregen een beetje in het voordeel waren. Ze hadden de eerste test iets beter gemaakt dan de kinderen uit de andere groep. Bij het toepassen van de kennis in de nieuwe context, bleek er echter een veel groter verschil te zijn tus-

sen de resultaten van de twee groepen. Van de groep die de abstracte uitleg hadden gehad, waren veel meer kinderen in staat geweest om het geleerde concept te herkennen in de nieuwe situatie. Daardoor had deze groep de tweede test veel beter gemaakt. De belangrijkste conclusie van het onderzoek was dan ook dat als nieuwe concepten op een abstracte manier worden uitgelegd, dit het toepassen van de opgedane kennis op nieuwe situaties makkelijker maakt, ook bij kinderen.

Bron: cogdev.cog.ohio-state.edu/fpo644-Kaminski.pdf

Prijzen voor veelbelovende wiskundigen

Iedere vier jaar reikt de *European Mathematical Society* (EMS) tijdens het *European Congress of Mathematics* prijzen uit aan veelbelovende wiskundigen onder de 36 jaar. Dit jaar hebben tien wiskundigen de prijs van 5000 euro in ontvangst mogen nemen. Deze prijzen zijn beschikbaar gesteld door de stichting *Compositio Mathematica*.

Verder is de Felix Klein prijs uitgereikt aan Josselin Garnier. Deze prijs wordt om de vier jaar uitgereikt aan een jonge wetenschapper of een groep jonge wetenschappers die een bijzonder goede oplossing hebben gevonden voor een concreet en moeilijk probleem uit de industrie. De prijs is ingesteld door de *European Mathematical Society* en wordt ter beschikking gesteld door het *Institute for Industrial Mathematics* in Kaiserslautern.

Alle prijswinnaars hebben een lezing gegeven op het congres.

Bron: www.cwi.nl



Foto: Jan Schipper, CWI Amsterdam

De prijswinnaars, van links naar rechts: Josselin Garnier, Boáz Klartag, Cédric Villani, Olga Holtz, Agata Smoktunowicz, Ben Green, Laure Saint-Raymond, Alexei Borodin, Assaf Naor, Artur Avila, Alexander Kuznetsov

Van de Craats wint Zaalbokaal voor de tweede keer

Op de jaarvergadering van het KWG heeft hoofdredacteur Ferdinand Verhulst de Zaalbokaal uitgereikt aan Jan van de Craats. Hij won de onderscheiding voor de tweede keer. De jury bestond uit de wetenschapsjournalisten Hans van Maanen (voorzitter), Arnout Jaspers, Bruno van Wayenberg en pr-medewerker Charlotte Vlek.

Het eenstemmige advies ging gepaard met de volgende opmerkingen. "De jury wil met deze voordracht de redactie van harte stimuleren om van het NAW een forum voor de wiskundige gemeenschap te maken, waarin die zijn licht laat schijnen over maatschappelijk urgente kwesties waarin al dan niet geavanceerde wiskunde een sleutelrol speelt. Dat kan zijn het rekenen in het basisonderwijs, maar het had ook over de zaak Lucia de B. kunnen gaan, over het kraken van de OV-chipkaart of over de haken en ogen van DNA-profielen. Het NAW is een ideaal podium om actuele kwesties uit te diepen voor een breder publiek dan alleen vakgenoten, maar dan zonder de vaak knellende

beperkingen van artikelen in de algemene media waaronder wij voor deze gelegenheid zelfs de diverse wetenschapsbijlagen rekenen.

De jury draagt met genoegen Jan van de Craats, auteur van het artikel 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen' voor als winnaar van de Chris Zaal-bokaal. Van de Craats neemt in dit artikel de ruimte om zijn bezwaren tegen de zijns inziens modieuze onzin van het huidige rekenonderwijs te onderbouwen. Daarmee is hij een van de aanjagers gebleken van een belangrijke maatschappelijke discussie, namelijk die over het in vrije val verkerende niveau van het rekenonderwijs op de basisschool."

Verhulst merkte op dat de hoofdredactie de voordracht van Van de Craats graag overneemt. Ze vonden het opvallend dat de opmerkingen van de jury over het rekenonderwijs nu eens niet zijn gemaakt door 'wereldvreemde academici', zoals die vaak genoemd worden, maar door ervaren wetenschapsjournalisten.

Derk Pik

Joint meeting of the European Women in Mathematics and the EMS

Zondag 13 juli, de dag voor het enorme 5ecm congres begon, was er al een voorproefje in Amsterdam. Vier vrouwelijke sprekers van het 5ecm gaven alvast een inleiding op hun praatje. Iedereen was welkom, maar een doel van de dag was om jonge vrouwelijke wiskundigen aan te moedigen om in het vak te blijven. Er was een bovennatuurlijk percentage vrouwen aanwezig. Het aantal mannen schommelde rond de 10 procent. Enige complicaties waren er met het whiteboard, dat erg mooi en design was, maar verder alleen bruikbaar voor mensen van meer dan 2 meter. Dit zou zelfs een uitdaging zijn geweest voor de gemiddelde Nederlandse man. De onderwerpen van de praatjes liepen erg uiteen, van numerieke wiskunde tot niet-commutatieve meetkunde. Aan het einde van de dag werd ter aanmoediging ons door een van de sprekende professoren op het hart gedrukt dat promoveren het zwaarste is wat een mens kan doen. Gelukkig houden we wel van een uitdaging.

Bron: Linda Vos en Janne Kool

Philips Wiskundeprijs voor promovendi naar van Leeuwen

Erik van Leeuwen, promovendus aan het CWI, heeft op donderdag 17 juli de Philips Wiskundeprijs voor promovendi gewonnen tijdens het vijfde *European Congress of Mathematics*. Dit is de derde keer dat deze prijs uitgereikt wordt. Zes promovendi kregen vijftien minuten de tijd om te vertellen over hun onderzoek. De winnende voordracht van Van Leeuwen droeg de titel 'Geometric optimization for wireless networks and computational biology'.

Bron: www.cwi.nl

Met de handen in het haar

In tegenstelling tot wat veel mensen denken, raakt steil haar sneller in de knoop dan gekruld haar. Dit is wat Jean-Baptiste Masson schrijft in zijn artikel in de *Americal Journal of Physics*.

Voor zijn onderzoek liet hij eerst twee kappers gedurende drie weken het aantal klitten tellen op 212 hoofden. Hieruit bleek dat hoofden met gekruld haar gemiddeld drie klitten telden en hoofden met steil haar meer dan vijf. Masson ontwierp toen een wiskundig model om het in de knoop raken van haar te modelleren. Haar vormt een bijzonder ingewikkeld systeem, aangezien het bestaat uit duizenden kleine strengen die in alle richtingen tegen elkaar aan bewegen.

Uit zijn model maakte Masson op dat gekrulte haren elkaar wel vaker raken dan steile haren, maar dat vooral de hoek waaronder haren

elkaar raken een grote rol speelt in het ontstaan van knopen. Dit komt door de microscopisch kleine schubben die de buitenste laag van een haar vormen. Als haren in de knoop raken, komt dat vaak doordat deze schubben in elkaar haken. Hiervoor moet de hoek waaronder twee haren elkaar raken niet te klein zijn. De hoek waaronder steile haren elkaar raken is vaak groter dan bij gekrulte haren. Het model van Masson voorspelde de gegevens die de twee kappers vonden met verrassende nauwkeurigheid.

Bron: www.sciam.com

Zilver en brons op de Internationale Wiskunde Olympiade

Het Nederlandse team heeft de 33ste plaats behaald op de 49ste *Internationale Wiskunde Olympiade*. De olympiade vond half juli plaats in Madrid. Dit was de 38ste keer dat Nederland deelnam en het team heeft het in al die keren slecht drie keer beter gedaan dan dit jaar.

In totaal deden er 535 leerlingen uit 97 landen mee. Van al deze leerlingen krijgt de helft een medaille. Er zijn gouden, zilveren en bronzen medailles te verdelen en deze worden uitgereikt in de verhouding 1:2:3. Het Nederlandse team bestond uit Milan Lopuhaä, Maarten Roelofsma, Raymond van Bommel, Remy van Dobben de Bruyn, Floris van Doorn en Alexander van Hoorn. Milan Lopuhaä en Floris van Doorn hebben een zilveren medaille gewonnen en Raymond van Bommel en Remy van Dobben de Bruyn een bronzen. De eerste plaats was voor China met een zilveren medaille en vijf gouden. Ook hadden twee deelnemers van het Chinese team het maximaal haalbare aantal punten behaald.

Nederland zal optreden als gastland voor de 52ste *Internationale Wiskunde Olympiade* in 2011.

Bron: www.wiskundeolympiade.nl



Van links naar rechts: Maarten Roelofsma (8 punten), Alexander van Hoorn (10 punten), Raymond van Bommel (16 punten, brons), Floris van Doorn (22 punten, zilver), Remy van Dobben de Bruyn (16 punten, brons), Milan Lopuhaä (22 punten, zilver)

Derdegraads L-functies

Ge Bian en Andrew Booker van de *University of Bristol* hebben een eerste voorbeeld gevonden van een derdegraads transcendentale L-functie. L-functies spelen een belangrijke rol in de getaltheorie. Het beroemdste voorbeeld van een L-functie is de Riemannzetafunctie. Dit is een eerstegraads algebraïsche L-functie.

Bian vertelde over het voorbeeld tijdens een workshop van de *American Institute of Mathematics* eind maart. Michael Rubinstein van de *University of Waterloo* was daar aanwezig en bevestigde ter plekke de (gegeneraliseerde) Riemannhypothese voor de eerste paar nulpunten van de splinternieuwe L-functie.

Bron: www.aimath.org

An appearing award

A Disappearing Number, het Britse toneelstuk van Simon McBurney over de relatie tussen de wiskundigen Srinivasa Ramanujan en G.H. Hardy, waarover we al schreven in het septembernummer van 2007, heeft de *Laurence Olivier Award* voor Best New Play van 2008 gewonnen. De *Laurence Olivier Awards* zijn zeer prestigieuze Britse theaterprijzen en worden uitgereikt door *The Society of London Theatre*.

Bron: mathgateway.maa.org

Golven in de Kuip

In de Kuip hebben op 19 juli ongeveer 50.000 Feyenoord-supporters meegewerkt aan een uitzonderlijk groot wetenschappelijke experiment. Ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van Feyenoord en het tweehonderdjarig bestaan van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen mocht Akademielid Gert-Jan van Heijst onderzoeken of de menselijke wave zich net zo gedraagt als een soliton. Een soliton is een enkelvoudige golf die zich voortplant zonder van vorm te veranderen. De eerste wiskundige beschrijving van solitonen werd gegeven door de Amsterdamse wiskundige en Akademielid Diederik Korteweg en zijn leerling Gustav de Vries.

Van Heijst, die hoogleraar transportfysica is aan de Technische Universiteit Eindhoven, heeft de wave drie keer laten uitvoeren door het publiek. Hij is hierin bijgestaan door voetbalverslaggever Koert Westerman. De bewegingen zijn door verschillende camera's vastgelegd. Op 3 oktober zullen de resultaten van het onderzoek bekend worden gemaakt en toegelicht worden tijdens een seminar van de *Virtual Knowledge Studio* in Rotterdam.

Bron: www.knaw.nl

2008, een jaar dat telt

Onder het motto *Mathematik, alles, was zählt* (wiskunde, alles wat telt) heeft het Duitse Ministerie van Wetenschap en Onderwijs het jaar 2008 uitgeroepen tot jaar van de wiskunde.

Sinds 2000 wijdt het ministerie samen met het initiatief *Wissenschaft im Dialog* ieder jaar aan een specifieke wetenschap en dit jaar was wiskunde aan de beurt. In samenwerking met de *Deutsche Telekom Stiftung* en de *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* zullen ze de wiskunde het hele jaar lang in het zonnetje zetten.

Er zal veel moeite gedaan worden om de wiskunde een gezicht te geven, zodat de media kan spreken met en schrijven over personen. Een van deze personen is de winnaar van de laatste editie van het televisieprogramma 'Germany's Next Top Model', Barbara Meier. Zij studeert namelijk ook wiskunde en heeft besloten om haar studie af te maken, ondanks de winst van de modellenwedstrijd. Dit doet ze naar eigen zeggen niet alleen om een opleiding achter de hand te hebben, maar ook omdat ze wiskunde gewoon leuk vindt.

Günter M. Ziegler van de *Technische Universität Berlin* zegt: "The hope is that when the year is over, lessons learned by Germany's students will include the idea that mathematics is high-tech, it is art, it is puzzles, etc. There is lots to discover. People who think they don't like math haven't seen much of it."

Bron: www.jahr-der-mathematik.de en mathgateway.maa.org

Rampen plannen

Computertechnologie- en consultancybedrijf *IBM* gebruikt stochastisch programmeren om gespecialiseerde algoritmes te ontwerpen die moe-

ten helpen bij het modelleren en bestrijden van natuurrampen.

Stochastisch programmeren is een tak van optimalisatie die zich bezig houdt met problemen waarin onzekerheden een belangrijke rol spelen. Als een natuurramp, zoals een overstroming of een bosbrand, bestreden moet worden, hebben de overheid en hulporganisaties een systeem nodig dat hen helpt bij het maken van beslissingen zoals het inzetten van personeel en de verspreiding van goederen. Stochastisch programmeren kan helpen bij het vinden van optimale oplossingen, rekening houdend met het onvoorspelbare gedrag van de overstroming of de brand.

De extra flexibiliteit van stochastisch programmeren gaat ten koste van de rekentijd voor *IBM*. Recent zijn er echter nieuwe, efficiëntere algoritmes en snellere processoren ontwikkeld, die stochastisch programmeren tot een realistischere optie maken.

Bron: www.networkworld.com/community/node/26605

Nederlands team scoort op 15e IMC in Bulgarije

Het Nederlandse team dat heeft deelgenomen aan de vijftiende Internationale Universitaire Wiskunde Competitie heeft eenmaal zilver en tweemaal brons behaald. De competitie vond plaats van 25 tot 31 juli in Blagoevgrad, Bulgarije. In totaal deden 283 studenten uit veertig landen mee. In twee dagen tijd moesten de deelnemers twaalf opgaven zien op te lossen. Nederland werd vertegenwoordigd door vijf studenten. Beste Nederlandse deelnemer was Iris Smit van de UvA. Met 103 punten verdiende zij een tweede prijs. Twee derde prijzen gingen naar Jinbi Jin (UL, 89 punten) en Sander Kupers (UU, 78 punten). Eervolle vermeldingen waren er voor Kyndylan Nienhuis (UvA, 49 punten) en Johannes Steenstra (UU, 42 punten). Teamleider was Maarten Hoeve (UvA, mhoeve@science.uva.nl). In het eindklassement verwierven drie studenten een gedeelde eerste plaats met 220 van de 240 punten.

De Nederlandse deelnemers hebben zich op deze wedstrijd voorbereid door middel van een aan de UvA georganiseerde training onder leiding van Sergey Shadrin. Voor meer informatie, zie: <http://studiegids.uva.nl/web/uva/sgs/nl/c/8195.html> en www.imc-math.org

Chris Zaal

Dankzegging

Graag willen wij, mede namens de voorzitter van het KWG, Henk Broer, en de gehele redactie van het NAW, een ommissie in het maartnummer goedmaken door Jaap Molenaar en Jaap Top heel hartelijk te bedanken voor het uitstekende werk dat zij hebben gedaan in de hoedanigheid van hoofdredacteur van het NAW. Met hun tomeloze inzet en veelvoud aan vernieuwende ideeën hebben zij de 5e serie verder vorm gegeven, en is het NAW geworden tot wat het nu is: een zeer informatief, attractief en actueel tijdschrift. Jaap en Jaap, zeer bedankt!

Tevens willen wij onze grote waardering uitspreken voor het juninummer dat tot stand gekomen is door het werk van de speciale redactie, bestaande uit Gunther Cornelissen, Patrick Ooninx, Martin Raussen, Chris Nunn, met hoofdredacteur Gerard Alberts.

Wil Schilders, Ferdinand Verhulst

Eduard Looijenga

Universiteit Utrecht

Budapestlaan 6

3584 CD Utrecht

looijeng@math.uu.nl

2008 Brouwer Laureate

On the work of Phillip A. Griffiths

This text is the laudatio delivered by Eduard Looijenga on the occasion of the awarding of the Brouwer Medal to Phillip A. Griffiths.

When the Executive Council of the Dutch Mathematical Society instructed the selection committee to nominate a Brouwer lecturer in the area of geometry, it was not so clear what kind it had in mind: algebraic, complex-analytic or differential geometry. Given the size of the area covered by that simple word, it was not to be expected that the committee would find someone who could represent that field in its full glory, so that a further restriction of the domain seemed in order. Fortunately this turned out to be unnecessary, for the committee, whose members were Hans Duis-termaat, Jozef Steenbrink, Dirk Siersma and the chairman of the Royal Dutch Mathematical Society, Henk Broer, readily and unanimously agreed on a candidate who has been a towering figure in all these areas, namely tonight's lecturer Phillip A. Griffiths.

A laudatio for a Brouwer lecturer must give a general mathematical audience an idea of the breadth and impact of the work of the medallist and should also explain why this person was singled out for this award. These are clearly not independent duties, but in the present case, I confess that for me, the latter is easier to do than the former.

Mathematics, science and society

Let me then, before I begin to say anything about the substance of his work, give you first an idea of its magnitude in published form: five years ago a four volume set of 'Selecta' of the laureate was published, comprising

about 2600 pages in total. Let me emphasize that this was a selection indeed, as it certainly does not contain all the laureate's published mathematical papers. And given the rate at which he continues to publish research at a high level, it would not surprise me if eventually another volume will be added. In addition he authored or co-authored about a dozen books, some of which have become classics. One of these, *Principles of Algebraic Geometry*, coauthored with Harris and published in 1978, is still generally regarded as the standard text from which to learn complex algebraic geometry. And another, *Geometry of algebraic curves, Volume 1*, dating from 1985 and written with Arbarello, Cornalba and Harris is the only modern comprehensive text of this venerable and beautiful subject. The title indicates that authors had boldly, if not somewhat recklessly, committed themselves to at least a *Volume 2*. I am happy to report that, with such a volume now being virtually finished, they will redeem on this promise. Not quite in the form it had been conceived a quarter of a century ago, I suppose, for the field has spectacularly developed since.

As I have hinted, the impact of this opus has been enormous. But the laureate has not only exerted his influence through his writings: when Griffiths took students, he often attracted the best and as a result many of the prominent algebraic geometers in the US and abroad of a certain age group were formed by him.

A very much larger group has felt his beneficial influence also in other ways. I mean here not a group of mathematicians, but the scientific community as a whole as well as pe-

ople professionally involved in science politics. This has happened in his capacity of Provost of Duke University and even more so as Scientific Director of the prestigious Institute for Advanced Study and as secretary of the International Mathematical Union. In speeches and essays he formulated his vision and expressed his opinions on the role that mathematics and science plays or should play in society.

The Dutch connection

I confess that I find the task of giving you an idea of the laureate's work rather daunting and so I hope you will allow me to begin this by recounting a personal experience. Almost forty years ago, in the spring of 1970, he was invited by Frans Oort, then at the Mathematics Department of the University of Amsterdam, to give a series of lectures. At the time I was what we would now call a Master student of Nico Kuiper and my supervisor recommended that I attend these lectures. Since I knew very little about algebraic geometry, I did not expect to get a lot out of these. I was however in for a pleasant surprise: I enjoyed these lectures immensely and found that I could basically follow them to the very end. One reason was surely that the exposition drew heavily on the kind of topological and geometric reasoning that was not completely foreign to me, but it was most of all due to the quality of the lectures. These were not only very clear, making it easy to make notes (so that we could prepare for the next installment), but the material was also great: it was based on his two part paper called *The periods of rational integrals* that had just appeared



Photograph: Jan Schipper, CWT Amsterdam

Griffiths receives the Brouwer Medal from the chairman of the Royal Dutch Mathematical Society.

in the *Annals of Mathematics*. This is not the place to describe the mathematical content of this work, but in case you know a little about the classical theory of meromorphic differentials on Riemann surfaces and the cohomology classes they can represent: it is essentially a beautiful generalization of that theory to the case of smooth complex hypersurfaces in a fixed complex projective space. Griffiths mentions in a commentary in the *Selecta* that a referee of that paper had berated him for developing this theory not in the most general setting that his methods allowed, but that this criticism was ignored by the *Annals*' editors. Now these lectures were also attended by two fellow students, who, I am happy to say, are here with us tonight as well, namely Jozef Steenbrink (who provided the musical introduction) and Chris Peters and I daresay that all three of us can testify that from a student's perspective this referee was wrong and the *Annals* editorial board was right. I might add that these lectures and that paper have had tremendous influence on the direction of our research and for each of us in a diffe-

rent way. As a consequence, the laureate thus very much influenced the development of algebraic geometry in the Netherlands.

I told you this story also because it reflects a remarkable quality of the laureate to which I alluded earlier, namely his gift of attracting and inspiring students. Until 1983, the year Griffiths left Harvard to become Provost at Duke University, he had had about twenty students, most of whom have become well-known, if not famous, experts in algebraic geometry, differential geometry or Lie groups. That diversity also illustrates that Griffiths is a geometer in the broadest sense of the word: in each of these areas he has made very fundamental contributions making him a true heir of the legacy of some of the great geometers of a century ago, such as Henri Poincaré and Élie Cartan.

The Selecta

The four volumes of the *Selecta* are titled *Analytic Geometry*, *Algebraic Geometry*, *Variations of Hodge Structure* and *Differential Systems*. Although the laureate's work can be dis-

tributed under these headings in more than one way, I find it practical to give you an idea of his accomplishments by picking an item from each of these.

From the first category, *Analytic Geometry*, I mention his work in what we may call complex integral geometry, which you might think of as a kind of fusion of differential and algebraic geometry. In order to have some idea what this is about, let me mention Crofton's formula as the archetypical example. This formula says that there is on the space of lines in a Euclidean plane an easily described measure with the property that for any decent curve in the plane, its length is equal to the integral of the (integer valued) function which associates to a line in that plane its number of intersections with the curve. That little gem of integral geometry is generalized by Griffiths in a beautiful manner to a setting that is higher dimensional and also complex-analytic: similarly defined integrals turn out to reproduce interesting complex analytic, metric and topological invariants involving for example Chern and Milnor numbers.

As for the second category, *Algebraic Geometry*, it is hard and admittedly, also unfair, to choose a single paper from his many contributions in this area. My favourite is the one with his erstwhile student Herb Clemens about the *Intermediate Jacobian of the cubic threefold*. I hope you bear with me when I take a minute to be moderately technical, so that I can describe the essence of this paper.

Some of you may recall from a course on Riemann surfaces that to a compact Riemann surface, or what is the same, a complex projective nonsingular curve, is associated a complex torus, its so-called *Jacobian*. The standard and easiest way to introduce this Jacobian is in terms of the periods of the holomorphic differentials of the curve. The famous Abel-Jacobi theorem asserts that this torus can also be understood differently, namely as parameterizing the curve's degree zero divisor classes. The Jacobian comes with a little bit of extra linear structure, called a *polarization* and another famous theorem, the Torelli theorem, asserts that no information is lost if we pass from the hard-to-grasp curve (a *curved* object after all) to the *linear* data that are embodied by its polarized Jacobian. Griffiths and Clemens show that the situation is amazingly similar if we replace the curve by a nonsingular cubic hypersurface in complex projective 4-space. They also prove that such a hypersurface is not rational. It is an extraordinary paper and one of the most beautiful I know.

Griffiths' work on the third topic, *Variations of Hodge Structure*, probably had the biggest impact. This concerns an important generalization of Poincaré's results on rational integrals on surfaces and includes his work on the periods of rational integrals on which he lectured in Amsterdam, but as the present occasion is not well suited for trying to explain this to a general mathematical audience in just a few minutes, I will not elaborate. In related work we find also a simple, but very fundamental property of period mappings that is now named after him: *Griffiths transversality*.

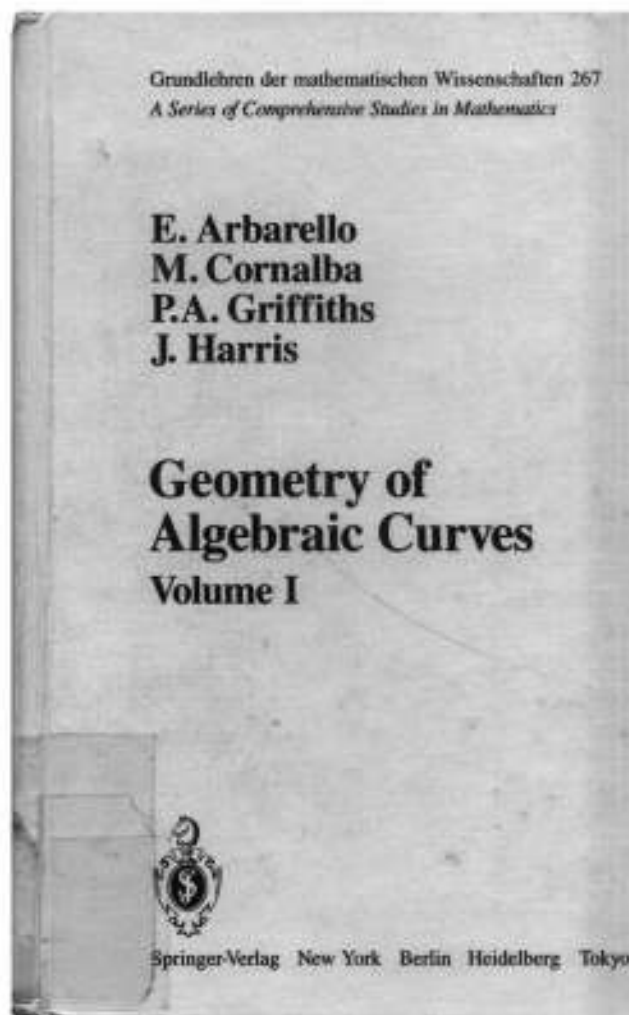
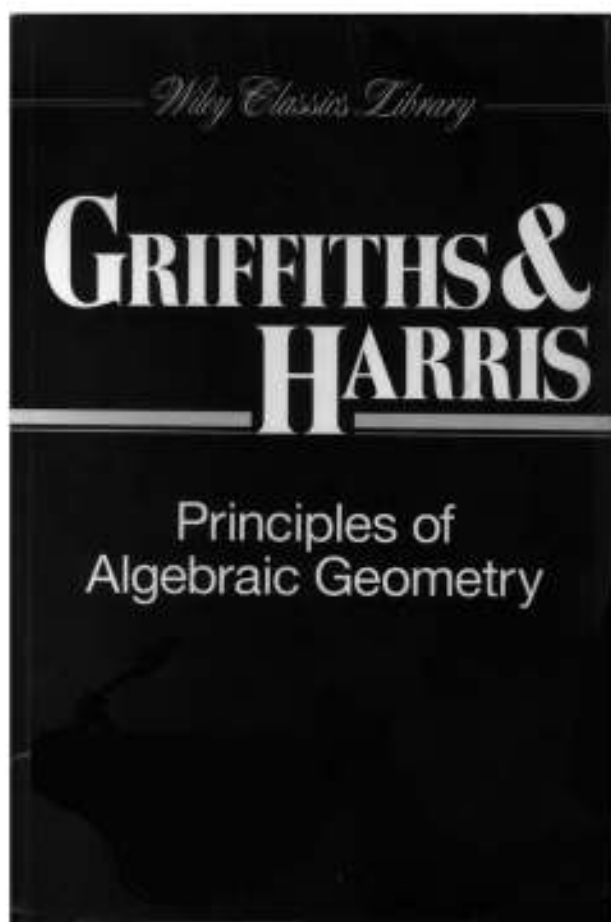
It is also hard to make a choice from the fourth and last topic, *Differential Systems*. The subject matter has classical origins, going back Sophus Lie and Élie Cartan. It has become part of classical mechanics, but, as Grif-

fiths showed with his former student Robert Bryant, is also intimately tied to the topic just mentioned, *Variations of Hodge Structure*. Under that same heading falls the classical isometric embedding problem. The central question here is easy to state: is it possible to embed locally a compact Riemann manifold isometrically in a Euclidean space? In other words, does the abstract approach to Riemannian geometry yield more Riemannian manifolds than the more elementary (and clumsy) approach of studying submanifolds of Euclidean space? This question was answered affirmatively long ago by John Nash (in work that in my opinion belongs to the deepest of this Noble prize winner). In Nash's result there is little control on the embedding dimension, but Bryant and Griffiths were able

to prove that a 3-dimensional Riemannian manifold admits a local isometric embedding in Euclidean 6-space. This must be the minimal value for that dimension.

Conclusion

I have tried to give you an idea of the work of the laureate, but I am well aware that my own limitations prevented me from doing it justice. I do hope however to have convinced you that Phillip Griffiths is not just very much worthy of the Brouwer medal, but also that we have reason to be proud that he has accepted and is here tonight to give the accompanying lecture. ←



Wieb Bosma

Radboud Universiteit Nijmegen
Toernooiveld 1, 6525 ED Nijmegen
bosma@math.ru.nl

5ECM

Een impressie

In het Amsterdamse RAI-congrescentrum vond van 14 tot 18 juli het 5th European Congress of Mathematics plaats. Ongeveer duizend wiskundigen uit 68 landen, waaronder bijna tweehonderdvijftig Nederlanders, namen deel aan deze grootste bijeenkomst van beroepswiskundigen in Nederland sinds het International Congress of Mathematicians te Amsterdam in 1954.

Het bijwonen van een dergelijke massale conferentie heeft veel weg van het kijken naar televisie op een buitenlandse hotelkamer. Je hebt de neiging te zappen tussen diverse parallelle sessies, en belandt daarbij soms in een totaal onbegrijpelijk programma. Anderzijds zie je natuurlijk voortdurend bekenden voorbij komen, soms slechts in een flits. Om echt iets op te steken is het aan te raden je naar het satellietcircuit te begeven, het equivalent van de betaalkanalen op die tv. Aan de halfllege zalen te zien ging van sommige Amsterdamse grootstedse geneugten op menig congresganger de aantrekkingskracht uit van de adultkanalen.

Op de kunstzender troffen we deze week allereerst de openingsceremonie, waarbij, heel toepasselijk, Robbert Dijkgraaf het Nachtwachttableau tot leven bracht. Gelukkig is op www.5ecm.nl dit spektakel als 'uitzending gemist' op video nog terug te vinden. De partyfoto's in de oud-Hollandse entourage van hotel Arena voorzien dan wellicht in de boulevardbehoefte van sommigen. Verder zijn er veel foto's van hoffotograaf van Emde-Boas te vinden. In het conferentieprogramma was een wat verstopte minidocumentaire in gepast korrelig zwart-wit uit diens Amsterdamse jaren '70-doos te zien. Onverwacht mooi en ontroerend vond ik de pauzefilm over Wolfgang Döblin. Een verhaal over de vlucht van zijn beroemde vader, tragische zelfmoord in de marge van de Wereldoorlog, en opwinding over een lang ongeopend gebleven brief met manuscript, dat de kijker met vragen achterliet.

De European Mathematical Society maakt tijdens ECM traditioneel de winnaars van een tiental prijzen (gesponsord door Compositio) bekend. Hun bijdragen aan het programma,

en die van Felix Klein-prijswinnaar Josselin Garnier, bleven tot de openingsochtend geheim. In een toch al niet bijster overzichtelijke programmagids maakte dat de taak van de deelnemer om vooraf zijn eigen ideale programma samen te stellen tot een hopeloze. Juist Lex Schrijver, van spoorboekjesfaam, had als voorzitter van de programmacommissie beter verdiend. Maar de Brouwerprijslezing van Phillip Griffiths op maandagavond, voorafgegaan door orgelspel van Jozef Steenbrink in de VU, was niet te missen. Helaas stelde de voordracht zelf na de veelbelovende inleidende woorden wat teleur; laten we zeggen: als een door recensenten de hemel in geprezen maar voor de argeloze kijker soms wat onnavolgbare Nouvelle Vague film.

Uit de koker van ons eigen KWG kwam ook de negende Beegerlezing van Dan Bernstein, in *positieve* zin onnavolgbaar. Dit ná de verkiezing van Hollands next top-model AiO Erik Jan van Leeuwen, van het CWI, en vóór de uitreiking van de Zaalbokaal aan Jan van de Craats (tijdens de kijkcijferhit die Algemene Ledenvergadering heet). Met de mooie speciale aflevering van het Nieuw Archief, en de verkoop van Brouwerpostzegels en Gaussepriem-dekervetten in de stand een goede beurt voor ons Genootschap.

De prijzengekte lijkt me trouwens een nieuwe hoogtepunt bereikt te hebben. Het is wel aardige hersengymnastiek om te voorzien of onder de winnaars (of aanwezige studenten) het equivalent van Atiyah of Penrose (destijds als studenten bij ICM 1954 aanwezig) gevonden gaat worden. Met Richard Taylor als openingsspreker, en Phillip Griffiths en Laszlo Lovász onder de hoofdsprekers sloeg dit congres zeker een goed figuur. En met president Dijkgraaf in deze 'remake'

in de dubbelrol van voorzitter J.A. Schouten en prins Bernhard leek ook iedereen wel te kunnen leven.

Sponsors bleken moeilijk te vinden, en dan nog vooral met kleine bedragen via persoonlijke banden. De ING-bank kwam ruim over de brug met onder meer een ontvangst voor iedereen die van enig belang was, in haar eigen architectonische strijkijzer/schoen, met uitzicht over de stad. Dat onder het oog van Appel op een lagere verdieping gedineerd werd, was naar verluidt omdat elders hard aan de kwartaalcijfers werd gewerkt. Waarschijnlijker lijkt het dat daar Constant toeziet op de verminkte resten van huiswiskundigen: voor de goede beschouwer werd op video aan de wand namelijk vertoond hoe zij, wellicht wegens wanprestatie in het modelleren van de kredietcrisis, op het dak werden geofferd aan een blauwe postbankleeuw. Zo heeft de ING-leeuw zijn oranje kleur gekregen.

EMS-voorzitter Ari Laptev dankte toch de sponsors, in een toespraakje waaruit bleek dat humor niet universeel is, voor het inzien dat wiskunde van groot belang is voor onze samenleving. Opnieuw een echo uit de openingstoespraak van Schouten uit 1954. Het belang van zo'n congres voor de individuele wiskundige, die er toch 'some disruption of family life during the summer vacation period' voor over heeft, citeer ik maar even verder uit een Monthly-bijdrage uit 1986 van Alavi, Hilton en Pedersen: 'the sense of belonging to a community which transcends all barriers of nationhood, of politics, of race and religion — this sense that a common love of mathematics is a stronger force in uniting our profession than any other force could be which seeks to pull us apart'.

Laat me met deze hoogdravende gedachten in ieder geval de hoofdorganisatoren André Ran, Herman te Riele en Jan Wiegerinck complimenteren en bedanken voor de geweldige organisatie. Op naar Krakau. ←



Figuur 1 De elf prijswinnaars van het congres: eerste rij van links naar rechts: Bo'az Klartag, Olga Holtz, Ben Green, Alexei Borodin, Artur Avila, tweede rij van links naar rechts: Josselin Garnier, Cédric Villani, Agata Smoktunowicz, Laure Saint-Raymond, Assaf Naor, Alexander Kuznetsov; Peter van Emde Boas (met Hilberthoedje) in gesprek met Tom Koornwinder; Robert Tijdeman bij de uitreiking van de prijzen; Frank den Hollander en Lex Schrijver; Jozef Steenbrink en Ari Laptev; het tableau vivant van De Nachtwacht; de organisatoren Jan Wiegerinck, André Ran en Herman te Riele; het publiek bij de opening

Han Slot

*Department of Mathematics and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
P.O. Box 513
5600 MB Eindhoven
j.j.m.slot@tue.nl*

Oratie: Han Slot, Technische Universiteit Eindhoven, 18 januari 2008

Tussen Strengheid

Reologie is het vakgebied dat de stroming van vloeistoffen bestudeert die zich anders gedragen dan water. Het vindt belangrijke toepassingen in de geneeskunde, biologie en polymeertechnologie en bij de constructie van apparaten die op een of andere manier met vloeistoffen werken. Bijvoorbeeld: kennis van de viscositeit is essentieel bij het ontwerpen van een inktjetprinter. Han Slot, wis- en natuurkundige, die vijftien jaar lang bij DSM Research heeft gewerkt op het gebied van polymere materiaalkunde werd in 1999 benoemd tot hoogleraar in de toegepaste reologie van heterogene materialen aan de Universiteit van Twente. Per 1 september 2005 is hij benoemd tot hoogleraar in de mathematische reologie aan de faculteit van wiskunde en informatica van de Technische Universiteit Eindhoven. Op 18 januari 2008 sprak hij onderstaande oratie uit.

Op 20 september 2001 hield ik mijn intrede aan de Universiteit Twente. Degenen die daarbij aanwezig waren, weten wellicht de titel nog: 'Alles stroomt, maar hoe?' Net als vandaag ging die intrede over reologie, het deelgebied van de natuurkunde dat zich bezighoudt met de bestudering van het vervormings- en stromingsgedrag van materialen. Maar er is wel een verschil tussen mijn rede in 2001 en mijn rede vandaag: ik wil mij nu specifiek richten op de relatie tussen wiskunde en reologie. Tenslotte aanvaardde ik in 2001 een leeropdracht binnen de faculteit Technische Natuurkunde en nu een binnen de faculteit Wiskunde en Informatica. De titel van mijn voordracht, 'tussen strengheid

en stroperigheid', refereert aan mathematische reologie, mijn leeropdracht. Een vakgebied dat zich tussen de wiskunde (strengheid) en reologie (stroperigheid) in bevindt. Maar wat is mathematische reologie eigenlijk? Om deze vraag te beantwoorden, wil ik u eerst iets vertellen over reologie. Ook zal ik u het een en ander vertellen over wiskunde en in het bijzonder over de relatie van wiskunde tot natuurkunde. Er komen daarbij ook enkele wiskundige formules over het voetlicht. Er wordt wel eens gezegd dat je met iedere wiskundige formule die je toont in een lezing, de helft van je publiek verliest. Maar dat is natuurlijk een fabeltje, en gaat zeker niet op voor het gezelschap dat vandaag hier aanwezig is! Wat ik

belangrijk vind is dat ik u deelgenoot kan maken van het fascinerende vakgebied waarin ik werkzaam ben en u kan laten zien wat mij motiveert in deze leeropdracht.

Reologie

Het Nederlandse woord reologie (zonder h na de r) is de vertaling van het Engelse woord rheology (met een h na de r) dat terug te voeren is op de Griekse woorden voor stromen, rheo ($\rho\acute{\epsilon}\omega$) en leer of wetenschap, logos ($\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$). Het betekent dus letterlijk stromingsleer. Onder stromen wordt hier (onomkeerbaar) vervormen in de tijd verstaan. Het woord rheology is echter nog geen tachtig jaar oud. Het werd in 1929 bedacht en ingevoerd door Professor Eugene Bingham van Lafayette College in Easton, Pennsylvania in de Verenigde Staten. Bingham's officiële definitie, die nog steeds gehanteerd wordt door het respectabele American Institute of Physics, luidde: 'the science of deformation and flow of matter'. Het is niet zo dat er voor 1929 geen vorm van reologie bestond. Al eeuwen vonden er activiteiten op dit gebied plaats en verwijzingen hiernaar zijn al terug te vinden in de vroegste geschiedenis van beschavingen zo-



Han Slot

Foto: Rob Stork

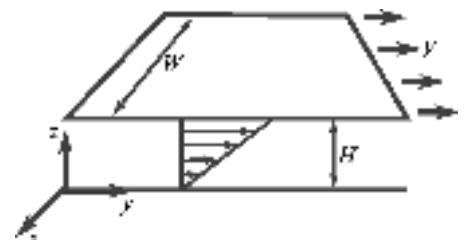
en Stroperigheid

als die van de Sumeriërs, Egyptenaren, en Chinezen. Wel kun je zeggen dat er vanaf 1929 systematisch onderzoek op het gebied van reologie plaatsvindt. Eveneens in 1929 werd de eerste beroepsvereniging van reologen opgericht, the (American) Society of Rheology, die als motto het bekende aforisme *panta rhei* (παντα ῥει) alles stroomt, voert van de griekse filosoof Herakleitos (540–475 AD). Ook zag in dat zelfde jaar het eerste tijdschrift dat volledig op reologie gericht was, het *Journal of Rheology*, het levenslicht. De definitie die Bingham aan reologie gaf spreekt over vervormings- en stromingsgedrag van materie (matter). Strikt genomen is dat een nogal ruime definitie. Persoonlijk ken ik geen reologen die exotische materie zoals quark-gluon plasma's, Bose-Einstein condensaten of donkere materie bestuderen. Meer realistisch is het daarom om te spreken van, zoals ik het in de inleiding al formuleerde, vervormings- en stromingsgedrag van materialen. Volgens Wikipedia is een materiaal een natuurlijke of kunstmatig geproduceerde stof die bestemd is om verwerkt te worden tot bruikbare producten. Het belang en nut van reologie zit hem in de woorden 'verwerkt te worden tot

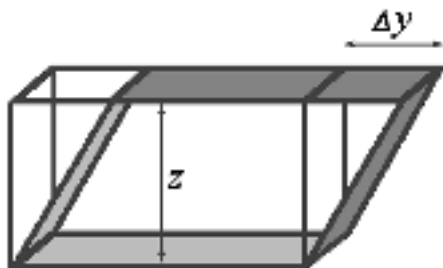
bruikbare producten'. Verwerken van een materiaal impliceert vrijwel altijd vervormen of stromen van een materiaal. De reden waarom de systematische studie van reologie betrekkelijk jong is, houdt verband met de woorden 'materiaal als zijnde een kunstmatig geproduceerde stof'. Nog geen kwart eeuw voordat Bingham het woord rheology bedacht, was met de introductie van bakeliet door de Belgisch-Amerikaanse uitvinder Leo Baekeland het kunststoftijdperk aangebroken. Het is vooral de enorme groei sinds die tijd in het wereldwijde gebruik van kunststoffen geweest, die ervoor gezorgd heeft dat reologie zich als wetenschap heeft weten te ontwikkelen.

Reologie is als deel van de natuurkunde op de eerste plaats een empirische wetenschap, het experiment staat centraal. Niettemin is theorieontwikkeling erg belangrijk in de reologie en hebben we de afgelopen twintig jaar een sterke groei van de numerieke reologie gezien. In de numerieke reologie worden reologische problemen bestudeerd met behulp van computersimulatiemethoden. In tegenstelling tot andere delen van de natuurkunde kent reologie een multidisciplinaire aanhang.

Het is verrassend te zien hoeveel reologie er wereldwijd in de industrie en in de academische wereld bestudeerd wordt door wetenschappers en ingenieurs die oorspronkelijk niet als natuurkundige zijn opgeleid. Veel reologen hebben een chemisch-technologische, werktuigbouwkundige of fysisch-chemische achtergrond. Zo vindt er hier aan de Technische Universiteit Eindhoven veel reologisch onderzoek plaats in de Materials Technology groep van Han Meijer binnen de faculteit Werktuigbouwkunde. Daarnaast werken er ook relatief veel wiskundigen aan reologische problemen, althans buiten Nederland.



Figuur 1 Viscositeit: de bovenste plaat beweegt met constante snelheid ten opzichte van de onderste. Er ontstaat afschuifstroming en de vloeistof oefent een constante kracht uit op de bovenste plaat. De viscositeit is gegeven door de verhouding van afschuifspanning en afschuifsneldheid.



Figuur 2 Een vaste stof ingeklemd tussen parallelle platen zal onder invloed van een niet al te grote afschuifkracht op de bovenste plaat een vervorming (afschuiving, hoekverdraaiing) vertonen die recht evenredig is met de opgelegde afschuifspanning.

Het woord stroperigheid uit de titel refereert in het gewone spraakgebruik aan één van de belangrijkste reologische eigenschappen van een vloeistof, namelijk haar viscositeit. Viscositeit is een maat voor de inwendige wrijving die in een stromend materiaal optreedt. Dit is misschien het beste te illustreren aan de hand van een stationaire afschuifstroming tussen twee parallelle platen (Figuur 1). In een dergelijke afschuifstroming bewegen individuele vloeistoflagen ten opzichte van elkaar. Deze stroming kan gegenereerd worden door de bovenste plaat met een constante snelheid evenwijdig te laten bewegen ten opzichte van de onderste plaat. Hierbij zal de vloeistof een constante kracht op de bovenste plaat uitoefenen. De viscositeit, of preciezer de afschuifviscositeit, wordt dan gegeven door de verhouding van de afschuifspanning en de afschuifsnellheid. De afschuifspanning is de resulterende kracht per eenheid van plaatoppervlak en de afschuifsnellheid is het onderlinge snelheidsverschil van de platen gedeeld door de afstand tussen de platen. Een dergelijke vlakke afschuifstroming is een voorbeeld van wat reologen een viscometrische stroming noemen. Viscometrische stromingen worden in de praktijk veel gebruikt om grootheden zoals een afschuifviscositeit te meten. Als een vloeistof een constante afschuifviscositeit heeft onafhankelijk van de opgelegde afschuifsnellheid dan spreken we van Newtons of lineair viskeus gedrag en van een Newtonse vloeistof. Isaac Newton (1643–1727) was namelijk de eerste die het begrip viscositeit introduceerde. Water is het prototype voorbeeld van een Newtonse vloeistof, maar ook vele andere vloeistoffen zoals allerlei oliën, suikerstroop en meer in het algemeen vloeistoffen die uit kleine moleculen bestaan, vertonen een nagenoeg constante afschuifviscositeit. Water is een zo belangrijke vloeistof op aarde dat de stromingsleer van Newtonse vloeistoffen, de hydrodynamica, zich gescheiden ontwikkeld heeft. Haar definitieve driedimensionale wis-

kundige formulering was al in de negentiende eeuw bekend door het werk van Cauchy (1789–1857) en Navier (1785–1836) in Frankrijk en Stokes (1819–1903) in Engeland. Daartoe moest het door Newton gepostuleerde verband tussen afschuifspanning en afschuifsnellheid, dat voor een vlakke afschuifstroming geldt, zodanig gegeneraliseerd worden dat ook algemene driedimensionale stromingen beschreven konden worden. Het resultaat is een voorbeeld van wat in de reologie als een constitutieve vergelijking bekend staat. Constitutieve vergelijkingen, ook wel reologische toestandsvergelijkingen genoemd, zijn wiskundige verbanden tussen spanning en vervorming die het macroscopische gedrag van een gegeven materiaal in alle mogelijke typen van driedimensionale stromingen of vervormingen beschrijven. Newtons viskeus gedrag wordt overigens in de reologie als een limietgedrag gezien en om die reden valt de hydrodynamica niet onder de paraplu van de reologie.

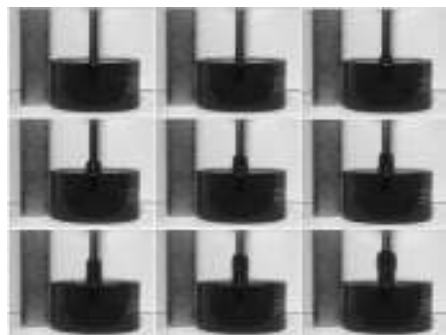
Een ander limietgedrag wordt gevormd door het zogeheten Hookse of lineair elastische materiaalgedrag, genoemd naar een tijdgenoot van Newton, Robert Hooke (1635–1703). Vrijwel alle vaste stoffen vertonen dit gedrag in de limiet van kleine spanningen en kleine vervormingen. Zo zal een vaste stof ingeklemd tussen dezelfde parallelle platen van daarnet onder invloed van een niet al te grote afschuifkracht op de bovenste plaat een vervorming (afschuiving, hoekverdraaiing) vertonen die recht evenredig is met de opgelegde afschuifspanning (Figuur 2). De verhouding van deze afschuifspanning en de resulterende hoekverdraaiing is de zogeheten afschuifmodulus, een materiaal constante vergelijkbaar met de eerder genoemde afschuifviscositeit. Bij Hookse vaste stoffen hebben we dus te maken met een lineair verband tussen afschuifspanning en afschuifvervorming in plaats van tussen afschuifspanning en afschuifsnellheid zoals bij Newtonse vloeistoffen. In de negentiende eeuw werd ook de constitutieve vergelijking voor het gedrag van Hookse lichamen in drie dimensies ontwikkeld. De daarop gebaseerde welbekende lineaire elasticiteitstheorie wordt eveneens niet tot de reologie gerekend.

Waar richt de reologie zich dan wel op? Simpel gezegd op alle mogelijke vormen van vervormings — of stromingsgedrag van materialen die tussen Newtons — en Hooks gedrag in liggen. Zowel Newtons als Hooks gedrag zijn geïdealiseerde vormen van materiaalgedrag. geen enkele vloeistof gedraagt zich onder alle mogelijke omstandigheden viskeus,

zelfs water niet. Evenzeer zijn er geen vaste stoffen die altijd een elastische respons vertonen, ongeacht de grootte van de belasting en al zeker geen respons die altijd evenredig is met deze grootte. Zowel natuurlijke als synthetische materialen laten altijd een combinatie van viskeus en elastisch gedrag zien. Dit gecombineerde gedrag staat bekend als visco-elastisch gedrag en we spreken van visco-elastische materialen. Een visco-elastisch materiaal reageert doorgaans niet instantaan op een externe belasting. Er treedt geen instantane vervorming op wanneer een spanning plotseling opgelegd wordt zoals bij een Hookse vaste stof, en een eventuele stroming stopt ook niet meteen wanneer de spanning weer wordt weggehaald zoals bij een Newtonse vloeistof. Preciezer geformuleerd zal een gegeven visco-elastisch materiaal afhankelijk van de tijdschaal waarop het belast of vervormd wordt, de zogeheten procestijdschaal, een respons vertonen die ergens ligt tussen de respons van een Newtonse vloeistof en die van een Hookse vaste stof.

Bij visco-elastisch gedrag spreekt men vaak in termen van een geheugen die zulk soort materialen lijken te bezitten voor hun vervormingsgeschiedenis. Dit uit zich bijvoorbeeld in het feit dat de actuele spanning, de spanning op dat moment, in een dergelijk materiaal in principe bepaald wordt door alle vervormingen die het materiaal heeft ondergaan in het daaraan voorafgaande verleden. Een Newtonse vloeistof heeft in deze zienswijze geen geheugen, terwijl het geheugen van een Hookse vaste stof perfect blijkt te zijn. Een visco-elastisch materiaal zit daar tussen in met een beperkt, dat wil zeggen vervagend, geheugen. Hoe recenter de vervorming is ondergaan, hoe meer deze bijdraagt tot de actuele spanning. Voor materialen met een vervagend geheugen is de duur en de grootte van de externe belasting of vervorming van groot belang.

Hoe kunnen we nu deze combinatie van viskeuze en elastische respons begrijpen? Ik zal daar later nog even op terugkomen, maar een dergelijk gedrag wijst op het bestaan van een karakteristieke tijdschaal in het materiaal die in het bereik ligt van de procestijdschaal, de tijdschaal waarop de belasting of vervorming zich voltrekt. Deze karakteristieke tijdschaal noemen we materiaal-tijdschaal en vertelt iets over de snelheid waarmee spanningen relaxeren in het materiaal. De dimensieloze verhouding van deze materiaal-tijdschaal en de procestijdschaal wordt in de reologie het Deborahgetal genoemd. Als dit Deborahgetal veel groter dan één is, dan



Illustratie: Detlef Lohse, Universiteit Twente

Figuur 3 Het Weissenbergeffect. De vloeistof klimt tegen een draaiende staaf op.

zal de spanning in het materiaal op de tijdschaal van het vervormingsproces niet kunnen relaxeren. In dat geval vertoont het materiaal een meer elastische respons. Een materiaal dat een vervormingsproces ondergaat waarbij het Deborahgetal veel kleiner is dan één, laat een meer viskeuze respons zien. Water bijvoorbeeld, gedraagt zich nagenoeg altijd viskeus omdat het Deborahgetal altijd klein is vanwege de zeer kleine materiaaltijdschaal voor water (orde van een picoseconde). De naam Deborah, geïntroduceerd door Professor Markus Reiner (1886–1976) van het Technion uit Haifa in Israël, refereert aan het lied van Deborah in het bijbelboek Richteren (vijfde vers, vijfde hoofdstuk) uit het Oude Testament waarin staat: “De bergen stromen voor de Heer.” Ofwel iemand die eeuwig de tijd heeft zal alles zien stromen. Alle materialen zijn dus in feite vloeistoffen.

In de reologie wordt dus vooral het gedrag van materialen bestudeerd waarvan de materiaaltijdschaal binnen het bereik van typische proces tijdschalen ligt en waarbij de optredende Deborahgetallen van orde één zijn. Zulke materialen worden ook wel complexe vloeistoffen genoemd en vele natuurlijke en synthetische materialen kunnen we hiertoe rekenen. Belangrijke categorieën zijn polymeeroplossingen, polymeersmelten, suspensies, emulsies en gels.

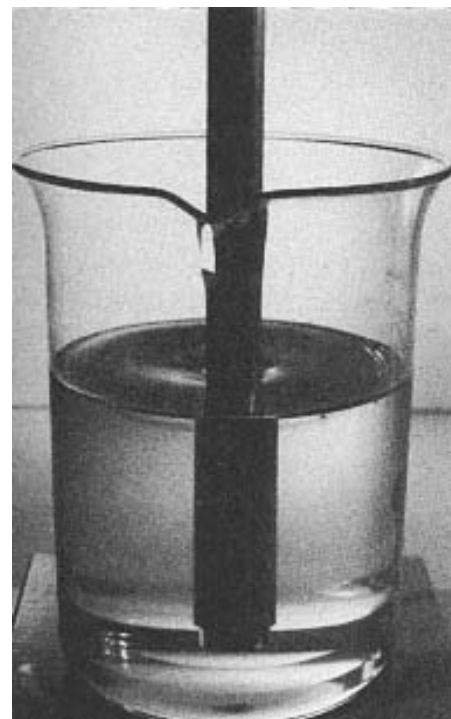
Naast visco-elastische vertonen ook veel complexe vloeistoffen in afschuiving een afschuifviscositeit die verandert met afschuif snelheid. gedrag dat inelasticiteit wordt genoemd. Zo zijn veel polymeeroplossingen en polymeersmelten afschuifverdünnend of shear-thinning: hun afschuifviscositeit wordt kleiner met toenemende afschuif snelheid. Als je zo'n materiaal bijvoorbeeld moet verpompen dan neemt de benodigde druk minder dan evenredig toe bij toenemend debiet. Ook het tegenovergestelde gedrag komt voor. Dispersies van deeltjes in vloeistoffen, zoals bijvoorbeeld verven, laten vaak een af-

schuifverdikkend of shear-thickening gedrag zien waarbij de afschuifviscositeit juist groter wordt met toenemende afschuif snelheid. Voor polymeerverwerking is inelasticiteit zonder twiifel het belangrijkste verschijnsel om rekening mee te houden. In de reologie wordt visco-elastisch en inelastisch gedrag collectief niet-Newton's gedrag genoemd en spreken we van niet-Newtonse vloeistoffen.

Ik wil dit gedeelte over reologie afsluiten door u twee voorbeelden te laten zien van het kwalitatieve verschil in stromingsgedrag tussen een Newtonse en niet-Newtonse vloeistof. Dit soort kwalitatieve verschillen kunnen vaak verklaard worden aan de hand van het optreden van zogeheten normaalspanningen in stromingen van niet-Newtonse vloeistoffen. In het eerste filmpje zien we het bekende Weissenberg- of staafklimeffect dat optreedt als we een roerstaaf ronddraaien in een polymeeroplossing of een polymeersmelt (Figuur 3). De verklaring is dat krimpspanningen, die in omtreksrichting werken, de vloeistof langs de roerstaaf omhoog knijpen. Deze krimpspanningen ontstaan doordat de stroming de polymeermoleculen in omtreksrichting oriënteert. Polymeermoleculen zijn typisch lange flexibele draadvormige moleculen die georiënteerd kunnen worden langs stroomlijnen. Het vergelijkbare experiment met een Newtonse vloeistof laat zien dat tengevolge van traagheid, de vloeistof weggeslingerd wordt van de staaf (Figuur 4). Het tweede voorbeeld betreft een effect dat begrepen kan worden uit het afschuifverdünnende karakter van de vloeistof in kwestie, het zogeheten Kaye-effect. Als een dunne stroom van een afschuifverdünnende vloeistof, in het filmpje een polymeeroplossing, polyisobutyleen in decaline, in een schoteltje met dezelfde vloeistof gegoten wordt dan ontstaat er zo nu en dan een dunne straal (jet) die weer uit het schoteltje omhoog spuit. Dit effect werd in 1963 ontdekt door Alan Kaye en is nog geen twee jaar geleden door Detlef Lohse en zijn medewerkers van de Universiteit Twente verklaard [1]. Zij hebben hier een prachtig filmpje van gemaakt dat opgenomen is in gallery of Fluid Motion van het tijdschrift Physics of Fluids (Figuur 5). Misschien heeft u dit onder de douche wel eens waargenomen tijdens het spelen met de shampoofles.

Relaties tussen wiskunde en natuurkunde

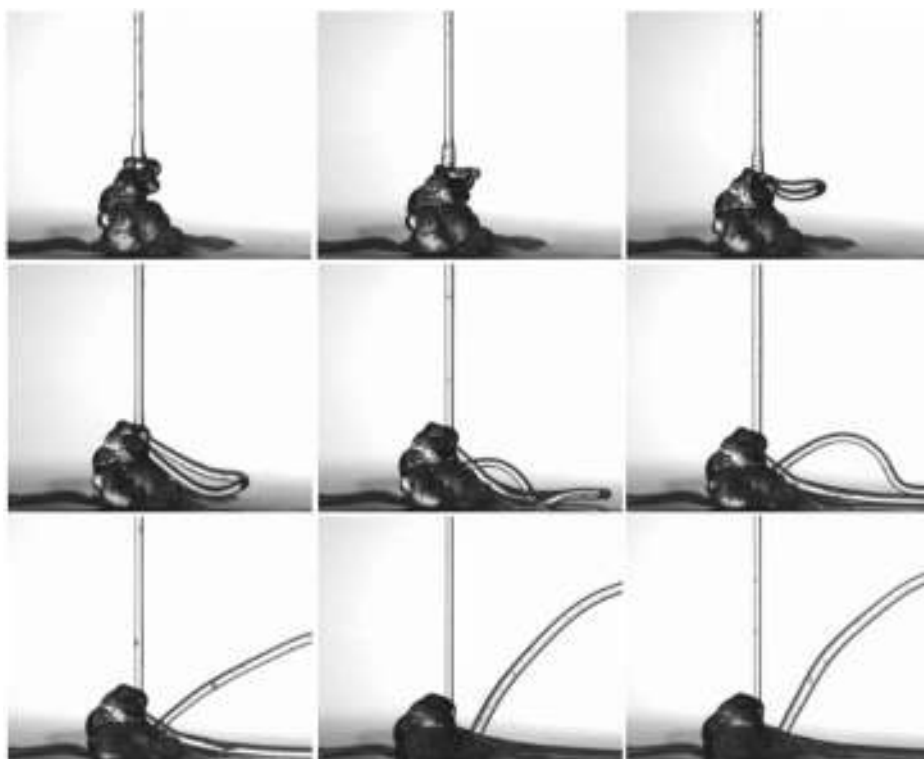
Alvorens ik aan mathematische reologie toe kom, wil ik graag even stilstaan bij de innige relatie die er bestaat tussen wiskunde en natuurkunde. Beide wetenschapsgebieden hebben de afgelopen drieduizend jaar een storm-



Figuur 4 In een Newtonse vloeistof wordt door de draaiende staaf de vloeistof weggeslingerd.

achtige ontwikkeling doorgemaakt. Een ontwikkeling die gekenmerkt wordt door perioden van intense samenwerking en wederzijdse bevruchting, maar ook door perioden van volstrekte onafhankelijke coëxistentie. Niettemin is de natuurkunde voor wiskundigen altijd een rijke bron van toepassingen geweest en heeft het tal van nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde geëntameerd. Ook veel autonoom ontwikkelde wiskunde of wiskunde die oorspronkelijk voor niet-natuurkundige toepassingen ontwikkeld is, heeft uiteindelijk zijn weg gevonden in de natuurkunde. Bekende voorbeelden hiervan zijn differentiaalmeetkunde in de algemene relativiteitstheorie en functionaalanalyse in de quantummechanica. Met de ontwikkeling van de stringtheorie gedurende de laatste decennia, onze ultieme poging om quantummechanica en zwaartekracht te verenigen, zien we zelfs het omgekeerde plaatsvinden. Namelijk dat een ontwikkeling in de fundamentele natuurkunde tot significante voortgang op vele terreinen van de zuivere wiskunde leidt.

Door deze onderlinge vervlechting van wiskunde en natuurkunde zijn er in de loop van de geschiedenis twee categorieën van specialisten ontstaan die zich met theorievorming in de natuurkunde bezighouden, te weten theoretische natuurkundigen en wiskundige natuurkundigen. Het verschil tussen beide categorieën is subtiel. Eenvoudig gezegd laten theoretische natuurkundigen zich bij hun the-



Illustratie: MIT Fluid Dynamics Group

Figuur 5 Het Kaye-effect

orievorming iets meer inspireren door resultaten uit experimenten, terwijl wiskundige natuurkundigen iets meer belang hechten aan de strengheid van hun theoretische bevindingen. Theoretische natuurkundigen hechten daar overigens ook aan, maar maken daarnaast ook gebruik van heuristische en intuïtieve argumenten. In die zin is de typing van collega Jan de Graaf dat 'theoretische natuurkunde gewoon wiskunde is zonder bewijzen' misschien iets te kort door de bocht. Het grootste verschil is wellicht dat theoretische natuurkundigen vooral te vinden zijn op natuurkunde-afdelingen van universiteiten en wiskundige natuurkundigen op wiskunde-afdelingen. Formeel wordt de wiskundige natuurkunde tot de wiskunde gerekend en de theoretische natuurkunde tot de natuurkunde. Voor mij persoonlijk speelt het verschil niet zo.

Wiskundige theorieën uit de natuurkunde appelleren erg sterk aan ons gevoel voor schoonheid en elegantie. Hoewel vrijwel iedereen binnen de gemeenschap het daarover eens is, is elegantie als richtsnoer bij de ontwikkeling van dergelijke theorieën nogal omstreken. Zo is bijvoorbeeld van Ludwig Boltzmann (1844–1906), een beroemd Oostenrijks wis- en natuurkundige, de uitspraak bekend dat 'elegantie slechts weggelegd is voor kleermakers en schoenlappers'.

Toen Paul Dirac (1902–1984), theoretisch

natuurkundige, nobelprijswinnaar en één van de grondleggers van de quantummechanica, eens gevraagd werd wat hij bedoelde met de schoonheid van een wiskundige theorie in de natuurkunde, antwoordde hij dat als de vraagsteller een wiskundige was, hij eigenlijk geen antwoord behoefde, en dat als hij géén wiskundige was, hem dan toch niets zou kunnen overtuigen.

Wiskundige theorieën uit de natuurkunde zijn niet alleen mooi, maar ook uiterst effectief. Veelal gebaseerd op betrekkelijk ruwe experimentele bevindingen uit een beperkt ervaringsdomein, blijkt zo'n uiteindelijke wiskundige formulering vaak in staat om nieuwe verschijnselen erg nauwkeurig te kunnen voorspellen. Verschijnselen die soms ver buiten het ervaringsdomein liggen waarvoor de theorie is ontwikkeld.

Wellicht het bekendste voorbeeld hiervan is de theorie van het elektromagnetisme zoals die uiteindelijk in het midden van de negentiende eeuw door de Schotse wis- en natuurkundige James Clerk Maxwell (1831–1879) is geformuleerd. De oorspronkelijke opzet was om elementaire elektrische en magnetische verschijnselen, die eerder door Michael Faraday (1791–1867) bestudeerd waren, te beschrijven. Niettemin voorspelde Maxwell met deze theorie het bestaan van elektromagnetische golven die een paar jaar na zijn dood door Heinrich Hertz (1857–1894) experimen-

teel aangetoond werden.

Eugene Wigner (1902–1995), eveneens theoretisch natuurkundige en nobelprijswinnaar, sprak in een zeer bekend geworden essay uit 1960 [2] over de onredelijke effectiviteit van wiskunde in de natuurwetenschappen. Wiskunde was volgens hem zo onredelijk effectief dat we rustig van een mysterie kunnen spreken. Nu zouden we geen exacte wetenschappers zijn als we daar tevreden mee zouden zijn. Als er dan zo'n nauwe relatie blijkt te bestaan tussen wiskunde en natuurkunde dan moeten we toch kunnen begrijpen waar deze relatie vandaan komt.

Een hint in de richting van een verklaring werd al gegeven door de grote Italiaanse geleerde Galileo Galilei (1564–1642). Van hem is de ietwat cryptische uitspraak bekend dat het boek van de natuur in de taal der wiskunde geschreven is. In feite was dit ook het Leitmotiv van de Pythagoreërs uit de Griekse oudheid. Dit idee is in de laatste twintig jaar verder ontwikkeld in een wetenschapsfilosofische stroming die bekend staat onder de naam Structureel Realisme [3]. Wellicht de meest radicale uitwerking van dit idee is recent gegeven door de Amerikaan Max Tegmark, hoogleraar theoretische natuurkunde op het Massachusetts Institute of Technology, met de introductie van zijn zogeheten Wiskundige Universum Hypothese (WUH). In het kort komt het er op neer dat volgens hem ons universum, ons heelal, in feite een welgedefinieerde vorm van wiskunde is, een wat hij noemt, wiskundige structuur. Een wiskundige structuur is volgens hem een verzameling abstracte entiteiten met onderlinge relaties, een equivalentie klasse van beschrijvingen. In een vorig jaar verschenen essay [4] beargumenteert hij dat deze WUH volgt uit wat hij de Externe Werkelijkheids Hypothese (EWH) noemt. Deze laatste hypothese stelt dat er een externe fysische werkelijkheid bestaat buiten de mens om. Voor mij persoonlijk eerder een vaststelling dan een hypothese. In de theoretische natuurkunde bestaat het serieuze concept van de zogeheten Allesomvattende Theorie ook bekend onder de naam Theorie van Alles (TVA). Deze TVA, die we overigens nog niet kennen, beschrijft hoe onze fysische werkelijkheid opereert. Niet waarom de werkelijkheid is zoals zij is, want de TVA omvat natuurlijk geen informatie over beginvoorwaarden van het universum. Volgens Tegmark betekent dit dus dat als de EWH waar is, deze TVA volledig uit te drukken moet zijn in niet-menselijke termen en concepten, met andere woorden volstrekt wiskundig moet zijn. Het is duidelijk dat Tegmark geen aanhanger is van de ideeën

van onze grootste wiskundige Luitzen Egbertus Brouwer (1881–1966). Voor mij is het in ieder geval een serieuze poging om deze innige relatie tussen wiskunde en natuurkunde beter te begrijpen.

Mathematische reologie

Na het voorafgaande zal het u niet verbazen dat wiskunde ook een belangrijke rol speelt in de reologie als onderdeel van de natuurkunde. U trekt wellicht ook de conclusie dat mathematische of wiskundige reologie dat deel van de wiskundige natuurkunde moet zijn dat zich op de reologie richt. Daar heeft u gedeeltelijk gelijk in. Helaas, theorievorming in de reologie kan zich niet, of nog niet, alleen bedienen van wiskundig rigoreuze methoden en redeneerwijzen. Daarom moet de mathematische reologie evenzeer tot de theoretische natuurkunde gerekend worden en bevindt het vakgebied zich ook in deze zin echt tussen strengheid en stroperigheid in.

Hoewel je iedere toepassing van wiskunde in de reologie onder mathematische reologie zou kunnen laten vallen, zijn er in feite twee kernactiviteiten te onderscheiden. Eerder in mijn inleiding over reologie heb ik kort het begrip constitutieve vergelijking genoemd. Een constitutieve vergelijking of constitutief model is een wiskundig verband tussen spanning en vervorming die het macroscopische gedrag van een gegeven materiaal in alle mogelijke typen van driedimensionale stromingen of vervormingen beschrijft. Het ontwikkelen van constitutieve vergelijkingen, ook wel constitutieve modelvorming genoemd, is één van die kernactiviteiten en vormt naar mijn mening het centrale onderwerp van de mathematische reologie. De tweede kernactiviteit betreft de wiskundige analyse van stromingen opgevat als beginwaarde-randwaarde probleem in de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen.

Constitutieve modellen behoren tot het domein van de macrostructurele of continuümreologie. In dit onderdeel van de reologie staat het macroscopisch reologische gedrag van materialen centraal en probeert men dit te beschrijven binnen de kaders van de continuümmechanica. Materialen worden in de macrostructurele reologie opgevat als homogene continua met zekere eigenschappen.

De toepasbaarheid van een constitutieve vergelijking in alle mogelijke typen van driedimensionale stromingen of vervormingen vereist dat zo'n soort vergelijking geformuleerd dient worden in een vorm die onafhankelijk is van het te gebruiken coördinatenstelsel. Wiskundig gezien betekent dit dat alle re-

levante macroscopische grootheden zoals de eerder genoemde spanning en vervorming, door zogeheten tensoren gerepresenteerd moeten worden. Een tensor is een wiskundig object dat niet verandert als we van coördinatenstelsel wisselen bij het beschrijven van bijvoorbeeld zo'n driedimensionale stroming. Een belangrijke klasse van constitutieve vergelijkingen wordt gevormd door constitutieve vergelijkingen van het zogeheten differentiaaltype. Een dergelijke constitutieve vergelijking bestaat uit een mogelijk niet-lineair verband waarin naast de spannings- en vervormingstensor, ook expliciet de tijdsverandering van ieder van deze tensoren voorkomt. Een dergelijke constitutieve vergelijking heeft dus de vorm van een partiële differentiaalvergelijking. In de eerste helft van de vorige eeuw waarin de continuümmechanica de reologie nog domineerde, trachtte men veelal zulk soort constitutieve vergelijkingen te ontwikkelen via formele procedures [5]. Men postuleerde mogelijke verbanden tussen spanning, vervorming en hun tijdsverandering aan de hand van een aantal zogeheten formuleringsprincipes zoals bijvoorbeeld het localiteitsprincipe of het principe van de materiële objectiviteit. Dit laatste principe stelt dat het reologische gedrag van een materiaal niet mag afhangen van de absolute bewegingstoestand van dat materiaal in de ruimte. De viscositeit gemeten in rust verandert niet als we de meting in een draaimolen uitvoeren. Echter, deze formuleringsprincipes bepalen zo'n constitutieve vergelijking niet volledig. Meestal resteren er nog een beperkt aantal vrije materiaalparameters die dan vervolgens langs experimentele weg bepaald moeten worden. Het grote probleem van deze fenomenologische aanpak is dat de verscheidenheid aan mogelijke toegestane constitutieve vergelijkingen veel te groot is en dat het experimenteel extreem moeilijk is om hier tussen te discrimineren. De beschrijving van niet-Newtons gedrag vereist namelijk constitutieve modellen die niet-lineair zijn en daar zijn er eenvoudigweg te veel van. Het simpelste voorbeeld van zo'n niet-lineair model is een constitutieve vergelijking die inelastisch gedrag beschrijft zoals de bekende 'Power-Law' wet van Ostwald en de Waele [6] in afschuiving

$$\sigma = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad , \quad \eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \dot{\gamma}^{n-1}$$

met σ de spanning en $\dot{\gamma}$ de afschuifsnellheid. Voor $n < 1$ beschrijft dit afschuifverdundend gedrag en voor $n > 1$ afschuifverdikkend gedrag. Als $n = 1$ dan resulteert Newtons ge-

drag. Het optreden van normaalspanningen in stromingen, zoals in het voorbeeld van het Weissenbergeffect, is trouwens karakteristiek voor niet-lineair constitutief gedrag.

Om een stroming van een gegeven materiaal in een bepaald domein van de driedimensionale ruimte te beschrijven hebben we naast een constitutieve vergelijking ook nog aantal andere vergelijkingen nodig en moeten we begin- en randvoorwaarden specificeren: we moeten de beginsituatie vastleggen en aangeven wat er op de randen van het stromingsdomein gebeurt. Deze andere vergelijkingen die we nodig hebben zijn vergelijkingen die uitdrukken dat er in de stroming geen materiaal kan verdwijnen, dat er overal in het materiaal dynamisch krachtenevenwicht heerst en dat er nergens energie verloren kan gaan. De gedaante van deze drie laatste behoudswetten is in tegenstelling tot het constitutieve model onafhankelijk van het te beschouwen materiaal. Deze behoudswetten worden meestal ook als partiële differentiaalvergelijking geschreven. De volledige wiskundige beschrijving van zo'n stroming heeft daarmee de gedaante van een zogeheten beginwaarde-randwaarde probleem van een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen in drie dimensies. Het bestuderen van dit soort problemen vormt, zoals gezegd, de andere kernactiviteit van de mathematische reologie. Echter door het niet-lineaire karakter van de constitutieve vergelijkingen komen we niet meer uit op de welbekende Navier-Stokes vergelijkingen die voor Newtonse vloeistoffen gelden. Van dit Navier-Stokes probleem is wiskundig veel bekend. Zo is er een redelijk goed ontwikkelde theorie over existentie van oplossingen van deze vergelijkingen, ook al is het probleem van globale existentie in drie dimensies, een van de befaamde Millenium Prijs Problemen [7], nog steeds niet opgelost. Helaas kan dit niet gezegd worden van de generalisatie van deze Navier-Stokes vergelijkingen zoals die optreden bij niet-Newtonse vloeistoffen. Met name van beginwaarde-randwaarde problemen van visco-elastische vloeistoffen zijn weinig strenge resultaten bekend. Vrijwel alles dat we weten over bijvoorbeeld existentie van oplossingen is alleen bewezen voor constitutieve modellen die het gedrag van een zwak elastische verstoorde Newtonse vloeistof beschrijven [8]. In dit deel van de mathematische reologie is er weinig voortgang geboekt de laatste jaren. Omdat wiskundig rigoreuze resultaten alleen bewezen kunnen worden voor de eenvoudigste constitutieve modellen, modellen die vaak tal van fysische artefacten vertonen

of niet in staat zijn om experimenteel waargenomen gedrag te beschrijven, is de interesse van de reologische gemeenschap voor deze activiteit zeer gering. Daar komt bij dat het oorspronkelijke concept van constitutieve vergelijking uit de continuümmechanica enigszins in onbruik is geraakt en vervangen door een nieuwer concept dat meer op microstructuur geënt is. Ik doel hierbij op de ontwikkeling en het gebruik van constitutieve vergelijkingen waarin naast de oorspronkelijke spannings- en vervormingsvariabelen ook variabelen voorkomen die met de microstructuur verband houden, zoals macrovariabelen die bijvoorbeeld de lokale oriëntatie van de microstructuur representeren. Deze nieuwere constitutieve modellen worden large state space descriptions genoemd en de hiermee te associëren beginwaarde-randwaarde problemen vormen nagenoeg een volstrekt wiskundig terra incognita.

Niet-evenwichtsthermodynamica

Het ontwikkelen van constitutieve modellen op basis van criteria en overwegingen die afkomstig zijn uit de niet-evenwichtsthermodynamica stamt al uit de glorie-dagen van de continuümmechanica. Sinds zo'n tien jaar, echter, is daar een duidelijke opleving van te zien in de mathematische reologie. Ik doel hier in het bijzonder op de ontwikkeling van het zogeheten GENERIC formalisme, of de GENERIC theorie door Hans Christian Öttinger van de Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich, Zwitserland en Miroslav Grmela van de École Polytechnique de Montréal in Canada [9]. GENERIC is een acroniem en staat voor general Equation for the Non-Equilibrium Reversible Irreversible Coupling. Een stromend materiaal bevindt zich niet in thermodynamisch evenwicht en ondergaat wat we noemen een onomkeerbaar of irreversibel proces. Ook warmtegeleiding is een voorbeeld van zo'n proces. De niet-evenwichtsthermodynamica bestudeert dit soort tijdsevolutieprocessen van materiële systemen en bevat de reologie als deelgebied. Deze processen worden beschreven door zogeheten kinetische vergelijkingen. De GENERIC theorie vormt in feite een metatheorie van dit soort kinetische vergelijkingen in de zin dat het hun wiskundige structuur voorschrijft. Een structuur die zodanig is dat deze processen niet in strijd zijn met één van de allerheiligste principes uit de natuurkunde, te weten de tweede hoofdwet van de thermodynamica. Hoewel ik het eens ben met de beroemde Engelse schrijver en natuurkundige C.P. Snow (1905–1980) die ooit stelde dat iedereen Shake-

speare moet hebben gelezen, maar eveneens zou moeten weten wat de tweede hoofdwet van de thermodynamica inhoudt, zal ik hierover niet te veel uitweiden. Kort gezegd geeft deze tweede hoofdwet aan welke soort processen van materiële systemen toegestaan zijn. Zo stroomt warmte alleen van een plaats met een hogere temperatuur naar een plaats met een lagere temperatuur en niet omgedraaid. We kunnen een grootheid definiëren, entropie genaamd, die in dit soort processen altijd in waarde moet toenemen. Deze entropie die we aanduiden met de letter S is een centrale grootheid in het GENERIC formalisme. Naast entropie speelt ook de energie van het systeem, die we met de letter E weergeven, een centrale rol hierin.

Het GENERIC formalisme is vooral geschikt om toegepast te worden op materiële systemen die binnen die eerder genoemde 'large state space description' klasse vallen. Als we nu alle toestandsvariabelen collectief weergeven met de letter x dan schrijft het GENERIC formalisme voor dat de kinetische vergelijking, de eigenlijke GENERIC, de volgende vorm dient te bezitten:

$$\frac{dx}{dt} = L(x) \cdot \frac{\delta E(x)}{\delta x} + M(x) \cdot \frac{\delta S(x)}{\delta x}.$$

In het rechterlid van deze vergelijking zien we twee bijdragen staan die gezamenlijk de verandering van x in de tijd t teweeg brengen. De eerste term, de reversibele bijdrage, is evenredig met de verandering van de energie $E(x)$ met de toestand x en de irreversibele bijdrage, de tweede term, is evenredig met de verandering van de entropie $S(x)$ met de toestand x . Deze 'evenredigheidsfactoren' $L(x)$ en $M(x)$, die respectievelijk Poisson matrix en dissipatieve matrix worden genoemd, spelen eveneens een centrale rol in de GENERIC theorie. Deze beide matrices moeten aan bepaalde condities voldoen om er voor te zorgen dat de bovenstaande GENERIC zowel behoud van energie respecteert als de tweede hoofdwet niet schendt. Wiskundig worden deze beide eisen als volgt uitgedrukt:

$$\frac{dE(x)}{dt} = 0, \quad \frac{dS(x)}{dt} \geq 0.$$

Als we nu voor een concreet systeem het GENERIC formalisme willen gebruiken om de juiste kinetische vergelijking te vinden dan moeten we x kennen, ofwel welke macrovariabelen nodig zijn om het systeem buiten evenwicht te beschrijven. Dit centrale probleem van de niet-evenwichtsthermo-

dynamica lost de GENERIC theorie niet voor ons op. Voor een systeem in thermodynamisch evenwicht weten we wel welke deze variabelen zijn, maar daarbuiten tasten we in het duister.

Niet weten wat x precies voorstelt betekent ook dat de GENERIC theorie weliswaar een kinetische vergelijking suggereert, maar in feite niet specificeert met welk type vergelijking we in wiskundig opzicht te maken hebben. Afhankelijk van de aard van het systeem dat we beschouwen kunnen dit gewone differentiaalvergelijkingen, partiële differentiaalvergelijkingen of nog meer exotische vergelijkingen zijn. Zelfs al kennen we x dan moeten we nog steeds $E(x)$, $S(x)$, $L(x)$ en $M(x)$ bepalen. Met name bepaling van de laatste twee grootheden is niet triviaal en er zijn sterke aanwijzingen dat de condities waaraan de Poisson en dissipatieve matrix moeten voldoen, niet restrictief genoeg zijn om deze beide matrices volledig te bepalen. Het formalisme is daarom tot nog toe vooral in situaties gebruikt waarin x bekend is en we ook een kinetische vergelijking voor x hebben. In zulke gevallen kunnen we controleren of deze kinetische vergelijking niet strijdig is met de tweede hoofdwet, door na te gaan of de vergelijking in de GENERIC vorm te schrijven is.

Een belangrijk resultaat is daarom dat de vorm van de GENERIC afgeleid kan worden uit de microscopische dynamica van het materiële systeem. Zo'n reductieprocedure levert tevens expliciete microscopische uitdrukkingen op voor de energie, de entropie en de twee koppelmatrixes en opent daarmee de weg voor de ontwikkeling van nieuwe kinetische vergelijkingen.

Er is ook een versie van het GENERIC formalisme waarin thermische fluctuaties meegenomen kunnen worden. In samenwerking met Martien Hulsen uit de groep van Han Meijer, gebruik ik deze versie van GENERIC om generalisaties van de welbekende 'Fluctuerende Hydrodynamica' te ontwikkelen die thermische fluctuaties in visco-elastische media beschrijven. Het GENERIC formalisme is zeer geschikt om de correcte statistische eigenschappen van deze fluctuaties te vinden. Deze stochastische continuümtheorieën willen we gebruiken voor stromingssimulaties van nanocomposietssystemen, polymersmelten waarin submicron deeltjes zijn gedispergeerd.

Microstructurele reologie

Dit laatste voorbeeld brengt ons in feite al bij die andere methodologische aanpak uit de reologie, de zogeheten microstructurele reo-



Figuur 6 Een entangled systeem

logie. Hoewel de continuümmechanica de reologie lange tijd gedomineerd heeft is het accent de afgelopen vijftig jaar toch duidelijk verschoven richting deze microstructurele reologie. In deze aanpak die misschien beter mesoscopische reologie zou kunnen heten, probeert men het macroscopisch reologisch gedrag van een materiaal te begrijpen op grond van de veranderingen in de microstructuur tengevolge van stroming. Wat er precies met deze microstructuur bedoeld wordt hangt van het te bestuderen type materiaal af. In polymeersmelten en polymeeroplossingen bijvoorbeeld, wordt onder microstructuur het geheel van ruimtelijke conformaties van de polymeermoleculen verstaan. In deeltjesdispersies daarentegen, refereert microstructuur aan het geheel van ruimtelijke posities van de gedispergeerde deeltjes. Het uitgangspunt in de microstructurele reologie is de dynamica van de microstructuur. De materiaal-tijdschaal waar ik eerder over sprak is een voorbeeld van een zogeheten relaxatietijd. Zo'n karakteristieke tijd wordt geassocieerd met een relaxatieproces van de microstructuur. Als in dit soort relaxatieprocessen veranderingen in de microstructuur optreden op een karakteristieke lengteschaal die van de orde van een micron of kleiner is, dan spelen thermische fluctuaties een rol en moeten die verdisconteerd worden in de dynamica. De theorie van de Brownse beweging speelt daarom een belangrijke rol in de microstructurele reologie en maakt dat deze discipline tot de niet-evenwichts statistische mechanica gerekend wordt.

Oplossingen en smelten van lineaire polymeren zijn verreweg het meest bestudeerd in de microstructurele reologie. Als het moleculaire gewicht, de 'lengte' van de polymeren, in zo'n oplossing of smelt voldoende groot is dan raken de polymeermoleculen onderling in de knoop, *entangled* zoals we zeggen. U moet bij zo'n entangled systeem maar even aan een bord gekookte spaghetti denken (Figuur 6). Zo'n in de knoop geraakt systeem als geheel gedraagt zich als een tijdelijk elastisch netwerk dat spanning op kan bouwen en weer kan relaxeren. Individuele polymeren in een entangled systeem zijn weliswaar niet echt verknoopt, maar verliezen wel veel van hun beweeglijkheid. Wat hun in feite alleen nog resteert, is te bewegen langs hun eigen contour, zoals een slang dan doet. Deze vorm van bewegen wordt reptatie genoemd en is afgeleid van reptare, het Latijnse woord voor kruipen. Pierre Gilles de Gennes (1932–2007), Frans theoretisch natuurkundige en nobelprijswinnaar, heeft dit concept wiskundig verder uitgewerkt en op grond hiervan een Brownse polymeerdynamica geformuleerd. Het beeld dat achter deze dynamica schuil gaat is dat van een polymeerketen die kan bewegen in een buis gevormd door andere ketens uit zijn omgeving (Figuur 7). De theoretische natuurkundigen Masao Doi uit Japan en Sir Sam Edwards uit Engeland hebben vervolgens met behulp van deze polymeerdynamica een theorie geformuleerd voor het reologische gedrag van geconcentreerde polymeeroplossingen en smelten. Deze theorie, die bekend staat als de buistheorie van Doi, Edwards en De Gennes [10], was de eerste succesvolle theorie in de microstructurele reologie. De theorie is later door vele reologen uitgebreid met additionele spanningsrelaxatie mechanismen en toegepast op onder meer smelten van simpel vertakte polymeren, zoals ster- en kampolymeren. Mijn eigen interesse gaat vooral uit naar het verder ontwikkelen van deze theorie voor smelten van algemene vertakte polymeren en van geconcentreerde oplossingen van semiflexibele vloeibare krystallijne polymeren. Voor dat laatste on-



Figuur 7 Buis gevormd door andere ketens uit de omgeving.

derwerp ben ik momenteel druk op zoek naar een goede promovendus. In 2005 is Mikhail Tchesnokov bij Jaap Molenaar en mij in Twente gepromoveerd op modelvorming van polymerslip aan vaste oppervlakken op basis van dit soort buistheorieën.

Onderwijs

Onderwijs en in het bijzonder service-onderwijs is voor onze faculteit van levensbelang. Ook ik draag daar graag mijn steentje aan bij. Ik geef momenteel het analysevak 'functies van meerdere variabelen' aan eerstejaars natuurkunde studenten. Dit was even wennen voor mij omdat ik nooit college had gegeven aan zulke jonge mensen. Aan de UT was dit voorrecht alleen voor zeer ervaren docenten weggelegd. Ik heb er al veel van geleerd. Verder heb ik ruim een jaar proef gedraaid met een reeks colleges over GENERIC binnen de vakgroep. Dit wordt een keuzecollege voor gevorderde studenten van onze eigen faculteit en studenten uit de faculteiten Werktuigbouwkunde, Scheikundige Technologie en Technische Natuurkunde. Een gecondenseerde vorm hiervan zal ook aangeboden worden aan promovendi van het J.M. Burgerscentrum, de landelijke onderzoeksschool op het gebied van stromingsleer, waar ik ook in participeer.

Referenties

- 1 Michel Versluis, Cor Blom, Devaraj van der Meer, Ko van der Weele and Detlef Lohse, 'Leaping shampoo and the stable Kaye effect', *J. Stat. Mech.* (2006) P07007.
- 2 Eugene P. Wigner, 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences', *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), no. 1, 1–14.
- 3 James Ladyman, 'What is Structural Realism?', *Stud. Hist. Phil. Sci.*, Vol. 29, No. 3, pp. 409–424, 1998.
- 4 Max Tegmark, 'The Mathematical Universe', *Found. Phys.* 10.1007/s10701-007-9186-9 (2007).
- 5 zie bijvoorbeeld A.S. Lodge, 'On the description of rheological properties of viscoelastic continua', *Rheol. Acta*, 11, 106–118, 1972 of J.g. Oldroyd, 'An approach to non-Newtonian fluid mechanics', *J. non-Newtonian Fluid Mech.*, 14, 9–46, 1984.
- 6 W. Ostwald, *Kolloid-Z.*, 36, 99–117 (1925); A. de Waele, *Oil Color Chem. Assoc. J.* 6, 33–88 (1923).
- 7 <http://www.claymath.org/millennium/> of ook Keith Devlin, *The Millennium Problems*, Granta Books, London, ISBN 1-86207-735-5, 2002.
- 8 zie bijvoorbeeld Michael Renardy, 'Mathematical Analysis of Viscoelastic Flows', in *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, No. 73, SIAM, Philadelphia, ISBN 0-89871-457-5, 2000.
- 9 zie bijvoorbeeld Hans Christian Öttinger, *Beyond Equilibrium Thermodynamics*, Wiley Interscience, New Jersey, ISBN 0-471-6658-0, 2005.
- 10 M. Doi and S.F. Edwards, 'The Theory of Polymer Dynamics', in *International Series of Monographs on Physics*, No. 73, Clarendon Press, Oxford, ISBN 0-19-851976-1, 1986.

Johan Bosman

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

jgbosman@math.leidenuniv.nl

Onderzoek

Modulaire vormen en berekeningen in Galoistheorie

Twee onderwerpen binnen de getaltheorie die van fundamenteel belang zijn bij het bestuderen van nulpunten van polynomen zijn Galoistheorie en modulaire vormen. In dit artikel geeft Johan Bosman, promovendus van Bas Edixhoven, een indruk van hun verband. In het bijzonder besteedt hij aandacht aan computationele aspecten, die optreden bij het berekenen van voorbeelden en bij het schatten van de groei van de machtreelscoëfficiënten van modulaire vormen.

Op de middelbare school leert iedereen een kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen met behulp van de abc -formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Voor vergelijkingen van graad 3 bestaat er een soortgelijke formule, in 1545 gepubliceerd door Cardano, na het gestolen te hebben van Tartaglia: de nulpunten van het polynoom $ax^3 + bx^2 + cx + d$ zijn gelijk aan

$$x = \sqrt[3]{C + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{C - \sqrt{D}} - \frac{b}{3a},$$

waarbij

$$C = \frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a},$$

$$D = C^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3$$

en de derdemachtswortels geschikt gekozen

dienen te worden. We zien dat de nulpunten van tweedegraads- en derdegraadspolynomen gegeven kunnen worden als uitdrukkingen in de coëfficiënten, waarbij we de operaties $+$, $-$, $\cdot$, $/$ en $\sqrt[n]{}$ gebruiken. We zullen in zo'n geval zeggen dat het polynoom *oplosbaar* is. We kunnen ons afvragen of dit ook geldt voor polynomen van willekeurige graad. Ferrari, een student van Cardano, had in 1540 al aangetoond dat vierdegraadsvergelijkingen oplosbaar zijn, onder de voorwaarde dat derdegraadsvergelijkingen oplosbaar zijn.

Galoistheorie

Naar een formule voor de nulpunten van polynomen van graad 5 en hoger heeft men sindsdien eeuwenlang tevergeefs gezocht. In 1799 vond de Italiaanse wiskundige Ruffini zelfs een bewijs dat zo'n formule in het algemeen niet bestaat! Niemand geloofde hem echter, totdat Abel in 1826 eveneens een bewijs vond. Zelfs vandaag de dag zijn er nog ongelovige thomassen die, uiteraard zonder

succes, formules voor oplossingen van vijfdegraadsvergelijkingen proberen te vinden. Laten we hierbij wel opmerken dat het niet zo is dat geen enkele vergelijking van graad 5 of hoger opgelost kan worden. De nulpunten van $x^5 - x - 1$ kun je weliswaar niet uitdrukken in elementaire formules, maar die van $x^5 - 2$ wel: dat zijn alle waarden van $\sqrt[5]{2}$. In 1832 vond Galois een nieuw bewijs voor het feit dat vergelijkingen vanaf graad 5 niet op te lossen zijn met $+$, $-$, $\cdot$, $/$ en $\sqrt[n]{}$. Het bewijs van Galois is zeer interessant omdat het veel meer inzicht en structuur aan een polynoom geeft dan alleen 'ja, het kan' of 'nee, het kan niet'. Laten we eens kijken hoe Galois het deed. Kies je favoriete polynoom

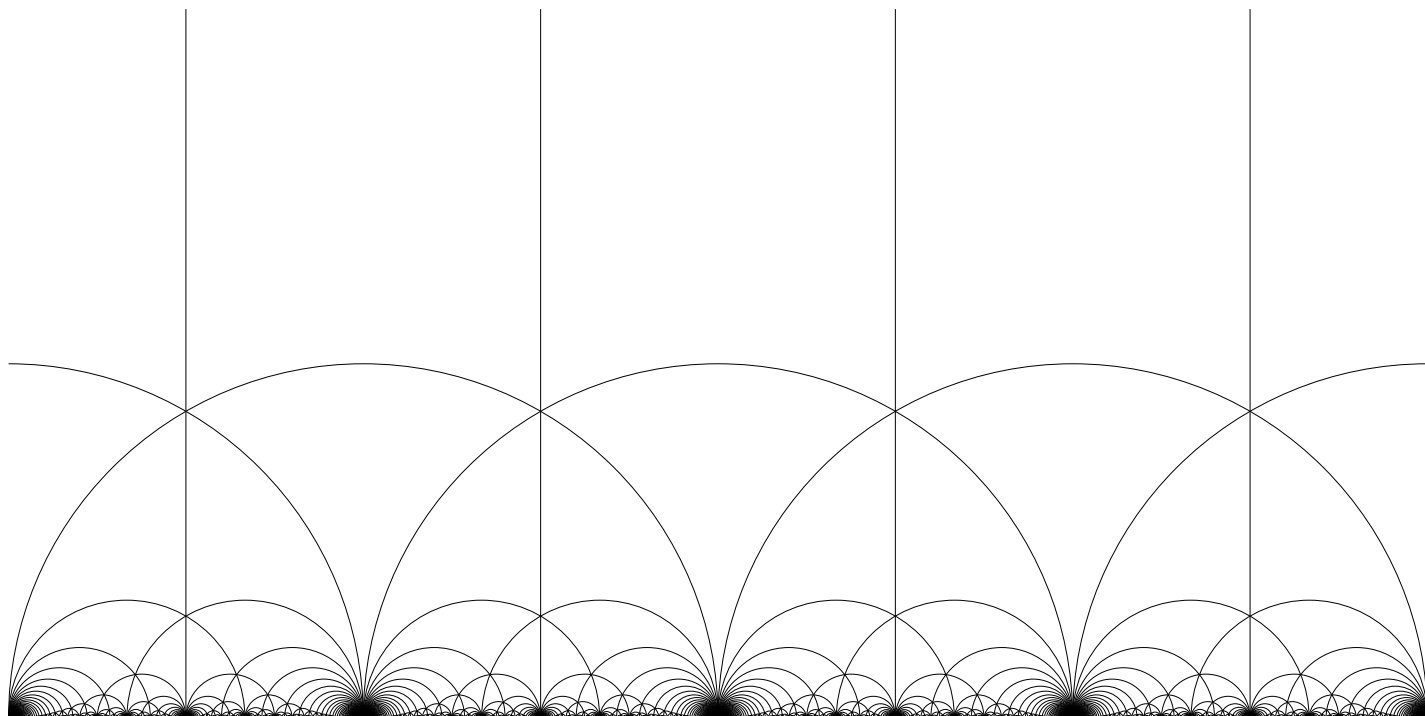
$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbf{Q}[x]$$

met nulpunten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$.

We zullen veronderstellen dat de nulpunten *verschillend* zijn; dit is geen grote belemmering want we kunnen meervoudige factoren gemakkelijk vinden. Er zijn allerlei relaties tussen de nulpunten. Zo kunnen we het product uitwerken in de identiteit

$$a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) = a_n x^n + \dots + a_0$$

en dan vinden we bij elke coëfficiënt een sym-



Figuur 1 Bovenhalfvlak met betegeling

metrische relatie, bijvoorbeeld

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\text{en } \alpha_1 \dots \alpha_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}.$$

Afhankelijk van het polynoom kunnen er meerdere relaties tussen de nulpunten zijn dan degenen die je direct uit de symmetrische relaties kunt afleiden. Galois kwam op het idee om de groep van alle permutaties van de nulpunten te bekijken die alle relaties tussen deze nulpunten vasthouden; deze groep heet vandaag de dag de *Galoisgroep* van het polynoom P en noteren we met $\text{Gal}(P)$. Als er geen andere relaties tussen de nulpunten zijn dan de symmetrische, dan zal $\text{Gal}(P)$ uit alle mogelijk permutaties tussen de nulpunten bestaan en dus isomorf zijn met S_n , de volledige symmetrische groep van graad n . Als er echter meer relaties zijn, dan leggen deze restricties op de permutaties op en zal $\text{Gal}(P)$ dus kleiner zijn.

Laten we als voorbeeld het polynoom $P = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ bekijken. De nulpunten in $\mathbb{C}$ zijn de vijfde machts eenheidswortels (behalve 1 zelf):

$$P = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_4)$$

waarbij $\alpha_k = e^{2\pi i k/5}$.

We zien onmiddellijk de relaties $\alpha_k = \alpha_1^k$. Als $\sigma \in \text{Gal}(P)$ deze relaties wil behouden dan

zal dus moeten gelden

$$\sigma(\alpha^k) = \sigma(\alpha_1)^k.$$

Dit betekent dat σ vastligt op het moment dat we $\sigma(\alpha_1)$ kennen. Nu moet α_1 naar een van de andere vier nulpunten worden gestuurd, dus $\text{Gal}(P)$ zal in dit geval hooguit 4 elementen hebben. Het kan ook bewezen worden dat elk nulpunt kan optreden als beeld van α_1 dus de Galoisgroep heeft 4 elementen en is dus niet de groep van alle permutaties van de 4 nulpunten die 24 elementen heeft.

De oplosbaarheid van een polynoom P kan nu worden uitgedrukt in abstracte eigenschappen van de Galoisgroep $G = \text{Gal}(P)$. We gaan een rij

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \dots$$

van ondergroepen van G maken aan de hand van het volgende recept: Begin met $G_1 = G$ en neem daarna telkens de *commutator ondergroep*:

$$G_{i+1} = [G_i, G_i] := \langle ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G \rangle.$$

Men kan laten zien dat P oplosbaar is dan en slechts dan als ergens in deze rij de triviale groep voorkomt. We hevelen de terminologie over en zeggen dat een groep G die hieraan voldoet *oplosbaar* is.

Als G zelf bijvoorbeeld commutatief is, dan

is $[G, G]$ triviaal, dus polynomen met een commutatieve Galoisgroep zijn oplosbaar. Permutatiegroepen van graad hooguit 4 blijken allemaal oplosbaar te zijn, maar voor $n \geq 5$ bestaan er niet-oplosbare groepen: de groep S_n is hier een voorbeeld van.

Een groep die erg cruciaal is in deze context is $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, de automorfismengroep van het lichaam van algebraïsche getallen. Het is een topologische groep waarin de Galoisgroepen van alle polynomen in $\mathbb{Q}[x]$ gecodeerd zitten. Voor eindige groepen G is het geven van een polynoom met Galoisgroep G (grofweg) equivalent met het geven van een continu surjectief homomorfisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow G$. De groep $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ is binnen deze theorie dus een soort allesomvattend object en daarmee ook meteen heel moeilijk te begrijpen.

Modulaire vormen en Galoisrepresentaties

Modulaire vormen spelen een belangrijke rol in de getaltheorie. Voor een goed overzichtsartikel met over de materie verwijzen wij graag naar [2] en de vele referenties die daarin staan. Grofweg zijn modulaire vormen holomorfe functies op het complexe bovenhalfvlak die aan bepaalde groeivoorwaarden en aan bepaalde symmetrierelaties ten aanzien van transformaties van de vorm

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

voldoen. Een belangrijk voorbeeld van een

modulaire vorm die vele wiskundigen heeft beziggehouden is de functie

$$\Delta(z) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}, \quad (1)$$

waarbij $q = e^{2\pi iz}$.

De groeivoorwaarde voor deze functie is $\lim_{y \rightarrow -\infty} \Delta(z) = 0$ en de symmetrierelatie luidt in dit geval dat $\Delta(z)$ voldoet aan

$$\Delta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{12} \Delta(z)$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$ en $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ met $ad - bc = 1$. We kunnen deze transformaties visualiseren in een plaatje dat laat zien hoe het complexe bovenhalfvlak in driehoeken wordt opgedeeld; zie figuur 1.

Als we het product in (1) uitwerken dan krijgen we een machtreeks

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 \\ &\quad + 4830q^5 - 6048q^6 + \dots \\ &= \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n, \end{aligned}$$

met $\tau(n)$ geheel. De op deze manier gedefinieerde functie $\tau : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}$ heet de *Ramanujan-taufunctie*. Ramanujan merkte een aantal merkwaardige eigenschappen van zijn tau functie op. Onder andere waren daar de volgende drie eigenschappen, die hij niet kon bewijzen:

- Als m en n ondeelbaar zijn dan geldt $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ (ofwel τ is *multipliatief*).
- Voor priem machten geldt de recurrente betrekking $\tau(p^{r+1}) = \tau(p)\tau(p^r) - p^{11}\tau(p^{r-1})$.
- Voor priemgetallen hebben we een ongelijkheid $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$.

De eerste twee eigenschappen zijn in 1917 door Mordell bewezen, maar de derde is lange tijd onopgelost geweest.

Behalve de bovengenoemde eigenschappen vond Ramanujan ook nog congruenties voor $\tau(n)$ modulo (machten van) de priemgetallen 2, 3, 5, 7, 23 en 691, bijvoorbeeld

$$\tau(n) \equiv 1 + n^{11} \quad \text{voor alle } n.$$

Serre begon zich af te vragen waarom zulke congruenties niet bestaan modulo andere priemgetallen. In 1968 formuleerde hij een vermoeden waarin werd gesteld dat $\tau(p)$ uit te drukken is in termen van 2-dimensionale Galoisrepresentaties, dat wil zeggen continue homomorfismen $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(K)$

waarbij K een zeker lichaam is. Hij bracht op die manier het modulo ℓ gedrag van $\tau(p)$ in verband met de grens $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$. Het lukte Deligne in 1969 om het bestaan van zulke representaties aan te tonen en in 1974 slaagde hij erin om hiermee $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ te bewijzen. Het bewijs van Deligne gebruikt diepe resultaten uit de algebraïsche meetkunde; het totale aantal pagina's dat je krijgt als je alles helemaal vanaf het begin zou uitschrijven wordt geschat op 2000. Het zal dus duidelijk zijn dat we in dit korte artikel niet op de details kunnen ingaan.

De vorm Δ is niet uniek hierin. Eigenschappen die vergelijkbaar zijn met die voor de vorm Δ gelden voor veel meer modulaire vormen. De modulaire vormen in kwestie heten *eigenvormen* omdat het eigenvectoren zijn voor bepaalde lineaire operatoren op ruimten van modulaire vormen, de zogenaamde Hecke-operatoren. Bij elke eigenform blijken er Galoisrepresentaties gemaakt te kunnen worden. De afgelopen decennia is het verband tussen eigenvormen en Galoisrepresentaties zeer intensief bestudeerd. Een van de grote resultaten die hieruit voortkwam is Wiles' bewijs voor de Laatste Stelling van Fermat. Een ander groot resultaat, dat sterk in verband staat met het werk van Wiles, is het bewijs voor (het grootste deel van) het Serre-vermoeden, gegeven door Khare en Wintenberger. Dit Serre-vermoeden stelt dat een representatie $\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(K)$ met K een eindig lichaam slechts aan een paar hele milde voorwaarden hoeft te voldoen om al van een eigenform afkomstig te zijn.

Het berekenen van $\tau(n)$

Een vraag die René Schoof aan Bas Edixhoven stelde is of het mogelijk is om $\tau(n)$ efficiënt uit te rekenen. Als we $\tau(p)$ kunnen uitrekenen voor priemgetallen p en n kunnen factoriseren in priemgetallen dan kunnen we, wegens de observaties van Ramanujan, $\tau(n)$ uitrekenen. Als we nu $\tau(p) \bmod \ell$ uitrekenen voor zo veel priemgetallen ℓ dat hun product groter dan $4p^{11/2}$ is, dan ligt, gezien de grens voor $|\tau(p)|$ hiermee $\tau(p)$ zelf vast. Met dit in het achterhoofd is Edixhoven een project gestart waarin hij het probleem tracht aan te pakken door de bijbehorende Galoisrepresentaties uit te rekenen.

Het basisidee van de berekeningen komt uit de meetkunde: de Galoisrepresentatie die bij $\tau(p) \bmod \ell$ hoort voor een gegeven ℓ kan worden gerealiseerd in een variëteit die $J_1(\ell)$ genoemd wordt en dimensie $(\ell - 5)(\ell - 7)/24$ heeft. Jean-Marc Couveignes had het idee om hierbij numerieke berekeningen te gebruiken.

Om deze ideeën hard te maken lijkt het echter onvermijdelijk om *Arakelovmeetkunde* te gebruiken; op dit punt kon Robin de Jong zijn steentje bijdragen aan het project. Hierbij is gebruikgemaakt van een resultaat van Franz Merkl, iemand uit de kansrekening. Voor details zie [3].

Er is echter één nadeel aan het algoritme van Edixhoven, Couveignes en De Jong: het is praktisch onuitvoerbaar. Zo is de rekenprecisie veel te hoog en ook kunnen we niet gebruikmaken van de variëteit $J_1(\ell)$ maar moeten we naar $J_1(5\ell)$ gaan, waarvan de dimensie $(\ell - 2)^2$ is. In de praktijk kunnen we deze bezwaren negeren en gewoon gaan rekenen. We krijgen polynomen met coëfficiënten van een hoge precisie (denk hier aan enkele duizenden decimalen). We weten dat de coëfficiënten benaderingen zijn van rationale getallen. Als de benadering sterk genoeg is, dan gokken we dat de rationale getallen waar ze dichtbij liggen de daadwerkelijke coëfficiënten zijn van de polynomen die bij de representaties horen. We moeten dan wel nog achteraf nagaan dat het verkregen polynoom correct is. Dankzij het feit dat het Serre-vermoeden nu bewezen is, is dit allemaal goed te doen.

Uiteraard geldt ook hier dat we niet tot de taufunctie beperkt zijn. De rekenmethoden werken met eigenvormen in het algemeen. Dit heeft leuke toepassingen in de computationele inverse Galoistheorie.

Computationele inverse Galoistheorie

Een van de grote problemen in de algebraïsche getaltheorie is de vraag of er voor elke eindige groep G een polynoom met rationale coëfficiënten bestaat waarvan de Galoisgroep isomorf is met G . Men vermoedt dat elke eindige groep voorkomt als Galoisgroep van een polynoom, maar een bewijs hiervoor lijkt voorlopig nog niet in zicht. Voor een aantal soorten groepen is het echter al wel bekend: zo heeft Shafarevich in 1954 bijvoorbeeld bewezen dat elke *oplosbare* groep optreedt als Galoisgroep van een polynoom over $\mathbf{Q}$. De beruchte lijst sporadische simpele groepen is op één groep na (de zogenaamde Mathieugroep M_{23}) gerealiseerd als Galoisgroep. Een andere vraag die je in deze context kunt stellen is of je voor een gegeven eindige groep ook een polynoom kunt *uitrekenen* met deze Galoisgroep. Dit is de favoriete sport van Jürgen Klüners en Gunter Malle, zie [5]. Zij hebben verscheidene technieken ontwikkeld en daarmee is het ze gelukt om voor alle transitieve permutatiegroepen tot en met graad 15 een polynoom te produceren. Al hun

technieken zijn erop gefocust om geparametriseerde families van polynomen te produceren.

Er zijn soorten groepen die niet behandeld kunnen worden met de technieken van Klüners en Malle. De eenvoudigste groep waarvoor ze geen polynoom konden maken is $\text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$, de groep van 2-bij-2 matrices met determinant 1 over het lichaam van 16 elementen. Deze groep heeft 4080 elementen en treedt op als permutatiegroep van graad 17: ze permuteert de elementen van $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_{16}) = \mathbf{F}_{16} \cup \{\infty\}$ door gebroken lineaire transformaties:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x := \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Het bestaan van een polynoom voor $\text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$ was al wel aangetoond door Mestre, maar een expliciet voorbeeld ontbrak nog. Op dit punt komen berekeningen met Galoisrepresentaties voor modulaire vormen van pas. We weten dat een polynoom met Galoisgroep $\text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$ grofweg hetzelfde is als een continu surjectief homomorfisme $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$ en dat we bij modulaire vormen Galoisrepresentaties $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(K)$

kunnen maken met K een zeker lichaam. Als we nu een modulaire vorm kunnen vinden waarbij we zo'n representatie kunnen maken met $K = \mathbf{F}_{16}$ waarvan het beeld $\text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$ is dan weten we dus al dat zo'n polynoom bestaat.

Een eenvoudige search met de computer laat al snel zien dat zulke modulaire vormen bestaan. We kunnen met deze vormen gaan rekenen en daarmee polynomen produceren. Laten we ook inderdaad een polynoom met Galoisgroep $\text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$ geven (voor details zie [1]):

$$\begin{aligned} & x^{17} - 5x^{16} + 12x^{15} - 28x^{14} + 72x^{13} \\ & - 132x^{12} + 116x^{11} - 74x^9 + 90x^8 \\ & - 28x^7 - 12x^6 + 24x^5 - 12x^4 \\ & - 4x^3 - 3x - 1. \end{aligned}$$

Een aardige bijkomstigheid is dat John Jones en David Roberts een soortgelijke sport als Klüners en Malle beoefenen. In plaats van naar polynomen met gegeven Galoisgroep zijn zij op zoek naar polynomen waarvan het splijtlichaam een zogenoemde kleine wortel-discriminant hebben, zie [4]. Als we uitgaan van de gegeneraliseerde Riemannhypothese,

dan zijn dit soort getallenlichamen zeer dun gezaaid en daarom is het interessant om er naar te zoeken. David Roberts maakte de auteur erop attent dat het bovenstaande polynoom aan hun lijst ontbrak. Een andere groep die ontbrak in de tabellen van Klüners en Malle is de groep $\text{PSL}_2(\mathbf{F}_{25})$, de groep van gebroken lineaire transformaties met determinant 1 en coëfficiënten in $\mathbf{F}_{25}$. Deze groep heeft 7800 elementen en permuteert $\mathbf{P}^1(\mathbf{F}_{25})$. Het volgende polynoom heeft haar als Galoisgroep:

$$\begin{aligned} & x^{26} + 25x^{24} - 90x^{23} + 410x^{22} \\ & - 2174x^{21} + 7915x^{20} - 24445x^{19} \\ & + 82385x^{18} - 174360x^{17} + 340352x^{16} \\ & - 596725x^{15} + 606925x^{14} - 845215x^{13} \\ & + 2199840x^{12} - 1523031x^{11} + 203295x^{10} \\ & - 2102590x^9 + 1804065x^8 - 28770x^7 \\ & - 35747x^6 + 674760x^5 - 134800x^4 \\ & + 150735x^3 - 2885x^2 + 64x - 5. \end{aligned}$$

We sluiten niet uit dat er in de nabije toekomst nog een paar andere groepen aan het lijstje worden toegevoegd. 

Referenties

- 1 J. G. Bosman, 'A polynomial with Galois group $\text{SL}_2(\mathbf{F}_{16})$ ', *LMS J. Comput. Math.* **10** (2007) 378–388.
- 2 F. Diamond en J. Im, 'Modular forms and modular curves', *Seminar on Fermat's Last Theorem* (Toronto, ON, 1993-1994) CMS Conf. Proc., **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 39–133.
- 3 S. J. Edixhoven, J.-M. Couveignes, R. S. de Jong, F. Merkl, J. G. Bosman, 'On the computation of coefficients of a modular form', eprint, 2006, arXiv reference math.NT/0605244v1.
- 4 J. W. Jones en D. P. Roberts, 'Galois number fields with small root discriminant', *J. Number Theory* **122** (2007) 379–407.
- 5 J. Klüners en G. Malle, 'Explicit Galois realization of transitive groups of degree up to 15', *J. Symbolic Comput.* **30** (2000) no. 6, 675–716.

Bernard Meulenbroek

Toegepaste Wiskunde,

Technische Universiteit Delft

Mekelweg 4

2628 CD Delft

B.J.Meulenbroek@ewi.tudelft.nl

Vakantiecursus

Bliksem boven de wolken

Hoe ontstaat de bliksem? Ook al is nog lang niet alles bekend over dit fenomeen, toch weten we al heel wat over allerlei aspecten. Bernard Meulenbroek, onderzoeker aan de Technische Universiteit Delft, deed promotie-onderzoek aan het CWI naar bliksem boven de wolken. De basisprincipes geeft hij in dit artikel, dat eerder verscheen in de Vakantiecursus van het CWI.

Bliksem is een van de meest indrukwekkende natuurverschijnselen. Recent is gebleken, dat er zich rond onweerswolken veel meer afspeelt dan dat men oorspronkelijk dacht. Niet alleen onder en tussen de onweerswolken is bliksem te zien, ook boven de wolken zijn allerlei lichtverschijnselen waargenomen. Sommige zelfs tot in de ionosfeer, op 90 kilometer hoogte. Een overzicht van deze verschijnselen zien we in figuur 1, links.

Deze verschijnselen heeft men namen gegeven als 'sprites', 'elves', 'blue jets' en 'pixies'. Als je toch niet weet wat voor verschijnselen het zijn, kun je net zo goed wat fantasie gebruiken bij de naamgeving.

Al deze lichtverschijnselen zijn het gevolg van gasontladingen. Het basismechanisme dat hiervoor verantwoordelijk is, werkt als volgt. Tussen de onweerswolk en de grond en tussen de wolk en de ionosfeer is een potentiaalverschil en dus een elektrisch veld. In de

lucht zijn altijd wel wat vrije elektronen en ionen aanwezig (bijvoorbeeld ten gevolge van kosmische straling) en deze worden versneld in dat veld. Wanneer een elektron hard genoeg gaat, kan het een stikstofmolecuul ioniseren; bij deze botsing komt er een extra elektron vrij alsmede een N_2^+ ion. Op deze manier krijgen we een lawine van elektronen. Die zijn zelf niet te zien, maar naast het feit dat ze moleculen ioniseren, kunnen ze ook moleculen aanslaan (een elektron uit de buitenste schil van het molecuul in een hogere energietoestand brengen). Wanneer zo'n molecuul terugvalt naar de grondtoestand, zendt het een foton uit. En dat zijn de fotonen die waargenomen kunnen worden. Nu is natuurlijk de vraag of een dergelijk eenvoudig mechanisme verantwoordelijk kan zijn voor de grote verscheidenheid aan patronen in figuur 1, links.

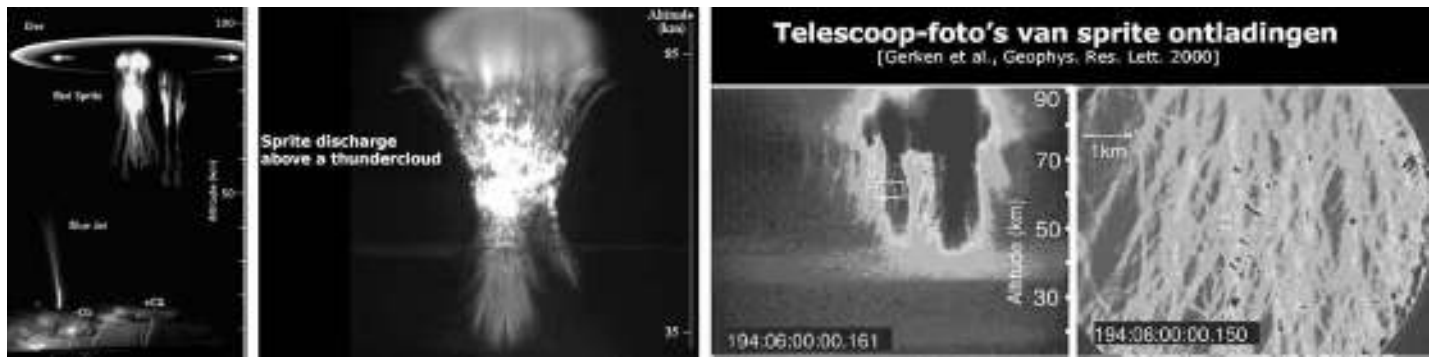
In de volgende paragrafen gaan we kijken

in hoeverre we die vraag kunnen beantwoorden. Allereerst gaan we kijken of we ook experimenteel vat kunnen krijgen op deze verschijnselen. Vervolgens proberen we een wiskundig model op te stellen vanuit de microscopische vergelijkingen van het elektromagnetisme. Tenslotte moeten we de wiskundige vergelijkingen die uit dit model volgen oplossen en kijken of de oplossingen inderdaad lijken op de waargenomen patronen.

Van waarnemingen naar experiment

Laten we eens wat beter kijken naar een 'sprite'-ontlading.

Wanneer we inzoomen, zien we dat een sprite opgebouwd is uit een groot aantal kanaaltjes, zogenaamde streamers. Willen we het hele object begrijpen, dan moeten we dus eerst deze streamers begrijpen. Maar hoe kunnen we ooit zo'n enorm grote ontlading in een laboratorium bestuderen? Hier worden we geholpen door de schaling. Hoger in de lucht is de dichtheid lager, op 70 km een factor 10^5 . Dat betekent, dat het veel langer duurt voor moleculen tegen elkaar botsen. De vrije weglengte is een factor 10^5 groter. Maar af-



Figuur 1 Links: verschillende soorten gasontladingen boven onweerswolken; midden: opname van sprite-ontladingen; rechts: sprite-ontladingen ingezoomd

standen worden gemeten in termen van deze vrije weglengte: het maakt niet uit hoeveel meter een deeltje heeft afgelegd, het aantal vrije weglengtes is van belang. Zaken liggen op het aardoppervlak veel dichter bij elkaar dan hoog in de lucht en wel een factor 10^5 . En dat betekent, dat een kilometersgrote ontlasting hoog in de lucht slechts centimeters groot is op het aardoppervlak. Er zit echter wel een addertje onder het gras. De relevante energieschaal is de ionisatie-energie van stikstof; die schaal is niet. Dit betekent dat snelheden ook niet schalen (de kinetische energie van de elektronen schaal niet). Dat betekent, dat gebeurtenissen niet alleen veel groter zijn op 70 km hoogte, maar ook veel langer duren. (het quotient is immers constant). En dus zijn de gebeurtenissen in het lab veel sneller dan in de lucht. Een gasontlading van een seconde doet er in het lab maar een paar microsecondes over.

Dit stelt hoge eisen aan de experimenten. Voor het maken van foto's van de ontlasting is een camera nodig die in een nanoseconde een foto kan maken. In figuur 2, links, zien we de opstelling. Tussen de naald boven en de plaat beneden wordt een hoog elektrisch veld aangelegd. In principe kan de samenstelling en de druk van het gas in de kaner gekozen worden, meestal wordt omgevingslucht gebruikt. Door het hoge veld vindt een gasontlading plaats; hiervan wordt een foto genomen. En dan krijgen we het volgende resultaat: een streamer die van boven naar beneden loopt; het hele kanaal lijkt licht te geven. Maar is dat wel wat er echt aan de hand is? Als we de belichtingstijd van de camera verkorten, zie figuur 2 rechts, zien we alleen nog maar een aantal lichtgevende spots. Alleen de voorkant van het kanaal geeft licht. Doordat we in figuur 2 midden, een langere belichtingstijd hadden, hebben we eigenlijk een aantal foto's bij elkaar geteld, waarbij het kanaal steeds verder propageerde.

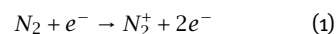
Als we dus een nog kortere belichtingstijd

zouden kunnen nemen, zouden we dus steeds kleinere spots zien. Natuurlijk zouden we graag een video-opname van het experiment maken om te controleren of het inderdaad de voorkant is, die als enige lichtgeeft. De camera die deze snapshots maakt, heeft seconden nodig (door het uitlezen van de data naar de computer) voor een nieuw snapshot gemaakt kan worden. Een serie snapshots (en dus een video-opname) kunnen we zo dus vergeten.

Nu hebben we dus al een beter beeld van wat een streamer is: een propagerend kanaaltje waarvan alleen de kop actief is (alleen daar zijn vrije elektronen). Kunnen we dit ook theoretisch begrijpen?

Van microscopische vergelijkingen naar een wiskundig model

Laten we kijken of we de propagatie van streamers kunnen begrijpen met zo min mogelijk ingrediënten. In de experimenten hebben we twee parallelle platen waartussen een grote spanning wordt aangelegd. In het model moeten dus zeker het elektrisch veld $\mathbf{E}$ en de potentiaal ϕ een rol gaan spelen. Verder kan de samenstelling van het gas gekozen worden; laten we beginnen met te kijken naar pure stikstof. Dan hebben we elektronen en ionen nodig. We schrijven n_e voor de elektronendichtheid en n_+ voor de dichtheid van de N_2^+ ionen. Hier komt dus een aanname in het model; we nemen alleen de reactie



mee. Eigenlijk zouden we de N_2 dichtheid ook moeten meenemen, omdat die afneemt door bovenstaande reactie. De stikstof is echter in overmaat aanwezig en kan dus als constant beschouwd worden.

Nu moeten we de wetmatigheden zoeken die n_e , n_+ , $\mathbf{E}$ en ϕ aan elkaar relateren. Het is handig om de elektronenstroomdichtheid $\mathbf{J}$

te introduceren. Deze voldoet aan de wet van Ohm:

$$\mathbf{J} = n_e \mathbf{E}.$$

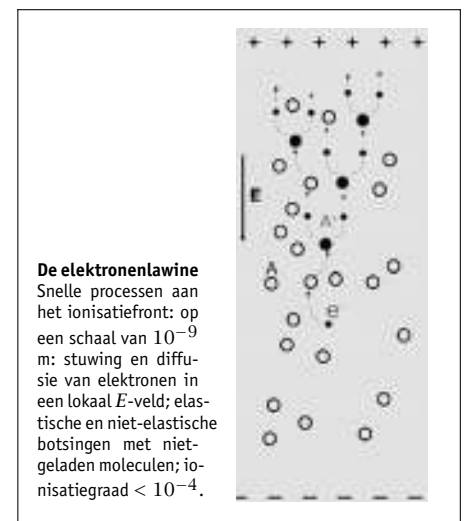
(dit is niet de gebruikelijke vorm $V = IR$, maar komt op hetzelfde neer in een draad met oppervlak A en lengte L ; $I = JA$, $V = LE$ en $R = L/An_e$.) De elektronen zijn veel lichter dan de ionen en stromen dus veel sneller; we nemen aan dat de ionen niet stromen tijdens het proces en schrijven voor de ionenstroomdichtheid $\mathbf{J}_+ = 0$.

Nu gebruiken we de eerste wetmatigheid uit de natuurkunde: behoud van elektronen. Zou er geen creatie van elektronen zijn, dan geldt:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2)$$

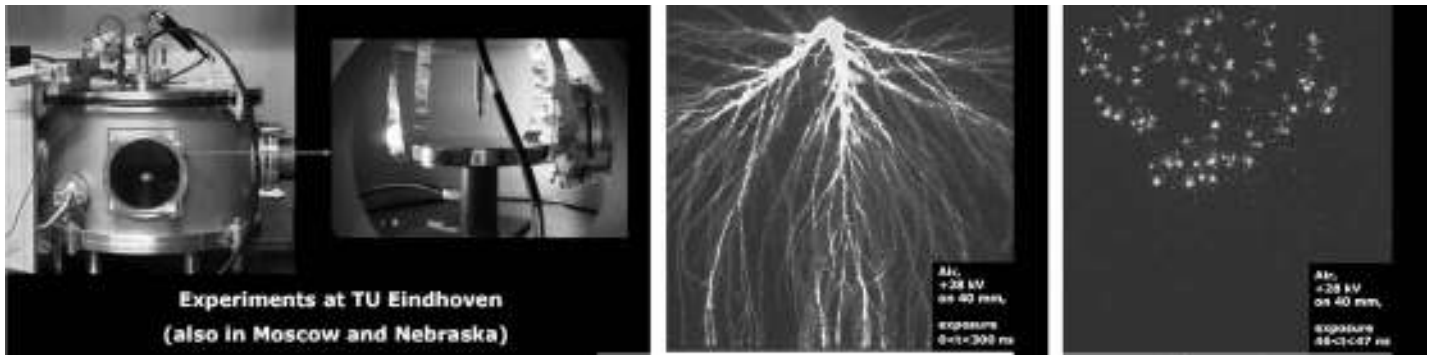
Hier staat in feite, dat de afname van de lading gelijk is aan de stroom.

Aangezien de reactie (1) extra elektronen-ionen paren genereert is de rechterkant van vergelijking (2) niet nul; er is een bron van nieuwe elektronen.



De elektronenlawine

Snelle processen aan het ionisatiefront: op een schaal van 10^{-9} m: stuwing en diffusie van elektronen in een lokaal $\mathbf{E}$ -veld; elastische en niet-elastische botsingen met niet-geladen moleculen; ionisatiegraad $< 10^{-4}$.



Figuur 2 Links: opstelling van het experiment; midden en rechts: resultaten van de experimenten

We moeten dus hebben

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{J} = \text{bron.} \quad (3)$$

Een zelfde soort vergelijking hebben we voor de ionen. Iets eenvoudiger aangezien ze niet stromen en met dezelfde bron (elektronen en ionen worden in paren gecreeerd: behoud van lading):

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = \text{bron.} \quad (4)$$

Nu moeten we een uitdrukking vinden voor de bron: hoeveel extra elektronen worden er gegenereerd bij gegeven aantal en veld? Dit is een complex proces, maar we weten zeker dat de bron nul is in afwezigheid van ofwel $\mathbf{E}$ of n_e . Deze bronterm is experimenteel gemeten voor verschillende waarden; de uitkomsten blijken goed gefit te kunnen worden door de formule:

$$\text{bron} = n_e |\mathbf{E}| e^{-1/|\mathbf{E}|}. \quad (5)$$

Hier staat in feite het product van de elektronenstroom $n_e |\mathbf{E}|$ en de kans dat er ionisatie plaatsvindt $e^{-1/|\mathbf{E}|}$. En nu lijken we klaar te zijn; de beginvoorwaarde, het externe elektrische veld, bepaalt de bronterm (5) waardoor de PDE's voor de elektronen (3) en ionen (4) volledig vastliggen. Er zit echter een addertje onder het gras. Aanvankelijk is deze benadering wel goed, maar gedurende het proces worden er steeds meer vrije ladingen gecreeerd, en die wijzigen het elektrische veld. We moeten oplossen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = n_+ - n_e. \quad (6)$$

(Zie kader voor de afleiding.) Voor lage ladingdichtheden geeft dit wel het constante achtergrondveld, maar voor hoge dichtheden zal deze vergelijking meegenomen moeten worden. Tenslotte werken we in de elektrostatistische benadering. Magneetvelden (die wel degelijk aanwezig zijn door de stromen-

de lading) kunnen verwaarloosd worden. Dat betekent dat we ook hebben

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Samenvattend hebben we:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla \cdot (n_e \mathbf{E}) = n_e |\mathbf{E}| e^{-1/|\mathbf{E}|}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} = n_e |\mathbf{E}| e^{-1/|\mathbf{E}|}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = n_+ - n_e, \quad (9)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (10)$$

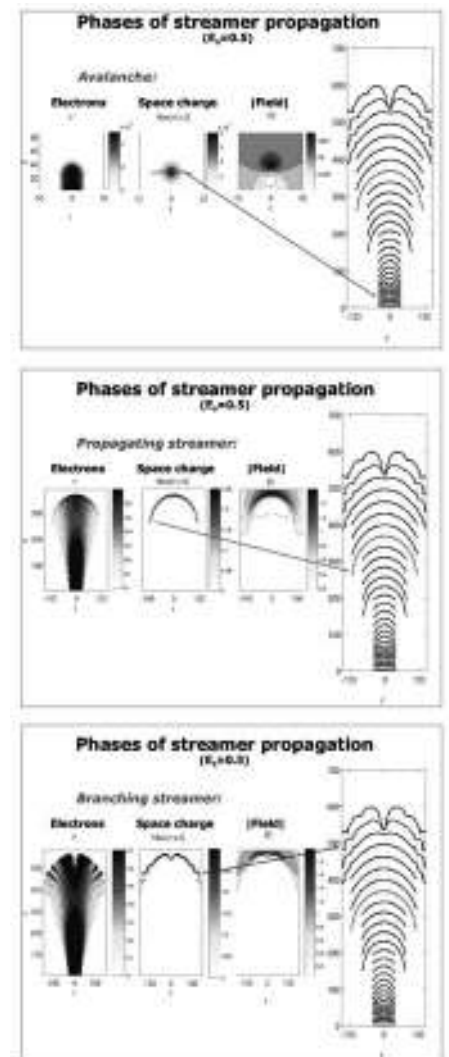
Oplossen van het model

Op het eerste gezicht lijkt het niet lastig het model (7)-(9) op te lossen. Gegeven een achtergrondveld en een beginconfiguratie van de lading (bijvoorbeeld een enkel elektron) kan via vergelijking (9) het gewijzigde elektrische veld uitgerekend worden. Vervolgens kunnen nieuwe ladingdichtheden berekend worden met de vergelijkingen (7) en (8) en kunnen we weer terug naar de eerste stap. We lopen echter tegen allerlei problemen aan. Ten eerste blijkt een volledige 3D simulatie erg moeilijk; we nemen aan dat de streamer cilindrisch symmetrisch is en gebruiken de coördinaten r en z . Wanneer dit op de computer gezet wordt krijgen we de volgende serie plaatjes. In de drie plaatjes links staan achtereenvolgens elektronendichtheid, netto lading en elektrisch veld. We zijn met een elektron in de oorsprong begonnen en we zien dat er een lawine aan elektronen is ontstaan die tegen de richting van het elektrisch veld in propageert. Het elektrisch veld wijkt nu nog niet veel af van het achtergrondveld, zie figuur 3, bovenste plaatje.

Laten we de simulatie verder lopen, dan zien we dat de streamer verder naar boven propageert en dat er een dun ladingslaagje

aan de voorkant ontstaat. Ook zien we dat daar het veld fors verschilt van de achtergrondwaarde, zie figuur 3, middelste afbeelding.

Laten we de simulatie nu nog verder lopen, dan wordt het veld nog hoger en splitst de streamer zich spontaan, zie figuur 3, onderste plaatje.



Figuur 3 Numerieke simulatie, eerste, tweede en derde snapshot

Calculus van elektrische stroom

Gegeven een object E met oppervlak S in de $\mathbf{R}^3$. Stel dat we een stromingsveld (van bijv. water) $\mathbf{v}$ hebben; dan wordt de hoeveelheid water die door S stroomt de flux genoemd; deze flux kan berekend worden met behulp van een integratie over dit oppervlak:

$$\text{flux} = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

Een standaardstelling uit de analyse geeft

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV. \quad (11)$$

Vergelijk met de hoofdstelling van de analyse: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$.

Aan de linkerkant staat de functie op de rand van het domein, aan de rechterkant de afgeleide binnen het domein, net als in vergelijking (7). Wij gebruiken deze vergelijking met het vectorveld $\mathbf{J}$; de flux is in dit geval de lading die wegstroomt door een oppervlak S :

$$\text{flux} = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{J} \, dV.$$

Deze flux moet gelijk zijn aan de afname van de elektronen in dit gebied:

$$\text{afname lading} = \int \int \int_E \frac{\partial n_e}{\partial t} \, dV.$$

Wanneer we deze gelijkstellen, krijgen we

$$\int \int \int_E \frac{\partial n_e}{\partial t} \, dV = \int \int \int_E \nabla \cdot \mathbf{J} \, dV$$

en aangezien dit voor een willekeurig object E moet gelden, krijgen we

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Op soortgelijke wijze kan vergelijking (6) afgeleid worden. We weten dat voor een puntlading q geldt

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Hieruit volgt direct de wet van Gauss:

$$\int \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

en op dezelfde wijze, aangezien de lading

$$q = \int \int \int_E (n_+ - n_e) \, dV$$

krijgen we

$$\begin{aligned} \int \int \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \int \int \int \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV \\ &= q = \int \int \int_E (n_+ - n_e) \, dV. \end{aligned}$$

Dit moeten weer voor een willekeurig volume E gelden en dus krijgen we weer $\nabla \cdot \mathbf{E} = n_+ - n_e$

Hierna houdt de code ermee op, zijn de resultaten niet meer betrouwbaar. Op het plaatje aan de rechterkant staat de plaats en de vorm van de voorkant van de streamer op verschillende tijdstippen.

Theoretisch begrip

Waarom wordt het gladde oppervlak aan de voorkant van de streamer nu ineens zo bobbelig en oneffen? Dit lijkt verrassend, maar soortgelijke patronen zijn bekend uit andere takken van de natuurkunde, zoals zich vertakende sneeuwvlokken. Het volgende is namelijk aan de hand. In de bulk van de streamer is inmiddels zoveel lading aanwezig, dat die bulk geleidend is geworden. Geen elektrisch veld aanwezig, dus is de potentiaal constant. Voor de streamer zijn geen ladingen aanwezig en dus geldt

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

of in termen van de potentiaal

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (12)$$

Verder wordt de snelheid, waarmee de ene regio (geleidend) de andere regio (leeg) binnendringt door de grootte van het lokale elektrische veld bepaald. Een dergelijke situatie leidt tot een Laplaceaanse instabiliteit; kleine bobbels aan de voorkant van de streamer gaan harder groeien (steiler, dus hoger veld, dus sneller) dan hun burens en worden dus steeds groter. De voorkant wordt dus steeds bobbeliger en tenslotte splitst de streamer zich. Deze situatie van het groeien van oneffenheden wordt een instabiliteit genoemd (vergelijking (12) wordt de Laplace vergelijking genoemd, vandaar de naam voor dit soort instabiliteiten).

Conclusies en vragen

In hoeverre zijn deze numerieke resultaten betrouwbaar? Is het eenvoudige model inderdaad al in staat propagatie en splitsing van streamers te verklaren? De resultaten lijken bemoedigend. Dit was het punt waar ik mijn promotieonderzoek begon, met als doel om ook analytisch vat te krijgen op het streamerprobleem. Dit onderzoek voert veel te ver om hier te behandelen, maar lijkt de numerieke resultaten te ondersteunen. En zo is er een begin gemaakt met het begrijpen van de patronen in figuur 1, links, maar is ook nog een lange weg te gaan.

Analyse van scalar- en vectorvelden

Op het internet of in een boek over vectorcalculus kunt u al het onderstaande veel uitgebreider terugvinden; ik vat de belangrijkste resultaten die ik nodig heb hier samen. Een scalarveld is een afbeelding $f(\mathbf{x})$ van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}$. Een voorbeeld van een scalarveld is de dichtheid van een object $\rho(x, y, z)$ en de temperatuur $T(x, y, z)$; dit zijn afbeeldingen van $\mathbf{R}^3$ naar $\mathbf{R}$. Een vectorveld is een afbeelding $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$.

Een voorbeeld van een vectorveld is het snelheidsveld

$$\begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix};$$

dit is een afbeelding van $\mathbf{R}^3$ naar $\mathbf{R}^3$.

Wij gebruiken scalaire velden $n_e(x, y, z)$, $n_+(x, y, z)$ en $\phi(x, y, z)$ en de vectorvelden $\mathbf{E}(x, y, z)$ en $\mathbf{J}(x, y, z)$.

Differentiëren

We definiëren de gradient van een scalair veld als volgt

$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

De gradient ('afgeleide') van een scalair veld is dus een vectorveld. We definiëren de divergentie van een vectorveld als volgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

en levert dus een scalairveld op. Wanneer we deze twee combineren krijgen we de divergentie van de gradient van een scalairveld, ook wel de Laplaceaan genoemd:

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

notatie $\nabla^2 \phi$, of ook wel eens $\Delta \phi$.

Frank den Hollander

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

denholla@math.leidenuniv.nl

Abelprijs 2007

Srinivasa Varadhan

Op 22 maart 2007 maakte de Noorse Akademie van Wetenschappen en Letteren in Oslo bekend dat zij de Abelprijs voor 2007 had toegekend aan S.R. Srinivasa Varadhan van het Courant Institute of Mathematical Sciences in New York. Varadhan ontving deze onderscheiding “voor zijn fundamentele bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening en in het bijzonder voor het creëren van een geunificeerde theorie van grote afwijkingen”. De jury noemde Varadhan’s werk van “grote conceptuele kracht en tijdloze schoonheid”.

De Abelprijs is in 2001 ingesteld door de Noorse regering, ter gelegenheid van de tweehonderdste geboortedag van Niels Henrik Abel (25 augustus 1802 – 6 april 1829), en wordt toegekend voor ‘baanbrekend wetenschappelijk werk in de wiskunde’. De Abelprijs heeft de statuut van de Nobelprijs. Eerdere laureaten zijn:

J.-P. Serre	(2003),
M.F. Atiyah en I.M. Singer	(2004),
P.D. Lax	(2005),
L. Carleson	(2006).

De officiële uitreikingsceremonie van de Abelprijs 2007 vond plaats op 22 mei 2007, in de aula van de Universiteit van Oslo, waar Varadhan de prijs ontving uit handen van koning

Harald van Noorwegen. Op 23 mei gaf Varadhan zijn Abel Lecture, gevolgd door lezingen van G.C. Papanicolaou, T. Lyons en O. Zeitouni, die verschillende aspecten van zijn werk belichtten.

Details over de Abelprijs zijn te vinden op <http://www.abelprisen.no/en>, details over het leven van Abel op <http://nl.wikipedia.org/wiki>. Bijzonder lezenswaardig is de Abel biografie: A. Stubhaug, *Niels Henrik Abel and His Times: Called Too Soon by Flames*, Springer, 2000. Hierin wordt niet alleen een beeld geschetst van het korte, intense en wiskundig zeer productieve leven van Abel, maar ook een indruk gegeven van de tijdgeest waarin Abel leefde, zowel in Noorwegen als in Duitsland, Engeland en Frankrijk.

Op 27 maart 2008 werd bekend dat

de Abelprijs 2008 is toegekend aan J.G. Thompson and J. Tits “voor hun diepe bijdragen aan de algebra en in het bijzonder het vormgeven van de moderne groepentheorie”.

De theorie van grote afwijkingen

De theorie van grote afwijkingen beschrijft de kans dat het *empirische gemiddelde* van een groot aantal stochastische variabelen (dat wil zeggen hun som gedeeld door hun aantal) significant afwijkt van hun *theoretische gemiddelde* (dat wil zeggen het gemiddelde van hun kansverdeling). Het is daarmee een theorie die inzicht geeft in afwijkingen van *de wet van de grote aantallen*, het werkpaard van de waarschijnlijkheidsrekening. In haar diepste kern is de theorie een vergaande veralgemenisering van het *principe van Laplace*, dat gebruikt wordt voor de asymptotische analyse van integralen van functies die van een of meer parameters afhangen en zeer scherp gepiekt zijn. Haar basis ligt echter in de statistische fysica en dateert van eind 19e en begin 20e eeuw (L. Boltzmann, J.W. Gibbs, A. Einstein). Latere ontwikkelingen, in de periode 1930–1960, kwamen uit de verzekerings-



wiskunde en uit de statistiek (F. Esscher, H. Cramér, I.N. Sanov) en, in de periode 1960–1970, andermaal uit de statistische fysica (O. Lanford, D. Ruelle). Varadhan dient echter te worden beschouwd als de architect-bouwmeester van de theorie.

Aanvankelijk concentreerde Varadhan zich op het gedrag voor korte tijd van oplossingen van elliptische differentiaalvergelijkingen (DV'en) voor warmtegeleiding [14], [15]. Hij liet zien dat dit gedrag beschreven kon worden met behulp van Brownse beweging en wel door een *atypisch deel van de padenruimte* van Brownse beweging. Met andere woorden, het zijn juist zeldame in plaats van typische paden die in de beschrijving domineren. Deze eerste stap bleek een centrale bouwsteen te zijn voor de latere ontwikkeling van de theorie van grote afwijkingen. In de jaren 1970–1985 heeft hij, samen met M.D. Donsker, die eerste stap uitgewerkt tot een coherente en zeer algemene methode om het *atypische gedrag van stochastische processen* te beschrijven, in het bijzonder Markovprocessen [3].

Aan elke afwijking van het typische gedrag van het proces wordt een zekere kostwaarde toegekend (kostwaarde = minus de logaritme van de kans), beschreven met behulp van een zogenaamde *entropiefunctie* (= een functie die als het ware de afstand tot het typische gedrag aangeeft). Het centrale concept van de theorie, genaamd het *grote afwijkingen principe*, heeft een analogie met zwakke convergentie van maten die centraal staat in de integratietheorie en is derhalve bij uitstek geschikt voor het bestuderen van *gemiddelden van functionalen van het proces*. Immers, het proces zal onder gegeven randvoorwaarden steeds voor die afwijking kiezen die *optimaal* is in een 'kosten-versus-baten' optimalisatie. Deze optimalisatie wordt beschreven door wat heet *Varadhan's Lemma*. Dit lemma drukt het asymptotische gedrag van gemiddelden van functionalen van het proces, als functie van onderliggende parameters, uit in een *variationele formule*, wat de theorie van grote afwijkingen direct verbindt met de variationele analyse. Afhankelijk van de gekozen functionaal zien vertrouwde entropiefuncties het licht, zoals de *Shannon-entropie* uit de informatietheorie en de *Kolmogorov-Sinai-entropie* uit de ergodentheorie.

Het bleek essentieel om een *oneindig-dimensionaal* perspectief te kiezen, dat wil zeggen een zo ruim mogelijke jasje te nemen voor de berekeningen. Dit leidde tot het beschouwen van het *empirische proces* geassocieerd met het pad (dat wil zeggen het pad gemiddeld over zijn verschuivingen in de tijd),

dat alle relevante informatie over het pad in zich bergt. Hieruit kunnen op hun beurt lager-dimensionale observabelen, zoals het empirische gemiddelde van het pad (dat wil zeggen de gemiddelde waarde gemeten langs het pad), worden afgeleid via wat heet het *contractieprincipe*. Dit samenspel leidde uiteindelijk tot de oplossing van zeer diepe problemen, waaronder een vermoeden van M. Kac en M. Luttinger omtrent het asymptotische gedrag van de omgeving van een Brownse beweging [4] (de 'Wiener Sausage') en het discrete analogon daarvan voor een stochastische wandeling op een rooster [5]. Dit werk leidde op zijn beurt tot een beter inzicht in de



Srinivasa Varadhan (copyright: Cheryl Sylvant, the Abel Prize, the Norwegian Academy of Science and Letters)

spectrale eigenschappen van stochastische Schrödingeroperatoren. Donsker en Varadhan gaven voorts een asymptotische oplossing van het polaronmodel [6], een probleem uit de vastestoffysica waarbij aan het pad van een Brownse beweging een zelf-attractie wordt toegekend. Varadhan gaf ook nog een constructie van een twee-dimensionale maat voor polymeren [16], genoemd naar S. Edwards, dat als een vroeg voorbeeld uit de zogenaamde constructieve veldentheorie dient te worden aangemerkt.

De theorie van grote afwijkingen vindt niet alleen toepassing in deelgebieden van de wiskunde en de fysica, maar ook in tal van andere disciplines, waaronder informatica, computationele scheikunde, moleculaire biologie, medische statistiek, econometrie en logistiek. De grote bijdrage van Varadhan is dat hij losse ideeën wist samen te brengen en wist om

te vormen en uit te breiden tot een coherente, krachtige en zeer algemene theorie. Aan de toepassingen heeft hij vervolgens ruimschoots bijgedragen, zoals hierboven al werd omschreven en zoals hieronder nog zal blijken uit de beschrijving van zijn overige bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening. Voor een overzicht van de theorie van grote afwijkingen zij de lezer verwezen naar de boeken van Varadhan [17], Deuschel en Stroock [2], Dembo en Zeitouni [1] en den Hollander [8].

Hieronder volgt een korte beschrijving van drie andere gebieden waaraan Varadhan fundamentele bijdragen heeft geleverd. Elk van deze bijdragen is op zijn beurt sterk beïnvloed door zijn werk aan grote afwijkingen.

Stochastische analyse

De theorie van *diffusieprocessen* vindt zijn oorsprong in het werk van P. Lévy in de jaren 1930 en K. Itô in de jaren 1940. In de jaren 1970 heeft Varadhan, samen met D.W. Stroock, deze theorie een nieuwe toegang gegeven door diffusies te karakteriseren via wat zij noemen *het martingaalprobleem* [12]. Hierbij worden diffusies beschreven als zwakke oplossingen van stochastische differentiaalvergelijkingen, die zo gekozen worden dat een grote klasse van functionalen van de diffusie de martingaleigenschap hebben, dat wil zeggen hun verwachtingswaarde in de toekomst gegeven hun verleden is precies hun waarde in het heden. Deze aanpak maakte een zeer sterke veralgemenisering mogelijk, waardoor kon worden bewezen dat een grote klasse van Markovketens in de zwakke zin convergeren naar diffusieprocessen, na geschikte schaling in ruimte en tijd (een vorm van de centrale limietstelling). Tevens konden *homogeniseringseigenschappen* voor diffusieprocessen met sterk in de ruimte en tijd variërende coëfficiënten worden afgeleid. Thans behoort de martingaalmethode tot het standaardarsenaal van de stochastische analyse. In het bijzonder is ze van belang voor de constructie van *maatwaardige diffusies*, oneindig-dimensionale Markovprocessen die een centrale rol spelen in de populatiedynamica, in de jaren 1980 en 1990 ontwikkeld door D. Dawson, E.B. Dynkin en S. Watanabe.

Het werk van Stroock en Varadhan leidde verder tot een precieze beschrijving van de *drager* van diffusieprocessen, dat wil zeggen de drager van de maat op de padenruimte. Deze drager wordt gekarakteriseerd als de afsluiting van een familie van oplossingen van deterministische DV'en, waardoor continuïteitseigenschappen van oplossingen van stochas-



Copyright: Scamix, the Abel Prize, the Norwegian Academy of Science and Letters

Varadhan ontvangt de Abelprijs uit handen van koning Harald van Noorwegen. Bij de prijs hoort een geldbedrag van 6 miljoen Noorse kronen (755.000 euro).

tische DV'en onder toevoeging van ruis kunnen worden bewezen. Dit was een eerste stap in de richting van de later ontwikkelde *Malliavin calculus*, door P. Malliavin in de jaren 1980.

Wanordelijke diffusie

De Brownse beweging en de stochastische wandeling zijn ruimtelijk homogene processen, dat wil zeggen hun overgangskansen hangen niet af van hun plaats. Een *stochastische wandeling in een stochastische omgeving* is een variant waarbij de overgangskansen eerst zelf *stochastisch* worden gekozen, waarna de wandeling evolueert door gebruik te maken van deze overgangskansen, die als het ware zijn ingevroren. Dit model is in de jaren 1970 door F. Spitzer ingevoerd en het wordt onder andere gebruikt bij de beschrijving van transport in wanordelijke materialen, zoals elektrische stroom in legeringen en het vloeien van olie in poreus gesteente. Doel is het bewijzen van *homogeniseringseigenschappen*, dat wil zeggen laten zien dat het ruimte-tijd schalingsgedrag van de wandeling niet afhangt van de realisatie van de stochastische omgeving, maar slechts van de kansverdeling ervan, en te identificeren wat dit schalingsgedrag precies is (in het bijzonder diffusief, subdiffusief of superdiffusief). In dimensie 1 is het probleem in de jaren 1970 en

1980 opgelost door F. Spitzer, H. Kesten en Ya. G. Sinai. Maar in dimensies ≥ 2 is het een zeer taai probleem gebleken, met belangrijke bijdragen in de jaren 1990 door J. Bricmont, A. Kupiainen en G. Lawler en in de jaren 2000 door E. Bolthausen, A.-S. Sznitman en O. Zeitouni. Varadhan [18] bevat een analyse van de grote afwijkingen, die ook hier weer een centrale rol spelen. Voor een samenvatting zij de lezer verwezen naar de overzichtsartikelen van Zeitouni [20] en Sznitman [13].

De bestudering van een stochastische wandeling in een stochastische omgeving vraagt om een geheel nieuwe aanpak in vergelijking met de analyse van ruimtelijk homogene processen. Begin jaren 1980 introduceerde Varadhan, samen met G.C. Papanicolaou, het concept *omgeving gezien vanuit de wandeling*. Dit concept, dat door S. Kozlov onafhankelijk werd ingevoerd en dat een grote rol speelde bij Varadhan's werk aan hydrodynamische schaling (zoals hieronder beschreven), bracht het gebied een grote sprong verder. De reden is dat het omgevingsproces van de wandeling een oneindig-dimensionaal Markovproces is waaruit de ruimte-tijd schaling van de wandeling direct kan worden afgelezen. Essentieel daarbij is om voor dit omgevingsproces een (voor de evolutie) invariante kansmaat met geschikte eigenschappen te vinden. Dit werd bereikt in werk van Varadhan

met C. Kipnis [10], waarin een zeer algemene centrale limietstelling voor additieve functionen van reversibele Markovprocessen wordt afgeleid, gebruikmakend van het omgevingsproces en van spectraaltheorie. Dit werk legde de basis voor een groot aantal toepassingen.

Het continue analogon van het probleem is een diffusieproces met een ruimtelijke ruis, dat wil zeggen de diffusieoperator hangt op een stochastische wijze af van de plaats. Dit blijkt iets toegankelijker dan het discrete probleem.

Hydrodynamische schaling

De heilige graal van de statistische fysica is het *macroscopisch* gedrag van veeldeeltjes-systemen te verklaren uit de *microscopische* interactiewetten, zowel in als uit evenwicht. Vele wetten van de statistische fysica zijn een direct of indirect gevolg van de wet van de grote aantallen. Met behulp van de theorie van grote afwijkingen kan worden beschreven wat de kans is dat een systeem fluctuaties vertoont op een *mesoscopische* schaal, die interpoleert tussen de microscopische en de macroscopische schaal. Dit blijkt een belangrijke sleutel bij de bestudering van het gedrag van grote systemen.

Hydrodynamische vergelijkingen zijn deterministische differentiaalvergelijkingen die de evolutie van *behouden* grootheden beschrijven, zoals massa, impuls en energie. Op een mesoscopische schaal zijn de evolutievergelijkingen van het systeem in het algemeen niet gesloten. Varadhan's belangrijkste bijdrage, gestart in werk eind jaren 1980 met M.Z. Guo en G.C. Papanicolaou [7], bestond er in om aan te tonen dat mesoscopische gemiddelden van een grote klasse van observabelen zeer goed kunnen worden benaderd door functies van behouden grootheden. Voor grote systemen treedt er daarmee een *scheiding* op tussen de snel variërende microscopische observabelen en de langzaam variërende mesoscopische variabelen. Over de eerste kan dan worden uitgemiddeld, waarna een effectieve differentiaalvergelijking resulteert voor de laatste. Belangrijke bijdragen werden geleverd door J. Fritz, J. Lebowitz en H. Spohn in de jaren 1980 en door C. Kipnis, C. Landim, S. Olla, F. Rezakhanlou en H.-T. Yau in de jaren 1990. Voor een overzicht van dit gebied zij de lezer verwezen naar de boeken van Spohn [11] en van Kipnis en Landim [9].

De hydrodynamische vergelijkingen zijn universeel van aard, dat wil zeggen ze zien er hetzelfde uit voor een grote klasse van systemen die microscopisch verschillend maar macroscopisch gelijksoortig zijn. De details

van de microscopische interactie manifeste- ren zich via de *transportcoëfficiënten* in de hydrodynamische vergelijkingen. Deze dienen dan ook door de schalingstheorie te worden verklaard en te worden uitgerekend. Uiteindelijk dient de afleiding te geschieden op basis van Newtons's bewegingsvergelijkingen, maar tot nu toe bleek dat helaas te hoog gegrepen. Zodra echter een ruis wordt toegevoegd komt de waarschijnlijkheidsrekening in beeld en kan, voor een geschikte klasse van systemen, de hydrodynamische schaling worden afgeleid. De ruis zorgt er voor dat het ergodische gedrag van het systeem toeganke- lijker is.

Bij de scheiding van variabelen wordt ge- bruik gemaakt van het begrip *lokaal even- wicht*. Dit is een *Gibbsverdeling*, bekend uit de statistische fysica voor evenwicht, waar- van de parameters langzaam variëren over ruimte en tijd. De techniek vraagt om een zeer scherpe controle van fluctuaties, waar- bij de theorie van grote afwijkingen een cen- trale rol speelt. Voor zogenaamde gradient- systemen bleek de theorie goed te ontwikke- len. Voor niet-gradient-systemen bleek de uit- daging enorm veel groter, en een belangrijke sleutel werd gevonden door H.T. Yau [19] door gebruik te maken van het begrip *relatieve en- tropie*.

De hydrodynamische schalingstheorie staat in nauwe wisselwerking met de theorie van deterministische differentiaalvergelijkingen.

Eenzijds gebruikt zij existentie- en uniciteits- resulaten uit deze theorie, anderzijds voedt zij haar door deze resultaten af te leiden uit de schalingseigenschappen van veeldeeltjes- systemen. Hier raakt Varadhan's werk aan dat van de Abellaureaat Peter Lax.

Korte biografie

Varadhan werd in 1940 geboren in Madras (Chennai) in India en volttooide zijn studie aan Madras University in 1960. Hij promo- veerde in 1963 aan het Indian Statistical In- stitute in Calcutta, bij de beroemde statisti- cus C.R. Rao. De vermaarde russische wiskun- dige A.N. Kolomogorov, grondlegger van de waarschijnlijkheidsrekening, was lid van de promotiecommissie en betitelde Varadhan's proefschrift als 'het werk van een meester'. Na zijn promotie ging Varadhan als postdoc- torant werken aan het Courant Institute in New York. Daar is hij de rest van zijn loopbaan ge- bleven. In 1994 ontving hij de Birkhoff Prize, in 1996 de Leroy Steele Prize, in 2003 een eredoctoraat van de universiteit Pierre et Ma- rie Curie in Parijs en in 2004 een eredoctoraat van het Indian Statistical Institute. Hij is lid van diverse internationale academies, waar- onder de National Academy of Sciences van de Verenigde Staten.

Varadhan is getrouwd en heeft twee zoons. Zijn oudste zoon kwam in 2001 om bij de aan- slag op het World Trade Centre in New York, een gebeurtenis die een diepe schaduw over

zijn gezin heeft geworpen.

Varadhan heeft talrijke promovendi en postdocs begeleid. Door de jaren heen heeft hij zich ook ingespannen voor de wiskunde in organisatorische zin. Zo was hij directeur van het Courant Institute gedurende de perioden 1980–1984 en 1992–1994, editor van de *Annals of Probability* – een van de meest toon- aangevende tijdschriften in de waarschijnlijk- heidsrekening – gedurende de periode 1997– 1999, alsmede lid van diverse internationale adviescommissies. In 2005 was hij lid van het internationale review panel dat EURANDOM beoordeelde.

Varadhan is een zachtmoedige en inne- mende persoonlijkheid, met een milde blik op zijn medemens. Het is een genoegen om met hem te praten en te lachen. Hij is steeds behulpzaam en schijnt een licht uit over zijn collega's. Hij is dol op reizen, muziek en thea- ter. Vrijwel elk jaar keert hij terug naar India en geeft hij lezingen voor jonge wiskundigen.

Varadhan heeft de waarschijnlijkheidsre- kering in haar huidige vorm blijvend bein- vloed. Hij heeft vele nieuwe concepten in- gevoerd, die de oplossing van diepe proble- men mogelijk hebben gemaakt en die een beschrijving van een rijke variëteit aan ver- schijnselen in complexe stochastische syste- men hebben ontsloten.

Met dank aan Arnoud van Enter en Frank Redig voor commentaar op de tekst.

Referenties

- 1 A. Dembo and O. Zeitouni, *Large Deviations Techniques and Applications* (2nd. ed.), Springer, New York, 1998.
- 2 J.-D. Deuschel and D.W. Stroock, *Large Deviations*, Academic Press, London, 1989.
- 3 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'Asymptotic evaluation of certain Markov process expecta- tions for large time', *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 1–47 (Part I); 28 (1975) 279–301 (Part II); 29 (1976) 389–461 (Part III); 36 (1983) 183–212 (Part IV).
- 4 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'Asymp- totics for the Wiener Sausage', *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975) 525–565.
- 5 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'On the number of distinct sites visited by a random walk', *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979) 721–747.
- 6 M.D. Donsker and S.R.S. Varadhan, 'Asymp- totics for the polaron', *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983) 505–528.
- 7 M.Z. Guo, G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varad- han, 'Nonlinear diffusion limit for a system with nearest neighbor interactions', *Commun. Math. Phys.* 118 (1988) 31–59.
- 8 F. den Hollander, *Large Deviations*, Fields Insti- tute Monographs, Vol. 14, American Mathemat- ical Society, Providence RI, 2000.
- 9 C. Kipnis and C. Landim, *Scaling Limits of Inter- acting Particle Systems*, Grundlehren der math- ematischen Wissenschaften, Vol. 320, Springer- Verlag, Berlin, 1999.
- 10 C. Kipnis and S.R.S. Varadhan, 'Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusion', *Commun. Math. Phys.* 106 (1986) 1–19.
- 11 H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interact- ing Particles*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
- 12 D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan, *Multidi- mensional Diffusion Processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 233, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- 13 A.-S. Sznitman, 'Random Motions in Random Media', in: *Mathematical Statistical Physics*, Proceedings of the ESF/RSES Summer School at the Ecole Physique in Les Houches, France, July 2005 (eds. A. Bovier, J. Dalibard, F. Dunlop, A. van Enter and F. den Hollander), Elsevier, Am- sterdam, 2006, Course 4, pp. 219–242.
- 14 S.R.S. Varadhan, 'Asymptotic probabilities and differential equations', *Comm. Pure Appl. Math.* 19 (1966) 261–286.
- 15 S.R.S. Varadhan, 'On the behavior of the funda- mental solution of the heat equation with vari- able coefficients', *Comm. Pure Appl. Math.* 20 (1967) 431–455.
- 16 S.R.S. Varadhan, Appendix to K. Symaznik, 'Eu- clidean quantum field theory', in: *Local Quan- tum Theory* (ed. R. Jost), Academic Press, 1969.
- 17 S.R.S. Varadhan, *Large Deviations and Applica- tions*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 46, SIAM, Philadel- phia, 1984.
- 18 S.R.S. Varadhan, 'Large deviations for random walks in a random environment', *Comm. Pure Appl. Math.* 56 (2003) 1222–1245.
- 19 H.-T. Yau, 'Relative entropy and hydrodynamics of Ginzburg-Landau models', *Lett. Math. Phys.* 22 (1991) 63–80.
- 20 O. Zeitouni, 'Random walks in random environ- ment', in: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1837, Proceedings of the Probability Summer School in Saint-Flour, France, July 2001 (ed. J. Picard), Springer-Verlag, 2004, pp. 189–312.

Bert Greevenbosch

*Fraunhofer-Institut für Integrierte Schaltungen, Abteilung Audio
Am Wolfsmantel 33, 91058 Erlangen, Duitsland
bert.greevenbosch@iis.fraunhofer.de*

Column Wiskundigen in den vreemde

Werken bij de oosterburen

Bert Greevenbosch, nu drie jaar verbonden aan het Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen in Erlangen, Duitsland, studeerde in 2005 af bij Derk Pik in Leiden op een onderwerp op het grensgebied tussen audio en wiskunde. Door deelname aan een studentenuitwisselingsproject met China, kreeg hij de smaak van het reizen goed te pakken, en vond een passende onderzoeksbaan.

Mijn studie wiskunde aan de Universiteit Leiden heb ik in 2005 afgesloten met een afstudeerproject op het gebied van audio. Ik heb mij in die tijd beziggehouden met het scheiden van audiosignalen, waarbij de focus lag op het extraheren van één bepaald muziekinstrument uit een opname van meerdere instrumenten. Het project heeft mijn interesse voor digitale signaalverwerking gewekt en omdat ik na mijn studie naar het buitenland wilde, was een sollicitatie bij het *Fraunhofer Institut für Integrierte Schaltungen IIS* (kort: Fraunhofer IIS) in Erlangen, Duitsland een voor de hand liggende keus. Het Fraunhofer IIS is een van de 56 instituten van het Fraunhofer Gesellschaft. Al deze instituten houden zich bezig met toegepaste wetenschap. Elk instituut richt zich op een eigen onderzoeksveld en de instituten werken in hoge mate onafhankelijk van elkaar. Fraunhofer IIS is het grootste Fraunhofer instituut en houdt zich onder andere bezig met de ontwikkeling van audio- en videocodecs, medische technologie, digitale radio en satellietnavigatiesystemen. Een van de bekendste ontwikkelingen van Fraunhofer IIS is het audioformaat MP3.

Ik werk in de afdeling en heb als werkterrein de ontwikkeling en standaardisering van Digital Rights Management (DRM)-systemen. Bij deze systemen wordt een digitale inhoud (bijvoorbeeld een film) cryptografisch versleuteld geleverd. De sleutel wordt apart, in een licentie, gegeven. Naast de sleutel staan in die licentie ook de gebruiksvoorwaarden, zoals het maximaal aantal keren dat de inhoud afgespeeld kan worden of de datum tot wanneer de licentie geldig is.

Naast het feit dat DRM-systemen het maken van roofofschietingen moeilijker moeten maken, maken ze ook nieuwe businessmodellen mogelijk. Zo maakt DRM een online-videothek mogelijk, waarbij de gebruiker bijvoorbeeld voor een klein bedrag het recht koopt om een film drie dagen te huren. De gebruiker krijgt dan de versleutelde film plus een licentie om de film drie dagen te kunnen afspelen. Na drie dagen verloopt de licentie,

tenzij de gebruiker de huur verlengt door het kopen van een nieuwe licentie.

In technisch opzicht komt het verkopen of verhuren van inhoud dus neer op het verkopen van licenties. Om er zeker van te zijn dat licenties nageleefd worden, moet de sleutel tot de inhoud cryptografisch beveiligd worden geleverd. Het hoofdbestanddeel in de ontwikkeling van DRM-systemen is daarom het ontwikkelen van cryptografische protocollen en sleutelmanagement. Verder moet worden vastgelegd hoe een DRM-apparaat met licenties om moet gaan. Het apparaat moet er bijvoorbeeld voor zorgen dat een inhoud die drie keer afgespeeld mag worden, inderdaad niet meer dan drie keer afgespeeld wordt. Het is daarom belangrijk dat de protocollen en apparaatspecificaties goed geanalyseerd en beveiligd worden om te voorkomen dat hackers de licentievoorwaarden kunnen omzeilen.

Het DRM-systeem waar ik aan werk, OMA DRM, wordt niet alleen ontwikkeld door het Fraunhofer IIS. Aan de ontwikkeling van de standaard wordt deelgenomen door meerdere bedrijven uit de hele wereld binnen een standaardiseringslichaam genaamd de Open Mobile Alliance™ (OMA). Deze organisatie stelt een technische specificatie van de standaard op, een document waarin precies beschreven staat hoe een OMA DRM-implementatie eruit moet zien.

Om zo'n wereldwijd project in goede banen te leiden, zijn regelmatig conferenties nodig. Daarom vlieg ik bijna maandelijks naar allerlei landen in Azië, Amerika en Europa. Tijdens deze conferenties doen de deelnemende bedrijven, waaronder ook het Fraunhofer IIS, technische voorstellen. Die worden in de specificatie opgenomen, mits ze voldoende ondersteuning krijgen. Het is daarom niet alleen belangrijk om met goede voorstellen te komen, maar minstens zo belangrijk is dat duidelijk uitgelegd wordt waarom die voorstellen goed zijn.

Het leven bij de oosterburen is aangenaam en aan tradities is geen gebrek. In de winter wemelt het hier van de kerstmarkten, compleet met Glühwein- en Bratwurstbuden. In mei zeggen de Erlangers dat de berg roept, wat betekent dat er weer Bergkrichweih is: een festival vergelijkbaar met het Oktoberfest in München. Op het werk wordt op z'n tijd op Weißwürste mit süßem Senf getrakteerd, meestal rond 11:45u, want volgens de traditie moeten die worstjes voor 12 uur gegeten zijn. ←

Dirk Huylebrouck

Departement Architectuur Sint-Lucas

Brussel-Gent

huylebrouck@gmail.com

Interview Ingrid Daubechies

De typische reflex van de wiskundige

Ingrid Daubechies studeerde fysica aan de Vrije Universiteit Brussel, waar ze in 1980 promoveerde. Vrij snel werd ze overladen met Belgische wetenschappelijke prijzen waaronder de Empainprijs. Na een toevallige ontmoeting in Leuven met de Engelse Amerikaan Robert Calderbank zou ze vervolgens haar echtgenoot naar de VS volgen, waar ze een tiental jaar geleden de eerste vrouwelijke 'tenure' professor werd in de wiskunde van Princeton. Haar boek 'Ten lectures on wavelets' werd een standaardwerk. Toen ze in 1994 een uitgenodigd spreker was voor het 'International Congress of Mathematicians (ICM)' waren slechts twee vrouwen haar ooit voorafgegaan: Emmy Noether, in 1932, en Karen Uhlenbeck, in 1990. Ze won vele erkenningen, waaronder het lidmaatschap van de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen en de Gouden Penning van de Koninklijke Vlaamse Academie van België. In het jaar 2006, behoorde ze tot de vijf koppige jury van de Abelprijs. Toch vindt ze nog de tijd om les te geven in Brussel, waar Dirk Huylebrouck haar interviewt. Dit artikel verscheen eerder in EOS van juli/augustus 2006.

We wachten voor het leslokaal van de Vrije Universiteit Brussel waar Ingrid Daubechies afscheid zal nemen van haar studenten voor het geplande interview. Enkele minuten voor het afgesproken uur kondigt de professor aan dat het tijd is voor een pauze. Zijn we een lesuur te vroeg? Nee, er is niets aan de hand: Daubechies draagt geen horloge en gaat zodanig op in de wiskunde dat ze alle notie van tijd vergeet. We horen Philippe Cara, de VUB-wiskundige die zich protocollair ontfemt over de mathematische eminentie, er diplomatisch op wijzen dat de les voorbij is, en het de beurt is aan EOS.

Dinosauriërs

Het ochtendcollege zit erop, en Ingrid neemt afscheid van haar goede vriendin, de ULB-professor fysica Christine De Mol, die de lessen komt volgen, uit sympathie. We gaan restaurantwaarts — of nee, eerst gaat het nog

eens langs het 'Koninklijk Belgisch Instituut voor Natuurwetenschappen' (KBIN, Elsene). Het was immers ter sprake gekomen dat de oudste wiskundige vondst van de mensheid daar bewaard wordt, en daar wil ze wel het fijne van weten. Ze is verheugd wanneer we de grote houten dinosaurius zien voor de ingang van het museum.

Ingrid Daubechies (ID): Weet u dat dinosaurussen eigenlijk geen grote roofdieren zijn, maar aaseters? Dat ziet u toch, kijk, hun voorarmpjes zijn zelfs te klein om een achtervolgende prooi te kunnen grijpen... Geschiedenis is een onderwerp dat me erg interesseert, en ik discuteer dikwijls met archeologen in Princeton. Een van mijn beste vrienden is een geschiedkundige. Trouwens, die vaststelling over die korte armpjes, dat is toch gewoon 'logica'?

EOS-fotograaf Philip Van Outrive kijkt me aan,

en ik probeer even de suggestie dat een dergelijke dinosaurius misschien een soort grote kip was, vermits ergens een dino met veren was ontdekt, maar ik moet snel onderdoen voor Ingrid's dinosaurussengeheugen. Ze zit bereidwillig onder de houten dino, want een amusante foto wil ze wel voor haar vriendenkring in Princeton. Uiteindelijk gaan we naar binnen.

ID: Hmm, een aangename parketvloer, hier in dit museum, en ja, stevig, want, kijk, de plankjes van de parkettegeltjes zijn niet langsheen de houtnerf gesneden, maar loodrecht erop.

Het been van Ishango

We waren al tientallen keren in dit museum geweest, maar waren blijkbaar minder wiskundig precies in onze observatie.

ID: Ja natuurlijk, een oud voorwerp waarop mensen telden, uit Afrika, nu ja, zo verwonderlijk is dat niet! Tellen is toch iets écht menselijks. Ik ben nogal eens verontwaardigd wanneer ik mensen zonder schroom hoor zeggen dat ze niet over iets wiskundigs willen spreken. Ook in pers en media hoort men mensen opscheppen over de laatste roman die ze gelezen hebben, maar als het over wiskunde gaat, wordt het door velen aanvaard om vanuit de hoogte te verklaren dat ze absoluut niets van het vakgebied willen weten. Zonder schroom zeggen deze mensen, die zich dan nog intellectuelen durven te noemen, dat ze wiskundige leken zijn. Nee,



Ingrid Daubechies voor het Koninklijk Belgisch Instituut voor Natuurwetenschappen

Wavelets

Dirk Huylebrouck (DH): uw naam is verbonden aan de 'Ingrid Daubechies wavelets', die voorstellingen van krommen als sommen van golven, die een alternatief werden voor de Fourieranalyse en later toepassingen vonden in het JPEG-formaat en de vingerafdrukkencatalogus van het FBI. Het Internet heeft talloze sites over het onderwerp, en soms dragen ze zelfs uw voornaam...

ID: Inderdaad, het zijn de 'Ingrid Daubechies wavelets', tja, dat is zo, met de voornaam erbij; zo staat het bijvoorbeeld toch in de 'Wavelet Digest', een elektronische nieuwsbrief waar u zowat alles over die 'golfjes' kan vinden. Het is een wiskundige traditie om telkens de voornaam te vermelden wanneer een resultaat toegeschreven wordt aan een vrouw. Men spreekt dus van de 'Ingrid Daubechies-golfjes' maar van de 'Fourieranalyse'. Dit gebruik werd, denk ik, in de jaren 1930 of 1940 ingevoerd door de London Mathematical Society. Bij publicaties van het wiskundige duo 'Cartwright en Littlewood', stond steeds de voornaam 'Mary' van 'Dame Mary Lucy Cartwright', maar de co-auteur kreeg slechts zijn initialen (J.E.) toebedeeld. Nu ja, u moet de vermelding van de voornaam niet als een teken van mathematische kapsones of zo zien, het duidt er eigenlijk vooral op hoe weinig vrouwen er actief zijn in het internationale onderzoek van de wiskunde.

Intuïtie

DH: Wel goed, 'Ingrid', waar werd u deze beroemde voornaam u toegekend?

ID: Ik ben geboren in Houthalen, waar mijn vader, die mijnbouwingenieur was, werkte. Later verhuisde ik nog een paar maal, naar Zwartberg, ja, het Zwartberg van de beruchte mijnsluiting, en, precies daarom, verhuisde ik later nog eens, naar Turnhout, waar ik woonde tot aan mijn studies aan de VUB. Ik ben mijn ouders erg veel verschuldigd, want zowel mijn vader als mijn moeder hielden zich intens met mijn opvoeding bezig. Nu ik zelf twee kinderen heb, zie ik hoe opmerkelijk de evolutie van de jonge geest is. Mijn ouders vertellen al eens dat ik als vijfjarige het ruimtelijke inzicht had om het bovenaanzicht te begrijpen van een tetraëder [een regelmatige piramide met driehoekig grondvlak], en daarna om zelf te bepalen hoe een kegel er van bovenuit zou uitzien, namelijk, als een cirkel. Welnu, bij mijn nu vijftienjarige dochter Carolyn zag ik eveneens een pril geometrisch inzicht toen ze een kleuter was, maar niet bij mijn zoon Michael. Dit wil natuurlijk niets zeg-

Foto: Philip van Buerve, Hollandse Hoogte

kijk, die mensen in Afrika, die twintigduizend jaar geleden patronen kerfden op een beentje, zelfs al ware het erg eenvoudige reeksen streepjes, deden wellicht een geestelijke prestatie die meer respect verdient dan sommigen willen toegeven.

Uiteindelijk overtuigen fotograaf en maag haar om het museum uit te wandelen naar de Horloge du Sud, een Afrikaans restaurant aan de rand van de Brusselse Matongewijk. We dienen nog even te stoppen voor tentoon-

gestelde potten in aardewerk, waar ze sinds haar jeugd een zwak voor heeft. Gelukkig begrijpt ze snel dat het vervoer per vliegtuig problemen zal geven, en zijn de mannelijke EOS-afgevaardigden snel verlost van het vrouwelijke winkelplezier. Inderdaad, deze wiskundige doorbreekt een aantal vooroordelen in één klap, met haar brede interesse voor andere wetenschappen, door haar ongedwongheid waarmee ze een Afrikaans restaurant binnentapt, en, jazekeer, ook omdat ze een vrouw is.

gen, want precies Michael schijnt vandaag, op achttienjarige leeftijd, wel iets voor wiskunde te voelen, terwijl Carolyn wellicht een meer kunstzinnige richting zal uitgaan.

We proberen met een lichte indirecte provocatie het feit aan te snijden dat ze ten slotte als een van de weinige vrouwen in de hogere wiskundige wereld is beland, door te wijzen op de mannelijke namen die de sommige van de haar toegekende eretitels dragen (zoals 'fellow' of 'kerel'), maar de uitgestoken hand om de eigen verwezenlijkingen op te sommen of om een feministische monoloog af te steken vangt bot.

DH: U kreeg vele eretitels, zoals dit van 'fellow' ...

ID: Och ja, maar ik hou dat niet allemaal zo bij. Mijn internet site, tja, ik zou die meer moeten bijwerken, maar goed. Maar voor dergelijke informatie over prijzen moet u bij mijn medewerkster zijn in Princeton. Ze hebben daar lijsten met die zaken. En die 'fellow', ja, dat is zo'n titel, dat heet nu eenmaal zo, dat was bij het 'Institute of Electrical and Electronics Engineers', het IEEE. Het is geen prijs, je kunt daar lid van worden, van die 'aai-trippel-ie', maar af en toe komen de leden samen en geven ze als erkenning een soort erelidmaatschap, en die heet dan 'fellow'. En daarnaast hebben ze nog 'awards' en zo ... maar daarvoor kan u dus terecht bij 'Valerie'.

Het belang van onderwijs

We gooien het dan maar over een andere boeg, en polsen even naar haar huidige activiteiten.

DH: Wat motiveert u dan wel, als het niet al die erkenningen zijn?

ID: Ik geef nu lessen op het niveau van bachelors, de kandidaturen, jazerker, en de masters. Ik kan nog steeds intens plezier scheppen in het onderwijzen van die basisvakken. Tegelijkertijd dirigeer ik het thesiswerk van enkele doctoraatsstudenten. Tot op vandaag heb ik in totaal twaalf studenten begeleid, en deze hebben ze hun eigen loopbanen aan andere universiteiten of bij Intel, AT&T, of IBM, en nee, niet noodzakelijk in het domein van hun onderzoek, nee dat hoeft toch niet?

Ik amuseer me best, want de lijst van doctoraatsstudenten was bijvoorbeeld erg internationaal: er kwamen telkens twee uit China, Turkije en de VS (twee meisjes!), en één uit Roemenië, Rusland, Griekenland, Frankrijk, Ierland en, ja zeker, één van hen kwam uit België. Deze Stefan Maes werkt nu bij IBM in

de VS. Op dit moment heb ik vijf studenten in the running voor een PhD. Ik werk ook samen voor onderzoek met twee postdoctorale onderzoekers en natuurlijk zijn er verscheidene medewerkers in verschillende landen met wie in vragen en problemen uitwissel. Daarnaast doe ik nog administratief werk voor zowel de universiteit als voor organisaties erbuiten zoals de American Mathematical Society. Ik doe nog steeds mijn eigen wiskundig onderzoek, publiceer in wetenschappelijke tijdschriften, en neem deel aan nationale en internationale comités, tja zowat de klassieke werkbelasting van een wiskundige. Ik geef ook veel voordrachten en lezingen.

DH: Ja, en soms zelfs over statistiek, wat toch niet direct uw vakgebied is?

ID: Nu ja, 'statistiek'. Iedereen zou wat wiskunde moeten kennen, want het correcte gebruik van statistieken en dergelijke laat over het algemeen erg te wensen over. Als ik lees in de kranten dat 'de overgrote meerderheid vindt', dan weet je daar niets mee als je niet weet aan hoeveel mensen je dat gevraagd hebt. We moeten de strijd aanbinden tegen de 'ongecijferdheid' [Het cijferkundige equivalent van analfabetisme, bekend gemaakt door John Allen Paulos]. In Princeton geef ik een cursus voor mensen die helemaal niet in wiskunde of wetenschappen geïnteresseerd zijn. 'Quantitative Reasoning' heet die cursus.

In het Amerikaanse systeem zijn sommige studenten immers verplicht een extra cursusje wiskunde bij hun lessenpakket te voegen, hoewel ze absoluut geen wiskundige richting volgen noch ingenieur of zo wensen te worden. In vele gevallen kiezen ze dan voor 'calculus', de basiscursus over afgeleiden en integralen. Sommigen opteren hiervoor trouwens bij wijze van gemakkelijksoplossing, want deze berekeningetjes krijgt men ten slotte mits een beetje inspanning wel onder de knie. Velen opteren dan weer voor die 'calculus' omdat ze weten dat ze in een wetenschappelijke richting zullen verder gaan, en erop vertrouwen dat zij later wel zullen zien waar die 'calculus' nuttig voor is.

Maar er is ook een grote groep studenten die na die ene cursus nooit meer aan wiskunde zal doen. Ik heb dus gedurende enkele jaren een alternatieve cursus gegeven, getiteld 'Math for Life' ('Wiskunde voor het Leven'), die samenvat waar het in wiskunde allemaal over gaat. Dikwijls vormen de toepassingen juist het vertrekpunt, en ik probeer aan te tonen tot welke stellingen zij aanleiding geven. Geen technische wiskunde dus, maar nadenken over de wiskunde. Ik deel

de de cursus onder in een aantal onderwerpen, en trok zes uur uit per onderwerp. Enkele voorbeelden zijn de cryptografie, dat wil zeggen het coderen en ontcijferen van boodschappen, vanaf de tweede wereldoorlog tot op vandaag, want voor beveiligen op het Internet zijn coderingssysteem erg actueel. Het verbeteren van fouten in doorgegeven boodschappen, en de compressie van bestanden is een verwant onderwerp.

En wat die statistiek betreft, is er in de VS bijvoorbeeld het idee om alle immigranten te testen op AIDS. Een goed idee, en men kan zich afvragen waarom mensen daar tegen zouden kunnen zijn. Wel, het probleem is de verwarring tussen een 'voorwaardelijke kans' en een 'absolute kans'. Wanneer een aidstest een positief resultaat levert, stelt men nogal snel dat de onderzochte inderdaad AIDS heeft. Nochtans geeft een bepaald percentage van de test een foutief resultaat, terwijl het zelfs kan gebeuren dat de test een negatief resultaat geeft terwijl de ziekte toch aanwezig is. Een eerste test geeft dus slechts een aanwijzing. In de VS is de zogenaamde 'prosecutor's fallacy' actueel, dat wil zeggen, dat bijvoorbeeld een vaststelling van vingerafdrukken toch kan leiden tot een foutief resultaat. Weer gaat het hier over een verwarring met het begrip voorwaardelijke kans: er is een verschil tussen de kans dat 'de persoon die de test op vingerafdrukken heeft ondergaan de schuldige is' en de kans dat 'de persoon die de schuldige is de test heeft ondergaan.'

Voor iedereen

We worden gered door de dienaar van het restaurant, die de conversatie op dat ogenblik onderbreekt door twee borden voor te stellen, één met Afrikaanse gegrilde bananen en één met een soort Afrikaanse parelhoen in bosbessensaus uit de jungle. Daubechies lost het keuzeprobleem op door het voorstel dat we elk de helft zullen nemen, en we daarna van bord zullen wisselen. De opmerking dat ik zelf liefst 'de grootste helft' neem doet besluiten dat het toch beter is om verder over wiskunde te praten.

ID: ... dus wat ik wil duidelijk maken is hoe dikwijls mensen met cijfers goochelen, zomaar. Ik wil mijn studenten wapenen, wanneer ze nog een laatste keer in hun opleiding wiskunde hebben. Het merkwaardige is dat die cursus 'Math for Life' altijd volzet is, en de studenten zijn best tevreden. Ze hebben geen klassiek examen, maar krijgen een he-le-boel 'huiswerk', van het oplossen van wiskundige vraagstukken tot het beschrijven van

wiskundige redeneringen en toepassingen.

In de wiskunde doe je veel meer dan een bepaalde specialisatie leren. Je leert vooral een andere aanpak van de dingen kennen, te bekijken, concepten te abstraheren, zoveel meer dingen. Je leert een wereld kennen en als ja daarna van die wiskundige reis terugkomt en een andere bestemming kiest, dat kan natuurlijk. Maar iedereen die al een andere verland bezocht heeft, en daar enkele jaren verbleven heeft, zoals een wiskundige die gedurende enkele jaren verblijft in de mathematische wereld, wel, die draagt die ervaring hoe dan ook mee in zijn leven en loopbaan.

Sommigen gaan inderdaad verder met het wiskundig onderzoek, omdat ze daar bijvoorbeeld heel goed in zijn. Maar het kan niet de bedoeling zijn om sommige mensen aan te zetten tot gevorderd wiskundig onderzoek, terwijl we anderen de wiskunde ontzeggen omdat ze er niet goed genoeg in zijn. Het is lang zo geweest dat men dacht dat alleen echt wiskunde kon en moest gegeven worden aan hen die er goed in waren.

Je kunt het vergelijken met sport: je doet geen sport alleen maar om ooit aan de Olympisch Spelen deel te nemen. Er zijn een heleboel mensen die plezier kunnen beleven aan sport, terwijl ze goed weten dat ze niet naar de Olympische Spelen zullen gaan.

En je doet wiskunde als je er inderdaad plezier aan beleeft. En dat moet wel, want anders kan wetenschap heel ontgoochelend zijn. Als je iets vindt, na maanden zoeken, ben je er een paar dagen blij mee, zelfs in het beste geval waarin blijkt dat alles juist is, en daarna begint een nieuwe frustrerende zoektocht. Je bent er niet lang blij mee want je vindt dat het veel te lang geduurd heeft...

Op dat moment wisselen we de helften van onze borden om. Uw fiere EOS-reporter, die nu het bord van Daubechies voor zich heeft staan, vertelt hoe hij ooit eens het bureau mocht delen van Jacques Tits, de Belgische Eddy Merckx van de zogenaamde gebouwen-theorie, toen deze laatste uitgenodigd was aan de Universiteit Gent.

ID.: ... tja, er is een zo'n 'issue' in Princeton: 'Who has Einstein's office'. Ik weet wel niet meer wat het antwoord was, want Einstein zelf had gevraagd dat zijn bureau heel gewoon zou zijn, en dat ze vooral van zijn huis geen museum zouden maken of zo... Ik woon daar, natuurlijk, in Princeton, en maar ik ben meer bezorgd over de eekhoortjes. Ik heb zo van die parapluutjes boven elk vogelhuisje om ze ervan te weerhouden om het voedsel weg te nemen van de vogeltjes...

We achten het ogenblik rijp om het provocerende onderwerp van de vrouwelijke ondervertegenwoordiging in de wiskunde aan te snijden.

DH: *Ondanks uw erg gewone verschijning en de ongedwongenheid die we doorheen deze ontmoeting mogen ervaren, was u wel de derde vrouw ooit om te spreken op het ICM.*

ID: Nu ja, samen met Marina Ratner, in 1994, inderdaad.

DH: *Goed, maar hoe komt het dat zo weinig vrouwen op de hoogste wiskundige echelons staan? En in het bijzonder, wat betreft de abstracte wiskunde, zijn vrouwen dan niet zo geschikt voor abstractie?*

ID: ... Och, dat is gewoon idioot...

We proberen de situatie te redden door het voorbeeld aan te snijden van de erg abstracte wiskunde waar ze haar verhandeling over had gemaakt, en zonder het te beseffen ervaren we hoe zij niet te vinden was voor enige woordenkramerij over de zogenaamd niet-abstracte vrouwelijke geest, maar wel voor een demonstratie van haar kunnen om een abstracte redenering uit te leggen naar het grote publiek.

De relatie met fysica

DH: *u studeerde aanvankelijk geen wiskunde maar fysica, en u bent dus van de fysica naar de wiskunde geëvolueerd. Dikwijls is het omgekeerd, en vinden wiskundigen er genoeg in om hun vaardigheden toe te passen op andere disciplines. Uw doctoraat droeg de titel 'Voorstelling van operatoren in de quantummechanica als kernen van analytische functies in Hilbertruimtes', en u legde het af onder promotorschap van Prof Dirk Aerts, die als huidig hoofd van het centrum 'Leo Apostol' de abstracte wiskunde beoefent in die mate dat de overgang naar filosofische beschouwingen vrijwel voor de hand ligt.*

ID: Wel ja, de klassieke fysica probeert aan een lichaam, aan een punt, een complete karakterisering te geven de coördinaten in de ruimte en de snelheid. Dit levert de zogenaamde faseruimte. Dit mechanische model doet het perfect in dagelijkse omstandigheden. In de jaren dertig heeft men het inzicht gekregen dat de quantummechanica de toestand van een deeltje beschrijft op een andere manier, door een zogenaamde 'ééndimensionale deelruimte van een Hilbertruimte'. Het doet er nu weinig toe wat die precies is, maar wel dat positie en snelheid van het deeltje

in dit geval gevolgen zijn, eigenschappen, die kunnen berekend worden door de kennis van het gedrag van een bepaalde 'operator'. Het zijn dus niet de gegevens waaruit men vertrekt.

Maar wat is nu het probleem? Er is niet alleen de invoering van de ondergrens, de 'constante van Planck', 'h-bar', waartoe de precieze en simultane plaatsbepaling en snelheid van een deeltje beperkt zijn. De grote moeilijkheid is dat het beschrijvingskader van de quantummechanica en klassieke mechanica totaal verschillend zijn. Het volstaat niet om te veronderstellen dat die 'constante van Planck' bijna nul wordt, om de overgang van de quantummechanische studie naar de natuurkunde van de dagelijkse omstandigheden terug te vinden.

In de relativiteitstheorie heeft men die moeilijkheid niet. Einsteins theorie is eveneens een andere zienswijze op de klassieke mechanica, waarin er dan weer een bovengrens is voor alle snelheden die men zich maar kan indenken, namelijk de lichtsnelheid. Als men zich inbeeldt dat deze bovengrens oneindig groot is vindt men de klassieke mechanica terug, en de overgang van Einstein naar Newton is dus 'relatief' eenvoudig. In de quantummechanica gaat het niet zo eenvoudig om die overgang te beschrijven, en over een stukje van die studie ging mijn doctoraat. Natuurlijk was het iets technischer, met tensorproducten en dergelijke, ...

Uw verslaggever was even uit zijn lood geslagen. Het beeld van de vrouwelijke wiskundige die zich bij wijze van wetenschappelijke sublimatie van een huismoederlijke inborst toelagde op de praktische toegepaste wiskunde bleek niet te kloppen. In tegendeel. De interviewer, die als mathematische macho ooit fier was deze tensortoestanden te hebben onderwezen op de meest abstracte wijze, was op zijn plaats gezet. Misschien had de restaurantuitbaatster gemerkt dat de interviewer iets bleker werd, al wist ze niet dat dit kwam door de gemoedelijke maar duidelijke toon waarop Dame Daubechies over abstracte wiskunde sprak. Alsof ze dacht dat de voorgeschotelde Afrikaanse maaltijden ook iets te abstract waren, ging ook deze dame prompt over tot beschouwingen over concrete ingrediënten van de tot dan abstracte maaltijd. Tijd om even te recapitulieren, vond Daubechies.

ID: Ik vind dat onderscheid tussen aan de ene kant de topologie, de meetkunde, de differentiaalrekening, enzovoort, en aan de andere kant de toegepaste wiskunde eigenlijk niet goed. Elk van die vakken hebben hun toe-

passingen, en men zou dus moeten spreken van de toepassingen van bepaalde differentiaalvergelijkingen, van toegepaste meetkunde, enzovoort. Het verschil tussen zuivere en toegepaste wiskunde is niet zo erg contrasterend als men al eens wil doen denken. De zuivere wiskunde voedt de toegepaste en omgekeerd. Het artikel 'The unreasonable effectiveness of mathematics' was ooit populair in wiskundige kringen, maar eigenlijk ga ik niet zo akkoord met die titel (Dit artikel is van de hand van Eugene P. Wigner. Er zijn echter ook nog andere geschriften die in hun titel hierop een toespeling maken).

Er is niets 'onredelijk' aan dat wiskunde zo effectief is, in de natuurwetenschappen. Wiskunde rijkt gewoon een manier aan, op georganiseerde wijze, over 'hoe' we logisch nadenken. Ze omvat niet alle operaties van nadenken, natuurlijk niet, want er is ook de muziek, de opera, ..., nee, nee, wiskunde staat niet met alle operaties van onze hersenen in verband, maar het is een taal voor het logische nadenken, een 'ge(di)stilleerde taal'.

Het spreken van deze verzorgde logische denktal is belangrijk voor een wetenschapper. Ik maak soms de vergelijking met een situatie in het moderne ballet, waar sommige kunstenaars een tijd lang niet wilden werken met klassiek gevormde dansers. Daar zijn velen nu van afgestapt, omdat ze zagen dat een klassieke balletvorming een grote soepelheid en snelheid in beweging meegeeft. De zuivere wiskunde geeft een analoge soepelheid maar dan voor de geest, en die is noodzakelijk voor toepassingen in diverse wetenschappen.

DH: Sommigen vinden muziek nochtans ook wiskunde.

ID: Hmm, men moet zich nauwkeurig uitdrukken: als we beginnen nadenken over de structuren van de muziek, ja, dan doen we wiskunde ... Maar goed, bij dat logische nadenken is een belangrijke stap het onderzoeken of men geen tegenvoorbeeld kan vinden. Dit is eigenlijk een typische reflex van de wiskundige, zijn manier van denken. De basisreflex bestaat erin de dingen in vraag te stellen, een beetje zoals een jonge tiener die tegen alles wenst te protesteren.

Ijdele wiskundigen

DH: Eigenaardig dan toch dat jonge tieners niet meer aangetrokken worden door wiskunde?

ID: Maar ja, dat komt omdat het hen niet zo voorgesteld wordt. Ik ben ergens, in verband met de huidige rage over Sudoku, gevallen

op de uitdrukking 'Sudoku is not math, it is fun'. In die uitspraak zitten een heleboel fouten dingen. Ten eerste, is er de ondertoon dat als iets prettig is, het geen wiskunde kan zijn. Ten tweede, klopt het niet: het is wel wiskunde. Het houdt verband met logisch nadenken. Er zit misschien meer wiskunde in dan in bepaalde zaken die ze op school gezien hebben. En belangrijk is ook dat men bij het sudoku-spelen iets doet, een activiteit verricht, en niet alleen toekijkt. Wiskunde is ook doen. Er zijn natuurlijk ook mensen die met plezier dingen lezen en in zich opnemen, en er niets mee doen.

Er is een heleboel fout met hoe de wiskunde wordt voorgesteld. Voor een deel is dat te wijten aan de wiskundigen zelf die te lang de nadruk hebben gelegd op de moeilijkheid van de wiskunde, en dit bereikte soms een bijna esoterische dwangmatigheid. Alleen de meest talentvolle leerlingen waren interessant voor de leerkrachten.

DH: De wiskundige Arnol'd zei enige tijd geleden ook zo iets, geloof ik, namelijk dat de wiskundigen hierop later afgerekend zouden worden, en is dat nu inderdaad niet zo?

ID: Dit is natuurlijk vreselijk, inderdaad. Ook de manier waarop vele wiskunde gepubliceerd wordt, ik bedoel, de stijl. Als je naartijdschriften kijkt, boeken en zo, dan heeft men meer de indruk dat het erom gaat om zoveel mogelijk te kunnen samenballen op zo weinig mogelijk plaats. Alleen al de wijze waarop een artikel begint, wordt in vele wiskundige publicaties niet uitgelegd. Waarom is de vraag die in een artikel behandeld wordt interessant? Nee, dat staat er zelden bij.

Meestal gebeuren de opbouw en het onderzoek naar een nieuw wiskundig idee op de omgekeerde manier waarop men het daarna opschrijft. De wiskundige wil ergens naar toe en vermoedt dat iets waar moet zijn, naar zijn gevoel, en hij werkt eraan tot het klopt, hij voegt een voorwaarde bij, hij kneedt en herkneedt zijn rederingen. Daarna schrijft hij het helemaal anders op, in een andere volgorde, en zonder zijn aanvankelijke vragen en vermoedens. En dit is niet goed voor studenten. De benadering van voorstellen van wiskunde in de voorbije decennia was vrij elitair, en de lezer werd enkel verondersteld lijdzaam de gepolijste wiskundige monoloog van de auteur te ondergaan.

DH: Euh, mevrouw Daubechies, mogen we dit zo publiceren?

ID: Ja ik hoop het, dat u dit zal doen. Over deze moeilijkheden spreken is het enige dat ik kan

doen om de situatie te veranderen, dus, zeker, doet u maar. Elitaire teksten die lijdzaam moeten worden ondergaan dragen bij tot de reputatie dat wiskunde iets ontoegankelijk is.

Men zegt altijd: wiskunde doe je door te doen, en niet door lezen, en dat is waar. Als iemand zou beginnen uitleggen hoe men een Sudoku moet oplossen, wel, dat zou vreselijk saai zijn. En volgens de wijze waarop vele wiskundige teksten zijn opgeschreven, krijgt men alleen de opgeloste Sudoku te zien, en wordt de lezer verondersteld uit die voorgeschotelde oplossing de afgelegde weg opnieuw te kunnen reconstrueren.

DH: En, hoe publiceert u dan zelf?

ID: Wel, ik wil de wereld niet op zijn kop zetten. Er is een plaats voor tijdschriften voor specialisten die zodanig ingewerkt zijn in een bepaalde materie dat zij samengebalde redeneringen kunnen volgen. Maar vooral in het onderwijs en in de leerboeken zou de situatie moeten veranderen. Ik geef nu een cursus reële analyse, en gebruik nu een tekstboek van ene Charles Pugh (uitgegeven bij Springer), en op het einde zegt hij 'beware of math books without pictures' ('wees beducht voor wiskundeboeken zonder illustraties'). Dit moet opgevat worden in de ruimste zin, ook voor de meest abstracte wiskunde kunnen schema's, Venndiagrammen nuttig zijn. Denk bijvoorbeeld aan het schema om te bewijzen dat Q , de verzameling der rationale getallen, aftelbaar is, aan de hand van het schema van Cantor. Zelfs metaforen, beelden in de ruimste zin dus, zijn van nut in de communicatie tussen wiskundigen.

Een beroepswiskundige moet niet alleen de dingen kunnen bedenken en beredeneren, hij moet ze ook kunnen meedelen, communiceren, anders blijven ze zijn gedachten ... waar ze waren.

Bourbaki

DH: Zou dit probleem van stijl geen oorsprong vinden in de Bourbaki-traditie? [In de vorige eeuw was er een aantal Franse wiskundigen, die zich groepeerde onder de naam Bourbaki en de grootse ambitie hadden om alle wiskunde in te beschrijven, net zoals d'Alembert en Diderot enkele eeuwen voorheen hadden gedaan voor de gehele menselijke kennis, met hun fameuze 'Grande Encyclopédie'. Deze beweging is sinds enkele jaren onderhevig aan kritiek in sommige kringen, precies omdat de wiskunde er te strak gepresenteerd zou zijn.]

ID: Nee, de ambitie van Bourbaki was fris

en origineel in zijn tijd: men wou met minimale voorwaarden opnieuw bewijzen hoe een groot aantal recente resultaten met elkaar in verband stonden, en op rigoureuze wijze. Nee, Bourbaki leverde een kostbaar inzicht. Maar je kunt wiskunde niet op die manier onderwijzen, net zoals je geen les kan geven uit een encyclopedie.

Met andere woorden: de wiskunde zou op een meer de 'natuurlijke' wijze moeten aangeleerd worden. Kinderen leren eerst een taal en pas daarna leren ze de regels van de grammatica, door het zien van patronen die samenvallen in verschillende situaties.

Het een beetje zoals met dat beentje van Ishango: men ontdekt dat men kan tellen met kerven, door lijntjes te plaatsen, en het abstracte denkbeeld van drie koeien, zonder die koeien, of drie planten zonder planten is geboren. We staan daar nu natuurlijk niet meer bij stil, maar het is een allereerste wiskundige verwezenlijking. In de hogere wiskunde is men even verwonderd wanneer men een groepsstructuur, of een differentiaalvergelijking kan onderscheiden. Patronen zien en willen zien is fundamenteel menselijk.

Uw verslaggever vond dit een mooi besluit, want op deze wijze eindigde het gesprek als het ware waar het begonnen was, met de kerfjes op het Afrikaanse beentje. Daubechies bleek echter zelf voor een mooie afronding te zorgen, door uiteindelijk in te gaan op de vraag die een paar maal was gesteld, namelijk waarom een Belgische vrouw het zover heeft gebracht in de wiskunde.

ID: Ja, ik zie inderdaad slechts weinig vrouwen rondom mij op wiskundige congressen, maar de situatie verbetert snel. Trouwens, ook de vertegenwoordiging van 'minorities' is nog steeds erbarmelijk, en misschien minder hoopvol zelfs. Ik verleen al eens diensten aan 'SUMMA', een speciale groep van de vereniging van Amerikaanse wiskundigen die zich

inzet voor de vertegenwoordiging van 'minorities' in de VS. Wanneer men mij vraagt voor een voordracht, probeer ik daar op in te gaan. Zeker.

Toch hebben de studies van wiskunde een hoger democratisch gehalte dan vele andere, want op zich zijn zij niet duur. In de wiskunde kan men als land goed zijn zonder al te veel infrastructuur, en misschien verklaart dit het succes in het vakgebied van landen zoals Hongarije, Noorwegen en ... België, inderdaad. Tja, in de fysica staat Nederland verder, omdat ze ook een langere traditie hebben — tenslotte hebben we ze Simon Stevin geschonken, zij het op aandringen van de Spanjaarden (lacht).

Plannen voor de toekomst

Bij het naar buitengaan polsen we nog even naar de toekomstplannen van de topwiskundige.

ID: Ik bouw natuurlijk verder aan de theorie en de toepassingen van de 'wavelets'. Er was een tijd waarin vooral de basis werd uitgebouwd, daarna werden enkele belangrijke toepassingen gevonden, en uiteindelijk was het op een gegeven moment het gewoon 'in' om 'wavelets' te gebruiken voor van alles en nog wat. Dit was, naderhand beschouwd, zelfs een goede zaak, want zo kon men die wavelets verder goed leren begrijpen. Maar nu is men aan het stadium gekomen dat wavelets een werktuig zijn geworden, zoals een ander wiskundig 'tool' en blijft het dus interessant om die ontwikkelingen te volgen, en liever nog, ze vooraf te gaan.

Een heimelijke droom is de uitbouw van een centrum voor toegepaste wiskunde, in België. Heimelijk, nu ja, ik heb al enkele gastcolleges gegeven, aan de Vrije Universiteit Brussel, zoals een cursus 'aanvullingen van de wiskunde' in het derde jaar ingenieurswetenschappen en een cursus 'wiskunde voor

technologie' in het derde jaar wiskunde.

DH: Volledig gratis, naar we hebben vernomen, en u logeert niet eens in een chique hotel?

ID: De universiteit vergoedt mijn reiskosten en ik verblijf bij mijn vriendin Christine. Ik beschouw het als een manier om iets terug te geven aan de maatschappij. Ik hoop wel dat deze lessen naderhand worden overgenomen, en dit is gedeeltelijk al zo, want VUB-docenten Stefaan Canepoel en Philippe Cara zijn een grote hulp. Maar, euh, om terug te gaan naar de essentie: een nieuwe onderzoeksgroep in de 'Toegepaste Wiskunde' zou werkelijk aan een erg precieze nood kunnen beantwoorden. Nu immers zijn er mensen die in een ander vakgebied aan wiskunde doen, en dikwijls 'vallen zij tussen twee stoelen'. Ik bedoel: interdisciplinair onderzoek, dat is mooi, zeker, maar er moet ook enige structuur kunnen aan gegeven worden. Neem nu een wiskundige die zich toelegt op medische toepassingen, en in het VUB-ziekenhuis van Jette (Brussel) zijn er heus een paar echte koplopers op dit vakgebied, zoals Michel Defrise, om maar één naam te noemen. Welnu, dan stelt zich het probleem waar die personen moeten worden gekaderd. Hij is geen arts en, tja, niet alleen een buitenstaander maar ook beleids mensen belast met onderzoek stellen zich al eens de vraag wat iemand in een academisch ziekenhuis van nuttigs kan doen met alleen getalletjes maar zonder stethoscoop. . .

Referenties

1. Dirk Huylebrouck, *Afrika+Wiskunde*, Brussel, VUBPRESS, 2005
2. Dirk Huylebrouck, *Vier Getallen*, Brussel, VUBPRESS, oktober 2008

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Marcus du Sautoy



Alexander Grothendieck

De favoriet van Marcus du Sautoy

Alexander Grothendieck

Elke maand vragen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun weblog www.wiskundemeisjes.nl aan een bekende wiskundige wie zijn favoriete nog levende wiskundige is. Hiermee willen ze bijzondere wiskundigen van deze tijd eens in het zonnetje zetten. In elke Nieuw Archief voor Wiskunde een bladzijde over zo'n favoriet en zijn werk. Deze keer vragen ze Marcus du Sautoy per email wie hij bewondert.

Du Sautoy werkt aan zèta-functies, maar hij is vooral bekend door zijn activiteiten náást zijn onderzoek. Hij schreef *The music of the primes* en *Finding moonshine*, twee succesvolle populair-wetenschappelijke boeken over zuivere wiskunde. Hij maakt programma's over wiskunde voor de BBC en was de derde wiskundige die een Royal Institution Christmas Lecture mocht geven.

Wij trokken de stoute schoenen aan en stuurden Du Sautoy een email met een lijst vragen over zijn favoriete (nog levende!) wiskundige. Du Sautoy vertelt in zijn prachtige Engels (dat we dus niet vertalen) waarom hij Alexander Grothendieck kiest:

"He created a new language to be able to gain new insights into how to solve equations. Solving equations has been a major theme in mathematics ever since the Ancient Babylonians started solving the first quadratic equations. But some equations have proved very difficult to unlock. For example the equations at the heart of Fermat's Last Theorem remained enigmatic for centuries. It was only with the developments of techniques of Grothendieck and other French mathematicians

that we have finally got the tools to solve such problems.

Grothendieck is a master of seeing structure where others before could only see a mess. It is a very abstract language that he has produced and many mathematicians are still battling to master its grammar. But everyone knows that mathematics changed after Grothendieck's contribution."

Have you ever worked together? "In a dramatic gesture Grothendieck left mathematics in 1970 in his early 40s. He turned instead to politics. He turns 80 this year. So unfortunately I am too young to have worked with him which is a shame. His mathematical seminars at IHES in Paris are the stuff of legend. He was an incredibly charismatic mathematician. A mathematical prophet."

What kind of person is he? "Grothendieck is an extremely complicated personality. His mathematics is extremely abstract and tough. He had an incredibly difficult childhood which you can read about in the last chapter of *The music of the primes*. The way he abandoned mathematics for politics upset many people. He currently lives the life of a hermit, hiding in the Pyrenees. It is said that he has gone crazy in later life and is starving himself to death."

Do you know a nice story about him? "Grothendieck decided that teaching algebraic geometry in the jungles around Hanoi was the best way to protest against the Vietnam War. Not sure what the locals made of his incredibly abstract mathematics."



De derde wet

| Solicited Comments

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

*Redacteur: Ferdinand Verhulst
e-mail: f.verhulst@uu.nl*

Wis en waarachtig?

De afscheidsrede van professor Jan de Graaf [1] is een boeiend relaas van zijn ervaringen aan de Bewaarschool van de nonnen te Raamsdonksveer en de Technische Universiteit te Eindhoven. Zijn kritische opvattingen over het onderwijs, zowel van toen als van nu, steekt hij niet onder stoelen of banken. Zo merkt hij onder andere op dat bij de godsbewijzen, waaraan hij in zijn jeugd werd blootgesteld, het abstract wiskundig vervaardigde opperwezen ook tirannieke eigenschappen heeft gekregen, terwijl zijn kritiek op het rekengeklungel aan de huidige basisschool ook niet zuinig is. Kortom, een verhaal waar (vrijwel) iedereen het mee eens kan zijn.

Het wordt minder overtuigend als het gaat over wiskunde als waarheid. Natuurlijk, een wiskundestelling is waar omdat hij met de regels van de logica bewezen kan worden. De vraag is echter of de vergelijkingen waarmee natuurverschijnselen beschreven worden in dezelfde zin ook waar zijn. Het antwoord is een hartgrondig nee.

Zelfs de Maxwellvergelijkingen, die door de Graaf als bijna onaanastbaar gezien worden, zijn onhoudbaar gebleken bij verfijning van de meetapparatuur. Soms kan het helpen een beetje aan de vergelijkingen te knoeien en bijvoorbeeld de diëlectrische constante van de frequentie af te laten hangen. Hoe dan die frequentieafhankelijkheid er precies uitziet kan niet tot iedere gewenste precisie berekend worden. Zelfs de geldigheid van de Maxwellvergelijkingen is beperkt als niet-lineaire effecten een rol gaan spelen. Om deze effecten te elimineren kunnen zuiverder experimenten gedaan worden, zoals de verstrooiing van licht aan electronen. Dan blijkt echter alras dat alleen de gekwantiseerde vorm van de Maxwellvergelijkingen, gekoppeld aan de vergelijkingen voor het electron, de metingen kunnen verklaren. Na ± 1930 werd deze Quantum Electro Dynamica (QED) tot de allesverklarende theorie uitgeroepen. Ondanks een aantal onvolkomenheden was dit een verbluffend succesvolle theorie, die echter de laatste vijftig jaar weer het veld heeft moeten ruimen voor het Standaardmodel, waarin het tot nu toe ontbrekende Higgsdeeltje het enige schoonheidsfoutje is. Naast enorme experimentele inspanningen heeft dit model zijn ontstaan te danken gehad aan de truc die men van Yang en Mills geleerd had, om van ijkvarianties te eisen dat ze ook lokaal geldig zouden moeten zijn.

De eenvoudigste manier om dit te begrijpen is om het artikel van Kobe [2] te lezen, waarin wordt aangetoond dat de Maxwellvergelijkingen afgeleid kunnen worden uit de eis van vorminvariantie van de Lagrangiaan. Omdat dit zuivere wiskunde is wordt De Graaf, en velen met hem, verleid om te denken dat de wiskunde iets zegt over de wereld om ons heen, ondanks het feit dat hij tegen de studenten zegt dat de wiskunde nergens over gaat. Deze houding, die blijkt uit het feit dat hij het jammer vindt dat er geen magnetische monopolen zijn, is trouwens in strijd met het citaat van de door hem zo verheerlijkte Hertz, die zegt: "Nochtans laten zulke veelomvattende en juiste vergelijkingen zich pas ontdekken, als iedere subtiele hint naar de waarheid, die de natuur prijsgeeft, met de scherpste blik wordt geduid."

Heden ten dage voelen veel studenten in de theoretische natuurkunde zich aangetrokken tot deze manier, in de hoop om alleen met eenvoudige wiskundig geformuleerde uitgangspunten en zonder onmiddellijk contact met experimenten, door te dringen tot diepzinnige inzichten over de natuur. Dit lijkt mij een ijdele hoop omdat ik niet kan geloven dat de vorm de inhoud bepaalt.

Bovendien maken deze studenten, die zich op de stoel van een schepper wanen, een ernstige denkfout, omdat ze zelfs met alle kennis

van hoe de wereld op het sub,sub,... 33 maal sub niveau in elkaar steekt, niet in staat zijn het kookpunt van water te berekenen.

Kom daarom terug op aarde en ga werken aan de dingen die er zijn [3].

Bibliografie

1. J.de Graaf, 'Waarheid, Spel of Taal', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1 (maart 2008), p.12.
2. D.H.Kobe, 'Derivation of Maxwell's equations from the gauge invariance of classical mechanics', *Am.J.Phys.*, 48 (1980) 348.
3. Multatuli, Idee 577.

Th.W.Ruijgrok (Instituut voor Theoretische Fysica, Utrecht)

Het eenvoudige leven

In zijn artikel pleit Uittenbogaard voor een andere rekenaanpak dan die Van de Craats voorstaat. Wel beschouwd vervangt Uittenbogaard het ene algoritme door het andere: dat van Van de Craats door het zijne. Logisch gezien vervalt daarmee elk bestaansrecht voor zijn kritiek op algoritmes. Wellicht dat de emotionele toon van zijn stuk andere drijfveren verraaft. De arena der speculaties betreed ik echter liever niet. Een groot deel van de discussie die Uittenbogaard poogt te voeren is semantisch. Zijn methode zou tot 'inzicht' leiden (en die van Van de Craats dus niet). Wat 'inzicht' is, wordt niet beschreven. Als enige anekdotische onderbouwing noemt hij het feit dat beroepsmatige wiskundigen sommen oplossen volgens zijn methoden. Dat lijkt me helemaal niet verwonderlijk: algoritmes zijn voor ervaren gebruikers niet per definitie de meest effectieve methode. Voor onervaren schoolkinderen bieden ze echter structuur en zekerheid. De vlucht naar de rekenmachine bij 'grote getallen' die Uittenbogaard propageert, is onzinnig. Wat is het nut van 'handig rekenen' bij alleen kleine getallen? Didactisch een twijfelachtige keuze, want wie trekt de scheidslijn en op basis waarvan? Of laten we dat over aan de zelfstandige lerende leerling? In dat laatste geval durf ik een gokje te wagen waar de scheidslijn terechtkomt (het getal 1 is immers ook best groot). Uittenbogaard illustreert met zijn 200x200-voorbeeld helder waar zijn redenering mank gaat. Zijn 'algoritme', "[...] Terwijl je boerenverstand zegt: een 4 met vier nullen, klaar!", werkt alleen voor hen die het Van de Craats-algoritme al ontelbare malen hebben zien werken en in de uitkomsten structuur hebben ontdekt. Dat is nu juist kenmerkend voor boerenverstand: verstand gebouwd op de jarenlange ervaring dat je in augustus het beste oogst en niet in februari al nieuwe aardappels moet verwachten. Uittenbogaard verzucht: "was het leven maar zo eenvoudig" in reactie op de stelling van Van de Craats "Voor elk van de vier hoofdbewerkingen is er één universeel, werkend recept." Het leven is zo eenvoudig. Een kind dat gaat leren fietsen, leg je ook niet eerst uit wat impulsmoment is en waarom je al rijdend eigenlijk niet meer kunt omvallen. Je houdt het zadel vast gedurende enkele tientallen oefenritjes totdat je vermoedt dat het goed zal gaan.

Ralph Hanzen (vier jaar eerstegraadsleraar wiskundedocent op vmbo, havo, vwo, thans werkzaam in het bedrijfsleven)

Zo simpel kan het niet zijn

In zijn artikel "Geen catechismus leren, maar nadenken" levert Willem Uittenbogaard fikse kritiek op Jan van de Craats. Jammer dat het zo persoonlijk wordt, dat vertroebelt de discussie met sentimenten die niet bevorderlijk zijn voor een open en eerlijke gedachtewisseling.

Uittenbogaard geeft direct aan het begin van zijn betoog een voorbeeld. Dit voorbeeld is kenmerkend zowel voor de problematische gevolgen van het realistisch rekenen als voor de misvattingen van Uittenbogaard. Hij schrijft:

"Bij eerstejaars pabostudenten schrijf ik op het bord: $2/3 \times 4/5$ en vraag studenten om dat op te lossen. Er zijn er altijd wel een paar die roepen: gelijknamig maken. En zo komt er op het bord: $2/3 \times 4/5 = 10/15 \times 12/15 = 120/15 = 8$ (Dat '= 8' voeg ik er meestal aan toe).

Bij het stemmen over het al dan niet juist zijn van dit antwoord is altijd ongeveer de helft vóór. Nogal wat studenten twifelen aan hun antwoord van 8/15. Dat lijkt zo simpel. Dat kan niet goed zijn. Daar sta je dan als opleider. Ook mijn: 'hoeveel zou $2/3$ van 80 cent zijn?', helpt weinig studenten verder."

Ik kan dit voorbeeld aanvullen met vele vergelijkbare voorbeelden, niet alleen bij Pabostudenten, maar ook bij studenten economie of techniek in het HBO.

Het eerste wat je hieruit kunt concluderen is dat het met de rekenvaardigheid van deze studenten erg slecht gesteld is. Aangezien ze hebben leren rekenen in de huidige tijd, de tijd dat alle rekenmethoden geënt zijn op het realistisch rekenen, heeft de didactiek van realistisch rekenen kennelijk geleid tot zeer zwakke rekenaars op het HBO. Alleen dat is al reden genoeg om ernstig te twifelen aan de zegeningen van het realistisch rekenen.

De reacties van de studenten geven verdere aanwijzingen dat realistisch rekenen niet werkt. Zo is het opmerkelijk dat de realistische hulp van Uittenbogaard (de vraag wat $2/3$ van 80 cent zou zijn) geen enkel effect heeft. Als de realistische didactiek effectief zou zijn, dan zou je dat toch ook hier moeten zien, maar dat blijkt niet het geval. Dat is overigens in overeenstemming met mijn eigen ervaringen.

De studenten die wel het goede antwoord hebben twifelen aan zichzelf. Ze denken dat hun oplossing verkeerd is omdat het zo eenvoudig is. Kennelijk hebben zij geleerd dat dergelijke sommen (alle rekensommen?) vreselijk ingewikkeld zijn, en dat een eenvoudige oplossing verdacht is.

Ik concludeer dat deze studenten allemaal zijn opgegroeid met realistisch rekenonderwijs, een zeer geringe rekenvaardigheid hebben, geen baat hebben bij aanwijzingen volgens de didactiek van het realistisch rekenen, een beeld hebben dat rekenen buitengewoon complex is, niet in staat zijn de eigen antwoorden te controleren, noch door middel van methoden binnen het kale rekenen zelf, noch door middel van het gebruik van realistische contexten, en tenslotte alle zelfvertrouwen ontberen.

En toch pleit Uittenbogaard voor realistisch rekenen. Sterker nog, hij pleit hiervoor op basis van precies dit voorbeeld, zijn eigen voorbeeld, een voorbeeld dat hij jaar na jaar opnieuw tegenkomt. Vasthoudendheid? Of stijfkoppigheid?

Van de Craats daarentegen geeft twee redenen waarom het ontbreken van standaard algoritmes tot verwarring leidt. Standaard algoritmes zijn eenvoudig en met geringe foutkans uit te voeren, en leerlingen hoeven niet te verzinnen welke van de (voor hen totaal verschillende) oplossingsmethoden ze nu weer moeten gebruiken. Het voorbeeld van Uittenbogaard toont dit feilloos aan.

De keuze tussen een didactiek die inmiddels aan alle kanten beproefd heeft niet te werken en een didactiek zoals van de Craats die bepleit en die bewezen heeft welk degelijk te werken, is toch niet moeilijk. Om de studenten van Uittenbogaard te parafraseren: inderdaad, zo simpel kan het zijn.

Gerard Verhoef (Docent wiskunde Hogeschool van Amsterdam)

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.cornelissen@uu.nl

Column België – Nederland 2–0

De laatste der Bourbakisten

Waar vindt men meer verschillen dan tussen burens? Onder het motto ‘Doe maar gewoon’ zette de bescheiden Nederlander als eerste de bundels van Bourbaki bij het grof vuil. Gunther Cornelissen, die opgroeide als Nederlander in België, leerde wiskunde volgens Bourbaki. Op de middelbare school.

Ik ben de laatste der Bourbakisten. Soms haal ik ze onder uit mijn kast op het Mathematisch Instituut: de twee wiskundeboeken van mijn laatste jaar op het Gentse St.-Lievenscollege (6-vwo equivalent), getiteld *Analyse* en *Analytische Meetkunde*. Ik maak op mijn Nederlandse collegæ indruk met de paragrafen over de topologische definitie van continue afbeelding, het bewijs van convergentie van de Riemannintegraal, en de complete classificatie van kwadrieken in $\mathbb{R}^3$.

We schrijven 1992. De veertig leerlingen op deze school uit de richting *Latijn-Wiskunde*, jaar 6 genoten van hun 10u wiskunde (4u analyse, 4u meetkunde, 2u constructies – in Oost-Indische inkt uit te voeren en op maandag in te leveren), onderwezen door drie verschillende docenten. Hierdoor kwam wel onze gymles op donderdag in de lunchpauze te liggen. Er werd niet gemord, misschien omdat Willy voor ons uit de nonnenkeuken frieten bietste voor na de gym.

En nee, we waren geen exclusief clubje bleekhuidige kneusjes met brillen – alhoewel *Latijn-Grieks* het beter deed op relationeel gebied, vooral wegens de minder met inkt bevlekte vingers op zondagmiddagen.

Terug naar mijn werkkamer. Wie na deze boeken te hebben doorbladerd beweert dat we dit geen kind mogen *aandoen* wordt uit het raam gekieperd. Tijdens mijn Belgische

jeugd is klinkklaar aangetoond dat ca. 15% van de gymnasiumleerlingen het zelf wilden.

En in Nederland ontzeggen wij kinderen met aanleg deze mogelijkheid. We geven ze eenheidsworst, met uitzondering van initiatieven als *Junior College Utrecht* (JCU), waar leerlingen van aangesloten scholen twee bèta-profielen tegelijk volgen. Ik begrijp niet waarom er zoveel sprake is van het op de leerling toespitsen van het onderwijs, maar dat *Bourbaki* helemaal niet mag, zelfs als je zou willen. *Sanctus Freudenthal?*

Er is nogal wat voor nodig. Leraren die dit kunnen doceren moeten aan de universiteit zijn opgeleid. Andere schoolboeken. Leerlingen die *willen* moeten *kunnen* kiezen. En o ja, leerlingen die menen een hekel te hebben aan wiskunde hoeven niet. Ik vind dat we die de stelling van Gödel mogen uitleggen, maar daarover een andere keer meer. Het bezwaar tegen *Bourbaki for the common man* heb ik namelijk begrepen: er staat in mijn boekenkast ook een voorbeeld van hoe het niet moet. Het heet *Wiskunde 2a: Getallen en Groepen* en mijn broer mocht het tien jaar eerder in het tweede jaar *Handel* op dezelfde school bestuderen. U weet wel, *Stelling. $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ is een geordend veld*. Advocaat Cornelissen te Evergem, België, is vast het gevoel vergeten dat hij bij dit wiskunde-onderwijs kreeg. ↩

Op de achtergrond

Geert van Istendaal: ‘Leve de schoolmeester’, in: *Bekentenissen van een reactionair*, pp. 29–31. Atlas, 1994. Mark Peletier, ‘Variatie doet weten’, Oratie, *N.A.W.* (5), 7, nr. 4 (2007), pp. 234–241. Patrick van Ijzendoorn, ‘Uitgesteld succes’, *De Groene Amsterdammer*, jg. 131, nr. 51–52, p. 36.

Sophie Krabbenbos

Jet-Net coördinatiebureau

Lange Voorhout 20

Postbus 556

2501 CN Den Haag

s.krabbenbos@jet-net.nl

Onderwijs

Zelf ervaren hoe leuk en veelzijdig wiskunde is

Vooraanstaande Nederlandse technologische bedrijven hebben zich verenigd in Jet-Net, het Jongeren en Technologie Netwerk Nederland. Samen ontwikkelen zij activiteiten waarmee havo- en vwo-leerlingen zelf kunnen ervaren dat technologie uitdagend, zinvol en maatschappelijk relevant is. Dat gebeurt door middel van gastlessen, workshops en veel meer. Een serie gastlessen over de wiskunde in printers en copiers en de begeleiding van een profielwerkstuk over fout-detecterende en -corrigerende codes zijn mooie voorbeelden van recente Jet-Netactiviteiten op wiskundegebied. Voor wiskundedocenten publiceert Jet-Net een digitaal wiskundemagazine. Sophie Krabbenbos is projectleider communicatie van Jet-Net.

Nederland wil een vooraanstaande plaats innemen in de Europese kenniseconomie. Belangrijke randvoorwaarde is dat er voldoende hoogopgeleide technologen zijn: een voorwaarde waaraan Nederland steeds moeilijker kan voldoen. Jongeren hebben minder belangstelling voor exact dan ooit en de uitstroom uit bètatechnische opleidingen is de afgelopen decennia schrikbarend gedaald. Daar komt bij dat de babyboomgeneratie bezig is de arbeidsmarkt te verlaten, waardoor er veel kostbare technologische kennis verdwijnt. Bedrijven zien zich geconfronteerd met de keuze: strategisch onderzoek verplaatsen naar het buitenland of iets aan de situatie op de Nederlandse arbeidsmarkt doen. Een aantal vooraanstaande technolo-

giebedrijven in Nederland besluiten voor het laatste en starten samen met de overheid een veelomvattend initiatief.

Jongeren en technologie

Op 29 november 2002 verzamelde zich een illustre gezelschap in Nieuwspoort in Den Haag. Achter de tafel zaten Jeroen van der Veer (Shell), Antony Burgmans (Unilever), Peter Elverding (DSM), Kees van Lede (Akzo Nobel), Gerard Kleisterlee (Philips) en Maria van der Hoeven en Joop Wijn, de toenmalige ministers van respectievelijk Onderwijs en Economische Zaken. Tijdens deze bijeenkomst werd officieel het Jongeren en Technologie Netwerk Nederland — kortweg Jet-Net — opgericht.

Het is de start geweest van een intensieve

samenwerking tussen bedrijfsleven, overheid en onderwijs. Doel is om de muren tussen onderwijs en bedrijfsleven te slechten en scholieren te laten ervaren hoe leuk technologie kan zijn. Er brak een tijd aan van pionieren. Voor mensen van het eerste uur ontstond er een kip-eisituatie. Wat willen scholen en wat kunnen bedrijven? Er werden zelfs kamervragen gesteld over de bemoeienis van het bedrijfsleven met het onderwijs, maar na de eerste schrik bleek de Jet-Netformule uitstekend te werken en steeds meer bedrijven openden hun deuren voor scholen.

Intussen bestaat Jet-Net vijf jaar en hebben eenendertig bedrijven en 153 havo- en vwo-scholen zich bij het netwerk aangesloten. In het Jet-Net-lustrumboek geeft Gerard Kleisterlee, President en CEO van Koninklijke Philips Electronics N.V. het belang van Jet-Net als volgt weer: "Hoogopgeleide kenniswerkers zijn essentieel voor Nederland en voor Philips. Daarom is het belangrijk dat we jongeren enthousiast maken voor ondernemende en uitdagende posities in het bedrijfsleven. Dat wordt door Jet-Net dagelijks in de praktijk gebracht op havo- en vwo-scholen

Profielen

Aan het eind van het derde jaar kiezen havo- en vwo-leerlingen een profiel. Ze kunnen kiezen uit vier profielen: Cultuur & Maatschappij (CM), Economie & Maatschappij (EM), Natuur & Gezondheid (NG) en Natuur & Techniek (NT). Het NT-profiel sluit het best aan op een bètatechnische vervolgopleiding. In iets mindere mate geldt dit ook voor NG. Naast de verplichte, profielgebonden vakken, hebben leerlingen een vrije ruimte die ze zelf kunnen invullen. Nogal wat leerlingen met een NT-profiel kiezen hierbij een vak uit het NG-profiel. Omgekeerd gebeurt dat ook. Het gaat dan met name om de vakken biologie en het wat zwaardere wiskunde B. In het maartnummer van NAW beschreef Jeroen Spandaw de wiskundemogelijkheden in de verschillende bètaprofielen [1].

door het hele land. Jet-Net is een voorbeeld van samenwerking tussen het bedrijfsleven, onderwijs en overheid dat werkt en waar we trots op zijn!”

De Jet-Netformule

Wat is die formule die zo goed blijkt te werken? In het huidige onderwijs komen middelbare scholieren weinig in aanraking met de praktijk en de exacte vakken sluiten vaak slecht aan op hun belevingswereld. Hierdoor hebben ze vaak geen idee van de mogelijkheden in de techniek. Met de Jet-Netformule kunnen scholieren zich een beeld vormen van de bètatechnische praktijk. Hiervoor brengt Jet-Netbedrijven en scholen met elkaar in contact. Deze gaan een een-op-eenrelatie met elkaar aan, die formeel in een overeenkomst wordt vastgelegd. Veel Jet-Netbedrijven gaan overeenkomsten met meerdere scholen aan. Na een inventarisering van behoeften en mogelijkheden ontwikkelen een partnerbedrijf en -school samen activiteiten die aansluiten op de bètavakken. Zo ontstaat bètaonderwijs op maat dat tegemoet komt aan de wensen van de school en een brug slaat naar de praktijk. De praktijkvoorbeelden verrijken de lesstof, verlagen de drempel naar techniek en helpen leerlingen de relevantie van de lesstof te zien.

De activiteiten die Jet-Netbedrijven en -scholen ontwikkelen, variëren van klassikale projecten, gastlessen, profielkeuzevoorlichting en workshops tot de begeleiding van profielwerkstukken, bètamarkten op school en bedrijfsbezoeken. Er is volop tweerichtings-

verkeer: bedrijfsmedewerkers komen naar de scholen en leerlingen gaan voor activiteiten naar ‘hun’ bedrijf. Sommige projecten groeien uit tot volwassen lesmateriaal met goed gedocumenteerde leerlingen- en docentenhandleidingen. Dit materiaal wordt centraal beschikbaar gesteld, zodat ook andere Jet-Netscholen en -bedrijven er gebruik van kunnen maken. Bij voorkeur moeten Jet-Net-activiteiten zoveel mogelijk aansluiten op het normale curriculum. Kokkie Schnetz, medewerker van Corus en betrokken bij Jet-Net: “Een van onze activiteiten is een scheikundepracticum voor leerlingen van 5 en 6 vwo. Het onderwerp (het opbrengen van metallische deklagen op staal) sluit een-op-een aan op de lesstof op school (redox-reacties). Daardoor kunnen scholen het eenvoudig in hun programma inpassen. Het succes van de dag staat of valt met de bijdrage van school. Bij een goede voorbereiding bestoken leerlingen ons met vragen en doen enthousiast mee. Wij kunnen ze dan laten ervaren hoe leuk het is om onderzoek te doen.”

Voor scholen betekent Jet-Net een waardevolle aanvulling op het curriculum. De bedrijven merken dat hun medewerkers graag hun steentje bijdragen. Monique Walrave, Jet-Net-projectleider bij Siemens: “Het mooie van Jet-Net ligt ook in de impact die het heeft binnen het eigen bedrijf. Collega’s die aan de activiteiten meewerken, vinden het spannend om te doen en komen met innovatieve ideeën. Een veel gehoorde reactie is dat zij erdoor worden aangezet om zelf eens goed na te denken over hun eigen werk. Het is een mooie uitdaging om jongeren te boeien voor het werk dat je doet.”

Een veelzijdig beeld

Door het hele land en het hele jaar door ontplooiën bedrijven en hun scholen activiteiten waarmee ze iets van hun dagelijkse praktijk laten zien. Om leerlingen iets te laten zien van de breedte van techniek, vindt jaarlijks de landelijke Career Day plaats. Dit is een grote beurs waar de gezamenlijke Jet-Netbedrijven hun wereld presenteren. In de vele stands kunnen leerlingen en docenten kennis maken met de veelzijdigheid van bètatechnologie; geen enkele activiteit is hetzelfde en toch is alles technologie. Suzanne van der Poel, leerlinge uit 6 vwo van het Hofstad Lyceum uit Den Haag: “Wat je vaak hoort van andere leerlingen, is: ik wist niet dat je dit ook kon doen met een technische studie. Meestal denken ze alleen aan een laboratorium, terwijl techniek deel uitmaakt van ons dagelijks leven. Kijk maar om je heen: bruggen, gebouwen,

mobieltjes, televisie, enz.

Mensen staan er niet bij stil, maar als ze het beseffen, vinden ze het wel interessant. Door Jet-Net leren jongeren techniek beter kennen en staan ze er vaker bij stil.” Afgelopen jaar trok de Career Day zo’n 2500 leerlingen uit heel Nederland. Omdat veel leerlingen niet of nauwelijks een beeld hebben van de mogelijkheden die ze hebben met een exact profiel, worden er ook activiteiten ontwikkeld die aandacht besteden aan de toekomstperspectieven van bètatechnici. Dit gebeurt door middel van algemene voorlichting, bijvoorbeeld in de vorm van een bedrijfsoriëntatie, of bij het ondersteunen van leerlingen bij hun profielkeuze.

Ook het negatieve imago van technici wordt aangepakt. Een belangrijk onderdeel van de Jet-Netactiviteiten is het persoonlijke contact tussen bedrijfsmedewerkers en scholieren. Zo kunnen de leerlingen zien dat technici gewone, leuke mensen zijn, die bijvoorbeeld graag sporten en leuke hobby’s hebben. Door aandacht te schenken aan al deze invalshoeken, enthousiasmeren Jet-Netbedrijven en -scholen samen de ingenieurs van de toekomst.

Jet-Net werkt nauw samen met het Platform Bèta Techniek. Het Platform is verantwoordelijk voor de realisatie van de overheidsambitie; deze gaat uit van 15% meer uitstroom uit de bèta/technische opleidingen in 2010.

Proeflessen

Jet-Net heeft bètalessen ontwikkeld die door alle wiskundedocenten van haar website gedownload kunnen worden. Daarnaast is er een dvd beschikbaar waarop allerlei lessen en praktijkvoorbeelden van Jet-Net bedrijven staan. Op deze dvd staan ook tal van wiskundelessen. Zo ontwikkelde Shell de wiskunde D-module HotStuff, brengt Océ Technologies wiskunde in beeld en toont Unilever de wiskunde in de wasmachine. De dvd is aan te vragen via de website van Jet-Net. Daarnaast hebben Jet-Net en KIVI NIRIA een pool van ingenieurs beschikbaar die op havo- en vwo-scholen graag gastlessen geven profielwerkstukken begeleiden of een werkbezoek organiseren. De pool opereert onder de naam Ingenieur@school — dit vanwege de praktijkgerichte uitstraling van het begrip ingenieur — maar ook veel niet-ingenieurs nemen deel. Ook een aantal wiskundigen heeft zich ingeschreven in de pool.

De rol van wiskunde

De keuze voor een profiel of vervolgstudie wordt in belangrijke mate bepaald door de houding van een leerling ten opzichte van wiskunde. Ben ik er goed in? Vind ik het leuk? Daarom vindt Jet-Net het belangrijk om extra aandacht te besteden aan wiskunde. Bijvoorbeeld door leerlingen een beeld te geven van wiskundige beroepen en de toepassing van wiskunde in bedrijven en door te laten zien hoe nauw wiskunde verweven is met dingen die ze dagelijks gebruiken, zoals internet.

Tijdens de laatste Career Day had TNO een stand over wiskunde ingericht. Dat klinkt leerlingen niet meteen prettig in de oren, maar zodra blijkt dat ze de wiskunde gaan toepassen op YouTube filmpjes, is de interesse gewekt. Na een introductie over bits, pixels en beeldresolutie, kunnen ze flink aan het rekenen. "Het verschil in voorkennis is groot", merkt Karin van Wingerden, medewerkster bij TNO. "Sommige scholieren weten precies waar het over gaat, anderen hebben geen flauw idee. Maar dat is geen probleem, ze pikken nieuwe begrippen opvallend snel op." Al gauw komen de leerlingen erachter dat je filmpjes die je via internet wilt versturen, zult moeten comprimeren. Vervolgens passeren verschillende compressiemogelijkheden de revue. De prijs die je daarvoor betaalt, is verlies van beeldkwaliteit. Iets dat ze dagelijks op YouTube zien.

Wisactueel

Interesse voor de toepassingsmogelijkheden van wiskunde kan voorkomen dat leerlingen al te makkelijk kiezen voor zo min mogelijk wiskunde in hun profiel. Daarom 'verzamelt' Jet-Net aansprekende voorbeelden die docenten kunnen gebruiken in de les. Deze worden opgenomen in de *Wisactueel*. Dit magazine van Jet-Net wordt speciaal gemaakt voor wiskundedocenten in het voortgezet onder-

wijs. In het magazine wordt een relatie gelegd tussen de lesstof op het havo en vwo en de toepassing van wiskunde in het bedrijfsleven. In de *Wisactueel* worden wiskundigen geïnterviewd, die werkzaam zijn in het bedrijfsleven of aan onderwerpen werken die passen in de belevingswereld van scholieren. Daarnaast rapporteert *Wisactueel* over activiteiten waarbij leerlingen in contact komen met wiskundigen, zoals projecten op middelbare scholen, profielwerkstukken, een wiskundeworkshop op Lowlands en de bovengenoemde case van TNO. Dit geeft docenten een beter beeld van de mogelijkheden die je met een wiskundeopleiding hebt. Soms hebben docenten daar zelf geen beeld bij. Zij hebben zich na hun studie toegelegd op het doceren en kunnen daarom de interviews goed gebruiken bij het verlevendigen van hun lessen en bij het adviseren van hun leerlingen. Het magazine wordt gecompleteerd met wiskundeopgaven die bij voorkeur aansluiten op een onderwerp dat in dezelfde uitgave aan de orde komt. De wiskundedocent kan de opgaven uitprinten en door zijn klas laten maken, na eerst de achtergrondinformatie uit het interview te vertellen of laten lezen. Zo vroeg een docent de *Wisactueel* aan omdat zijn 3e en 4e klassers geen 'flauw idee' hebben wat wiskunde is en wat ze ermee kunnen. Door de *Wisactueel* krijgen ook de leerlingen de toepassingen en veelzijdigheid van wiskunde te zien. En dat is nodig, want het bedrijfsleven zit te springen om wiskundigen.

Vanaf 2008 wordt de *Wisactueel* digitaal verspreid. Dat maakt het voor docenten makkelijker om artikelen door te sturen of via een link beschikbaar te stellen aan hun leerlingen. Ook wordt het daardoor makkelijker om de opgaven uit te draaien. Docenten en andere belangstellenden kunnen op de website van de *Wisactueel* een gratis digitaal abonnement aanvragen.

Wiskundeseries

Ook het Platform Bèta Techniek houdt zich bezig met het verrijken van het wiskundeonderwijs. Omdat wiskunde een sleutelvak is bij de keuze voor een natuurprofiel heeft het Platform wiskunde als een van haar speerpunten gekozen. Voor verschillende groepen havo- en vwoleerlingen is daarbinnen materiaal ontwikkeld. In samenwerking met Schooltv startte in november 2007 de serie 'Wiskunde in de Tweede Fase', voor de bovenbouw van havo en vwo. In deze serie gaat acteur Michiel Huisman, geholpen door de Wiskundemeisjes, op zoek naar het belang van wiskunde in onze maatschappij. Een tweede serie, voor de onderbouw van havo en vwo, start in het schooljaar 2008/2009. Speciaal voor de profielkeuze in 2/3 havo/vwo produceerde het Platform 'De wiskundefilm'. Doel van deze film is om vooroordelen van leerlingen rond wiskunde te ontkrachten en ze op te roepen (net iets meer) wiskunde in hun profiel te kiezen. ←

Informatie

Op www.jet-net.nl staan voorbeelden van de verschillende werkvormen die door Jet-Net worden toegepast. Uitgaven van de *Wisactueel* staan op www.wisactueel.nl. Hier kunnen geïnteresseerden een gratis digitaal abonnement aanvragen. De serie 'Wiskunde voor de Tweede Fase' van SCHOOLTV in samenwerking met het Platform Bèta Techniek is te bestellen via www.eigenwijzer.nl/wiskunde. De wiskundefilm van het Platform kunt u kosteloos aanvragen op www.meerwiskunde.nl.

De deelnemende bedrijven aan Jet-Net zijn: ABB, Akzo Nobel, Brunel Engineering, CB&I Lummus, Corus, Dow, DSM, Festo, FHL, Gasunie, GTI, Hightech Systems Platform, IBM, Kema, Koninklijke Marine, Movares, NAM, NXP, Océ Technologies, Schering-Plough, Philips, Rijkswaterstaat, Royal Haskoning, Sabic, Schiphol Group, Shell, Siemens, Stork, Teijin Aramid, TNO, Unilever en Wetsus.

Partnerorganisaties van Jet-Net zijn: FME-CWM, KIVI NIRIA, Ministerie van Economische Zaken, Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap, NVON, Platform Bèta Techniek, Stichting C3, VNCI, VNO-NCW en VO-Raad.

Referenties

- 1 Jeroen Spandaw, 'Wiskunde in de bètaprofielen', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/9 nr. 1 maart 2008, pp 72-75

In de verdediging

| In defence



Skew rings, convolutional codes and discrete systems

Fai Lung Tsang

If you'd ever visit Hong Kong and run into a *Febo-automatiek*, it will probably be thanks to Fai Lung Tsang. Asked what would be the next step in his career, he answered that a postdoc position in Europe would be ideal, but that he could also imagine becoming a businessman; he'd love to import the Febo-automatiek to his home town! But the possibility to 'eat from the wall' was not the only reason why Fai Lung (or Tomas) enjoyed being a Ph. D. student in Groningen. He simply liked a lot to be part of the Dutch mathematical society.

Coding theory and discrete behaviors

On June 23, 2008, Fai Lung Tsang successfully defended his Ph. D. thesis *Skew rings, convolutional codes and discrete systems*, written under guidance of dr. Heide Gluesing-Luerssen (Univ. of Kentucky) and prof. dr. Marius van der Put (RuG).

The first part of his thesis deals with a problem in coding theory, involving a noncommutative polynomial ring. This problem is shown to be equivalent to a 'rook' (Ned: toren) problem on the chessboard. It also has a geometric interpretation that leads to a partial solution and that is applied to solve yet another problem on polynomial matrices. In the second part of the thesis, some theory on discrete systems, i.e., properties of discrete behaviors, is developed. Together with some homological algebra this theory is then applied in the context of abelian sandpiles.

Rooks and convolutional codes

The rook problem is similar to a classical one about how to place n rooks on a chessboard so that they are all mutually non-attacking. This time, they however have to satisfy an additional requirement. An example for $n = 6$ is as follows:

Pick any $n - 1 = 5$ numbers from the set $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Can you put 5 rooks in the following numbered chessboard, with the condition that they are sitting on the numbers that you have chosen and that they are mutually non-attacking?

0	1	2	3	4	5
5	0	1	2	3	4
4	5	0	1	2	3
3	4	5	0	1	2
2	3	4	5	0	1
1	2	3	4	5	0

Although this chessboard problem helps to explain his original problem, Fai Lung himself prefers to understand the reasoning that leads to a solution, and not to just give a solution without foreseeable reasons. One of his favorite results is a theorem dealing with the original

Pas gepromoveerden brengen hun werk onder de aandacht.

Redacteur: Geertje Hek
la Voie-du-Coin 7
1218 Grand-Saconnex
Zwitserland
G.M.Hek@uva.nl

problem, which indeed helps to really understand how to obtain solutions. Fai Lung likes this theorem in particular, because the formulation is simple, whereas the ideas leading to the result are not at all trivial. The theorem concerns cyclic convolutional codes of rank $n - 1$. Given a field F with characteristic not dividing n , such code has the form $h^\perp$ where $h = h_0 + h_1z + \dots + h_{n-1}z^{n-1}$ with all $h_i \in F[z^n]$ and $\gcd(h_i z^i) = 1$. The so-called *Forney sequence* associated to $h^\perp$ can be computed with the help of a certain vector bundle on $\mathbb{P}_F^1$:

Theorem *Let $n > 1$, F be a field with characteristic coprime with n , V an n -dimensional F -vector space. Select a basis $e_0, \dots, e_{n-1}$ of V . Let be given a polynomial $h = h_0 + h_1z + \dots + h_{n-1}z^{n-1}$ with $h_i \in F[z^n]$ and $\gcd(h_i z^i) = 1$. Define*

$$M = \left\{ \sum w_i e_i \in F[z] \otimes V \mid \sum w_i h_i z^i = 0 \right\}$$

which has a minimal basis of degrees $d_1, \dots, d_{n-1}$. Then the cokernel of the map

$$\alpha_k : \bigoplus_{i=0}^{n-1} F[z]_{\leq k} e_i \rightarrow F[z]_{\leq d+k}$$

given by $e_i \mapsto h_i z^i$ has dimension $\sum_{i=1}^{n-1} \max(-1 + d_i - k, 0)$ for all $k \geq 0$, here $d = \deg h$ and $F[z]_{\leq s}$ denotes the vector space of polynomials of degree $\leq s$.

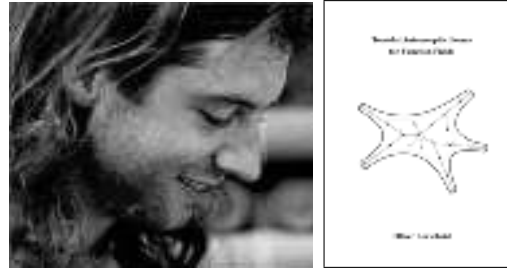
This theorem is obtained in several steps: first a duality is constructed, (i.e., the $\perp$) on the noncommutative polynomial ring; then the vector bundles on $\mathbb{P}^1$ are studied. And finally, these two things are put together and combined with a little sheaf cohomology to get the result.

A day I'll never forget

In August 2004, Fai Lung started his Ph. D. project, which was initiated by Heide Gluesing-Luerssen. Under her guidance, he proved, amongst others, the equivalence of the problem in the skew ring and the chessboard problem. Luckily enough, Fai Lung is always quite happy getting along with himself, so that he didn't suffer too much when Gluesing-Luerssen left for the University of Kentucky at the end of 2006. Half a year with virtually no supervision followed. But then it was July 3rd of 2007, a day about which Fai Lung literally says that he'll never forget it. It was the day that he started to work with Marius van der Put. Discussions with Marius always turned into brainstorming sessions, often resulting in new ideas and new directions for his research. At times it felt a little like getting a Lotto-hint on the next day's lottery – in normal life impossible of course! These frequent meetings have added a great deal of depth to Fai Lung's research and ultimately to his dissertation.

Not only because he had to spend a period without close supervision, but also because he had no nearby colleagues working in his field, Fai Lung knows that life of a research mathematician can be a lonely one. As far as he knows, there are no other people in the Netherlands who work close to his field, apart from one other RuG-student of Gluesing-Luerssen who lives in Oldenburg (Germany). The contact with him and Gluesing-Luerssen is always friendly, without any competitive feelings. Would the others be competition-minded though, then there still would be no reason for competition according to Fai Lung, since they all have different interests.

At times, it was difficult to focus on his research. Fai Lung discovered how broad the world of mathematics actually is, and he found a wide variety of topics so interesting that they kept him from his own research. When one realises that he is one of the few students who have finished their Ph. D. project within four years, this seems not bad at all though: both finish your own project in time, and 'waste' some time doing other nice things!



Toroidal Automorphic Forms for Function Fields

Oliver Lorscheid

Ook Oliver Lorscheid heeft zijn proefschrift recent met succes verdedigd, en wel op 28 mei. Hij heeft de afgelopen vier jaar als promovendus bij prof. dr. Gunther Cornelissen in Utrecht doorgebracht en zet momenteel zijn eerste stappen in de wereld van de zelfstandige onderzoeker aan het Max Planck Instituut in Bonn. Op het moment van schrijven lag zijn proefschrift 'Toroidal Automorphic Forms for Function Fields' in handen van de drukker en zat Oliver te wachten op de dag van zijn promotie op 28 mei. Een goed moment om eens terug te kijken.

Diepe verbanden in de getaltheorie

Om een indruk van de inhoud van zijn proefschrift te geven, vertelt Oliver eerst over de historische achtergrond. Don Zagier legde eind jaren zeventig een verband tussen enerzijds de complexe getallen die niet-triviale nulpunten van de Riemann zetafunctie zijn, en anderzijds de complexe getallen die gewichten zijn van Eisensteinreeksen met een eigenschap die hij 'toroïdaal' noemde. Als het lukt om de unitariseerbaarheid van de ruimte van toroïdale automorfe vormen te bewijzen, dan volgt uit het werk van Zagier de geldigheid van de Riemannhypothese voor $\mathbf{Q}$. Dit weerspiegelt dat deze ruimte van automorfe vormen diepe verbanden binnen de getaltheorie codeert. Oliver's opdracht was om de arithmetiek van toroïdale automorfe vormen over globale functielichamen, de parallelwereld van $\mathbf{Q}$, te onderzoeken. Hij vertaalde de nodige begrippen naar functies op grafen en slaagde er aldus in om afschattingen van de dimensie van de ruimte van toroïdale automorfe vormen te bepalen en in het bijzonder eindigdimensionaliteit van deze ruimte aan te tonen. Tevens bepaalde Oliver de ruimtes voor functielichamen van geslacht 0 en 1 (met enige kleine uitzonderingen) door middel van expliciete berekeningen. De uitkomsten laten zien wat er zoal gezegd kan worden over unitariseerbaarheid met de beschikbare methodes.

Cultuurschok

Op zoek naar een promotieplek in Europa maar buiten Duitsland solliciteerde Oliver naar een vacature bij Cornelissen. Het onderzoeksgebied klonk interessant, Cornelissen leek sympathiek en de aanstellingsvoorwaarden waren in verhouding uitstekend. Voor zover hij verwachtingen had, dacht hij zeker niet aan verschillen tussen Duitsland en Nederland. Toch bracht zijn komst naar Nederland een cultuurschok met zich mee. De eerste verrassing was dat iedereen, van de bankmedewerker tot de ambtenaar in het stadhuis, vroeg of hij alles goed had aangetroffen en al goed aan het integreren was. Ook hielpen collega's hem snel de Nederlandse taal en de regels van het sociale leven te leren. Hij looft de verdraagzaamheid in Nederland, waar tientallen verschillende culturen op zo'n kleine plek vreedzaam bij elkaar wonen. De drukte van mensen en de geslotenheid van de privatesfeer van de gemiddelde Nederlander zijn echter aspecten waar hij tot op de dag van vandaag

niet aan heeft kunnen wennen.

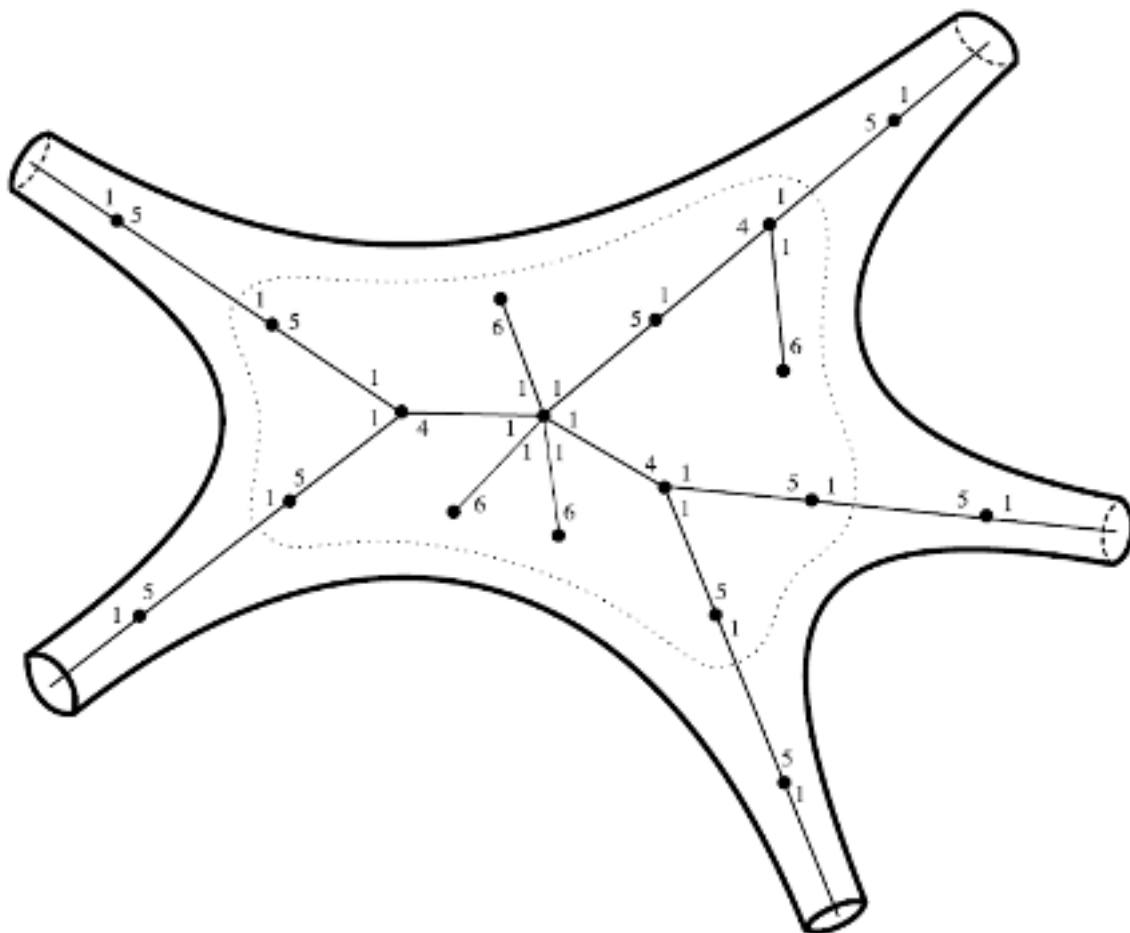
Ook op de universiteit is er een groot verschil tussen beide landen. Het huidige Nederlandse systeem, dat streeft naar een zachte overgang van school naar universiteit en veel aandacht aan het houden van studenten besteedt, staat in schril contrast met het Duitse systeem, dat nog 'net als vroeger' is: studenten dragen hun eigen verantwoordelijkheid en vanaf het eerste college doceert men 'echte' abstracte wiskunde. In Olivers ogen weerspiegelt dit verschil zich ook in het universitaire gedrag: terwijl het grote gewicht van de titel van *der Herr Professor* in Duitsland een grote afstand tussen hoogleraar en student schept, voelt men zich als promovendus in Nederland behaaglijk door de ongedwongen omgang met elkaar. In het bijzonder had Oliver steeds het gevoel intens persoonlijk begeleid te worden door zijn promotor.

Linker- en rechterweghelft

Tussen het begin van zijn promotietraject en de verdediging ligt een lange weg, die uit twee helften bestond: op de rechterhelft leerde hij de wiskunde te begrijpen en op de linkerhelft leerde hij omgaan met de wiskunde. Wat de rechterhelft betreft had Cornelissen een vooruitziende blik. Hij omschreef aan het begin de methodes die later nodig

bleken te zijn en voorspelde dat Oliver na twee jaar wel eigen ideeën zou ontwikkelen. Aldus geschiedde.

Al wandelend op de linkerweghelft heeft zich een verandering van Olivers houding ten opzichte van wiskunde voorgedaan. Na bijna twee jaar van leren van theorieën en methodes, merkte hij dat het proberen te begrijpen van esthetische samenhangen niet tot resultaten voerde, maar slechts tot vragen over de waarde van wiskunde voor hemzelf. Frustraties over zijn onderwerp, dat moeilijk en zinloos scheen, waren het gevolg. Hij merkte dat hij zich sterker met zijn onderzoek moest identificeren om de nodige energie voor het vinden van resultaten op te brengen. Waar menig ander op zou hebben gegeven, besloot Oliver 'gewoon' dat hij hiernaar zou gaan handelen. Met resultaat. Het lukte om een eerste stelling te bewijzen, hij merkte vervolgens dat het bewijs toch fout was maar was wel weer enthousiast genoeg om door te gaan. Een succesvolle periode van ongeveer een jaar volgde, waarin het grootste deel van het proefschrift opgebouwd werd. Echter, er kwam nog een tweede moeilijke fase: het opschrijven. Het laatste halve jaar noemt Oliver "de (over)werkrijkste periode van mijn leven". Wederom met resultaat, want er ligt nu een prachtig proefschrift. Een mooie afronding van zijn leertijd in Utrecht die hij als zeer waardevol heeft ervaren.



Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergrecht 24
1018 TV Amsterdam
J.vandeCraats@uva.nl

Boekbespreking: *The Poincaré Conjecture – In Search of the Shape of the Universe*

De vorm van het heelal

Het schrijven over wiskunde voor een algemeen publiek is een hachelijke onderneming. De grote onderzoeksresultaten worden steeds ingewikkelder en zijn vaak niet eens goed te verwoorden zonder gebruik te maken van technische taal. Recent verscheen er weer een boek dat een groot resultaat, het Poincaré-vermoeden, op een toegankelijke wijze tracht uit te leggen. Is de auteur geslaagd? Jan van de Craats geeft zijn oordeel.

Het verhaal van het bewijs van het vermoeden van Poincaré door de Russische wiskundige Grigory Perelman lijkt alle clichés over wereldvreemde wiskundegenieën te overtreffen. In de media en de vaktijdschriften is het dan ook breed uitgemeten; het zou perfect in een filmscenario passen. Hoofdpersoon Grigory Perelman (Grisha voor intimi) geeft al op jonge leeftijd blijk van een exceptionele aanleg voor de wiskunde. In 1982 wint hij als zestienjarige scholier goud op de Internationale Wiskunde Olympiade in Boedapest met een perfecte score. Direct daarna begint hij zijn wiskundestudie

aan de universiteit van zijn geboortestad Leningrad. Na zijn promotie brengt hij als jonge onderzoeker enige jaren in de Verenigde Staten door. Daarbij boekt hij opzienbarende resultaten op het gebied van de differentiaalmeetkunde en de topologie, met als gevolg dat hij in 1994 een van de *invited speakers* is tijdens het *International Congress of Mathematicians* in Zürich. In 1996 kent de *European Mathematical Society* hem een prijs toe, die hij echter weigert, naar verluidt omdat hij het toekennende comité incompetent vindt. Hij leidt daarna een teruggetrokken leven als onderzoeker aan het Steklovinstituut in Sint Petersburg.

Perelman: het verhaal

In 2003 bezoekt Perelman op uitnodiging opnieuw de Verenigde Staten om daar aan verschillende universiteiten voordrachten te geven over drie artikelen die hij enige maanden eerder op het internet geplaatst heeft. Ze hebben direct na verschijning een sensatie veroorzaakt, niet in het minst omdat ze een bewijs bevatten van het beroemde *vermoeden van Poincaré*, een van de zeven *millennium problems* waarop het Clay Institute een prijs van een miljoen dollar gezet heeft. Vakgenoten storten zich op de artikelen en komen in groten getale op zijn lezingen af. Vragen en opmerkingen beantwoordt hij geduldig en overtuigend, maar op aantrekkelijke aanbiedingen van vooraanstaande Amerikaanse universiteiten gaat hij niet in. In plaats daarvan keert hij na zijn tournee snel weer te-

rug naar Sint Petersburg, waar hij zijn kluizenbestaan voortzet. Hij blijft weg als hem op het *International Congress of Mathematicians* in Madrid in 2006 een *Fields medal*, de hoogste eer voor een wiskundige, wordt toegekend. Hij weigert zijn internetartikelen aan vaktijdschriften aan te bieden, en tart daarmee een van de voorwaarden voor het toekennen van de Clay prijs van een miljoen dollar. Het prijzencomité onderzoekt nu of ze Perelman het prijzengeld buiten die regels om kunnen uitkeren, maar het is onduidelijk of hij het geld zal accepteren, mocht dat gebeuren. En als klap op de vuurpijl verschijnt er halverwege 2006 een artikel van de Chinese wiskundigen Huai-Dong Cao en Xi-Ping Zhu met die beweren dat zij tekortkomingen in het bewijs van Perelman hebben gerepareerd. Zij worden ondersteund door hun leermeester Shing-Tung Yau, zelf *Fields* medaillist in 1982. Die claimt daarna dat zijn leerlingen, en niet Perelman dus recht zouden hebben op de millenniumprijs. Anderen betwisten dat weer; Perelman houdt zich buiten de controverse.

De beroering die dit allemaal teweeg heeft gebracht, is al uitgebreid in Nieuw Archief voor Wiskunde behandeld; het grote artikel dat Sylvia Nasar en David Gruber erover schreven in *The New Yorker* van 21 augustus 2006 is integraal in het maartnummer van 2007 opgenomen [1], gevolgd door een deskundig commentaar van Josef Steenbrink [2]. Overigens, een mooi artikel door Roland van der Veen over het vermoeden van Poincaré zelf en de oplossing ervan door Perelman was al in 2006 gepubliceerd in *Pythagoras* [3].

Wat is eigenlijk het vermoeden van Poincaré, en wat is het belang van het bewijs ervan voor het onderzoek in de wiskunde? Populariserende uiteenzettingen erover kunnen niet om die twee vragen heen, en daarmee be-



Henri Poincaré

ginnen meestal ook de moeilijkheden. Want net zoals bij het oudste en beroemdste millemium probleem, de *Riemann-hypothese* uit 1859, zijn zulke vragen niet in een paar volzinnen te beantwoorden. De vermoedens zelf kunnen allebei wel in één zin geformuleerd worden, maar daar wordt de niet-ingewijde weinig wijzer van. Bij de Riemann-hypothese luidt die zin: *alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie liggen op de kritieke lijn*. En het Poincarévermoeden is: *elke compacte enkelvoudig samenhangende 3-variëteit is homeomorf met de 3-sfeer*. Duidelijk? Nee dus. Om de nieuwsgierigheid van de geïnteresseerde leek te bevredigen, is meer nodig, bijvoorbeeld een boek.

Over de Riemannhypothese zijn al enige goede populaire boeken geschreven. Mijn favorieten zijn die van John Derbyshire [4] en Marcus du Sautoy [5]. Bij de succesvolle UVA-webklas wiskunde voor scholieren over de Riemann-hypothese hebben we ze als prijs aan de beste deelnemers uitgereikt. Bestaat er ook zo'n aanbevelenswaardig boek over het vermoeden van Poincaré? Zeker! Het boek van Donal O'Shea waaraan deze bespreking gewijd is, is zo'n voltreffer. Het is goed en toegankelijk geschreven, wiskundige voorkennis is nauwelijks vereist, de hoofdttekst bevat geen formules (alleen in de eindnoten komen een paar formules voor) maar toch heb je als lezer op het eind het idee dat je een goed uitzicht hebt gekregen op de moderne meetkunde.

Hoe krijgt O'Shea dat voor elkaar? Onder meer door het niet alleen maar over de wiskunde te hebben, maar ook aandacht te schenken aan relevante menselijke en sociale aspecten. Zo ontbreekt het hierboven geschetste spannende relaas over de wederwaardigheden van Grisha Perelman en zijn baanbrekende ideeën natuurlijk niet. Maar in de eerste plaats gaat het boek toch over wiskunde. Over meetkunde en topologie om precies te zijn. Het bevat een brede historische schets van de lange weg die leidde tot het vermoeden dat Poincaré in 1904 formuleerde. En van de vele pogingen in de twintigste eeuw om het te bewijzen. Het vertelt hoe anderen stukje bij beetje de weg effenden, maar toch steeds op onoverkomelijke moeilijkheden leken te stuiten totdat Perelman uiteindelijk nieuwe instrumenten schiep waarmee hij het raadsel tot klaarheid kon brengen.

Klassieke meetkunde

Het boek van O'Shea beschrijft vrijwel de gehele geschiedenis van de meetkunde van de oude Babyloniërs tot aan de baanbrekende

inzichten van Gauss, Riemann en Poincaré zelf. Daarnaast geeft het direct al in de hoofdstukken 3 en 4 een heldere inleiding in de topologie, de wereld van vormen, oppervlakken en variëteiten. Een kort historisch hoofdstuk over de ontdekking van de bolvorm van de aarde en de moeilijkheid om het aardoppervlak op platte kaarten weer te geven is eraan voorafgegaan.

De historische lijn wordt in hoofdstuk 5 weer opgepakt met een bespreking van de meetkunde van Euclides en de axiomatische methode. Deskundig en met veel respect behandelt O'Shea de betekenis van *de Elementen*, het monumentale werk van Euclides dat bijna twee millennia lang het gezicht van de wiskunde heeft bepaald. De logische, axiomatische opbouw ervan wordt uitgebreid beschreven, maar O'Shea plaatst ook kritische kanttekeningen. Zoals kenners weten, zijn de meetkundige axioma's en postulaten bij nadere beschouwing minder helder dan ze op het eerste gezicht lijken, en ook op de logische afleiding van veel stellingen valt heel wat af te dingen. Veel is daarover in de loop der tijden al geschreven, en tal van aanvullingen en verbeteringen zijn voorgesteld. Dat heeft generaties van schoolmeesters en filosofen er echter niet van weerhouden de *Elementen* voor te stellen als het beste dat de menselijke geest heeft voortgebracht. Voor hen was en bleef het werk van Euclides een onaanastbaar monument, een toonbeeld van vlekkeloos redeneren en bewijzen. Op school was de axiomatische methode van Euclides tot ver in de vorige eeuw de leidraad voor het meetkundeonderwijs.

O'Shea is daar weinig gelukkig mee. Hij stelt zelfs dat de axiomatische behandeling van de vlakke meetkunde op school menig kritisch bètalen van de wiskunde kan hebben weggevoerd omdat de gepretendeerde logica eerder verwarrend en willekeurig dan systematisch en overtuigend is. "Unless you are unusually rebellious, it is easy to blame yourself and conclude that mathematics is beyond you." (p. 52).

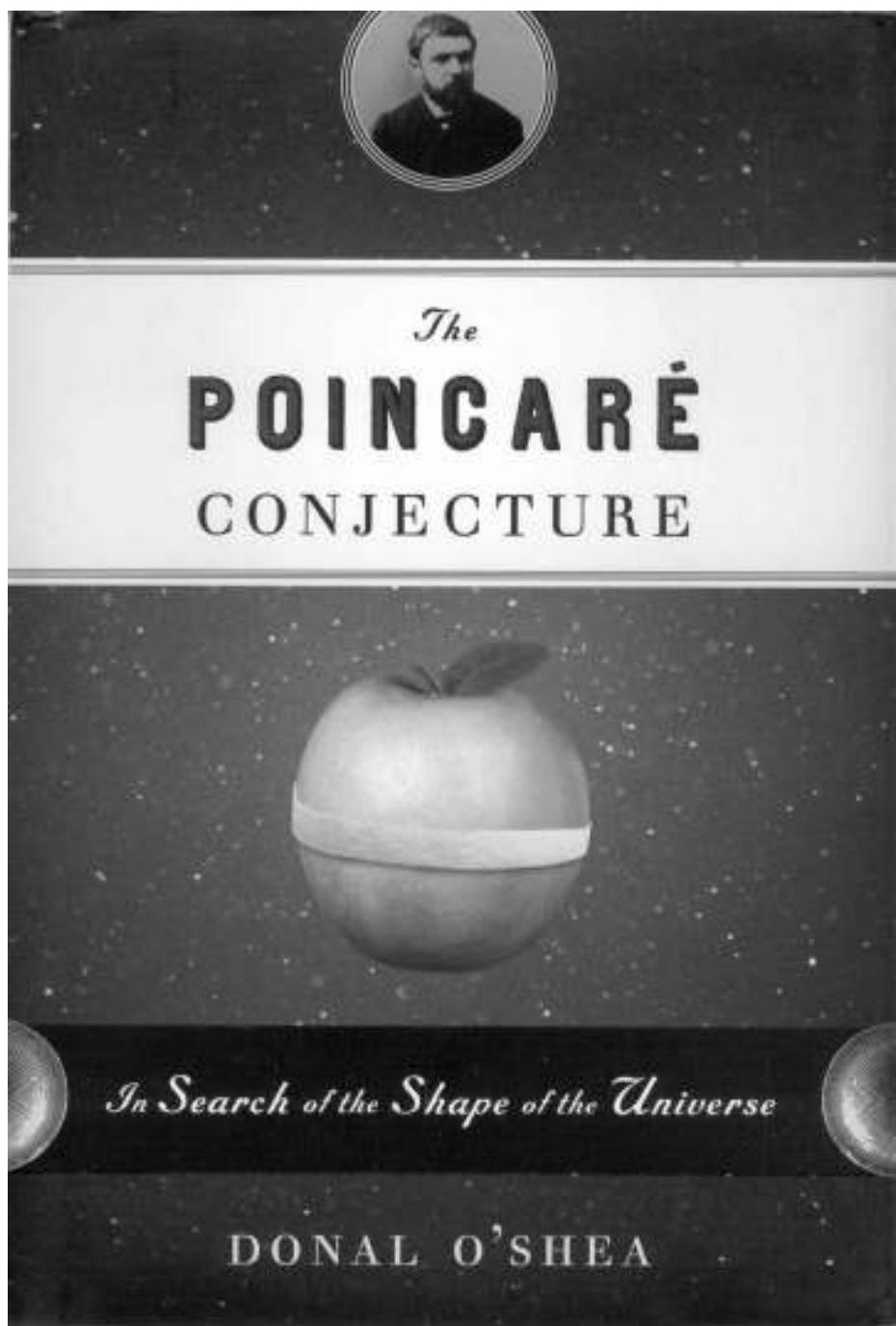
Dat zou best eens zo kunnen zijn. In elk geval geldt het in nog heviger mate voor de Euclidische 'voortgezette meetkunde' in het huidige vwo-vak wiskunde B, waarin leerlingen gedwongen worden pseudobewijzen te geven uitgaande van stellingen op de formulekaart die ze op gezag moeten accepteren. Ik heb gemerkt dat veel wiskundig getalenteerde scholieren tegen die meetkunde een grote weerzin hebben ontwikkeld. Jammer, maar wel begrijpelijk. Ook jammer is het dat we er nog tot minstens 2013 mee opgescheept zitten, want



Grigory Perelman

dan pas zullen er nieuwe programma's van kracht worden. Overigens, hoe moeilijk een correcte axiomatische opbouw van de vlakke meetkunde is, zie je direct als je verrijkend lesmateriaal op dat gebied bekijkt dat speciaal voor schoolgebruik geschreven is. Zelfs als de auteurs ervan wiskundige strengheid pretenderen, is het niet moeilijk er cirkelredeneringen en logische missers in aan te wijzen.

Maar laat ik niet afdwalen en met O'Shea de historische lijn volgen. Gauss, Bolyai en Lobatchevsky, de *non-Euclideanen*, zoals O'Shea ze noemt, rekenen in het begin van de negentiende eeuw af met de pretentie van de euclidische meetkunde als enige mogelijke meetkunde, maar de echte revolutie komt pas wanneer Bernhard Riemann in 1854 in Göttingen in het bijzijn van Gauss zijn *Habilitationsvortrag* houdt onder de titel *Über die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen*. Het belang ervan voor de moderne wiskunde kan niet worden overschat. O'Shea maakt dat overtuigend duidelijk. Hij noemt daarbij als eerste het onderscheid dat Riemann maakt tussen werkelijkheid en wiskundig model. Zijn voordracht gaat alleen maar over wiskundige modellen. Visionair is het beeld dat Riemann schetst van wat de begrippen *ruimte* en *meetkunde op een ruimte* inhouden. De moderne definitie van een *n*-variëteit (Engels: *n-manifold*) als een ruimte waarin elk punt een omgeving heeft die homeomorf is met $\mathbb{R}^n$, is op Riemanns voordracht terug te voeren. Revolutionair is Riemanns inzicht dat een omvattende euclidische ruimte daarbij niet nodig is; hij gaat hierin veel verder dan Gauss, die gekromde oppervlakken altijd wel in een omvattende driedimensionale ruimte plaatste. Riemann beperkt zich ook niet tot twee of drie dimensies, maar laat ruimtes toe met willekeurig veel dimensies, zelfs oneindig veel.



Meetkunde als opgelegde structuur

Een gegeven ruimte kan allerlei verschillende vormen van meetkunde herbergen. Meetkunde is een extra structuur op de ruimte die Riemann definieert door wat we tegenwoordig een krommingstensor noemen, een instrument waarmee lengtes van krommen, hoeken

tussen krommen en oppervlaktes van driehoeken kunnen worden gemeten. De kromming van een ruimte kan van punt tot punt variëren. Einsteins algemene relativiteitstheorie is zonder deze ideeën ondenkbaar.

Zoals op alle terreinen was Riemann ook in de meetkunde zijn tijd ver vooruit. In fei-

te kun je de meetkunde van de negentiende eeuw nog voor een belangrijk deel zien als een gevecht om de Euclidische axiomatische methode verder te vervolmaken, met als eindpunt Hilberts *Grundlagen der Geometrie* uit 1899 waarin hij de Euclidische vlakke meetkunde volledig axiomatisch fundeert. Maar daarmee was dat hoofdstuk afgesloten; alleen op school zou de euclidische methode in de vlakke meetkunde nog lang voortleven.

Het was vooral Poincaré, volgens velen de grootste wiskundige na Riemann, die op Riemanns meetkundige ideeën voortbouwde. Zo werd hij onder meer ook de schepper van de topologie, de studie van de eigenschappen van n -variëteiten die niet veranderen bij continue vervormingen (homeomorfismen). Hebben twee n -variëteiten een verschillende topologische invariant, dan kunnen ze dus niet homeomorf zijn. Zo'n invariante eigenschap is bijvoorbeeld *enkelvoudige samenhang*, die inhoudt dat je elke lus in zo'n variëteit kunt samentrekken op een punt. De n -sfeer, de verzameling van alle punten in $\mathbb{R}^{n+1}$ met afstand 1 tot de oorsprong, is enkelvoudig samenhangend, en hetzelfde geldt dus voor iedere n -variëteit die met de n -sfeer homeomorf is. Het vermoeden van Poincaré zegt dat voor iedere compacte 3-variëteit ook het omgekeerde geldt: als ze enkelvoudig samenhangend is, is ze homeomorf met de 3-sfeer.

Ik weersta de verleiding om nog meer over de inhoud van dit boek te vertellen. In plaats daarvan sluit ik af met een paar woorden over de ondertitel: 'In Search of the Shape of the Universe'. Die lijkt te wringen met het strikte onderscheid dat Riemann maakte tussen werkelijkheid en wiskundige modellen. De ondertitel suggereert dat het bewijs van het vermoeden van Poincaré iets zegt over het heelal waarin we leven. Dat is aanvechtbaar. Het vermoeden is een wiskundig vermoeden dat betrekking heeft op compacte 3-variëteiten. Of dat bruikbare modellen zijn voor het ons omringende heelal, is een vraag die we moeten overlaten aan fysici en kosmologen. 

The Poincaré Conjecture – In Search of the Shape of the Universe, Donal O'Shea, Walker & Company, New York, 2007, ISBN 978-0-8027-1532-6.

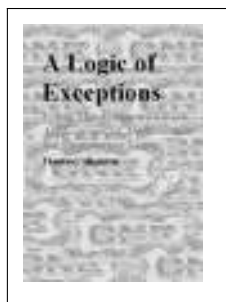
Referenties

- 1 Sylvia Nasar, David Gruber, 'Manifold Destiny', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (1) (2007), pp. 34–43
- 2 Josef Steenbrink, 'Rechtaardiging of heiligverklaring?', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (1) (2007), pp. 44–45
- 3 Roland van der Veen, 'De vorm van de ruimte', *Pythagoras* 45(4), pp. 4–10
- 4 John Derbyshire, *Prime Obsession – Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, Washington, D.C., 2003
- 5 Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes*, Harper, London, 2003

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



Thomas Colignatus
A Logic of Exceptions: Using the Economics Pack Applications of Mathematica for Elementary Logic
 Scheveningen: Thomas Cool Consultancy & Econometrics, 2007
 252 p., pdf-version freely available at
<http://www.dataweb.nl/~cool/Papers/ALOE/Index.html>, ISBN 978-90-804774-4-5

This is not really a book review. But it is a warm recommendation to download and read a free and self-published book on self-reference called *A Logic of Exceptions* (ALOE 1981 / 2007) by Thomas Colignatus — the science name of Thomas Cool (b. Jakarta 1954).

The author is an econometrician who many years ago lost his job at the Central Planning Bureau (CPB, the Netherlands government econometric planning agency) when his employer suppressed his research on unemployment. Colignatus is an original thinker and where I come from (England) we cherish excentrics, but in the polder-landscape of the Netherlands even mild unconventional thinking may get you into trouble. Without wanting to start a discussion about excentricity, or misrepresent the author or his Dutch environment, let me merely state that I think that the author is excentric and simultaneously I mean that as a compliment to him. Moreover, I simultaneously think that he is a decent scientist who asks (interesting) questions and writes (interesting) analyses of the answers which he finds. For me there is a positive correlation between these various opinions. These remarks are not irrelevant to the present book as I will explain later.

The idea of ALOE is that three-valued logic is the way to solve all the paradoxes in logic concerning self-reference. In particular, the author claims to turn Gödel's self-referential statement that it itself cannot be proved, into just another variant of the famous liar paradox. How does three-valued logic come into this? Well, by the idea of letting the third truth value not stand for 'the truth of this statement is undetermined' but for 'this statement is nonsense'; i.e., indeterminate instead of undetermined. I do not know if a three-valued logic having such an interpretation has been studied before, but do notice that the rules of such a logic ought to differ from the rules for a more conventional three-valued logic. In two-valued logic 'A implies B' is equivalent to 'not-A or B' and conventional three-valued logic retains this, so an implication is undetermined if A or B is undetermined. Now, suppose that we represent 'true', 'false' and the new third truth-value 'nonsense' by the numbers 1, 0 and 1/2. In Colignatus's calculus of nonsense, implication remains two-valued, and can be conveniently and faithfully represented numerically with 'less than or equal'. Equivalence remains two-valued as well, and is represented numerically with equality. In particular, 'nonsense implies nonsense' is true (the author's framework), while 'indeterminate implies indeterminate' is indeterminate (conventional three-valued logic). Colignatus holds that his approach avoids the liar paradox that arises in conventional three-valued logic. The 'trick' is not having levels in language or a theory of types but having cumulations in nonsense. The statement of the Liar (that he always lies) is not undetermined, but nonsense (in principle indeterminate).

The three-valued logic and its rules are added by Colignatus as

part of a grander plan (to him Gödel is only secondary) to defuse the danger of self-reference and solve the liar paradox, and its many variants. He wants to add an axiom to ordinary logic which actually legitimizes self-reference in the following way: an axiom which states that if a certain proposition can be deduced from the axioms, then the system knows that the proposition has a proof. The system is axiomatically allowed to talk about itself. This thus uses the distinction of selfreference of sentences vs systems. Adding that axiom but keeping conventional logic would lead to an inconsistent system, precisely because of the liar paradox. Also the Gödel statement is both true and not true. Conventional three-valued logic gives no escape. However, with Colignatus's three-valued logic, both the Liar statement and the Gödel statement become merely nonsense. (Recall that in the usual world, assuming that ordinary number theory is consistent, the Gödel statement is a true statement of number theory which does not have a proof within the conventional formalism of number theory. Consequently, one can even add its negation to the usual axioms and still have a consistent system.)

Many readers may feel uncomfortable here. Gödel's work is one of the crowning glories of 20th century mathematics. It has had enormous impact in mathematics, not just in some academic branch of mathematical logic, but it has changed the way that mathematicians think about mathematics. It is one route to the theory of nonstandard analysis. It is a cherished jewel, and now a mere econometrician says it is just based upon nonsense? It was all a big mistake?

This would be to misunderstand Colignatus's intentions. In fact, it is falling into the trap of confusing different layers of discourse on the Gödel theorem. On the one hand, Colignatus does not show that Gödel's proof was wrong, but he does show that Gödel himself drew untrue (or at least, misleading) conclusions about it. On the other hand, logic is something which we use not just inside mathematics but also in science, in law, in life. Why should we necessarily use the same formal logic inside mathematics and inside, say, government and bureaucracy? Or in empirical science? I think it makes sense to develop a logic of exceptions, a logic which does not assume that every statement which can be made in a certain realm is either true or false. It is certainly very easy to talk nonsense when talking about the real world. Finally, the logical paradoxes arise from mathematical considerations on selfreference, and it is certainly pretty easy to talk nonsense about selfreference, so solution approaches developed with one purpose in mind may be useful in others.

Changing some of the ingredients of the usual axiomatics of the foundations of mathematics, does not change the truth status of Gödel's work within the context chosen by him. What we do with Gödel's theorems inside of normal mathematics is not altered since we do not there necessarily use the alternative logic of Colignatus, or anyone else for that matter.

I do believe that these researches are a beautiful antidote to the attempts which many people have made to draw grandiose conclusions from Gödel's work in completely different realms. For instance, assuming the consistency of the conventional formalism of mathematics, we know that the Gödel statement is true, and does not have a proof within that formalism. To me this merely shows that that formalism is rather restricted. We can do lots of number theory in that formalism, but not all of it. Whether or not there exists a finite set of axioms for number theory depends on

how you define an axiom. As mathematicians we do mathematics by arguing about proofs, i.e., we prove theorems in mathematics by meta-mathematics, and it is one of the joys of mathematics that this is possible. Gödel showed in the thirties of the last century that what at that time appeared a hopeful candidate for capturing in formal language the whole essence of mathematics, did not do the job, and it suggests that the enterprise was in fact doomed to failure. I think this is a wonderful finding, a tribute to human creativity. I do not think however that Gödel's theorem tells us something about quantum physics or biology or theology.

However, the famous (and respected) Penrose uses Gödel's theorem to argue, in his book 'The emperor's new mind', that artificial intelligence can never be possible, because we can prove theorems which no computing device can prove. He goes on to suggest that this is connected to some so far unknown quantum mechanical phenomena in our neural system. Perhaps today he would argue that quantum computers will be able to 'think'.

This is not the only example of great minds of science and philosophy who have built incredible castles in the air on Gödel's theorem. Grand musings on philosophy and modern thought seem to have an obligatory discussion of the relevance of Gödel to this or that metaphysical position, but so far I have only seen these musings prove that the writer did not know much about what he or she was pontificating about. I think that Colignatus's book is a beautiful antidote to that kind of thinking.

There are some features of ALOE which I must describe to you before you rush to internet to download the pdf file. (I hope you will still do that, after I tell you about these features; but you will know in advance what to expect). The book has been conceived and developed as a Mathematica notebook. Colignatus's logic is implemented in an extension to the Mathematica language, which becomes accessible to you if you buy his 'Economics Pack', an extensive collection of Mathematica modules for teaching and research in economics and econometrics. If you already have access to Mathematica then there is no problem for you. Otherwise you will either have to get Mathematica, or to miss part of the fun of the book. Since ALOE has an original approach to logic you will not be surprised that the rest of the Economics Pack contains several original approaches to other parts of the author's field. His original innovations are in my opinion often thought provoking.

The book is presented as a course-book in logic for first year university or college students, apparently since the author feels that modern logic has to be built up again from bottom up. He also suggests that the use of a computer-algebra program helps us to become more familiar with three-valued logic. I cannot judge how succesful this would be (e.g. the book contains no explicit exercises). I do not work every day with Mathematica: every time I do have to use it I have to relearn the basic tricks and I get irritated by Wolfram's quirks. I am also irritated by the huge price and pretensions of this particular computer package. Hopefully there will eventually be an open source alternative (the SAGE project for instance. .).

This means that the reader of ALOE who actually wants to play with the Mathematica examples has to somehow get hold of Mathematica, which for me always implies finding out again how to get the (my university's campus) licence key installed, a complicated process which is so unnatural that I cannot remember it from one year to the next. Secondly you have to install 'The Economics Pack' into Mathematica, and the instructions may be a

bit unclear if like me you are not used to the process. After solving all these problems, the ALOE notebooks did work, but not all of them exactly as the book suggested they should. This concerned the format of the output, not the output itself, but it certainly adds to some irritation. Mathematica allows various ways of display: `OutputForm`, `InputForm`, `StandardForm` and `TraditionalForm`, and the user has to find out that the book uses `TraditionalForm`.

My other complaint about this book is a complaint which I have about much private modern desk-top-publishing. Firstly, an author of a mathematics textbook is not usually an expert in typography. Secondly, a Dutch author of an English language mathematics textbook is not usually a native speaker, and the book is full of little Hollandicisms and mistakes in grammar and spelling which a professional book editor would have removed before sending the manuscript on to the printers. The Hollandicisms are cute of course (though probably this was not the effect intended by the author), but the incidental spelling and grammar mistakes — don't get me wrong, the author writes lively and enjoyable and transparent English — are an irritation. I read a great deal and I enjoy reading professionally produced books. It irritates me to read the kind of mistakes in typography and language which I find myself daily pointing out to my students. It is not because these blemishes are mistakes, it is because bumping into them all the time distracts and slows down, the form gets in the way of the content. The point of good typography and good writing is that the form becomes almost invisible, except when of course it is part of the message. I understand that the author had the choice between publishing this book as it is or not publishing at all, and it is indeed better that the book is available, but a second edition would benefit from a polishing round.

As I said above, the author is a creative thinker. The present book started life out of interest during his econometrics education in Groningen around 1981, and has been lying on a shelf for more than 25 years, and was retyped and cast in Mathematica in 2007 after his return from a stay abroad when the manuscript turned up again. The author feels that his admittedly imperfect work, and at the start of his reading in logic also the work of an outsider and a novice, was not properly appreciated by his 1981 professors in mathematical logic. He in fact thanks them for their criticism that sharpened his thoughts and allowed ALOE to get its form but he also believes that they did not really listen. I contacted one of those professors and did observe that there was little communication indeed. This personal history does rear its head at various points in the book. Personally, I found the history adds to the drama and content of the book, and it is surely partly responsible for the energy and drive with which it is written. The author on his website emphasizes his analysis on unemployment, and one can imagine that had he received more attention in 1981 by logicians, then the directorate of CPB might have had a different reputation to deal with. I smile at some of the more far reaching claims of the author, I enjoy the positive and original content. The book contains much historical and anecdotal material on logic, selected from respectable sources on the history of mathematical logic, and evaluation from the author's personal perspective, which I enjoyed reading very much.

In conclusion I think this is a book which deserves to be read and to be discussed and to be improved; it needs to be read with an open mind and in a constructive mood. Then

I think many readers will find it educational and thought-provoking.

Richard Gill



T. Tao

Analysis I, II

Texts and Readings in Mathematics, vol 37, 38
New Delhi, Hindustan Book Agency, 2006

Vol I: 420 p.; Vol II: 272 p. prijs \$ 36, \$ 29

ISBN 81-85931-62-3; 81-85931-63-1

De analyseboeken van Fields-medaillewinnaar Terence Tao richten zich op formele bewijzen en rigoureuze afleidingen. Deze aanpak gaat ervan uit dat de analyse cursus wordt gegeven naast (of na) een calculuscollege waarin gerekend kan worden aan reeksen, integralen, enzovoort. Het eerste deel van de twee boeken begint met een hoofdstuk waarin wordt uitgelegd wat analyse is en waarom we eigenlijk analyse willen doen. Dit hoofdstuk eindigt met de leerdoelen van de boeken met als afsluitende zin "You will develop a sense of *why* a rule in mathematics (...) works, how to adapt it to new situations, and what its limitations (if any) are; this will allow you to apply the mathematics you have already learnt more confidently and correctly". Het boek slaagt er inderdaad in om dit gevoel over te brengen.

Analysis I begint daarna met de natuurlijke getallen, verzamelingen, rationale getallen en de constructie van de reële getallen in de eerste 140 pagina's. Afhankelijk van andere colleges in het curriculum kan een deel hiervan worden overgeslagen. Daarna wordt reële analyse in één veranderlijke gedaan: rijen, reeksen, oneindige verzamelingen, functies, continuïteit, differentiatie en de Riemannintegraal. Dit beslaat ongeveer tweehonderd pagina's, de helft van het boek. De stijl van het boek is precies als het gaat om bewijzen, maar veel bewijzen van uitspraken worden als oefening aan de student gelaten. Het gros van de opgaven in het boek bestaat uit bewijsopgaven, waarbij vaak hints worden gegeven. De toon wordt informeler als er over de resultaten wordt gesproken. Dan wordt gepoogd de intuïtie voor een resultaat bij de lezer te vergroten. De lezer wordt direct aangesproken, en dit heeft geresulteerd in een zeer leerzaam boek voor een analyse cursus. Het eerste deel heeft twee appendices. Er is een appendix over het decimale stelsel, en er is een appendix over redeneren in wiskundige bewijzen. Deze appendix geeft uitleg over bewijs technieken: wat is een implicatie, wat is een bewijs uit het ongerijmde, structuren van bewijzen, kwantoren.

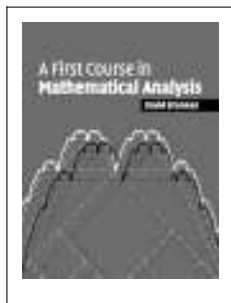
Om een college aan de hand van dit boek tot een succes te maken is het essentieel dat studenten opgaven maken. Daarom hebben we aan de Radboud Universiteit het inleveren van huiswerk en het geven van een groepspresentatie over een resultaat of opgave verplicht gesteld. Hierdoor worden de studenten gestimuleerd het boek goed te lezen, en dan blijkt het boek ook goed bij de belevingswereld van de studenten aan te sluiten. Zij hebben een positieve mening over het boek, en deze mening deel ik als docent.

In het deel Analysis II worden eerst metrische ruimtes, continue functies, uniforme convergentie en machtrekken besproken. Daarna volgen Fourierreksen, een onderwerp dat overge-

slagen zou kunnen worden. De differentiaalrekening voor functies van meerdere veranderlijken met de impliciete en inverse functiestelling is het volgende standaardonderwerp. In plaats van de Riemannintegraal voor functies van meerdere veranderlijken te ontwikkelen, is gekozen voor een presentatie van de Lebesgue-integraal in $\mathbb{R}^n$. De integraalstellingen van Gauss, Stokes en Green, standaardonderdelen van een calculuscursus, worden niet besproken, en dat is een goede keuze.

Kortom, de boeken van Tao zijn zeer geschikt voor een analysecursus als deze naast (of na) een calculuscursus wordt gegeven.

Erik Koelink



D.A. Brannan
A First Course in Mathematical Analysis

Cambridge University Press, 2006

459 p., prijs £25.99

ISBN 0-521-68424-2 (paperback)

In het hoger onderwijs wordt alles wat te maken heeft met functies, limieten, differentiëren en integreren opeens analyse of calculus genoemd. Een nieuw woord en een grote overgang, want opeens lijkt alles wat je als leerling eerder geleerd hebt vrij nutteloos. Je begint helemaal opnieuw en op een veel abstracter niveau. Bij veel universitaire opleidingen start men met 'dikke' studieboeken waarin differentiaal- en integraalrekening en toepassingen centraal staan. Mede door formeler taalgebruik wordt de overgang als lastig ervaren. Veel gebruikte boeken zijn de boeken van Adams en van Steward. In die boeken staan veel uitgewerkte voorbeelden die studenten houvast moeten bieden. Grondige bewijzen worden niet altijd gegeven of staan in appendices.

Dat geldt niet voor het boek *A First Course in Mathematical Analysis*. In dat boek wordt geen aandacht besteed aan toepassingen en het is dus vooral bedoeld voor studenten wiskunde. Het boek is gebaseerd op cursussen die ontwikkeld zijn aan de Open University (UK). Uitgangspunt is dat de leertekst geschikt is voor zelfstudie en dat uitleg daarom grondig moet zijn.

Omdat de auteur zich ervan bewust is dat analyse niet eenvoudig is, stelt hij de introductie van de gebruikelijk epsilon-delta 'horror' uit en kiest hij voor een opbouw met rijen: de sequential approach.

De opbouw van het boek is doordacht. In hoofdstuk 1 worden de reële getallen ingevoerd als decimale getallen: $\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ met $a_0 \in \mathbb{Z}$ en $a_1, a_2, a_3 \dots$ cijfers uit $\{0, 1, \dots, 9\}$. Een slimme zet want op die manier bewijst de auteur in hoofdstuk 1 eenvoudig dat elke niet-lege verzameling van $\mathbb{R}$ een kleinste bovengrens heeft. In dat eerste hoofdstuk worden manipulaties met ongelijkheden besproken die veelvuldig gebruikt zullen worden. Ook komen de ongelijkheden van Bernoulli en van Cauchy-Schwarz, de driehoeksongelijkheid, het begrip supremum en het bewijs uit het ongerijmde aan de orde. Over de rekenregels van $\mathbb{R}$ stapt de auteur lichtjes heen.

In hoofdstuk 2 worden rijen besproken en komt al snel 'de epsilon' aan de orde (zonder zijn maatje delta). Duidelijke voorbeelden laten zien hoe je bewijst dat een rij een nulrij is. De rekenregels

van rijen worden bewezen en het hoofdstuk eindigt met de invoering van e als limiet van de rij $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$, terwijl π wordt ingevoerd als de limiet van oppervlaktebenaderingen van de cirkel. Nauwkeurig wordt bewezen dat die rij convergeert. Na hoofdstuk 3 (reeksen) wordt in hoofdstuk 4 het begrip continuïteit ingevoerd met behulp van rijen. Verder vinden we in dat hoofdstuk bewijzen dat de sinus, de exponentiële functie en hun inversen continu zijn, en als afsluiting het bewijs van de tussenwaardestelling en de extreme-waardenstelling.

In hoofdstuk 5 komt dan na de behandeling van continuïteit het limietbegrip en de lang uitgestelde ϵ, δ -definitie. Als motivatie voor dat uitstel wordt aangedragen dat het gedrag van een willekeurige convergente rij soms moeilijk te analyseren is. Veel voorbeelden laten zien hoe je bewijst dat een functie continu is. Als hoogtepunt volgt het bewijs dat de functie van Dirichlet discontinu is in elk punt. Ook in hoofdstuk 6, *Differentiation*, komt een 'vreemde functie' aan de orde: de functie van Blancmange (grafiek op de omslag van het boek), een functie die overal continu is maar nergens differentieerbaar. Een pittig bewijs volgt. Ook de stelling van Rolle, de regel van L'Hôpital en de middelwaardestelling worden in hoofdstuk 6 bewezen. In de laatste hoofdstukken komen integraalrekening en machtreeksen aan bod. Net als in de voorafgaande hoofdstukken wordt de theorie zeer zorgvuldig opgebouwd.

Het boek is voorzien van opgaven met uitwerkingen en ziet er verzorgd uit. Aanbevolen voor opleidingen die analyse meteen fundamenteel willen grondvesten. Volgens de auteur zijn er al meer dan tienduizend studenten (sinds 1971) die de cursus met succes bestudeerd hebben. Daarbij moet aangetekend worden dat Brannan eerlijk aangeeft dat het door allerlei curriculumveranderingen in Engeland niet eenvoudiger geworden is. Een experiment waard in Nederland?

Jan Essers

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone. For each problem the most elegant correct solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The judges reserve the right to withdraw the prize if none of the solutions is deemed worthy. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

Occasionally there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro. Both suggestions for problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarchief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this edition is December 1, 2008.

Problem A (proposed by Hendrik Lenstra)

Let a and b be integers. Show that the following are equivalent:

- n divides $a^n - b^n$ for infinitely many positive integers n ,
- $|a - b| \neq 1$.

Problem B (based on a problem by Hendrik Lenstra)

Let G be a finite group and a be an element of G . Show that the number of elements $g \in G$ that satisfy both $ga \neq ag$ and $ga^2 = a^2g$ is divisible by 4.

Problem C (folklore)

Let p be an odd prime number and A and B two $n \times n$ matrices with entries in $\mathbf{Z}$ such that $A^p = B^p = 1$, and such that the rank of $A - B$ is 1. Show that $n \geq p$.

Edition 2007/4

We received submissions from Daniël Worm (Leiden), Kee-Wai Lau (Hong Kong), the Fejéntaláltuka Szeged Problem Group (Szeged), Eric Kuisch (Houten), Marcelina Mocanu (Bacău), Cornel Berceanu (Bacău), Sander Kupers (Utrecht), Sep Thijssen (Nijmegen), Jaap Spies, Rob van der Waall (Huizen), and H. Reuvers (Maastricht).

Problem 2007/4-A Let p be a prime number. Determine all n such that in the binomial formula

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

none of the coefficients is divisible by p .

Solution We present a solution similar to the one submitted by Sander Kupers. This problem was also solved by Kee-Wai Lau, the Fejéntaláltuka Szeged Problem Group, Eric Kuisch, Marcelina Mocanu, Cornel Berceanu, Sep Thijssen, Rob van der Waall and H. Reuvers.

The condition is satisfied by $n < p$.

Assume that $n \geq p$ and write $n = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$, with $0 \leq a_i < p$, $a_k > 0$ and $k > 0$. Note that since $(x + 1)^p \equiv x^p + 1$ modulo p , we have

$$(x + 1)^n \equiv (x + 1)^{a_0} (x^p + 1)^{a_1} \dots (x^{p^k} + 1)^{a_k}.$$

For the coefficient of x^{p^k-1} to be non-zero (modulo p) we need that $a_i = p - 1$ for all $i < k$. In fact, this is sufficient for all the coefficients to be non-zero, as we now show. Consider the coefficient (modulo p) of x^m , with $1 < m < n$, in

Eindredactie:
Lenny Taelman, Johan Bosman
Redactieadres:
Problemenrubriek NAW
Mathematisch Instituut
Postbus 9512
2300 RA Leiden
uwc@nieuwarchief.nl

$$(x+1)^n \equiv (x+1)^{p-1}(x^p+1)^{p-1} \cdots (x^{p^{k-1}}+1)^{p-1}(x^{p^k}+1)^{a_k}.$$

Writing $m = b_0 + b_1p + \cdots + b_kp^k$ with $0 \leq b_i < p$, we find that the coefficient of x^m is the product of the coefficients of $x^{p^ib_i}$ in $(x^{p^i}+1)^{p-1}$, over all i . Since none of these are 0 modulo p , the coefficient of x^m is non-zero modulo p .

We conclude that n satisfies the required condition if and only if $n = ap^k - 1$ for some $k \geq 0$ and $0 < a < p$.

Problem 2007/4-B Determine all positive real numbers a for which there exists a function $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ such that the inequality

$$f(x+\delta) > \delta f(x)^a$$

holds for all x and for all $\delta > 0$.

Solution We present a solution based on that of Daniël Worm. This problem was also solved by Sander Kupers.

Note that for $a \leq 1$ the function $f(x) = e^x$ satisfies

$$f(x+\delta) > \delta f(x)^a. \quad (1)$$

So from now on we assume $a > 1$. Let $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ be a function that satisfies (1). Take $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ and put

$$\delta_i = \frac{a^{i-1}}{a^n - 1} \quad \text{for } i = 1, \dots, n.$$

Then we obtain the inequality

$$f\left(x + \frac{1}{a-1}\right) = f(x + \delta_1 + \cdots + \delta_n) > \delta_1(f(x + \delta_2 + \cdots + \delta_n))^a > \cdots > C f(x)^{a^n},$$

where

$$C = \prod_{i=1}^n \delta_i^{a^{i-1}} = \frac{\prod_{i=1}^n a^{(i-1)a^{i-1}}}{(a^n - 1)^{(a^n - 1)/(a-1)}} > a^p,$$

and

$$p = \sum_{i=1}^n (i-1)a^{i-1} - n(a^n - 1)/(a-1).$$

This exponent satisfies

$$p = \sum_{i=1}^n (i-1-n)a^{i-1} = -a^n \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{a}\right)^k > -a^n \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{a}\right)^k = a^n D$$

with $D \in \mathbf{R}$ (independent of n) as this infinite series converges. In conclusion we see that for all n and x we have

$$f\left(x + \frac{1}{a-1}\right) > \left(a^D f(x)\right)^{a^n}. \quad (2)$$

From (1) it follows that there exists x with $a^D f(x) > 1$, leading to a contradiction with (2). So we see that there exists a function $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ satisfying (1) if and only if $a \leq 1$.

Problem 2007/4-C Let G be a finite group with n elements. Let c be the number of pairs $(g_1, g_2) \in G \times G$ such that $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Show that either G is commutative or that $8c \leq 5n^2$. Show that if $8c = 5n^2$ then 8 divides n .

Solution We received correct solutions by Jaap Spies and Rob van der Waall. We present

Oplossingen

| Solutions

a solution based on both submissions.

For $x \in G$ denote by n_x the number of $g \in G$ such that $gx = xg$. Denote by k the number of conjugacy classes of G . Then

$$c = \sum_{x \in G} n_x = kn,$$

where the first equality follows from the definition of c and the second by counting the orbits of the action of G on itself by conjugation. Hence $8c = 5n^2$ implies $8k = 5n$ and therefore that 8 divides n .

Assume now that G is not commutative. Denote the center of G by Z .

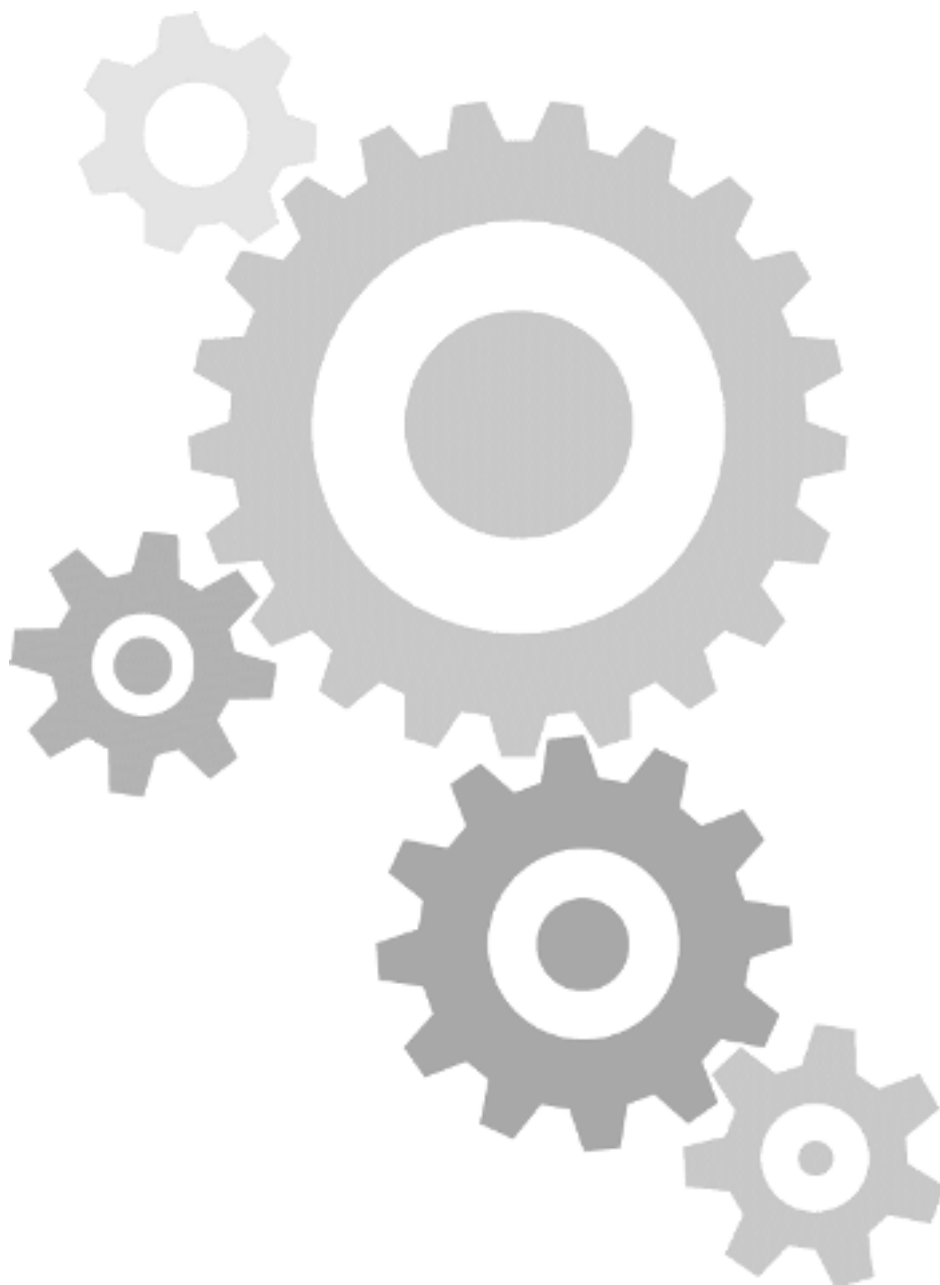
Claim. The quotient group G/Z is not cyclic.

Proof. Assume that gZ generates the quotient, then every element of G can be written as $g^i z$ for some i and some $z \in Z$, and it follows that all elements commute with each other, a contradiction since we assumed G not to be commutative.

So the index of Z in G is at least 4. Denote this index by a . Now we estimate k , the number of conjugacy classes of G . Every element of Z constitutes a single conjugacy class and every other conjugacy class must have at least two elements, hence

$$k \leq \frac{1}{a}n + \frac{1}{2} \frac{a-1}{a}n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2a}\right)n \leq \frac{5}{8}n$$

which is what we wanted to show.



Remco Duits

Faculteit Biomedische Technologie
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
r.duits@tue.nl

Herplaatsing

Door een technische fout bij de drukker is dit artikel niet correct in het maartnummer afgedrukt.

Onderzoek: partituren in de beeldanalyse I

Schaalpartituren

In beeldanalyse spelen schaal en lokale oriëntatie een prominente rol. Waar bevat het beeld belangrijke informatie en op welke schaling gebeurt dit? Een gestructureerde samenvatting van deze data noemen we een partituur van de afbeelding. Deze partituur bevat de multischaal- en multiorientatieinformatie op een zo uitgesproken mogelijke manier. Remco Duits, onderzoeker op het gebied van de beeldanalyse en -interpretatie, beschrijft in dit overzichtsartikel de vele wiskundige mogelijkheden om zo'n structuur op een afbeelding aan te brengen. In dit eerste deel beperkt hij zich tot schaalpartituren van een beeld en bijbehorende evolutievergelijkingen. Deze schaalpartituren zijn natuurlijk niet erg homogeen; ze bevatten in het bijzonder singuliere punten waarvan topologische eigenschappen veranderen naarmate de schaal van observatie toeneemt. Vrijwel het gehele originele beeld kan weer worden verkregen uit deze singulariteiten. Kennis van deze singulariteiten is belangrijk voor beeld-manipulatie, compressie en objectherkenning.

Vergeleken met de mens leven computers nog in het land der blinden. Ondanks geavanceerde digitale videocamera's, dikke grafische kaarten en krachtige processoren loopt de computer bij de analyse van beelden nog mijlenver achter op de mens. Het vakgebied van de beeldanalyse probeert daar moedig verandering in te brengen. Dat hier nog een lange weg af te leggen is, komt mede door het feit dat de beeldanalyse, een vakgebied dat sterk gedreven is door creatieve ingenieurs, gebukt gaat onder het algemene gedachtengoed 'why bother if it works?', waar dikwijls 'we bother since it does not work!' meer op zijn plaats zou zijn geweest. Hier ligt een uitdaging voor de toegepaste wiskunde om generieke theorie en methoden te bedenken. Anderzijds zijn de problemen uit de beeldanalyse vaak van een stevig differentiaalmeetkundig kaliber, waar hier niet al te diep op ingegaan kan worden, zodat de beeldanalyse op zijn beurt een voedingsbron voor de wiskunde is. Binnen beide vakgebieden wordt dit nog onvoldoende beseft.

Gegeven is een digitaal grijswaardebeeld $x \mapsto f(x)$, waarbij $f(x) \in \mathbb{R}$ de gemiddelde grijswaarde voorstelt op positie $x \in \mathbb{R}^d$

waarbij we het gemiddelde hebben genomen over het pixel/voxel dat $x \in \mathbb{R}^d$ bevat. De ruimte van beelden zullen we modelleren met $L_2(\mathbb{R}^d)$, de ruimte van kwadratisch integreerbare complexwaardige functies (of liever functieklassen) gedefinieerd op $\mathbb{R}^d$, waarbij meestal $d = 2$ of $d = 3$. Geïnspireerd door ons eigen visueel systeem beschouwen we schaal- en oriëntatiepartituren van het beeld f om het beeld beter te kunnen analyseren. Dit is geheel analoog aan de analyse en representatie van een muziekstuk aan de hand van een muziekpartituur.

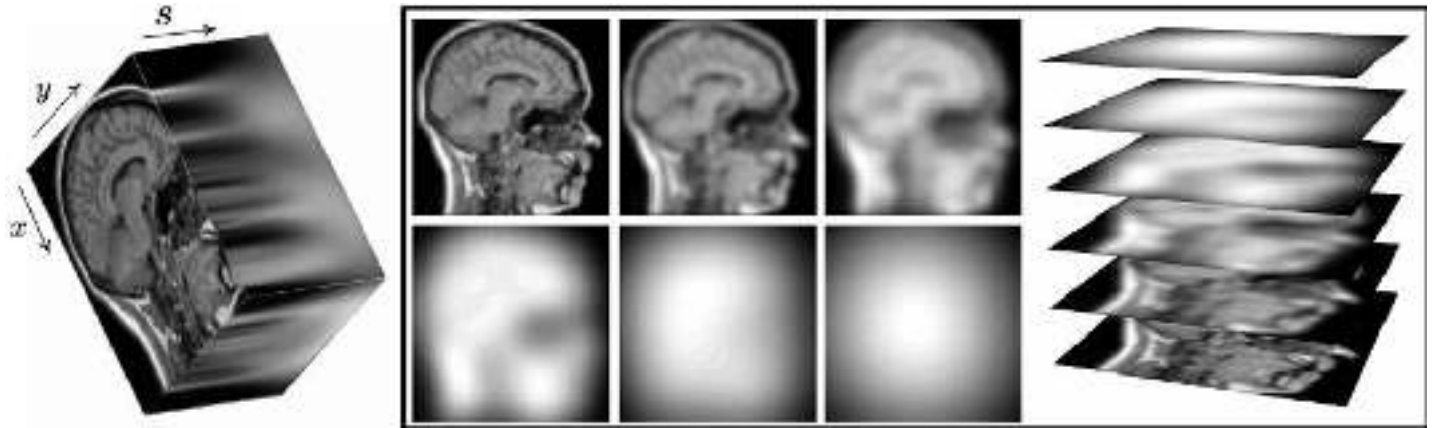
Iedereen die wel eens een muziekinstrument in zijn handen heeft gehad weet dat een partituur meer structurele informatie over tijd en lokale frequentie verstrekt dan een simpele bemonsteraar. In zo'n muziekpartituur staat aangegeven op welk moment een toon moet worden gespeeld met aangegeven lokale frequentie (hoogte van de toon), zie figuur 1.

Merk op dat hier een onzekerheid bestaat in frequentie en tijd. Om een perfecte toon te spelen met vaste globale frequentie moet hij oneindig lang duren, zodat je niet meer weet op welk tijdstip gespeeld moet worden. Terwijl een noot van oneindig korte tijdsduur alle globale frequenties verlangt, zodat de toonhoogte van deze noot niet vastgelegd kan worden. Het is dus relevant om over *lokale frequenties* te praten.

Dit kan als volgt worden gemodelleerd: Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ het muzieksignaal en zij $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ het window waarover je lokale frequenties meet, bijvoorbeeld een Gaussische verdeling $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} e^{-\frac{x^2}{4s}}$, $s = \frac{1}{2}\sigma^2$ en veronderstel dat het signaal kwadratisch integreerbaar is, i.e. $f \in L_2(\mathbb{R})$. De partituur $W_\psi f$ van signaal f wordt nu gegeven door de zogenoemde Gaborgetransformeerde



Figuur 1 Een muziekpartituur



Figuur 2 Links: illustratie van een schaalpartituur $(x, y, s) \mapsto u_f(x, y, s)$ van een beeld $(x, y) \mapsto f(x, y)$; rechts: een aantal plakjes $u_f(\cdot, \cdot, s)$ (voor vaste schalen van $s = 0$ tot een grote schaal waarop het laatste extremum overblijft) in een schaalpartituur

$W_\psi f$ van f :

$$(W_\psi f)(t, \omega, p) = e^{-i(\frac{p}{4} - \frac{t\omega}{2})} \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\xi - t)} f(\xi) e^{-i\xi\omega} d\xi, \quad (1)$$

hetgeen een gelokaliseerde Fouriertransformatie voorstelt op tijd $t \in \mathbf{R}$, lokale frequentie $\omega \in \mathbf{R}$ en fase $p \in \mathbf{R}$. In deze formule gaan we structuur aanbrengen. Beschouw daartoe de groep van modulaties en translaties, beter bekend als de Heisenberggroep H_3 met product

$$(t + i\omega, p)(t' + i\omega', p') = ((t + t') + i(\omega + \omega'), p + p' + 2(\omega t' - \omega' t))'$$

waarbij $t + i\omega, t' + i\omega' \in \mathbf{C}, p, p' \in \mathbf{R}$, die dus een semi-direct product van de groepen $\mathbf{C}$ en $\mathbf{R}$ vormt. Dit noteren we als volgt: $H_3 = \mathbf{C} \ltimes \mathbf{R}$. Hierbij staat het extra streepje aan de linkerkant om aan te geven dat $\mathbf{C}$ dienst doet in het product op de ondergroep $(0, 0, \mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}$. De groep H_3 heeft de volgende representatie $g = (t, \omega, p) \mapsto U_g$ gegeven door

$$(U_{(t, \omega, p)} \psi)(\xi) = e^{i(\xi\omega + \frac{p}{4} - \frac{1}{2}t\omega)} \psi(\xi - t), \quad (2)$$

met $\psi \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}), t, \omega \in \mathbf{R}$. De partituur (1) kan nu worden geschreven als

$$(W_\psi f)(g) = (U_g \psi, f)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}, \quad g = (t, \omega, p),$$

waarbij $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}$ het standaard inproduct op $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ is gegeven door $(f, g)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} \overline{f(t)} g(t) dt$. We zien dus dat een muziekpartituur neerkomt op een functie op de Heisenberggroep, gemaakt middels een unitaire, irreducibele representatie U van de Heisenberggroep. Men kan nagaan dat W_ψ de ruimte van signalen $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ normbehoudend afbeeldt in de ruimte van Gaborgetransformeerden, hetgeen een gesloten (reproducerende kern-) deelruimte van $\mathbf{L}_2(H_3/P)$ is, waarbij de Heisenberg groep H_3 uitgedeeld is naar zijn fase-subgroep $P = \{(0, 0, p) \mid p \in \mathbf{R}\}$ en waarbij we op het quotiënt H_3/P de invariante maat $d\omega dt$ hanteren. De praktisch relevante consequentie van dit resultaat is dat een kleine verstoring van het signaal f correspondeert met een kleine verstoring in de partituur $W_\psi f$, zodat het signaal

op stabiele wijze worden gereconstrueerd uit de partituur middels $f \equiv W_\psi^*(W_\psi f)$, waarbij W_ψ^* de geadjungeerde van W_ψ is. In meer expliciete vorm ziet de reconstructie van het signaal f uit de partituur $W_\psi f$ er uit als:

$$f = \frac{1}{C_\psi} W_\psi^* W_\psi f = \frac{1}{C_\psi} \int_{H_3/P} W_\psi[f](g) U_g \psi d\mu_{H_3/P}(g).$$

Dit is

$$f(\xi) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(t, \omega, p) \exp(i[\xi\omega + (p/4) - (1/2)t\omega]) \psi(\xi - t) dt d\omega, \quad (3)$$

met constante

$$C_\psi = (2\pi) \|\psi\|_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}^4 = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |(U_{(t, \omega, p)} \psi, \psi)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}|^2 dt d\omega < \infty.$$

Merk hierbij op dat zowel C_ψ als de reconstructie niet afhangen van de fase p .

De eerder genoemde onzekerheid tussen tijd en frequentie volgt uit de volgende afchatting

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) \text{Var}(-i\partial_x) &:= \int_{\mathbf{R}} t^2 |\psi(t)|^2 dt \int_{\mathbf{R}} \omega^2 |F\psi(\omega)|^2 d\omega \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbf{R}} |\psi(t)|^2 dt \right)^2 =: \left(\frac{1}{2i} E([x, -i\partial_x]) \right)^2 \end{aligned}$$

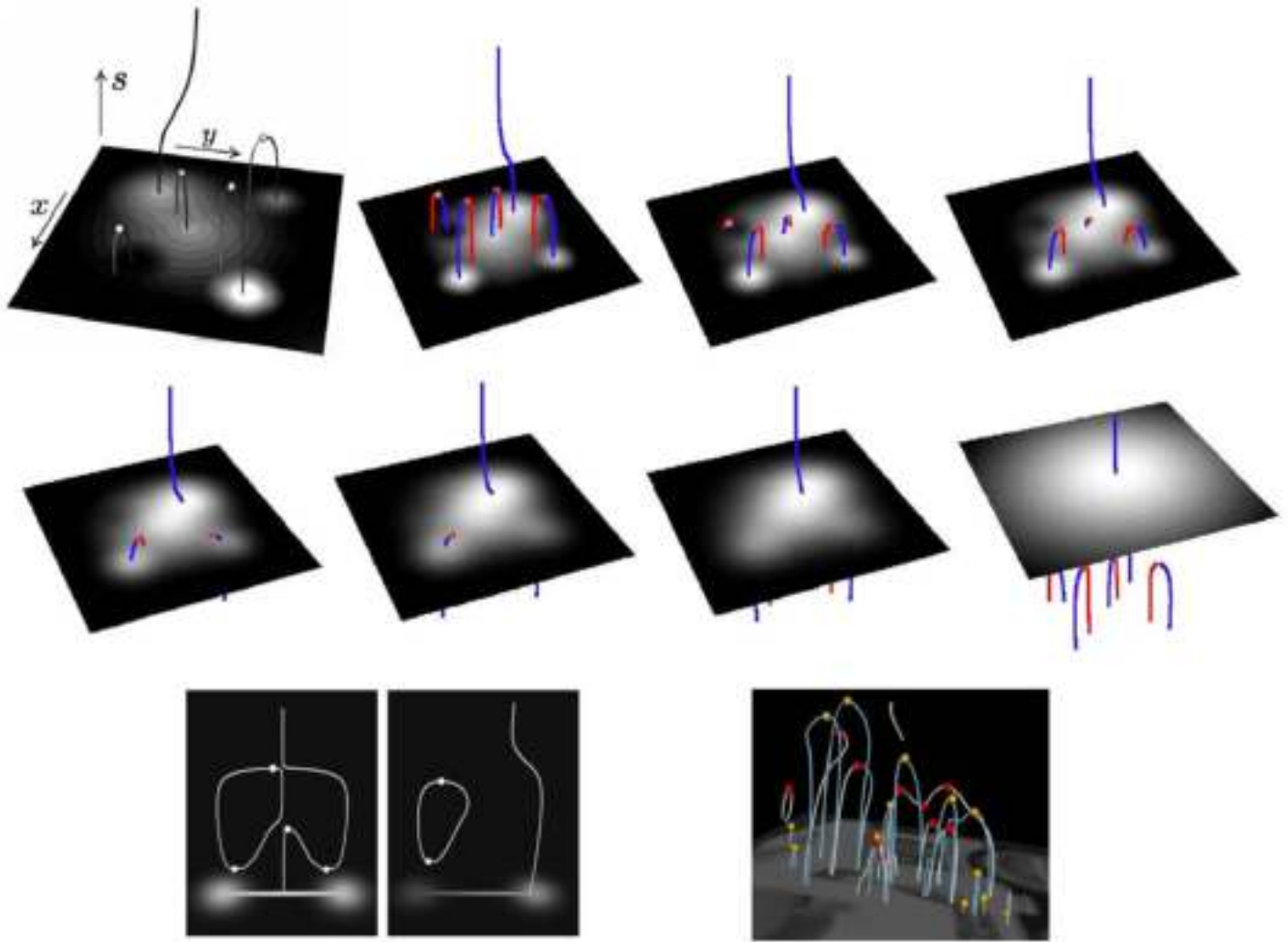
waarin $F\psi$ de Fouriergetransformeerde van ψ voorstelt gegeven door

$$F\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \psi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Merk hierbij op dat de commutator van de translatie- en modulatiegenerator

$$[x, -i\partial_x] = x \circ (-i\partial_x) - (-i\partial_x) \circ x$$

gelijk is aan i , zodat we zien dat de onzekerheid tussen tijd en



Figuur 3 Bovenste twee rijen: illustratie van kritieke-padenannihilatie in een Gaussische schaalpartituur van een eenvoudig plaatje bestaande uit enkele extrema. Telkens wordt een laag $u_f(\cdot, s)$ afgebeeld voor toenemende $s = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$, waarin de op dat moment aanwezige extrema en zadels te zien zijn. Extremumpaden zijn in blauw afgebeeld, zadelpaden in rood en toppunten- en annihilatiepunten in oranje. Onderste rij links: Twee voorbeelden van annihilaties. Hierbij is het originele plaatje f (waarin een halter staat afgebeeld) wederom in perspectief afgebeeld. Rechts-onder: de kritieke paden van een Gaussische schaalpartituur (in grijs met rode toppunten) van een foto van een auto in één figuur afgebeeld met de kritieke paden in een Poissonschaalpartituur (in blauw met gele toppunten). Hierbij zijn de schalen fysisch correct vergeleken, dat wil zeggen σ in een Gaussische schaalpartituur correspondeert met s in een Poissonschaalpartituur. De figuur rechtsonder laat zien dat de kritieke paden in een Poissonschaalpartituur $\alpha = \frac{1}{2}$ soms ernstig kunnen verschillen van de kritieke paden in een Gaussische schaalpartituur $\alpha = 1$.

frequentie een direct gevolg is van het niet-commutatieve gedrag van de groep H_3 .

Nu keren we weer terug naar de beeldanalyse. Hierbij is een grijswaardebeeld $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven. Hiervan kan ook een frequentiepartituur worden bepaald middels

$$(W_\psi f)(\mathbf{x}, \omega, p) = \exp\left(-i\left(\frac{p}{4} - \frac{(\mathbf{x}, \omega)}{2}\right)\right) \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\xi - \mathbf{x})} f(\xi) \exp(-i(\xi, \omega)) d\xi,$$

waarbij $\mathbf{x}, \omega \in \mathbf{R}^2, p \in \mathbf{R}$. Zulke partituren zijn handig voor textuuranalyse in een plaatje. Wij zullen ons hier echter richten op twee andere essentiële groepen; hier zullen we de groep van translaties en schalingen $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathbf{R}^+$ beschouwen en in deel II behandelen we de groep van translaties en rotaties $SE(2) = \mathbf{R}^2 \rtimes SO(2)$. Hierbij gebruiken we wederom transformaties van het type

$$((x, y) \mapsto f(x, y)) \mapsto (g \mapsto (U_g \psi, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)}), \quad (4)$$

waarbij we de Heisenberggroeprepresentatie (2) vervangen door de volgende representaties van respectievelijk $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathbf{R}^+$ en $SE(2)$:

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{x}, a} \psi(\mathbf{y}) &= \frac{1}{a} \psi\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{a}\right), \\ U_{\mathbf{x}, e^{i\theta}} \psi(\mathbf{y}) &= \psi(R_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (5)$$

waarbij

$$\begin{aligned} a &> 0, \theta \in [0, 2\pi], \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2), \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

hetgeen leidt tot respectievelijk schaal- en oriëntatiepartituren. Het eerste probleem dat hier opduikt is het reconstructieprobleem: hoe reconstrueren we f op stabiele wijze uit $W_\psi f$, analoog aan (3). Dit probleem komt voort uit het feit dat de represen-

taties (5) reducibel zijn (dat wil zeggen ze laten gesloten strikte deelruimten van $L_2(\mathbf{R})$ invariant. Bijvoorbeeld de representatie $(\mathbf{x}, e^{i\theta}) \mapsto U_{\mathbf{x}, e^{i\theta}}$ in (5) van de groep van translaties en rotaties is reducibel omdat de deelruimte, bestaande uit alle L_2 -elementen wiens Fouriertransformatie compact gedragen is op een bal met vaste straal, in zichzelf wordt afgebeeld. Zodat Mackey's theorie [11] van stal gehaald moet worden om ψ zodanig te kiezen om unitaire transformaties W_ψ te verkrijgen. Daarmee zijn de algemene waveletreconstructie-stellingen die stabiele reconstructies van het type $f = W_\psi^* W_\psi f$, zoals (3) garanderen niet van kracht. Dit is belangrijk voor het uiteindelijke doel operaties van een beeld f via operaties op de bijbehorende partituur $W_\psi f$, waar de informatie een stuk handzamer geordend is, uit te voeren, [4]. Operatoren op partituren kunnen alleen op stabiele wijze 1-op-1 gerelateerd worden aan operatoren op beelden als er een stabiele inverteerbare transformatie tussen beeld en partituur bestaat.

Schaalpartituren

A priori is het niet bekend op welke schaal je naar het beeld moet kijken en juist daarom is het nuttig om een plaatje simultaan op alle schalen te bekijken middels een schaalpartituur $u_f : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$. In het geval van lineaire schaalpartituren, die volgen uit de schaal-ruimteaxioma's [5], wordt u_f verkregen uit f middels

$$\begin{cases} \partial_s u_f = -(-\Delta)^\alpha u_f, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \lim_{s \downarrow 0} u_f(\cdot, s) = f(\cdot), \end{cases} \quad (6)$$

waar $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ de Laplaciaan op $\mathbf{R}^d$ voorstelt. De oplossingen van (6) zijn

$$u_f^\alpha(\mathbf{x}, s) = (K_s^\alpha * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} K_s^\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (7)$$

waarbij $s > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, met convolutiekern

$$K_s^\alpha = F^{-1}[\omega \mapsto e^{-s\|\omega\|^{2\alpha}}].$$

De belangrijkste gevallen in deze door $\alpha \in (0, 1]$ geparameteriseerde familie van schaalpartituren, zijn de gevallen $\alpha = 1$ en $\alpha = \frac{1}{2}$ respectievelijk resulterend in een diffusiesysteem en potentiaalprobleem op de halfruimte $s > 0$. In deze gevallen is de convolutiekern de Gaussische kern respectievelijk de Cauchy kern:

$$\begin{aligned} K_s^1(\mathbf{x}) &= G_s(\mathbf{x}) := \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{d/2}}, \\ K_s^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{\sigma_{d+1}} \frac{s}{(s^2 + \|\mathbf{x}\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ correspondeert met harmonische voortzetting van f naar de halfruimte $s > 0$. Ondanks dat het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ dankzij de mooie eigenschappen van harmonische functies (en harmonische vectorpotentialen) vele voordelen heeft ten opzichte van het geval $\alpha = 1$, zullen we hier ons voor het gemak beperken tot het conceptueel eenvoudigere geval $\alpha = 1$, waarin het systeem (6) een eenvoudig diffusie probleem is :

$$\begin{cases} \partial_s u_f = \Delta u_f, \\ \lim_{s \downarrow 0} u_f(\cdot, s) = f(\cdot). \end{cases} \quad (9)$$

Als we de oplossing van dit probleem u_f , die wordt gegeven door convolutie van origineel beeld f met een Gaussische verdeling, beperken tot vaste schaal, verkrijgen we een beeld $u_f(\cdot, s) = G_s * f$ dat moet worden opgevat als het beeld geobserveerd op schaal $s = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$, zie figuur 2.

Ten gevolge van de diffusie (stelling van Gauss), zal er een grijswaardestroming op gang komen die lokale maxima en minima zal doen verdwijnen, totdat er uiteindelijk één extremum overblijft in het zwaarte punt van het plaatje. Zie figuur 3 en figuur 2.

Generieke topologische transitie in een schaalpartituur

Aan de hand van Morsetheorie kunnen alle generieke topologische veranderingen gekarakteriseerd worden met behulp van lokale oplossingen (germs) die voldoen aan de evolutievergelijkingen (zie figuur 3 voor illustraties van topologische transitie in schaalpartituren). De meest relevante topologische veranderingen zijn de eenzijdig stabiele gevallen (zie [3] wpp. 81–83, [2] voor wiskundige details.

Deze gevallen volgen uit de zogenoemde cuspcatastrofe

$$C_1(\mathbf{x}) = x_1^3 + \sum_{i=2}^d a_i x_i^2, a_i \neq 0, \quad (10)$$

met deformatie $x_1^3 + s x_1 + \sum_{i=2}^d a_i x_i^2$. Het is eenvoudig na te gaan dat er voor $s > 0$ geen kritieke punten zijn, terwijl voor $s < 0$ een zadel en extremum ontstaan. Gebruiken we C_1 als begin conditie voor een diffusieprobleem dan krijgen we

$$u(\mathbf{x}, s) = (G_s * C_1)(\mathbf{x}) = x_1^3 + 6s x_1 - 2\left(\sum_{k=2}^d a_k\right)s + \sum_{k=2}^d a_k x_k^2.$$

Dit zijn de germs die een annihilatie van een extremum en een zadel representeren in een Gaussische schaalpartituur (zie figuur 3).

Een generiek annihilatiepunt $(\mathbf{x}^*, s^*) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ wordt bepaald door de volgende vergelijkingen

$$\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*) = \mathbf{0} \text{ en } \det(H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*)) = 0, \quad (11)$$

waar $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_f \right) (\mathbf{x}^*, s^*) \right]$ de ruimtelijke Hessiaan voorstelt. Dit is eenvoudig meetkundig in te zien: langs een zadelpad $s \mapsto (\mathbf{x}(s), s)$ in schaal-ruimte geldt $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s) = \mathbf{0}$ en zullen de eigenwaarden van de Hessiaan $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s)$ van teken verschillen. Langs een extremumpad $s \mapsto (\mathbf{x}(s), s)$ in schaal-ruimte geldt $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s) = \mathbf{0}$ en zullen de eigenwaarden van de Hessiaan $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s)$ hetzelfde teken hebben. Zodoende moet in zo'n punt $(\mathbf{x}^*, s^*) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ waar zadelpad en extremumpad annihilieren de gradiënt en tenminste een van de eigenwaarden van de Hessiaan nul moet zijn.

Nu we de generieke topologische transitie hebben besproken, kunnen we ons afvragen wat deze topologische transitie vertellen over het originele beeld f . Het is duidelijk dat ze het originele beeld niet uniek vastleggen, maar de onvermijdelijke vraag is: 'kunnen we uit de locaties van de annihilatiepunten (ook wel top-

punten genoemd) en de tot en met tweede orde differentiaalstructuur ter plaatse een goede benadering van het originele beeld verkrijgen?

Toppuntreconstructie

Gegeven is de verzameling toppunten $\{(x_i, s_i)\}_{i=1}^N \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ in het schaal-ruimtedomein van een Gaussische schaalpartituur $u_f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ van een plaatje $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Er bestaan diverse methoden om deze punten te verkrijgen, die we hier niet verder zullen toelichten.

Toppunten zijn spatiële kritieke punten en dus geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} u_f(x_i, s_i) &= \frac{\partial}{\partial x^j} (G_{s_i} * f)(x_i) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j} G_{s_i} * f \right)(x_i) = (\psi_{i,e_j}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} = 0, \end{aligned}$$

waarbij $\psi_{i,e_j}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} G_{s_i} \right)(x - x)$, $j = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Verder hebben we in de vorige paragraaf beargumenteed dat bovendien $H_x u_f(x_i, s_i) = 0$ moet gelden in een toppunt.

We zijn op zoek naar een approximatieve reconstructie $\tilde{f} \in L_2(\mathbf{R}^2)$ van het originele plaatje zodanig dat de bijbehorende schaalpartituur $u_{\tilde{f}}$ in ieder geval weer toppunten heeft ter plaatse $\{(x_i, s_i)\}_{i=1}^N$. Dit doen we door af te dwingen dat

$$D^{(n_1, n_2)} u_f(x_i, s_i) = D^{(n_1, n_2)} u_{\tilde{f}}(x_i, s_i) \quad (12)$$

geldt voor alle $0 \leq n_1 + n_2 \leq 2$, $i = 1, \dots, N$, waar we de korte notatie $D^{(n_1, n_2)} u_f(x_i, s_i) := \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial x_2^{n_2}} u_f(x_i, s_i)$ gebruiken. Het is eenvoudig na te gaan dat deze eis kan worden herschreven als

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \forall \mathbf{n}, 0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2 : (\psi_{i,\mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} = (\psi_{i,\mathbf{n}}, \tilde{f})_{L_2(\mathbf{R}^2)}, \quad (13)$$

waarbij $\psi_{i,\mathbf{n}}(x) = (D^{(n_1, n_2)} G_{s_i})(x - x)$ en de multi-index $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ met $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$.

De verzameling getallen

$$\{(\psi_{i,\mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} \mid i = 1, \dots, N, \mathbf{n} = (n_1, n_2), |\mathbf{n}| \leq 2\}$$

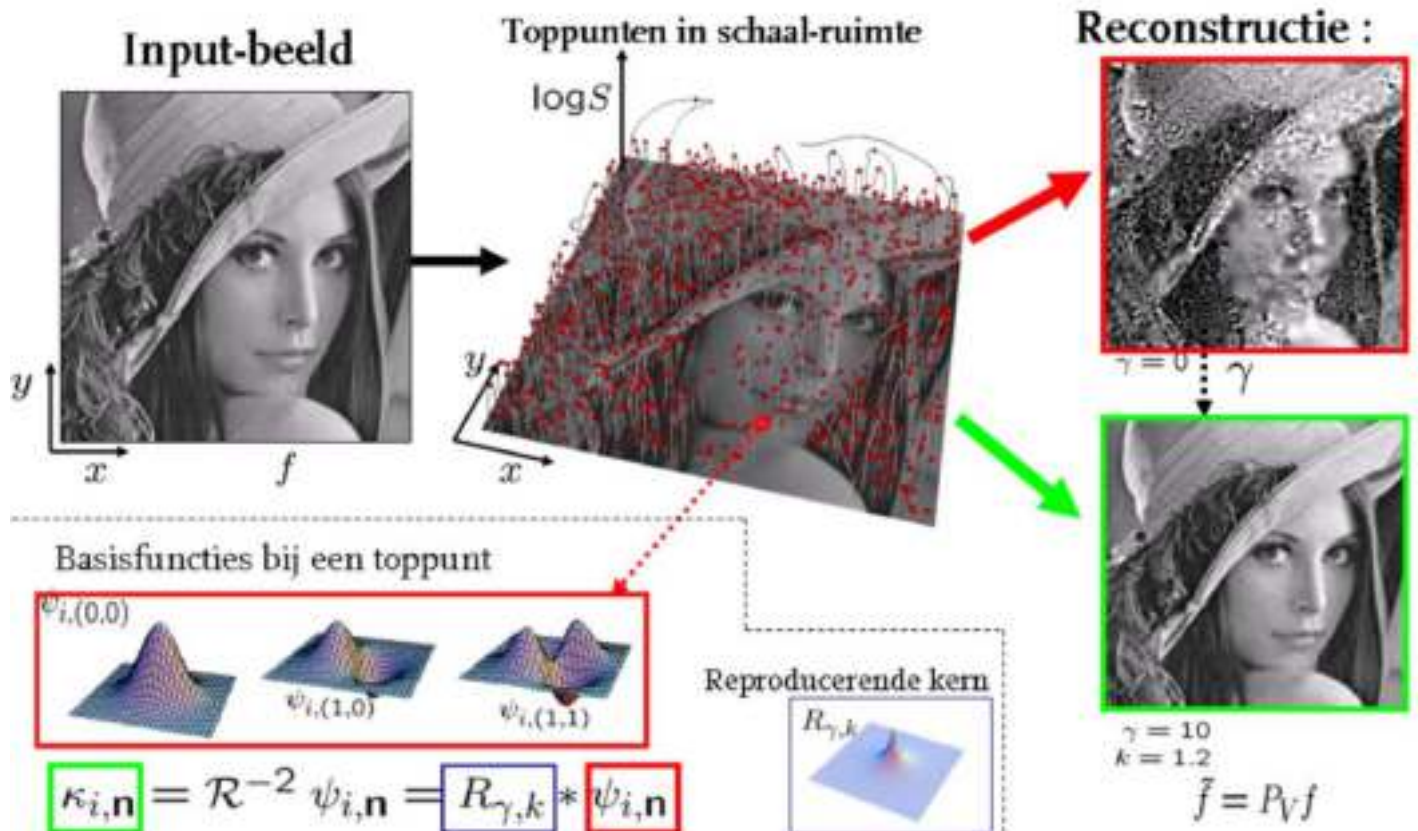
in (13), vormen als het ware een vingerafdruk van het plaatje f . De getallen worden ook wel de ‘features’ van f genoemd. We zullen ze voortaan noteren met

$$\{C_{f,i,\mathbf{n}}\} := \{(\psi_{i,\mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)}\}_{i=1, \dots, N, |\mathbf{n}| \leq 2} \quad (14)$$

Dan merken we op dat (12) een equivalentierelatie definieert op $L_2(\mathbf{R}^2)$ en dat de equivalentieklasse van plaatjes met dezelfde features als f wordt weergegeven door

$$\{g \in L_2(\mathbf{R}^2) \mid g \sim f\} = f + V^\perp \quad (15)$$

waar $V^\perp$ het orthogonaal complement is van de lineaire ruimte V



Figuur 4 Gegeven het origineel beeld bepalen we de singulariteiten en toppunten in de bijbehorende schaalpartituur aangegeven met rode bolletjes. De tot en met tweede orde differentiaalstructuur in ieder toppunt geeft ons de verzameling basisfuncties $\{\psi_{i,\mathbf{n}}\}_{|\mathbf{n}| \leq 2}$, waarvan we de grafiek van enkele gevallen in het rode kader hebben weergegeven. Deze basisfuncties zijn goed zichtbaar in het reconstructiebeeld rechts bovenaan, omdat hier $\gamma = 0$, dat wil zeggen binnen onze equivalentie klasse van beelden, (15), beschouwen we degene met minimale L_2 -norm. Echter bij vast gekozen $k > 1$ (in dit geval $k = 1.2$), kunnen we de gladheid van ons het gereconstrueerde beeld (16), opgebouwd uit basisfuncties $\kappa_{i,\mathbf{n}}$, reguleren met de parameter $\gamma > 0$ die de norm en reproducerende kern $R_{\gamma,k}$ in de bijbehorende Sobolevruimte vastlegt. Merk op dat het reconstructiebeeld het origineel op accepteerbare wijze benadert, hetgeen beeldmanipulatie en -herkenning aan de hand van toppunten in de bijbehorende schaalpartituur mogelijk maakt.

lineair opgespannen door de vectoren

$$V = \text{span} \{ \psi_{i,\mathbf{n}} \mid i = 1, \dots, N, 0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2 \} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2).$$

Binnen deze equivalentieklasse zoeken we naar het element $\tilde{f}$ met minimale Sobolevnorm gegeven door

$$\tilde{f} = \arg \min_{g \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2), g \sim f} \|g\|_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)}^2 := \arg \min_{g \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2), g \sim f} (g, g)_{(\mathbf{L}_2, \mathbf{R}^2)} + (g, \gamma^{2k} |\Delta|^k g)_{(\mathbf{L}_2, \mathbf{R}^2)},$$

voor vast gekozen $\gamma > 0$ en $k > 1$. (We merken op dat $\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)$ een reproducerende kernen ruimte als $k > 1$ is. In dit geval volgt κ_k uit ψ_k door convolutie met de reproducerende kern $R_{\gamma,k}$, i.e. $\kappa_{i,\mathbf{n}} = R_{\gamma,k} * \psi_{i,\mathbf{n}}$.) Dit element wordt verkregen door middel van orthogonale projectie van de Sobolevruimte

$$\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2) = \{ f \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2) \mid Rf := \sqrt{I + \gamma^{2k} |\Delta|^k} f \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2) \}$$

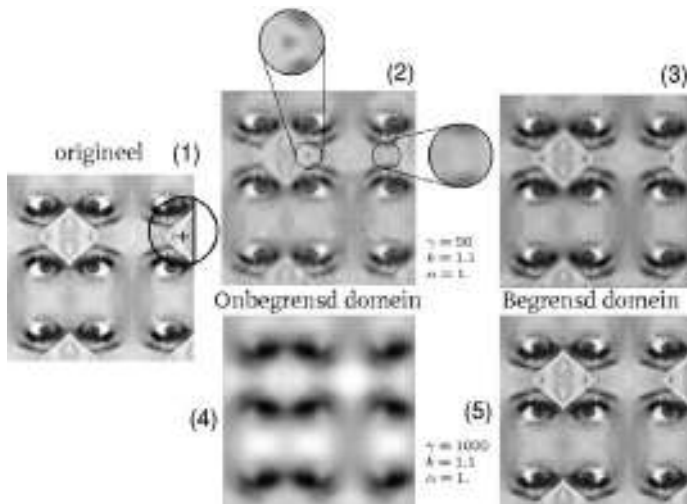
op V . Om technische details te vermijden, nemen we hier voor het gemak even aan $f \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)$. In dat geval wordt de reconstructie gegeven door

$$\tilde{f} = P_V f = \sum_{0 \leq n_1 + n_2 \leq 2} \sum_{i=1}^N C_f^{i,\mathbf{n}} \kappa_{i,\mathbf{n}}, \quad (16)$$

waarbij de basis-functies zijn gegeven door

$$\kappa_{i,\mathbf{n}} = (I + \gamma^{2k} |\Delta|)^{-1} \psi_{i,\mathbf{n}}$$

met bijbehorende reciproke basis $\kappa^{i,\mathbf{n}}$, i.e.



Figuur 5 Probleem van de rand: als de singulariteiten te dicht bij de rand komen te liggen zullen de bijbehorende basisfuncties $\kappa_{i,\mathbf{n}}$ teveel bestraft worden omdat ze, in tegenstelling tot het originele plaatje f , over de rand lopen. Van links naar rechts en van boven naar beneden: (1) origineel plaatje f ; (2) onbegrensd domein toppunt reconstructie (16), $\gamma = 50$, $\alpha = 1$, $k = 1.1$; (3) begrensd domein reconstructie (17) met zelfde parameters; (4) onbegrensd-domeinreconstructie $\gamma = 1000$, $\alpha = 1$, $k = 1.1$, vanuit singuliere punten posities in de schaalpartituur van Δf ; (5) zelfde settings voor begrensd-domeinreconstructie (17). Het is duidelijk te zien dat het probleem aan de randen is opgelost in het begrensde-domeingeval.

$$(\kappa^{i,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{m}})_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)} = \delta_j^i \delta_{m_1}^{n_1} \delta_{m_2}^{n_2}$$

en waarbij we de getallen $\{C_f^{i,\mathbf{n}} := (\kappa^{i,\mathbf{n}}, f)_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)}\}$ berekenen uit de features (14) middels de inverse Grammatrix. Voor het berekenen van de inverse Grammatrix gebruiken we een standaard singuliere-waardendecompositie, met drempel op de singuliere waarden, om de goedgesteldheid van de inverse te bewaken.

De parameter $\gamma > 0$ regelt de gladheid van de reconstructie [3, 6, 9] (zie figuur 4). Het is duidelijk te zien dat de basisfuncties $\kappa^{i,\mathbf{n}}$ extra glad zijn en vanwege de Sobolevnormminimalisatie veel beter in elkaar overlopen in het reconstructie beeld naarmate $\gamma > 0$ groter wordt. Op die manier kunnen we 'de gereconstrueerde Lena ontdoen van haar $\mathbf{L}_2$ -puistjes', zoals de rechter kolom van figuur 4 duidelijk laat zien.

Een nadeel bij de hierboven besproken aanpak is dat $\gamma > 0$ niet te groot gekozen mag worden. De reden hiervoor is dat naarmate $\gamma > 0$ groter wordt de basis vectoren κ_i meer en meer buiten de rand van het compact gedragen originele plaatje vallen en dus onnodig bestraft worden. Dit heeft tot gevolg dat het gereconstrueerd beeld vanuit de rand structuren gaat missen. De oplossing voor dit probleem is zowel de schaalpartituur en de Sobolevnormen op een eindig gebied met Dirichletrandvoorwaarden te beschouwen. Het originele plaatje f compact gedragen op $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ voldoet echter niet aan zo'n randvoorwaarde. Daarom zetten we de rand middels een snel efficient algoritme naar binnen harmonisch voort $(f|_{\partial\Omega})_H$, i.e. $\Delta((f|_{\partial\Omega})_H) = 0$ en $(f|_{\partial\Omega})_H|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. We schrijven

$$f = f - (f|_{\partial\Omega})_H + (f|_{\partial\Omega})_H$$

We slaan nu $f|_{\partial\Omega}$ apart op en berekenen de Gaussische schaalpartituur van $F := f - (f|_{\partial\Omega})_H$ op het eindige domein Ω , wederom via een diffusievergelijking (9) en met Dirichletrandvoorwaarde $u_F(\mathbf{x}, s) = 0$ voor alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega, s > 0$. De oplossing wordt nu gegeven door

$$u_F(\mathbf{x}, s) = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} e^{-(\lambda_{pq})s} (f_{pq}, F)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} f_{pq}(\mathbf{x}),$$

waar de eigenwaarden en eigenfuncties zijn gegeven door

$$\lambda_{pq} = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2$$

en

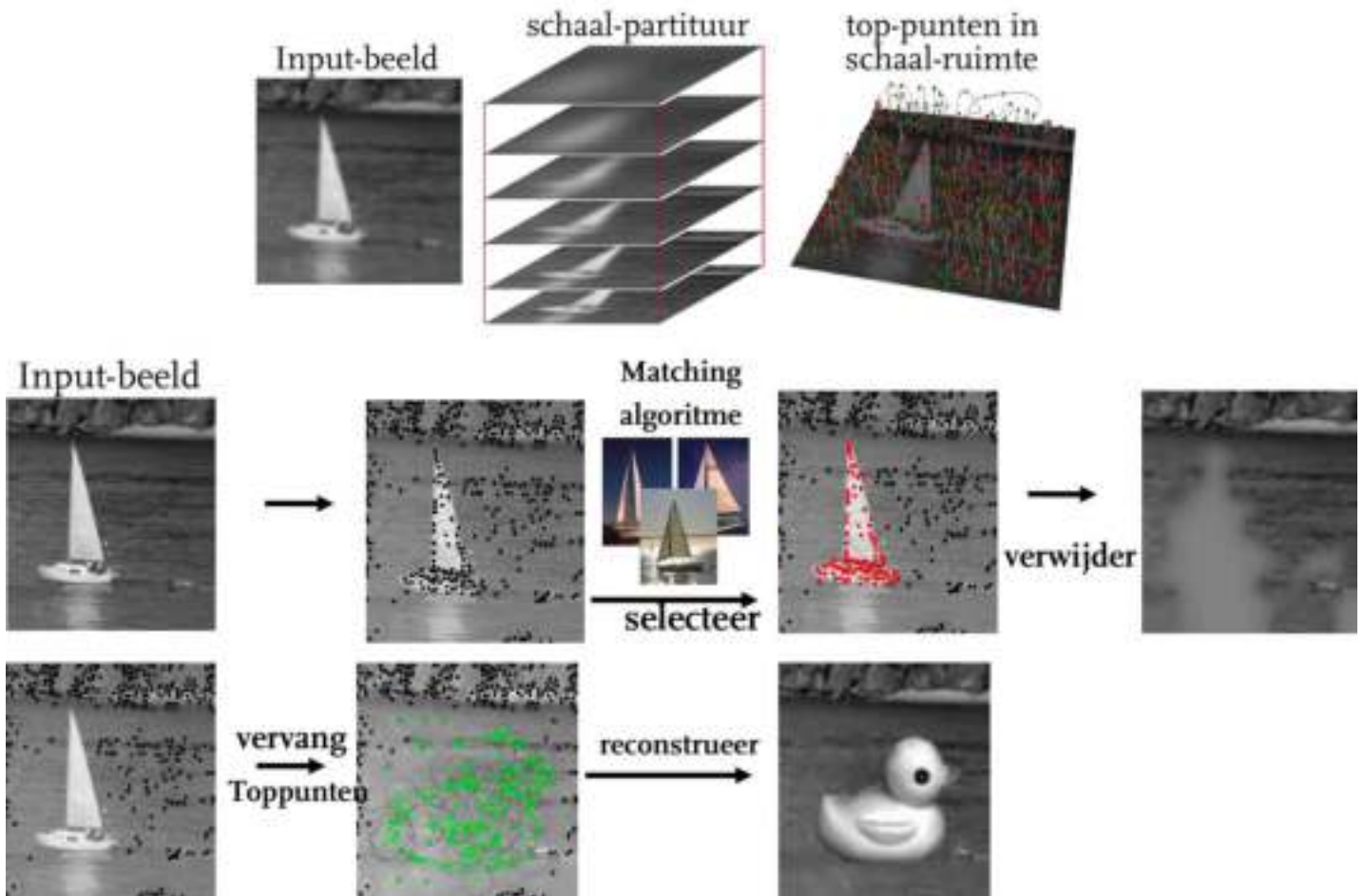
$$f_{pq}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right).$$

De optimale reconstructie wordt nu gegeven door

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = (f|_{\partial\Omega})_H(\mathbf{x}) + \sum_{0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2} \sum_{0 \leq |\mathbf{m}| \leq 2} \sum_{i,j=1}^N G^{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}}(\psi_{i,\mathbf{n}}, F)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \kappa_{j,\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

waar de multi-indices $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, met $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$ en waar $G^{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}}$ de inverse matrix is van de Grammatrix

$$G_{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}} = (\kappa_{i,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{m}})_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)} = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} \frac{e^{-(\lambda_{pq})(s_j + s_i)}}{1 + \gamma^{2k} (\lambda_{pq})^k} (D^{(\mathbf{m})} f_{pq})(\mathbf{x}_j) (D^{(\mathbf{n})} f_{pq})(\mathbf{x}_i).$$



Figuur 6 Bovenste rij, van links naar rechts: origineel beeld, bijbehorende schaalpartituur, toppunten in schaalpartituur. Onderste twee rijen: objectgeoriënteerde beeldmanipulatie aan de hand van toppunten

In onze algoritmen gebruiken we *discrete* sinustransformaties in plaats van sinusreeksen, om exact te blijven op het grid. Voor details met betrekking tot deze laatste stap, zie [7]. Tot slot merken we op dat het qua reconstructie vaak beter is om de locaties van toppunten in de schaalpartituur $u_{\Delta f}$ van de Lapliciaan van f , Δf (merk op $u_{\Delta f} = \Delta u_f = \partial_s u_f$) te beschouwen omdat deze toppunten, in tegenstelling tot de toppunten in de schaalpartituur u_f van f , meer boven de randen van structuren in een plaatje liggen (zie figuur 5).

Het grote voordeel van deze eindig-domeinreconstructies (die eenvoudig te generaliseren zijn naar α -schaal partituren door overal λ_{pq} te vervangen door λ_{pq}^α) is dat $\gamma > 0$ groot gekozen kan worden. In het oneindige domein was dit niet mogelijk.

Toepassingen

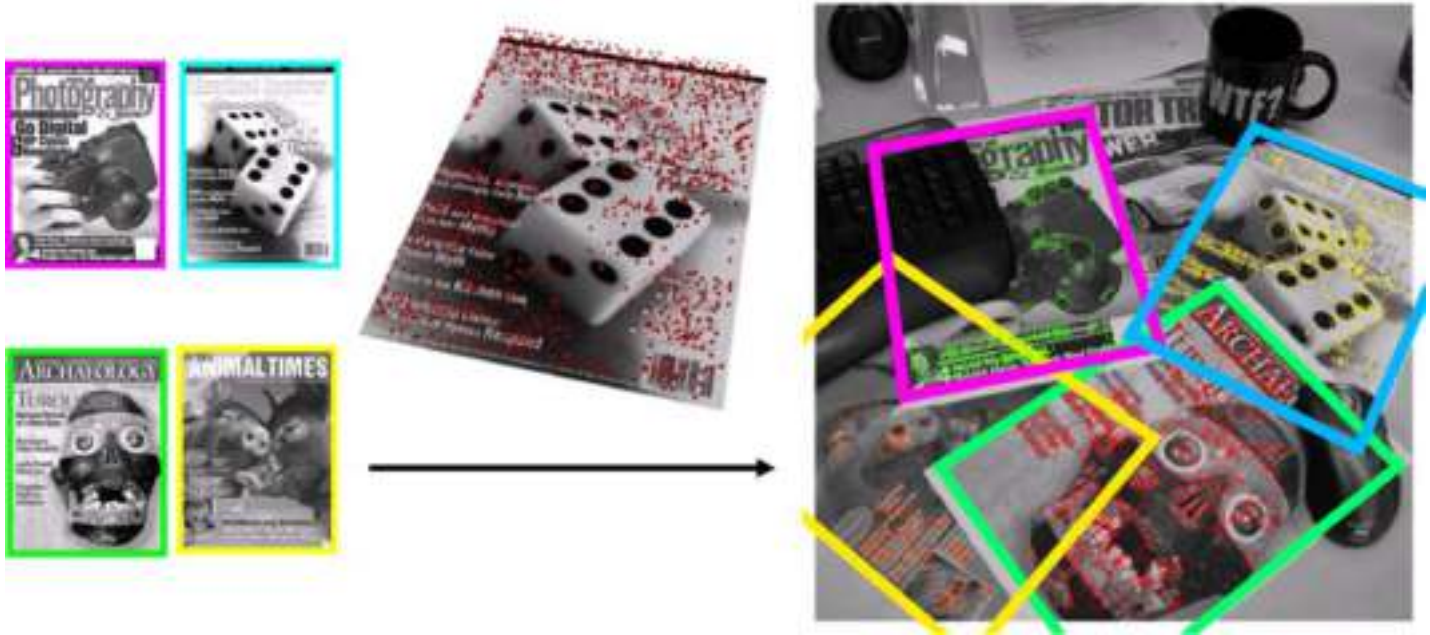
Nu we hebben aangetoond dat we uit de toppunten in een schaalpartituur het beeld kunnen reconstrueren, kunnen we eens kijken wat we hier mee kunnen.

Allereerst merken we op dat bij ieder toppunt een aantal basisfuncties horen. Het reconstructiebeeld is dus uitgedrukt in een set basisfuncties die zuiver en alleen door de topologie van het beeld (en bijbehorende schaalpartituur) zijn bepaald. Dit heeft als voordeel dat als er zich lokaal weinig structuur in het plaatje bevindt (en er dus lokaal weinig toppunten aanwezig zijn), er ook weinig basisfuncties worden gebruikt. We hebben dus een topologisch correcte ma-

nier gevonden om een beeld in beeld-afhankelijke basisfuncties te beschrijven. Hierbij dient echter wel te worden opgemerkt dat standaardontwikkelingen van een plaatje, zoals bijvoorbeeld de welbekende jpeg-compressie, veel sneller zijn omdat ze op regelmatige vaste roosters zijn geordend en geen initiële berekening van toppunten behoeven.

Uit het voorafgaande is gebleken dat de tot en met tweede orde differentiaalstructuur in de toppunten van schaalpartituur van een beeld f (met eventueel daar aan toegevoegd de tweede orde differentiaalstructuur in de toppunten van Δf) goede benaderingen opleveren voor het originele beeld. Dit is belangrijk voor objectherkenning van beelden met als input de features ten gevolge van de differentiaalstructuur in toppunten [1]. Hierbij worden de toppuntfeatures (14) van het te herkennen object vergeleken met de toppuntfeatures in het gegeven beeld (zie figuur 7).

Verder kan een beeld nu worden gemanipuleerd via zijn toppunten. Gegeven is een input-beeld met daarin een bepaald object, bijvoorbeeld een boot zoals in figuur 6. We kunnen dan het object herkenning algoritme gebruiken om in de verzameling toppunten die verzameling toppunten te markeren die het beste lijkt (aan de hand van de ligging en vooral ook aan de hand van bijbehorende features) op toppunt verzamelingen van diverse beelden van soortgelijke objecten. Deze toppunten kunnen we vervolgens verwijderen, zodat het reconstructie algoritme een beeld levert zonder het object. Voorts kunnen we op soortgelijke wijze objecten ook toevoegen, bijvoor-



Figuur 7 Objectherkenning gebruikmakend van tot en met derde orde differentiaalstructuur in toppunten. Links: objecten zijn voorpagina's van diverse tijdschriften; midden: toppunten in schaalpartituur van één object; rechts: plaatje waar de objecten in moeten worden gevonden, door middel van een matching algoritme dat clusters van toppunten (met bijbehorende features) in de schaalpartituur van rechterbeeld vergelijkt met toppunten (met bijbehorende features) in de schaalpartituur van objectafbeeldingen. Ter illustratie hebben we de toppunten (in schaalruimte) geprojecteerd op het beeldvlak.

beeld het rubberen badeendje in figuur 6. Voor een eerste praktische studie over deze manier van beeldmanipulatie, zie [10]. Het hoofdprobleem bij deze aanpak is het feit dat bij verwijdering van één toppunt ook de interactie (grijswaardenstroming) tussen extreme paden behorend bij een toppunt wordt weggehaald. Hiervoor zullen flux-features [6] moeten worden voorgeschreven en iteratieve (van grof naar fijn, i.e. van grote schaal naar kleine schaal, equidistant in $\log s$) eindig-domeinreconstructies met Neumannrandvoorwaarden (op alle iteratieschalen) worden gebruikt.

Tot slot is er de toepassing van toppunt reconstructies in de analyse van 'optic-flow' in videosequenties. Bij deze toepassing is het de bedoeling om objecten te volgen in een videosequentie, i.e. tijdsafhankelijke beelden [8].

Adaptieve schaalpartituren

Tot nog toe hebben ons beperkt tot lineaire transformaties tussen beeld en schaalpartituur. Deze waren gegeven door (6). In het bijzonder hebben we ons beperkt tot $\alpha = 1$, die corresponderen met een diffusieproces op de half-ruimte $s > 0$ en die gegeven waren door convoluties met een Gaussische kern G_s . Deze kern is isotroop, zodat rotatie van het beeld f correspondeert met rotatie van alle lagen $\{u_f(\cdot, s)\}_{s>0}$ in de schaalpartituur u_f . Het is duidelijk dat een convolutie van een grijswaardebeeld met een niet isotrope kern vaak niet wenselijk is, aangezien je dan niet alle richtingen hetzelfde behandelt. Aan de andere kant is het vanuit praktisch oogpunt vaak erg vervelend dat zo'n isotrope convolutie gedeelten in het beeld waar veel structuur zit net zo sterk vervaagt als gedeelten waar weinig structuur zit (zie figuur 2).

Daarom wordt de lineariteit van de afbeelding $f \mapsto u_f$ vaak overboord gegooid en gebruikt men een beeldadaptieve conductieterm tussen de div en de grad van de Laplace operator $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$ in het diffusie proces. Na het artikel van Perona en Malik [12] zijn er talloze artikelen verschenen waarbij men de con-

ductiviteit afhankelijk van de gradiëntnorm koos. Dit levert dan evolutievergelijkingen van het type

$$\begin{cases} \partial_s u_f(\mathbf{x}, s) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (c(\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s)\|) \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s))(\mathbf{x}), \\ u_f(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

waarbij de conductiviteit $(\mathbf{x}, s) \mapsto c(\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)\|)$ meestal als een van de volgende typen

$$\begin{aligned} c(t) &= \exp\left(-\frac{c}{(\lambda/t)^{2p}}\right), \quad c(t) = \frac{1}{(t/\lambda)^{2p} + 1}, \\ c(t) &= \frac{1}{\sqrt{(t/\lambda)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (18)$$

gekozen werd. Bij al deze methoden wordt echter geen gebruik gemaakt van de richting van de gradiënt. Daarom stelde Weickert [13] efficiënte numerieke schema's voor om de niet-lineaire diffusiesystemen die ontstaan door de scalarwaardige conductiviteit te vervangen door een matrixwaardige conductiviteit gebaseerd op de richting van de gradiënt. Deze schema's zijn bekend geworden onder de naam 'coherence enhancing diffusion schemes'. Deze matrixwaardige conductiviteit $(\mathbf{x}, s) \mapsto C(u_f, \mathbf{x}, s)$, is gegeven door

$$\begin{aligned} C(u_f, \mathbf{x}, s) &= \zeta I + (1 - \zeta) \cdot \\ &\exp\left(-\frac{c}{(\lambda_1(S(u_f)(\mathbf{x}, s)) - \lambda_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s)))^2}\right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \end{aligned} \quad (19)$$

waarbij $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s))$ de eigenvector is met kleinste eigenwaarde van

$$S(u_f)(\mathbf{x}, s) = (G_\sigma * (\nabla u_f(\cdot, s))^T \nabla u_f(\cdot, s))(\mathbf{x})$$

met $\zeta \in (0, 1)$, $c > 0$, $\sigma > 0$ en waarin de hulpmatrix $S(u_f)(\mathbf{x}, s)$

met eigenwaarden $\{\lambda_i(S(u_f)(\mathbf{x}, s))\}_{i=1,2}$ zowel dienst doet in een maat voor lokale anisotropie

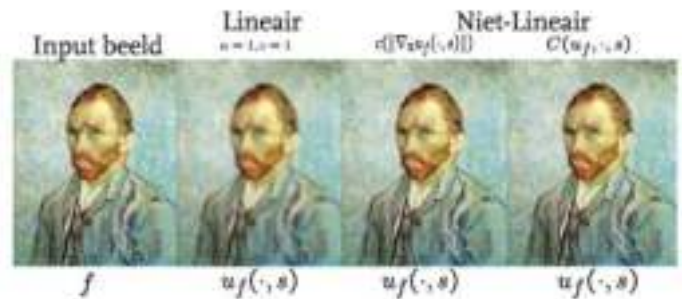
$$\exp\left(-\frac{c}{(\lambda_1(S(u_f)(\mathbf{x}, s)) - \lambda_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s)))^2}\right)$$

en tegelijkertijd dienst doet als hulpmatrix in een oriëntatieschatting via de eigenvector $\mathbf{e}_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s))$ met kleinste eigenwaarde. Om robuuste oriëntatieschattingen te krijgen is er een componentsgewijze gladmakende convolutie (geparameteriseerd door $\sigma > 0$) toegepast op 2×2 matrixveld $\mathbf{x} \mapsto \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)^T \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)$, waar $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s) = (\partial_x u_f(\mathbf{x}, s), \partial_y u_f(\mathbf{x}, s))$.

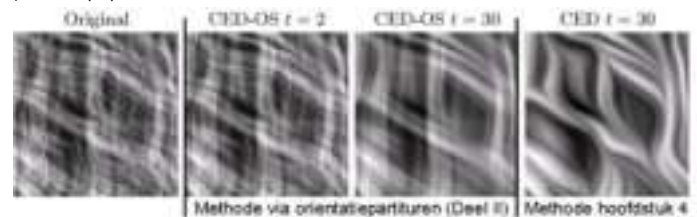
Voor een vergelijking van lineaire diffusie, niet lineaire diffusie afhankelijk van $\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s)\|$ en 'coherence-enhancing' diffusie, zie figuur 8. Hier is opzettelijk een Van Goghschilderij gekozen omdat een van de eigenschappen van coherence enhancing diffusie is dat het van ieder beeld een soort Van Goghschilderij maakt. Dit is overigens zelfs een optie op speciale mobiele telefoons van Nokia, waarbij je met een druk op de knop je foto's direct kan laten 'Van Gogh'en' middels een snel coherence enhancing diffusie schema.

Echter alleen in enkele beeldanalyse-applicaties, zoals het verbeteren van afbeeldingen met vage vingerafdrukken, waarbij er geen (bijna) kruisende structuren zijn is dit artistieke effect onschuldig. Kritisch bekeken is dit artistieke effect een verloederding van het beeld omdat er overal kunstmatige krommingen in het plaatje worden gecreëerd. Het probleem is, dat de richting van de gradiënt bij kruisende hoogtelijnen niet goed gedefinieerd is. Hetzelfde geldt voor soortgelijke methoden gebaseerd op eigen vectoren van de Hessiaan bij kruisende lijnen. Daarom is het noodzaak om gebruik te maken van oriëntatiepartituren (zie figuur 9). In het tweede deel van dat artikel, dat in het septembernummer verschijnt zullen we hier verder op ingaan.

Om alvast een tipje van de sluier op te lichten: dan zullen we eerst beelden op stabiele wijze bijtief relateren aan oriëntatiepartituren (weer door middel van transformaties van het standaard type (4)) om vervolgens adaptieve schaalpartituren



Figuur 8 Van links naar rechts: input beeld f : dit is het bekende zelfportret van Van Gogh; vergelijkbare schaal plakjes $u_f(\cdot, s)$ in een lineaire schaalpartituur; in een Perona en Malik schaalpartituur (linker geval in (18)) en in een 'coherence enhancing' diffusie schaalpartituur (19)



Figuur 9 Resultaat van adaptieve niet-lineaire diffusie op oriëntatiepartituren (CED-OS) stopgezet op $t = 2$ en $t = 30$ en standaard adaptieve niet-lineaire diffusie op 2-photon microscopy beelden van collageenvezels stopgezet op $t = 30$, relevant voor de modellering van hartkleppen in soft-tissue engineering. Het is duidelijk te zien dat standaard coherence enhancing diffusie (19) kunstmatige kromming genereert terwijl methoden via diffusie op inverteerbare oriëntatiepartituren de kruisende lijnen keurig behandelen.

te verkrijgen via (niet-)lineaire linksinvariante diffusievergelijkingen op inverteerbare oriëntatiepartituren, die wel met kruisende structuren overweg kunnen. Hierbij speelt het niet-commutatieve gedrag van $SE(2)$, net zoals het niet commutatieve gedrag van de groep H_3 in het voorbeeld van de muziekpartituren, een cruciale rol.

Dankwoord

Dank aan Bart Janssen, Erik Franken, Frans Kanters, Bram Platel, Evgeniya Balmashnova, Jan de Graaf, Luc Florack, Mark Peletier, en Bart ter Haar Romeny, faculteiten wiskunde & informatica (W&I) en biomedische technologie (BMT) aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) voor hun ondersteuning bij het onderzoek. Dank aan NWO, de Nederlands Stichting voor Wetenschappelijk Onderzoek, voor financiële ondersteuning.

Referenties

- 1 E. Balmachnova, *Scale-Euclidean Invariant Object Retrieval*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2007
- 2 J. Damon, 'Generic Properties of Solutions to Partial Differential Equations', *ARMA*, 353–403, 1997
- 3 R. Duits, *Perceptual Organization in Image Analysis*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2005. A digital version is available on the web URL: www.bmi2.bmt.tue.nl/Image-Analysis/People/RDuits/THESISRDUITS.pdf
- 4 R. Duits and B. Burgeth, 'Scale Spaces on Lie Groups', *Proc. of the first international conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, 300–312, 2007
- 5 R. Duits and L.M.J. Florack and J. de Graaf and B. ter Haar Romeny, 'On the Axioms of Scale Space Theory', *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20, 267–298, 2004
- 6 R. Duits and B. Janssen and F. Kanters and L. M. J. Florack, 'Linear Image Reconstruction From a Sparse Set of Alpha Scale Space Features by Means of Inner Products of Sobolev Type', *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, 3753, 96–111, 2005
- 7 B. J. Janssen and R. Duits, 'Linear Image Reconstruction by Sobolev Norms on the Bounded Domain', *Proc. of the first international conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, Springer, 55–67, 2007
- 8 B. J. Janssen and L.M.J. Florack and R. Duits and B.M. ter Haar Romeny, 'Optic Flow from Multi-scale Dynamic Anchor Point Attributes', *Lecture notes in computer science*, Springer, 4141, 767–779, 2006
- 9 B.J. Janssen and F.M.W. Kanters and R. Duits and L.M.J. Florack and B.M. ter Haar Romeny, 'A Linear Image Reconstruction Framework Based on Sobolev Type Inner Products', *International Journal of Computer Vision*, 70(3), 231–240, 2006
- 10 F.M.W. Kanters, *Towards Object-based Image Editing*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2007
- 11 G.W. Mackey, 'Imprimitivity for representations of locally compact groups', *Proc. N.A.S.*, 35, 537–545, 1949
- 12 P. Perona, and J. Malik, 'Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion', *IEEE-transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7), 629, 1990
- 13 J. A. Weickert, 'Coherence-Enhancing Diffusion Filtering', *International Journal of Computer Vision*, 31(2/3), 111–127, 1999