

Inhoud | Contents

- 2 Colofon
- 3 Van de voorzitter *Henk Broer*
- 4 Agenda
- 6 Nieuws

Oratie | Inaugural lecture

- 12 Waarheid, spel of taal? *Jan de Graaf*
- 41 Geef me de ruimte *Alfred Stein*

Onderzoek | Research

- 31 Schaalpartituren *Remco Duits*
- 50 Het Nederlands elftal als complex netwerk *Rob Kooij, Almerima Jamakovic en anderen*
- 58 Minder verstoringen in MRI-beelden *Bennie Mols*

Samenleving | Society

- 18 A random walk down Wall Street *Janneke van den Boomen, Ruben van den Brink, Dion Coumans, Klaas Landsman, Daan Wanrooy*
- 24 Zestig jaar numerieke wiskunde *Adhemar Butheel, Ronald Cools*

Onderwijs | Education

- 60 Geen catechismus leren, maar nadenken *Willem Uittenbogaard*
- 66 De rol van de instaptoets *Dirk Tempelaar, Wim Caspers*
- 72 Wiskunde in de bètaprofielen *Jeroen Spandaw*
- 76 Rekenen? *Henk Visser*

Boeken | Books

- 80 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 29 De derde wet
- 49 De favoriet van Frans Oort *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
- 56 Wiskundigen in den vreemde: The land of Yoknapathapa *Gerard Buskes*
- 65 België–Nederland: 1–0: Sole meunière *Gunther Cornelissen*
- 86 Problemen

Kenteringen?

In de afgelopen periode zijn er lichte kenteringen ten goede te bespeuren ten aanzien van de instroom van wiskundestudenten en ten aanzien van het voortgezet onderwijs. Minister Plasterk heeft de wijze adviezen van commissie Rinnooy Kan serieus genomen. Dit heeft geresulteerd in een extra miljard voor de leraren en plannen ter bevordering van de vakinhoudelijke positie contra het management. Hopelijk wordt zo het leraarsberoep weer aantrekkelijker en het lerarentekort wat teruggedrongen. Hoe dit allemaal uitbotert moeten we nog zien, maar het staat op de agenda.

Wat betekenen de maatregelen voor de inhoudelijke kwaliteit van leraren? Bijvoorbeeld, hoe kunnen we zorgen dat meer tweedegraadsleraren hun eerstegraadsbevoegdheid gaan verwerven? Dit probleem speelt des te meer wanneer nieuwe eindexamen-normen gaan gelden. Wat wiskunde betreft denk ik hierbij aan vakken als Wiskunde D en het multidisciplinaire NLT.

Er is een lange termijnplan voor na- en bijscholing nodig, waarin beroepsverenigingen als de NVvW en het KWG samen optrekken. Hierbij zouden de universiteiten (waaronder lerarenopleidingen en steunpunten) een rol moeten krijgen, met voldoende aandacht voor inhoudelijkheid. Er gebeurt al veel in deze richting, maar waar behoefte aan lijkt te ontstaan, is een gecoördineerd, landelijk dekkend netwerk van scholingsactiviteiten. Een leraar in Franeker moet hiervoor niet helemaal naar Delft hoeven reizen. Een dergelijk plan en zijn uitvoerbaarheid moeten door de minister wellicht nog meer gefaciliteerd worden dan nu het geval is. Zover mijn informatie strekt, is van enige grondige samenwerking tussen de verschillende vaksecties in het voortgezet onderwijs nauwelijks sprake. Mijn eigen interesse ligt in de samenwerking natuurkunde-wiskunde. De beide vernieuwingscommissies NINA en cTWO hebben zich hierover in hun visiedocumenten zeer positief uitgelaten. Deze voornemens resulteren inmiddels in allerlei vervolgactiviteiten.

Ik hoef u niet te vertellen dat wiskunde zich hand in hand heeft ontwikkeld met natuurkunde, men denke aan Archimedes, Newton, Maxwell, Einstein en aan de modernere ontwikkelingen in de mathematische fysica. Newton is als man van het millennium luidkeels bezongen door Pope ("Nature and Nature's laws lay hid in night, God said let Newton be and all was light"), Voltaire, Landsman (*Requiem voor Newton*), en vele anderen. De conceptuele band tussen wis- en natuurkunde is heel wezenlijk en ook van belang voor mensen die later, bijvoorbeeld, economie gaan studeren. Omdat velen dit niet weten, wil ik het volgende opmerken over de science studenten bij de universiteiten. Tot circa tien jaar geleden waren hiervan de natuurkundestudenten veruit de beste en ze kregen, bijvoorbeeld in Groningen, samen met de wiskundestudenten het zwaarste programma aangaande calculus en lineaire algebra en excelleerden ook daar. Nu, tien jaar

later, is dat beeld geheel veranderd en zijn de natuurkundestudenten langzamerhand ingedeeld bij het lichtere programma dat informatica- en scheikundestudenten ten deel valt. Ook klagen hoogleraren natuurkunde over het wiskundige niveau van hun studenten, zelfs nog na de bachelorsfase: ze kunnen hun ei nauwelijks meer kwijt.

Het moge 'retro' klinken, maar alleen al ten behoeve van Wiskunde D en NLT is het nodig iets van die oude toestand te herstellen. Hiervoor is bijscholing van wis- en natuurkundeleraars nodig, in gezamenlijkheid. Een van de NINA-cTWO vervolgactiviteiten, waarbij ik zelf ook betrokken ben, betreft voorbereiding hiervan en gelukkig beperken de meningsverschillen zich hier voornamelijk tot notatiekwetsies! Dit is ook onderdeel van de kentering die ik bespeur: zie onder de artikelen van Hulshof en van Kaenders in het vorige nummer van dit blad.

In dit verband vraag ik uw aandacht voor een anekdote. Beschouw de eenparige cirkelbeweging van een planeet om de zon, gegeven door $x(t) = R \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $y(t) = R \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; dit alles compatibel met de eerste twee wetten van Kepler. Hierbij is t de tijd, R de straal van de cirkel en T de omlooptijd. Twee keer differentiëren levert de middelpuntzoekende versnelling

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = -R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \end{pmatrix} = -R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathbf{e}_r,$$

waarbij $\mathbf{e}_r$ de eenheidsraakvector is in de radiële richting. Heeft de planeet massa m en geldt een aantrekkingskracht $\mathbf{F} = -(km/r^2) \mathbf{e}_r$, waarbij $r^2 = x^2 + y^2$, dan levert Newton's wet $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ de relatie $T^2 = (4\pi^2/k)R^3$, waarbij we $r = R$ namen: dit is de derde wet van Kepler. Voor de *die hards* onder u is dit een eenvoudig sommetje, maar velen zouden het mooi vinden als een dergelijk doorkijkje in de structuur van het universum ook aan leerlingen Wiskunde D of NLT deelachtig zou mogen worden.

Een van mijn compagnons in de ontwikkeling van bijscholingsmateriaal is een begenadigd leraar wis- en natuurkunde die bovenstaande op een klas heeft uitgeprobeerd. De leerlingen waren onder meer verbaasd dat de formule voor de middelpuntzoekende kracht, bekend uit BINAS (het informatieboek havo-vwo voor het onderwijs in de natuurwetenschappen) zo inzichtelijk bleek te zijn. Er is best hoop.

Overigens hoop ik velen van u te ontmoeten op het vijfde Europese Congress of Mathematics op 14–18 Juli 2008 te Amsterdam.

Henk Broer

Voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

Rijksuniversiteit Groningen, Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen

Instituut voor Wiskunde en Informatica, Postbus 407, 9700 AK Groningen,

broer@math.rug.nl

www.math.rug.nl/~broer

Agenda

| Upcoming Events

april 2008

1 – 4 april

☐ RFID Security: Theory and Practice

Workshop over de beveiliging van *radio frequency identification*

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

2 – 11 april

☐ Multivariate analyse: toepassing op ecologische en moleculaire gegevens

Cursus over multivariate statistische technieken voor verwerking van ecologische en moleculaire gegevens

plaats Wageningen Business School

info www.wbs.wur.nl

7 – 11 april

☐ European Study Group with Industry

Studiegroep waarin wiskundigen werken aan mathematische problemen uit de industrie

plaats Heriot-Watt University, Edinburgh, Schotland

info www.ma.hw.ac.uk/esgio8

9 april

☐ Laat de Spelen beginnen!

Cursusdag voor vwo-docenten wiskunde over de bijdragen van wiskunde en natuurwetenschappen aan het begrijpen en verbeteren van sportprestaties van atleten

plaats Universiteit van Amsterdam

info www.science.uva.nl/mastercourses

16 april

☐ Grote Rekendag 2008

Zesde editie van deze jaarlijks terugkerende dag waarop basisscholen de kans krijgen om op een speciale manier met rekenen en wiskunde bezig te zijn. Het thema dit jaar is *tijd*.

plaats Deelnemende scholen

info www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag

21 – 22 april

☐ Grand Opening van Eipsi

Opening van het Eindhoven Institute for the Protection of Systems and Information with lectures and a forum discussion

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/eipsi

21 – 25 april

☐ NORMA o8

De vijfde Nordic Conference on Research in Mathematics Education

plaats Copenhagen, Denemarken

info www.dpu.dk/site.aspx?p=10797

22 april

☐ NWO-Talent Class

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

mei 2008

6 – 9 mei

☐ Numerical Complex Dynamical Systems

Het numeriek modelleren van complexe dynamische systemen, zoals het omgaan met verschillende tijd- en ruimteschalen

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

17 mei

☐ HKRWO Symposium XIV

Symposium van de Historische kring reken- en wiskundeonderwijs

plaats Hogeschool Domstad, Utrecht

info www.fi.uu.nl/hkrwo

19-23 mei

☐ Rare events

Workshop over zeldzame gebeurtenissen

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

19 – 30 mei

☐ Network Synchronization: from dynamical systems to neuroscience

Speciaal onderwerp: synchronisatie in dynamische systemen en niet-lineaire data-analyse

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

20 mei

□ NWO-Talent Class

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

juni–augustus 2008

9 – 13 juni

□ Educational Week on Non-commutative Integration

Stieltjesweek met lezingen van Fyodor Sukochev en Ben de Pagter

info www.wiskgenoot.nl/watbiedt/overzicht.php

11 – 13 juni

□ HPOPT 2008

Tiende internationale workshop over High Performance Optimization Techniques: algebraic structure in semidefinite programming

plaats Universiteit van Tilburg

info lyrawww.uvt.nl/~edeklerk/hpopt2008

17 juni

□ NWO-Talent Class

Eendaagse workshop voor promovendi en post-docs over de verscheidene facetten van het leven als wetenschapper

plaats NWO, Den Haag

info www.nwo.nl/talentendag

23 juni – 18 juli

□ Summer school on Evolution Equations

Zomerschool van het Clay Mathematics Institute voor promovendi en postdocs over evolutievergelijkingen

plaats Zurich, Zwitserland

info www.claymath.org/programs/summer.school/2008

26 – 28 juni

□ WNI 2008

Workshop over nonparametric inference

plaats Coimbra, Portugal

info www.mat.uc.pt/~wnizoo8

30 juni – 4 juli

□ Algebraic Geometry

Deze workshop is een satellietconferentie van het *European Congress of Mathematicians* over de laatste ontwikkelingen op het gebied van de algebraïsche meetkunde

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

30 juni – 4 juli

□ ICMI/IASE Study

Studiegroep Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education

plaats Monterrey, Mexico

info www.ugr.es/~icmi/iase.study

3 – 5 juli

□ LOFT 2008

Achtste Conference on Logic and the Foundations of Game and Decision Theory

plaats Amsterdam

info www.illc.uva.nl/LOFT2008

6 – 13 juli

□ ICME11

Elfde editie van het International Congress on Mathematical Education

plaats Monterrey, Mexico

info www.icme11.org.mx/icme11

7 – 11 juli

□ International Workshop on Statistical Modeling

Drieëntwintigste internationale workshop over statistisch modelleren

plaats Universiteit Utrecht

info www.fss.uu.nl/iwsm2008

13 – 18 juli

□ Fifth European Congress of Mathematics

Europees wiskundig congres onder de auspiciën van de *European Mathematical Society* en het Koninklijk Wiskundig Genootschap, georganiseerd door het CWI, de UVA en de VU

plaats RAI, Amsterdam

info www.secm.nl

21 – 25 juli

□ Operator Structures and Dynamical Systems

Workshop als nevenactiviteit van het *Fifth European Congress of Mathematics* over de relatie tussen dynamische systemen en de daaraan verbonden operatorstructuren

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

11 – 15 augustus

□ Quantum Decoherence in Quantum Information Science

Superconducting qubits en quantum states of mesoscopic and macroscopic systems

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

17 – 21 augustus

□ 29th annual conference of the ISCB

Conferentie van de International Society for Clinical Biostatistics

plaats Kopenhagen, Denemarken

info www.iscb2008.info

18 – 22 augustus

□ European Study Group with Industry

66ste Europese Studiegroep voor Wiskunde en Industrie

plaats Lyngby, Denemarken

info www2.mat.dtu.dk/ESGI/66

18 – 23 augustus

□ USSE 2008

Utrecht Summer School in Science and Mathematics Education

plaats Universiteit Utrecht

info www.fi.uu.nl/nl

22 – 23 augustus

□ Vakantiecursus 2008

Vakantiecursus over wiskunde voor wiskundecenten. Wordt op 29 en 30 augustus ook aan het CWI gegeven

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.cwi.nl/events/2008/VC2008

25 – 29 augustus

□ Dynamics Days Europe 2008

Conferentie met lezingen over nietlineaire dynamica, zoals onder andere klimaatdynamica, dynamica van biosystemen en hamiltoniaanse systemen

plaats Technische Universiteit Delft

info dd2008.ewi.tudelft.nl

27 – 28 augustus

□ 10 jaar EURANDOM

Conferentie ter ere van het tienjarig bestaan van EURANDOM

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

Nieuws

| News

In memoriam Joost van Hamel

Joost van Hamel werd op 4 augustus 1969 te Voorburg geboren. Hij overleed veel te jong in Antwerpen op 12 januari 2008. Joost studeerde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam en schreef daar ook zijn proefschrift onder begeleiding van Jacek Bochnak. Voor dit proefschrift getiteld 'Algebraic cycles and topology of real algebraic varieties' won hij de Stieltjes Prijs van 1997. Joost had daarna verschillende post-doc aanstellingen, in Utrecht, in Duisburg en in Sydney. Sinds 2004 was hij hoogleraar aan de Katholieke Universiteit van Leuven.

Het oorspronkelijke onderzoeksgebied van Joost was reële algebraïsche meetkunde, waaronder men algebraïsche meetkunde van variëteiten gedefinieerd over het lichaam van de reële getallen moet verstaan. Zo definieerde en bestudeerde hij in zijn proefschrift een cykelafbeelding met waarden in equivariante homologie groepen. Joost raakte ook al snel geïnteresseerd in andere takken van de algebraïsche meetkunde die meer getal-theoretisch van aard zijn. Hier kan men z'n werk noemen aan de Brauer-Manin obstructie of de Lichtenbaum-Tate dualiteit. Hij blonk uit in zijn vermogen om zich geavanceerde theorieën snel eigen te maken, en daarna, dankzij zijn oorspronkelijke inzichten, nieuwe resultaten te boeken die nog lang hun invloed zullen doen gelden.

Ons resten mooie stukken wiskunde die hij ons nalaat en de herinnering aan een bijzonder prettig mens.

Johan Huisman



fotograaf: Rob Stevens

Joost van Hamel

Einstein voor de leeuwen

Albert Einstein, natuurkundige, icoon van de moderne wetenschap en binnenkort het onderwerp van een speelfilm. Tenminste, als het aan *Lionsgate* ligt. Dit bedrijf heeft namelijk wereldwijd de rechten verkregen op het levensverhaal van deze markante Duitser, inclusief de rechten van de biografie *Einstein: His Life and Universe*, geschreven door Walter Isaacson. Dat meldt filmblad *Variety*.

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.

Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

De film, die zich zal toespitsen op Einstein als twintiger en dertiger, zal geproduceerd worden door de nog relatief onbekende Alan en Gabe Polsky. De eerder genoemde Isaacson, die voor zijn biografie toegang kreeg tot Einsteins privé-archieven, zal als adviseur bij de film betrokken zijn.

Volgens productie-leider Mike Paseornek is *Lionsgate* ervan overtuigd dat het verhaal van de rebellerende wetenschapper, die vanwege zijn opvattingen uitgestoten wordt door de wetenschappelijke wereld, maar uiteindelijk onze kijk op de wereld drastisch verandert —en ondertussen ook nog de tijd vindt voor vele romantische escapades— alle aspecten in zich heeft om een film op te leveren voor een breed publiek.

Of *Lionsgate* genoeg energie kan opbrengen om dit verhaal daadwerkelijk om te buigen in een kassucces, zal moeten blijken. De *Internet Movie Database* plaatst de voorlopige verschijningsdatum in 2009.

Bron: www.variety.com/

Het loopt niet in het honderd

Als het briefje van honderd euro afgeschaft zou worden, zou de efficiency van het betalingsverkeer daar nauwelijks onder lijden. Dat is wat er uit de berekeningen van econometristen Philip Hans Franses en Jeanine Kippers blijkt. Met het huidige arsenaal aan briefjes en munten tot onze beschikking moeten we namelijk gemiddeld 4,52 handelingen verrichten om een geheel-tallig bedrag tussen de 1 en 1000 euro af te rekenen. Als we geen biljetten van honderd euro zouden kunnen gebruiken, zouden dit 4,62 handelingen worden.

Dit opmerkelijk bericht dat eerder op de website *Kennislink* en in het tijdschrift *Pythagoras* verscheen, haalde op 11 januari jongstleden ook *De Volkskrant*.

De berekeningen volgens het algoritme van Cramer tonen ook aan dat het afschaffen van de 1 en 2 eurocentmunten terecht is geweest, maar dat we zeker niet de 20 en 50 eurobiljetten kunnen missen.

Bron: www.volkskrant.nl en www.kennislink.nl

Problematische promotie of nieuw fundament?

Marcoen Cabbolet, wiskundig promovendus aan de *Technische Universiteit Eindhoven* presenteert in zijn proefschrift *Elementary Process Theory* een wiskundig opgezette theorie van fundamentele natuurwetten die ingaat tegen de quantummechanica en de algemene relativiteitstheorie.

Cabbolet, opgeleid als fysisch-organisch chemicus, werkt al sinds 1997 aan zijn theorie. In de beginjaren was er een intensieve samenwerking met de inmiddels overleden Oekraïense fysicus Sergey San-nikov. Zijn promotoren zijn logicus en taalanalist Harrie de Swart van de *Universiteit van Tilburg* en wiskundige Malo Hautus van de *Technische Universiteit Eindhoven*, copromotor is natuurkundige Karl Svozil van de *Technische Universität Wien*.

Cabbolets promotie die in januari gepland stond is één week voor de geplande verdediging opgeschort, omdat de kennis van zaken van de commissieleden die de natuurkundige kant van het verhaal moesten beoordelen op het laatste moment ontoereikend bevonden werd. Het is op het moment van schrijven niet duidelijk of en wanneer de promotie door zal gaan.

In *Cursor*, de universiteitskrant van de *Technische Universiteit Eindhoven* reageert Cabbolet in een open brief gericht aan rector en wiskundige Hans van Duijn op het opschorten van zijn promotie (*Cursor* 17, 2008). In deze brief uit de promovendus zijn ongenoegen over de

gebeurtenissen en geeft hij weerwoord tegen de kritiek die de Eindhovense wiskundigen Jos Baeten en Andries Brouwer en de Utrechtse fysicus Gerard 't Hooft geuit hadden op zijn werk. Kritiek die volgens Cabbolet tot stand is gekomen zonder zijn proefschrift goed te bestuderen en die in belangrijke mate heeft bijgedragen aan het opschorten van zijn promotie.

Bron: *Cursor*, Technische Universiteit Eindhoven

Nieuwe Nationale PR-medewerker Wiskunde

Sinds 1 oktober 2007 is er een nieuwe Nationale PR-medewerker Wiskunde. Als opvolger van Ionica Smeets zal Charlotte Vlek zich inzetten voor een positieve beeldvorming rond de wiskunde. Concreet houdt zij zich bezig met het project *Wiskunde in Perspectief*, dat zich richt op de beroepsperspectieven na de studie wiskunde. In de vorm van een website (www.wiskundeinperspectief.nl) moet dit project een antwoord geven op de veelgehoorde vraag wat je kunt worden met wiskunde. Studiekeizers maar ook voorlichters en docenten kunnen hier bijvoorbeeld interviews vinden met wiskundigen in allerlei verschillende beroepen. Per e-mail is zij bereikbaar op prmedewerker@wiskugenoot.nl.

Bron: Koninklijk Wiskundig Genootschap



fotograaf: A. Piersma

Charlotte Vlek

Wiskundeles op dvd

Uw wiskundelesing uitgebracht op dvd als extraatje bij een animatiefilm? Dat is wat Sarah Greenwald van de Appalachian State University overkwam. Op de dvd van de film *Futurama: Bender's Big Score* is ook haar lezing opgenomen over de wiskundige verwijzingen die verstopt zitten in de televisieshow *Futurama*, waar de film op gebaseerd is.

Bron: www.ams.org/news/home-news.html#futurama

Reken mee op tv

De *Wiskundemeisjes* waren op tweede kerstdag vorig jaar op tv te zien bij de Nationale Rekentoets. In deze quiz onder leiding van Joost Prinsen namen veertig bekende en onbekende Nederlanders het op zich om tweeëntwintig rekenvragen te beantwoorden, die opgesteld waren door Jan van Maanen, directeur van het Freudenthal Instituut. De *Wiskundemeisjes* hielden de score bij en gaven tekst en uitleg bij een aantal van de vragen. Zo mochten ze een piramide van mandarijnen stapelen en een grote kubus ontvouwen.

De drie kandidaten met de hoogste score namen het uiteindelijk tegen elkaar op in een finale, waar actuarieel rekenaar

Joost Goslings als winnaar uit tevoorschijn kwam. Eerder waren de *Wiskundemeisjes* ook al te bewonderen bij Wiskunde voor de 2e fase van *Schooltv* (www.schooltv.nl/eigenwijzer/projecten/?project=1407864).

Yves van Gennip

De Gömböc

De Gömböc is een mono-monostationair voorwerp, oftewel een voorwerp met homogeen verdeelde massa met een dusdanige geometrie dat het slechts één stabiele positie heeft als het op een plat oppervlak gelegd wordt. Met andere woorden, als een Gömböc op tafel gelegd wordt, gaat hij vanzelf rechtop staan. Het speciale hier is dat de voet van de Gömböc niet verzwaard is, zoals dat bijvoorbeeld bij de bekende poppetjes gebeurt.

De Gömböc werd bedacht en benoemd door Gábor Domokos en Péter Várkonyi van de *Technical University of Budapest* naar aanleiding van een uitdaging die in 1995 door de wiskundige V.I. Arnol'd aan Domokos gesteld werd.

Omdat de Gömböc een beetje op een schildpad lijkt, wordt er gespeculeerd of de schildpad wellicht tot een mono-monostationaire vorm geëvolueerd is, omdat deze vorm voorkomt dat ze op hun rug stranden.

Bron: www.gomboc.eu en www.ams.org/mathmedia



copyright: Gábor Domokos, Péter Várkonyi

Wel of geen Iraniërs?

In januari van dit jaar werd het bekend dat ministers Plasterk en Verhagen in september 2007 in een niet-openbare brief alle Nederlandse universiteiten, hogescholen en onderzoeksinstituten gevraagd had om 'grote terughoudendheid te betrachten bij het uitnodigen van Iraniërs' en om alert te zijn 'op Iraniërs die reeds in Nederland een studie volgen'.

Als gevolg hiervan weigert de Universiteit Twente alle Iraanse studenten en de Technische Universiteit Eindhoven voert een extra screening procedure in voor deze groep studenten.

In een artikel in *NRC Handelsblad* van 10 januari wordt Robbert Dijkgraaf, wis- en natuurkundige en toekomstig president van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen geciteerd, die zich uitspreekt tegen het weren van alle Iraanse studenten uit Nederland.

In plaats van 'een hek om Nederland', pleit hij voor 'een hek om de gevoelige informatie'.

Bron: www.nrc.nl

Wiskunde haalt zijn gram

Heeft u die prachtige muziekcarrière moeten laten varen omdat de wiskunde al uw tijd in beslag nam? Niet getreurd dan, een *Grammy*

winnen kan altijd nog.

Wiskundige Kevin Short van de *University of New Hampshire* is genomineerd voor een *Grammy Award*, de prestigieuze muziekprijs van de Amerikaanse *Recording Academy*. Short heeft deze nominatie in de categorie *best historical album* te danken aan de signaalverwerking die hij in de strijd gooide om een krakige bootlegopname uit 1949 van folkzanger Woody Guthrie om te toveren in een kraakhelder album: *The Live Wire: Woody Guthrie in Performance 1949*. Deze opname is de enige bestaande van Guthrie spelend voor publiek, wat het geheel nog extra speciaal maakt.

Of Short de *Grammy* ook daadwerkelijk gewonnen heeft, is op het moment van schrijven nog niet bekend, maar als u dit leest wel. De uitreiking heeft plaatsgevonden op 10 februari.

Bron: *University of New Hampshire Newsletter*



fotograaf: Douglas Prince, UNH Photo Services

Kevin Short, genomineerd voor een *Grammy*

Studiedag van Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren: een impressie

Op zaterdag 10 november was het weer tijd voor de jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW). Dit jaar was gekozen voor het Anna van Rijn College Locatie Albatros in Nieuwegein als school die de vele bezoekers een warm welkom bood. Als docent natuurkunde en aankomend docent wiskunde bezocht ik deze studiedag.

Het onderwerp van de studiedag was dit jaar 'Relevante Wiskunde'. Een thema dat vooral tot uiting kwam in de lezing van Anne van Streun, een bekende naam voor iedereen die zich wel eens met wiskundendidactiek bezig heeft gehouden. Van Streun had zijn lezing de naam 'Wiskunde: weten én kunnen: wat willen ze allemaal van ons?' gegeven. In deze lezing ging hij in op de vraag wat wij als wiskundeleraars onze leerlingen willen bijbrengen, en wat de maatschappij eigenlijk van onze leerlingen verwacht als ze klaar zijn met hun middelbare school. Vanzelfsprekend kwam hier ook de huidige discussie die bestaat over het niveau van wiskundeonderwijs aan de orde. Van Streun pakte dit aan door een overzicht te geven van de ontwikkeling van wiskunde-onderwijs door de jaren heen.... waar is het begonnen, waar is het nu terechtgekomen en wat is er tussendoor gebeurd. Al-

le onderwijsvernieuwingen passeerden de revue, voor mij als jonge wiskundedocent in opleiding een mooie gelegenheid om alle veranderingen in een historisch kader te plaatsen. En dit alles deed Van Streun in een goed georganiseerde voordracht, met veel humor ('Opa vertelt...'). Mijn complimenten!

Na de lezing was het tijd om naar de eerste workshop te gaan, in mijn geval de workshop 'Samenhang wiskunde – natuurkunde', gegeven door Wim Sonneveld en Kees Rijke. Een stukje uit hun eigen beschrijving van de workshop: "Hoe bereik je samenhang? Wiskunde en natuurkunde hebben het vaak over dezelfde begrippen en concepten maar leerlingen herkennen dat niet. Kunnen wiskunde en natuurkunde dezelfde taal gaan spreken als het gaat over functies en verbanden, over vectoren, over diagrammen en grafieken, over differentiëren en modelleren, zodat deze vakken elkaar beter gaan ondersteunen en (meer) gaan samenwerken?" In de workshop werd vooral praktisch gedacht, geen filosofische discussie over het nut van samenhang, maar meer "hoe kun je *nu* meer samenhang bereiken?" Aan de orde kwamen onder andere de verschillende notaties die voor een afgeleide gebruikt worden. Eigenlijk niet gek dus dat de leerling soms de samenhang tussen de vakken niet ziet. In de workshop werd daarnaast vooral veel gepraat over hoe het op andere scholen gaat. Erg interessant en verhelderend.

Vervolgens was er de lunchpauze, die door veel mensen gebruikt werd voor een bezoek aan de markt. Alles wat maar met wiskundeonderwijs te maken heeft was aanwezig, natuurlijk alle methodes zoals *Moderne Wiskunde*, *Getal en Ruimte*, maar ook de *Wageningse Methode* en *Matrix*, die in mijn ogen indrukwekkend werk afleveren door bijna hun hele boek ook met vervangende ICT-opdrachten aan te bieden. Daarnaast werden er ook verbazingwekkend veel wiskundige spelletjes gedemonstreerd. Wat vooral opviel was de hoeveelheid aanwezige ICT, ik noemde *Matrix* al, maar ook *Casio*, *Geocadabra* en *Texas Instruments*, met zijn nieuwste speeltje de *TI-Nspire*, waren aanwezig. Het lijkt erop dat ICT een grote rol gaat spelen in het wiskundeonderwijs.

Na de lunchpauze was het tijd voor de volgende workshop: 'Games inzetten bij wiskunde'. In mijn ogen een beetje een misleidende titel... Bij games denk je al snel aan computergames, maar die werden slechts zijdelings behandeld. De nadruk lag op een bordspel met wiskundige vragen, ontwikkeld door een aantal studenten van een andere lerarenopleiding. Hoewel het spelen van het bordspel met een aantal medespelers erg gemakkelijk was — en een onderbouwklas zou er heel veel plezier mee hebben — vond ik deze workshop toch wat tegenvalen, vooral door verkeerde verwachtingen die ik had.

Als afsluiting van de dag werden een aantal fragmenten van 'Wiskunde voor de tweede fase', van SchoolTV, getoond. Een leuke serie zo te zien, en iets wat ik in mijn lessen zeker nog een keer wil laten zien. Al met al een geslaagde dag!

Erik van Maanen

Schematiseren moet je leren

Mariëlle Poland, verbonden aan de *Vrije Universiteit* in Amsterdam, heeft onderzoek gedaan naar het belang van leren schematiseren voor het leren rekenen bij kinderen in de groepen 2 en 3 van de basisschool. Haar conclusie is dat kinderen die in groep 2 spelenderwijs leren schematiseren, in groep 3 makkelijker leren rekenen.

Vooraf dynamisch schematiseren blijkt erg belangrijk te zijn. Een voorbeeld geeft aan wat hiermee bedoeld wordt. Iemand haalt uit een pot met knikkers een rode knikker en stopt er een groene voor in de plaats. Vervolgens wordt aan de kinderen gevraagd hier een tekening van te maken. Dat kan op een statische manier gebeuren waarbij alleen

de pot met knikkers getekend wordt, zonder duidelijk aan te geven wat er mee gebeurt, maar dat kan ook dynamisch, waarbij goed te zien is dat de rode en groene knikker verwisseld worden.

Uit Polands onderzoek blijkt dat kinderen die in groep 2 leren schematiseren een jaar later gemakkelijker rekenen. Haar verklaring hiervoor is dat die kinderen gemakkelijker de abstractiestap kunnen maken van het concrete nadenken ('Ik heb twee appels. Ik krijg er twee bij. Dan heb ik vier appels.') naar het symbolische nadenken (' $2+2=4$ ').

Bron: Kennislink

Geen broodje aap

Waar we het in Nederland moeten doen met uitgebroken gorilla's, trakteert Tetsuro Matsuzawa van *Kyoto University* de wereld op chimpansees die een fotografisch geheugen lijken te hebben.

Op jonge leeftijd werd aan een zestal chimpansees de volgorde van de getallen 1 tot en met 9 geleerd. Vervolgens kregen de chimpansees deze getallen een fractie van een seconde te zien in willekeurige volgorde en op willekeurige plekken op een scherm. Vervolgens werden de getallen verborgen achter witte vlakken. De taak voor de chimpansees was nu om de witte vlakken aan te raken in de juiste volgorde, van 1 tot en met 9.

Het is opvallend hoe veel beter sommige van de chimpansees deze taak volbrachten dan de mensen die deze taak probeerden uit te voeren. Niet alleen maakten enkele chimpansees veel minder fouten, maar hun prestaties gingen ook nauwelijks achteruit als de getallen minder lang zichtbaar waren.

Een mogelijke verklaring voor dit verschil tussen mens en chimpansee is dat de laatste in de natuur in een oogopslag de locatie van takken en mogelijke routes in de bomen in zich moet kunnen opnemen.

Het artikel waarin de resultaten gepubliceerd worden is te vinden in *Current Biology* (17)23, 2007. Op de website van dit tijdschrift, alsook bij de hierboven vermelde bronnen, zijn videobeelden van het experiment te zien.

Bron: Noorderlicht

Citatieanalyse wiskunde

In opdracht van het *Gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen* van NWO heeft het *Centre for Science and Technology Studies* een citatieanalyse binnen de Nederlandse wiskunde verricht.

In het rapport worden onder meer de aantallen citaties per artikel van de wiskunde-instituten in Nederland vergeleken met het wereldwijde gemiddelde. Over de hele linie genomen scoort Nederland goed op deze schaal. Met name de *Universiteit Utrecht*, de *Universiteit van Amsterdam*, het *CWI* en de *Technische Universiteit Eindhoven* scoren hier bovengemiddeld. Het hele rapport is te downloaden op de vermelde website.

Bron: NWO

Geruisloos onderzoek

Een jaar geleden, in de nieuwsrubriek van het maartnummer van *Nieuw Archief voor Wiskunde* meldden wij dat wetenschappers van Duke University erin geslaagd waren om een *invisibility cloak* te maken, een mantel die objecten afschermt tegen microgolven.

Nu hebben dezelfde wetenschappers ook een eerste opzet gemaakt voor een mantel die geluidsgolven buiten de deur houdt. In tegenstelling tot wat eerder gedacht werd, blijkt zo'n mantel theoretisch mogelijk te zijn.

Mogelijke toepassingen zijn het verbeteren van de akoestiek van

gebouwen en het verbergen van bijvoorbeeld onderzeeërs voor sonar.

Bron: *Science Daily*

Het gelijk van het damspel

Heeft u wel eens gedamd en verloren? Dan heeft u niet optimaal gespeeld. Informatici van de University of Alberta onder leiding van Jonathan Schaeffer hebben bewezen dat dammen een zogenaamde *tie game* is. Dat wil zeggen dat een spelletje dammen altijd eindigt in een gelijkspel, tenzij een van de spelers een fout maakt, net zoals dat het geval is bij bijvoorbeeld 'boter, kaas en eieren'.

Bij het bewijzen is intensief gebruik gemaakt van computerberekeningen. Daarnaast waren er ook nog slimme ideeën nodig om alle $5 \cdot 10^{24}$ mogelijke manieren om een damspel te spelen uit te pluizen.

Schaeffer kijkt ondertussen alweer vooruit en hoopt in de toekomst ook poker 'op te kunnen lossen'.

Bron: *SIAM News December 2007*

Wiskunde in de weegschaal

Serviceonderwijs, het zal voor de meeste wiskundigen werkzaam aan universiteiten geen onbekend terrein zijn. Het geven van wiskunde-colleges aan studenten van natuurkunde, bouwkunde of andere disciplines. Wiskunde is natuurlijk onmisbaar voor alle andere bèta-disciplines, vandaar dat het de aandacht krijgt die het verdient. Of zijn hier nog kanttekeningen bij te zetten?

Recente studie van technische documenten en literatuurbronnen die teruggaan tot de vijfde eeuw voor Christus, heeft aangetoond dat de ontwikkeling en het gebruik van technologie bloeide onder beroepsmensen met weinig theoretische kennis. 'Ze gingen niet allemaal naar Plato's Academie om meetkunde te leren en toch konden ze precies gekalibreerde instrumenten maken,' aldus Mark Schiefsky, professor in de klassieken aan Harvard.

Een goed voorbeeld hiervan is de weegschaal met armen van ongelijke lengte, die is bestudeerd door Schiefsky in samenwerking met een groep geleid door Jürgen Renn, directeur van het Max Planck Institute for the History of Science in Berlijn. Er werd altijd gedacht dat Archimedes de eerste was die zulk een weegschaal gebruikt zou hebben, omdat deze gebaseerd is op het hefboomprincipe. Het blijkt echter dat de weegschaal in de praktijk gebruikt en verfijnd werd door ambachtslieden die onbekend waren met dit principe.

Gedwongen door praktische noodzaak werd de asymmetrische weegschaal uitgevonden en jarenlang gebruik leidde tot fijnere kalibratie.

Gelukkig blijkt wiskunde dan toch haar rol te spelen. Naarmate er meer wiskundige kennis beschikbaar kwam voor de antieke ingenieurs, werd het ontwerpproces systematischer. Zo was Archimedes' kennis bijvoorbeeld onmisbaar voor de ontwikkeling van de katalpult. Dit oorlogstuig had een grote impact op de politieke situatie in de wereld, omdat steden aangevallen konden worden, die voorheen onneembaar leken. Archimedes deed dus ook al aan serviceonderwijs.

Bron: www.eurekalert.org/pub.releases/2007-10/hu-ewm100207.php

Uit de knopendoos

Vroeger, toen telefoons nog niet draadloos waren, waren ze in elk huis te vinden: draden die spontaan in de knoop zijn gaan zitten. Gelukkig hoeft ook de moderne mens dit wonder der natuur niet te missen, want computerkabels en snoertjes van koptelefoons vertonen hetzelfde gedrag. Gewapend met knopentheorie hebben fysici Dorian M. Raymer

en Douglas E. Smith geprobeerd dit probleem te ontwarren.

De onderzoekers deden touwtjes in een doos, waar vervolgens flink mee gerammeld gedurende een bepaalde tijd. Het resultaat hiervan bleek een heel spectrum aan verschillende knopen te zijn, dat met behulp van wiskundige knopentheorie geanalyseerd kon worden.

De experimentele resultaten wijzen erop dat voor lange, flexibele touwtjes de kans dat er een knoop ontstaat naar 100% gaat. Bij het bepalen welke knopen er ontstaan, komt knopentheorie van pas. Aan de hand van foto's van de knopen konden de onderzoekers de bijbehorende knopendiagrammen en Jonespolynomen bepalen die gebruikt worden om knopen te classificeren. In totaal werden er honderdtwintig verschillende soorten knopen gevonden tijdens de experimenten, met *minimum crossing numbers* zo hoog als elf. Bijna al deze knopen waren priemknopen (dat wil zeggen dat ze geen samenstelling zijn van twee andere knopen) en alle priemknopen met zeven kruisingen of minder waren vertegenwoordigd. Dit is een sterke aanwijzing dat het knopingsproces slechts aan een van de uiteinden van het touwtje begint en niet aan beide uiteinden tegelijk. Ware dit namelijk wel zo, dan is het zeer onwaarschijnlijk dat de beide knopen in het midden van het touwtje samenkomen om een priemknoop te vormen (in plaats van een samengestelde knoop).

De fysici hebben ook getracht een model op te stellen voor de vorming van de knopen, op basis van zogenaamde willekeurige *braid moves*. Het is met deze bewegingen mogelijk om alle priemknopen te maken en daarom kan dit model dienen als verklaring voor de priemknoopformatie in de doos.

Het artikel van Raymer en Smith is te vinden onder de vermelde bron. Een mooie korte beschrijving van de resultaten kunt u lezen op www.maa.org/mathtourist/mathtourist.10.01.07.html. Voortaan zal ook niemand meer tussen de draden van een koptelefoon aan de wiskunde kunnen ontsnappen.

Bron: physics.ucsd.edu/~des/DSmithKnotting.pdf

Wiskunde zuigt niet

Heeft u zich ook altijd afgevraagd hoe wiskunde te bedrijven zonder uw nagels te breken? Of hoe u uw dochter kunt laten warmlopen voor wiskunde op de middelbare school? En misschien wel of *beauty* en *brains* echt niet samengaan? Dan dient het antwoord op al deze vragen zich nu aan in de vorm van Danica McKellar. Deze actrice, die bij het grote (Amerikaanse) publiek vooral bekend is geworden vanwege haar rol in de televisieserie *The Wonder Years*, heeft nog een tweede leven als verwoed wiskundige. Zo is de *Chayes-McKellar-Winn* stelling uit de percolatietheorie mede naar haar vernoemd. Nu zet ze haar populariteit als actrice in om wiskunde te promoten, en dan met name onder meisjes op de middelbare school.

Een van de middelen die ze hierbij gebruikt is haar website *mathdoesntsuck.com*. Onlangs verscheen er ook een boek van haar hand met dezelfde titel en de veelzeggende ondertitel *How to Survive Middle-School Math without Losing Your Mind or Breaking a Nail*. Hierin legt ze middelbare schoolwiskunde uit aan de hand van 'typische meiden-dingen' zoals mode, make-up en vriendjes. Verder probeert ze jonge meiden ervan te overtuigen dat mooi en slim zijn, veel *cooler* is dan mooi en dom zijn.

De scheve sekseverhouding binnen de exacte wetenschappen is niet alleen McKellar opgevallen. Mary Murphy en Claude Steele, psychologen uit Stanford, hebben mogelijke redenen voor deze discrepantie onderzocht. Zij beargumenteren dat de organisatie van de wiskunde-, wetenschap- en ingenieurswerelden een belangrijke bijdra-

ge leveren. Zo kan het al bestaande verschil ertoe leiden dat vrouwen verwachten minder goed te presteren en ook daadwerkelijk minder goed presteren.

Een groep studenten kreeg in een experiment twee filmpjes te zien van een conferentie. Bij een van de filmpjes waren er evenveel vrouwen als mannen aanwezig bij de conferentie, bij het andere filmpje waren er drie keer zoveel mannen als vrouwen. Ondertussen werden fysiologische opwindings, oplettendheid, gevoel van thuishoren en de wens om zelf deel te nemen aan de conferentie gemeten bij de studenten. Het bleek dat de vrouwen die het tweede filmpje te zien kregen een snellere hartslag hadden, meer zweetten, zich minder thuisvoelden bij de conferentie en ook minder geneigd waren om eraan deel te willen nemen.

Bij mannen werden er niet veel verschillen gemeten bij beide filmpjes, met een belangrijke uitzondering. Zowel de mannen als de vrouwen gaven aan liever de conferentie bij te wonen waar het aantal vrouwen en mannen in balans was, dan de conferentie met de ongelijke verdeling.

Het onderzoek wordt beschreven in het oktobernummer van *Psychological Science*.
Bron: www.danicamckellar.com

De rem op het fileprobleem

Filestroken, snelheidsbeperkingen, carpoolen, bredere wegen... de lijst met pogingen het fileprobleem op te lossen is schier oneindig, maar het lijkt alsof een oplossing tot nog toe over het hoofd is gezien: wiskunde.

Een team wiskundigen van de universiteiten van Exeter, Bristol en Boedapest hebben een model opgesteld dat laat zien dat files kunnen ontstaan wanneer één bestuurder plotseling remt. Deze plotselinge snelheidsvermindering dwingt de volgende auto tot een grotere snelheidsvermindering en de auto daarachter tot nog sterker remmen, wat uiteindelijk kan leiden tot stilstand, soms kilometers terug. Niet de hoeveelheid verkeer, maar de mogelijkheid voor het verkeer om ononderbroken door te rijden is van primair belang in dit model.

De voor de hand liggende oplossing voor bestuurders is beter anticiperen op het verkeer en zo minder abrupt te hoeven remmen.
Bron: www.exeter.ac.uk/news/newstraffic.shtml

Complexe moleculaire systemen

Aan de Technische Universiteit Eindhoven zijn plannen om dit jaar om een nieuw instituut op te zetten op het gebied van de complexe moleculaire systemen. Diverse wetenschappers van de faculteiten Scheikundige Technologie, Biomedische Technologie en Wiskunde en Informatica gaan hierin participeren. Een van de initiatoren vanuit deze laatste hoek is Mark Peletier.
Bron: *Cursor*, Technische Universiteit Eindhoven

Vernieuwingsimpuls voor infectieziekten en vierdimensionale variëteiten

In december 2007 heeft NWO weer een aantal jonge onderzoekers blij gemaakt met een Vernieuwingsimpuls Veni. Ook een aantal wiskundigen wist financiering in de wacht te slepen. Martin Bootsma zal statistische methoden ontwikkelen om te beoordelen of bepaalde infectieziektebestrijding effectief is en Gil Cavalcanti zal gegeneraliseerde vierdimensionale complexe variëteiten bestuderen en hun toepassingen in snaartheorie.
Bron: NWO

Gunther Cornelissen, profileringshoogleraar en Viciwinnaar

Per oktober 2007 is Gunter Cornelissen benoemd tot profileringshoogleraar 'Mathematische fysica' bij het departement Wiskunde aan de Universiteit Utrecht.

Zijn onderzoek op het grensgebied tussen de mathematische fysica en de aritmetische meetkunde is goed begonnen, want in december jongstleden kreeg Cornelissen ook een Vici Vernieuwingsimpuls toegekend door NWO op basis van zijn onderzoeksvoorstel *A tale of two geometries*. Hij zal het verband onderzoeken tussen de meetkunde achter de getaltheorie en de meetkunde achter de quantummechanica en quantummechanisch gaan 'luisteren' naar getaltheoretische objecten in de hoop een fijnere structuur in deze objecten te ontdekken.
Bron: www.science.uu.nl/betanieuws



Gunther Cornelissen

Visitatierapport

In de tweede helft van 2006 heeft de visitatiecommissie van *Quality Assurance Netherlands Universities* (QANU) alle opleidingen op het gebied van wiskunde en bedrijfswiskunde in Nederland, met uitzondering van die van de Universiteit Leiden, beoordeeld. De resultaten zijn nu te lezen in een uitvoerig rapport, dat een relatief kort algemeen deel bevat en vervolgens ruim aandacht schenkt aan elk van de vijftieng bezochte opleidingen. Het is te downloaden op de website van QUNU onder 'Rapporten'.
Bron: www.qanu.nl

In memoriam Joost van Hamel

Wij zijn geschokt door het veel te vroege overlijden van Joost van Hamel (1969 – 2008). Als een van de eerste columnisten van dit blad, van september 2000 tot en met juni 2001, heeft hij mede vormgegeven aan de nieuwe opzet. Wij zijn hem daar zeer dankbaar voor. We wensen zijn familie en vrienden alle sterkte in deze moeilijke tijd.
Redactie *Nieuw Archief voor Wiskunde*

Jan de Graaf

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

j.d.graaf@tue.nl



Jan de Graaf

Afscheidsrede

Waarheid, Spel of Taal?

In zijn afscheidsrede als hoogleraar wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven bespreekt Jan de Graaf verschillende manieren waarop in de wereld om ons heen tegen wiskunde aan wordt gekeken. Wat is wiskunde eigenlijk? Een belangrijke vraag, want elk antwoord op deze vraag vindt zijn reflectie in de manier waarop wiskunde wordt onderwezen.

Uit mededogen met en waardering vóór het zeer gevarieerde bonte gezelschap dat hier thans verwachtingsvol, èn in afwachting van de receptie, voor mij zit, zal mijn afscheidscollege flink wat lichtvoetige en anecdotische ingrediënten bevatten.

Op de eerste plaats wil ik u graag wat onderhouden en wat vertellen over de rol die de Wiskunde en ook de Natuurkunde in mijn leven, zowel vakmatig als emotioneel gespeeld hebben.

Ook wil ik u, omdat ik van de Bewaarschool af aan de meest uiteenlopende onderwijsfilosofien onderworpen ben geweest, mijn ervaringsdeskundigheid op dat gebied zeker niet onthouden.

Tenslotte, het kan niet anders, zal ik het ook hebben over de rol die onderwijs *in* en beoefening *van* de Wiskunde, in het huidige tijdsgewricht, aan deze Technische Universiteit zou kunnen of moeten spelen. Mijn suggesties zullen vooral de wiskunde als taal betreffen.

Ik zal mijn betoog structureren aan de hand van de drie gedaanten waarin de wiskunde zich, in mijn leven, aan mij heeft voorgedaan:

- Als Waarheid
- Als Spel
- Als Taal

Interessant genoeg zijn dit ook historische verschijningsvormen van de wiskunde. Net als bij de ontwikkeling van het embryo lijken historische verschijningsvormen zich te herhalen op individueel niveau.

Wiskunde als 'Waarheid'

Het naïeve en primitieve idee dat wiskunde bestaat uit waarheden over echt bestaande objecten is wijd verbreid, zowel geografisch als in de tijd, en komt in de hoogste en sjiekste kringen voor. In haar lange geschiedenis was wiskunde vaak verbonden met mystieke en theologische inzichten of vermeende inzichten. Pythagoras, Plato en de jonge Aristoteles dachten dat wiskundige hersenspinnels een eigen bestaan leidden, buiten ons om. Net zoals Amerika al bestond, buiten de Europeanen om, voordat Columbus het ontdekt had.

Maar, je hoeft geen tweeëneenhalfduizend jaar in de tijd terug te gaan voor zulke opvattingen. Onlangs nog, in de NRC van Zaterdag 21 juni 2007, schrijft Erik Verlinde, hoogleraar moderne mathematische fysica aan de UvA: ergens ligt een principe dat alles in elkaar laat passen. Als U het niet verder vertelt: ik beken dat ook ik dolgraag platonisch fantaseer. En daar sta ik niet alleen in.

Er is in dit verband een indrukwekkend citaat van Heinrich Hertz dat ik u niet wil onthouden. Het citaat betreft de vergelijkingen van Maxwell. Daarom eerst iets over Maxwell. Bij niet-bèta's is dit een onbekend persoon. Echter, deze Maxwell is zonder enige twijfel de persoon uit de negentiende eeuw met verreweg de meeste invloed op onze westerse beschaving. Als onze beschaving over duizend jaar nog bestaat en namen als Napoleon, Bismarck, Thorbecke, koningin Emma, en weet ik wie al niet, al lang vergeten zijn, zullen

Maxwell en zijn vergelijkingen die elektriciteit, licht- en radiogolven regeren nog altijd genoemd en geroemd worden.

Hier zijn de Maxwellvergelijkingen, voor wie ze nog niet kende, in laat negentiende-eeuwse vectoranalysetaal.

Maxwellvergelijkingen in vectorvorm

$$\begin{array}{ll} \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 & \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = -\mathbf{J} \\ \text{div } (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho & \text{div } (\mu \mathbf{H}) = 0 \end{array}$$

U mag en kunt deze formules bewonderen als een schitterend abstract kunstwerk. Het grote verschil met een normaal abstract kunstwerk is echter, dat dit kunstwerk *objectief* ergens op slaat!

Dan nu het schitterende citaat van Hertz [6] betreffende deze vergelijkingen:

“Man kann diese wunderbare Theorie nicht studieren, ohne bisweilen die Empfindung zu haben, als wohne den mathematischen Formeln selbständiges Leben und eigener Verstand inne, als seien dieselben klüger als wir, klüger sogar als ihr Erfinder, als gäben sie uns mehr hinaus, als seinerzeit hineingelegt wurde. Es ist dies auch nicht geradezu unmöglich; es kann eintreten, wenn nämlich die Formeln richtig sind über das Maß dessen hinaus, was der Erfinder sicher wissen konnte. Freilich lassen sich solche umfassende und richtigen Formeln nicht finden, ohne daß mit dem schärfsten Blicke jede leise Andeutung der Wahrheit aufgefaßt wird welche die Natur durscheinen läßt” (Heinrich Hertz, *Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität*, september 1889).

Tot mijn grote vreugde vond ik dit citaat een paar maanden geleden terug in het proef-

schrift van Janne Brok [2]. Ik lees u haar vertaling voor: Men kan deze prachtige theorie niet bestuderen, zonder zo nu en dan het gevoel te krijgen dat deze wiskundige vergelijkingen een zelfstandig leven leiden, dat zij wijzer zijn dan wij, zelfs wijzer dan hun geestelijke vader, dat ze ons meer geven dan er ooit werd ingestopt. Dit is ook niet onmogelijk; het kan zijn dat de vergelijkingen *waar* zijn op een manier die de kennis van de ontdekker overstijgt. Nochtans laten zulke veelomvattende en juiste vergelijkingen zich pas ontdekken, als iedere subtiele hint naar de waarheid, die de natuur prijsgeeft, met de scherpste blik wordt geduid. Merk op dat 'Erfinder' wordt vertaald met 'ontdekker'. Daar zou ik zelf niet voor gekozen hebben. Toch wordt Hertz wel recht gedaan omdat het citaat zo platonisch overkomt.

Een wat banalere versie van 'platonische identificatie van wiskunde met de werkelijkheid' ben ik tijdens mijn carrière vele malen tegengekomen bij discussies met fysici en technici. Uitspraken als 'Existentie- en uniciteits-stellingen hebben wij fysici niet nodig. Wij weten wat er fysisch aan de hand is', moet je je dan laten welgevalen. Voor zover dergelijke mededelingen intellectueel geduid kunnen worden, duiden ze op diepgeworteld platonisme.

Mijn eigen jeugdige confrontaties met begrippen die uitsluitend wiskundig te interpreteren zijn, waren *beduidend* minder diepzinnig. Die betroffen het begrip *oneindig*. Dit begrip kwam voor in de *rekenkunde* en in het *godsdiensonderwijs*.

De eerste keer was dat zestig jaar geleden, in 1947, op de Bewaarschool van de nonnen te Raamsdonksveer.

Overigens, de naamgeving 'Bewaarschool' geeft de functie van dit instituut duidelijker weer dan de, typisch Hollandse, egaliserende benaming 'groep 1'. Gelukkig is deze gekkigheid nog door geen van onze Europese burens overgenomen.

Op de Bewaarschool werden wij door nonnen vrijwel dagelijks theologisch onderricht in de belangrijkste feiten van de heilsgeschiedenis. Soeur Josephine legde ons uit dat er twee soorten oneindig zijn. Het Opperwezen (God) heeft geen begin en geen einde. Is dus *Oneindig*. Ons mensen bestaan, daarentegen, is slechts naar één kant oneindig. Wij hebben een begin, maar bestaan altijd voort. En dat heet dan *eeuwig*. De aarde als geheel, en de planten en dieren in het bijzonder, zijn eindig: Zij hebben een begin en een einde en dienen ons slechts tot lust en last. Benadrukt werd

dat hemel, en vooral ook de hel, eeuwig zouden duren. Ik nam mij toen heftig voor dat ik niet in de hel wilde komen. Op een nadere uitleg van de eeuwigheid van de hel kom ik zo dadelijk nog even terug.

Was dat soort *dagelijks* onderwijs niet een beetje moeilijk voor vijfjarigen? Hoor ik sommigen in de zaal zich afvragen. Ach welnee! Ik vermoed dat Soeur Josephine intuïtief deed wat wij hier aan de universiteit niet meer doen of niet meer durven, maar wel zouden moeten doen. Zij richtte haar onderwijs op de slimste bovenlaag! Dat was zeer prijzenswaardig van Soeur Josephine. Kinderen die nog niet aan hogere wetenschap toe waren, zaten er bij en moesten hun mond houden. Als ze dat niet deden werd er wat aan gedaan: Pratende mondjes werden rigoreus afgeplakt met een strip wit papier, ingesmeerd met dikke witte behangplak. Ondanks het feit dat ik bij Soeur Josephine, tijdens haar vele wetenschappelijke beschouwingen, aan haar lippen hing, zal het u niet verbazen dat ook mij deze gruwelijke mishandeling overkomen is. En, in die tijd had je nog geen *professionele hulpverleners*!

Na de Bewaarschool bezocht ik drie Lagere Scholen. Daar werd veel uit het hoofd geleerd: Overigens uitsluitend nuttige zaken waar je de hele rest van je leven iets aan hebt, zoals de tafels van vermenigvuldiging, de antwoorden op de 548 vragen van de Catechismus voor de Nederlandse Bisdommen. Van elk onzer vaderlandse provincies een rijtje van zo'n vijftien plaatsnamen, aan te wijzen op een blinde kaart. Voor een bovenlaag het Latijn van de Mis en een basiswoordenschat Frans vanaf de vijfde klas.

In die vijfde klas, nadat inmiddels de jongens die goed konden leren gescheiden waren van de overigen, kwamen de theologische en wiskundige begrippen betreffende het oneindige weer heel dicht bij elkaar.

De oneindig lange duur van de hellestraf werd ons andermaal uitgelegd. Ik wil U die uitleg niet onthouden. Stel je, om te beginnen, een blok graniet van een kubieke kilometer voor.

Tussen haakjes, inmiddels wisten wij heel goed wat een kubieke kilometer was. We hadden alles geleerd van maten en gewichten, uitgelegd door een onderwijzer, die zich weliswaar nog geen leraar mocht noemen, maar, ondanks dat, het zelf allemaal heel goed begrepen had. Hij kon niet alleen met maten en gewichten goed uit de voeten, maar wist ook schitterende dicteezinnen als "De moeder baadt het kind. Zij denkt: Baat het niet het schaadt ook niet", niet alleen te ver-

zinnen maar ook zonder fouten op te schrijven.

Goed, stelt U zich voor, U zit in de hel, tot Uw nek in een gloeiende oven, reikhalzend te kijken naar een granieten blok van een kubieke kilometer. Stelt U zich voor, eens in de duizend jaar komt een merel langs en strijkt met zijn mooie gele snavel één keertje langs dat blok. Welnu, als dat blok helemaal is afgesleten is er nog geen uur, geen minuut, geen seconde van de hellestraf voorbij! Daarover nadenkend kwam je, al griezelen, op het idee dat willekeurige kleine delen van de hellestraf toch net zo omvangrijk waren als het geheel. En dat komt heel dicht bij de wiskundige definitie van het begrip 'oneindig'.

In de vijfde klas werd ook nog flink gerekend. Er waren maar een stuk of vijf algemeen geldende *methodische* rekenrecepten: Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, staartdelen en rekenen met breuken. Daarnaast werden er ook nog wortels getrokken en ggd's en kgv's bepaald. Een randverschijnsel was een klein vakje *Hoofdrekenen* waar de kunstjes werden geoefend die tegenwoordig *uitsluitend* het rekenonderwijs op de basisschool bepalen. Voor meer hier over zie: Jan van de Craats [3]. Lees dat stuk vooral als u uw kinderen of kleinkinderen moet helpen bij het moderne rekengeklungel met 'happen nemen' en zo: Als je 80 door 26 moet delen dan neem je drie happen van 26 en dan heb je 2, de 'rest', over. Prima. Maar als je 8070 door 26 moet delen wordt het nemen van happen een hele organisatie die gegarandeerd in de soep loopt. Bij het uitvoeren van de klassieke staartdeling wordt het 'happen nemen' daarentegen perfect georganiseerd. Helaas is de staartdeling weg uit het onderwijs.

De ouderen onder u herinneren zich dat een staartdeling 'niet altijd uitkomt'. De rij cijfers aan de rechterkant loopt *oneindig* lang door. Omdat ik graag rekende had ik diverse malen geconstateerd dat zich na enige tijd een zich *oneindig* herhalend cijferpatroon voordoet:

$$\frac{1}{7} = 0, \underbrace{142857}_{142857} \underbrace{142857}_{142857} \dots$$

$$\frac{23}{38} = 0, \underbrace{6052631578947368421}_{6052631578947368421} \dots$$

Ik vroeg aan mijnheer Kleemans of dat altijd zo was. Hij dacht even na en gaf het, in de onderhavige context juiste antwoord: ja. Mijnheer Kleemans had, in het huidige tijdsge-richt gemakkelijk professor kunnen worden!

Als laatste spannende voorbeelden van ‘platonische identificatie van wiskunde met de werkelijkheid’, waar ik in mijn jeugd mee geconfronteerd ben, zou ik de godsbewijzen willen noemen. De godsbewijzen die wij in onze tienerjaren voor onze kiezen kregen, waren die van St Anselmus (1033-1109) en van St Thomas van Aquino (1224-1274). Deze werden ons overigens niet als wiskunde aangeboden. Pas later in mijn leven ben ik daar tegenaan gaan kijken als *wiskundige modellen*. Bij werken met wiskundige modellen dienen zich altijd twee fundamentele vragen aan:

1. Is de wiskunde in het model correct?
2. Correspondeert het wiskundig verkregen object met een werkelijk bestaand object?

Voor de Platonisch ingestelde middeleeuwer was het antwoord op de tweede vraag vanzelfsprekend bevestigend. En dat gold ook voor ons, 50 jaar geleden. Blijft over vraag 1.

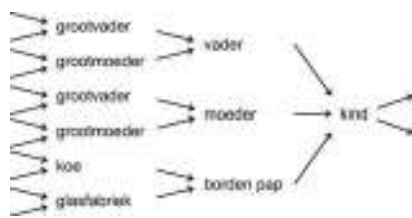
Het oorzakelijkheidsbewijs van St Thomas doet, even voor ingewijden, denken aan het Lemma van Zorn (waar ik als tiener natuurlijk nog niet van gehoord had). Ieder object wat je in je omgeving aantreft, inclusief je zelf, zit gevangen in een keten van oorzaken en gevolgen. Denk aan

Lineair geordende keten

... → grootmoeder → moeder → kind ...

Elk object staat tussen precies één oorzaak en één gevolg. Behalve natuurlijk aan een eventueel begin of eventueel einde van een keten. In het echte leven lopen de ketens allemaal door elkaar heen wegens meervoudige oorzaken. Denk aan

Partieel geordende keten



Het Lemma van Zorn laat ons weten dat je, om tot het bestaan van een eerste object, een beginobject, te besluiten, je ‘slechts’ hoeft na te gaan of *iedere* lineaire deelketen een eerste element heeft.

Helaas is eenduidigheid niet gegarandeerd, zodat er mogelijkheden tot polytheïsme blijven. Blijft de noodzaak te be-

wijzen dat iedere lineaire keten een begin heeft. Thomas beredeneert dat in de *Summa* als volgt: Stel dat er géén eerste oorzaak was, dan was er geen vervolgoorzaak en ook geen derde vervolgoorzaak, enzovoort. Kortom dan was er niets. Omdat wij wel ‘iets’ waarnemen moet er ‘een object’ aan het begin staan: de niet-veroorzaakte, alles-veroorzakende oorzaak (voor de originele tekst zie [1], I-Q.2-ART.3). Hier klopt iets niet, dacht ik, en ik herinner me levendig de didactisch-demagogische truc die de leraar gebruikte om mij dit toch aan te praten. Stel je voor, zo sprak deze, dat je ongeduldig bij een spoorwegovergang staat te wachten voor een eindeloos lange goederentrein die langzaam voorbij dendert. Elke wagon wordt voortgetrokken door de voorafgaande. In die zin is zo’n trein een lineair geordende keten. Waarom beweegt die trein? Het antwoord dat ie beweegt *omdat* ie oneindig lang is, is zo onbevredigend dat niemand die verklaring pikt. De trein is er en beweegt vanwege een eerste beweging: de locomotief.

Daar kon je het dan mee doen. Hoe dan, tenslotte, dit abstracte wiskundig vervaardigde opperwezen zijn nabij-oostelijke tirannieke eigenschappen heeft opgelopen, ook dat zit niet in het model.

Wiskunde als spel en als ritueel

Veel buitenstaanders denken dat wiskundigen erg van spelletjes houden, vooral van schaken. Zelf heb ik geen bovengemiddelde neiging naar *dat soort* spelletjes. Wel heb ik het beoefenen van de wiskunde zelf vaak ervaren als een spannend en opwindend spel. Die opwindende bezorgt mij, zelfs op mijn gevorderde leeftijd, soms nog een halve slapeloze nacht.

Wat zou je onder een *spel* moeten verstaan? Zo vraag je je dan af.

Als het om ‘spel’ en ‘spelen’ gaat kom je binnen het nederlandse cultuurgood onvermijdelijk Huizinga tegen. In 1938 verscheen *Homo Ludens, Proeve ener bepaling van het spelelement der cultuur*, Pandora Pocket 1997/Tjeenk Willink 1951. Huizinga’s zeer wel-luidende definitie van “Spel” is de volgende:

“Spel is een vrijwillige handeling of bezigheid, die binnen zekere vastgestelde grenzen van tijd en plaats wordt verricht naar vrijwillig aanvaarde doch volstrekt bindende regels, met haar doel in zich zelf, begeleid door een gevoel van spanning en vreugde, en door een besef van ‘anders zijn’ dan het ‘gewone leven’.” ([7] p47)

Merkwaardig is dat Huizinga in zijn schitterende boek met talloze voorbeelden uit al-

le culturen, nergens de wiskunde noemt als testcase of leidraad bij de opzet van zijn literair verwoorde theorie. Het woord wiskunde heb ik slechts twee keer kunnen vinden in zijn tekst. Op pagina 261 poogt hij wel, binnen twee bladzijden, ‘het spelgehalte der *moderne wetenschap* te determineren’. Hij vindt de moderne wetenschap niet binnen zijn spelbegrip vallen, immers “Het spel is tijdelijk, het loopt af en heeft geen enkel doel buiten zichzelf. Het wordt gedragen door een bewustzijn van blijde verpozing buiten de eisen van het gewone leven. De regels [...] van de wetenschap zijn niet, als die van een spel, eens voor al onwrikbaar. Zij wordt voortdurend door de ervaring gelogenstraft en wijzigt dan zichzelf [...] Wetenschap is ook polemisch” Hoe zit dat dan met de wiskunde? De wiskundige bewerkingen en de spelregels van de wiskunde zijn weliswaar niet geheel en al onwrikbaar maar lijken toch veel meer eeuwigheidswaarde te hebben dan veel regels en wetten van wetenschap en technologie. Bijvoorbeeld: De werking van een AM-radio-ontvanger laat zich met heel eenvoudige wiskunde beschrijven. Echter, de veranderingen in de technische realisatie van zo’n AM-ontvanger gedurende de laatste halve eeuw zijn gigantisch. In tegenstelling tot een halve eeuw geleden kan ik tegenwoordig geen radiotoestellen meer repareren.

Blijkbaar laat Huizinga zich er niet over uit of de wiskunde binnen zijn spelbegrip valt.

Naar mijn bescheiden mening valt de wiskunde *wel* onder Huizinga’s spelbegrip. Laten we die gedachte volgen en let dan in Huizinga’s definitie van ‘spel’ vooral op de zinsneede ‘met haar doel in zich zelf’. Die zou je lomp kunnen vertalen met: een spel, volgens de definitie van Huizinga gaat nergens over.

Ik heb vele jaargangen eerstejaars verbaasd doen opkijken door ze mede te delen: ‘De wiskunde is zo exact (kan zo exact zijn) omdat ze nergens over gaat’. Na van het beoogde en verhoopte schokeffect genoten te hebben nuanceerde ik dan: ‘De wiskunde is zo exact omdat ze nergens speciaal over hoeft te gaan, daarom is ze universeel bruikbaar’. Dames en Heren. Illustratiemateriaal voor deze bewering wordt meteen al geleverd door het rekenen met natuurlijke getallen en met breuken waarvelen in dit gezelschap op de lagere school nog mee zijn opgevoed: Optellen, de tafels van vermenigvuldiging, gelijknamig maken ...etc. Waar ging dat vroeger over? In het begin heel even over appels en pannenkoeken. Maar het werd al gauw een abstract spel.

Het kwam in niemands hoofd op om af-

zonderlijke sommetjes te maken voor kinderen die groentenboer, dan wel timmervrouw, notaris of ingenieur wilden worden.

Hoe anders gaat dat hier en nu op onze universiteit! Veel faculteiten wensen wiskunde in kontekst te behandelen. Dat is zoiets als notarissen met breuken leren rekenen aan de hand van het erfrecht. Ik vind dat erg onacademisch!

Ik pleit er voor om, ook aan deze universiteit, wiskundevaardigheden in 1e instantie kontekstvrij, uniform en op zichzelf staand aan te bieden. Gevolgd door toepassingen van alle faculteiten.

De trillingen van een draaibank bij Werktuigbouwkunde gehoorzamen vaak aan dezelfde differentiaalvergelijkingen als de trillingskringen in een radio-ontvanger. Zulke wetenswaardigheden mogen voor aspirant academici niet verborgen gehouden worden.

Sommigen zullen denken 'wat ouderwets' en 'dat deden ze vroeger'. Nou en....! Onze voorouders waren niet op hun achterhoofd gevallen!

De geschetste spelaanpak van het wiskundeonderwijs doet en deed de goede studenten uiteindelijk veel plezier. De belangrijkste redenen waarom ik een paar jaar geleden met het oude-dictatenproject [4] ben gestart zijn de vele ongevraagde loftuitingen van oudstudenten op ons oude uniforme wiskundeonderwijs voor alle faculteiten.

De keuze van de wiskundeonderwerpen in de hogere jaren ligt natuurlijk bij de faculteiten. Zij dienen zich echter wel te realiseren dat je geen villa kunt bouwen die uitsluitend uit een vrijzwevende speelzolder bestaat. Onder zo'n zolder moeten een paar paaltjes staan! Bouwkundigen begrijpen dit nog het beste, denk ik.

Om een spel goed te kunnen spelen moet je de regels paraat hebben. Ik betreur het dan ook zeer dat het moderne onderwijs het gigantische vermogen dat jonge mensen heb-

ben om zaken van buiten te leren zo schandelijk ongebruikt laat liggen.

Ik heb studenten die moeite hadden met, bijvoorbeeld, de definitie van 'limiet' te bevatten. Linksonder ziet u haar. Deze definitie is ook moeilijk. Vond ik ook, vroeger. De mensheid heeft dat ook pas honderdvijftig jaar geleden verzonnen. Maar... leer die tekst van buiten. En je zult zien dat het inzicht 'is dat alles' plotseling toe kan slaan. Uit eigen ervaring weet ik dat je dat kan gebeuren op een saai feestje, of in nog spannender omstandigheden, terwijl je, echt, met totaal iets anders bezig bent. Dat wonder gebeurt natuurlijk alleen maar als je iets in je hoofd hebt gestopt.

Wiskunde als omgangstaal in wetenschap

Aan het begin van deze rede hebben we de beroemde Maxwellvergelijkingen getoond. Deze vergelijkingen beschrijven alles wat over het (macroscopische) elektromagnetisme te weten valt. Een aanzienlijk deel van de wiskundige verrichtingen van de negentiende eeuw zijn overigens nodig om die wetenswaardigheden er uit te krijgen. Een vaak gestelde vraag is: kun je de eigenschappen van het elektromagnetische veld niet 'gewoon' in 'normale mensentaal melden'? Het antwoord is nee! Die eigenschappen kunnen alleen ten volle worden medegedeeld en begrepen in de *kunsttaal* die wiskunde heet. Je kunt er wel veel over en omheen kletsen. Dat wordt veel gedaan en dat helpt ook wel wat voor het begrip. Maar kwantitatief kun je daar niks mee. Heel graag citeer ik Heinrich Hertz nog een keer, vrij vertaald: de elektromagnetische theorie bestaat uit niets meer en niets minder dan de Maxwellvergelijkingen. Mensen met een wat hooghartige houding jegens de wiskunde hebben mij wel eens toegevoegd: Wiskunde is toch alleen maar boekhouden!

Is Wiskunde een vorm van boekhouden voor exacte wetenschappen? Dat is het óók. 'Correct boekhouden' is erg belangrijk. Toch is het slechts een gering en niet erg spannend deel van de Wiskunde! Wiskundigen raken niet opgewonden van formule-orgieën. Integendeel, het zijn veeleer de niet-wiskundigen die daar dol op zijn.

Wat is wiskunde dan meer dan boekhouden? Het gaat in de Wiskunde om *verbanden* tussen concepten en niet om *absolute betekenissen* van concepten. Wiskunde is het gereedschap bij uitstek om, enerzijds, zaken die niks met elkaar te maken hebben ook uit elkaar te houden, en anderzijds, zaken die oppervlakkig niks gemeen lijken te hebben onder één noemer te brengen. Wiskunde schept orde.

Maxwellvergelijkingen in klassieke analyse-taal

$$\mu \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} = 0$$

$$\mu \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} = 0$$

$$\mu \frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial H_3}{\partial y} + \frac{\partial H_2}{\partial z} = -J_1$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial z} + \frac{\partial H_3}{\partial x} = -J_2$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_3}{\partial t} - \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} = -J_3$$

$$\frac{\partial(\varepsilon E_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_3)}{\partial z} = \rho$$

$$\frac{\partial(\mu H_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu H_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H_3)}{\partial z} = 0$$

Laten we de strijd aanbinden met die boekhoudopvatting en nog eens naar de Maxwellvergelijkingen kijken. Maxwell zelf schreef zijn vergelijkingen helemaal uit (cf [8]). Wat vereenvoudigd en geordend zag er dat rond 1864 uit zoals te zien is in het kader hierboven. Maxwell gaf hier de schitterende uitleg bij. Later in de negentiende eeuw werd dit opgeschreven in *vectoranalyse-taal*, de manier waarop onze studenten tot op heden met de Maxwellvergelijkingen geconfronteerd worden.

Je kunt tegen deze vergelijkingen aankijken als een stenografische weergave van de vorige set. Een boekhoudtruc dus. Er is echter veel meer aan de hand. De ruimtelijke variabelen x, y, z zijn verdwenen en vervangen door de operaties *rotatie* en *divergentie*. Deze maken maken de onderliggende Euclidische meetkunde van de 'ruimte' expliciet en vergemakkelijken overgang op andere (orthogonale) coördinaten zeer. Alleen de tijdsafhankelijkheid t zit er nog 'los' in.

Maxwellvergelijkingen in vectoranalyse-taal

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{H} = -\mathbf{J}$$

$$\text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \quad \text{div}(\mu \mathbf{H}) = 0$$

Er is echter nog een latere versie, in *differentiaalvormtaal*. Die oogt typografisch wel erg simpel.

Een functie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto f(x)$ heet *continu* in een punt $a \in \mathbf{R}$, als

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbf{R} :$$

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

In woorden:

Voor ieder getal ε groter dan 0 bestaat er een getal δ groter dan 0 zodanig dat de afstand tussen de waarden $f(x)$ en $f(a)$ gegarandeerd kleiner is dan ε indien de afstand tussen x en a kleiner dan δ genomen wordt.

Maxwellvergelijkingen in differentiaalvormtaal

$$\begin{cases} dF = 0 \\ d * F = S \end{cases}$$

Het kunnen lezen van deze formules vergt wel enige initiële inspanning. Je moet de differentiaalvormtaal leren en ook wat meer van de taal van de abstracte algebra (voor een eenvoudige afleiding zie [5]). In deze differentiaalvormtaal worden tijd en ruimte op gelijke voet behandeld. De $*$, 'Hodge-afbeelding', stelt de meetkunde van de ruimte-tijd voor. Ook tegen deze versie kun je aankijken als een nog verder gaande stenografische versie van de voorafgaanden. Beide vorige voorstellingen kunnen er 'boekhoudkundig' uit afgeleid worden.

Hier is echter nog veel meer aan de hand! De speciale relativiteitstheorie zit er automatisch in. De laatste voorstelling kan zelfs voor elektromagnetische verschijnselen in een gekromde 'ruimte-tijd' geïnterpreteerd worden! De weergave in willekeurige kromlijnige coördinaten wordt een fluitje van een cent. Het *allerspannendste* is echter dat de onderhavige vergelijkingen de *allereenvoudigste* zijn die je *in deze taal* op kunt schrijven! Als je eenmaal de goede taal gevonden hebt, dan blijkt de natuur de gemakkelijkste weg te kiezen. De geniale Maxwell, die de oervorm van deze formules heeft bedacht, had van dat alles nog geen weet! Mede omdat hij zijn vergelijkingen in een andere, primitievere wiskundetaal opschreef. Het citaat van Hertz aan het begin van mijn betoog krijgt hiermee een nog diepere lading!

Als wiskunde een taal is, kun je er dan ook gedichten in schrijven? Jazeker! We hebben er net een gezien. De Maxwell vergelijkingen vormen een wonderschoon gedicht. Maar de twee regels rijmen niet, zullen sommigen zeggen. Inderdaad ziet het er wat oneerlijk uit: De ene formule krijgt een mooie letter S aan de rechterkant en de andere een 0 , helemaal niks dus. We kunnen de formules eleganter en symmetrischer maken door een aanvulling aan te brengen die ik hier alleen in de laatste genoemde differentiaalvormversie geef:

Maxwellvergelijkingen met magnetische monopolen

$$\begin{cases} dF = K \\ d * F = S \end{cases}$$

Helaas wil de natuur deze mooiere formules niet. De toegevoegde letter K betekent dat magnetisme in 'losse' noord- en zuidpolen voor kan komen. Net zoals er in de natuur losse elektrische ladingen van het $+$ en $-$ type voorkomen. Maar in het echt komt een magnetische noordpool altijd in combinatie met een magnetische zuidpool voor. Iedereen die in zijn jeugd fietsdynamo's heeft gesloopt en heeft geprobeerd, met een botte ijzerzaag, de noord- en zuid-pool van de magneet van elkaar te scheiden, weet dat. Wat betreft het wiskundeonderwijs voor die faculteiten aan deze instelling die wiskunde nodig hebben zou ik primair willen pleiten voor het leren van correct wiskundig taalgebruik. Daarmee bedoel ik vooral *het correct benoemen* van de gebruikte wiskundige objecten als: getallen, functies, (on-)afhankelijke variabelen, vectoren, vectorvelden, matrices, tensoren, ... Natuurlijk voorzien van motivatie en heel veel oefenen. De subtiliteiten van wiskundige bewijzen kunnen eventueel later. Laat ik een paar ervaringen melden die dat motiveren.

Beginnende eerstejaars, die de intelligentie uit de ogen straalt, hebben vaak geen enkel benul meer van 'rekenen met letters'. Ze vragen je: Waarom rekenen jullie toch met a , x , s , α ? Waarom niet 'gewoon' met getallen. Mijn antwoord in dat stadium, wij willen zien waar alles blijft, dringt heel langzaam of niet door. De benodigde incubatieperiode voor deze nieuwe levensvisie had in middelbare schooltijd dienen te vallen. Lering: de student moet, zonder grafische rekenmachine, bijgebracht worden wat 'getallen', 'functies' en vectoren zijn. Ook dat dit onderling totaal verschillende objecten zijn. Niet zomaar typografische schroothopen waar je wat in rommelt.

Het werken met niet nader gespecificeerde getallen, functies, identiteit, ongelijkheid, vectoren, vectorvelden moet intensief getraind worden aan de hand van voorbeelden.

Inzicht gaat niet vooraf aan vaardigheden! Het groeit er samen mee op. Wij moeten, vanaf het begin, op geen enkele manier meer toegeven aan 'concreet rekenen'. Numerieke resultaten komen helemaal op het eind. Pas dan mogen getallen worden ingevuld.

Bij examens loop je aan tegen een totale afwezigheid van het functiebegrip. Een vijftienjarige timmermansleerling van vijftig jaar geleden zou zich voor het volgende schamen.

Opgave: Vind een x zodat $\sin x = 1$.

Antwoord van een student: $x = \frac{1}{\sin}$.

Geïnfecteerd door het hollandse welzijnswerkersvirus probeer je van ganser harte hier iets waardevols in te vinden. En dat lukt zowaar. Via de Amerikaanse calculusboeken die erg in de mode zijn, en waarvan het gebruik ons dus door de faculteiten wordt opgedrongen. Goedmoedig denk je dan: De student bedoelde natuurlijk, op z'n Amerikaans,

De student bedoelt: $x = \sin^{-1}(1)$.

Wat ik echter wil zien is, tenminste, een van de vier: $x = \sin^{-1}(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Mijn suggesties voor het lagerejaars wiskundeonderwijs aan de Technische Universiteit Eindhoven zijn de volgende:

1. Breek meteen, vanaf het begin, radicaal met de 'wiskunde'-gewoonten van de middelbare school. Richt je op correct wiskundig taalgebruik. Schaf die zware Amerikaanse tekstboeken af.
2. Gebruik een korte uniforme tekst, niet meer dan een A4-tje per week, waarin concepten en notaties efficiënt staan samengevat.
3. Laat *iedereen* kennis maken met eenvoudige wiskundige toepassingen van *alle* faculteiten.
4. Verstrek stevig oefenmateriaal en examineer over veel grotere porties dan thans. Sta eventueel toe dat één *eigenhandig beschreven* A5-je meegenomen mag worden naar het examen.

Deze punten zal ik stuk voor stuk toelichten.

1. Hier heb ik al over gesproken. Mede door de grote rol die de computer en computer-algebra speelt is bezinning op correct wiskundig taalgebruik meer nodig dan ooit.

Commerciële uitgevers overspoelen ons met hun 'producten'. Tot voor kort had ik zowat een kubieke meter Amerikaanse calculus- en lineaire algebra-boeken op mijn kamer. De te behandelen stof staat er veelal krakkemikkig homeopathisch verdund over meer dan duizend pagina's. De sommetjes zijn te onnozel. Veel studenten hebben grote moeite met het gebezigde engels.

2. Een korte tekst noodt meer tot langer nadenken over concepten, dan een lange. Verwijs, voor degenen die er het fijne van willen weten, voor moeilijke mathematisch-technische details naar boeken (op internet). Een mooie oefening voor studenten zou zijn om in formulevoorstellen uit het eigen vakgebied de fei-

telijke wiskundeconcepten te benoemen. Zoiets als het taalkundig en redekundig ontlede ooit.

3. Dit deden we vroeger met veel succes. Draagt kolossaal bij aan de *academische* vorming van onze studenten.
4. Als we weer over ouderwets grote porties gaan examineren dwingt dat de student tot een betere verwerking en ordening van de stof. Te denken valt aan, bijvoorbeeld, één combinatievak calculus plus lineaire algebra per semester.

Nogmaals: ik streef geen gedwongen winkelnering na van allerlei verplichte wiskundige subtiliteiten. Ik zou niet durven. De karikaturen vliegen me al om de oren.

Studenten mogen echter best weten dat een afgeleide veel meer dan een raadselachtige boekhoudtruc is die x^4 in $4x^3$ omtovert. Differentiëren is onderdeel van een taal die spreken over bètawetenschappelijke zaken mogelijk maakt!

Ook bij moeilijke fundamentele vakken van de faculteiten zou de moeite genomen moeten worden eerst wat te doen aan elementaire wiskundige concepten. Schitterende vakken, zoals bijvoorbeeld de thermodynamica, die voor de opeenvolgende studentengeneraties buitengewoon duister zijn geweest, kunnen daardoor gaan schitteren van schoonheid en helderheid.

Nostalgieisch nawoord

Ik behoor tot een buitengewoon gelukkige generatie. Onze ouders hebben economische crises en oorlog meegemaakt. Wij, daarentegen alleen maar groei in welvaart en mogelijkheden. Weliswaar waren we in onze tienerjaren, naar huidige normen gemeten, straatarm. Maar daar hadden we geen weet van. Je had veel tijd om allerlei intellectuele zaken te verwerken. Geen bijbaantjes. Geen televisie. Geen hectiek. Voor begaafde jonge mensen van mijn generatie was er geen enkele financiële belemmering meer om te gaan studeren. Als je ouders niet konden of niet wilden betalen kreeg je een renteloos voorschot. En als je

hoge cijfers behaalde werd dat ook nog kwijt gescholden.

Over de hoogte van de bedragen moet U zich overigens geen illusies maken. Ik kreeg een volledige beurs van 2400 gulden per jaar. Zo'n 1100 Euro. Een beetje net-werkende jongere besteedt dat thans aan telefoneren.

Aan toelatingseisen werd evenwel strikt de hand gehouden. Met een diepe onvoldoende voor Frans kon je niet naar de universiteit.

Omdat ik nooit zo goed wist wat ik precies wilde heb ik nogal uiteenlopende studies gedaan en ook afgemaakt. Ik heb in vele verschillende weiden mogen grazen en dat heeft me een gelukkig mens gemaakt.

Wat de bètawetenschappen betreft had ik na enige tijd genoeg van elektrotechniek en stapte over naar natuurkunde. Weer enige tijd later stortte ik mij op de wiskunde. Formeel bleef ik bij natuurkunde omdat ik, als jonge twintiger, de wiskundeomgeving maar grijs en saai vond. Bovendien trof ik bij wiskunde geen maoïstische vriendjes waar ik ruzie mee kon maken.

Ik ben zo oud dat ik nog door de koningin in mijn ambt benoemd ben. Een koninklijke benoeming betekende, formeel, volstrekte onafhankelijkheid in zake onderwijs en onderzoek. Eigenlijk zoals rechters onafhankelijk zijn. Eind zeventiger jaren stond zo'n koninklijke benoeming eigenlijk al op gespannen voet met de toen heersende nieuwe wet op het hoger onderwijs, de Wet op het Universitair Bestuur (WUB). Het prettige anachronisme 'kroondocenten' is echter pas in de tachtiger jaren opgeheven. Een goede wet was dat overigens, die WUB. Ik denk met heimwee en waardering terug aan onze uitstekende faculteitsraad. Toen nog een machtig orgaan dat volledige openheid verschafte en dat individuen, ongeacht rang of stand, tot de orde kon roepen. Besturen was nog een niet al te omvangrijke taak: De eerste keer dat ik vice-decaan van de faculteit was kreeg je daar een halve dag voor op de werkverdeling. En dat kon ook gemakkelijk.

De tweede keer dat ik vice-decaan was, za-

ten we in een reorganisatie. In zo'n situatie zijn het niet de nobelste eigenschappen van de mensen die boven komen drijven. Deze episode eindigde voor mij in een plaatsvervangend decanaat dat gelukkig (voor iedereen) maar vier maanden duurde. De reorganisatie binnen de faculteit leidde vooral tot heel veel weggegooid geld en heeft geen navolging gevonden bij andere faculteiten.

Bij het onderzoek met mijn promovendi had ik, en heb ik, een grote fascinatie voor mathematische fysica. Voor de goede orde, er is een subtiel maar wezenlijk verschil tussen theoretische natuurkunde en mathematische fysica. *Theoretische natuurkunde* ziet er typografisch uit als wiskunde, maar is het vaak niet omdat de fysische concepten *wiskundig* niet helder zijn en 'analogie-redeneringen' de plaats innemen van wiskundige bewijzen. Uiteindelijk telt daar de tucht van experimentele verificatie, maar zeker niet altijd. Het is vaak ook een soort suggestieve filosofie. In de *mathematische fysica* gaat het om wiskundige formuleringen van stukken natuurkunde. Daar geldt in ieder geval de tucht van de wiskunde en worden wiskundige formuleringen en bewijzen wel op prijs gesteld. Je zou de rol van de mathematisch fysicus, of mathematisch technicus, kunnen vergelijken met die van een cultureel antropoloog. Beide kijken, hevig geboeid, naar de rituelen van een wilde stam en proberen daar iets bij te bedenken wat in hun straatje past en wat ze in hun taal kunnen formuleren. Of de 'wilden' daar altijd gelukkig mee zijn, dat blijft een spannende vraag. Vaak reageren ze wat korzelig, maar op den duur lijken ze er zich toch wel iets van aan trekken!

Ik ben erg gelukkig geweest met meer dan twintig goede promovendi en evenzovele goede afstudeerders. Ik ben hun veel dank verschuldigd. Het is de wisselwerking met bevlogen, begaafde jonge mensen, bij onderwijs en onderzoek, die zoveel aan mijn eigen wetenschappelijke vorming heeft bijgedragen. Het is ook *die* wisselwerking die ik de komende tijd het meest zal gaan missen. 

Referenties

- 1 St Thomas Aquinas, *The Summa Theologica*, First Part Q.2 ART.3. Translation by Laurence Shapcote, ISBN 0-85229-531-6
- 2 Janne Brok, *An analytic approach to electromagnetic scattering problems*, Proefschrift TUD 28 juni 2007.
- 3 Jan van de Craats, 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen', *Nieuw Archief voor Wiskunde* nr.2, juni 2007.
- 4 J. de Graaf, *Tensorrekening en Differentiaalmeetkunde*, Appendix H. www.win.tue.nl/~degraaf
- 5 J. de Graaf, *Wiskundedictaten 1956-1982*, TU/e 2006. Bevat 197 wiskundedictaten, opgavenbundels en boek, ca 25000 pp, te bestellen via www.ufeindhoven.nl.
- 6 Heinrich Hertz, *Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität*, Tagebuch September 1889.
- 7 Johan Huizinga, *Homo Ludens*, Pandora Pocket 1997. Ontleend aan de Tjeenk Willink uitgave van 1951.
- 8 James Clerk Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, 1873.

Janneke van den Boomen
Ruben van den Brink
Dion Coumans
Klaas Landsman
Daan Wanrooy

*Institute for Mathematics, Astrophysics
and Particle Physics (IMAPP)
Radboud Universiteit Nijmegen, Toernooiveld 1
6525 ED Nijmegen
landsman@math.ru.nl*

A random walk down Wall Street

Al jaren organiseert de Radboud Universiteit Nijmegen een wiskundetoernooi voor scholieren. Het toernooi staat open voor maximaal vijfhonderd scholieren die het in teams van vijf tegen elkaar opnemen. In 2007 waren, met steun van ABP, de prijzen bijzonder aantrekkelijk: de twee beste teams wonnen een reis naar New York. Daar konden zij zich vergapen aan de Haute Finance en wachtte hen een verrassing die het Empire State Building deed verbleken.

Het eerste Nijmeegse wiskundetoernooi vond plaats in 1992 en op 21 september 2007 was de Radboud Universiteit voor de zestiende opeenvolgende keer het toneel van deze tiantaantjesstrijd. Het maximum aantal van vijfhonderd deelnemende scholieren werd binnen enkele jaren bereikt en vastgehouden. Ook in de jaren waarin het aantal eerstejaars wiskundestudenten op de vingers van twee handen te tellen was, kwam een enthousiaste groep docenten uit het hele land trouw met hun leerlingen naar Nijmegen voor hét wiskundige dagje uit van Nederland. Een beker choco, een krentenbol en 28 opgaven. Iedereen gelukkig, toch?

Van t-shirts tot New York

Iedereen? Om te beginnen was het opvallend dat men van de deelnemende scholieren vrijwel nooit iemand terugzag in de collegebanken. Vervolgens bleek uit de schrikbarende slechte prestaties van sommigen bij de individuele wedstrijd (standaard behaalde een kwart van de scholieren nul van de honderd

punten) dat ook de kleinere knobbels wel te porren zijn voor zo'n toernooi. Niet dat zij door hun score veel misten: de prijzen bestonden tot en met 2005 uit een boekje, een puzzeltje of een t-shirt. Ofschoon werving nooit tot de primaire doelstellingen van het toernooi heeft behoord, moesten we als nieuwbakken organisatoren in 2006 toch concluderen dat niet alleen een behoorlijke groep leerlingen maar ook het imago van de wiskunde zelf op het toernooi niet al te veel punten scoorde.

Hedendaagse oplossing: het toernooi moest gepimpt worden. We wilden een bijdrage leveren om te komen tot een beter klimaat, waarin wiskunde (om maar te zwijgen van de keuze voor een wiskundestudie) niet het onderwerp van onbegrip of zelfs spot is, maar juist wordt gewaardeerd, bewonderd en aangemoedigd. Dat klimaat is er momenteel al lermint. Stel je maar eens een scholier voor die, schuchter en aarzelend, voor het eerst zijn voorkeur voor de wiskunde uit of zelfs het voornemen om dit vak te gaan studeren wereldkundig maakt. De kans is groot dat zijn

publiek daarbij niet uit wiskundigen bestaat, maar uit familie en vrienden, of misschien ook een schooldecaan. Van een warm onthaal kan dan geen sprake zijn. Deze mensen weten namelijk zo weinig van wiskunde, dat ze, om zich toch een houding aan te meten, terugvallen op een aantal stoffige vooroordelen: "Goh, lijkt me erg moeilijk!" "Maar wil je dan leraar worden, of professor soms?" "Wiskunde? Daar was ik vroeger zo slecht in, ik heb nog steeds nachtmerries over het eindexamen!" Enzovoort. Je moet als wijfelende scholier dan wel erg sterk in je schoenen staan om je na al dit goedbedoelde advies zelfs maar in te schrijven voor een voorlichtingsdag op de universiteit.

Daarmee was het nieuwe doel van het wiskundetoernooi (en van vele van onze andere uitingen van wiskunde-PR) bepaald: het verbinden van de naam wiskunde aan belangrijke, interessante, coole, leuke en mooie dingen, zowel onder de scholieren zelf als juist ook onder hun bovengenoemde klankborden. Idealiter zou iedereen aan wie onze denkbeeldige scholier zijn liefde voor de wiskunde bekend, onmiddellijk een fascinerende relatie tussen wiskunde en zijn persoonlijke interesses weten te vermelden: "Wauw! Wist je dat een kerel op Wall Street steenrijk is geworden met een wiskundig beursmodel?" "Het schijnt

dat de veiligheid van ons elektronische betalingsverkeer berust op getaltheorie!" "Ik heb me laten vertellen dat de wiskundige grondslag voor mp3-codering al bijna tweehonderd jaar geleden bedacht is!" En zo kunt u, lezer van dit blad, nog wel even doorgaan. Vandaag u, morgen de schooldecaan en overmorgen de familie en vrienden van onze scholier.

Terug naar het Nijmeegse wiskundetoernooi. Uiteraard wilden we een wedstrijd van hoog niveau neerzetten, maar daarnaast moesten de vijfhonderd scholieren een onvergetelijke dag meemaken. Dat werd bereikt door luxe catering, swingende muziek, bijzondere gasten, indrukwekkende multimedia, uitdagende wedstrijden, en tenslotte waanzinnige prijzen! In 2006 begonnen we dankzij een aantal kleine sponsors nog relatief bescheiden met een reis naar Cambridge en een paar iPods, in 2007 konden we met financiële steun van de nieuwe hoofdsponsor ABP een vierdaagse trip naar New York voor tien scholieren in de etalage zetten. De opzet was beide keren om de winnende teams een prijs aan te bieden die uniek is in de zin dat die niet ook zelf gekocht had kunnen worden en bovendien een duidelijke link met de wiskunde

heeft, bij voorkeur ook met het toernooi. Wat dat laatste betreft is de traditionele individuele wedstrijd in de middag sinds 2006 vervangen door een tweede teamwedstrijd waarin een maatschappelijke toepassing van de wiskunde centraal staat; de ochtendwedstrijd is als vanouds de estafette, waarin teams in een race tegen de klok wiskundige opgaven en puzzeltjes moeten oplossen [1]. Om het teamaspect te benadrukken heet de middagwedstrijd *Sum of Us*.

In 2006 was het thema van *Sum of Us* cryptografie. We sloten daarbij aan door de winnende scholieren in Cambridge een speciale workshop over het ENIGMA-project uit de Tweede Wereldoorlog aan te bieden. De link met wiskunde in het algemeen was evident in Cambridge en uitte zich onder meer in exclusieve bezichtigingen van de kamers en boekencollectie van Isaac Newton in Trinity College, het oudste gedrukte exemplaar van de *Elementen* van Euclides in St John's College, en de theetuin in Grantchester waar Bertrand Russell ooit stamgast was.

Wall Street aan de Waal

We schakelen over naar *Sum of Us* anno 2007.

De gigantische sporthal van de Radboud Universiteit is na een nacht werk omgetoverd in een virtuele beurs, waar de scholieren kunnen handelen in aandelen en opties van Apple, BMW, Nokia, H&M, Shell, Heineken, Nestlé, Unilever, Philips en TomTom. Beginnend met een startkapitaal en een aandelenportefeuille is het doel hetzelfde als op de echte beurs: word zo rijk mogelijk. Al is in dit geval ook het geld virtueel, de deelnemers krijgen door hun strategische beleggingen wel uitzicht op een echte reis naar New York!

Om het verloop van de aandelenkoers te schatten verschijnen nieuwsflitsen op grote projectieschermen en komt elke ronde een nieuwe editie van de *Radboud Financial* uit, een net als de *Financial Times* op roze papier gedrukte krant met het laatste nieuws omtrent de tien bedrijven. Verder kan koersgevoelige informatie ingekocht worden, waarmee de scholieren zich dieper in *Wall Street* begeven dan zij wellicht beseffen: zie de gelijknamige film! Op deze manier moeten ze intelligent en kwantitatief reageren op zaken als de vondst van een USB stick met geheime plannen van Apple (deze bleek in een volgende nieuwsflits dan weer vals te zijn), een en-



Fotograaf: Dick van Aalst



Columbia University

Fotograaf: Duncan de Fey

quête over mogelijke invloed van het naderende rookverbod in de Nederlandse horeca op de consumptie van bier, of de beëindiging van de samenwerking tussen Douwe Egberts en Kiosk. De scholieren hadden van tevoren een informatiepakket ontvangen, samengesteld in samenwerking met wiskundigen van ABP, waarmee ze zich alvast konden verdiepen in de handel en prijsbepaling van opties.

De middag is opgedeeld in vier rondes. Elke ronde bepalen de teams opnieuw hun handelsplan: willen we aandelen van BMW? Of toch maar opties in H&M? Hoe zou het aflopen met de bestuurscrisis bij TomTom? Wordt de nieuwe telefoon van Nokia een succes? Overal worden heftige discussies gevoerd, berekeningen gedaan en risicoanalyses gemaakt om tot een weloverwogen beslissing te komen. De wensen worden genoteerd en opgehaald door tientallen meehelpende wiskundestudenten. Zij voeren alle gegevens in de computer in, zodat alles centraal verwerkt kan worden. De nieuwe aandelenportefeuilles rollen razendsnel uit de printer en er start een nieuwsflits. Er klinken vreugdekreten, maar ook teleurstellingen: de koers van Nestlé schiet de lucht in, maar de aandelen van Apple zijn gekelderde. Veel tijd om hier bij stil te staan is er echter niet: een nieuwe ronde begint en er moet wederom gespeculeerd en gehandeld worden.

Na vier rondes sluit de beurs en is er een nieuw onderwerp van speculatie: wie winnen

de reis naar New York? De studenten voeren de laatste gegevens in en de computer berekent alle eindkapitalen. Het Stedelijk Gymnasium Breda wint overtuigend *Sum of Us* en stijgt daarmee in het eindklassement naar de eerste plaats. Het Barlaeus Gymnasium uit Amsterdam stond na de Estafettewedstrijd al gedeeld eerste en wist met een degelijke handelsstrategie uiteindelijk op de tweede plaats te eindigen. Samen reizen ze half oktober af naar de Big Apple, begeleid door de auteurs van dit artikel.

No shorts, T-shirts, flip flops or tank tops

De nacht voor vertrek beseffen wij dat iets groots op ons ligt te wachten. Maar eerst wacht ons nog een ontroerend tafereel op Schiphol. Tien pubers die zich ongemakkelijk voelen bij de zorg van hun ouders, maar het toch wel fijn vinden dat deze er nu zijn. Het is de scholieren af te zien dat ze gespannen zijn, iets dat ook de begeleiders niet vreemd is. Zijn alle paspoorten in orde? Het kleinste scheurtje kan leiden tot weigering aan de incheckbalie, zoals al op reis naar Cambridge was gebleken. Iedereen komt er door. Is het kledingadvies duidelijk geweest, dat we op last van een aantal van de financiële bedrijven die we gaan bezoeken hadden rondgemaild? Of draagt toch iemand shorts, t-shirt, flip flop of tank top? Integendeel, een zwart pak met das van pappa is geen uitzondering. Maar plotseling herinnert iemand zich als echte

wiskundige een passer bij zich te hebben, een hele dure nog wel. Lichte paniek breekt uit en een optimale strategie wordt bediscussieerd. Onwetendheid veinzen of de passer vrijwillig tonen, waarna deze zeker in beslag zal worden genomen? Er wordt gewed of de passer Amerikaans grondgebied zal zien of niet. Een onwetende blik en een korte discussie met het beveiligingspersoneel later mag de passer gewoon het vliegtuig in. Ideeetje voor Al Qaida.

In de bus van Newark naar ons Hostel bij Central Park, als de skyline en later de straten van de stad der steden zich als een film op de ruit presenteren, realiseren wij ons: "We zijn in New York." Een onwerkelijk gevoel. Zo vaak zagen we deze beelden op een scherm dat we bijna niet anders kunnen denken dan dat het ook nu een projectie moet zijn. Pas als onze voeten de stoep voor ons hostel raken kunnen we ons van dit gevoel losmaken.

Vanaf dat moment gaat het snel. Je kunt niet anders verwachten wanneer je vier dagen in een stad bent die nooit slaapt. Bear Stearns, ABP Investments, Ground Zero, New York Mercantile Exchange, New Holland Capital, Renaissance Technologies. Peperduur diner in ronddraaiend restaurant boven Times Square. Eindeloze metroritten. Wegschieten de kakkerlakken in *budget* kamer. Harlem. Columbia University. United Nations. Perzische tapijten in grootste warenhuis ter wereld. Reuzenrad in grootste speelgoedwinkel

ter wereld. Grootste dinosaurusskelet in het *American Museum of Natural History*. Alles het grootste. Ferry naar Staten Island. Oplichtende skyline van Manhattan. Vrijheidsbeeld. Museum of Modern Art. John Lennon Memorial. Laatste hamburger bij MacDonalds op JFK. Thuis. Te snel.

Bear

De handelsbank *Bear Stearns* is in Nederland nauwelijks bekend, maar is een grote speler op Wall Street: met een eigen kapitaal van 10 miljard dollar worden dagelijks posities van zo'n 200 miljard ingenomen. Ondanks deze enorme 'leverage' op de investeringen en de daarmee gepaard gaande risico's had *Bear* sinds haar ontstaan in 1923 nog nooit zelfs maar een kwartaal met verlies afgesloten (tot het laatste kwartaal van 2007, toen de bank nog meer dan andere leed onder de hypotheekcrisis in de USA). De sleutel van dit succes ligt volgens Kan Ahluwalia, een gepromoveerd theoretisch fysicus die ondanks zijn jeugdige aanblik al vele jaren *Head Risk Management for Europe and Asia* blijkt te zijn, in het uitgekienende risicomanagement van *Bear* — impliciet een schouderklopje aan zichzelf.

Bovendien wordt zeer veel aandacht aan de recrutering besteed, zoals ook bij alle andere bedrijven die we bezoeken. Handelaren — we mogen ze kort voor het sluiten van de beurs in grote getale op de *trading floor* aan het werk zien — hebben bij *Bear* veel vrijheid maar ondergaan een keihard systeem van natuurlijke selectie: wie het goed doet verdubbelt zijn salaris en wie ondermaats functioneert vliegt eruit. Dit geldt uiteraard ook voor de *quants*, de *quantitative analysts* die de risicoanalyse uitvoeren en daarnaast nieuwe investeringsinstrumenten (zoals exotische opties) bedenken en van een prijs voorzien [4]. Het is althans zo dat deze *quants* al bij hun sollicitatie een achtergrond in de financiële wetkunde moeten hebben: integendeel, het mogen ook astronomen of experimenteel fysici zijn, als ze maar niet schrikken van een grote hoeveelheid data en iets van toegepaste wetkunde weten (en dan met name van kansrekening, statistiek en partiële differentiaalvergelijkingen). Het is een aanbeveling om gepromoveerd te zijn, omdat je dan hebt bewezen zelfstandig te kunnen werken aan iets moeilijks, te kunnen doorzetten en de diepte in te kunnen duiken. Dit verhaal wordt bevestigd

door de andere financiële instellingen die we bezoeken.

Een dapper lid van onze groep vraagt nog wat men zo verdient bij *Bear*, en, na een ontwijkend antwoord ('niet slecht'), wat men eigenlijk aan de maatschappij bijdraagt. Het antwoord op die laatste vraag wordt wél zonder aarzeling gegeven: bedrijven als *Bear* halen het risico uit de markt. Een olieboer wil bijvoorbeeld gewoon een stabiele prijs voor zijn olie. Fluctuaties vangt hij op door futures te kopen. Maar iemand moet het risico dragen. Dat doen de snelle jongens van het grote geld in Manhattan. Door heel veel riskante posities met elkaar te combineren, spelen ze uiteindelijk echter toch op safe. En verdienen zakken vol geld.

Op pad met ABP

ABP, hoofdsponsor van het wiskundetoernooi 2007, is met een belegd vermogen van meer dan 200 miljard euro één van de top-drie pensioenfondsen ter wereld. Maar het is al lang niet meer de suffe club in Heerlen die al ons spaargeld in staatsleningen belegt. Integendeel, het aandeel daarvan is afgenomen van 96% in 1970 tot 35% nu, en via kantoren op



Fotograaf: Duncan de Fey



Jim Simons

Fotograaf: Duncan de Fey

Schiphol, in Hong Kong en in New York en een palet van innovatieve beleggingsstrategieën is het de afgelopen jaren een begrip in de *Haute Finance* geworden.

In New York bezoeken we *ABP Investments US* en *New Holland Capital*, een afgesplitst onderdeel dat beleggingen van ABP in *hedge funds* beheert. Wie bij dat laatste denkt aan het fameuze *Long Term Capital Management* van Nobelprijswinnaars Merton en Scholes (ten onder gegaan in 2000, half Wall Street in haar val meeslepend [7]), begrijpt niet onmiddellijk hoe dat strookt met de missie van ABP: "Deelnemers en gepensioneerden hebben recht op een duurzaam en betrouwbaar pensioenfonds dat zijn financiële verplichtingen nu en in de toekomst waar kan maken." In de praktijk betekent dit, dat ABP als doel heeft de pensioenen zo veilig mogelijk met de inflatie mee te laten groeien. Men stopt op dit moment dan ook "slechts" 5% (nog altijd 10 miljard!) van het beheerde vermogen in hedge funds, maar tekent daarbij aan dat een goed onderhouden hedge fund in feite *veiliger* is dan de beurs ('hedgen' staat dan ook voor het *afdekken* van risico's). Deze 5% zal in de toekomst stijgen en is nu eigenlijk alleen nog maar zo laag omdat veel mensen (en dus ook leden van het bestuur van ABP) zich bij het begrip hedge fund direct ongemakkelijk beginnen te voelen. In werkelijkheid zijn hedge fund beheerders de "horlogemakers onder de beleggers" en draait ook bij hen alles om precisie, risicomangement, en daarmee om wiskunde!

Werner Frohn, een vriendelijke man van *ABP Investments US*, gewoon begonnen in Heerlen, legt ons uit dat hoe beter de informatie en openheid van een belegging is, hoe beter de risico's wiskundig in kaart kunnen worden gebracht: als iedere dag een prijs genoteerd wordt, zijn er voldoende data om te modelleren. Voorbeelden zijn aandelen waarin dagelijks gehandeld wordt, grondstoffen als olie, staatsleningen van landen als de USA of Duitsland, en ook de meeste courante opties. Slecht te modelleren daarentegen zijn bijvoorbeeld onroerend goed en *high yield bonds*. In dat geval wordt de wiskunde vervangen door psychologische zaken als intuïtie (van een beursguru) en vertrouwen (in een hedge fund manager). Maar ook dan is, net als bij het wiskundetoernooi, een informatievoorsprong van groot belang, juist als de openbare informatie beperkt is.

Renaissance

Dankzij Frohn kunnen we het kleine sales kantoor van *Renaissance Technologies* in Man-

hattan bezoeken; het hoofdkantoor van dit bedrijf bij Stony Brook is te ver weg en sowieso niet toegankelijk voor pottenkijkers. *Renaissance* is een geheimzinnig hedge fund, interessant voor ons omdat de firma veel gebruik maakt van wiskunde. De oprichter, Jim Simons, is van oorsprong meetkundige; zijn bekendheid in de wiskunde dankt hij voornamelijk aan zijn werk met Chern uit 1974 [2-3], dat onder meer door Robbert Dijkgraaf ook in de natuurkunde is toegepast [5]. In 1982 begon hij echter *Renaissance*, dat al spoedig een legendarische status verwierf vanwege het *Medallion Fund*. Met jaarlijkse winsten sinds 1989 van rond de 50%, minstens 10% meer dan enige andere belegger ooit op langere termijn wist binnen te halen, is dit het meest succesvolle beleggingsvehikel uit de geschiedenis. Uiteraard heeft dit Simons geen windeieren gelegd: in 2007 bedroeg zijn jaarinkomen bijvoorbeeld 1.7 miljard dollar en als hij zijn bedrijf zou verkopen zou hij ongetwijfeld tot de rijkste mensen ter wereld behoren.

Hoe krijgt hij dat voor elkaar? Twee van zijn medewerkers met een wiskundige achtergrond, gestuurd door het hoofdkantoor, gaan hopelijk een tipje van de sluier oplichten. Peter Rousseeuw is een sympathieke Belg, die echter onmiddellijk zegt dat het hem verboden is wat dan ook te vertellen over de wiskundige methoden die *Renaissance* inzet. Daarom vertelt hij maar iets over zichzelf, waarmee we ook dik tevreden zijn. Het is duidelijk dat we hier met een eerste klas wiskundige te maken hebben: Rousseeuw (1956) was reeds op 28-jarige leeftijd hoogleraar Statistiek in Delft en was vervolgens ook hoogleraar in Fribourg en in Antwerpen. Hij heeft drie boeken en 160 artikelen geschreven, en 19 promovendi opgeleid. Maar ergens begon het academische bestaan aan hem te knagen en in 2002 koos hij voor een nieuwe carrière bij *Renaissance*. Hij vertelt hoe Simons persoonlijk bij de sollicitatieprocedure was betrokken, hem ondervroeg over zijn onderzoek en hem naast serieuze wetenschappelijke vragen ook allerlei puzzeltjes liet oplossen. Over zijn dagelijkse werk wil hij nog wel kwijt dat ongeveer de helft bestaat uit concrete problemen die hij op moet lossen, en de andere helft uit het ontwikkelen van eigen ideeën, waarvan dan wel verwacht wordt dat ze op termijn direct relevant zijn voor het bedrijf. Publiceren kan alleen nog maar met toestemming van de grote baas.

Ook John Tromp (1966) had als onderzoeker reeds aardig aan de weg getimmerd (gepromoveerd in 1993 bij Paul Vitányi in de algo-

ritmische complexiteitstheorie en auteur van 29 publicaties in de theoretische informatica) alvorens hij vorig jaar bij *Renaissance* terechtkwam. Hij vermaakt ons vooral met wiskundige puzzels — het is duidelijk dat hij dit deel van de sollicitatieprocedure met glans moet hebben doorstaan — en beschouwingen over Go.

Hoe vermakelijk zijn optreden ook is, we kwamen voor de wiskunde achter *Renaissance*. Juist als sommigen zich daar zorgen over beginnen te maken gaat de deur open. Een onberispelijk geklede oudere man met een gouden horloge en witgrijze baard komt binnen. John valt ogenblikkelijk stil. Een jongedame schuift een stoel onder de man. Het is sommigen van ons onmiddellijk duidelijk: *dit moet hem zijn! Dit is Simons himself!* Hij is het inderdaad en blijft bovendien ruim een half uur (in welke tijd hij dus zo'n half miljoen dollar verdient) om iets over zichzelf te vertellen en onze vragen te beantwoorden.

Simons vertelt dat hij oorspronkelijk naast zijn wiskundige werk als verpozing in valuta begon te handelen en daarbij gaandeweg bepaalde wiskundige patronen ging herkennen. Door daar op te anticiperen maakte hij veel winst, behalve dan op de gulden — deze grap maakt hij ongetwijfeld *mutatis mutandis* voor ieder publiek. Hij breidde zijn handel vervolgens uit tot aandelen en opties, om uiteindelijk, met *Renaissance*, in werkelijk alles te handelen dat maar op de beurs verkrijgbaar is. Sterker nog, het bedrijf handelt op alle beurzen ter wereld tegelijk: "We trade twenty four hours a day. We trade every market and every instrument that can be traded." Dit gebeurt volautomatisch: aan de beslissingen te kopen of verkopen komt geen mens te pas. De hele handelsstrategie staat geprogrammeerd in een centraal computer netwerk, waarin duizenden gekoppelde cpu's de financiële data verwerken die met honderden gigabytes per dag binnenkomen.

Maar wat bepaalt die handelsstrategie? Simons vertelt trots dat dit uitsluitend feiten zijn, zoals historische koersen, indices,



John Tromp legt een puzzeltje uit. Rechts van hem Peter Rousseeuw

volatiliteiten, winst per aandeel, enzovoort. Hij maakt op geen enkele manier gebruik van speculatie, intuïtie of vertrouwen, politiek nieuws, of al wat niet feitelijk én kwantitatief is. Wat hij met deze feiten doet is zijn geheim: zelfs de vraag of hij gebruik maakt van de theorie van dynamische systemen (strange attractors, bifurcatietheorie etc.) weigert hij vriendelijk maar resoluut te beantwoorden. Hij deelt zijn geheim tot op zekere hoogte met de meer dan zeventig wiskundigen, statistici, fysici, informatici en linguïsten die hij in dienst heeft — geen enkele econoom — allen gepromoveerd en meestal met nog een onderzoekscarrière na hun promotie achter de rug. Zijn medewerkers hebben uiteraard een geheimhoudingsplicht, maar worden ook gepaaid met aandelen in het bedrijf en hoge salarissen (Rousseeuw vertelt na afloop dat hij begon met zijn hoogleraarssalaris, maar, zo zei hij fijntjes, dat was inmiddels wel een hele tijd geleden). Bovendien belegt het Medallion Fund inmiddels uitsluitend voor het personeel van *Renaissance*. En al zou er iets uitlekken: men heeft de hele brainpower

en technologische infrastructuur van *Renaissance Technologies* nodig om er gebruik van te kunnen maken.

Het is duidelijk dat Simons radicaal heeft afgerekend met het imago dat Wall Street in feite één groot Casino is [6], maar ook met de minder radicale hypothese van de efficiënte markt, die inhoudt dat alle relevante informatie vrijwel onmiddellijk in de prijzen wordt verwerkt en daarom niet meer kan worden gebruikt om de beurs te verslaan [9]. Economische theorie gebruikt hij niet, in financieel wiskundigen blijkt hij niet geïnteresseerd, zijn meest recente aanwinst is de stringtheoreticus Cumrun Vafa: onze gok is dat de geniale beleggingsstrategie van Simons op *econophysics* is gebaseerd [8].

Informatie

Voor een uitvoerig portret van Simons en *Renaissance* ziet *Bloomberg News* van januari 2008, online op <http://www.bloomberg.com/apps/news?pid=20601109&sid=ayjlmYcoCiH8>

Referenties

- Deze staan vanaf het jaar 2000 met uitwerkingen en antwoorden en al op de toernooisite www.ru.nl/wiskundetoernooi. Hier vindt men ook het materiaal van *Sum of Us* en nog veel meer informatie over het toernooi.
- S.S. Chern, *Complex manifolds without potential theory*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1995.
- S.S. Chern & J. Simons, Characteristic forms and geometric invariants, *Ann. of Math.* 99 (1974), 48–69.
- E. Derman, *My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance*, Wiley, Hoboken (NJ), 2004.
- R. Dijkgraaf & E. Witten, Topological gauge theories and group cohomology, *Comm. Math. Phys.* 129 (1990) 393–429.
- M. Lewis, *Liar's Poker: Rising Through the Wreckage on Wall Street*, Penguin, New York, 1989.
- R. Lowenstein, *When Genius Failed: The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*, Random House, New York, 2000.
- J.L. McCauley, *Dynamics of Markets: Econophysics and Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- B. G. Malkiel, *A Random Walk Down Wall Street*, Norton, New York, 1996.

Adhemar Bultheel

Katholieke Universiteit Leuven
Department of Computer Science
Celestijnenlaan 200 A
B-3001 Heverlee, België
adhemar.bultheel@cs.kuleuven.be

Ronald Cools

Katholieke Universiteit Leuven
Department of Computer Science
Celestijnenlaan 200 A
B-3001 Heverlee, België
ronald.cools@cs.kuleuven.be

Samenleving

Zestig jaar numerieke wiskunde

Op 29–30 oktober 2007 vond aan het departement computerwetenschappen van de Katholieke Universiteit Leuven het symposium 'The birth of numerical analysis' plaats, naar aanleiding van het verschijnen van een artikel zestig jaar geleden dat wordt beschouwd als de geboorte van de 'moderne' numerieke wiskunde. Voor dat symposium werd een aantal numerici uitgenodigd, die reeds actief waren rond het midden van de vorige eeuw. Ze hebben getuigd van het ontstaan van hun vakgebied en de evolutie die het sindsdien heeft doorgemaakt. Het artikel, dat eerder verscheen in *SIAM News*, is een verslag van de voordrachten.

De numerieke wiskunde wordt in wikipedia omschreven als 'het deelgebied van de wiskunde waarin algoritmes voor problemen in de continue wiskunde bestudeerd worden (in tegenstelling tot discrete wiskunde). Dit betekent dat het vooral gaat over reële of complexe variabelen, de oplossing van differentiaalvergelijkingen en andere vergelijkbare problemen die optreden in de natuurkunde en techniek'. Een reëel getal kan in principe slechts voorgesteld worden door oneindig veel cijfers, en op een digitale computer reserveert men voor het opslaan van een reëel getal slechts een eindig aantal bits. Een eindig geheugen betekent dat men slechts benaderingen kan bewaren van eindig veel reële getallen. Het euforisch idee dat de digitale computers de 'domme rekenfouten', zoals vergissingen of schrijffouten van menselijke rekenaars niet zouden maken, werd dus al gauw getemperd door het besef dat digitale

computers in feite bij ongeveer elke berekening een fout, weliswaar een zeer kleine fout, maar toch een fout maken. Al deze kleine fouten planten zich voort als een virus doorheen de vele elementaire bewerkingen die de computer maakt en kunnen eventueel zorgen dat het uiteindelijke resultaat helemaal niet meer klopt met de realiteit.

De geboorte?

Een nauwkeurige analyse van dit soort foutenvoortplanting bij het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen werd voor het eerst gepubliceerd in een artikel van John von Neumann en Herman Goldstine: 'Numerical inversion of matrices of high order', gepubliceerd in het novembernummer van de *Bulletin of the American Mathematical Society* in 1947. Omdat dit de eerste keer was dat een dergelijke analyse werd gemaakt, verwijst men soms naar dit artikel als het begin van de moderne

numerieke wiskunde. Natuurlijk werden veel vroeger ook al numerieke berekeningen gemaakt en loste men problemen op van natuur en techniek, maar de schaal waarop dit gebeurde nam natuurlijk wel een enorme vlucht sinds het in gebruik nemen van digitale computers. De 'grote stelsels' waarnaar in de titel van het artikel verwezen wordt is naar onze huidige normen zeer bescheiden. Men vermeldt in een voetnoot dat er 'zeer ernstige problemen komen' als men stelsels van meer dan 10 vergelijkingen wil oplossen. In een volgende voetnoot denkt men dat het ooit misschien wel mogelijk wordt om stelsels met 100 vergelijkingen op te lossen. Als je dan bedenkt dat men om de PageRank van Google te bepalen (weliswaar zeer ijle) stelsels oplost die ongeveer 10 miljard vergelijkingen hebben, dan beseft men wel dat er een hele weg is afgelegd.

Zestig jaar jong: back to the future

Als we het von Neumann-Goldstineartikel inderdaad als de start zien, dan betekent dat dat in november 2007, de numerieke wiskunde zestig jaar jong wordt. Dit was voor de wetenschappelijke onderzoeksgemeenschap (WOG) Geavanceerde Numerieke Methodes voor Wiskundige Modelling de aanleiding



Van links naar rechts: H. Keller, C. Brezinski, G. Wanner, B. Ford, A. Watson, K. Atkinson, R. Jeltsch, R. Plemmons, M. Powell, J. Lyness, J. Dongarra. Op de voorgrond: de organisatoren: R. Cools and A. Bultheel

om een tweedaags symposium te organiseren aan de Katholieke Universiteit Leuven. Het was de bedoeling een aantal onderzoekers die midden vorige eeuw of kort daarna reeds actief waren op het gebied van de numerieke analyse uit te nodigen om over hun ervaring te vertellen en om een overzicht te geven van de evolutie die binnen hun vakgebied heeft plaatsgevonden. Teruggrijpen naar de oorsprong is belangrijk in elke cultuur, en dat is niet anders voor een vakgebied als de numerieke wiskunde. Twaalf sprekers werden bereid gevonden om op de vooravond van de verjaardag, namelijk 29 en 30 oktober 2007, hun verhaal te komen vertellen tijdens het symposium.

Extrapolatie

De voormiddag van de eerste dag stond in het teken van extrapolatie. Heel veel numerieke methodes stellen een rij van opeenvolgende benaderingen op, waarvan men hoopt dat ze convergeren naar de beoogde oplossing. Indien het berekenen van een nieuwe benadering veel werk vraagt, dan kan het zeer nuttig zijn om een aantal van de reeds berekende benaderingen met veel minder rekenwerk te hercombineren tot een nieuwe benadering. Dat noemt men extrapolatie (naar de limiet). In de voordracht van *Claude Brezinski* werd een overzicht gegeven van de ontwikkeling van de extrapolatiemethodes. Voor de bere-

kening van π gebruikte Christiaan Huygens in de zeventiende eeuw een extrapolatietechniek die pas veel later in 1910 door Richardson werd herontdekt en onder de naam Richardson extrapolatie bekend is geworden. Een andere extrapolatiemethode werd beschreven in 1955 door Werner Romberg. Hier wordt gepoogd de rij van opeenvolgende benaderingen voor een integraal, berekend door de trapziumregel, te versnellen. Deze methode is bekend geraakt als Rombergintegratie. Daarna, met het invoeren van de digitale rekenmachine, volgen de verbeteringen, veralgemeningen en varianten zich sneller op: Aitken, Steffensen, Takakazu, Shanks, Wynn, QD en epsilon-algoritme zullen numerici zeker bekend in de oren klinken.

Claude Brezinski (1941) is emeritus van de universiteit van Lille en is op vele verwante gebieden actief waaronder extrapolatiemethodes maar ook Padé benadering, kettingbreuken, orthogonale veeltermen, numerieke lineaire algebra en niet-lineaire vergelijkingen. Hij heeft ook altijd een grote interesse gehad voor de geschiedenis van de wetenschap, waarover hij trouwens ook verscheidene boeken heeft gepubliceerd.

Integratie over andere domeinen

Het verhaal van *James Lyness* sloot goed aan bij dat van Brezinski. De Romberg integratiemethode voor ééndimensionale integratie kreeg ook toepassingen in meerdimensionale integratie. Maar de eerste serieuze toepassingen kwamen er pas in 1975 voor integralen

over een simplex en integralen met een integrand met singulariteit. Vandaag is dit uitgegroeid tot een elegante theorie voor integralen over een polyhedraal domein van functies met een algebraïsche of logaritmische singulariteit in de hoekpunten. De extrapolatie is gesteund op een drietal elementen. Men schrijft een reeksontwikkeling op voor de kwadratuurformule in functie van een parameter. Bijvoorbeeld: $Q^{[m]}f = If + B_2/m^2 + B_4/m^4 + \dots + B_{2p}/m^{2p} + R_{2p}(m)$. Hierin is $Q^{[\infty]} = If$ de gezochte integraal en R_n de benaderingsfout. Deze reeks is maar bij wijze van voorbeeld en de vorm ervan moet aangepast worden volgens de singulariteit van de integrand f . Dan rekent men dit uit voor een aantal waarden van m , wat men kan opschrijven als

$$\begin{bmatrix} Q^{[m_1]}f \\ \vdots \\ Q^{[m_n]}f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_1^{-2} & \dots & m_1^{-2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n^{-2} & \dots & m_n^{-2p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} If \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{2p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ra_{2p}(m_1) \\ \vdots \\ Ra_{2p}(m_n) \end{bmatrix} \equiv Q = VI + R.$$

Dit stelsel moet men oplossen om If te berekenen. De boodschap van het verhaal hier, ook naar de verdere toekomstige ontwikke-



Links: G. Wanner, C. Brezinski, M. Powell; midden: J. Dongarra, B. Ford, H. Keller; rechts: B. Plemmons, M. Powell

ling toe, is dat de basis van de hele theorie slechts drie eenvoudige componenten heeft: een routine om de integrand te evalueren, een routine die een integratiereguleert, en een routine om een lineair stelsel op te lossen. Het opstellen van de vorm van de reeksontwikkeling is meestal gemakkelijk, hoewel de bewijzen van de precieze uitdrukkingen dikwijls ingewikkeld zijn.

James Lyness (1932) is verbonden aan het Argonne National Laboratory, en aan de Universiteit van New South Wales. Zijn eerste publicaties verschenen vooral in natuurkundetijdschriften, maar sinds hij in 1963 zijn eerste artikel (samen met D. Mustard en J.M. Blatt) publiceerde in *The Computer Journal* over N -dimensionale integratie is dit onderwerp zijn onderzoek blijven domineren.

Functionele vergelijkingen

De namiddag van de eerste dag stond in het teken van functionele vergelijkingen.

Historisch gezien zou men de methode van Euler (1768) voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen kunnen zien als het zaadje waaruit alle andere methodes zijn voortgesprongen. Zo werd het voorgesteld in de voordracht van Gerhard Wanner. Runge, Heun en Kutta stelden omstreeks 1900 hun methodes op. Die waren gebaseerd op een Taylorreeksontwikkeling van de oplossing, en ze stelden een numerieke benadering voorop die daar zo goed mogelijk mee overeenstemde. Dit wil zeggen dat voor een kleine stap h het verschil tussen de echte en de benaderende oplossing $O(h^p)$ is met p zo hoog mogelijk. Omdat dit al gauw aanleiding geeft tot grote onoverzichtelijke stelsels in de parameters van de methode, is onder andere door Butcher en door Hairer en Wanner, in de jaren zestig en zeventig een belangrijke inspanning geleverd om dit te systematiseren.

Meerstapsmethodes stammen dan weer af van technieken van Adams en Bashford uit 1885. Deze maken gebruik van meerdere reeds berekende punten van de oplossing, in tegenstelling tot Runge-Kutta methodes die enkel gebaseerd zijn op het laatste punt. Dahlquist publiceerde in 1956 de veralgemeende lineaire multistap methodes. Belangrijke inspanningen werden geleverd op het gebied van stapcontrole, en stabiliteit.

gemeende lineaire multistap methodes. Belangrijke inspanningen werden geleverd op het gebied van stapcontrole, en stabiliteit.

Gerhard Wanner (1942) is professor aan de universiteit van Genève en voormalig voorzitter van de Zwitserse wiskundige vereniging. Hij schreef samen met Hairer meerdere boeken over analyse en differentiaalvergelijkingen. De historische aspecten speelden daarbij steeds een prominente rol. Hij had wetenschappelijke contacten op alle 'niveau's': van 2 meter beneden de zeespiegel (het Runge-Kutta symposium in het CWI in Amsterdam ter gelegenheid van 100 jaar Runge-Kutta methodes in 1995) tot de top van de Mont Blanc op 4807 meter waar hij samen met Hairer was.

stijve differentiaalvergelijkingen

De draad werd hier verder opgenomen door Rolf Jeltsch. Hij had het voornamelijk over de evolutie van het stabiliteitsbegrip bij het oplossen van stijve differentiaalvergelijkingen.

Stijve differentiaalvergelijkingen leveren problemen op voor het numeriek oplossen meestal omdat er een dynamiek beschreven wordt die zich op sterk verschillende schalen afspelen. Men wou methodes ontwerpen die voor een theoretisch stabiele (begrensde) oplossing ook numeriek een stabiele oplossing zou gevonden worden. Voor meerstapsmethodes bewees Dahlquist in 1963 zijn bekende tweede barrière die stelde dat men geen orde hoger dan twee kon verwachten voor een A-stabiele methode. De A staat voor absoluut, wat wil zeggen dat de numerieke methode een begrensde oplossing berekent wat ook de grootte van de stap is. Dit ontketende een zoektocht naar andere soorten methodes en deed een heel alfabet ontstaan van zwakkere soorten van stabiliteit.

Rolf Jeltsch (1945) is professor aan de Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH). Hij was president van de European Mathematical Society (EMS) (1999–2002) en van de Zwitserse wiskundige vereniging (2002–2003). Sinds 2005 is hij voorzitter van Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik, GAMM. In de jaren 1970 ging zijn onderzoek vooral over gewone differentiaalvergelijkingen. Sinds de jaren 1980 ligt de focus meer op hyperbolische partiële differentiaalvergelijkingen en grootschalige berekeningen met ingenieurstoepassingen.

Singulariteiten

Herbert Keller is de ouderdomsdeken van dit gezelschap. Zijn boodschap was dat de singulariteiten in de numerieke wiskunde al altijd een zeer belangrijke rol gespeeld hebben. Dat begint met een deling door nul (of door 'bijna nul'), maar is eveneens van belang bij numerieke integratie waar de integrand singulier wordt of bij het oplossen van een stelsel lineaire of niet-lineaire vergelijkingen met een Jacobiaan die singulier wordt. Maar al gauw heeft dit te maken met grootschalige problemen die sterk verbonden zijn met differentiaal- en integraalvergelijkingen, dynamische systemen, enzovoort. Het verwaarlozen van een singulariteit is een erfzonde die moet uitgeroeid worden. Zonder rekening te houden met de inherente singulariteiten van het probleem kan men dat probleem niet goed oplossen.

Herbert Keller (1925) is emeritus professor van het California Institute of Technology. Samen met E. Isaacson is hij auteur van het legendarische boek *Analysis of numerical methods* dat in 1966 verscheen bij J. Wiley. Zijn wetenschappelijke bijdragen gingen veelal over randwaardenproblemen en methodes voor het oplossen van bifurcatieproblemen.

Fredholm-integraalvergelijkingen

De eerste dag werd afgesloten met de lezing van Kendall Atkinson over zijn persoonlijke visie op de evolutie van het onderzoek in verband met integraalvergelijkingen. Hij legt de nadruk op het gebruik van functionaalanalyse en operator theorie bij de numerieke analyse van methodes voor het oplossen van dit soort vergelijkingen. De reden hiervoor is te vinden in het artikel van Kantorovich 'Functional analysis and applied mathematics' dat in het Russisch verschijnt in 1948 en waarin onder andere numerieke technieken voor het oplossen van Fredholm-integraalvergelijkingen van de tweede soort worden besproken. Hij laat de belangrijkste methodes en de verkregen resultaten de revue passeren: ontaalde kern technieken waarin de integraalkern ge-



Links: J. Lyness, R. Jeltsch; midden: B. Ford, K. Atkinson; rechts: R. Jeltsch, A. Watson

schreven wordt als $K(s, t) = \sum \alpha_i(s)\beta_i(t)$, projectiemethodes (de welbekende Galerkin- en collocatietechnieken waarbij men de oplossing als een lineaire combinatie van basisfuncties schrijft waarbij men de coëfficiënten bepaalt door interpolatie of orthogonaliteitsvoorwaarden op te leggen), en de Nyström methode die op numerieke integratie steunt.

Kendall Atkinson (1940) is emeritus professor van de universiteit van Iowa. Hij is een autoriteit op het gebied van integraalvergelijkingen. Zijn onderzoek omvat ook radiositeitsvergelijkingen van computer graphics en multivariabele benadering, interpolatie en kwadratuur. Hij schreef verschillende boeken over numerieke analyse en integraalvergelijkingen.

Software en de invloed van hardware

De eerste lezing op de tweede dag werd gegeven door *Brian Ford*. Hij gaf een schets van het ontstaan en de ontwikkeling van de NAG (Numerical Algorithms Group) softwarebibliotheek. Het was de eerste verzameling van algemene routines die niet op een bepaald soort numerieke problemen was gericht, ook niet op een bepaald toepassingsgebied, en die ontwikkeld werd door medewerkers uit verschillende onderzoeksgroepen. De spreker begon aan een softwarebibliotheek omstreeks 1967, gestimuleerd door zijn contacten met J. Wilkinson en L. Fox. Het algemeen toepasbaar zijn, het goed uitgetest zijn en de degelijke documentatie zorgden voor een direct succes. De officiële start van de Algol en Fortran versies van de NAG bibliotheek is 13 mei 1970. De algoritmes werden gekozen in functie van de gebruiker op basis van stabiliteit, robuustheid, nauwkeurigheid, aanpasbaarheid, en snelheid (in die volgorde van belangrijkheid). Ford schetst de verdere ontwikkeling en de keuzes die gemaakt zijn bij de uitbouw van de NAG bibliotheek, en het samenspel tussen de numerieke analisten en de software ontwerpers. Hij besluit met een oproep naar de jongere onderzoekers om te werken aan de uitdaging van de nieuwe computerarchitecturen waar de multi-core hardware een volledig herdenken van de implementatie

van numerieke methodes noodzakelijk maakt wil men de reken capaciteit ervan optimaal gebruiken om snellere uitvoeringstijden te bekomen en dus grotere problemen te kunnen oplossen.

Dr. Brian Ford (1940) is oprichter van de NAG company en was er directeur tot aan zijn pensionering in 2004. Hij ontving een eredoctoraat van de universiteit van Bath en werd onderscheiden als OBE (officer of British Empire) voor zijn staat van verdienste. Onder zijn leiding heeft NAG zich ontwikkeld tot een respectabel bedrijf voor de productie van draagbare en robuuste software voor numerieke berekeningen.

Multi-core hardware

De concluderende oproep in de lezing van Brian Ford was meteen ook een van de belangrijkste elementen in de voordracht van *Jack Dongarra*. In een rijk gestoffeerde voordracht geeft hij de parallellen aan tussen de ontwikkelingen van de numerieke software, de hardware en de informaticawerktuigen die zich sinds het midden van de jaren 1940 hebben voorgedaan. Men evolueerde van scalaire architecturen waarop de eerste numerieke software ontwikkeld werd (Eispack, Linpack, BLAS '70) naar vector processoren ('70-'80) en parallelle algoritmen, MIMD machines (ScaLAPACK '90), en later naar SMP, CMP, DMP, enzovoort. De multi-core processoren zijn ondertussen een feit en de op ons aanstormende (r)evolutie is dat we naar een proliferatie gaan van multi-core architecturen waarbij men over honderden, duizenden en zelfs honderdduizenden cores zal beschikken. Het efficiënt gebruik van deze potentiële computercapaciteit waarbij men al deze processoren nuttig moet bezighouden zal een volledige herwerking vragen van de bestaande software.

Jack Dongarra (1950) is professor aan de universiteit van Tennessee waar hij leider is van het "Innovative Computing Laboratory". Hij is gespecialiseerd in lineaire algebra software en meer algemeen numerieke software op parallelle en andere geavanceerde architecturen. In 2004 kreeg hij de "IEEE Sid Fernbach Award" voor zijn werk in HPC (High Performance Computing). Hij heeft meegewerkt aan zowat alle belangrijke softwarepakketten op het gebied van

lineaire algebra: EISPACK, LINPACK, BLAS, LAPACK, ScaLAPACK, enzovoort

Benaderen en optimalisatie

Nog meer software in de voordracht van *Robert Plemmons*. De rode draad door dit verhaal is de aanwezigheid van niet-negativiteitsvoorwaarden bij het oplossen van allerlei numerieke problemen. Na een overzicht van historische methodes voor het niet negatieve kleinste-kwadraten (KK) probleem waarin men een lineair KK probleem wenst op te lossen met een vector van niet-negatieve onbekenden, werd het NMF probleem geïntroduceerd. Dat is het factoriseren van een matrix als een product van twee niet-negatieve matrices (NMF). Dit is nauw verbonden met data-analyse. Een andere techniek hiervoor is singuliere waarden-ontbinding en principal component analysis (PCA). Dit houdt echter geen rekening met de eis van niet-negativiteit en een aantal andere factoren. Rond de jaren '90 werd dan ICA (independent component analysis) geïntroduceerd gesteund op NMF. Dit kan men ook formuleren als BSS (blind source separation). Hierin meet men het gemengde resultaat van meerdere bronnen en men moet proberen de afzonderlijke bronnen te identificeren. Naar recenter onderzoek toe probeert men dit NMF probleem te veralgemenen tot hogere dimensies waar de matrix vervangen wordt door een tensor. De toepassingen van deze problemen zijn legio: achtergrondgeluiden filteren uit een akoestisch signaal, het filteren van e-mails, data mining, bronnen van atmosferische vervuiling detecteren, ruimteonderzoek SOI (space object identification), enzovoort

Robert J. Plemmons (1938) is Z. Smith Reynolds Professor aan de Wake Forest University, North Carolina. Zijn huidige onderzoek omvat computationele wiskunde met toepassingen in signaal- en beeldverwerking. Meer in het bijzonder met de hiervoor geschatte beperkingen van niet-negativiteit. Bij beelden worden bijvoorbeeld slechte focus gecorrigeerd, of worden atmosferische verstoringen weggewerkt. Hij publiceerde meer dan honderdvijftig artikelen en drie boeken over deze onderwerpen.

Niet-lineaire optimalisatie

Mike Powell gaf een overzicht van de opeenvolgende varianten die ontwikkeld werden voor niet-lineaire optimalisatie zonder beperkingen. Deze vormden een belangrijke verbetering op de methodes van vijftig jaar geleden toen men in wezen slechts beschikte over toegevoegde-gradiëntmethode, zuivere-Newton of een directe zoekmethode in de ruimte der variabelen. Bij de verbeterde methodes zal men de matrix van de tweede afgeleiden in elke stap proberen aan te passen zodat die niet telkens opnieuw moet berekend worden. Deze methodes convergeren zeer vlug en de onderliggende theorie verschilt erg van de overeenkomstige theorie voor de klassieke Newtonmethode. Daarna worden methodes belicht die gesteund zijn op de vorige en die een invloed gehad hebben op de technieken voor optimalisatieproblemen met beperkingen. Komen verder kort aan bod in dit overzicht: methodes zonder afgeleiden, grootschalige problemen, en de proliferatie van allerlei methodes als 'simulated annealing', genetische algoritmen, enz.

Michael J.D. Powell (1936) is professor aan de Cambridge universiteit. Hij is actief op meerdere gebieden. Zijn naam is verbonden aan de DFP (Davidon-Fletcher-Powell) methode, een quasi-Newtonmethode voor optimalisatie, en de methode van Powell, een variant op de Marquardt methode voor niet-lineaire kleinste-kwadratenproblemen. Maar hij is eveneens vermaard wegens zijn werk in benaderingstheorie. De Powell-Sabin splines zijn een begrip geworden en daarover wordt nog steeds onderzoek verricht bij subdivisieschema's voor de hiërarchische voorstelling van oppervlakken.

Geschiedenis van de numerieke wiskunde

Tot slot van het symposium geeft *Alistair Watson* een schets met persoonlijke toets van de evolutie van de numerieke wiskunde in Schotland. De numerieke wiskunde in de bre-

de zin volgens de definitie in het begin gegeven bestaat natuurlijk al eeuwen. Als je dit enger maakt en denkt aan het gebruik van digitale computers, dan is 1947 een goede keuze. Maar als je aan de meer abstracte combinatie numeriek-computers denkt, dan kan men teruggaan tot 1913 wanneer de artikels van Turing verschijnen. Daar begint dan ook de geschiedenis volgens Watson. In Schotland is dat met Whittaker, en later Aitken die in Edinburgh worden aangesteld. Er was vanaf 1946 een cursus 'Mathematical Laboratory' waar de berekeningen met handrekenmachines gebeurden. Pas in 1961 werd dit omgedoopt tot 'Numerical Analysis'. In datzelfde jaar beweerde Aitken nog geen behoefte te hebben aan een computer. Die kwam er dan toch in 1963. Daarna gaat het vrij snel. Meerdere centra ontstonden: St Andrews en later Dundee. De universiteit in Dundee is pas in 1967 onafhankelijk geworden van St Andrews en het zwaartepunt van numerieke analyse verschoof al gauw naar daar. Sinds 1971 worden er de tweejaarlijkse conferenties gehouden over numerieke analyse. De voorlopig laatste conferentie in Dundee ging door op 26-29 juni 2007. De laatste jaren is het zwaartepunt weer meer verschoven naar de universiteit van Strathclyde (Glasgow).

De focus van het werk van Alistair Watson (1942) is numerieke benadering en wat daarmee verband houdt. Dat kan theoretische aspecten bevatten, maar ook elementen van optimalisatie of lineaire algebra. Hij is FRSE (Fellow van de Royal Society of Edinburgh) en is vooral in brede kringen bekend wegens zijn betrokkenheid sinds 1985 bij de tweejaarlijkse Dundee conferenties over numerieke analyse.

Impact van hardware op software

Er was nog een twaalfde spreker voorzien: Gerard Alberts die echter door ziekte verhinderd

was. Zijn bijdrage zou nochtans een interessante component belichten over het wezen van de numerieke wiskunde. Wat in de jaren '30-'40 daaronder verstaan werd is het geheel van modellering, ontwerp van wiskundige oplossingsmethodes, het opstellen van een algoritme, en het implementeren op de computer. Deze globale aanpak is met de stijgende impact van de hardware op de software, het ontstaan van geavanceerde informaticawerktuigen en van de meer gespecialiseerde ingenieursdiscipline van het modelleren, gedeeltelijk uit elkaar gevallen in zich min of meer afzonderlijk ontwikkelende richtingen. Men kan zich daarom afvragen of de numerieke wiskunde nog wel dezelfde naam moet krijgen als zestig jaar geleden en of men dan nog hetzelfde daaronder verstaat.

Tenslotte het begin

Door de afwezigheid van de laatste spreker werd de gemiddelde leeftijd van de sprekers de hoogte ingeduwd. De jongste spreker was 57, de oudste 82, de gemiddelde leeftijd net boven de 68. Maar het is duidelijk dat ze allemaal nog steeds vol enthousiasme over hun vakgebied kunnen komen getuigen. Of de numerieke wiskunde nu zestig jaar of honderd jaar of eeuwen oud is, laten we in het midden. Het is in ieder geval te hopen dat het enthousiasme van deze Buona Vista Social Club afstraalt op de jongere generatie want we staan nog maar aan het begin van een uitgebreide waaier van uitdagingen die het resultaat zijn van het timmerwerk van de hele vorige generatie. De numerieke wiskunde staat nog maar in de steigers! 

Herbert Keller overleden De oudste spreker tijdens het symposium, Herbert Keller, is onverwacht overleden op 26 januari 2008.

De derde wet

| Solicited Comments

Reacties op de artikelen 'Dynamische systemen: aanzet tot een curriculum' van Elwin Savelsbergh en 'Computergebruik en demathematisering' van Henk Broer, NAW, sept. 2007. Het lijkt erop dat bij Savelsbergh het ontbreken van het leerdoel "het ontwikkelen van kennis en vaardigheden in de wiskunde van dynamische systemen" tot enige verontrusting heeft geleid.

Niet alles goud

'Ha!' roept mijn zoon, 'Er is een vriendje online!' Ik zie op het scherm een figuurtje met een blinkend zwaard dat King.Midas heet. Als ik vraag wat voor vriendje King.Midas is, valt er een pijnlijke stilte. King.Midas is een sorcerer die elementals kan summonen, verdere vragen zijn evident ongepast, en de antwoorden die ik zoek zijn hetzij onbekend, hetzij onbetrouwbaar. Ik bevind me duidelijk in het verkeerde taalspel. De objecten die je via een grafische rekenmachine of ict leert kennen, lijken op de elementals van voornoemde King.Midas. Ze verschijnen op het scherm, je kunt ze oproepen door op knopjes van het type abs, var en inv te drukken, en in de loop der tijd ontstaat het onbestemde gevoel dat je ze leert waarderen. Ze doen vreselijk hun best om op wiskundige objecten te lijken, maar hebben daar in essentie niet zo vreselijk veel mee te maken: vragen naar hun eigenschappen zijn vaak ongepast, en antwoorden zijn hetzij onbekend, hetzij onbetrouwbaar. Plato zou zich in zijn graf omdraaien.

Wiskunde is mooi omdat zien en zeggen niet altijd samenvallen. Dat is spannend: soms zie je dingen die je nog niet wiskundig kunt zeggen, soms zeg je dingen die je tot je verbazing nog niet eerder had gezien. Leerlingen die via grafische rekenmachines of ict ingeleid worden in de wiskunde krijgen tegengesteld veel te zien dat de schijn van wiskunde heeft — maar ze leren veel te weinig te zeggen. De objecten die we hen op hun schermjes laten oproepen, vertegenwoordigen een vorm van wiskundige kitsch, slechte kopieën die we hun met te veel pretentie voorschotelen, een surrogaat van hoe mooi wiskunde kan zijn. Geen wonder dat er bijna niemand wiskunde gaat studeren.

Koning Midas zelf kwam pas laat tot inzicht. Het is niet alles goud wat er blinkt. *Paul Bezembinder (Technische Universiteit Eindhoven)*

Dynamisch modelleren: domineert de computer weer de algebra?

In sommige deelgebieden van de wiskunde lijkt de tastbare werkelijkheid ver weg. Savelsbergh's binnenkomer dient als contrast voor het dynamisch modelleren, pas (!) in de twintigste eeuw tot grote bloei gekomen dankzij de opkomst van numerieke technieken. Newton en Kepler blijven onvermeld want mechanica is minder geschikt voor onderwijsdoeleinden, aldus drie referenties zonder verdere toelichting.

In zijn discussie van griepmodellen, radioactief verval, en rupsenpopulaties, gooit Savelsbergh zo'n beetje alles waar ik onderscheid tussen zou maken op één grote hoop, bij voorkeur zonder er ook maar een woord aan vuil te maken. Aantallen, gemiddelde of verwachte aantallen, en kansen bijvoorbeeld, maar ook numeriek oplossen, discreet modelleren en continu modelleren. Parameters die evident niet geheel-tallig zijn worden wel zo gekozen, en nog gelijk aan elkaar ook. Alle modellen zijn ineens deterministisch op het moment dat er gesimuleerd wordt. Absurd is de discussie over niet-geheelwaardige gesimuleerde oplossingen. En hoe bestaat het dat je een niet-lineaire differentiaal-vergelijking uit de lucht laat vallen bij een populatieverhaal nadat de lineaire versie onvermeld gebleven is bij radioactief verval? Het belangrijke concept van verschillende tijdschalen wordt uitgelegd aan de hand van het begrip *tijdstap* en daarmee verdoezeld. Het gedrag van dynami-

In deze rubriek worden lezers door de redactie uitgenodigd te reageren op recent in dit blad verschenen artikelen.

Redacteur: Ferdinand Verhulst

e-mail: f.verhulst@uu.nl

sche systemen wordt gecategoriseerd, waarbij componenten van het model en gedrag van oplossingen door elkaar heenlopen. Uiteindelijk dan toch de mechanische slinger vergelijking vanwege numerieke problemen (bij Euler's methode) en gebrek aan kwalitatief inzicht bij ecologische problemen.

In het laatste gedeelte van het artikel komen modelleertools aan de orde. Daarmee is het mogelijk om in woorden geformuleerde regeltjes, zoals bij het griepmodel, in te voeren als, zo lijkt het althans, differentiaalvergelijkingen, die daarna weer discreet opgelost worden. Ook hier is onduidelijk wat er precies gebeurt. Is het model continu en daarna de oplossingsmethode numeriek weer discreet, of is het model vanaf het begin discreet? Sommige onderwijsdeskundigen en vakdidactici zijn er voorstander van om van het begin af aan voor al het modelleren gewoon één zo'n tool te pakken en de leerlingen daarmee aan de slag te laten gaan. Ik vind dat schrikbarend. Zelfs al zouden de leerlingen de tool zo in de vingers krijgen dat ze er mee aan de slag kunnen (hetgeen ik betwijfel), vanaf dat moment zitten ze opgesloten binnen de grenzen van de modelleertool. Een soort a priori afgebakend deel van het intellectuele universum waarbinnen alle activiteit moet plaats vinden. Zit hier ook de gedachte achter dat de wiskunde af is en alleen nog maar in apparaatjes gestopt moeten worden die het (denk)werk doen? Ik ben niet mordicus tegen het gebruik van hulpmiddelen, maar wees er toch eens terughoudend mee. We hebben gezien tot wat voor ellende de misvatting kan leiden dat computers beter zijn in algebra.

Door het verhaal heen loopt een discussie met de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (cTWO). Toen ik de eerste versie van de module Wiskundig Modelleren onder ogen kreeg, wist ik nog niet eens wat cTWO was. Op de school van mijn zoon werd deze versie, afkomstig van de site van cTWO, overwogen voor Wiskunde D en NLT samen. Dat idee sprak me erg aan, maar ik schrok me een ongeluk toen ik het materiaal bestudeerde. Rondmailen leidde tot berustende reacties bij collega's. Op de receptie na de oratie van Mark Peletier sprak ik Dirk Siersma aan op wat ik gelezen had. Hij stelde me voor aan Paul Drijvers van het Freudenthal Instituut (FI), als zijnde een van de makers van het materiaal. De discussie daarna begon van Drijvers' kant over banen van mensen waar ik om moest denken als ik kritiek had, en met de uitleg dat bij het maken van de methode gekozen was voor een systeemdynamica aanpak, de wereldstandaard op het gebied van dynamisch modelleren, Club van Rome, etc. Ik heb mijn bezwaren toen in detail en ongezouten opgeschreven. Tot een inhoudelijke discussie heeft dat niet geleid. Ach ja, dat zal wel aan mij liggen. Met Harm Houwing van *Getal en Ruimte* (GR) ben ik op precies dezelfde manier in de clinch gegaan over wat ik hun boeken las, en dat heeft geleid tot een vruchtbaar overleg met hem, Jan van de Craats en Mark Peletier. De nieuwe boeken van GR zijn een hele stap vooruit, mede dankzij de inzet van Harm en zijn collega's.

Gelukkig is in cTWO besloten om niet verder te gaan met de module Dynamisch Modelleren die ik gezien had, maar helaas heeft dat ook tot het splitsen van Dynamisch Modelleren voor NLT en Wiskunde D geleid. Als Savelsbergh schrijft dat de module Wiskundig Modelleren aanvankelijk bedoeld was voor Wiskunde D en NLT gezamenlijk, maar dat na verloop van tijd de visies toch te verschillend waren, is dat maar een deel van het verhaal. Wat er is misgegaan, is dat op het FI al vast bedacht was wat er in zo'n module zou moeten komen, en hoe deze afgezet moest worden. Inhoudelijk overleg met deskundigen was daarbij niet belangrijk en is, onlangs de bereidheid daartoe van mij en anderen, afgehouden. Daarna was het te laat. Voor NLT is de boel inmiddels geaccrediteerd. De naam van een geraadpleegde deskun-

dige op het gebied van wiskundeonderwijs aan de doelgroep mocht en mag van Harry Eikelhoff, Savelsberghs baas, niet bekend gemaakt worden.

Joost Hulshof

Reactie op 'Evidence Based' van Derk Pik, NAW, dec. 2007, waarin gepleit wordt voor een objectief getoetste onderwijsstrategie zoals al enige tijd gebeurt in de geneeskunde door de zogenaamde Evidence based Medicine.

Evidence based?

In het hoofdartikel 'Evidence based' in het NAW van december 2007 stelt Derk Pik: "De evidence based benadering kan een uitweg bieden aan de vaak bittere standpuntenoorlogen tussen de diverse partijen in het onderwijs. Deze discussie zou enorm opknappen van een objectieve benadering." Beschreven wordt wat er mis is in het Nederlandse wiskundeonderwijs en het idee is dat de evidence based benadering een remedie tegen die misstanden is. Ik geloof daar niet in.

Allereerst zou er overeenstemming moeten zijn over het doel van het onderwijs. Waarom moet er wiskunde geleerd worden? Welke wiskunde en op welk niveau? De meningen hierover lopen sterk uiteen. Er is visie nodig en die verwerf je niet met zo'n objectieve benadering. Momenteel is de dominante gedachte dat leerlingen voorbereid moeten worden op hun functioneren in de maatschappij. Een wiskundige manier van denken is daar niet voor nodig en die is dan ook uit het onderwijs zo goed als verdwenen.

Het heeft weinig zin om te klagen over de kwaliteit van schoolboeken. Er zijn goede en slechte leerboeken en de slechte worden het meest gebruikt. Die slechte zijn meestal ook nog de duurste, al worden ze binnenkort wel gratis en dus nog aantrekkelijker. Goed materiaal is bijvoorbeeld dat van de *Wageningse Methode* (voor havo-vwo) en *Ratio* (eerste twee klassen vwo, digitaal en gratis). Er is in Nederland een sterke wisselwerking tussen de eindtermen van het onderwijs, zoals die tot uitdrukking komen in de examens, en het onderwijs dat feitelijk wordt gegeven. Dat mechanisme werkt niveauverlagend. Leerboeken hoeven wiskundig niet goed in elkaar te zitten: als ze veel gebruikt worden zijn ze vanzelf de norm. Zolang het leren van wiskunde bij het schoolvak wiskunde een lage prioriteit heeft zal daar weinig aan veranderen. Ik kan mij goed herinneren dat de toenmalige directeur van het Freudenthal Instituut ruim vijftien jaar geleden in kranteninterviews met trots liet weten dat het leren van wiskunde laag stond op de lijst van doelstellingen van het wiskundeonderwijs.

Nodig is dat er doelstellingen van het wiskundeonderwijs komen die gebaseerd zijn op een heldere visie. Wiskundigen kunnen daarbij een belangrijke rol vervullen, wiskundigen met een brede kijk op het belang van hun vak. Examens zijn er om te zien of in individuele gevallen de doelstellingen worden gerealiseerd. Zo eenvoudig zou dat moeten zijn. Scholen zijn dan genooddaakt ervoor te zorgen dat het onderwijs aan die doelstellingen beantwoordt. Didactische inzichten die het best werken komen vanzelf bovendrijven. Daar hoeft de overheid zich niet mee te bemoeien. Er zullen leraren nodig zijn die dat onderwijs kunnen geven. Die moeten dus daarvoor opgeleid worden. Dat gebeurt natuurlijk niet allemaal van vandaag op morgen. Daarvoor zijn we te ver afgeleden. Je moet wel ergens beginnen en weten waar je naar toe wilt. Wat mij betreft beginnen we bij de doelstellingen van het wiskundeonderwijs.

Frans Keune

Remco Duits

Faculteit Biomedische Technologie
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven
r.duits@tue.nl

Onderzoek: partituren in de beeldanalyse I

Schaalpartituren

In beeldanalyse spelen schaal en lokale oriëntatie een prominente rol. Waar bevat het beeld belangrijke informatie en op welke schaling gebeurt dit? Een gestructureerde samenvatting van deze data noemen we een partituur van de afbeelding. Deze partituur bevat de multischaal- en multiorientatieinformatie op een zo uitgesproken mogelijke manier. Remco Duits, onderzoeker op het gebied van de beeldanalyse en -interpretatie, beschrijft in dit overzichtsartikel de vele wiskundige mogelijkheden om zo'n structuur op een afbeelding aan te brengen. In dit eerste deel beperkt hij zich tot schaalpartituren van een beeld en bijbehorende evolutievergelijkingen. Deze schaalpartituren zijn natuurlijk niet erg homogeen; ze bevatten in het bijzonder singuliere punten waarvan topologische eigenschappen veranderen naarmate de schaal van observatie toeneemt. Vrijwel het gehele originele beeld kan weer worden verkregen uit deze singulariteiten. Kennis van deze singulariteiten is belangrijk voor beeld-manipulatie, compressie en objectherkenning.

Vergeleken met de mens leven computers nog in het land der blinden. Ondanks geavanceerde digitale videocamera's, dikke grafische kaarten en krachtige processoren loopt de computer bij de analyse van beelden nog mijlenver achter op de mens. Het vakgebied van de beeldanalyse probeert daar moedig verandering in te brengen. Dat hier nog een lange weg af te leggen is, komt mede door het feit dat de beeldanalyse, een vakgebied dat sterk gedreven is door creatieve ingenieurs, gebukt gaat onder het algemene gedachtengoed 'why bother if it works?', waar dikwijls 'we bother since it does not work!' meer op zijn plaats zou zijn geweest. Hier ligt een uitdaging voor de toegepaste wiskunde om generieke theorie en methoden te bedenken. Anderzijds zijn de problemen uit de beeldanalyse vaak van een stevig differentiaalmeetkundig kaliber, waar hier niet al te diep op ingegaan kan worden, zodat de beeldanalyse op zijn beurt een voedingsbron voor de wiskunde is. Binnen beide vakgebieden wordt dit nog onvoldoende beseft.

Gegeven is een digitaal grijswaardebeeld $x \mapsto f(x)$, waarbij $f(x) \in \mathbf{R}$ de gemiddelde grijswaarde voorstelt op positie $x \in \mathbf{R}^d$

waarbij we het gemiddelde hebben genomen over het pixel/voxel dat $x \in \mathbf{R}^d$ bevat. De ruimte van beelden zullen we modelleren met $L_2(\mathbf{R}^d)$, de ruimte van kwadratisch integreerbare complexwaardige functies (of liever functieklassen) gedefinieerd op $\mathbf{R}^d$, waarbij meestal $d = 2$ of $d = 3$. Geïnspireerd door ons eigen visueel systeem beschouwen we schaal- en oriëntatiepartituren van het beeld f om het beeld beter te kunnen analyseren. Dit is geheel analoog aan de analyse en representatie van een muziekstuk aan de hand van een muziekpartituur.

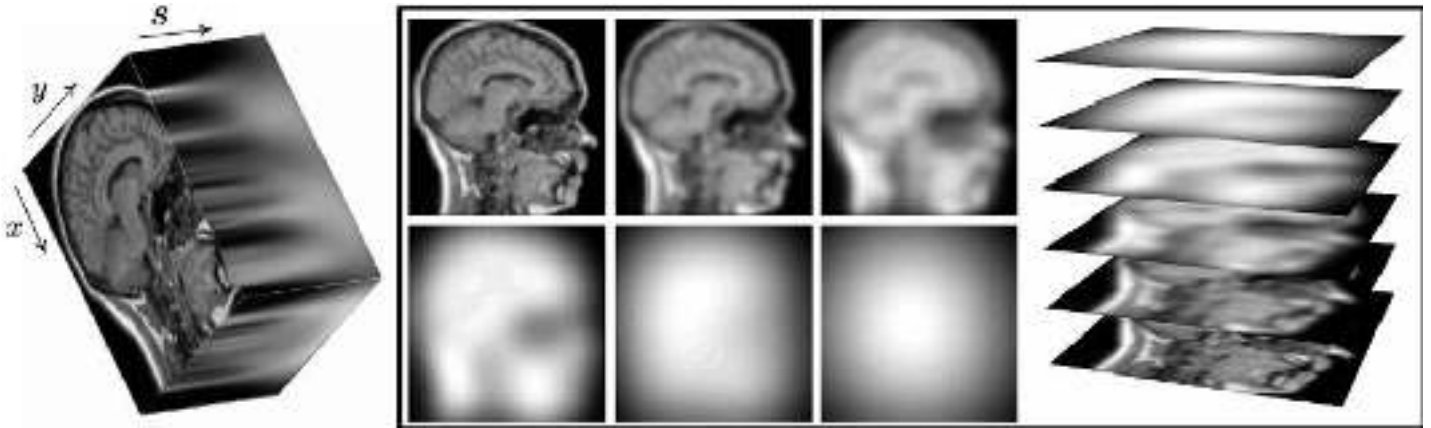
Iedereen die wel eens een muziekinstrument in zijn handen heeft gehad weet dat een partituur meer structurele informatie over tijd en lokale frequentie verstrekt dan een simpele bemonsteraar. In zo'n muziekpartituur staat aangegeven op welk moment een toon moet worden gespeeld met aangegeven lokale frequentie (hoogte van de toon), zie figuur 1.

Merk op dat hier een onzekerheid bestaat in frequentie en tijd. Om een perfecte toon te spelen met vaste globale frequentie moet hij oneindig lang duren, zodat je niet meer weet op welk tijdstip gespeeld moet worden. Terwijl een noot van oneindig korte tijdsduur alle globale frequenties verlangt, zodat de toonhoogte van deze noot niet vastgelegd kan worden. Het is dus relevant om over lokale frequenties te praten.

Dit kan als volgt worden gemodelleerd: Zij $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ het muzieksignaal en zij $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ het window waarover je lokale frequenties meet, bijvoorbeeld een Gaussische verdeling $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} e^{-\frac{x^2}{4s}}$, $s = \frac{1}{2}\sigma^2$ en veronderstel dat het signaal kwadratisch integreerbaar is, i.e. $f \in L_2(\mathbf{R})$. De partituur $W_\psi f$ van signaal f wordt nu gegeven door de zogenoemde Gaborgetransformeerde



Figuur 1 Een muziekpartituur



Figuur 2 Links: illustratie van een schaalpartituur $(x, y, s) \mapsto u_f(x, y, s)$ van een beeld $(x, y) \mapsto f(x, y)$; rechts: een aantal plakjes $u_f(\cdot, \cdot, s)$ (voor vaste schalen van $s = 0$ tot een grote schaal waarop het laatste extremum overblijft) in een schaalpartituur

$W_\psi f$ van f :

$$(W_\psi f)(t, \omega, p) = e^{-i(\frac{p}{4} - \frac{t\omega}{2})} \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\xi - t)} f(\xi) e^{-i\xi\omega} d\xi, \quad (1)$$

hetgeen een gelokaliseerde Fouriertransformatie voorstelt op tijd $t \in \mathbf{R}$, lokale frequentie $\omega \in \mathbf{R}$ en fase $p \in \mathbf{R}$. In deze formule gaan we structuur aanbrengen. Beschouw daartoe de groep van modulaties en translaties, beter bekend als de Heisenberggroep H_3 met product

$$(t + i\omega, p)(t' + i\omega', p') = ((t + t') + i(\omega + \omega'), p + p' + 2(\omega t' - \omega' t))'$$

waarbij $t + i\omega, t' + i\omega' \in \mathbf{C}, p, p' \in \mathbf{R}$, die dus een semi-direct product van de groepen $\mathbf{C}$ en $\mathbf{R}$ vormt. Dit noteren we als volgt: $H_3 = \mathbf{C} \ltimes \mathbf{R}$. Hierbij staat het extra streepje aan de linkerkant om aan te geven dat $\mathbf{C}$ dienst doet in het product op de ondergroep $(0, 0, \mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}$. De groep H_3 heeft de volgende representatie $g = (t, \omega, p) \mapsto U_g$ gegeven door

$$(U_{(t, \omega, p)} \psi)(\xi) = e^{i(\xi\omega + \frac{p}{4} - \frac{1}{2}t\omega)} \psi(\xi - t), \quad (2)$$

met $\psi \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}), t, \omega \in \mathbf{R}$. De partituur (1) kan nu worden geschreven als

$$(W_\psi f)(g) = (U_g \psi, f)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}, \quad g = (t, \omega, p),$$

waarbij $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}$ het standaard inproduct op $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ is gegeven door $(f, g)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} \overline{f(t)} g(t) dt$. We zien dus dat een muziekpartituur neerkomt op een functie op de Heisenberggroep, gemaakt middels een unitaire, irreducibele representatie U van de Heisenberggroep. Men kan nagaan dat W_ψ de ruimte van signalen $\mathbf{L}_2(\mathbf{R})$ normbehoudend afbeeldt in de ruimte van Gaborgetransformeerden, hetgeen een gesloten (reproducerende kern-) deelruimte van $\mathbf{L}_2(H_3/P)$ is, waarbij de Heisenberg groep H_3 uitgedeeld is naar zijn fase-subgroep $P = \{(0, 0, p) \mid p \in \mathbf{R}\}$ en waarbij we op het quotiënt H_3/P de invariante maat $d\omega dt$ hanteren. De praktisch relevante consequentie van dit resultaat is dat een kleine verstoring van het signaal f correspondeert met een kleine verstoring in de partituur $W_\psi f$, zodat het signaal

op stabiele wijze worden gereconstrueerd uit de partituur middels $f \equiv W_\psi^*(W_\psi f)$, waarbij W_ψ^* de geadjungeerde van W_ψ is. In meer expliciete vorm ziet de reconstructie van het signaal f uit de partituur $W_\psi f$ er uit als:

$$f = \frac{1}{C_\psi} W_\psi^* W_\psi f = \frac{1}{C_\psi} \int_{H_3/P} W_\psi[f](g) U_g \psi d\mu_{H_3/P}(g).$$

Dit is

$$f(\xi) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(t, \omega, p) \exp(i[\xi\omega + (p/4) - (1/2)t\omega]) \psi(\xi - t) dt d\omega, \quad (3)$$

met constante

$$C_\psi = (2\pi) \|\psi\|_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}^4 = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} |(U_{(t, \omega, p)} \psi, \psi)_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R})}|^2 dt d\omega < \infty.$$

Merk hierbij op dat zowel C_ψ als de reconstructie niet afhangen van de fase p .

De eerder genoemde onzekerheid tussen tijd en frequentie volgt uit de volgende afchatting

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) \text{Var}(-i\partial_x) &:= \int_{\mathbf{R}} t^2 |\psi(t)|^2 dt \int_{\mathbf{R}} \omega^2 |F\psi(\omega)|^2 d\omega \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbf{R}} |\psi(t)|^2 dt \right)^2 =: \left(\frac{1}{2i} E([x, -i\partial_x]) \right)^2 \end{aligned}$$

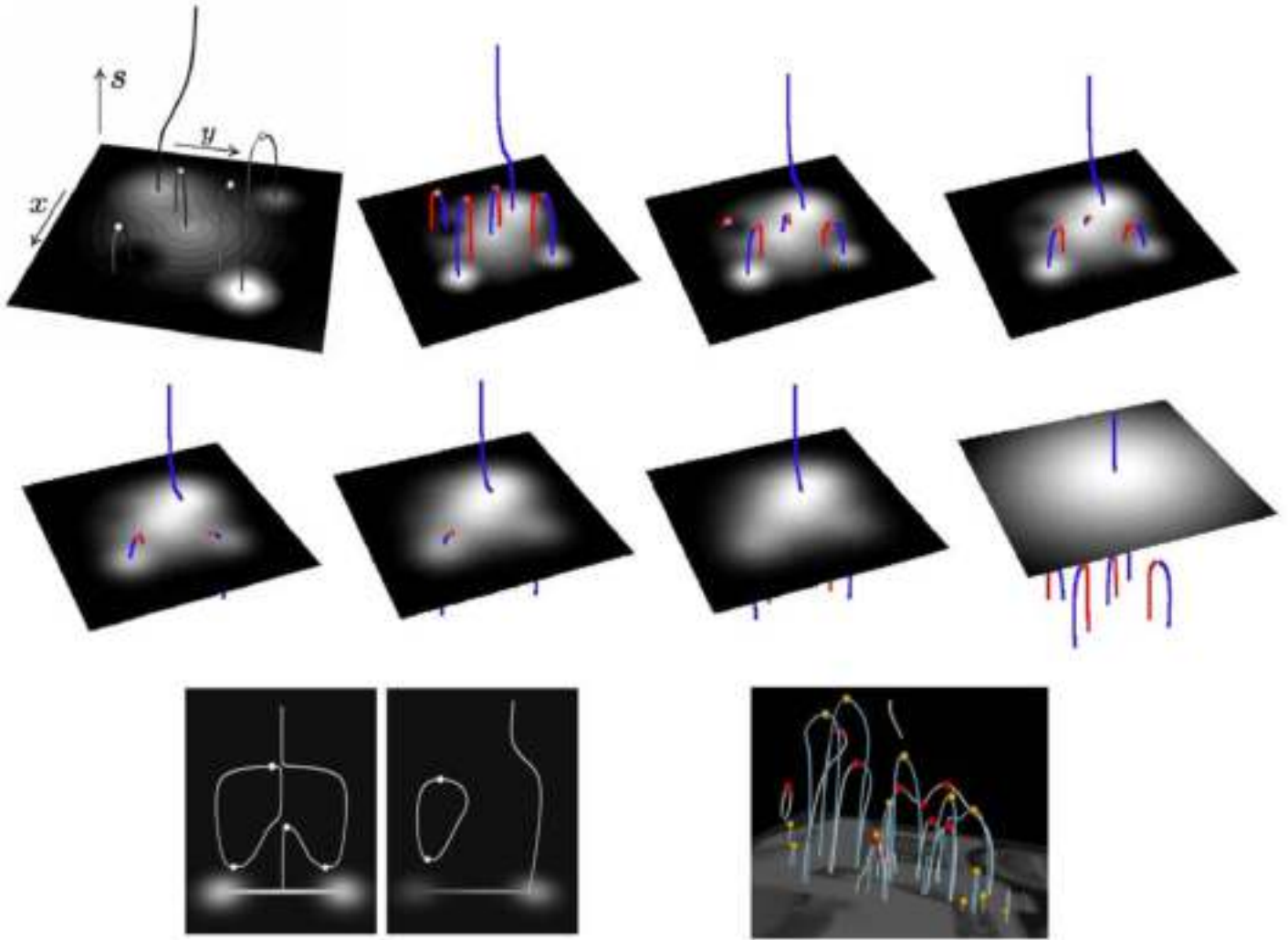
waarin $F\psi$ de Fouriergetransformeerde van ψ voorstelt gegeven door

$$F\psi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \psi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Merk hierbij op dat de commutator van de translatie- en modulatiegenerator

$$[x, -i\partial_x] = x \circ (-i\partial_x) - (-i\partial_x) \circ x$$

gelijk is aan i , zodat we zien dat de onzekerheid tussen tijd en



Figuur 3 Bovenste twee rijen: illustratie van kritieke-padenannihilatie in een Gaussische schaalpartituur van een eenvoudig plaatje bestaande uit enkele extrema. Telkens wordt een laag $u_f(\cdot, s)$ afgebeeld voor toenemende $s = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$, waarin de op dat moment aanwezige extrema en zaddels te zien zijn. Extremumpaden zijn in blauw afgebeeld, zadelpaden in rood en toppunten- en annihilatiepunten in oranje. Onderste rij links: Twee voorbeelden van annihilaties. Hierbij is het originele plaatje f (waarin een halter staat afgebeeld) wederom in perspectief afgebeeld. Rechts-onder: de kritieke paden van een Gaussische schaalpartituur (in grijs met rode toppunten) van een foto van een auto in één figuur afgebeeld met de kritieke paden in een Poissonschaalpartituur (in blauw met gele toppunten). Hierbij zijn de schalen fysisch correct vergeleken, dat wil zeggen σ in een Gaussische schaalpartituur correspondeert met s in een Poissonschaalpartituur. De figuur rechtsonder laat zien dat de kritieke paden in een Poissonschaalpartituur $\alpha = \frac{1}{2}$ soms ernstig kunnen verschillen van de kritieke paden in een Gaussische schaalpartituur $\alpha = 1$.

frequentie een direct gevolg is van het niet-commutatieve gedrag van de groep H_3 .

Nu keren we weer terug naar de beeldanalyse. Hierbij is een grijswaardebeeld $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ gegeven. Hiervan kan ook een frequentiepartituur worden bepaald middels

$$(W_\psi f)(\mathbf{x}, \omega, p) = \exp(-i(\frac{p}{4} - \frac{(\mathbf{x}, \omega)}{2})) \int_{\mathbf{R}} \overline{\psi(\xi - \mathbf{x})} f(\xi) \exp(-i(\xi, \omega)) d\xi,$$

waarbij $\mathbf{x}, \omega \in \mathbf{R}^2, p \in \mathbf{R}$. Zulke partituren zijn handig voor textuuranalyse in een plaatje. Wij zullen ons hier echter richten op twee andere essentiële groepen; hier zullen we de groep van translaties en schalingen $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathbf{R}^+$ beschouwen en in deel II behandelen we de groep van translaties en rotaties $SE(2) = \mathbf{R}^2 \rtimes SO(2)$. Hierbij gebruiken we wederom transformaties van het type

$$((x, y) \mapsto f(x, y)) \mapsto (g \mapsto (U_g \psi, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)}), \quad (4)$$

waarbij we de Heisenberggroeppresentatie (2) vervangen door de volgende representaties van respectievelijk $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathbf{R}^+$ en $SE(2)$:

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{x}, a} \psi(\mathbf{y}) &= \frac{1}{a} \psi\left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{a}\right), \\ U_{\mathbf{x}, e^{i\theta}} \psi(\mathbf{y}) &= \psi(R_\theta^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (5)$$

waarbij

$$\begin{aligned} a &> 0, \theta \in [0, 2\pi], \\ R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2), \mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

hetgeen leidt tot respectievelijk schaal- en oriëntatiepartituren. Het eerste probleem dat hier opduikt is het reconstructieprobleem: hoe reconstrueren we f op stabiele wijze uit $W_\psi f$, analoog aan (3). Dit probleem komt voort uit het feit dat de represen-

taties (5) reducibel zijn (dat wil zeggen ze laten gesloten strikte deelruimten van $L_2(\mathbf{R})$ invariant. Bijvoorbeeld de representatie $(\mathbf{x}, e^{i\theta}) \mapsto U_{\mathbf{x}, e^{i\theta}}$ in (5) van de groep van translaties en rotaties is reducibel omdat de deelruimte, bestaande uit alle L_2 -elementen wiens Fouriertransformatie compact gedragen is op een bal met vaste straal, in zichzelf wordt afgebeeld. Zodat Mackey's theorie [11] van stal gehaald moet worden om ψ zodanig te kiezen om unitaire transformaties W_ψ te verkrijgen. Daarmee zijn de algemene waveletreconstructie-stellingen die stabiele reconstructies van het type $f = W_\psi^* W_\psi f$, zoals (3) garanderen niet van kracht. Dit is belangrijk voor het uiteindelijke doel operaties van een beeld f via operaties op de bijbehorende partituur $W_\psi f$, waar de informatie een stuk handzamer geordend is, uit te voeren, [4]. Operatoren op partituren kunnen alleen op stabiele wijze 1-op-1 gerelateerd worden aan operatoren op beelden als er een stabiele inverteerbare transformatie tussen beeld en partituur bestaat.

Schaalpartituren

A priori is het niet bekend op welke schaal je naar het beeld moet kijken en juist daarom is het nuttig om een plaatje simultaan op alle schalen te bekijken middels een schaalpartituur $u_f : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$. In het geval van lineaire schaalpartituren, die volgen uit de schaal-ruimteaxioma's [5], wordt u_f verkregen uit f middels

$$\begin{cases} \partial_s u_f = -(-\Delta)^\alpha u_f, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \lim_{s \downarrow 0} u_f(\cdot, s) = f(\cdot), \end{cases} \quad (6)$$

waar $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ de Laplaciaan op $\mathbf{R}^d$ voorstelt. De oplossingen van (6) zijn

$$u_f^\alpha(\mathbf{x}, s) = (K_s^\alpha * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} K_s^\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (7)$$

waarbij $s > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, met convolutiekern

$$K_s^\alpha = F^{-1}[\omega \mapsto e^{-s\|\omega\|^{2\alpha}}].$$

De belangrijkste gevallen in deze door $\alpha \in (0, 1]$ geparameteriseerde familie van schaalpartituren, zijn de gevallen $\alpha = 1$ en $\alpha = \frac{1}{2}$ respectievelijk resulterend in een diffusiesysteem en potentiaalprobleem op de halfruimte $s > 0$. In deze gevallen is de convolutiekern de Gaussische kern respectievelijk de Cauchy kern:

$$\begin{aligned} K_s^1(\mathbf{x}) &= G_s(\mathbf{x}) := \frac{e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4s}}}{(4\pi s)^{d/2}}, \\ K_s^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) &= \frac{2}{\sigma_{d+1}} \frac{s}{(s^2 + \|\mathbf{x}\|^2)^{\frac{d+1}{2}}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ correspondeert met harmonische voortzetting van f naar de halfruimte $s > 0$. Ondanks dat het geval $\alpha = \frac{1}{2}$ dankzij de mooie eigenschappen van harmonische functies (en harmonische vectorpotentialen) vele voordelen heeft ten opzichte van het geval $\alpha = 1$, zullen we hier ons voor het gemak beperken tot het conceptueel eenvoudigere geval $\alpha = 1$, waarin het systeem (6) een eenvoudig diffusie probleem is :

$$\begin{cases} \partial_s u_f = \Delta u_f, \\ \lim_{s \downarrow 0} u_f(\cdot, s) = f(\cdot). \end{cases} \quad (9)$$

Als we de oplossing van dit probleem u_f , die wordt gegeven door convolutie van origineel beeld f met een Gaussische verdeling, beperken tot vaste schaal, verkrijgen we een beeld $u_f(\cdot, s) = G_s * f$ dat moet worden opgevat als het beeld geobserveerd op schaal $s = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0$, zie figuur 2.

Ten gevolge van de diffusie (stelling van Gauss), zal er een grijswaardestroming op gang komen die lokale maxima en minima zal doen verdwijnen, totdat er uiteindelijk één extremum overblijft in het zwaarte punt van het plaatje. Zie figuur 3 en figuur 2.

Generieke topologische transitie in een schaalpartituur

Aan de hand van Morsetheorie kunnen alle generieke topologische veranderingen gekarakteriseerd worden met behulp van lokale oplossingen (germs) die voldoen aan de evolutievergelijkingen (zie figuur 3 voor illustraties van topologische transitie in schaalpartituren). De meest relevante topologische veranderingen zijn de eenzijdig stabiele gevallen (zie [3] wpp. 81–83, [2] voor wiskundige details.

Deze gevallen volgen uit de zogenoemde cuspcatastrofe

$$C_1(\mathbf{x}) = x_1^3 + \sum_{i=2}^d a_i x_i^2, a_i \neq 0, \quad (10)$$

met deformatie $x_1^3 + s x_1 + \sum_{i=2}^d a_i x_i^2$. Het is eenvoudig na te gaan dat er voor $s > 0$ geen kritieke punten zijn, terwijl voor $s < 0$ een zadel en extremum ontstaan. Gebruiken we C_1 als begin conditie voor een diffusieprobleem dan krijgen we

$$u(\mathbf{x}, s) = (G_s * C_1)(\mathbf{x}) = x_1^3 + 6s x_1 - 2\left(\sum_{k=2}^d a_k\right)s + \sum_{k=2}^d a_k x_k^2.$$

Dit zijn de germs die een annihilatie van een extremum en een zadel representeren in een Gaussische schaalpartituur (zie figuur 3).

Een generiek annihilatiepunt $(\mathbf{x}^*, s^*) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ wordt bepaald door de volgende vergelijkingen

$$\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*) = \mathbf{0} \text{ en } \det(H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*)) = 0, \quad (11)$$

waar $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}^*, s^*) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_f \right) (\mathbf{x}^*, s^*) \right]$ de ruimtelijke Hessiaan voorstelt. Dit is eenvoudig meetkundig in te zien: langs een zadelpad $s \mapsto (\mathbf{x}(s), s)$ in schaal-ruimte geldt $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s) = \mathbf{0}$ en zullen de eigenwaarden van de Hessiaan $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s)$ van teken verschillen. Langs een extremumpad $s \mapsto (\mathbf{x}(s), s)$ in schaal-ruimte geldt $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s) = \mathbf{0}$ en zullen de eigenwaarden van de Hessiaan $H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}(s), s)$ hetzelfde teken hebben. Zodoende moet in zo'n punt $(\mathbf{x}^*, s^*) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^+$ waar zadelpad en extremumpad annihilieren de gradiënt en tenminste een van de eigenwaarden van de Hessiaan nul moet zijn.

Nu we de generieke topologische transitie hebben besproken, kunnen we ons afvragen wat deze topologische transitie vertellen over het originele beeld f . Het is duidelijk dat ze het originele beeld niet uniek vastleggen, maar de onvermijdelijke vraag is: 'kunnen we uit de locaties van de annihilatiepunten (ook wel top-

punten genoemd) en de tot en met tweede orde differentiaalstructuur ter plaatse een goede benadering van het originele beeld verkrijgen?

Toppuntreconstructie

Gegeven is de verzameling toppunten $\{(\mathbf{x}_i, s_i)\}_{i=1}^N \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+$ in het schaal-ruimtedomein van een Gaussische schaalpartituur $u_f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ van een plaatje $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Er bestaan diverse methoden om deze punten te verkrijgen, die we hier niet verder zullen toelichten.

Toppunten zijn spatiële kritieke punten en dus geldt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} u_f(\mathbf{x}_i, s_i) &= \frac{\partial}{\partial x^j} (G_{s_i} * f)(\mathbf{x}_i) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j} G_{s_i} * f \right)(\mathbf{x}_i) = (\psi_{i, \mathbf{e}_j}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} = 0, \end{aligned}$$

waarbij $\psi_{i, \mathbf{e}_j}(\mathbf{x}) = (\frac{\partial}{\partial x^j} G_{s_i})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$, $j = 1, 2$, $i = 1, \dots, N$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Verder hebben we in de vorige paragraaf beargumenteerd dat bovendien $\det H_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}_i, s_i) = 0$ moet gelden in een toppunt.

We zijn op zoek naar een approximatieve reconstructie $\tilde{f} \in L_2(\mathbf{R}^2)$ van het originele plaatje zodanig dat de bijbehorende schaalpartituur $u_{\tilde{f}}$ in ieder geval weer toppunten heeft ter plaatse $\{(\mathbf{x}_i, s_i)\}_{i=1}^N$. Dit doen we door af te dwingen dat

$$D^{(n_1, n_2)} u_f(\mathbf{x}_i, s_i) = D^{(n_1, n_2)} u_{\tilde{f}}(\mathbf{x}_i, s_i) \quad (12)$$

geldt voor alle $0 \leq n_1 + n_2 \leq 2$, $i = 1, \dots, N$, waar we de korte notatie $D^{(n_1, n_2)} u_f(\mathbf{x}_i, s_i) := \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \frac{\partial^{n_2}}{\partial x_2^{n_2}} u_f(\mathbf{x}_i, s_i)$ gebruiken. Het is eenvoudig na te gaan dat deze eis kan worden herschreven als

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \forall \mathbf{n}, 0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2 : (\psi_{i, \mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} = (\psi_{i, \mathbf{n}}, \tilde{f})_{L_2(\mathbf{R}^2)}, \quad (13)$$

waarbij $\psi_{i, \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (D^{(n_1, n_2)} G_{s_i})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ en de multi-index $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ met $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$.

De verzameling getallen

$$\{(\psi_{i, \mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)} \mid i = 1, \dots, N, \mathbf{n} = (n_1, n_2), |\mathbf{n}| \leq 2\}$$

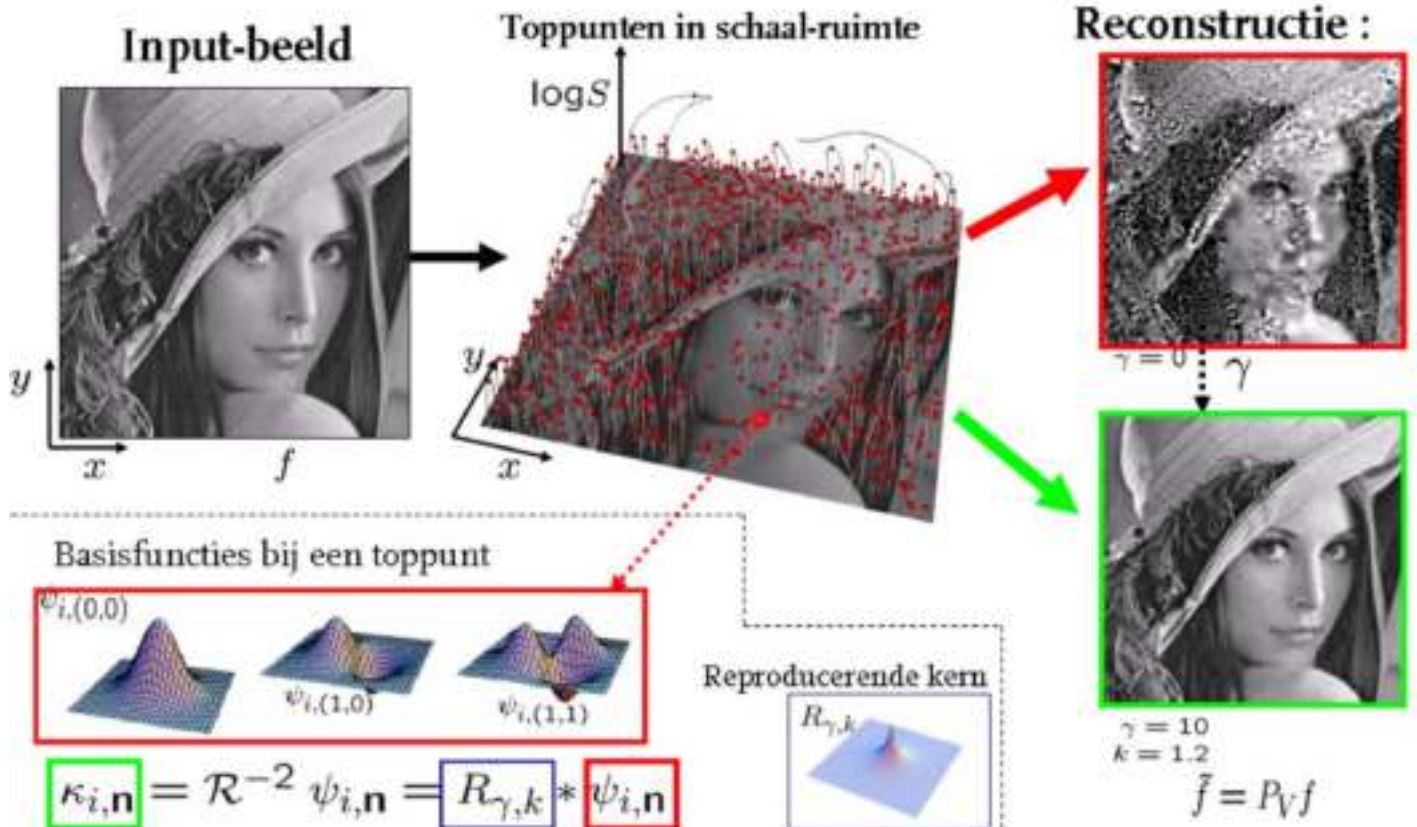
in (13), vormen als het ware een vingerafdruk van het plaatje f . De getallen worden ook wel de 'features' van f genoemd. We zullen ze voortaan noteren met

$$\{C_{f; i, \mathbf{n}}\} := \{(\psi_{i, \mathbf{n}}, f)_{L_2(\mathbf{R}^2)}\}_{i=1, \dots, N, |\mathbf{n}| \leq 2} \quad (14)$$

Dan merken we op dat (12) een equivalentierelatie definieert op $L_2(\mathbf{R}^2)$ en dat de equivalentieklasse van plaatjes met dezelfde features als f wordt weergegeven door

$$\{g \in L_2(\mathbf{R}^2) \mid g \sim f\} = f + V^\perp \quad (15)$$

waar $V^\perp$ het orthogonaal complement is van de lineaire ruimte V



Figuur 4 Gegeven het origineel beeld bepalen we de singulariteiten en toppunten in de bijbehorende schaalpartituur aangegeven met rode bolletjes. De tot en met tweede orde differentiaalstructuur in ieder toppunt geeft ons de verzameling basisfuncties $\{\psi_{i, \mathbf{n}}\}_{|\mathbf{n}| \leq 2}$, waarvan we de grafiek van enkele gevallen in het rode kader hebben weergegeven. Deze basisfuncties zijn goed zichtbaar in het reconstructiebeeld rechts bovenaan, omdat hier $\gamma = 0$, dat wil zeggen binnen onze equivalentie klasse van beelden, (15), beschouwen we degenen met minimale L_2 -norm. Echter bij vast gekozen $k > 1$ (in dit geval $k = 1.2$), kunnen we de gladheid van ons het gereconstrueerde beeld (16), opgebouwd uit basisfuncties $\kappa_{i, \mathbf{n}}$, reguleren met de parameter $\gamma > 0$ die de norm en reproducerende kern $R_{\gamma, k}$ in de bijbehorende Sobolevruimte vastlegt. Merk op dat het reconstructiebeeld het origineel op accepteerbare wijze benadert, hetgeen beeldmanipulatie en -herkenning aan de hand van toppunten in de bijbehorende schaalpartituur mogelijk maakt.

lineair opgespannen door de vectoren

$$V = \text{span} \{ \psi_{i,\mathbf{n}} \mid i = 1, \dots, N, 0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2 \} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2).$$

Binnen deze equivalentieklasse zoeken we naar het element $\tilde{f}$ met minimale Sobolevnorm gegeven door

$$\tilde{f} = \arg \min_{g \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2), g \sim f} \|g\|_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)}^2 := \arg \min_{g \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2), g \sim f} (g, g)_{(\mathbf{L}_2, \mathbf{R}^2)} + (g, \gamma^{2k} |\Delta|^k g)_{(\mathbf{L}_2, \mathbf{R}^2)},$$

voor vast gekozen $\gamma > 0$ en $k > 1$. (We merken op dat $\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)$ een reproducerende kernen ruimte als $k > 1$ is. In dit geval volgt κ_k uit ψ_k door convolutie met de reproducerende kern $R_{\gamma,k}$, i.e. $\kappa_{i,\mathbf{n}} = R_{\gamma,k} * \psi_{i,\mathbf{n}}$.) Dit element wordt verkregen door middel van orthogonale projectie van de Sobolevruijme

$$\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2) = \{f \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2) \mid Rf := \sqrt{I + \gamma^{2k} |\Delta|^k} f \in \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^2)\}$$

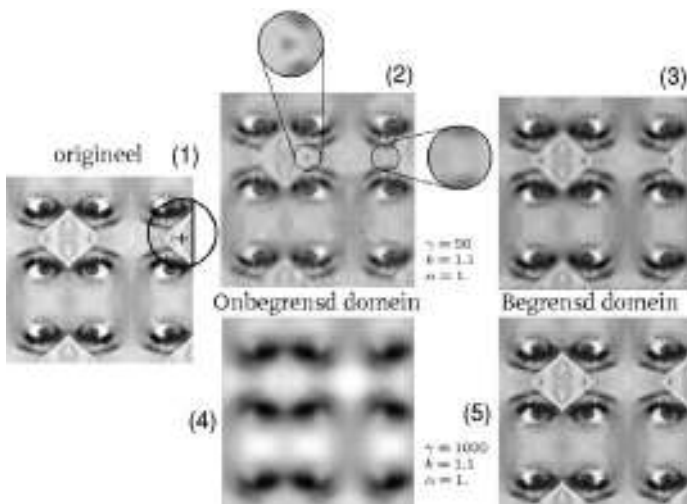
op V . Om technische details te vermijden, nemen we hier voor het gemak even aan $f \in \mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)$. In dat geval wordt de reconstructie gegeven door

$$\tilde{f} = P_V f = \sum_{0 \leq n_1 + n_2 \leq 2} \sum_{i=1}^N C_f^{i,\mathbf{n}} \kappa_{i,\mathbf{n}}, \quad (16)$$

waarbij de basis-functies zijn gegeven door

$$\kappa_{i,\mathbf{n}} = (I + \gamma^{2k} |\Delta|)^{-1} \psi_{i,\mathbf{n}}$$

met bijbehorende reciproke basis $\kappa^{i,\mathbf{n}}$, i.e.



Figuur 5 Probleem van de rand: als de singulariteiten te dicht bij de rand komen te liggen zullen de bijbehorende basisfuncties $\kappa_{i,\mathbf{n}}$ teveel bestraft worden omdat ze, in tegenstelling tot het originele plaatje f , over de rand lopen. Van links naar rechts en van boven naar beneden: (1) origineel plaatje f ; (2) onbegrensd domein toppunt reconstructie (16), $\gamma = 50$, $\alpha = 1$, $k = 1.1$; (3) begrensd domein reconstructie (17) met zelfde parameters; (4) onbegrensd-domeinreconstructie $\gamma = 1000$, $\alpha = 1$, $k = 1.1$, vanuit singuliere punten posities in de schaalpartituur van Δf ; (5) zelfde settings voor begrensd-domeinreconstructie (17). Het is duidelijk te zien dat het probleem aan de randen is opgelost in het begrensd-domeingeval.

$$(\kappa^{i,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{m}})_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)} = \delta_j^i \delta_{m_1}^{n_1} \delta_{m_2}^{n_2}$$

en waarbij we de getallen $\{C_f^{i,\mathbf{n}} := (\kappa^{i,\mathbf{n}}, f)_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)}\}$ berekenen uit de features (14) middels de inverse Grammatrix. Voor het berekenen van de inverse Grammatrix gebruiken we een standaard singuliere-waardendecompositie, met drempel op de singuliere waarden, om de goedgesteldheid van de inverse te bewaken.

De parameter $\gamma > 0$ regelt de gladheid van de reconstructie [3, 6, 9] (zie figuur 4). Het is duidelijk te zien dat de basisfuncties $\kappa^{i,\mathbf{n}}$ extra glad zijn en vanwege de Sobolevnormminimalisatie veel beter in elkaar overlopen in het reconstructie beeld naarmate $\gamma > 0$ groter wordt. Op die manier kunnen we 'de gereconstrueerde Lena ontdoen van haar $\mathbf{L}_2$ -puistjes', zoals de rechter kolom van figuur 4 duidelijk laat zien.

Een nadeel bij de hierboven besproken aanpak is dat $\gamma > 0$ niet te groot gekozen mag worden. De reden hiervoor is dat naarmate $\gamma > 0$ groter wordt de basis vectoren κ_i meer en meer buiten de rand van het compact gedragen originele plaatje vallen en dus onnodig bestraft worden. Dit heeft tot gevolg dat het gereconstrueerd beeld vanuit de rand structuren gaat missen. De oplossing voor dit probleem is zowel de schaalpartituur en de Sobolevnormen op een eindig gebied met Dirichletrandvoorwaarden te beschouwen. Het originele plaatje f compact gedragen op $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ voldoet echter niet aan zo'n randvoorwaarde. Daarom zetten we de rand middels een snel efficient algoritme naar binnen harmonisch voort $(f|_{\partial\Omega})_H$, i.e. $\Delta((f|_{\partial\Omega})_H) = 0$ en $(f|_{\partial\Omega})_H|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$. We schrijven

$$f = f - (f|_{\partial\Omega})_H + (f|_{\partial\Omega})_H$$

We slaan nu $f|_{\partial\Omega}$ apart op en berekenen de Gaussische schaalpartituur van $F := f - (f|_{\partial\Omega})_H$ op het eindige domein Ω , wederom via een diffusievergelijking (9) en met Dirichletrandvoorwaarde $u_F(\mathbf{x}, s) = 0$ voor alle $\mathbf{x} \in \partial\Omega, s > 0$. De oplossing wordt nu gegeven door

$$u_F(\mathbf{x}, s) = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} e^{-(\lambda_{pq})s} (f_{pq}, F)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} f_{pq}(\mathbf{x}),$$

waar de eigenwaarden en eigenfuncties zijn gegeven door

$$\lambda_{pq} = \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2$$

en

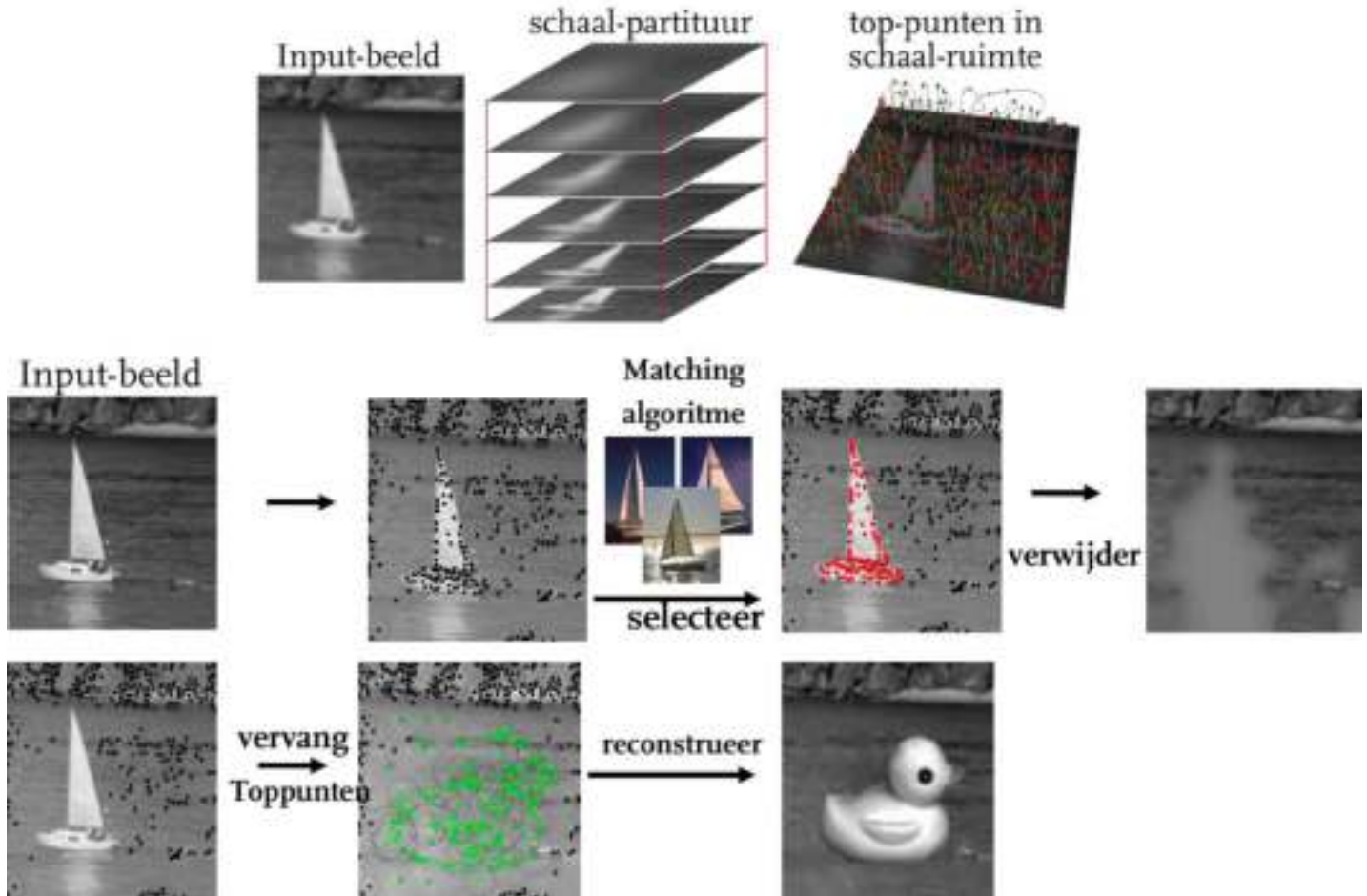
$$f_{pq}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right).$$

De optimale reconstructie wordt nu gegeven door

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = (f|_{\partial\Omega})_H(\mathbf{x}) + \sum_{0 \leq |\mathbf{n}| \leq 2} \sum_{0 \leq |\mathbf{m}| \leq 2} \sum_{i,j=1}^N G^{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}} (\psi_{i,\mathbf{n}}, F)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \kappa_{j,\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \quad (17)$$

waar de multi-indices $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, met $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$ en waar $G^{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}}$ de inverse matrix is van de Grammatrix

$$G_{i,\mathbf{n};j,\mathbf{m}} = (\kappa_{i,\mathbf{n}}, \kappa_{j,\mathbf{m}})_{\mathbf{H}_\gamma^{k,2}(\mathbf{R}^2)} = \sum_{p,q \in \mathbf{N}} \frac{e^{-(\lambda_{pq})(s_j + s_i)}}{1 + \gamma^{2k} (\lambda_{pq})^k} (D^{(\mathbf{m})} f_{pq})(\mathbf{x}_j) (D^{(\mathbf{n})} f_{pq})(\mathbf{x}_i).$$



Figuur 6 Bovenste rij, van links naar rechts: origineel beeld, bijbehorende schaalpartituur, toppunten in schaalpartituur. Onderste twee rijen: objectgeoriënteerde beeldmanipulatie aan de hand van toppunten

In onze algoritmen gebruiken we *discrete* sinustransformaties in plaats van sinusreeksen, om exact te blijven op het grid. Voor details met betrekking tot deze laatste stap, zie [7]. Tot slot merken we op dat het qua reconstructie vaak beter is om de locaties van toppunten in de schaalpartituur $u_{\Delta f}$ van de Laplaciaan van f , Δf (merk op $u_{\Delta f} = \Delta u_f = \partial_s u_f$) te beschouwen omdat deze toppunten, in tegenstelling tot de toppunten in de schaalpartituur u_f van f , meer boven de randen van structuren in een plaatje liggen (zie figuur 5).

Het grote voordeel van deze eindig-domeinreconstructies (die eenvoudig te generaliseren zijn naar α -schaal partituren door overal λ_{pq} te vervangen door λ_{pq}^α) is dat $\gamma > 0$ groot gekozen kan worden. In het oneindige domein was dit niet mogelijk.

Toepassingen

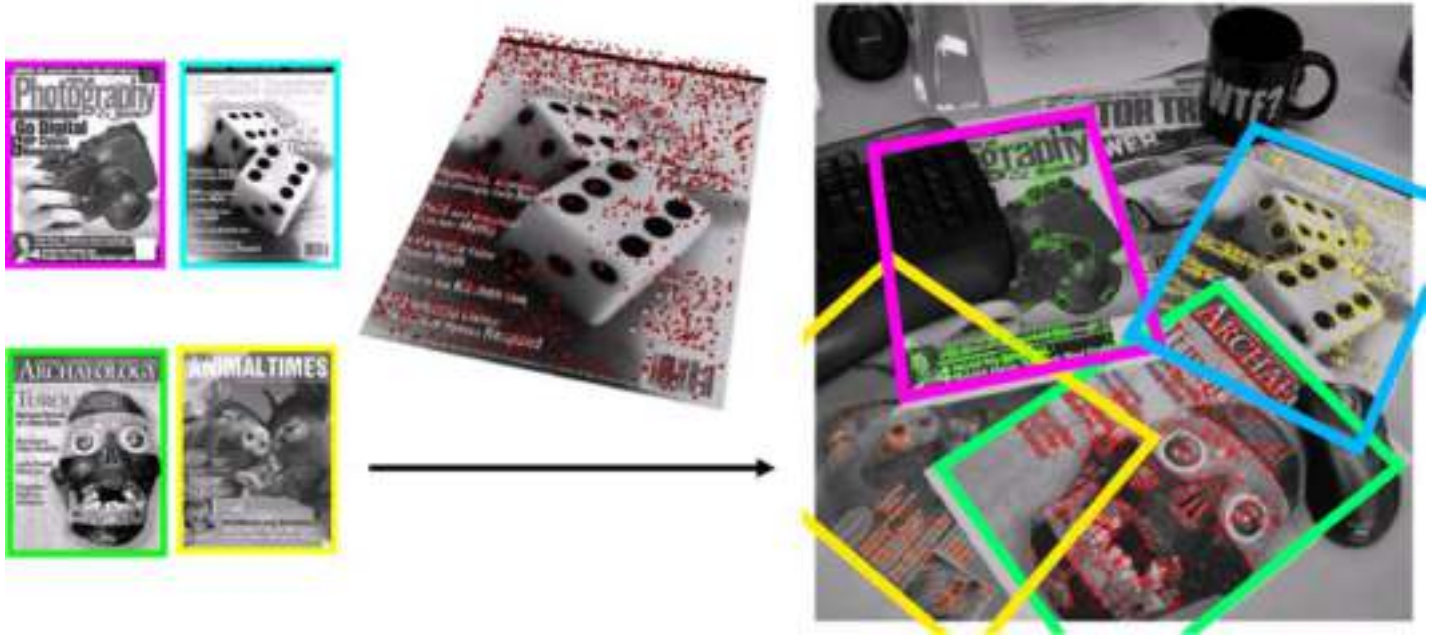
Nu we hebben aangetoond dat we uit de toppunten in een schaalpartituur het beeld kunnen reconstrueren, kunnen we eens kijken wat we hier mee kunnen.

Allereerst merken we op dat bij ieder toppunt een aantal basisfuncties horen. Het reconstructiebeeld is dus uitgedrukt in een set basisfuncties die zuiver en alleen door de topologie van het beeld (en bijbehorende schaalpartituur) zijn bepaald. Dit heeft als voordeel dat als er zich lokaal weinig structuur in het plaatje bevindt (en er dus lokaal weinig toppunten aanwezig zijn), er ook weinig basisfuncties worden gebruikt. We hebben dus een topologisch correcte ma-

nier gevonden om een beeld in beeld-afhankelijke basisfuncties te beschrijven. Hierbij dient echter wel te worden opgemerkt dat standaardontwikkelingen van een plaatje, zoals bijvoorbeeld de welbekende jpeg-compressie, veel sneller zijn omdat ze op regelmatige vaste roosters zijn geordend en geen initiële berekening van toppunten behoeven.

Uit het voorafgaande is gebleken dat de tot en met tweede orde differentiaalstructuur in de toppunten van schaalpartituur van een beeld f (met eventueel daar aan toegevoegd de tweede orde differentiaalstructuur in de toppunten van Δf) goede benaderingen opleveren voor het originele beeld. Dit is belangrijk voor objectherkenning van beelden met als input de features ten gevolge van de differentiaalstructuur in toppunten [1]. Hierbij worden de toppuntfeatures (14) van het te herkennen object vergeleken met de toppuntfeatures in het gegeven beeld (zie figuur 7).

Verder kan een beeld nu worden gemanipuleerd via zijn toppunten. Gegeven is een input-beeld met daarin een bepaald object, bijvoorbeeld een boot zoals in figuur 6. We kunnen dan het object herkenning algoritme gebruiken om in de verzameling toppunten die verzameling toppunten te markeren die het beste lijkt (aan de hand van de ligging en vooral ook aan de hand van bijbehorende features) op toppunt verzamelingen van diverse beelden van soortgelijke objecten. Deze toppunten kunnen we vervolgens verwijderen, zodat het reconstructie algoritme een beeld levert zonder het object. Voorts kunnen we op soortgelijke wijze objecten ook toevoegen, bijvoor-



Figuur 7 Objectherkenning gebruikmakend van tot en met derde orde differentiaalstructuur in toppunten. Links: objecten zijn voorpagina's van diverse tijdschriften; midden: toppunten in schaalpartituur van één object; rechts: plaatje waar de objecten in moeten worden gevonden, door middel van een matching algoritme dat clusters van toppunten (met bijbehorende features) in de schaalpartituur van rechterbeeld vergelijkt met toppunten (met bijbehorende features) in de schaalpartituur van objectafbeeldingen. Ter illustratie hebben we de toppunten (in schaalruimte) geprojecteerd op het beeldvlak.

beeld het rubberen badeendje in figuur 6. Voor een eerste praktische studie over deze manier van beeldmanipulatie, zie [10]. Het hoofdprobleem bij deze aanpak is het feit dat bij verwijdering van één toppunt ook de interactie (grijswaardenstroming) tussen extreme paden behorend bij een toppunt wordt weggehaald. Hiervoor zullen flux-features [6] moeten worden voorgeschreven en iteratieve (van grof naar fijn, i.e. van grote schaal naar kleine schaal, equidistant in $\log s$) eindig-domeinreconstructies met Neumannrandvoorwaarden (op alle iteratieschalen) worden gebruikt.

Tot slot is er de toepassing van toppunt reconstructies in de analyse van 'optic-flow' in videosequenties. Bij deze toepassing is het de bedoeling om objecten te volgen in een videosequentie, i.e. tijdsafhankelijke beelden [8].

Adaptieve schaalpartituren

Tot nog toe hebben ons beperkt tot lineaire transformaties tussen beeld en schaalpartituur. Deze waren gegeven door (6). In het bijzonder hebben we ons beperkt tot $\alpha = 1$, die corresponderen met een diffusieproces op de half-ruimte $s > 0$ en die gegeven waren door convoluties met een Gaussische kern G_s . Deze kern is isotroop, zodat rotatie van het beeld f correspondeert met rotatie van alle lagen $\{u_f(\cdot, s)\}_{s>0}$ in de schaalpartituur u_f . Het is duidelijk dat een convolutie van een grijswaardebeeld met een niet isotrope kern vaak niet wenselijk is, aangezien je dan niet alle richtingen hetzelfde behandelt. Aan de andere kant is het vanuit praktisch oogpunt vaak erg vervelend dat zo'n isotrope convolutie gedeelten in het beeld waar veel structuur zit net zo sterk vervaagt als gedeelten waar weinig structuur zit (zie figuur 2).

Daarom wordt de lineariteit van de afbeelding $f \mapsto u_f$ vaak overboord gegooid en gebruikt men een beeldadaptieve conductieterm tussen de div en de grad van de Laplace operator $\Delta = \text{div} \circ \text{grad}$ in het diffusie proces. Na het artikel van Perona en Malik [12] zijn er talloze artikelen verschenen waarbij men de con-

ductiviteit afhankelijk van de gradiëntnorm koos. Dit levert dan evolutievergelijkingen van het type

$$\begin{cases} \partial_s u_f(\mathbf{x}, s) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (c(\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s)\|) \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s))(\mathbf{x}), \\ u_f(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

waarbij de conductiviteit $(\mathbf{x}, s) \mapsto c(\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)\|)$ meestal als een van de volgende typen

$$\begin{aligned} c(t) &= \exp\left(-\frac{c}{(\lambda/t)^{2p}}\right), \quad c(t) = \frac{1}{(t/\lambda)^{2p} + 1}, \\ c(t) &= \frac{1}{\sqrt{(t/\lambda)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (18)$$

gekozen werd. Bij al deze methoden wordt echter geen gebruik gemaakt van de richting van de gradiënt. Daarom stelde Weickert [13] efficiënte numerieke schema's voor om de niet-lineaire diffusiesystemen die ontstaan door de scalarwaardige conductiviteit te vervangen door een matrixwaardige conductiviteit gebaseerd op de richting van de gradiënt. Deze schema's zijn bekend geworden onder de naam 'coherence enhancing diffusion schemes'. Deze matrixwaardige conductiviteit $(\mathbf{x}, s) \mapsto C(u_f, \mathbf{x}, s)$, is gegeven door

$$C(u_f, \mathbf{x}, s) = \zeta I + (1 - \zeta) \cdot \exp\left(-\frac{c}{(\lambda_1(S(u_f)(\mathbf{x}, s)) - \lambda_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s)))^2}\right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \quad (19)$$

waarbij $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s))$ de eigenvector is met kleinste eigenwaarde van

$$S(u_f)(\mathbf{x}, s) = (G_\sigma * (\nabla u_f(\cdot, s)))^T \nabla u_f(\cdot, s)(\mathbf{x})$$

met $\zeta \in (0, 1)$, $c > 0$, $\sigma > 0$ en waarin de hulpmatrix $S(u_f)(\mathbf{x}, s)$

met eigenwaarden $\{\lambda_i(S(u_f)(\mathbf{x}, s))\}_{i=1,2}$ zowel dienst doet in een maat voor lokale anisotropie

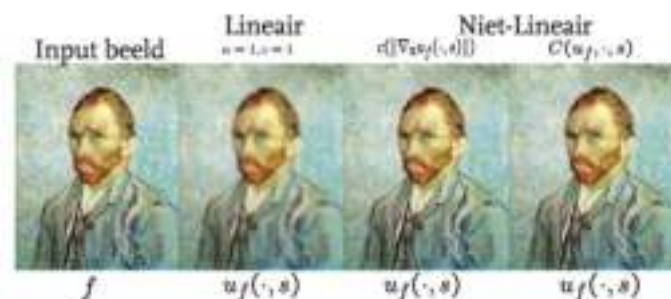
$$\exp\left(-\frac{c}{(\lambda_1(S(u_f)(\mathbf{x}, s)) - \lambda_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s)))^2}\right)$$

en tegelijkertijd dienst doet als hulpmatrix in een oriëntatieschatting via de eigenvector $\mathbf{e}_2(S(u_f)(\mathbf{x}, s))$ met kleinste eigenwaarde. Om robuuste oriëntatieschattingen te krijgen is er een componentsgewijze gladmakende convolutie (geparameteriseerd door $\sigma > 0$) toegepast op 2×2 matrixveld $\mathbf{x} \mapsto \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)^T \nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s)$, waar $\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\mathbf{x}, s) = (\partial_x u_f(\mathbf{x}, s), \partial_y u_f(\mathbf{x}, s))$.

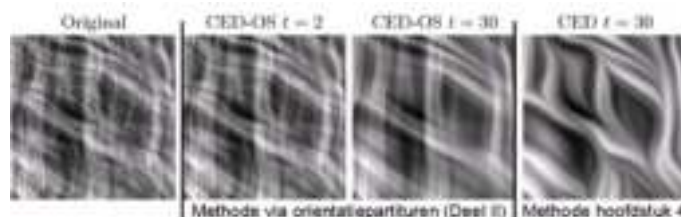
Voor een vergelijking van lineaire diffusie, niet lineaire diffusie afhankelijk van $\|\nabla_{\mathbf{x}} u_f(\cdot, s)\|$ en 'coherence-enhancing' diffusie, zie figuur 8. Hier is opzettelijk een Van Goghschilderij gekozen omdat een van de eigenschappen van coherence enhancing diffusie is dat het van ieder beeld een soort Van Goghschilderij maakt. Dit is overigens zelfs een optie op speciale mobiele telefoons van Nokia, waarbij je met een druk op de knop je foto's direct kan laten 'Van Goghen' middels een snel coherence enhancing diffusie schema.

Echter alleen in enkele beeldanalyse-applicaties, zoals het verbeteren van afbeeldingen met vage vingerafdrukken, waarbij er geen (bijna) kruisende structuren zijn is dit artistieke effect onschuldig. Kritisch bekeken is dit artistieke effect een verloedering van het beeld omdat er overal kunstmatige krommingen in het plaatje worden gecreëerd. Het probleem is, dat de richting van de gradiënt bij kruisende hoogtelijnen niet goed gedefinieerd is. Hetzelfde geldt voor soortgelijke methoden gebaseerd op eigen vectoren van de Hessiaan bij kruisende lijnen. Daarom is het noodzaak om gebruik te maken van oriëntatiepartituren (zie figuur 9). In het tweede deel van dat artikel, dat in het septembernummer verschijnt zullen we hier verder op ingaan.

Om alvast een tipje van de sluier op te lichten: dan zullen we eerst beelden op stabiele wijze bijtief relateren aan oriëntatiepartituren (weer door middel van transformaties van het standaard type (4)) om vervolgens adaptieve schaalpartituren



Figuur 8 Van links naar rechts: input beeld f : dit is het bekende zelfportret van Van Gogh; vergelijkbare schaal plakjes $u_f(\cdot, s)$ in een lineaire schaalpartituur; in een Perona en Malik schaalpartituur (linker geval in (18)) en in een 'coherence enhancing' diffusie schaalpartituur (19)



Figuur 9 Resultaat van adaptieve niet-lineaire diffusie op oriëntatiepartituren (CED-OS) stopgezet op $t = 2$ en $t = 30$ en standaard adaptieve niet-lineaire diffusie op 2-photon microscopy beelden van collageenvezels stopgezet op $t = 30$, relevant voor de modellering van hartkleppen in soft-tissue engineering. Het is duidelijk te zien dat standaard coherence enhancing diffusie (19) kunstmatige kromming genereert terwijl methoden via diffusie op inverteerbare oriëntatiepartituren de kruisende lijnen keurig behandelen.

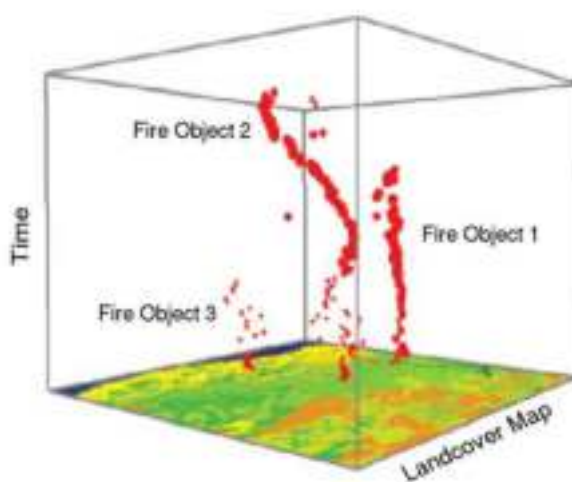
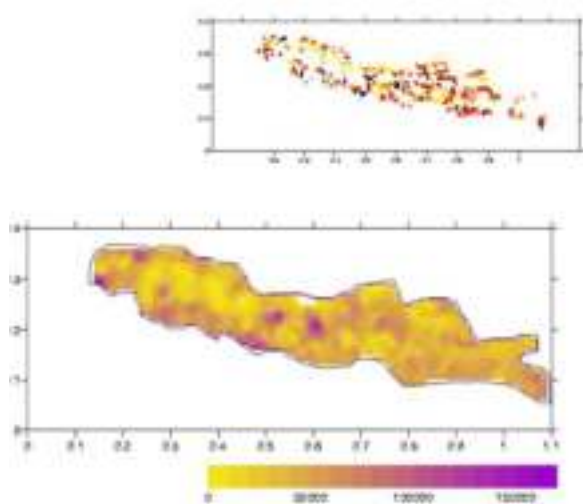
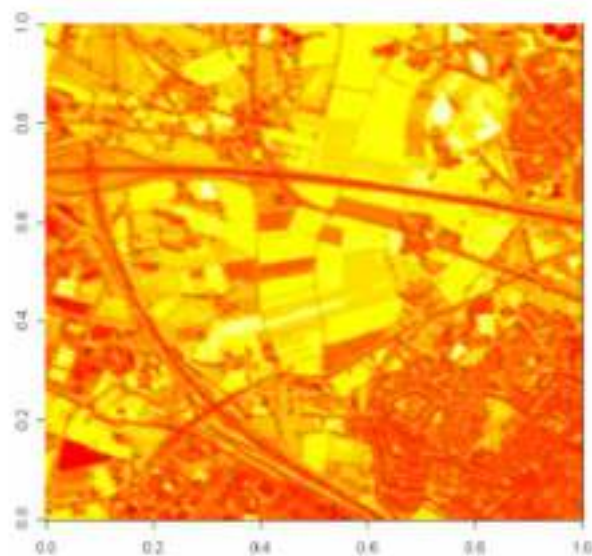
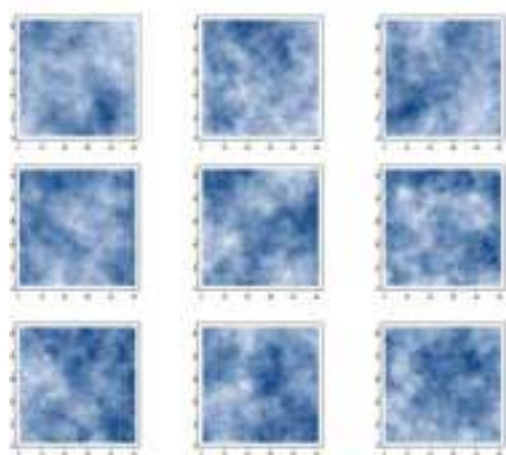
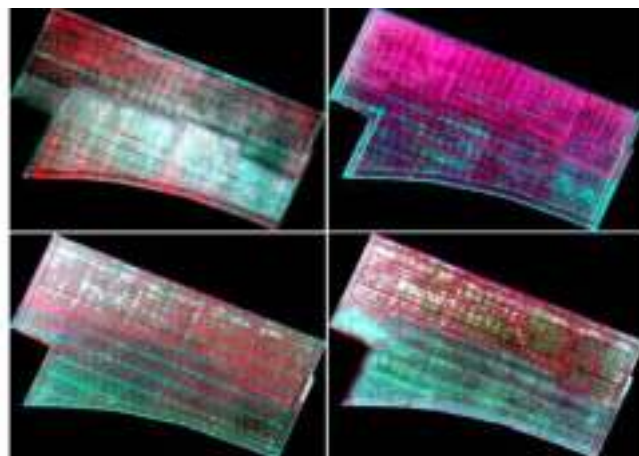
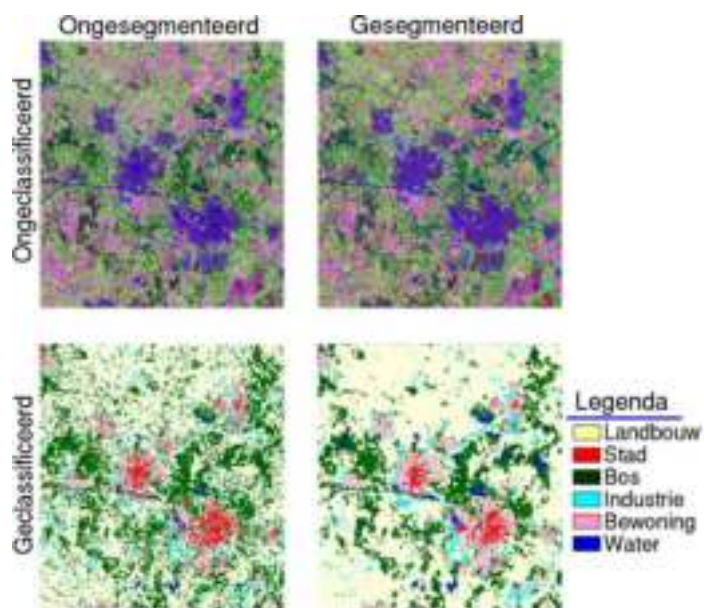
te verkrijgen via (niet-)lineaire linksinvariante diffusievergelijkingen op inverteerbare oriëntatiepartituren, die wel met kruisende structuren overweg kunnen. Hierbij speelt het niet-commutatieve gedrag van $SE(2)$, net zoals het niet commutatieve gedrag van de groep H_3 in het voorbeeld van de muziekpartituren, een cruciale rol.

Dankwoord

Dank aan Bart Janssen, Erik Franken, Frans Kanters, Bram Platel, Evgeniya Balmashnova, Jan de Graaf, Luc Florack, Mark Peletier, en Bart ter Haar Romeny, faculteiten wiskunde & informatica (W&I) en biomedische technologie (BMT) aan de Technische Universiteit Eindhoven (TU/e) voor hun ondersteuning bij het onderzoek. Dank aan NWO, de Nederlands Stichting voor Wetenschappelijk Onderzoek, voor financiële ondersteuning.

Referenties

1. E. Balmachnova, *Scale-Euclidean Invariant Object Retrieval*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2007
2. J. Damon, 'Generic Properties of Solutions to Partial Differential Equations', *ARMA*, 353-403, 1997
3. R. Duits, *Perceptual Organization in Image Analysis*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2005. A digital version is available on the web URL: www.bmi2.bmt.tue.nl/Image-Analysis/People/RDuits/THESISRDuits.pdf
4. R. Duits and B. Burgeth, 'Scale Spaces on Lie Groups', *Proc. of the first international conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, 300-312, 2007
5. R. Duits and L.M.J. Florack and J. de Graaf and B. ter Haar Romeny, 'On the Axioms of Scale Space Theory', *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20, 267-298, 2004
6. R. Duits and B. Janssen and F. Kanters and L. M. J. Florack, 'Linear Image Reconstruction From a Sparse Set of Alpha Scale Space Features by Means of Inner Products of Sobolev Type', *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, 3753, 96-111, 2005
7. B. J. Janssen and R. Duits, 'Linear Image Reconstruction by Sobolev Norms on the Bounded Domain', *Proc. of the first international conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, Springer, 55-67, 2007
8. B. J. Janssen and L.M.J. Florack and R. Duits and B.M. ter Haar Romeny, 'Optic Flow from Multi-scale Dynamic Anchor Point Attributes', *Lecture notes in computer science*, Springer, 4141, 767-779, 2006
9. B.J. Janssen and F.M.W. Kanters and R. Duits and L.M.J. Florack and B.M. ter Haar Romeny, 'A Linear Image Reconstruction Framework Based on Sobolev Type Inner Products', *International Journal of Computer Vision*, 70(3), 231-240, 2006
10. F.M.W. Kanters, *Towards Object-based Image Editing*, Eindhoven University of Technology, Department of Biomedical Engineering, Eindhoven, The Netherlands, 2007
11. G.W. Mackey, 'Impurity for representations of locally compact groups', *Proc. N.A.S.*, 35, 537-545, 1949
12. P. Perona, and J. Malik, 'Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion', *IEEE-transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7), 629, 1990
13. J. A. Weickert, 'Coherence-Enhancing Diffusion Filtering', *International Journal of Computer Vision*, 31(2/3), 111-127, 1999



Van links naar rechts, van boven naar beneden: **(A)** Een satellietbeeld van Twente (linksboven), gesegmenteerd (rechtsboven), geëclassificeerd (linksonder) en zowel geëclassificeerd als gesegmenteerd (rechtsonder); **(B)** Vier opnames van het perceel, op 1 april (linksboven), 30 mei (rechtsboven), 11 juli (linksonder) en 7 augustus (rechtsonder). Duidelijk is de verkleuring te zien, veroorzaakt door gewasgroei en door optredende stresscondities; **(C)** Negen gesimuleerde toevalsvelden, alle met dezelfde statistische eigenschappen; **(D)** Een uitsnede van een SPOT5-beeld uit de omgeving van Enschede; **(E)** Methaanemissies in rijstvelden van Java met de waarnemingen (boven) en de (geïnterpoleerde) kaart (onder); **(F)** Ruimte-tijd kubus. De ruimteassen in het horizontale vlak tonen de vegetatie. De tijd, langs de verticale as, laat de ontwikkeling van bosbranden in de tijd zien.

Alfred Stein

*Earth Observation Science
International Institute for Geo-Information Science
and Earth Observation
Postbus 6, 7500 AA Enschede
stein@itc.nl*



Alfred Stein

Oratie

Geef me de ruimte

Als we met Google Earth een stukje van onze aarde bekijken, dan vullen we de beelden die we zien onmiddellijk in met onze eigen interpretatie. Hoe doet een computer dit? Bij een dergelijk probleem komt heel wat spatiële statistiek kijken. In zijn oratie, uitgesproken op 20 september bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar aan de Universiteit Twente, geeft Alfred Stein een overzicht van de statistische beeldanalyse.

Voordat ik met de wetenschap begin is het goed om het woord aan de kunst te laten. In dit geval richten we ons op sterk door wiskunde geïnspireerde kunstenaar M.C. Escher, met zijn beroemde litho Dag en nacht (zie figuur 1). We zien links de dag en rechts de nacht en de vogel die het allemaal waarneemt. Maar waar het mij omgaat is de verticale lijn in deze litho weiland wordt vogel. Hiermee geeft de kunstenaar een impressie waar we in ons vakgebied mee bezig zijn. De vogel die over het land vliegt probeert zijn objecten te kennen, hij gebruikt zijn kennis van het land en ziet met een enkele oogopslag wat voor zijn overleven van belang is. Wat hij is en wat hij ziet worden een. Hij kiest de ruimte, de ruimte om te vliegen en de ruimte om zijn kennis te vergaren.

Laten we overstappen naar de wetenschap en als eerste de naam van de leerstoel bekijken: stochastische beeldanalyse. Deze term bevat een aantal verschillende begrippen. In de eerste plaats komen we het toch wat lastige woord 'stochastisch' tegen. Daarnaast gaat het over beelden en tenslotte over analyses. In de stochastische beeldanalyse richten we ons op het verkrijgen van maximale informa-

tie uit beelden met behulp van stochastische methoden. De stochastiek (van het Griekse woord *στοχάζομαι*: raken, gissen of mikken) houdt zich bezig met het modelleren van onzekerheden. Stochastiek komen we bijvoorbeeld tegen bij het gooien van een dobbelsteen, waarbij we de waarden 1 tot en met 6 kunnen krijgen, onder eerlijke condities allemaal met een kans 1/6. En bij het voorspellen van uw aankomsttijd bij deze lezing. En bij de lengte ervan. De stochastiek kom je overal tegen!

Beeldanalyse

Na deze ouverture kijken we nu als eerste thema naar een satellietbeeld. En we beginnen in Twente[5]. Figuur A laat een landsat-beeld zien waarbij we informatie in zes banden hebben. We mengen de kleuren en laten de kleuren rood, groen en blauw corresponderen met drie van de zes banden. Het is dus niet zo dat de kleur op het beeld overeenkomt met de kleur op de grond. Vaak zullen we de segmenten die bijvoorbeeld overeenkomen met een weiland, een stad, een kanaal, een gebouw op deze beelden automatisch willen onderscheiden. Daarvoor zijn verschillende me-

thoden ter beschikking. Globaal kunnen we een onderscheid maken in 'segmentatiemethoden en classificatie', in 'filters' en in 'wiskundige morfologie' [17]. Ik zal me vandaag beperken tot segmentatie en classificatie. Laten we zien hoe dat in zijn werk gaat.

Iedere pixel correspondeert met een locatie in het terrein. Segmentatie betekent dat we pixels willen samenvatten in segmenten. Zo kunnen we de pixels die allemaal de waarde 37 hebben een segment laten vormen. Deze segmenten kunnen groot of klein zijn en ze kunnen overal op het beeld voorkomen. Maar we kunnen ook wat variatie toestaan, door de pixels met waarden tussen 35 en 40 een segment laten vormen. Ook kunnen we kijken naar een regelmatig patroon van waarden. In figuur A zien we een segmentatie die met de 'region merging' procedure is uitgevoerd. We zien dan dat er een ruis-arm beeld ontstaat. Hiermee hebben we segmenten, maar nog geen objecten met een betekenis.

Deze objecten willen we graag identificeren uit al deze gegevens. Daartoe wordt als regel een classificatie uitgevoerd. Dat kan zowel op het oorspronkelijke beeld als op het gesegmenteerde beeld. De classificatie van het oorspronkelijke satellietbeeld laat grote en kleine objecten zien. De kleine objecten kunnen aan een bepaalde werkelijkheid voldoen, maar er is ook nogal wat misclassificatie, bijvoorbeeld veroorzaakt door pixels die sterk op elkaar lijken, of door atmosfe-

rische verstoring, onzuivere pixels, etcetera. Classificatie van het gesegmenteerde beeld laat grotere objecten zien, met minder ruis. Maar dus ook met minder kleine objecten. Dit kan wat verder van de werkelijkheid afstaan, maar kan voor interpretatie en beleidsondersteuning nuttig en waardevol zijn.

Toch zijn we er hier niet mee. Zolang de objecten scherp en helder zijn, zijn er niet zoveel problemen. We weten wat een huis is, we weten, althans hier in Nederland, wat een bos en wat een weiland is. Maar er bestaan ook minder scherpe objecten, objecten die inherent onzeker zijn. Hier komen we terecht op een punt dat wel enige aandacht vergt. We willen vaak zoveel moois uit een beeld halen, maar: zit het er allemaal wel in? In wezen zijn hier twee wegen om verder te gaan: een fuzzy benadering en een stochastische benadering.

Veel objecten, of het nu om een stad gaat, een weg, zijn moeilijk precies te onderscheiden, of hebben een vage definitie. Soms kunnen we de grenzen wel scherp krijgen, maar soms ook niet. Een 'verontreinigde rivier' is een vaag concept dat vaak geleidelijke overgaat in een 'schone rivier' (ook een vaag concept). Milieu-indicatoren zijn vage concepten — iedereen heeft wel een idee over 'global change', maar een uniforme definitie is lastig, misschien wel onmogelijk. De stochastische benadering modelleert dergelijke objecten vanuit de kansrekening, door bijvoorbeeld uit te gaan van random sets. Een fuzzy benadering neemt onzekerheid mee bij de inventarisatie en bij de behandeling. Dat geeft wel problemen, bijvoorbeeld bij de opslag van objecten in databases, bij het definiëren van operatoren, waar echter wel oplossingen voor zijn te bedenken. Ik zie dit als complementaire mogelijkheden. De fuzzy benadering heeft het voordeel dat we in de taal van alledag kunnen blijven praten. Een stochastische benadering is echter beter gefundeerd en daarmee helderder en eenvoudiger.

We gaan nu over naar het volgende voorbeeld. Figuur B laat een opname van een perceel met suikerbieten van een boerenbedrijf in Zuid-West Nederland zien. Het terrein is zo'n 7 ha groot en de opnames zijn gemaakt vanuit een onbemand vliegtuigje. De gegevens zijn enkele jaren geleden gepubliceerd in een artikel van Virginie Epinat [4]. De resolutie is hier in de orde van grootte van 1 m². Tegenwoordig is dat een resolutie die we ook met satellietopnames wel halen. Met de verschillende banden wordt gerekend, zodat de meest relevante informatie verschijnt. En hier wordt het interessant: *hoe komen we van de getallen naar de relevante informatie*. Daar-

naast is er veel detailinformatie zichtbaar: er zijn lichte en donkere strepen, er is een witkleuring, er is een patroon zichtbaar dat zijn oorzaak moet hebben, kortom we zien al zaken, maar we kunnen slechts speculeren over de oorzaken. Wat een boer belangrijke objecten vindt, misschien wel het voorkomen van gewas-stress, is voor een historisch geograaf misschien niet zo interessant: die ziet de lijnen in de lengterichting van het veld en misschien nog wel een oude verdeling tussen vroegere percelen.

Het is de door mij zo gewaardeerde literator Fernando Pessoa die in zijn *Boek der rusteloosheid* wijst op onze mogelijkheden en verantwoordelijkheden:

"De waarachtige landschappen zijn diegene die we zelf creëren, want zo [...] zien we hen zoals ze werkelijk zijn, dat wil zeggen hoe ze geschapen zijn."

De stochastiek van ruimtelijke gegevens

In een stochastisch kader maken we een aanname over de onzekerheden in de waarnemingen. We maken dan bij voorkeur een onderscheid tussen wat we stochastisch noemen en wat we als vast beschouwen. Laten we eens enkele benaderingen nalopen.

Het eerste onderdeel heet met een mooi woord geostatistiek. Er is daarbij sprake van een meting, van toeval in die meting, van een vaste positie in het land en van ruimtelijke samenhang. Ruimtelijke gegevens bestaan uit een variabele $Z(\underline{s})$ en waarnemingen aan die variabele. Voor deze Z kunnen we de reflectie nemen zoals die wordt geregistreerd door een satellietensor, maar ook een neerslaghoeveelheid, de grondwaterdiepte, etcetera. De $\underline{s}$ geeft dan plaats aan, bijvoorbeeld in een coördinatenstelsel. We gaan ervan uit dat we deze variabele kunnen meten, althans in principe, op een eindig aantal locaties. Het is kenmerkend dat de variabele gekoppeld is aan de ruimte. Dat levert in eerste instantie problemen op bij de analyse, want statistici willen graag een gemiddelde bepalen, een spreidingsmaat, kansen kunnen berekenen. Daartoe is het belangrijk dat we de gegevens kunnen randomiseren. Maar: een neerslagmeting op een punt is daar gemeten en niet elders. Ook is het niet zo eenvoudig om herhalingen te krijgen: de metingen zijn gedaan op een bepaald moment (of over een bepaald interval) in de tijd. Er zijn, kortom, verdere stappen nodig. We maken daartoe de stap naar *ergodiciteit*: de verwachting van het eerste en het tweede moment van $Z(\underline{s})$ kunnen worden verkregen door ruimtelijke gemiddeldes te nemen.

We zullen voorts aannames moeten doen over de *stationariteit*. Er zijn bepaalde eigenschappen van de gegevens die niet veranderen als we alle locaties $\underline{s}$ over een zelfde afstand $\underline{h}$ en in dezelfde richting, verplaatsen. Zo zal de verwachte waarde op een niet-bezocht punt niet veranderen, als we tenminste ook de coördinaten van dat punt over dezelfde vector $\underline{h}$ verschuiven. We kennen drie vormen van stationariteit, in afnemende sterkte. Strikte stationariteit vereist dat de multivariate kansverdeling van de n variabelen op even zoveel locaties niet verandert als alle punten opschuiven over een vector $\underline{h}$:

$$P(Z(\underline{s}_1) < z_1, \dots, Z(\underline{s}_n) < z_n) = \\ P(Z(\underline{s}_1 + \underline{h}) < z_1, \dots, Z(\underline{s}_n + \underline{h}) < z_n).$$

Tweede orde stationariteit vereist een constant eerste moment en een waarbij de covarianties enkel afhangen van de afstand tussen waarnemingslocaties en niet van de lokatie zelf:

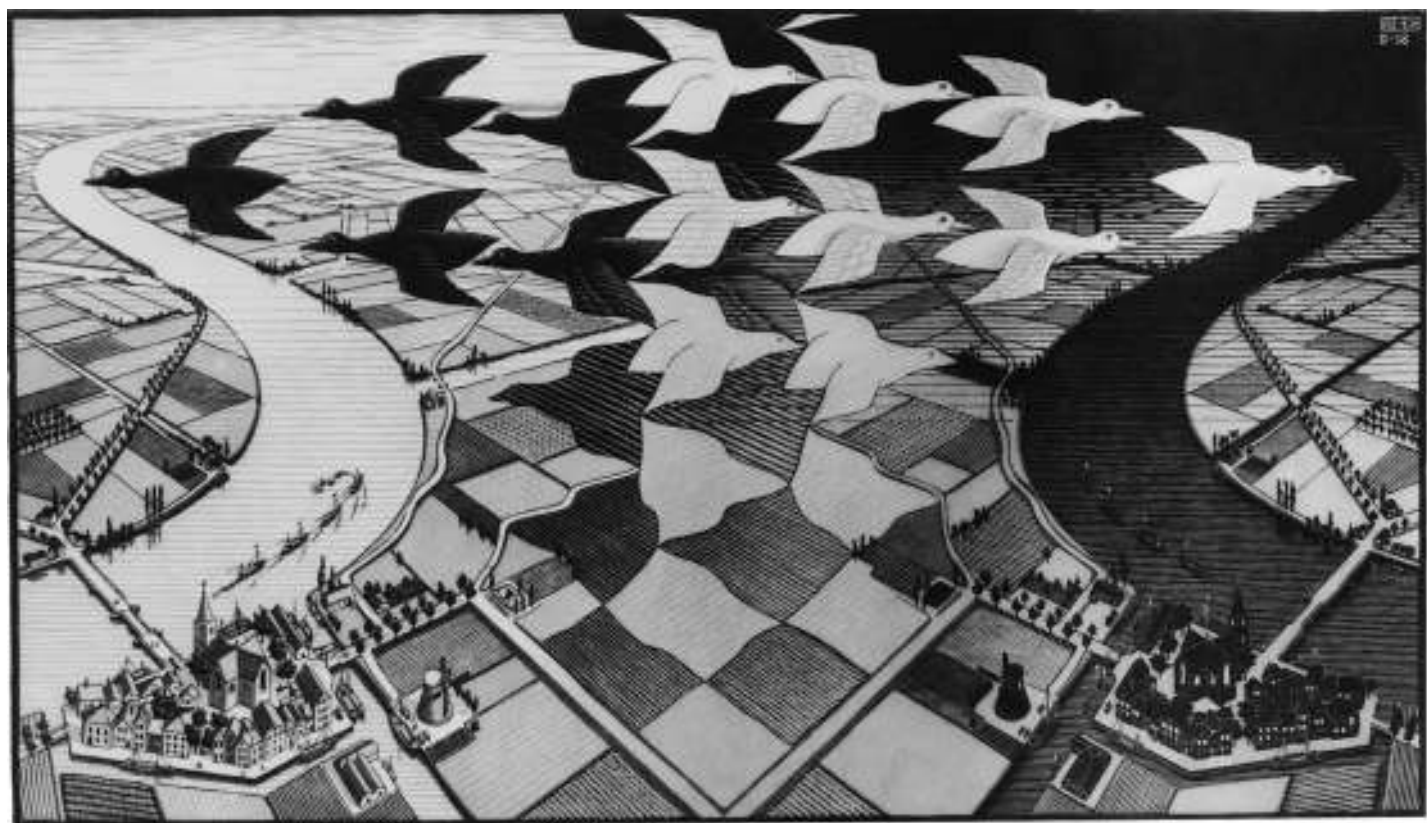
$$E(Z(\underline{s})) = \mu \\ E(Z(\underline{s}_1), Z(\underline{s}_2)) = C(\underline{s}_1 - \underline{s}_2)$$

De functie $C(\underline{h})$ wordt ook wel de covariantiefunctie genoemd. Intrinsieke stationariteit, tenslotte, is vergelijkbaar met tweede orde stationariteit, maar er wordt nu vereist dat de variantie van eenvoudige verschillen enkel afhangt van de afstand tussen waarnemingslocaties:

$$E(Z(\underline{s}_1) - Z(\underline{s}_2)) = 0 \\ E((Z(\underline{s}_1) - Z(\underline{s}_2))^2) = 2\gamma(\underline{s}_1 - \underline{s}_2)$$

waarin de functie $\gamma(\underline{h})$ het semivariogram wordt genoemd. Nog zwakkere vormen van stationariteit komen voor. Het is het concept *afstand* dat de ruimtelijke stochastiek zijn specifieke eigenschappen geeft.

Op de achtergrond speelt de theorie van stochastische toevalsfuncties. Een voorbeeld van enkele toevalsvelden zien we in figuur C. Er is daarbij sprake van een meting, van toeval in die meting, van een vaste positie in het land en van ruimtelijke samenhang. Deze benadering is gebaseerd op het baanbrekende werk van Georges Matheron in Fontainebleau in de jaren 70 en 80 [1] en voert terug op de kansmodellen van Kolmogoroff [20]. Wat we in deze ruimtelijke variatie steeds aantreffen is de variatie als functie van de afstand tussen plaatsen: waarnemingen dicht bij elkaar lijken sterker op elkaar dan waarnemingen



Figuur 1 De houtsneede Dag en nacht van M.C. Escher uit 1938

verder van elkaar af. De mate waarin deze afhankelijkheid optreedt kan verschillen per variabele.

Daarnaast zullen we een aanname moeten doen over de stationariteit. Er zijn bepaalde eigenschappen van de gegevens die niet veranderen als we alle locaties $\underline{s}$ over een zelfde afstand $\underline{h}$ en in dezelfde richting, verplaatsen. Zo zal de verwachte waarde op een niet-bezocht punt niet veranderen, als we tenminste ook de coördinaten van dat punt over dezelfde vector $\underline{h}$ verschuiven. Onder bepaalde verdere aannames zal ook de kans dat een drempelwaarde wordt overschreden op dat punt niet veranderen. Er kan daarnaast sprake zijn van een globale trend, die we uiteraard in de analyses willen meenemen.

Ter illustratie kijken we naar een van de banden van een Spot5-beeld. Spot is een van oorsprong Franse satelliet. Het systeem is operationeel sinds 1986; inmiddels zijn we aangeland bij Spot5, die in mei 2002 is gelanceerd. De pixels hebben een resolutie van ongeveer 10 m. Het beeld betreft een opname uit de omgeving van Enschede (figuur D).

Ik heb nu een willekeurige rij, de 37e, geselecteerd en laat vervolgens enkele correlatiecoëfficiënten zien. De correlatiecoëfficiënt is bekende maat die relaties tussen reeksen getallen aangeeft. Een correlatiecoëfficiënt ter grootte 1 betreft een perfecte positieve line-

aire relatie (een identiteit), als deze 0 is, is er geen relatie, als deze -1 is is er een perfecte negatieve relatie. Door de waarden steeds één stapje op te laten schuiven, kan de correlatiecoëfficiënt bepaald worden als functie van de afstand tussen pixel-locaties. Ik laat het hier dus zien als een functie van de veelvouden van 10m (figuur 3).

In figuur 2 zien we steeds horizontaal de pixelwaarde aan rij 37 en verticaal de pixelwaarden aan diezelfde rij, maar dan 1, 2, 3 of 4 pixels opgeschoven. De correlatiecoëfficiënt is aangegeven als 'r'. De correlatie voor een afstand van 10m is hoog (0.948). Deze neemt dan vervolgens snel af tot waarden van 0.855, 0.780 en 0.718 voor afstanden 20, 30 en 40 m tussen de pixellocaties. Er is sprake van een ruimtelijke samenhang, die we een waarde kunnen geven. Overigens: als we dit herhalen voor een andere rij of een andere kolom zien we steeds hetzelfde patroon.

Waar zit hier de stochastiek? Deze bevindt zich in de waarde van de waarnemingen. De uitkomst van een meting wordt mede bepaald door de uitkomsten in de omgeving. De spreiding van de uitkomsten is altijd kleiner als er waarnemingen vlakbij zijn. Stelt u zich voor dat rondom u, om wat voor reden dan ook (een valse dobbelsteen, een magneet onder de tafel, aardstralen, you name it) met een dobbelsteen steeds een drie of een vier wordt

gegooid. Dan nemen we aan dat de kans dat uw worp ook 3 of 4 wordt groter is dan wat je bij onafhankelijke waarnemingen zou verwachten. Daarmee is de spreiding kleiner en kunnen we een betere verwachting uitvoeren van uw worp.

Er kan daarnaast een verband bestaan met andere variabelen [11]. In mijn voorbeeld waar ik het had over $Z(\underline{s})$ kunnen we voor de Z ook een *aantal* variabelen noteren: maximum temperatuur, minimum temperatuur, neerslag, etc. We moeten dan wel gaan kijken hoe de relaties tussen deze variabelen zijn. Vroeger, vóór de ontwikkelingen in ruimtelijke variabelen, gebruikten we de correlatie. Tegenwoordig modelleren we ook deze afhankelijkheid op basis van de afstand tussen waarnemingen. Het is het concept *afstand* dat de ruimtelijke stochastiek zijn specifieke eigenschappen geeft.

Laten nu eens kijken naar een ander belangrijk voorbeeld: methaanemissies op het eiland Java. Op Java wordt in grote hoeveelheden rijst verbouwd. Rijst is de motor van de groene revolutie geweest in de jaren '60 en vormt nog steeds het belangrijkste voedsel in veel ontwikkelingslanden. Een van de gasen die in rijstvelden ontsnappen is methaan (CH_4). Methaan is een belangrijk actor binnen global change. Het verdwijnt vanuit de bodem en het gewas in de atmosfeer. Met de groei van de wereldbevolking is de consumptie van

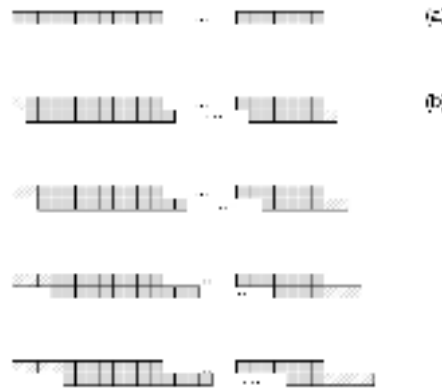
rijst en daarmee de uitstoot van methaan toegenomen. Het gedrag is complex, de rol van verschillende bronnen is onzeker. De bijdrage van ruimtelijke stochastiek ligt erin om de effecten van methaanemissie kwantitatief vast te stellen, inclusief de onzekerheden.

Ik heb voor u een kaartje gemaakt, met daarop in verschillende kleuren de hoeveelheid methaan (figuur E). Het betreft hier zo'n vijfhonderd waarnemingen en gemodelleerde waarden op kleine veldjes. Ieder veldje meet ongeveer 30 bij 30 meter, terwijl Java 126000 km² groot is. Een eenvoudig sommetje leert dat de oppervlakte van de waarnemingen dus een 140-miljoenste van de oppervlakte beslaat — het is alsof we op basis van 48 personen een uitspraak over de wereldpopulatie willen doen. En toch is het anders: we weten al vaak wat meer van ruimtelijke processen die de methaanconcentraties verklaren. Op basis van ruimtelijke afhankelijkheid kunnen we dan een kaart maken, waarbij we deze afhankelijkheid essentieel gebruiken. Omdat de afhankelijkheid specifiek is voor iedere ruimtelijke variabele, is het karteren met het meenemen van de ruimtelijke variatie variabelenspecifiek geworden. In de tachtiger en negentiger jaren van de twintigste eeuw is hier al veel aan ontwikkeld, maar nieuwe uitdagingen zijn er voldoende.

Een nieuwe uitdaging betreft de kwaliteit van gegevens. Alle gegevens zijn onzeker, het ene wat meer dan het andere. Zo kennen we onzekerheid in de meetlocaties, een beperkt aantal meetpunten en onzekerheid bij het modelleren van de ruimtelijke samenhang. In ons voorbeeld kunnen we de onzekerheid verkleinen door gebruik te maken van een koppeling tussen methaangehalte aan landgebruik, enkele bodemeigenschappen en ook aan de tijd van het jaar.

Recent is de promovendus Iswar Das begonnen met het vervaardigen van risicokaarten. Op zich is dat niet nieuw, want we kunnen al lang kaarten produceren waarop een percentiel, of de voorwaardelijke verwachting wordt weergegeven dat een limiet wordt overschreden. Maar we realiseren ons steeds beter dat 'risico' een lastig concept is. Iswar richt zich op 'landslides': het risico betreft dan bijvoorbeeld de kans op voorkomen van zo'n modderstroom en de effecten daarvan op een gebouw, waar al dan niet mensen verblijven.

Een derde uitdaging betreft validatie. Van oudsher is een kaart zo goed als het de werkelijkheid weerspiegelt — 'the proof of the pudding is the eating'. De gebruiker speelt hierbij een belangrijke rol. In een recente studie uitgevoerd samen met het Wageningse be-



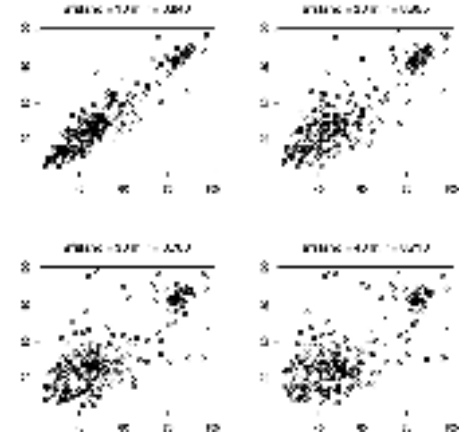
Figuur 2 De oorspronkelijke pixels uit de 37^e rij (a) en de pixels met een kopie ervan opgeschoven over 1, 2, 3 en 4 pixels (b)

drijf Synoptics, inmiddels overgenomen door Vexcel, dat op zijn beurt weer door Microsoft is overgenomen, hebben we de validatie onderzocht door verschillende gebruikers van een hoogtekartaal te definiëren [9]. We kwamen daarbij tot een aantal verrassende inzichten. Maar fundamenteel is wellicht een inherent onvermogen om te valideren — hoe kunnen we ooit onze global change modellen valideren? En ook is het laatste woord over het valideren van risicokaarten nog lang niet gesproken.

Punt patronen

In de tweede vorm van ruimtelijke analyse bekijken we punten, waarbij de eigenschap die willen analyseren, bekend is, maar de locatie aan toeval onderhevig is. De stochastische onderbouwing komen we tegen in de literatuur van met name Dietrich Stoyan in Freiberg [21], Adrian Baddeley in Perth, Australië [7] en Peter Diggle in Lancaster [15]. We zullen vaak spreken over een ruimtelijk proces dat een patroon genereert.

We maken hierbij van oudsher een onderscheid tussen drie vormen: een volledig toevallig patroon, een regelmatig patroon en een geclusterd patroon (zie figuur 4). Van te voren weten we vaak niet wat we aan zullen treffen. Inzicht in het type proces kan verhelderend zijn om de achterliggende fenomenen beter te begrijpen. Opnieuw is hier sprake van een afstandsverdeling, maar nu tussen puntobjecten. De stochastiek in dergelijke analyses bevindt zich in de verdeling van de afstanden tussen de objecten. In een volledig toevallig patroon volgen de afstanden een theoretische functie, in een regelmatig patroon komen sommige afstanden vaak voor, terwijl andere afstanden helemaal niet voorkomen, terwijl in een geclusterd patroon betrekkelijk korte afstanden veelvuldig voorkomen, terwijl langere afstanden misschien wat minder vaak



Figuur 3 Correlaties tussen pixelwaarden voor afstanden van 10 m (linksboven), 20 m (rechtsboven), 30 m (linksonder) en 40 m (rechtsonder) tussen locaties. Duidelijk is de afname te zien van de correlaties bij toenemende afstand.

voorkomen. Dat modelleren we bijvoorbeeld met een G-functie.

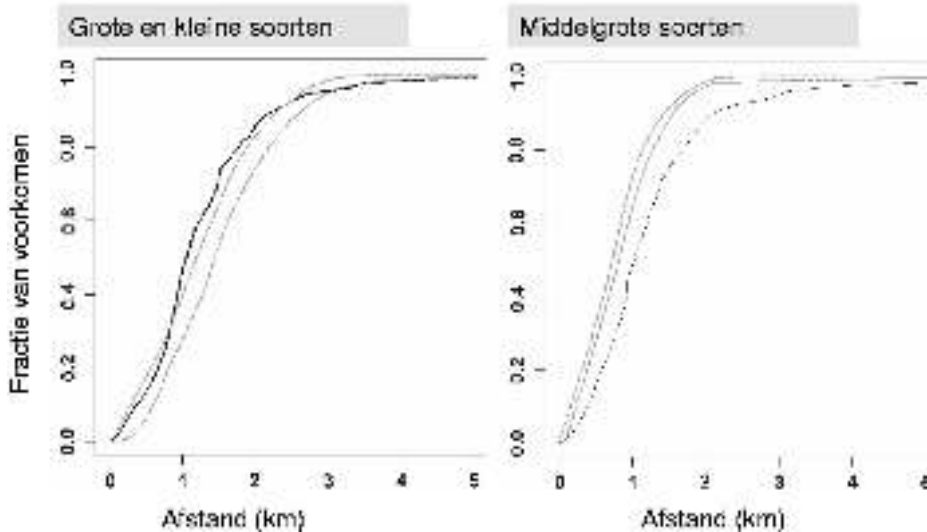
We bekijken een patroon X dat onder andere punten x en y zou kunnen bevatten. $G(r)$ is de verdelingsfunctie van de afstanden van een punt tot zijn dichtstbijzijnde buur, $G(r) = \Pr(\rho(x, y) \geq r)$ voor $r \geq 0$. Hierbij is ρ de Euclidische afstand tussen twee punten. $G(r)$ kunnen we interpreteren als de voorwaardelijke verwachting van de overige punten in X gegeven een punt op een willekeurige lokatie. Een heuristische interpretatie is $1 - G(r)$ de kans is dat een schijf met straal r op een willekeurig punt geen ander punt van het patroon X bevat.

Een voorbeeld dat we recent geanalyseerd hebben betreft de verspreiding van kuddes grote grazers in een Afrikaans savanneland-schap [10]. Het Laikipiapark is een natuurlijk landschap dat niet de status van een nationaal park heeft. Doel van dit onderzoek was de vraag of we de patronen van verspreiding van kuddes wilde dieren konden begrijpen, bijvoorbeeld op basis van ecologische gronden.

In figuur 5 zien we links een G-functie gegenereerd door een patroon van herbivoren waarop niet door predatoren gejaagd wordt en rechts een die van een patroon van kuddes waarop predatoren wel jagen. De gejaagde soorten laten een regelmatig patroon zien, terwijl de niet-gejaagde soorten



Figuur 4 Drie gesimuleerde puntpatronen. Een volledig random patroon (links), een geclusterd patroon (midden) en een regelmatig patroon (rechts)



Figuur 5 G-functie voor grote en kleine dieren (links) en voor prooidieren (rechts) in het Laikipia park, Kenya

een clustering laten zien. De ecologische verklaring kan dan zijn dat de eerste groep preferentie van voedsel centraal stelt, terwijl de tweede groep een soort 'risicominimalisatie' laat zien.

Bij het modelleren van dergelijke processen zijn we steeds beter in staat om ook niet-stationariteit mee te nemen. Zo kan de aanwezigheid van dorpen aan een kant van het landschap invloed hebben op de verdeling van de afstanden, net zoals aanwezigheid van voldoende voedsel en water. Het nieuwe element zit er dan in dat we de afstandsverdeling koppelen aan co-variabelen.

Aspecten van gegevenskwaliteit zijn er volop: ondanks GPS zijn de plaatsen van voorkomen soms onzeker, met daarbij onzekere afstanden tussen de objecten. Het is vaak maar de vraag of alle objecten helder gedefinieerd zijn, of we alle objecten wel te pakken hebben, tellen we sommige objecten niet twee keer, er kan sprake zijn van een weinig uniforme waarneming, enzovoort.

Rooster data

De derde vorm van ruimtelijke stochastiek betreft de kwantitatieve analyse van gebiedsdelen. Hier zijn we geïnteresseerd in verklaren de kenmerken, we hebben te maken met vastliggende eenheden, zoals gemeentes, provincies, landen, biotopen, catchments of bodemeenheden. Het concept van een afstand is lastiger — immers: wat is de afstand tussen twee provincies die aan elkaar grenzen? We werken in dergelijke studies daarom liever met een 'buurt'-relatie. Buurten grenzen aan elkaar of niet. Dat kun je aangeven met een 1 of een 0, maar we kunnen dat ook aangeven met een fractie. Met dit laatste creëren we wel asymmetrie: de fractie van de grens van Ne-

derland met Duitsland is veel groter dan de fractie van de grens van Duitsland met Nederland. Het gaat bij dergelijke analyses om het vinden van een goed verklarend model, een regressiemodel in de aanwezigheid van ruimtelijke relaties. Autoregressieve processen spelen dan een rol. In de jaren tachtig hebben we belangrijke bijdragen gezien, met name het beroemde artikel van Geman en Geman [2] en een reeks publicaties van Julian Besag (onder andere [3]).

Een voorbeeld van een dergelijke studie betreft de sterfte aan Buruli Ulcer, onderzocht door Alfred Duker in zijn promotiewerk [14]. Buruli Ulcer is een zwerenziekte die wereldwijd veel voorkomt. Het is een aan lepra gerelateerde ziekte die gekenmerkt wordt door de vorming van grote zweren op de huid en het uitblijven van een immunologische reactie. Het komt vooral voor in tropische gebieden in de wereld, zoals in verschillende landen in West Afrika. Het komt steeds meer voor en is na lepra en tbc inmiddels de derde oorzaak van mycobacteriële infecties bij gezonde mensen. De ziekte lijkt vooral voor te komen als er veranderingen in het milieu hebben plaatsgevonden, zoals de ontwikkeling van wateropslag, het winnen van zand of irrigatie. In een aantal dorpen (settlements) in Ghana hebben we de sterfte aan de zwerenziekte Buruli Ulcer gerelateerd aan het voorkomen van arsenicum in het milieu. Er was mogelijk een relatie met de afstand tot een mijn in de buurt, met de hoogte in het landschap en de kwaliteit van bodem en grondwater. In een bodemmodel vonden we significantie tussen de sterfte aan deze ziekte en het arsenicum in de bodem. In een watermodel vonden we significantie tussen de sterfte

aan deze ziekte en de afstand tot de mijn en de relatieve hoogte.

De stochastiek bevindt zich op dezelfde plaats als in het geostatistische voorbeeld: in de waarneming zelf. De locatie ligt vast. Buurtrelaties worden in het voorbeeld uit Afrika gegeven door de grenzen van de nederzetting — andere administratieve grenzen zijn in deze landen vaak niet zo helder.

Schaal

Een belangrijk aspect binnen de ruimtelijke stochastiek betreft 'schaal'. In eerste instantie lijkt dat vrij triviaal — maar er zijn momenten dat het toch even anders wordt. Neerslaggegevens op de nationale schaal laten een totaal ander beeld zien dan op de schaal van een individueel perceel. Veranderingen in schaal hebben onze aandacht. In een stochastische benadering bekijken we gegevens met een bepaalde resolutie. Dat kan een puntwaarneming zijn, maar ook een veldopname van 900 m². We willen dan opschalen of neerschalen naar een andere resolutie.

We gaan uit van een waar patroon x en we bekijken $Z(\underline{s}_i)$, voor $i = 1, 2, \dots, n$. We veronderstellen dat de gegevens uit een Gaussische verdeling komen en onafhankelijk zijn, gegeven x , met a priori variantie $\kappa - 1$ en een verwachting die lineair is in x :

$$Z \sim N(Hx, (\kappa - 1)I).$$

De $H_i(\underline{s})$ vormen de support van de gegevens: $H_i(\underline{s})$ is bijvoorbeeld constant rond $\underline{s}_i$ en elders. Voor opschaling van de gegevens hebben we interesse in x over een groot gebied S . Op een andere resolutie bekijken we dan lineaire functionen A op x :

$$Ax = \left(\int_{\underline{s} \in S} A_j(\underline{s}) x(\underline{s}) d\underline{s} \right)_{j=1}^J$$

Het model dat u hier ziet koppelt de resolutie op een schaal van waarnemen met die op een andere. Dat levert een stochastisch model op waarin we op basis van normaliteit kunnen schalen en uitspraken over onzekerheid kunnen kwantificeren. Hiermee kunnen we van de gemeentelijke schaal naar de provinciale schaal gaan, maar ook uitspraken de andere kant uit doen: disaggregatie van de provinciale naar de gemeentelijke schaal.

Ruimte-tijd

We zullen nu aandacht besteden aan de stochastiek in ruimte en tijd. De Franse filosoof Bergson vroeg zich of ruimte en tijd aan elkaar

gelijk gesteld kunnen worden [18]. Hij maakt een onderscheid tussen de verleden tijd en de huidige tijd. Hij geeft daarbij aan de tijd niet zozeer te zien als een soort ruimte waarin zich de processen afspelen, maar het zich meer als een scheppende, dynamische kracht voor te stellen en de ruimte als het podium waarop zich dit afspeelt. Dat is wat mij betreft wat te simplistisch, want ik zie de ruimte wel degelijk als een scheppende kracht.

Een goed uitgangspunt in de tijd is dat wat morgen gebeurt vermoedelijk meer lijkt op wat vandaag gebeurt dan op wat gisteren gebeurde. Processen positioneren we toch liefst in de tijd, met een duidelijk oorzaak en gevolg. In de ruimte, we hebben dat al gezien gaat het vooral om de afstand. Bij het analyseren van ruimte-tijdprocessen modelleren we zowel afhankelijkheid in de tijd als afhankelijkheid in de ruimte. Deze combinatie levert daarmee toch wel wat lastige problemen op — er is bijvoorbeeld geen natuurlijke manier om de eenheden (meter en dag) te verbinden. Bij een stochastische beeldanalyse kunnen we een reeks van beelden vergelijken die allemaal hetzelfde proces of fenomeen laten zien op verschillende momenten. De beelden moeten precies over elkaar heen vallen en de beelden moeten onder vergelijkbare omstandigheden zijn opgenomen. Figuur B, het eerdere voorbeeld van het perceel met suikerbieten, laat zo'n reeks van beelden zien. Binnen de stochastiek is het van belang objecten op deze beelden te koppelen en verschillen aan te geven en te interpreteren.

In ruimte en tijd analyses proberen we stochastische beeldanalyse te koppelen aan de dynamiek in de tijd. We hebben bij het International Institute for Geo-Information Science and Earth Observation (ITC) de beschikking over Meteosat beelden die iedere 15 minuten binnenkomen. Deze hoge temporele resolutie gaat ten koste van de ruimtelijke resolutie. We hebben deze beelden gebruikt bij het monitoren van bosbranden, hun bewegingen en het voorspellen ervan op een dag in Spanje [6]. In dit stuk van de wereld is de ruimtelijke resolutie ca. 3 km, dat wil zeggen iedere pixel is de gemiddelde reflectiewaarde over een eenheid van 9 km². Figuur F laat een ruimte-tijd kubus zien van bosbranden. Horizontaal is de ruimte geprojecteerd, verticaal de tijd. Met een wolkenvrije lucht kun je dan een redelijk model vaststellen.

Verdere voorbeelden zien we uiteraard op het epidemiologisch vlak waar we de verspreiding van ziektes in ruimte en tijd bestuderen. Ik zou nog even door kunnen gaan, maar ik denk niet dat dat zo relevant is. Ik wil eigen-

lijk overgaan naar een wat meer prangende vraag: waar doen we het allemaal voor. Met andere woorden: hoe kunnen we op een verstandige en creatieve manier omgaan met deze onzekerheden en er misschien zelfs wel ons voordeel mee doen.

Beslissingsondersteuning

Een belangrijk element in al dit werk bestaat uit het ondersteunen van beslissingen. Dat is vaak het speuren om het beste resultaat te halen. In het verleden, in het promotiewerk van Van Groenigen [13], hebben we aspecten van simulated annealing gebruikt om bijvoorbeeld optimale bemonsteringsschema's te vinden. Maar beslissingsondersteuning gaat verder. Recent heeft Van de Vlag in zijn promotiewerk aangetoond hoe vage eenheden (duinen en strand) en beslissingen voor zand suppletie gecombineerd kunnen worden [12]. Hij heeft laten zien hoe dat tot beter onderbouwde beslissingen kan leiden, door beter om te gaan met de natuurlijke, onzekere, eigenschappen van systemen en daar een goed gefundeerde analyse aan te koppelen. Verder wegen op het gebied van Bayesiaanse netwerken proberen we op dit moment nog verder richting te geven.

Recente ontwikkelingen

Ontwikkelingen in het opnemen en verspreiden van digitale beelden gaan steeds sneller. De mate van detaillering wordt alleen maar groter, evenals de frequentie van waarnemen. De snelle opmars van internet met een snelle en efficiënte toegang tot een veelheid van beelden en (ruimtelijke) informatie en de combinatie van digitale camera, de mobiele telefoon en navigatiesystemen zijn de belangrijkste oorzaken. Daarmee groeien de mogelijkheden en worden de vragen die we kunnen stellen en beantwoorden steeds gevarieerder. Het bekendste voorbeeld is wellicht Google Earth, waarbij we op verschillende niveaus kunnen inzoomen op — in principe — ieder stukje van de wereld. Het zal niet lang meer duren of Google Earth is eenvoudig toegankelijk op de mobiele telefoon. Maar dit zijn gegevens, getalletjes. Hiermee hebben we nog niet de informatie waar we echt wat mee kunnen doen.

Een bijzonder aspect betreft de verandering van de vragen die we nu kunnen stellen. Vonden we het vroeger prachtig als we een enkel beeld hadden van een gebied, nu gaat het om meer dan alleen maar mooie plaatjes. De informatie die we weergeven moet een duidelijk doel dienen. En naarmate de informatie toeneemt wordt het doel specifieker.

Een stochastisch element dat we telkens langs zien komen betreft de kwaliteit van gegevens. Kwaliteit is een breed begrip, maar is in de stochastische literatuur wel beschreven. Kwaliteit hangt nauw samen met het gebruik van de gegevens. Recent hebben we bij het ITC een congres georganiseerd waar we aan deze aspecten uitvoerig aandacht hebben besteed.

Het blijkt steeds vaker te lonen om voorinformatie te gebruiken. In tegenstelling tot financiële transacties is dat in de stochastiek een heel gangbare en geaccepteerde werkwijze. We noemen dat een Bayesiaanse analyse. Voorinformatie kan gebruikt worden om een eerste indruk te verkrijgen, om subjectieve kennis objectief te maken en te gebruiken, etc. Gemaakte waarnemingen passen dan deze voorinformatie aan.

Visie

Na het presenteren van de twee thema's beeldanalyse en ruimtelijke stochastiek is het tijd voor het contrapunt: mijn visie op het vakgebied. In mijn visie komen de beelden, de vragen die we aan beelden stellen en de mogelijkheden die moderne stochastische methoden bieden om tot bevredigende antwoorden te komen steeds dichter tot elkaar. Onzekerheid is inherent en het is aan ons om, in de woorden van Spinoza: zo veel mogelijk de baas over het toeval te worden en ons handelen op een redelijk plan te baseren.

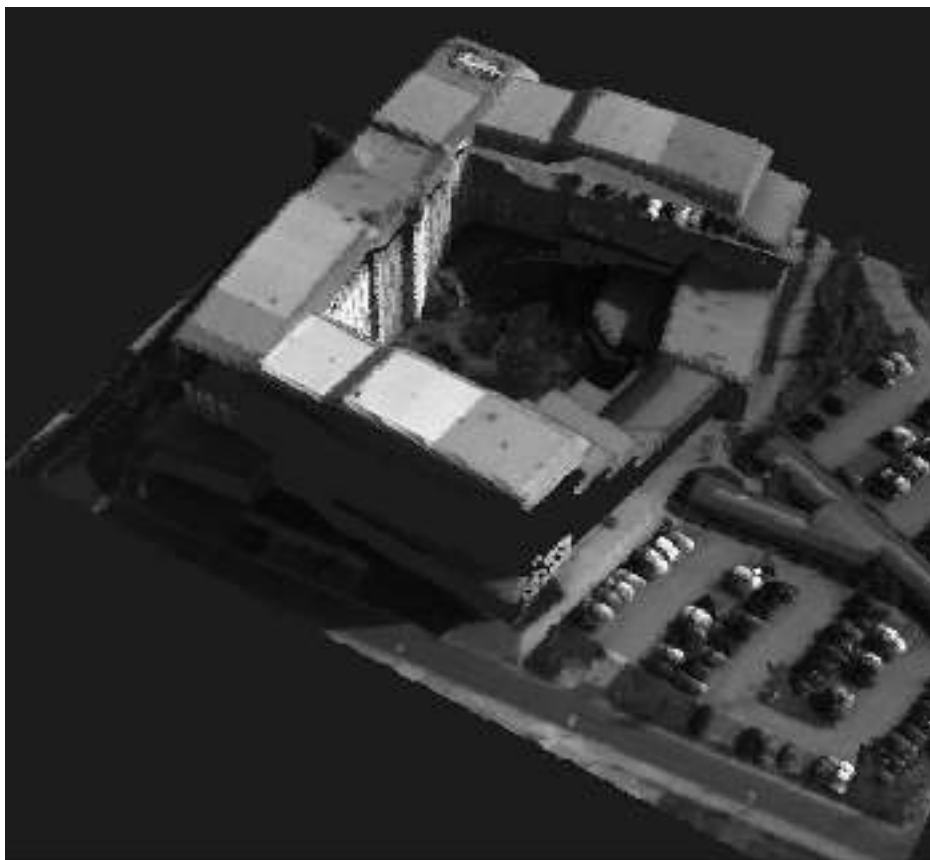
De belangrijkste vraag is wat mij betreft: hoe kunnen we niet alleen *waarnemen* in de ruimte maar hoe kunnen we procedures bedenken om de ruimte met al haar fenomenen *begrijpen*. De kennistheorieën van Kant en Locke vormen daarbij een interessant startpunt. Hebben we 'a priori' informatie, is er zoiets als een 'vaag object an sich', en zo ja: hoe kunnen we daarmee omgaan. Ik zie de stochastiek hierbij, naast bijvoorbeeld proceskennis en systematische inventarisatie, als een onafhankelijke richting in de wetenschap. Het is een veld met een eigen terminologie, maatschappelijke toepassingen en validatiemogelijkheden.

Ik zie veel mogelijkheden bij een verdere integratie van beeldanalyse met stochastische methoden. Stochastische meetkunde, stereologie, multivariate analyses van heel veel banden, het ontdekken van extremen (vooral in vegetatie en ondergrondstudies van belang), waarbij we niet alleen de onzekerheid vaststellen, maar het misschien ook wel als een groot goed zien en het kunnen gebruiken.

Integratie tussen modellen en beeldinformatie gaat steeds verder. Met modellen bedoel ik dan bijvoorbeeld transportmodellen, landbouwkundige modellen en milieumodellen. Dergelijke wiskundige modellen kunnen in principe van beelden gebruik maken. De verschillen tussen de beschikbaarheid van informatie en de vragen bij het gebruik ervan liggen nog steeds ver uit maar komen stilaan wel tot elkaar. Hier is echter nog steeds een lange weg te gaan.

Dat brengt ons aan de vraagkant van deze methoden en technieken: wie zit er op ons te wachten? Voorbeelden te over, los van de voorbeelden die ik al heb laten zien. In de dagelijkse omgeving hebben we het fileprobleem, dat we vermoedelijk niet kunnen oplossen maar wel kunnen verlichten als real-time beelden kunnen worden gekoppeld aan actuele weginformatie. In de precisie-landbouw speelt het al langer een grote rol, door vroegtijdig aan te geven waar gewasproblemen optreden en waar de boer moet ingrijpen. In het milieu kunnen we beter ingrijpen als we weten welk schip welke verontreiniging heeft veroorzaakt, hoe de kwaliteit van lucht zich ontwikkelt en via een intelligent systeem is wellicht ook informatie over de kwaliteit van bodem en grondwater te verkrijgen. Als het gaat om uitbreidingen van steden, over beleidsondersteuning om wetlands te redden, landbouwgrond toe te wijzen, stedelijke ontwikkelingen te monitoren: het is het wachten op een verstandig gebruik van de juiste beelden om substantieel verder te kunnen komen.

Maar overal is er sprake van onzekerheid. Recent heeft het ITC een helikopter over Enschede laten vliegen. Deze heeft uiterst precieze lasergegevens opgenomen die op hun beurt kunnen worden vertaald in zeer gedetailleerde hoogte-informatie met een punt-dichtheid van 12 tot 25 punten per m^2 . Bij elkaar zijn er misschien wel meer gegevens dan Mozart noten heeft geschreven (en die had daar geen helikopter bij nodig!). U ziet in figuur 6 een opname van het ITC-gebouw. De auto's kun je onderscheiden, maar de takken van de bomen op de binnenplaats nog net niet. Soms is het zelfs mogelijk om *in* de auto te kijken. Als we als boef in een auto wensen in te breken is de informatie gelukkig onvoldoende. Dit is interessant voer voor juristen in het gehoor. Meer serieus: als we als stedelijke dienst de hoeveel hout aan een boom willen vaststellen dan blijft er een grote mate van onzekerheid. Kortom: we kunnen weer zoveel meer, vooral vragen beantwoorden die vroeger niet te beantwoorden waren. Zoals: vragen met een sterke tijdscomponent



Figuur 6 Een laserbeeld van het ITC-gebouw, opgenomen met een dichtheid van 12 tot 25 punten per m^2

of die een nog hogere resolutie nodig hebben. Het is hier dat ik de komende jaren een flinke vooruitgang verwacht.

Er zijn verschillende technieken om hier wat verder mee te gaan. Ik denk daarbij aan wavelets, Bayesiaanse netwerken, maar ook aan het modernere 'boosting', kortom aan veel aspecten die we tegenkomen binnen het gebied van machine learning.

Geef me de ruimte

Met ruimte hebben we allemaal te maken. De ruimte wordt schaars en een zorgvuldig omgaan met deze schaarse ruimte is een essentiële opgave voor ons allen. Waar vinden we de rust en de stilte, waar is voldoende voedsel, waar is schone lucht waar onze kinderen en kleinkinderen en vele generaties daarna recht op hebben? Niet alleen over honderd of tienduizend jaar, maar zoals de hooggeleerde Kwee het ooit formuleerde: ook nog over een miljoen jaar [8]. Het omgaan met onzekerheden, zoals ik hier heb laten zien, vraagt een kwantitatieve, stochastische benadering. Maar het vraagt ook een kwaliteit van onze bestuurders — om te kunnen gaan met kansen en met onzekerheden. Mede om die reden is dit werkveld zo de moeite waard.

Circa één jaar geleden ben ik met veel enthousiasme begonnen aan mijn aanstelling bij de Universiteit Twente. Het is echter ook al weer bijna twaalf jaar geleden dat ik voor het eerst een oratie hield — in de tussentijdse periode was ik hoogleraar in Wageningen. Toen formuleerde ik het als de grootste uitdaging om tot een integrale benadering van alle ruimtelijke statistiek te komen. Hoewel we een heel eind zijn, ben ik geneigd dat nu toch wat te classificeren onder de noemer 'jeugdige overmoed'. Mijn ambitie met de huidige leerstoel is wat bescheidener: graag wil ik proberen te werken aan het uitbreiden van de mogelijkheden van een stochastische analyse van beelden. Theoretische kennis bestaat of ontwikkelen we bij de universiteit, de problemen en maatschappelijke uitdagingen vinden we in al hun variatie binnen het ITC en haar internationale netwerk. Met de hooggeleerde Bagchi en met verschillende medewerkers van de leerstoelgroep stochastische systeem- en signaaltheorie en van de leerstoelgroep kansrekening statistiek en verschillende collega's binnen de onderzoeksschool Centrum voor Telematica en Informatie Technologie (CTIT) heb ik al een aantal inspirerende gesprekken kunnen voeren. Er is veel kennis voorhanden op het vlak van de tem-

porele stochastiek — deze richt zich vooral op patronen in de tijd. De waarde van aandelen, prijsontwikkelingen, temperatuurschommelingen, etcetera. De ruimte vormt daarbij een onmisbare component.

Mijn eigen groep aan het ITC, de staf en de promovendi, maar ook mijn collegae: zij allen dragen bij aan de verdere ontwikkeling van het vakgebied. Contacten met het bedrijfsleven zijn zeer vruchtbaar en inspirerend. Ook met de Universiteit Wageningen onderhoud ik verschillende levendige contacten. Binnen Nederland is met name de vereniging voor statistiek en operationele research belangrijk. Daarnaast kennen we het netwerk van stochastici met hun inmiddels legendarische bijeenkomsten onder de vallende blaadjes in Lunteren.

Internationaal liggen er grote mogelijkheden. Europees, uiteraard met universiteiten en instituten in vele landen en met mogelijkheden in oost-Europa. Verspreiding van kennis via een wetenschappelijk tijdschrift: het International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation (JAG). Interessante samenwerking hebben we al langer met India, met name met het Indian Institute of Remote Sensing. We bestuderen nu ook de ontwikkeling van theeplantages, en proberen patronen van bomen en bossen op verschillende schalen te modelleren met fractale methoden. Samenwerking met China gaat steeds verder en wordt concreter. Binnenkort gaan we met de universiteit in Wuhan op PhD-niveau aan de slag. We gaan kijken naar het monitoren van onzekere objecten. Verder

gaan we stochastische beelden analyseren gekoppeld aan het monitoren van de droogte in Oost-Afrika. Daarnaast hebben we lopen de onderwijscontacten met instituten in Tanzania en Nigeria, terwijl samenwerking met Zuid-Afrika begint te lopen.

Ik blijf het fascinerend vinden om met buitenlandse collega's en studenten samen te werken, verschillende culturen en wetenschappelijke benaderingen te ervaren en gezamenlijk tot een mooi resultaat te komen. De grootste fascinatie is dan vooral de specifieke vraagstelling, ingegeven door lokale ontwikkeling, lokale voorwaarden en lokale mogelijkheden. Zo is in West-Europa de milieuregeling al ver, terwijl we in Nigeria nog moeten proberen om de eerste milieueffecten van de oliepijpleidingen in kaart te krijgen.

Referenties

- 1 Matheron, G. 'The intrinsic random functions and their applications', *Advances in applied probability*, 5, 439 – 468, 1973
- 2 Geman, S., and Geman, D. 'Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images', *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721 – 741, 1984
- 3 Besag, J. 'On the statistical analysis of dirty pictures', *Journal of the Royal Statistical Society*, B-48, 259 – 302, 1984
- 4 Epinat, V., and Stein, A., and De Jong, S.M., and Bouma, J. 'A wavelet characterization of high-resolution NDVI patterns for precision agriculture', *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*, 3, 121–132, 2001
- 5 Stein, A., and De Beurs, K. 'Map indices to quantify semantic accuracy in segmented Landsat images', *International Journal of Remote Sensing*, 26, 2937–2951, 2005
- 6 Umamaheshwaran, R., and Bijker, W., and Stein, A. 'Image mining for modeling of forest fires from Meteosat images', *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45, 246–253, 2006
- 7 Baddeley, A.J. 'Combinatorial foundations of stochastic geometry', *Proc. London Math. Soc.*, 42, 154 – 177, 1981
- 8 Kwee, S.L. 'Mens, techniek en toekomst', *Wijserig perspectief op maatschappij en wetenschap*, 22, 46 – 53, 1981
- 9 Kyaruzi, J.K. 'Quality assessment of DEM from radargrammetry data: quality assessment from the user perspective', ITC, 2005
- 10 Khaemba, W.M. 'Development and application of spatial and temporal statistical methods for improved sampling of wildlife', Wageningen University, ITC, 2000
- 11 Stein, A., *Spatial interpolation*, Wageningen University, 1991
- 12 Van de Vlag, D.E. 'Modeling and visualizing dynamic landscape objects and their qualities', Wageningen University, ITC, 2006
- 13 Van Groenigen, J.W. 'Constrained optimisation of spatial sampling: a geostatistical approach', Wageningen University, 1999
- 14 Duker, A. 'Spatial analysis of factors implicated in *Micobacterium ulcerans* infection in Ghana', Wageningen University, 2005
- 15 Diggle, P.J. *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns – 2nd edition*, Arnold Publishers, London, 2003
- 16 Cox, D. *Principles of Statistical Inference*, Cambridge University Press, 2006
- 17 Glasbey, C.A., and Horgan, G.W. *Image analysis for the biological sciences*, Wiley, Chichester, 1995
- 18 Bergson, H. *Time and Free Will*, Dover Publications, New York, 2001
- 19 Bergson, H. *Durée et simultanéité*, Presses Universitaires de France, 1921
- 20 Kolmogoroff, A.N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag Berlin, 1933
- 21 Stoyan, D., and Kendall, W.S., and Mecke, J. *Stochastic geometry and its applications*, Wiley, New York, 1995

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Frans Oort

David Mumford

De favoriet van Frans Oort

David Mumford

Elke maand vragen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun weblog Wiskundemeisjes aan een bekende wiskundige wie zijn favoriete nog levende wiskundige is. Hiermee willen ze bijzondere wiskundigen van deze tijd in het zonnetje zetten. In elke Nieuw Archief voor Wiskunde staat een bladzijde over zo'n favoriet en zijn werk. Deze keer vragen ze aan Frans Oort wie hij bewondert.

Wie is de favoriet van Frans Oort? Oort, Emeritus-hoogleraar aan de Universiteit Utrecht, is een meetkundige die geïnteresseerd is in het grensvlak tussen de meetkunde en de getaltheorie. Het meest fascinerend vindt hij getaltheoretische problemen die je meetkundig kunt benaderen. Hij noemt verschillende namen van wiskundigen die hij bewondert: D.H. Kloosterman, Aldo Andreotti, Jean-Pierre Serre en David Mumford.

Oort onderscheidt twee typen wiskundigen: wiskundigen die abstract denken en abstract verder gaan (Grothendieck is een duidelijk voorbeeld) en wiskundigen die wel abstract kunnen denken, maar die helemaal vanuit de materie, de voorbeelden werken. Andreotti, Serre en Mumford zijn alle drie wiskundigen van het tweede type. Alle drie zijn ze bovendien als mens heel bijzonder, als collega-wiskundige zijn ze ongelooflijk gul en open, en als wiskundige zijn ze met ideeën gekomen waar Oort zelf nooit opgekomen zou zijn en die hij na jaren nog steeds fantastisch vindt.

Kloosterman is in 1968 overleden en Andreotti in 1980, daarom kunnen zij in deze rubriek niet fungeren als Oorts favoriet. En omdat Serre al twee keer eerder als favoriet gekozen is (door Manjul Bhargava en door Michael Atiyah) praten we verder over Oorts vierde favoriet: David Mumford.

Mumford is geboren in 1937. Hij studeerde in Harvard, waar hij een leerling van Zariski was. Mumford is een typisch voorbeeld van een wiskundige van type twee: hij kent wiskundige voorbeelden als weinig anderen.

Op het International Congress of Mathematicians in Stock-

holm in 1962 kwam een oud probleem over ruimtekrommen uit de Italiaanse meetkunde aan de orde. De volgende dag kwam Mumford met een antwoord. Voor ruimtekrommen van graad 14 was het antwoord op de vraag nee, en dat bleek uit een voorbeeld: er is een moduli-ruimte van dimensie 56 met raakruimte in het generieke punt van dimensie 57. (Zie Mumfords *Further pathologies in algebraic geometry* uit 1962.) En waarom kwam hij met graad 14 op de proppen? Hij had de lagere graden allemaal doorgerekend.

Mumford gaf de algebraïsche meetkunde gestalte vanuit precies die optiek. In 1961, toen Oort in Parijs zat, kreeg Grothendieck een brief van de jonge Amerikaan. Mumford schreef hem zijn ideeën over moduli, die heel anders waren dan die van Grothendieck, en die erkende dat het fabelachtig was. Uit deze ideeën ontstond Mumfords beroemde boek *Geometric invariant theory* (1965).

Oort roemt Mumfords gulheid. Mumford had wat aantekeningen gemaakt over een heel lastig probleem, waar ook Grothendieck niet uitkwam. Hij gaf ze aan Oort en Peter Norman, die ze mochten uitwerken. Ze losten het probleem inderdaad op. Mumford heeft het bewijs nooit geclaimd, maar de verbluffende startgedachte was van hem; daar waren Oort en Norman zelf nooit opgekomen. Die gulheid, om een verbluffend idee door een ander te laten uitwerken, dat kenmerkt voor Oort een groot mens en wiskundige.

Mumford deed algebraïsche meetkunde vanaf een heel meetkundige kant. Hij heeft een onwaarschijnlijk diep inzicht. Maar plotseling, rond 1980, is hij met één stap uit de algebraïsche meetkunde gestapt en iets heel anders gaan doen: computer vision, een mengsel van onder andere computerkunde, analyse, waarschijnlijkheidsrekening en fysiologie. Ook daarin is hij een van de topmensen geworden. Hij schijnt nooit een verklaring te hebben gegeven voor deze grote stap. Op 25 mei ontvangt Mumford de Wolfprijs van honderdduizend dollar voor zijn werk in de algebraïsche meetkunde. 



Rob Kooij
Almerima Jamakovic

Faculteit EWI
Technische Universiteit Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft
r.e.kooij,a.jamakovic@tudelft.nl

Frank van Kesteren, Tim de Koning
Ildiko Theisler, Pim Veldhoven

TNO Informatie- en Communicatietechnologie
Brassersplein 2
Postbus 5050
2600 GB Delft

Onderzoek

Het Nederlands elftal als complex netwerk

In de zomer van 2008, tijdens het Europees Kampioenschap voetbal in Zwitserland en Oostenrijk, zullen weer miljoenen mensen de verrichtingen van het Nederlands elftal op de voet volgen. Ondanks het feit dat voetbal razend populair is, bestaat er vanuit de wetenschappelijke wereld relatief weinig interesse voor voetbal. In dit artikel bestuderen we het Nederlands elftal vanuit het perspectief van complexe netwerken. In het Nederlands-elftalnetwerk, bestaat elk knooppunt uit een speler die ooit een officiële interland speelde. Twee knopen zijn met elkaar verbonden als de spelers in dezelfde interland hebben gespeeld. Het doel van dit artikel is het onderzoeken van topologische eigenschappen van het aldus verkregen Nederlands-elftalnetwerk. Almerima Jamakovic en Rob Kooij zijn werkzaam als onderzoeker bij de faculteit van Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica van de Technische Universiteit Delft; Rob Kooij werkt eveneens bij TNO Informatie- en Communicatietechnologie evenals de andere vier auteurs.

Voetbal is in vele landen een ontzettend populaire sport. Volgens Arrigo Sacchi, coach van het succesvolle AC Milan in de jaren 90 van de vorige eeuw, is voetbal het belangrijkste van alle onbelangrijke zaken in het leven. Bill Shankly, de legendarische voormalige manager van Liverpool, ging nog een stapje verder: volgens sommigen is voetbal een kwestie van leven en dood. Maar het is veel belangrijker dan dat!

De populariteit van voetbal zien we ook terug in een aantal cijfers gerelateerd aan de eindronde van het WK Voetbal dat in 2006 in Duitsland plaatsvond. Wereldwijd waren er, cumulatief, 27 miljard TV kijkers. In totaal werd er, op TV, meer dan 73000 uur verslag gedaan van het WK [1].

Ondanks het feit dat voetbal zo populair is, wordt er vanuit de wetenschappelijke gemeenschap, relatief weinig aandacht aan voetbal besteed. Ter illustratie, het World Con-

gress on Science & Football [2], wordt slechts om de vier jaar gehouden. Het meest recente congres, dat plaats vond in 2007, had slechts 477 deelnemers, hetgeen een laag aantal is voor een belangwekkende wetenschappelijke conferentie. Desalniettemin zijn er wel enkele interessante publicaties te noemen waarin voetbal wetenschappelijk wordt benaderd.

Een mooi overzicht van wetenschappelijke aspecten van voetbal is te vinden in *How to score*, geschreven door Ken Bray [3]. Zijn boek behandelt onder andere de volgende onderwerpen: natuurkunde van de bal, trainingschemas, doelpuntstatistieken, medische en fysiologische aspecten, het nemen van strafschoppen en de rol van elektronische hulpmiddelen.

Een ander interessant boek, met een compleet andere invalshoek, is geschreven door David Winner. In *Brilliant Orange* [4], onderzoekt hij de relatie tussen de Nederlanders,

hun geschiedenis en architectuur, hun cultuur en politiek, en de invloed van deze zaken op het Nederlandse voetbal.

In dit artikel bekijken we het Nederlands elftal vanuit het perspectief van complexe netwerken. Onze studie is geïnspireerd door een artikel van Onody en De Castro [5], die een netwerk hebben bestudeerd dat bestaat uit voetballers uit de Braziliaanse voetbalcompetitie.

De theorie van complexe netwerken vormt een vrij recent onderzoeksdomein, dat ontstaan is uit de grafentheorie, en minder gericht is op de studie van kleine grafen en de eigenschappen van individuele knopen en de verbindingen tussen knopen in deze grafen, en meer op de statistische eigenschappen van grootschalige netwerken. In de afgelopen jaren is deze theorie uitgegroeid tot een volwaardig onderzoeksgebied. De reden hiervoor is tweeledig: het bestaan van interessante toepassingen binnen biologische, sociale en technologische netwerken, en de beschikbaarheid van grote aantallen data afkomstig van netwerken uit de echte wereld [6,7,8].

Sociale netwerken worden gevormd door mensen, of groepen van mensen, die met elkaar interacteren volgens een bepaald patroon of contact, bijvoorbeeld vriendschap, zaken of een seksuele relatie.

In dit artikel bestuderen we het Nederlands elftal (NE) als een sociaal netwerk. In het Nederlands-elftalnetwerk correspondeert elk knooppunt met een speler die een officiële



Abe Lenstra met zijn vrouw Hiltje Lenstra-Wisman (23 februari 1950)

Fotograaf: Ben van Meerendonk / AHF, collectie ISG, Amsterdam

interland heeft gespeeld voor het Nederlands elftal. Een knoop is verbonden met een andere knoop indien de corresponderende spelers in dezelfde interland hebben gespeeld. Het doel van dit artikel is het bestuderen van de topologische eigenschappen van het Nederlands-elftalnetwerk. De studie naar de topologie van echte-wereldnetwerken is om twee redenen van belang. Ten eerste kunnen we hiervan leren welke netwerkstructuren we tegen komen in het wild en ten tweede kan het ons helpen te voorspellen hoe processen die plaats vinden op netwerken zullen verlopen. Voorbeelden van het laatste punt zijn de effectiviteit van zoekmachines op Internet en de snelheid waarmee een virus zich verspreid in een computernetwerk.

Voor het specifiek bestuderen van het Nederlands-elftalnetwerk zijn meerdere redenen te noemen. Als eerste reden noemen we de populariteit die het Nederlands elftal geniet onder de Nederlandse bevolking. In het bijzonder is het Nederlandse publiek

erg geïnteresseerd in allerlei feiten en statistieken van het Nederlands elftal. Dit blijkt onder andere uit de populariteit van boeken als [9], de aanwezigheid van quizjes op de sites van bijvoorbeeld de KNVB (Koninklijke Nederlandse Voetbal Bond) en Voetbal International en het succes van de site www.voetbalstats.nl. Deze site, waarop informatie wordt bijgehouden van alle officiële wedstrijden van het Nederlands elftal en de Europese wedstrijden van Nederlandse clubteams, heeft gemiddeld ongeveer 550 pageviews per dag. Middels onze studie verzamelen we allerlei nieuwe statistieken van het Nederlands elftal. Een voorbeeld hiervan is: welke international heeft met de meeste medespelers gespeeld?

Ten tweede zouden de resultaten van onze studie ook gebruikt kunnen worden door de bondscoach, bijvoorbeeld bij het bepalen van een opstelling, waarbij bepaalde eigenschappen van het elftal optimaal zijn. Zo kan een elftal worden samen gesteld waarvan zoveel

mogelijk spelers al onderling hebben samen gespeeld.

Achtergrond

Grafentheorie is een tak van wiskunde die de eigenschappen van grafen bestudeert. Een graaf bestaat uit een verzameling punten, knopen genoemd, waarvan sommige verbonden zijn door lijnen, ook wel links genoemd. Structuren die als grafen weergegeven kunnen worden zijn alomtegenwoordig, en veel praktische problemen kunnen als een probleem op een graaf gemodelleerd worden. Research naar complexe netwerken is een vrij recente stroming binnen het onderzoek rond grafen dat minder focust op de studie van kleine grafen en de eigenschappen van individuele knopen en links in deze grafen, maar meer op de statistische eigenschappen van grootschalige netwerken. Deze stroming is ontstaan doordat huidige computers de mogelijkheid bieden om data te analyseren op een veel grotere schaal dan dat vroeger ooit

Nederland	0 - 0	België
Wit Rusland	18-11-1973	Toeschouwers: 6200
Stadion: Olympisch Stadion	Bondscoach: Guus Huisman	Trainer: Rudi Veltrop
Speler	Club	Ges. brsch. in uit t.d. int. Doelp.
Rob Rensenbrink	FC Twente	4
Wim Jonckheere	Ajax	25 3
Wim Jonckheere	Ajax	14 5
Wim Jonckheere	FC Den Haag	0
Wim Jonckheere	Ajax	17
Wim Jonckheere	Ajax	0 1
Wim Jonckheere	Ajax	14 5
Wim Jonckheere	Ajax	12
Wim Jonckheere	Ajax	2 1
Wim Jonckheere	Wendelaar	25 23
Wim Jonckheere	Wendelaar	10

Figuur 1 Opstelling van interland nr. 331

mogelijk was. Vroeger deed men studies met grafen van enkele tientallen of soms enkele honderden knopen, terwijl nu netwerken onderzocht worden met miljoenen of zelfs miljarden knopen.

We bespreken enkele topologische eigenschappen van complexe netwerken (zie ook [10]). Een complex netwerk kan worden gerepresenteerd als een ongerichte graaf $G(V; E)$ die bestaat uit een verzameling knopen V en een verzameling links E , met $N = |V|$ het aantal knopen en $L = |E|$ het aantal links.

Linkdichtheid

De linkdichtheid S van een graaf is het quotient van het aantal links en het totaal aantal mogelijke links. Het is eenvoudig in te zien dat $S = 2L/N(N-1)$.

Graad

De graad d_i van een knoop i is het aantal buuren van een knoop, dat wil zeggen het aantal knopen waarmee knoop i direct verbonden is. De gemiddelde graad hangt af van het totaal aantal knopen en links: $E[d_i] = \frac{2L}{N}$.

Assortativiteitscoëfficiënt

Een metriek die de correlatie kwantificeert tussen paren knopen is de assortativiteitscoëfficiënt r ($-1 < r < 1$). Netwerken met $r < 0$ zijn disassortatief, hetgeen betekent dat knopen de neiging hebben te grenzen aan knopen met een andere graad. In netwerken met $r > 0$ (assortatieve netwerken) is het waarschijnlijker dat knopen grenzen aan knopen met dezelfde graad [11].

De assortativiteitscoëfficiënt r is als volgt gedefinieerd:

$$r = \frac{L^{-1} \sum_i j_i k_i - \left(L^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (j_i + k_i) \right)^2}{L^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (j_i^2 + k_i^2) - \left(L^{-1} \sum_i \frac{1}{2} (j_i + k_i) \right)^2},$$

waar j_i en k_i de graden representeren van de knopen aan de uiteinden van link i , waarbij $i = 1, \dots, L$.

Afstand

De afstand tussen twee knopen i en j is de

lengte van het kortste pad tussen i en j . De gemiddelde afstand van een graaf is het gemiddelde van de afstand over alle paren knopen in de graaf.

In de jaren zestig deed de psycholoog Stanley Milgram een experiment waarbij brieven werden verstuurd tussen twee willekeurige personen in Noord-Amerika via sociale contacten [12]. Uit dit experiment bleek dat er maar een klein aantal stappen (ongeveer zes) nodig is om een brief van persoon a naar persoon b te sturen. In dit geval komt het gemiddeld aantal stappen overeen met de gemiddelde afstand in het sociale netwerk. Het bestaan van een kort pad tussen twee willekeurige knopen in een complex netwerk wordt in de literatuur het *small-world effect* genoemd. We zullen later aantonen dat het Nederlands-elftalnetwerk eveneens het small-world effect vertoont.

Diameter

De diameter van een graaf is de grootste afstand die voorkomt tussen alle paren knopen.

Eccentriciteit

De eccentriciteit van een knoop is de langste afstand naar een andere knoop in de graaf. De eccentriciteit van de graaf is de eccentriciteit gemiddeld over alle knopen.

Clusteringcoëfficiënt

De clusteringcoëfficiënt C_i van knoop i is de verhouding van het aantal links tussen de buuren van knoop i en het maximale aantal links dat kan bestaan tussen de buuren van knoop i . De clusteringcoëfficiënt C van de graaf is de clusteringcoëfficiënt gemiddeld over alle knopen.

Nabijheid

De nabijheid van een knoop is de gemiddelde afstand naar alle andere knopen. De nabijheid van een knoop geeft de mate van centraliteit van een knoop aan, dat wil zeggen het geeft aan in hoeverre een knoop centraal staat in het netwerk. De knoop met de laagste nabijheid noemen we de meest centrale knoop.

Algebraïsche connectiviteit

De Laplace matrix van een graaf G met N knopen is een $N \times N$ matrix $Q = \Delta - A$, waarbij $\Delta = \text{diag}(d_i)$, d_i is de graad van knoop i , en A is de verbindingsmatrix van G . De op één na kleinste eigenwaarde van de Laplace matrix wordt aangeduid met de term algebraïsche connectiviteit. De algebraïsche connectiviteit speelt een belangrijke rol in verscheidene problemen uit de grafentheorie (zie bijvoorbeeld [13]). De belangrijkste toepassing van

deze metriek betreft de connectiviteit van de graaf: hoe groter de algebraïsche connectiviteit, hoe moeilijker het is om de graaf uiteen te doen vallen in onafhankelijke componenten.

Het Nederlands-elftalnetwerk

De data die nodig is om het Nederlands-elftalnetwerk te construeren is beschikbaar op de site www.voetbalstats.nl. Op de site zijn alle opstellingen te vinden van alle officiële interlands van het Nederlands elftal. We hebben alle interlands beschouwd tot en met Wit Rusland–Nederland (21 november 2007), hetgeen de 661^e interland was. De eerste interland van Oranje was België–Nederland (30 april 1905). Als een voorbeeld tonen we de opstelling van interland nr. 331, Nederland–België (18 november 1973), zie figuur 1.

Uiteraard corresponderen alle spelers die voorkomen in figuur 1 met knopen in het Nederlands-elftalnetwerk, en bovendien bestaan er tussen alle spelers in figuur 1 onderlinge links. Dus, ter illustratie, Aad Mansveld is verbonden met Rob Rensenbrink.



Figuur 2 Twee verbonden spelers in het NE netwerk

Nadat we de data van alle 661 wedstrijden in een database hebben ingevoerd, waren we in staat om met behulp van een eenvoudige query de lijst van alle verbindingen in het Nederlands-elftalnetwerk te bepalen. Het is gebleken dat in de 661 interlands in totaal 691 internationals hebben gespeeld. Elke individuele speler hebben we voorzien van een unieke ID, variërend van 1 tot en met 691. De ordening van de ID's was gebaseerd op het aantal speelminuten in het Nederlands elftal. De verbindingslijst is een representatie van alle links in het netwerk. Bijvoorbeeld, omdat Aad Mansveld ID 294 heeft terwijl Rob Rensenbrink ID 41 bezit, bevat de verbindingslijst het element $41 - 294$. We hebben geconstateerd dat het totaal aantal links in het Nederlands-elftalnetwerk 10450 bedraagt.

We hebben het Nederlands-elftalnetwerk gevisualiseerd door de verbindingslijst in te voeren in het Pajek programma [14] (figuur 5). Knopen aan de linkerzijde van de graaf corresponderen met spelers uit het begin van de vorige eeuw. De nog steeds actieve spelers zijn te vinden aan de rechterzijde van de graaf.

Resultaten

In deze sectie geven we waarden van enkele topologische eigenschappen die eer-

Topologische eigenschappen	Waarde
# knopen	691
# links	10450
linkdichtheid	0.044
gemiddelde graad	30.25
assortativiteitscoëfficiënt	-0.063
gemiddelde afstand	4.49
diameter	11
eccentriciteit	8.60
clusteringcoëfficiënt	0.75
algebraïsche connectiviteit	0.16

Tabel 1 Topologische eigenschappen

der zijn geïntroduceerd voor het Nederlands-elftalnetwerk. We hebben ze berekend met behulp van Pajek en enkele speciaal daarvoor ontwikkelde Matlab functies. De resultaten zijn te vinden in tabel 1.

Ten eerste kunnen we concluderen dat het Nederlands-elftalnetwerk geconnecteerd is. Dat wil zeggen dat er tussen elke twee internationals een pad bestaat. Als voorbeeld beschouwen we Johan Crujff en Marco van Basten. Deze twee internationals hebben nooit in dezelfde interland gespeeld, maar ze hebben wel allebei met Willy van de Kerkhof gespeeld. De afstand tussen Crujff en van Basten is dus 2.

Omdat de gemiddelde afstand tussen spelers klein is (4.46) vertoont het Nederlands-elftalnetwerk, net als veel andere sociale netwerken, het small-world effect. Verder zien we dat een speler gemiddeld met ongeveer dertig internationals heeft samengespeeld.

Uiteraard is de informatie die we hebben verkregen veel gedetailleerder dan getoond. Zo zijn we bijvoorbeeld nu in staat de vraag welke international met de meeste medespelers gespeeld heeft, te beantwoorden. We hebben ontdekt dat de speler met de hoogste graad Harry Dénis is. Zoals blijkt uit tabel 2 speelde hij in wedstrijden waarin 117 andere internationals hebben gespeeld:

Speler	Wedst.	Graad	NE carrière	Clust.
Van der Sar	122	97	1995-heden	0.39
Dénis	56	117	1919-1930	0.17

Tabel 2 Karakteristieken voor Van der Sar en Dénis

Omdat er in de tijd dat Dénis actief was niet werd gewisseld weten we dus dat hij precies 117 medespelers heeft gehad. Het is opmerkelijk dat Edwin van der Sar, recordinternational met 122 interlands, slechts een graad heeft van 97. Het is interessant op te merken dat Dénis ook de laagste clusteringcoëfficiënt heeft van alle spelers, dat wil zeggen hij is de speler waarvan de medespelers onderling het minst verbonden zijn.

Volgens tabel 1 is de diameter van het

Nederlands-elftalnetwerk gelijk aan 11. In tabel 3 tonen we het kortste pad tussen Rafael van der Vaart en Jan van Beek, dat inderdaad lengte 11 heeft.

Merk op dat het Nederlands-elftalnetwerk nog veel meer kortste paden van lengte 11 bevat. Bijvoorbeeld, elke speler die met Edwin van der Sar samenspeelde na 2000, heeft ook een kortste pad van lengte 11 naar Jan van Beek. Met behulp van Pajek hebben we uitgerekend dat er in het Nederlands elftal netwerk in totaal 324 kortste paden zijn van lengte 11.

Door de nabijheid van alle spelers te berekenen, zijn we ook in staat te bepalen wie de meest centrale speler is in het Nederlands-elftalnetwerk. Met 'meest centraal' wordt hier bedoeld de speler die gemiddeld de kortste afstand heeft tot alle overige spelers. Tabel 4 toont de Top 5 van spelers met de laagste nabijheid. De meest centrale speler in het Nederlands elftal netwerk is Roel Wiersma, die actief was in 1954–1962, en 53 interlands op zijn naam heeft staan. Merk op dat het niet verrassend is dat de meest centrale spelers ongeveer vijftig jaar geleden actief waren, omdat het Nederlands Elftal ongeveer honderd jaar bestaat. Van de nog actieve spelers is Edgar Davids het meest centraal, met een gemiddelde afstand tot alle overige spelers van 4.73.

We zullen nu de topologische kenmerken van het Nederlands elftal netwerk vergelijken met die van enkele andere netwerken uit de echte wereld. In tabel 5 vergelijken we het Nederlands-elftalnetwerk met de volgende netwerken:

- Braziliaanse-Voetballersnetwerk (BV) [5]
- elektriciteitsnet van westelijke staten in de V.S. (Pow) [15]
- het Internet op het niveau van Autonome Systemen (Int) [16]
- netwerk dat proteïne interactie representeert voor de gistsoort *Saccharomyces cerevisiae* (Pro) [17]

In tabel 5, die gedeeltelijk is overgenomen uit [17], ontbreken enkele kenmerken in de BV kolom, omdat deze niet zijn beschreven in [5].

Op basis van tabel 5 kunnen we onder andere de volgende conclusies trekken. Net als het Nederlands-elftalnetwerk, vertonen ook het Braziliaanse-Voetballersnetwerk, het Internet op Autonomoos Systeem niveau en het proteïnenetwerk het small-world effect. Gemiddeld heeft een speler uit de Braziliaanse competitie 50% meer medespelers gehad dan een speler van het Nederlands elftal. In tegenstelling tot het Nederlands-elftalnetwerk, is het Braziliaanse netwerk assortatief. Met uitzondering van het elektriciteitsnet (Pow)

	Speler	NE carrière
1	Rafael van der Vaart	2001–heden
2	Edwin van der Sar	1995–heden
3	Aron Winter	1987–2000
4	Arnold Mühren	1978–1988
5	Jan Jongbloed	1962–1978
6	Roel Wiersma	1954–1962
7	Bertus de Harder	1938–1955
8	Puck van Heel	1925–1938
9	Harry Dénis	1919–1930
10	Just Göbel	1911–1919
11	John Heijning	1907–1912
12	Jan van Beek	1907

Tabel 3 Een kortste pad in NE netwerk van lengte 11

	Speler	NE carrière	Nabijheid
1	Roel Wiersma	1954–1962	3.119
2	Faas Wilkes	1946–1961	3.213
3	Bertus de Harder	1938–1955	3.217
4	Kees Rijvers	1946–1960	3.222
5	Mick Clavan	1948–1965	3.230

Tabel 4 Top 5 meest centrale spelers

heeft het Nederlands-elftalnetwerk de hoogste gemiddelde afstand tussen de knopen. De clusteringcoëfficiënten van het Nederlands-elftalnetwerk en het Braziliaanse netwerk zijn vergelijkbaar, en veel hoger dan van de overige beschouwde netwerken. Het Nederlands elftal netwerk heeft de grootste algebraïsche connectiviteit, dus van de beschouwde netwerken valt dit netwerk het minst snel uiteen in onafhankelijke componenten.

Overige resultaten

Tenslotte bespreken we een aantal resultaten over het Nederlands elftal die niet gerelateerd zijn aan het Nederlands-elftalnetwerk. Figuur 4 toont het aantal interlands gespeeld door het Nederlands elftal per jaar.

Een visuele inspectie van figuur 4 laat onder andere het volgende zien: het plaats vinden van twee wereldoorlogen, het optreden van lokale maxima bij het behalen van de finale van twee WK eindronden (1974 en 1978), een lokaal minimum als gevolg van de uitschakeling voor de WK eindronde in 2002 en de tendens van een toenemend aantal wedstrijden per jaar.

Omdat doelpunten de essentie vormen van voetbal, zullen we ons nu richten op enkele statistieken rond doelpunten. In figuur 3 laten we de kans $P(g)$ zien dat een speler in totaal g doelpunten heeft gescoord voor het Nederlands elftal.

We kunnen concluderen uit figuur 3 dat de kans dat een international nooit heeft gescoord voor het Nederlands elftal gelijk is aan 62%. De 10 spelers die het meest hebben gescoord voor het Nederlands Elftal zijn te vinden in tabel 6.

Metriek	NE	BV	Pow	Int	Pro
# knopen	691	13411	4940	20906	4713
# links	10450	315566	6594	42994	19528
linkdichtheid	0.044	0.0035	0.00054	0.0002	0.0018
gem. graad	30.25	47.10	2.67	4.11	8.29
assort. coëff.	-0.063	0.12	0.0036	-0.20	-0.13
gem. afstand	4.49	3.29	18.54	3.89	3.16
diameter	11	-	46	11	4
eccentriciteit	8.60	-	34.06	8.03	3.99
clust. coëff.	0.75	0.79	0.080	0.21	0.11
algebr. connectiviteit	0.16	-	0.0009	0.015	0.12

Tabel 5 Topologische kenmerken voor verschillende netwerken uit de echte wereld

Het is duidelijk dat Patrick Kluivert de topscorer is van het Nederlands Elftal. Echter, we zien ook uit tabel 6 dat Kluivert meer dan twee keer zoveel wedstrijden nodig had als Faas Wilkes, om slechts vijf doelpunten meer te scoren. Om de trefzekerheid van spelers op een eerlijkere manier met elkaar te vergelijken, hebben we daarom ook gekeken naar het doelpuntenquotiënt (DQ) van spelers, dat wil zeggen het aantal doelpunten dat ze gemiddeld hebben gescoord per 90 minuten speeltijd. Hierbij beschouwen we alleen spelers die minimaal 20 interlands hebben gespeeld. Het resultaat is te zien in tabel 7.

Het blijkt uit tabel 7 dat van alle spelers die twintig of meer interlands hebben gespeeld, Beb Bakhuys het meest trefzeker was. Met een doelpuntenquotiënt van 0.62 neemt Patrick Kluivert op deze ranglijst slechts plek 14 in.

We merken nog op dat Piet de Boer een doelpuntenquotiënt van 3 heeft. Hij heeft slechts één keer gespeeld voor het Nederlands elftal (wedstrijd nr. 148 in 1937) en daarin scoorde hij dus 3 keer. Volgens [9] werd hij na deze wedstrijd niet meer geselecteerd omdat de keuzeheren hem te klein vonden.

De bondscoach

In dit artikel hebben we enkele topologische eigenschappen bestudeerd van het Nederlands-elftalnetwerk. Indien alle interlands die tot en met 2007 zijn gespeeld worden meegenomen, dan zijn de belangrijkste conclusies als volgt

- Het Nederlands-elftalnetwerk bestaat uit

691 spelers met 10450 onderlinge verbindingen.

- Het Nederlands-elftalnetwerk is geconnecteerd, dat wil zeggen tussen elke twee internationals bestaat een pad.
- Het Nederlands-elftalnetwerk vertoont het small-world effect, omdat de gemiddelde afstand tussen spelers klein is (4.46).
- De speler die de meeste medespelers heeft gehad in het Nederlands elftal is Harry Dénis. Hij speelde met 117 internationals samen.
- Van alle internationals heeft Harry Dénis de laagste clusteringcoëfficiënt, dat wil zeggen hij is de speler waarvan de medespelers onderling het minst verbonden zijn.
- De diameter van het Nederlands-elftalnetwerk bedraagt 11, dat wil zeggen het langste kortste pad dat voorkomt heeft lengte 11.
- De meest centrale speler in het Nederlands-elftalnetwerk is Roel Wiersma.

Vervolgens hebben we de topologische eigenschappen van het Nederlands elftal netwerk vergeleken met die van enkele netwerken uit de echte wereld, te weten het Braziliaanse-Voetballersnetwerk, een electriciteitsnet in de V.S., het Internet op het niveau van Autonome Systemen (Int) en een proteïne-interactienetwerk. Tot slot hebben we enkele resultaten besproken die niet gerelateerd zijn aan de topologische aspecten van het Nederlands Elftal netwerk:

- Het grootste aantal interlands per jaar ooit bedraagt 17. Dit vond plaats in 2004.
- De kans dat een international nooit heeft gescoord voor het Nederlands Elftal is gelijk aan 62%.
- Van alle spelers die twintig of meer interlands hebben gespeeld, scoorde Beb Bakhuys per negentig minuten speeltijd gemiddeld het meeste doelpunten.

Zoals uit de bovenstaande resultaten blijkt, kunnen we door het bestuderen van het Nederlands-elftalnetwerk, allerlei nieuwe, interessante statistieken omtrent het Nederlands elftal achterhalen. Een mogelijke toepassing van onze studie is het automatische

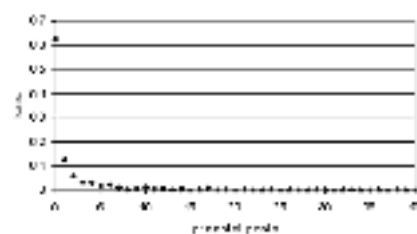
	Speler	Wedstrijden	Goals
1	Patrick Kluivert	79	40
2	Dennis Bergkamp	79	37
3	Faas Wilkes	38	35
4	Abe Lenstra	47	33
5	Johan Crujff	48	33
6	Ruud van Nistelrooy	59	30
7	Beb Bakhuys	23	28
8	Kick Smit	29	26
9	Marco van Basten	58	24
10	Leen Vente	21	19

Tabel 6 Topscoorders Nederlands elftal

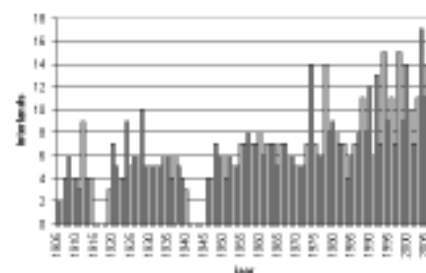
genereren van quizvragen rond het Nederlands elftal. (Zie [19] voor een voorbeeld van hoe zo'n quiz er uit zou kunnen zien.)

De resultaten van onze studie zouden ook gebruikt kunnen worden door de bondscoach. We geven hier twee voorbeelden van. In het eerste voorbeeld veronderstellen we dat de bondscoach voor de linksbackpositie twijfelt tussen Tim de Cler en Urby Emanuelson. Beide spelers hebben 10 interlands gespeeld maar de graad van de Cler is 37 terwijl die van Emanuelson 29 is. Op basis hiervan kan de bondscoach besluiten de Cler op te stellen, omdat een hogere graad in het Nederlands-elftalnetwerk op meer ervaring kan duiden. Als tweede voorbeeld noemen we de mogelijkheid voor de bondscoach om een elftal dusdanig samen te stellen dat bepaalde eigenschappen van het elftal optimaal zijn. Zo kan een elftal worden samen gesteld waarvan zoveel mogelijk spelers al onderling hebben samen gespeeld of een elftal waarvan het aantal medespelers van de opgestelde spelers maximaal is.

Voor vervolgonderzoek richten we ons op drie aspecten. Ten eerste willen we de topologische eigenschappen van het Nederlands elftal vergelijken met die van nationale voetbalteams van andere landen. Bij voorkeur voeren we een dergelijk onderzoek uit in samenwerking met de UEFA, de Europese voetbalbond. Ten tweede gaan we ons toeleggen op de visualisatie van het Nederlands-elftalnetwerk. We hebben de ontwikkeling van een interactieve tool voor ogen, waarmee de gebruiker zelf door het netwerk kan bewe-



Figuur 3 De kans dat een speler g doelpunten heeft gemaakt



Figuur 4 Aantal interlands van Nederlands elftal per jaar

gen. Een dergelijke tool kan interessant zijn voor de KNVB, www.voetbalstats.nl en zelfs het Oranje Voetbal Museum te Amsterdam. Ten derde willen we de correlatie onderzoeken tussen de topologische eigenschappen van de subgraaf gevormd door spelers die in één specifieke wedstrijd speelden en de uitslag van die wedstrijd. ←

Dankwoord

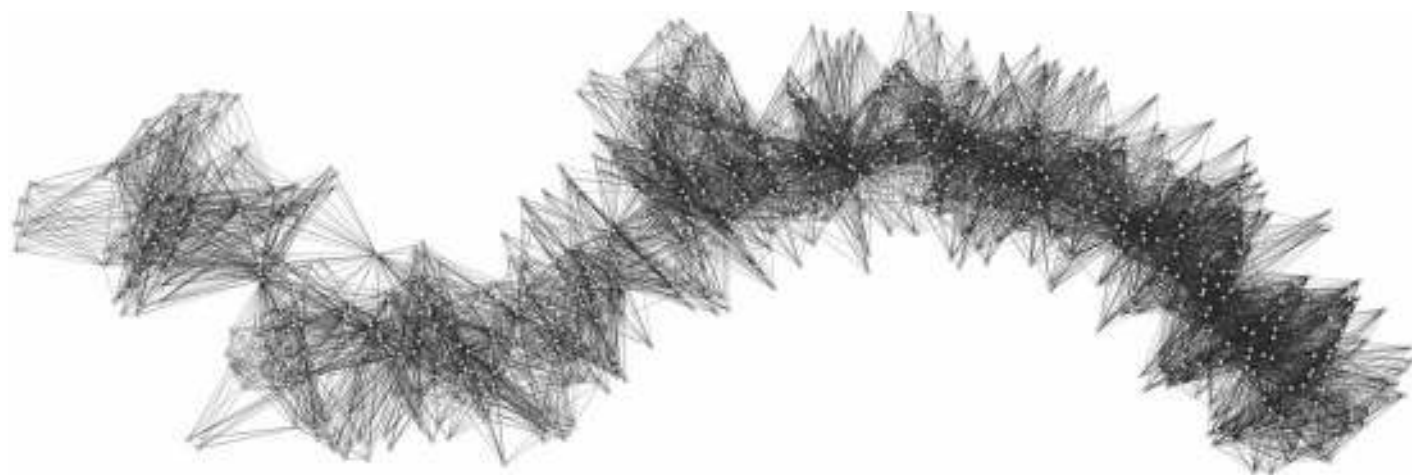
Dit onderzoek is mede mogelijk gemaakt met behulp van financiële steun van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), middels projectnummer 643.000.503, en door het Next Generation Infrastructures programma (www.nginfra.nl). De auteurs bedanken Jos Weber (TU Delft en Excelsior'20) voor zijn waardevolle suggesties en commentaar.

	Speler	Wedstr.	Min.	Goals	DQ
1	Beb Bakhuys	23	2070	28	1.22
2	Pierre van Hooydonk	46	1295	14	0.97
3	Leen Vente	21	1870	19	0.91
4	Faas Wilkes	38	3450	35	0.91
5	Kick Smit	29	2587	26	0.90
6	John Bosman	30	1968	17	0.78
7	Mannes Francken	22	2010	17	0.76
8	Ruud Geels	20	1310	11	0.76
9	Tonny van de Linden	24	2138	17	0.72
10	Abe Lenstra	47	4260	33	0.70

Tabel 7 Doelpuntenquotiënt (spelers met minimaal 20 interlands)

Referenties

- 1 www.fifa.com/mm/document/fifafacts/fifaprojects/ip-401.06e.tv.2658.pdf
- 2 www.wcsf2007.org
- 3 Ken Bray, *How to score: Science and the Beautiful Game*, Granta Books, 2006
- 4 David Winner, *Brilliant Orange: The Neurotic Genius of Dutch Football*, Bloomsbury Publishing PLC, 2001
- 5 R.N. Onody and P.A. de Castro, 'Complex network study of Brazilian soccer players', *Physical Review E*, 70(3), 037103, 2004
- 6 S.N. Dorogovtsev and J.F.F. Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford, 2003
- 7 A.L. Barabasi, *Linked: The new science of networks*, Perseus, Cambridge, MA, 2002
- 8 D.J. Watts, *Six Degrees: The Science of a Connected Age*, W.W. Norton and Company, 2003
- 9 Martin van Neck, *De Oranje Rapporten*, Uitgeverij 521, Amsterdam, 2004
- 10 M.E.J. Newman, 'The structure and function of complex networks', *SIAM Review* 45, 167-256, 2002
- 11 M.E.J. Newman, 'Assortative mixing in networks', *Phys. Rev. Lett.* 89, 208701, 2002
- 12 J. Travers and S. Milgram, 'An experimental study of the small world problem', *Sociometry* 32(4), pp. 425-443, 1969
- 13 F.R.K. Chung, *Spectral graph theory*, Conference Board of the Mathematical Sciences No.92, AMS, Providence, RI, 1997
- 14 Pajek, 'Program for large network analysis', vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/pajek
- 15 D.J. Watts and S. H. Strogatz, 'Collective dynamics of small-world networks', *Nature* 393, 440-442, 1998
- 16 CAIDA, 'Macroscopic Topology AS-Adjacencies Data set', www.caida.org/tools/measurement/skitter/as_adjacencies.xml
- 17 H. Jeong, S. Mason, A.L. Barabasi and Z.N. Oltvai, 'Centrality and lethality of protein networks', *Nature* 411, 41, 2001
- 18 A. Jamakovic, S. Uhlig and I. Theisler, *On the relationships between topological metrics in real-world networks*, Proc. of the 4th European Conference on Complex Systems (ECCSo7), Dresden, Germany, October, 2007
- 19 www.magicbob.nl/oranjequiz.html



Figuur 5 Visualisatie van het Nederlands-elftalnetwerk

Gerard Buskes

Department of Mathematics

University of Mississippi

105 Hume Hall

University, MS 38677-0158, USA

mmbuskes@olemiss.edu

Column Wiskundigen in den vreemde

The land of Yoknapathapa

Gerard Buskes got his Ph.D. with Arnoud van Rooij in Nijmegen in 1983. After his graduation, he spent a few years as a researcher in Adelaide, Australia. Following that, he went to the United States where he ended up as a full professor at the University of Mississippi. His research interests include functional analysis and operator theory. He actively strives to increase minority and female participation in graduate mathematics.

On a steaming hot day in August 1985 I arrived on the campus of the University of Mississippi. After my Ph.D. at the Radboud University (then called de Katholieke Universiteit van Nijmegen) I had lived in Adelaide, Australia, working at Flinders University of South Australia, supported by a ZWO (now called NWO) grant. The owners of the oldest restaurant in the South, Smitty's, just off the quaint southern square, instantly looked for the Guest Book when I walked in for breakfast the next morning. It was clear that I came from 'den vreemde'. More than twenty-two years later, a circle is now closed with the request of the editors of Nieuw Archief to write about being a mathematician 'in den vreemde'.

America and The American dream

At first I felt a strong desire, maybe it was homesickness, to write this note in Dutch. But then I recalled that the request did not specify the language. In the end, I hope the reader will agree that the content forced my hand. I had to write in

American English.

From a Dutch perspective the American higher education system may seem dominated and exemplified by prestigious institutions like Berkeley, Harvard, and Yale. The reality of American education is rather harder to describe though. When children go to primary school, their parents are faced with choices that all are as un-Dutch as they are American. Yes, public education is free and every morning a massive bussing system offers the opportunity to deliver every school-aged kid to a public school. Here is the catch. The choice of public school is determined by the geographic location of the house of the parents. The bewildering quality differences in the primary and secondary schools then is a consequence of a system that largely sustains itself via the local property taxes of its citizens (and to a lesser and endlessly debated degree via spending to public schools by state and federal government, in addition to private fund-raising for both public and private schools). Consequently, and very generally speaking, where the wealthy and affluent congregate, the schools are well equipped, whereas an inner city school in say, Washington DC, may fare far less well. In addition, there are strong religious and social beliefs that continue to sustain a variety of private schools, parochial schools, academies, boarding schools, Montessori schools, and home schools. And before I continue, I have to point out that I am simplifying this very complicated system. Catchy programs as 'No Child Left Behind' are national attempts to unify some of that diversity, but its beneficial effects seem unproven

for now. What truly is remarkable in the light of the diversity of primary and secondary education is the observation that in the United States an unremarkable start in life seems to make true talent gravitate from humble beginnings to the very best places of higher education. And that is all part of the American dream. I add that my wife teaches at a public high school and my two children are at the beginning of their journey through (public) schools. The primary and secondary education system is both full of contradictions and brimming with tremendous potential.

The University of Mississippi

Moving to post-secondary education, all of the bewilderment, contradictions, and potential only get magnified. Contrary to the University of Delft and the University of Nijmegen, the University of Arizona and the University of Mississippi are not only separated by a large swath of land but also are governed by very different State systems. Similarly, the socioeconomic, geographic, and historical background of e.g. the University of Mississippi make a comparison with any Dutch university impossible. An entering freshman will take a set of core courses, including mathematics, science, a language, English, and history. The choosing of a major like mathematics determines only about one third of the total number of credit hours before graduating with a bachelor degree. Beyond that, there is graduate school where specialization, masters degrees and Ph.D. degrees begin to draw a semblance to Dutch universities. The University of Mississippi is a state funded university. The State of Mississippi is the poorest state in the United States of America. In addition, the State of Mississippi has two more comprehensive state funded universities, four private universities, a handful of smaller universities, as well as community colleges, trade schools, and other state funded job training facilities.

History

The University of Mississippi is relatively old. Relatively old, since the meaning of 'old' is in sharp contrast with the Dutch setting too. It was founded in 1848. The competition of where to place the new university was won by a town that had named itself Oxford with the purpose of winning. Oxford, Mississippi is the mythical land of Yoknapathapa as described by William Faulkner in many of his books. Its location, away from entertainment opportunities (almost seventy miles away from Memphis, Tennessee and more than three hundred miles away from the Gulf Coast), supposedly was part of its 'attraction'. At its start it ordered a lens that would have resulted in the largest telescope in the world at that time. That ambition was soon overshadowed by the Civil War, which cast a very long shadow. Now, almost a decade after its sesquicentennial, the University has gone through a transformation that is trying to advertise itself as the Harvard of the South. Most certainly, it transformed itself from a University in 1985 with barely 7,000 students in a sleepy little town of 15,000 to a vibrant University with 15,000

students in a town where every nook and cranny is being filled with condominiums, town houses, sushi bars and the like. In other even more noticeable ways, the university has transformed itself. Its Department of Mathematics made national headlines when last year four African-American Ph.D. degrees were awarded in mathematics during one graduation, against the background of about twelve such Ph.D. degrees in all of the United States on average per year for the last ten years. How that event is of such paramount importance for the University of Mississippi is hard to explain without a more detailed analysis and understanding of its history, which involves a long period of racial segregation. Reading *Light in August* or *Go down, Moses* by William Faulkner certainly will help understand that history. We also refer to a note (G. Buskes, 'Mississippi Mathematics Renaissance') in the *Notices of the American Mathematical Society* (Volume 54, no. 1) earlier this year.

Education, research and service

At balance, the University of Mississippi necessarily is very different from any Dutch university. Not surprisingly though, the tasks of a University Professor are similar to those of a professor in the Netherlands. There is teaching, research, and service, in that order of importance at the University of Mississippi. What is incongruent in university teaching compared with the Netherlands, can in part be explained by the diversity of socioeconomic backgrounds of the students as well as the diversity in level of secondary education resulting from the factors described above. Also different in the American University system is a moving through the professorial ranks, from assistant via associate to full professor. In my case, I was promoted to associate professor in 1993 and to full professor in 2000. In the mean time, I had spend a wonderful year in the mathematics department at Utrecht in 1987. I have had four Ph.D. students here, spent an unmemorable year as Department Chair, have enjoyed research funding from the National Science Foundation, the NATO, the U.S. Department of Education and the Office of Naval Research, and have been provided every opportunity for professional development that I asked for. I add to the latter sentence, that the search for research funding by all university professors in the United States of America is in part driven by economics, caused by a U.S. university tradition that offers contracts to its Professors for nine months of the year.

In conclusion, the opportunities and the challenges of where to make a difference in one's career may well be more complex and diverse than they are at Dutch universities. At the same time, the rewards contain the same set of contradictions and almost infinite brilliant potential, that appears to underlie not just the university system but American Society overall. And in some ways, as much as it often makes me realize that I am 'in den vreemde', I also fully realize that I would not want it any other way.



Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

bmols@orange.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2007

Minder verstoringen in MRI-beelden

MRI-scanners gebruiken steeds hogere magneetvelden. In principe moet dat tot meer gedetailleerde beelden leiden, maar in de praktijk treden er beeldverstoringen op als gevolg van een interactie tussen het elektromagnetische veld en het menselijk lichaam. Wiskundigen zoeken naar een manier om die storingen te voorkomen door de scanner anders in te stellen.

Voor het opsporen en in kaart brengen van tumoren in de baarmoederhals of in de prostaat gebruikt de afdeling radiotherapie van het *Universitair Medisch Centrum Utrecht* (UMCU) een MRI-scanner. Een MRI-scanner gebruikt een sterk magneetveld om de waterstofatomen in het lichaam langs dit externe veld te richten. Het menselijk lichaam zit vol met waterstofatomen, die allemaal als kleine magneetjes werken. Met radiogolven kan de MRI-scanner het lichaam vervolgens aftasten. De waterstofatomen in het lichaam absorberen de energie van de radiogolven en worden zo tijdelijk in een andere richting gedwongen. Vervolgens klappen de waterstofatomen weer terug naar hun oorspronkelijke oriëntatie en daarbij zenden ze zelf radiogolven uit. De MRI-scanner meet deze golven. De sterkte en frequentie van de uitgezonden golven geeft gedetailleerde informatie over de structuur en samenstelling van het weefsel in het lichaam. Een MRI-beeld laat die verschillen in weefselstructuur en -samenstelling zien. Op die manier moeten artsen tumoren onderscheiden van gezond weefsel. Het UMCU beschikt over MRI-scanners met een magneetveld van 1,5 tesla (tegenwoordig dé standaard in ziekenhuizen), en eentje van 3 tesla. Spoedig schaft het ziekenhuis zelfs een 7-tesla-scanner aan. Dat zijn magneetveldsterktes die tienduizen-

den malen hoger zijn dan die van het aardmagnetisch veld. Een sterker magneetveld betekent in theorie een betere verhouding tussen beeldcontrast en ruis, en dus kan de scanner in principe meer zien. Maar er zit een adder onder het gras. Hoe hoger het magneetveld, hoe meer je je best moet doen daar profijt uit te trekken. Het gemeten signaal dooft sneller uit en je moet langer wachten tussen verschillende experimenten. Hoe hoger het magneetveld, hoe hoger ook de frequentie van de radiogolven waarmee je de waterstofatomen moet aanslaan: 64 megahertz bij een magneetveld van 1,5 tesla; 128 megahertz bij 3 tesla en 300 megahertz bij 7 tesla. Met die toenemende frequentie, neemt de golflengte af en dat wordt een probleem als de golflengte van de orde grootte van de afmetingen van de patiënt of kleiner wordt. Bij een magneetveld van drie tesla, en in nog sterkere mate bij zeven tesla, zorgt de interactie tussen de golven en het menselijk lichaam voor serieuze verstoringen in het beeld. Er ontstaan staande golven die op sommige plekken voor veel signaal en op andere plekken voor weinig signaal zorgen. In het MRI-beeld ontstaan dan ofwel geheel zwarte vlekken, ofwel geheel witte vlekken, zonder informatie over de weefselstructuur. Een ander nadeel is dat de radiogolven zorgen voor een opwarming van

het menselijk lichaam. En hoe hoger de frequentie, hoe meer energie er in die golven zit, en hoe groter de opwarming.

Patiënt als ellips

“We staan voor twee uitdagingen”, vertelt Nico van den Berg van het UMCU. “De eerste is om de beeldkwaliteit te verbeteren. De tweede is om die opwarming binnen de perken te houden.”

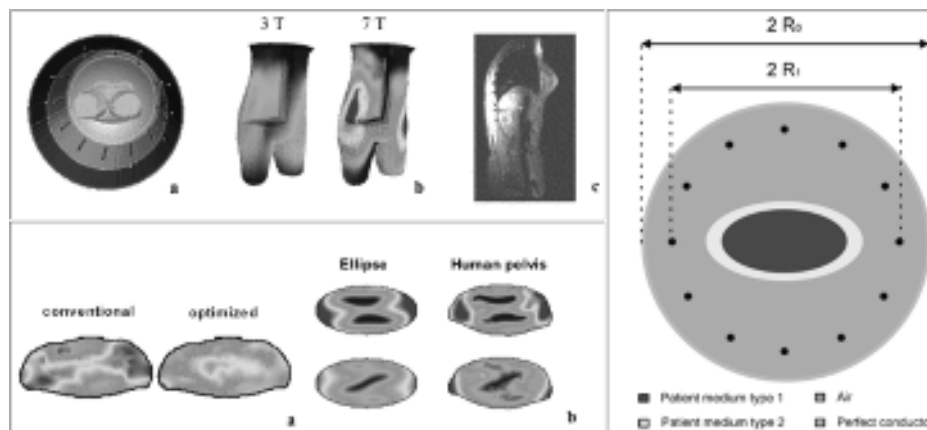
Het probleem dat het UMCU voorlegde aan de studiegroep richt zich op het buik- en bekkengebied. Het globale patroon van het elektromagnetische veld in dit gebied wordt bepaald door een combinatie van de geometrie van het gebied en de mate waarin weefsels het elektromagnetische veld toelaten: de diëlektrische eigenschappen van bijvoorbeeld vetweefsel, spierweefsel of botweefsel. Voor de eenvoud wordt er een ellipsvormige wand aangenomen met de diëlektrische eigenschappen van vetweefsel, en een ellipsvormig binnenste met overal dezelfde diëlektrische eigenschappen, gebaseerd op een soort gewogen gemiddelde van alle verschillende weefsels in het inwendige van de patiënt. Het probleem is tweedimensionaal.

“De opdracht voor de wiskundigen was”, vertelt Van den Berg, “om het elektromagnetische veldpatroon in de patiënt te optimaliseren. Optimaliseren betekent in dit verband dat het veld zo homogeen mogelijk moet zijn en tot zo min mogelijk opwarming van menselijk weefsel moet leiden. Dat kun je proberen te doen door de fase en de amplitude te va-

riëren van de radiogolven die elke antenne uitzendt. Daarmee verander je de interferentie van al die radiogolven in de patiënt.” In de toekomst moet zo’n optimalisatieprogramma geïntegreerd worden in de MRI-scanner. Het scenario is dan als volgt: de patiënt gaat in de MRI-scanner liggen en de scanner berekent eerst de beste ‘fitting ellips’. Een dikke patiënt zal een dikkere buikwand hebben dan een dunne patiënt, en dat levert een andere interactie tussen het elektromagnetische veld en het lichaam. Als de geometrie bekend is, berekent een model wat de beste fase- en amplitude-instellingen zijn van de antennes om zo min mogelijk beeldverstoringen te krijgen en zo min mogelijk weefselopwarming. De scannerinstelling wordt dus per patiënt geoptimaliseerd. “Het kost ons iets van twee uur om de numerieke modellen die we nu hebben op te lossen”, zegt Van den Berg. “Dat is in de praktijk niet werkzaam, omdat de patiënt dan veel te lang in de scanner zou moeten liggen. We hebben de wiskundegroep daarom gevraagd te zoeken naar een model dat wel een snelle oplossing levert voor hoe we de antennes moeten instellen voor een optimaal beeld. En met snel bedoel ik een oplossing binnen een of twee minuten. We hadden een sterke voorkeur voor een analytisch model, omdat je dan ook de afhankelijkheid tussen alle parameters in kaart hebt gebracht. Een analytisch model geeft meestal meer inzicht dan een numeriek model.”

De clou zit in de Besselfuncties

De wiskundigen stonden nu voor de taak om de Maxwellvergelijkingen — differentiaalvergelijkingen die het gedrag van een elektromagnetisch veld beschrijven — op te lossen binnen een holle cilinder (de MRI-scanner) met daarin een ellipsvormige patiënt. De patiënt bestaat in goede benadering uit twee gebieden: een buikwand, die wat vetter is, en een binnenste met vlees, spier en bot. “Het grootste probleem”, vertelt wiskundige Rogier Swierstra van de studiegroep, “zit in wat er met de oplossingen van de Maxwellvergelijkingen bij de drie randen gebeurt: van het binnenste van de patiënt naar de buikwand, van de buikwand naar de lucht, en van de lucht naar het buitengebied van de scanner. We hebben het probleem aangepakt voor één antenne. Ons idee was dat het UMCU met de analytische beschrijving van hoe het met één antenne gaat de rekentijd al tot enkele seconden kan verkorten. Als je weet wat één antenne doet, kun je daarna gemakkelijk de bijdragen van een reeks antennes bij elkaar optellen en de



Linksboven: a) In een MRI-scanner is de patiënt omringd door antennes die radiogolven uitzenden. b) De inhomogeniteit van het RF-veld dat de antennes opwekken wordt bij een magneetveld van 7 Tesla een serieus probleem. c) Door interferentie levert het MRI-beeld bij 7 Tesla op sommige plaatsen een zwart beeld. Linksonder: a) Door de amplitude en de fase van het RF-veld van de individuele antennes te variëren, kan het MRI-beeld verbeterd worden. b) De doorsnede van het bekkengedeelte van het menselijk lichaam kan in goede benadering als een ellips worden beschouwd. Rechts: Het model dat gebruikt wordt om de interactie tussen de radiogolven en het lichaam te beperken, berekent het magnetisch veld in deze geometrie: (1) een cirkelvormig koperschild (een perfecte geleider) ligt om het experiment heen en schermst versturende elektromagnetische invloeden van buiten af. (2) Een ellips bestaande uit elliptische lagen, elk met zijn eigen dielektrische eigenschappen, staat model voor een doorsnede van het lichaam: de buikwand en het inwendige. (3) De patiënt is omringd door N gelijk verdeelde antennes.

totale bijdrage optimaliseren.” De oplossingen van de Maxwellvergelijkingen laten zich in het algemeen formuleren als een som van verschillende functies van een bepaalde soort. Welk type functie handig is, hangt af van de geometrie van het probleem. De studiegroep onderzocht twee aanpakken. In de eerste aanpak werd de oplossing uitgeschreven als een som van Besselfuncties. Dat zijn functies die handig zijn bij ronde geometrieën. Voor dit probleem lijkt dat handig rondom de antenne, maar minder handig in en om de ellipsvormige buik. Daarom onderzocht een tweede groep een oplossing die uitgeschreven werd in een som van Mathieufuncties. Deze functies zijn handig bij elliptische geometrieën. Voor dit probleem is dat geschikt in en om de buik, maar minder geschikt nabij de antennes. Swierstra: “Besselfuncties leveren voor dit probleem meer complicaties op aan de randen dan Mathieufuncties. Maar Mathieufuncties doen het rond de antennes weer slechter dan Besselfuncties. Bovendien bestaat er voor Besselfuncties veel meer numerieke software dan voor Mathieufuncties. Beide groepen hebben een oplossing gevonden, maar uiteindelijk bleek een oplossing in Besselfuncties in de praktijk beter te werken. Het in een programma implementeren van Mathieufuncties duurde te lang.” Na afloop van de studieweek hebben enkele wiskundigen nog verder gewerkt aan het probleem. Op basis van de oplossing met Besselfuncties hebben ze toen een optimalisatieprogramma gemaakt dat in minder dan twee minuten rekenen — op een gewone desktop computer — bepaalt hoe de amplitude en frequentie van de antennes geregeld

moet worden om het veld in de buik te homogeniseren.

Praktijktest

“Het lijkt erop dat we de resultaten kunnen gebruiken”, blikt Van den Berg terug op de resultaten van de studiegroep. “Het model kunnen we binnen een paar minuten oplossen, en dat is wat we zochten. Samen met Philips Research gaan we later dit jaar testen hoe goed deze methode in de praktijk werkt.” Ook heeft de semi-analytische oplossing enkele nieuwe inzichten opgeleverd. “We kunnen in de formule expliciet zien wat het effect is van bijvoorbeeld een overgang van vetweefsel naar spierweefsel voor de verdeling van het elektromagnetische veld. En ook hoe dat veld verandert als bijvoorbeeld de vetlaag dikker is. Daarnaast zien we de resonantiefrequenties van de radiogolven van de MRI-scanner keihard terug in de oplossing. Dat inzicht kunnen we gebruiken om die resonantiefrequentie af te stemmen op de resonantiefrequentie van de waterstofkernen. Op die manier kunnen we een beter beeld krijgen.” “Ik ben zelf een fysicus”, zegt Van den Berg. “Voor mij was het verfrissend om met wiskundigen samen te werken, omdat zij vanuit een ander perspectief naar hetzelfde probleem kijken. Dat leverde interessante discussies. Ik ben als fysicus bijvoorbeeld gewend om het probleem eerst te schetsen in termen van de geometrie, de typische afstanden en de gebruikte frequenties. Toen ik die informatie op het bord schetste, vroegen de wiskundigen meteen om de Maxwellvergelijkingen op te schrijven. Want die staan voor hen aan de basis van de oplossing.”

Willem Uittenbogaard

Freudenthal Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 9432

3506 GK Utrecht

willemub@fi.uu.nl

Onderwijs

Geen catechismus leren, maar nadenken

Hoe berekenen we 345×729 ? Steeds minder basisschoolleerlingen leren nog hoe ze dit uit kunnen rekenen. Voor een dergelijk gruwelvoorbeeld worden zij naar de rekenmachine doorverwezen. Aldus Willem Uittenbogaard, auteur van dit artikel. Het recent door de CITO uitgevoerde PPON-onderzoek heeft aangetoond, dat de vaardigheden van snel en foutloos rekenen sterk omlaag zijn gegaan. Waar Hans Freudenthal nog voor het inzichtelijk oefenen van algoritmen pleitte, is men inmiddels verder: het toepassen van een algoritme is geen wiskunde. Sinds de jaren tachtig zijn systematisch steeds meer nieuwe methoden zoals de 'hapmethode' in het rekenonderwijs op school geïntroduceerd om kinderen handig te leren rekenen. In het juni 2007-nummer heeft Jan van de Craats, hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit, deze praktijk aan de kaak gesteld.

Willem Uittenbogaard, medewerker van het Freudenthal Instituut, geeft al 37 jaar op een pabo les en werkt daar zowel met kinderen als studenten en stoort zich aan de kritiek van Van de Craats. In dit artikel bespreekt hij de door Van de Craats aangehaalde voorbeelden vanuit zijn eigen perspectief. Moet 345×729 tot de gruwelvoorbeelden worden gerekend?

De titel van dit artikel is een citaat uit een recensie van het proefschrift van Jan de Lange (1987), geschreven door Jan van de Craats. Deze recensie stond in de NRC van 20 oktober 1987 met de titel 'Het nut van de wiskunde'. De inhoud van het toen nieuw in te voeren vak Wiskunde A vatte hij samen door 'Geen catechismus leren maar nadenken' (zie figuur 1). Dit artikel is een reactie op 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen' in dit blad (juni 2007). De ondertitel van zijn bijdrage luidt: Mythen in de rekendidactiek.

Er zijn vele aanleidingen om op dit artikel te reageren. Het bestek van dit stuk is te kort om op alle beweringen uitvoerig in te gaan. Ik zal in mijn bijdrage nogal eens verwijzen naar andere publicaties. De voornaamste aanleiding ligt misschien wel in de titel van dit artikel. Van de Craats heeft na 20 jaar de steven 180 graden gewend: Eerst de catechismus leren,

het nadenken komt later.

Twintig jaar geleden schreef Van de Craats in genoemde recensie: "Het revolutionaire van Wiskunde A is de invalshoek vanwaaruit onderwerpen worden benaderd. Steeds vanuit concrete, alledaagse problemen die je 'met je gezonde verstand' kunt oplossen. Misschien is de nadruk op het gebruik van het gezonde verstand en het ontwikkelen van een kritische houding wel het meest essentiële van Wiskunde A. Geen catechismus leren, maar nadenken."

Van de Craats werpt zich in zijn artikel op als voorstander van het gebruik van onze traditionele cijferalgoritmen, en tegen het zogenaamde kolomsgewijs rekenen. Ook heeft hij een hekel aan het woord gecijferdheid, want dat is volgens hem niets anders dan rekenvaardigheid. Op deze drie punten zal ik mij vooral richten. Ook zal ik ondertussen proberen zijn Mythen anders te formuleren. Laten

we maar eens aan het eind van zijn artikel beginnen. Daar komt Van de Craats met aanbevelingen:

Hoe leren Daan en Sanne weer rekenen?

- Herstel systematisch oefenen in ere.
- Eén methode per bewerking (het traditionele cijferalgoritme).
- Doe 'handig rekenen' de deur uit.
- Verbied 'kolomsgewijs rekenen'.
- ... en noem cijferen weer gewoon rekenen.

Leren met inzicht

In de wiskunde en dus ook in het wiskundeonderwijs is het zoeken naar patronen, regelmatigheden, regels, verkortingen en ook algoritmen essentieel. Hoe korter of vlugger, hoe beter. Daar is natuurlijk niets op tegen. Dat is in mijn ogen ook de zoektocht die we met alle kinderen, zowel in het basisonderwijs als in het voortgezet onderwijs zouden moeten gaan. Met alle kinderen! Ieder naar zijn of haar vermogen. Zo ver komen als je kunt. Niet met onbegrepen regels. Maar met inzicht.

Twee voorbeelden: bij eerstejaars pabo-studenten schrijf ik op het bord:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$$

en vraag studenten om dat op te lossen. Er zijn er altijd wel een paar die roepen: gelijknamig maken. En zo komt er op het bord:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \times \frac{12}{15} = \frac{120}{15} = 8.$$

(Dat '= 8' voeg ik er meestal aan toe).

Bij het stemmen over het al dan niet juist zijn van dit antwoord is altijd ongeveer de helft vóór. Nogal wat studenten twifelen aan hun antwoord van 8/15. Dat lijkt zo simpel. Dat kan niet goed zijn. Daar sta je dan als opleider. Ook mijn: 'hoeveel zou 2/3 van 80 cent zijn?', helpt weinig studenten verder.

Ann Dowker (1992) legt een stuk of tachtig wiskundigen kale schatsummen voor. Bijna alle geïnterviewden passen toe wat Van de Craats een hapsnapmanier noemt. Vrijwel niemand gebruikt een traditioneel algoritme. Een half jaar later legt ze de helft van haar onderzoeksgroep nog een keer dezelfde problemen voor. Iedereen doet het weer hapsnap, maar een groot deel van de groep gebruikt een andere strategie. Is dit exclusief voorbehouden aan wiskundigen? Heb je dan een hogere status bereikt op latere leeftijd? Of zou dat onderwijsfilosofie moeten zijn voor alle kinderen? Ongeacht hun leeftijd?

Onze traditionele cijferalgoritmen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen hebben hun uiteindelijke vorm gekregen in de zeventiende eeuw als ultieme verkortingen, vooral ten behoeve van de handel. Een eeuw geleden hebben we die algoritmen onderwerp gemaakt van ons onderwijs. Met het oog op later ...

Verschillen

Wat is nu precies het verschil tussen cijferen en rekenen? Cijferen is een van de strategieën die je kunt inzetten om een rekenkundig of wiskundig probleem op te lossen. Laten we als voorbeeld nemen: $27 \times 37 = \dots$ Dat doen Van de Craats en ik met ons hoofd. Niet uit

ons hoofd. Dan doe je een beroep op je geheugen. Maar met ons hoofd. Die 37 licht op, als het ware. Dat is wel geheugen. We weten dat $3 \times 37 = 111$, en dus is 27×37 , $9 \times$ zoveel: 999. Veel andere mensen moeten dat met een algoritme oplossen. Dat moet je op voorhand goed leren, volgens het betoog van Van de Craats.

Hieronder volgen vier nogal paradigmatische voorbeelden van elk van de hoofdbewerkingen. Ze zijn afkomstig uit mijn lange ervaring in het werken met kinderen. Omdat Van de Craats op zijn site eveneens met vier voorbeelden over de hoofdbewerkingen op de proppen komt, is het goed om ze hier te bespreken.

Delen: $80 : 2, 75 = ?$

Jan van de Craats lost dat waarschijnlijk op door deeltal en deler te vergroten met een factor 100 en daar het traditionele deelalgoritme op los te laten. Nog een keer hetzelfde probleem: "Juf heeft voor een handenarbeidles stukjes touw nodig van 2 meter 75. Zij heeft een bol van 80 meter. Hoeveel stukken kan zij daaruit halen?"

Bovenstaand probleem komt uit de laatste Cito PPON-peiling einde basisonderwijs 2004. De goedscore van dit probleem is ongeveer 10%. Bedroevend eigenlijk. Ik heb het probleem aan vele kinderen in de basisschool voorgelegd. Alle kinderen die in dit probleem een deling herkenden en begonnen aan $80 : 2, 75$, konden dat niet tot een goed einde brengen. Hoe zou Van de Craats hen dat willen leren? Waarschijnlijk toch met nadruk op het deelalgoritme. Hij zegt immers in zijn stuk: "voor elk van de vier hoofdbewerkingen is er één universeel, werkend recept". Was het leven maar zo eenvoudig.

Nu naar de kinderen die het probleem wel konden oplossen: "Jordi zegt: 1 keer is 2,75. 2 keer is 5,5. 4 keer is 11 meter. Dan is 28 keer 77 meter. Eén keer meer is minder dan 80 meter. 29 stukken, dus".

"Eva redeneert als volgt. Ik doe even alsof de juf 90 meter heeft en dat de stukken 3 meter lang zijn". (Oei, denk je dan. In een deling, zowel deeltal als deler veranderen. Dat kan haast niet goed aflopen.) Eva: "Nou, dat zijn dan 30 stukken, maar de stukken zijn niet 3 meter lang, maar 2,75 meter. Dat scheelt dus 30 keer een kwart meter, dat is 7 meter 50. Maar de juf heeft geen 82,50 meter. Dus dan één stuk minder. 29 stukken dus".

Wout redeneert als volgt: "10 stukken is 27,50 meter, 20 stukken is 55 meter, even denken. ... 30 stukken is 82,50 meter. Eén stuk minder dus".

Optellen: $7 + 8 = ?$

Ik heb twee jaar in New York (Manhattan) gewerkt en gewoond om daar mee te helpen een nascholingsprogramma rekenen en wiskunde voor leerkrachten basisschool op te zetten. Van de Craats zou zich daar in het Walhalla voelen. Het algoritmeland bij uitstek! Vele malen legde ik kinderen uit groep 3 dit probleem voor. "Weet je hoeveel 7 plus 8 is?" Bijna altijd was hun redenering als volgt: "Ik zet het eerst onder elkaar":

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8 + \end{array}$$

En dan: "seven plus eight is 15, put down the 5, carry the 1, 1 down: 15". Ik heb natuurlijk heel vaak tegen kinderen "stop" geroepen, halverwege hun liedje. En gevraagd: "Ben je al klaar?" Nee, eerst het liedje afmaken. Het was voor veel kinderen een openbaring, dat je halverwege al klaar was. Je hoeft het 'liedje' niet helemaal af te maken. Sterker nog: helemaal niet af te maken.

Aftrekken: $2003 - 1998 = ?$

Het goede antwoord is 5. $2 + 3 = 5$. Klaar! Niet voor Jan van de Craats en z'n Amerikaanse klasgenoten. Onder elkaar natuurlijk! En lenen bij de burens, die ook niks hebben. Dan maar weer lenen bij hun burens. En nog een keer. Met enig geluk wordt het antwoord 5. "Voor alle bewerkingen één strategie, geen hapsnapmethode", volgens Van de Craats.

Vermenigvuldigen: $200 \times 200 = ?$

Amerikaanse leerlingen zeggen: "Heeft u ook een zakrekenmachine?" Nee, maar kun je het wel oplossen? "Dan heb ik papier en pen nodig". En daar gaan we:

$$\begin{array}{r} 200 \\ 200 \times \end{array}$$

0 keer 0, is dat 1 of 0? En dan 0×2 ? Met alle moeite komt er 40.000 uit. Terwijl je boerenverstand zegt: een 4 met vier nullen, klaar!

De tijd staat niet stil ...

In de afgelopen vijfendertig jaar zijn we bezig geweest om over de positie van het hoofdrekenen en cijferen na te denken. Hoofdrekenen, wat vroeger 'uit' je hoofd rekenen was, heeft plaats gemaakt voor rekenen 'met' je hoofd. Dus eventueel met meer of minder tussenantwoorden. Op papier, als je dat wilt. Er blijft wel een stukje 'uit je hoofd' over, zoals $7 + 8$ en 7×8 . Dat zou echt uit het hoofd

Gezond verstand

De inhoud van Wiskunde A voor het vwo kan in vaktermen beschreven worden: differentiëren, optimaliseren, vectoren, matrices, lineair programmeren, kansrekening, statistiek, grafische voorstelling en automatische verwerking van gegevens. Maar je kunt die onderwerpen op allerlei manieren behandelen. Het revolutionaire van Wiskunde A is de invalshoek van waaruit ze worden benaderd. Steeds vanuit concrete, alledaagse problemen die je in principe 'met je gezonde verstand' kunt oplossen. Misschien is de nadruk op het gebruik van het gezonde verstand en het ontwikkelen van een kritische houding wel het meest essentiële facet van Wiskunde A. Geen catechismus leren, maar nadenken.

Figuur 1 Van de Craats' beschrijving van het vak Wiskunde A uit: 'Het nut van de wiskunde', NRC-Handelsblad, 20 oktober 1987

moeten. Dat moet je memoriseren en oefenen helpt daarbij. Het cijferen, dat we vroeger leerden onder het motto: vlug, foutloos, voor later ... heeft z'n betekenis verloren. Er is geen beroep meer waar je dat nog voor zou moeten kunnen. Er is wel veel voor dat leerkrachten basisonderwijs en voortgezet onderwijs die cijferalgoritmen begrijpen en toe kunnen passen. Voor de discussie met Van de Craats en ook als kennis van ons wiskundig erfgoed. Maar het toepassen van een algoritme is geen wiskunde!

Geschiedenis

In de jaren zeventig, in onze zoektochten naar een betere didactiek, hielden we ons al bezig met het cijferen, vooral ook omdat het daar in de basisschool niet al te best mee ging. We waren ook op zoek naar nieuwe inhoud. Toch liet dat traditionele cijferen ons niet los. Al in 1971 verscheen *Cijferen anno 2000*, een leerstofpakket voor de pedagogische academie, met grote aandacht voor mechanische en elektrische rekenmachines (Goffree e.a., 1971). Olivetti betaalde mee. Het pakket bevatte een voorwoord van Hans Freudenthal. Het zou interessant zijn de hele inleiding hier te citeren. Hieronder maar een heel klein stukje:

“In het algemeen werd in de lagere scholen weinig tijd besteed aan de introductie van een algoritme op inzichtelijk niveau. Het accent kwam te liggen op inoefening van de mechanismen.”

In die tijd verscheen er meer literatuur over het cijferen. In 1977 verscheen *Leerplanpublikatie 6: de abacus; over cijferend optellen en aftrekken* (De Jong, 1977). In 1979 verscheen *Leerplanpublikatie 10: cijferend vermenigvuldigen en delen* (Treffers, 1979) en in 1980: *Leerplanpublikatie 11: gevarieerd oefenen* (De Moor, 1980). Die leerplandelen kwamen uit als afleveringen van het Wiskobas-Bulletin. Toen met een oplage van ongeveer 10.000. Ik denk dat Van de Craats ook een abonnement had. Ik kan me z'n ingezonden brieven of blijken van verontrusting niet herinneren. Allemaal in de IOWO-tijd toen Freudenthal de leiding had over het instituut dat nu zijn naam draagt. Nog even dat leerplandeel 11: gevarieerd oefenen. In 'onze' kring (die van rekendidactici aan de pabo's) vinden we net als Van de Craats oefenen heel belangrijk. Maar ..., je kunt je ook suf oefenen. Vooral als als je het VdC-recept volgt.

Mythe 2: Leerlingen vinden rijtjes sommen vreselijk. Niks tegen een rijtje met eenvormige opgaven. Maar dat moet wel een specifiek

doel dienen en niet zo maar een rijtje zijn. Voor het Amerikaanse onderwijs heb ik mijn bijdrage geleverd met 'kale' rijtjes. We noemen ze daar 'strings', dat kan in het Nederlands niet. Want hier betekent een string iets anders, maar dat heet in Amerika een 'thong' (Uittenbogaard & Fosnot).

Laten we eens een voorbeeld van zo'n rijtje analyseren.

$$7 + 7 =$$

$$7 + 8 =$$

$$8 + 8 =$$

$$8 + 9 =$$

$$6 + 7 =$$

$$8 + 7 =$$

Wat wil je met zo'n rijtje? Kinderen gaan zich realiseren dat je vanuit je kennis van de dubbel heel eenvoudig de één-keer-meer- of één-keer-minder-strategie kunt ontwikkelen. Dat helpt bij het memoriseren. En als kinderen de kennis van de dubbel niet paraat hebben? Dan kan een ander rijtje heel goed helpen:

$$5 + 5 =$$

$$6 + 6 =$$

$$7 + 7 =$$

$$8 + 8 =$$

$$9 + 9 =$$

Wat kun je hiervan als kind leren? Met twee tegelijk gaat de telrij omhoog. En hoe komt dat zo? Dat kan de leerkracht weer heel mooi koppelen aan een onderzoekje van bijvoorbeeld voetafdrukken van alle kinderen, waar je kunt zien dat je met een linkervoet en rechtervoet van een volgend kind erbij twee omhoog gaat in de telrij. Ook heel belangrijk is om er bij kinderen de nadruk op te leggen, dat je dat soort dingen moet proberen te onthouden. Kinderen weten heel vaak niet wat je zou moeten onthouden en wat niet. Zomaar oefenen is voor een grote groep van kinderen geen reden om wat ook maar te memoriseren. Rijtje af, plaatje en stempeltje van de juf, krul, klaar! Vandaar dat gevarieerd oefenen.

In de jaren tachtig kwamen er rekenwiskundemethoden als *Rekenen en Wiskunde*, *Rekenwerk* en de *Wereld in Getallen* op de markt, die de opbrengsten van al dat onderzoek min of meer vorm gaven in hun methodiek. We werkten ook nog aan het *Beeldplaatproject* (Van Galen & Dolk, 1991). Voorbeelden van leerlinggedrag en lessen in de hoofdbe-

werkingen. Uit die tijd is ook de 'Ouderavond', een les over delen volgens de 'hapmethode' (Dolk & Uittenbogaard, 1989). Jammer dat Van de Craats van al die ontwikkelingen geen kennis heeft genomen. Het lijkt wel of al die ontwikkelingen in de tijdsspanne 1970 – 2007 aan hem voorbij zijn gegaan.

Bij het tot stand komen van de TAL-brochure: *Kinderen leren rekenen* (Van den Heuvel-Panhuizen, Buijs & Treffers, 1999), hebben we ons nogmaals het hoofd gebogen over dat traditionele cijferen. Dat heeft in die publicatie een nieuw gezicht gekregen: kolomsgewijs rekenen. Algoritmen, die min of meer in de plaats komen van die traditionele algoritmen. Niet naar mijn zin. Nog veel te veel. We zouden met veel minder toe kunnen. Met boerenverstand, met 'rijgen' en het verstandig gebruik van een rekenmachientje hoeft je helemaal geen andere of betere algoritmen te leren. Toch kun je dat kolomsgewijs rekenen wel veel na geven. Van links naar rechts: grote happen eerst. Niet tegen de leesrichting in. En vele mogelijkheden tot meerder of mindere verkortingen. In mijn ogen zeker niet als opstap naar de traditionele algoritmen. Daar maak je het alleen maar moeilijker mee. (Die verwijzing van Van de Craats naar de Arabische notatie raakt kant noch wal. Natuurlijk danken we in onze traditionele cijferalgoritmen de 'van rechts naar links'-werkwijze aan de Arabieren. En dat is voor ons en onze kinderen niet logisch.)

Opa vertelt

Ik zat op een lagere school in een volksbuurt in Amsterdam. Opleidingsschool voor HBS en Gymnasium stond er (en staat er nog, hoewel het gebouw een andere bestemming heeft gekregen) in tegeltjes op de gevel. Ik zat met ongeveer vijftig leerlingen in één klas, drie rijen van dubbel acht of negen. Ik bewaar daar dierbare herinneringen aan. Los van de verveling, die er ook was, de uitdaging. Het was natuurlijk niet eenvoudig om alle kinderen op hun wenken te bedienen. Adaptief onderwijs noemen we dat nu. Wij hadden drie rijen met banken. De raamrij: Koningsburg, de middenrij: Middelburg en de gangrij: Domburg. Zo is het nooit gezegd, maar zo was het wel. Ik heb altijd in Koningsburg gezeten. De kinderen uit Koningsburg mochten wel eens naar buiten kijken. Ik bewaar zoveel dierbare herinneringen aan al mijn meesters en juffen van de basisschool. Juf Oosterwelder om te beginnen, meester Pruis, juffrouw Ruighaver en meester Eijgenbroodt ... om er maar eens een paar te noemen. Van hen heb ik al die algoritmen geleerd. Voor later ... Van de Craats natuur-

lijk ook. Dat geldt vast niet voor al mijn en zijn klasgenoten. Jan van de Craats heeft natuurlijk ook altijd in Koningsburg gezeten. En hij denkt dat dat gewoon was of is. Natuurlijk niet! Misschien zitten Daan en Sanne ook wel niet in Koningsburg. Aanleg is jammer genoeg niet erfelijk.

Een beperkt onderzoekje in de basisschool

Alle kinderen in groep 4, die nog geen enkele ervaring hadden met onder elkaar zetten, die ik rekenopgaven als $230 + 140$, $234 + 145$, maar ook aftrekkingen als $270 - 140$ gaf, rekenden altijd van links naar rechts. Soms splitsten ze de getallen, maar lang niet altijd. Altijd rekenend van links naar rechts. Grote happen eerst, de leesrichting volgend. Logisch! Natuurlijk zouden we in de didactiek daarbij aan moeten sluiten. Niet in zijn artikel, maar wel op zijn website (www.science.uva.nl/~craats) geeft Van de Craats voorbeelden van opgaven, waarbij hij de traditionele cijferalgoritmeaanpak vergelijkt met het kolomsgewijs rekenen. Hij noemt zijn voorbeelden gruwelvoorbeelden. Hij geeft er vier, voor elk van de hoofdbewerkingen één. Ik zal ze elk van een kort commentaar voorzien en aangeven wat ik als meester kinderen zou willen leren.

Gruwelvoorbeeld 1: kolomsgewijs optellen

Tekst en opgave: vdC.

$$\begin{array}{r} 78,12 \\ 13,34 \\ 142,57 \\ 92,63 \\ \hline 104,89 \end{array} +$$

Hier zou ik, zo mogelijk, alle kinderen van de basisschool willen leren hoeveel het ongeveer is. Zeg maar $90 + 140 + 90 + 100$ en dan nog wel 10 ($1 + 2 + 2 + 4$ en de rest) meer. Dus ongeveer $90 + 140$ (tussenstand 230) $+ 90$ (tussenstand 320) $+ 100$ (tussenstand 420) $+ 10$: eindantwoord 430. Dat hoeft dus niet onder elkaar. Leer kinderen in zo'n geval op tijd een rekenmachientje te gebruiken. Niemand in deze wereld doet een dergelijke opgave nog met pen en papier. Dus geen tijd inruimen voor het beheersen van een cijferalgoritme (ook niet kolomsgewijs), waarmee deze opgave opgelost kan worden. Wat het nog erger maakt, is dat Van de Craats op zijn site het meest verkorte traditionele algoritme vergelijkt met het minst verkorte algoritme van kolomsgewijs optellen. Ja, zo kan ik het ook! Dat is appels met peren vergelijken! Dan lijkt

het wel erg! Hij zou oog moeten hebben voor leerlingen, die het op de meest verkorte wijze kunnen oplossen, naast leerlingen die een paar tussenstappen extra nodig hebben. En dat is wel het gros van de leerlingen. Altijd geweest! Koningsburg is niet zo groot als Van de Craats denkt. (Zie ook PPO, 2005).

Gruwelvoorbeeld 2: kolomsgewijs aftrekken

$$\begin{array}{r} 413,92 \\ 376,75 \\ \hline - \end{array}$$

Hier zou ik wensen dat alle leerlingen zouden zeggen: $24 + 13 = 37$. Even de decimalen weglaten en je ziet dat 376 en 413 allebei dicht bij 400 liggen. Vandaar die $24 + 13$. En dat zouden we ze wel moeten leren. Om het zo te doen. Eerst kijken naar de getallen en dan je strategie bepalen. Misschien dat sommige leerlingen ook nog zouden inzien dat $24 + 13$ echt goed is omdat $0,92 - 0,75$ nog een rest oplevert ... Ik weet zeker dat Van de Craats dit oplost door: $24 + 13 + 0,17 = 37,17$. Dat hij het zo doet komt door de getallen. Andere getallen, andere strategie. Niet alle leerlingen over één kam scheren en één standaardoplossing klaar hebben (Dowker, 1992).

Gruwelvoorbeeld 3: kolomsgewijs vermenigvuldigen

$$\begin{array}{r} 345 \\ 729 \\ \hline \times \end{array}$$

Dit is inderdaad een gruwelvoorbeeld. Dat doe je toch met een rekenmachientje. We gaan in deze tijd toch geen twee getallen van drie cijfers algoritmisch vermenigvuldigen.

Wat nog wel kan is een schattende aanpak: de uitkomst ligt in de buurt van de helft van 700×700 . $7 \times 7 = 49$. Dus 25 met vier nullen: 250.000. Een kwart miljoen.

Ook hier vergelijkt Van de Craats weer appels met peren. Hij vergelijkt de niet verkorte kolomsgewijze aanpak met het meest verkorte traditionele algoritme.

Gruwelvoorbeeld 4: de hapmethode

$$83218 : 37$$

Weer een voorbeeld met te grote getallen. Natuurlijk is de hapmethode niet zo efficiënt als de staartdeling. Maar deze deling gaat natuurlijk veel eenvoudiger met een rekenmachientje. We kunnen een deel van de kinderen ook nog leren hoe je met een machientje de rest

bepaalt. Van de Craats noemt de hapmethode onsystematisch. De bedoeling is juist wel systematisch: grote happen eerst. Hij zegt over de staartdeling dat het een recept is dat iedereen kan leren en begrijpen. Was dat maar waar! Dan was de hierboven geschetste zoektocht van al die jaren niet nodig geweest.

De andere mythen

Terug naar een paar snippers, die er nog liggen. Ten eerste Mythe één: Eerst begrijpen, dan oefenen. Ik heb niks tegen oefenen. Als je de opstelling in zijn artikel voor succesvolle leerprocessen volgt:

- Oriëntering (context, voorbeelden)
- Oefenen, eerst makkelijk, dan iets moeilijker. Geen contexten!
- Verdieping met contexten en voorbeelden
- Meer oefeningen, zonder contexten
- Verdere verdieping, voorbeelden, contexten

... kan ik daar nog aardig in meegaan, al zou ik wel bij stap 2 en 4 de contexten onder handbereik houden. Maar als je de voorbeelden op zijn site of in zijn boek (*Basisboek rekenen*) ziet, dan lees je toch: eerst catechismus leren, dan nadenken.

Ten tweede Mythe drie: Over het gebruik van meerdere oplossingswijzen. We zouden alle kinderen de gelegenheid moeten bieden hun eigen oplossingswijzen te volgen. Je zou die mogelijkheden voor sommige kinderen misschien wat moeten inperken. Maar niet zo rigide als Van de Craats voorstelt. Hij denkt en gelooft dat alle kinderen die cijferalgoritmen kunnen leren en toepassen. Dat is nooit zo geweest en zal ook nooit zo zijn. In dit verband wil ik wijzen op het werk van S. Huitema en K. Buijs, die zich al decennia bezig houden met het onderwijs aan rekenzwakke kinderen en die nog nooit voor de 'Van de Craats oplossing' hebben gekozen.

Ten derde Geficiërdheid: Graag wil ik wijzen op een artikel getiteld: *Geficiërdheid, vier eeuwen ontwikkeling* (Oonk, Van Zanten en Keijzer, 2007). Daar wordt nog eens uitgelegd wat we onder geficiërdheid verstaan. Niet alleen in Nederland, maar in de hele wereld. Ook om nog eens duidelijk te maken dat geficiërdheid en rekenvaardigheid niet synoniem zijn. Rekenvaardigheid is een onderdeel van die geficiërdheid.

Argumenten geeft Van de Craats nergens. Hij gebruikt wel steeds de term docentenwijsheid. Hij bedoelt zijn eigen docentenwijsheid of hij verwijst naar z'n eigen boek. Hij zou toch ook oog moeten hebben voor andermans schoolmeesterswijsheid, bijvoorbeeld de mij-

ne, opgebouwd in 37 jaar onderwijsopleiding en basisschool en voortgezet onderwijs.

Aanbevelingen van mijn kant

- hou gevarieerd en doelgericht oefenen in ere;
- kies je strategie afhankelijk van het probleem dat je wilt oplossen, dus ...
- handig rekenen van jongsaf aan, ieder naar zijn of haar mogelijkheden;
- géén traditionele cijferalgoritmen; kolomsgewijs rekenen is een redelijk alternatief, niet als opstap naar die traditionele algoritmen;

- echt nodig is kolomsgewijs rekenen niet: we kunnen wel zonder.

Handig rekenen

Kolomsgewijs rekenen en de traditionele algoritmen zijn zonder meer mooie voorbeelden van (ultieme) verkortingen. Ze zijn een studie waard. Ook leerkrachten en kinderen zouden veel kunnen leren van (het ontstaan van) de cijferalgoritmen, maar oefenen en beoefenen hoeft niet meer.

In het septembernummer van *Volgens Bartjens* poneert Jan van de Craats de stelling: doe handig rekenen de deur uit. De eindstand

van een stemming onder de lezers is geworden: 43 voor, 339 tegen. Lees de samenvatting van alle commentaren in het novembernummer van *Volgens Bartjens*. (Het zou Van de Craats sieren deze reacties ook op zijn website op te nemen. Hij zegt immers de discussie te zoeken!)

Tegen Daan en Sanne zou ik willen zeggen: niks meer over rekenen aan opa vragen. Die helpt jullie van de regen in de drup. Leer daar-entegen 'handig rekenen'. Voor nu en voor later.



Referenties

- 1 K. Buijs en P. van der Zwaard, *Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn rekenen-wiskunde van po naar vmbo*, Enschede: SLO, 2006
- 2 J. van de Craats, 'Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen', *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5(2), 132–136, 2007
- 3 J. van de Craats en R. Bosch, *Basisboek rekenen*, Amsterdam: Pearson Education, 2007
- 4 M.L.A.M. Dolk en W. Uittenbogaard, 'De ouderavond. Willem Bartjens.', *Tijdschrift voor het reken-wiskundeonderwijs*, 9, 14–20, 1989
- 5 J. van de Craats, '“Handig rekenen” moet de deur uit', *Volgens Bartjens*, 27(1), 27(2), 2007
- 6 A. Dowker, 'Computational Estimation Strategies of Professional Mathematicians', *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 45–55, 1992
- 7 F.H.J. van Galen en M.L.A.M. Dolk, *Interactieve video in de nascholing rekenen-wiskunde*, Utrecht: Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen (CD-beta Press), 1991
- 8 F. Goffree, W. Aarts, J. Eilander, D. Karman, H. Meyer, D. Oort, P. Scholten, A. Treffers, *Cijferen Anno 2000*, Experimentele uitgave van de commissie Modernisering Leerplan Wiskunde, 1971
- 9 M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Buys en A. Treffers (Eds.), *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen Bovenbouw Basisschool*, Groningen: Wolters-Noordhoff, 1999
- 10 S. Huitema e.a., *Maatwerk Rekenen*, Den Bosch: Malmberg
- 11 J. Jansen, F. van der Schoot en B. Hemker, 'Balans (32) van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4', *PPON (periodieke peiling van het onderwijsniveau)*, 103–110 Arnhem: Cito Instituut voor toetsontwikkeling, 2005
- 12 R. de Jong (ed.), 'Leerplanpublikatie 6: de abakus', *Wiskobas-Bulletin*, jaargang 6, nr. 4, Utrecht: IOWO, 1977
- 13 W. Koersen en W. Uittenbogaard, 'Panama Praktijktip nummer 104: Cijferen, hoe nu verder?', *Panama-Post. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 25(4), 46–50, 2006
- 14 J. de Lange, *Mathematics, Insight and Meaning*, Utrecht: OW&OC, 1987
- 15 E. de Moor, 'Leerplanpublikatie 11: gevarieerd rekenen', *Wiskobas-Bulletin*, jaargang 9, nr. 1/2/3, Utrecht: IOWO, 1980
- 16 W. Oonk, M. van Zanten en R. Keijzer, 'Gecijferdheid: vier eeuwen ontwikkeling', *Panama-Post. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 26(3), 3–18, 1980
- 17 A. Treffers (ed.), 'Leerplanpublikatie 10: cijferend vermenigvuldigen en delen', *Wiskobas-Bulletin*, jaargang 8, nr. 5/6, Utrecht: IOWO, 1979
- 18 W. Uittenbogaard, 'Uitleggen en uitleggen is twee', *Panama-Post*, 4(4), 41–42, 1986
- 19 W. Uittenbogaard, 'Een zakje appels ... Voorbereidingen van een meester.', *Volgens Bartjens* ..., 26(3), 23–2, 2007
- 20 W. Uittenbogaard, C.T.M. Fosnot en K.L. Imm, *Minilessons for Operations with Fractions, Decimals and Percents. A Yearlong Resource*, Portsmouth: Firsthand Heinemann, USA, 2007

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80.010

3508 TA Utrecht

g.l.m.cornelissen@uu.nl

Column België – Nederland 1-0

Sole meunière

Waar vindt men meer verschillen dan tussen burenen? De Nederlander heeft er twee en kijkt graag over de schutting heen. Van Duitsland mag men graag een voetbalwedstrijd verliezen; met de goedlachse Belg voert de bescheiden Nederlander een gelijkjer strijd. Gunther Cornelissen, in België opgegroeide Nederlander en nu verbonden aan de Universiteit Utrecht, doet als kenner bij uitstek verslag van de derby.

Volgens mijn neef Robbert is de doorsneekwaliteit van de Utrechtse restaurants het laagst van Nederland. Zelf weet ik wel dat de doorsneekwaliteit van de Utrechtse restaurants het laagst is van België. En ik meen ook te weten waar dat aan ligt. Geen probleem veertig euro neer te tellen voor een *torentje van gerookte pompoenpuree met dadelschuim, afgewerkt met lavendel-gember-siroop op een bedje van lolo rosso met wasabi* – smaak irrelevant. Maar waar krijg ik hier een correct gebakken zeetong? Drie jaar geleden wist ik het, maar daarna werd het desbetreffende restaurant ‘wat conceptueler’, en een jaar later ging het dicht. Welke Utrechtse concept-restaurateur besteedt tegenwoordig meer aandacht aan de basiskunst van koken dan aan de juiste tint paars van het pluche op de onhandig zittende kuipjes?

U heeft het al geraden: het gaat in dit stukje over onderwijs.

Een onderzoekje onder eerstejaarsstudenten wiskunde in Utrecht laat zien dat er *geen* aansluitingsprobleem vwo-wo is. Toch is er iets aan de hand. Meer dan tien procent van de studenten komt met te weinig eenvoudige rekenvaardigheid op de universiteit binnen. Dat betekent dat er bij opgaven te lang moet worden stilgestaan bij het initiële rekenwerk, en het redeneren, het inzien erbij inschieten. Natuurlijk zijn deze stu-

denten slim genoeg om de opgaven te maken (Peter Nijkamp op het NMC: ‘jullie krijgen de bollebozen’), het duurt alleen veel te lang. In een tweedejaars werkcollege mag het delen van $X^n - 1$ door $X - 1$ geen half uur kosten.

These: door op basisniveau, dat wil zeggen bij basisschool-rekenen en vwo-‘algebra’, een *redeneer-rekenmethode* aan te leren, telkens de slimste oplossing te zoeken, wordt het later op hoger niveau niet meer mogelijk aan het redeneren toe te komen. Dus terecht schieten ze als paddestoelen uit de grond: instaptoets rekenen; remedial teaching rekenen voor eerstejaars wiskunde. We hebben voorscholen voor taalachterstand, en bij de meeste wiskunde-opleidingen *nascholen* voor *reken-snelheidsdeficiëntie*. Ik stel voor dit RSD te noemen en als ziekte te registreren.

Neen, ik wil niet bij infi wekenlang uit het basisboek wiskunde sommen te hoeven zitten maken. Ik wil weer ongemerkt op school leren rekenen. Het probleem en de oplossing is iets subtieler dan we dachten. Ja, ook realistische wiskunde, ook redeneren, slim rekenen. Maar ook mechanisch rekenen, s.v.p. Om het in een NAW-controverse te gieten: Jan van de Craats uitgesmeerd over zes jaar Paul Drijvers, zo iets. Hm. Klinkt toch niet zo lekker. Doe mij maar een *sole meunière* (bij *du Progres*, Korenmarkt, Gent, dagprijs achttien euro). O ja, weet iemand nog een loodgieter?



Op de achtergrond

Jan van de Craats, ‘Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (5) 8, nr. 2 (juni 2007), pp. 132–136; L.H. Wiener, ‘De prijs van onderwijsvernieuwing’, *De Groene Amsterdammer* (131) nr. 51–52, pp. 47–49; Frank Furedi, ‘Assessment versus intellect’, *The Guardian*, 25 maart 2003, www.frankfuredi.com

Dirk Tempelaar

*Faculteit der Economische Wetenschappen en
Bedrijfskunde
Departement Kwantitatieve Economie
Universiteit Maastricht
Postbus 616
6200 MD Maastricht
D.Tempelaar@ke.unimaas.nl*

Wim Caspers

*Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics
Technische Universiteit Delft
Mekelweg 4
2628 CD Delft
W.T.M.Caspers@tudelft.nl*

Onderwijs: Internationale vergelijking van wiskundige vaardigheden

De rol van de instaptoets

Zorg om een niveaudaling van het Nederlandse wiskunde- en rekenonderwijs is een onderwerp dat volop in de belangstelling staat, en dat instellingen van hoger onderwijs heeft genoopt tot het inrichten van reparatieprogramma's. Bijspijkeronderwijs wiskunde en het afnemen van instaptoetsen zijn de bekendste onderdelen van zulke programma's. Uitkomsten van die instaptoetsen verschaffen niet alleen belangrijke informatie aan student en instelling, maar kunnen ook behulpzaam zijn bij het opsporen van de zwakke plek in het Nederlandse onderwijs. In deze bijdrage worden met dat doel de resultaten op instaptoetsen vergeleken van leerlingen met een vwo-opleiding, leerlingen met een internationaal baccalaureaatopleiding, en leerlingen met een buitenlandse opleiding. Dirk Tempelaar is verbonden aan de Universiteit Maastricht als universitair docent, verantwoordelijk voor eerstejaars onderwijs in de wiskunde en statistiek, en bijspijkeronderwijs. Hij heeft deelgenomen aan het NKBW-project als implementatieprojectleider, en aan projecten WebSpijkeren I en II. Wim Caspers is verbonden aan de TU Delft als vwo-docent 'in residence' en aan het Adelbert College in Wassenaar als corrector onderwijs. Hij is lid van de kerngroep van SIGMA en heeft deelgenomen aan het NKBW-project als implementatieprojectleider. Bovendien is hij lid van de Resonansgroep wiskunde.

Binnen een week tijd vonden eind 2007 twee gebeurtenissen plaats die van groot praktisch belang kunnen zijn voor het wiskundeonderwijs op voortgezet en hoger niveau in Nederland. Het uitgebreide verslag van het Programme for International Student Assessment (PISA) 2006 onderzoek van de OESO kwam net op tijd om de, voor Nederland tegenvallende uitkomsten mee te nemen in de laatste week van het parlementaire onderzoek naar de onderwijsvernieuwingen [1]. En vlak daarvoor werd de eerste cyclus van het project Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde (NKBW; zie www.fi.uu.nl/nl/nap/) afgerond met de publicatie van het eindverslag [2]. Het project NKBW is een van de Nationaal Actieplan E-learning initiatieven, uitgevoerd door een groot aantal instellingen uit hoger (HO) en voortgezet onderwijs (VO), die zich richten op aansluitingsproblematiek wiskunde bij de overgang van VO naar HO, of van beroeps- onderwijs naar HO. In het kader van NKBW zijn een heel scala van activiteiten uitge-

voerd: verzamelen en schrijven van wiskundige leerobjecten, het bouwen van de inter- netportaal Wizmo.nl om die leerobjecten te kunnen ontsluiten, het geven van bijspijker- cursussen wiskunde, het samenstellen en af- nemen van diagnostische toetsen en het in de steigers zetten van een wiskundemonitor. In deze bijdrage zal nader worden ingegaan op het aspect van toetsing en de relatie tussen de uitkomsten daarvan en die van het PISA- onderzoek.

PISA 2003 en PISA 2006

In de in 2003 afgenomen internationaal ver- gelijkende toets van het PISA onderzoek de- den Nederlandse vijftienjarigen het behoor- lijk goed: hun vaardigheden op het gebied van 'mathematical literacy' behoorden tot de top van de wereld. Die interpretatie is inzet geweest van een aantal discussies (zie bij- voorbeeld [3] en [4]), waarbij vooral aandacht is besteed aan de omstandigheid dat het PISA onderzoek zich richt op wiskundige geletterd- heid, en niet op de vaardigheid om wiskunde

zelf te bedrijven. Een andere relativering van de goede Nederlandse uitkomsten is pas re- cent naar voren gebracht in een studie van het Centraal Planbureau: [5]. Dat onderzoek richt zich op de verdeling van PISA vaardig- heidsscores en laat zien dat hoge gemiddel- de scores van Nederland een bijzondere oor- zaak hebben. Citerend uit de Nederlandse samenvatting van [5]: "Een empirische ana- lyse van de vaardigheidsverdeling laat zien dat Nederland niet tot de beste landen be- hoort aan de rechterkant van de verdeling. Het gemiddelde Nederlandse vaardigheidsni- veau is hoog, maar dit is vooral te danken aan het relatief hoge niveau aan de linkerkant van de vaardigheidsverdeling. De Nederlan- se positie daalt als we naar de rechterkant van de vaardigheidsverdeling gaan. Op het allerhoogste vaardigheidsniveau behoort Ne- derland niet tot de top van de wereld. Dit geldt zowel voor het voortgezet onderwijs als voor het hoger onderwijs." Hierbij staat de linker- kant voor de prestaties van de minst vaardi- ge leerlingen, en de rechterkant voor de pre- staties van de meest vaardige leerlingen (de vwo'ers). Geldt deze conclusie al voor de uit- komsten van de PISA 2003, een vergelijkba- re analyse op de 2006 uitkomsten zou tot nog sterkere conclusies leiden. Immers, het belangrijkste verschil tussen de 2003 en de 2006 PISA uitkomsten is dat in Nederland, sa- men met een aantal andere landen als Frank- rijk en België, de gemiddelde vaardigheidsni- veaus licht dalen (zie ook de discussie daar- over gevoerd in het parlementaire onderzoek: [6]). Het bijzondere van die lichte daling in Ne- derland (en ook België) is dat die volledig is toe te schrijven aan een daling van het niveau van de rechterkant van de verdeling: "...the better performing students did worse in

PISA 2006, while performance among the lower end of the distribution remained broadly unchanged" ([1], p. 320). Aangezien het HO nu juist volledig afhankelijk is van het niveau van leerlingen aan die rechterkant van de verdeling, komt deze constatering van een verslechtering van een toch al weinig gunstige situatie onrustmakend sterk overeen met de uitkomsten van de afnames van instaptoetsen in het HO. In deze bijdrage zullen een tweetal daarvan worden geanalyseerd om een beter beeld te krijgen waar heel specifiek het probleem van het Nederlandse wiskundeonderwijs kan liggen.

Instaptoetsing in het HO

Het gebruik om leerlingen bij de overgang van VO naar HO te toetsen op het niveau van hun wiskundige vaardigheden is niet nieuw; vele instellingen van HO nemen al enige jaren instaptoetsen wiskunde af. In het kader van het NKBW-project (en de sterk daaraan gerelateerde werkzaamheden van de Special Interest Group Mathematics Activities (SIGMA), de brede belangengroep van VO en HO die zich richt op het versterken van wiskundige kennis; zie <http://e-learning.surf.nl/sigma>) zijn initiatieven genomen om die toetsing te standaardiseren. Op die wijze is het mogelijk toetsuitkomsten, naast een signalerende functie naar zowel leerling als instelling, een derde functie te geven: die van maatstaf voor landelijke ontwikkelingen. Bij de vorm te geven wiskundemonitor wordt vooral beoogd een beeld te krijgen van de ontwikkeling van wiskundebeheersing in de tijd. In deze bijdrage staat een andere vergelijking centraal: die van de wiskundebeheersing van leerlingen met een Nederlandse vwo-opleiding met die van leerlingen met andersoortige vooropleidingen. Daartoe is gebruik gemaakt van een instaptoets die eerder is ontwikkeld door de drie technische universiteiten, de 3TU2005 instaptoets [7]. Deze instaptoets is in het kader van het NKBW-project voorgelegd aan instromers van één van de meest internationaal georiënteerde opleidingen van het Nederlandse HO: de bacheloropleidingen bedrijfskunde en economie van de Universiteit Maastricht (UM).

Maastrichtse context: Internationalisering

Internationalisering van het HO heeft in Nederland een grote vlucht genomen bij instellingen die zich in de grensstreek met Duitsland bevinden: omdat het Duitse hoger onderwijs zich wat onttrokken heeft aan vernieuwingsontwikkelingen die zich wel in andere Europese landen hebben voorgedaan,

en daarenboven te kampen heeft met capaciteitsproblemen, is het volgen van een studie in Nederland een aantrekkelijk alternatief voor veel Duitse studenten. Vooral wanneer die studie in de Engelse taal wordt aangeboden en de Duitse student zich dus niet ten opzichte van de Nederlandse medestudent benadeeld weet door een taalbarrière. De UM Faculteit Economie & Bedrijfskunde is een kenmerkend voorbeeld van die situatie: vanaf midden jaren '90 worden alle opleidingen ook Engelstalig aangeboden, terwijl sinds 2001 zelfs de opleidingen enkel in die taal worden aangeboden. Vanaf dat moment bestaat een vrij stabiel aandeel van tweederde van de ongeveer 800 jaarlijkse eerstejaars uit Duitse studenten, voornamelijk afkomstig uit het nabij gelegen Roergebied. Een kwart van de studenten is Nederlands, terwijl de kleine minderheid van overige studenten uit een groot aantal andere landen afkomstig is. Nederlandse en Duitse schoolsystemen verschillen aanzienlijk, zowel in de vakken die onderwezen worden, de manier waarop dit onderwijs plaats vindt, en de wijze van examinering. In de Duitstalige landen wordt wiskunde op twee niveaus onderwezen: basisniveau of 'Grundkurs' en uitgebreid niveau of 'Leistungskurs'. Het bijzondere is dat studenten slechts in een viertal vakken eindexamen ('Abitur') doen: de twee vakken op Leistungskursniveau, en twee van de vakken op Grundkursniveau. Studenten kunnen dus het vak wiskunde op Grundkursniveau doen, maar niet opnemen in hun Abitur, waardoor ze in de laatste jaren van hun middelbare school opleiding maar een beperkt aantal uren wiskunde krijgen. Dankzij de Engelstalige opleiding krijgt de UM relatief veel studenten, waaronder ook Nederlandse en Duitse, met een internationale vooropleiding. Ook voor die Internationale Baccalaureaatopleiding (IB) geldt dat er een tweetal niveaus van wiskundeonderwijs zijn: het uitgebreide niveau gericht op technische vervolgoopleidingen (IBMath HL), en het basisniveau gericht op gamma studies (IBMath SL). Tenslotte zijn alle overige studenten, buitenlandse studenten uit een niet-Duitstalig land die geen internationale opleiding hebben genoten, op één hoop gegooid, en is hun gevraagd hun eigen wiskundige vooropleiding in te delen in de categorieën basis (MathMinor) of uitgebreid (MathMajor). Figuur 1 geeft de onderverdeling weer van de 796 eerstejaars studenten die de vragenlijst naar vooropleidinggegevens hebben beantwoord.

3TU-Instaptoets

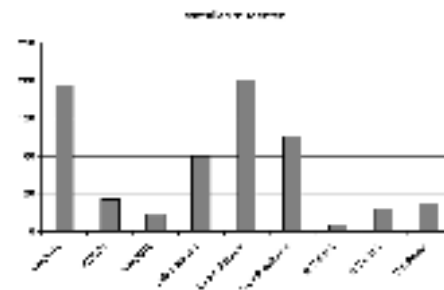
In het kader van het NKBW project is in de

Begrippenlijst

3TU 2005	instaptoets wiskunde van de drie technische universiteiten
HO	hoger onderwijs
IB	Internationale Baccalaureaatopleiding
IBMath HL	uitgebreid niveau wiskundeonderwijs op de IB
IBMath SL	basisniveau wiskundeonderwijs op de IB
NKBW	Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde
OESO	Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling
PISA	Programme for International Student Assessment
SIGMA	Special Interest Group Mathematics Activities
UM	Universiteit Maastricht
VO	Voortgezet Onderwijs

allereerste week van het studiejaar 2007-2008 bij eerstejaars studenten economie en internationale bedrijfskunde UM de 3TU 2005 instaptoets wiskunde afgenomen. Dat staat een vergelijking van de uitkomsten met de 3TU's toe, naast een vergelijking van de kenistoestand wiskunde van studenten met uiteenlopende vooropleidingen, waar we hier op zullen toespitsen. Tabel 1 geeft een uitsplitsing van de UM deelnemers naar vooropleiding, met de aantallen studenten en de gemiddelde score in de instaptoets, waarbij de volgorde in de tabel wordt bepaald door de hoogte van de gemiddelde score in de vooropleidinggroep.

De 3TU instaptoets is wat samenstelling van onderwerpen betreft afgestemd op de Wiskunde B vooropleiding. De toets bevat een vijftal onderwerpcategorieën: algebraïsche rekenvaardigheden, e-macht en logaritme, vergelijkingen, goniometrie, differentiëren en integreren. De categorie goniometrie en het onderdeel integreren uit de



Figuur 1 Aantallen studenten in de verschillende vooropleidingen

Code	Vooropleiding	aantal	score
vwoA12	vwo diploma, met wiskunde op niveau A12	145	37.0%
GrundkursNotExam	Duitse vooropleiding, basiswiskunde, niet in eindexamen	115	40.9%
GrundkursExam	Duitse vooropleiding, basiswiskunde, in eindexamen	184	45.3%
MathMinor	Buitenlandse vooropleiding anders dan Duitstalig, basiswiskunde	25	45.3%
vwoB1	vwo diploma, met wiskunde op niveau B1	33	48.0%
IBMathSL	Internationaal Baccalaureaat, basiswiskunde	24	48.0%
vwoB12	vwo diploma, met wiskunde op niveau B12	17	51.6%
MathMajor	Buitenlandse vooropleiding niet Duitstalig, uitgebreide wiskunde	30	52.4%
IBMathHL	Internationaal Baccalaureaat, uitgebreide wiskunde	9	55.1%
Leistungskurs	Duitse vooropleiding, uitgebreide wiskunde	96	57.9%
Totaal		679	45.4%

Tabel 1 UM-deelnemers aan instaptoets 07/08, uitgesplitst naar vooropleiding, en hun gemiddelde scores

	aantal	Probleem oplossen	Algebra	Algebraïsche expressies	Functies	Afgeleiden	Totaal
MathMinor	25	57%	56%	36%	51%	31%	45%
vwo A1,2	189	76%	56%	24%	66%	44%	51%
GrundkursNotexam	74	74%	62%	34%	56%	40%	52%
GrundkursExam	184	72%	66%	40%	63%	47%	56%
IB (niet gesplitst)	47	74%	69%	43%	68%	47%	59%
vwo B1	61	79%	67%	39%	70%	59%	61%
MathMajor	24	74%	69%	52%	67%	53%	62%
vwo B1,2	29	82%	68%	45%	73%	61%	65%
Leistungskurs	88	80%	76%	55%	74%	61%	68%
Totaal	729	75%	64%	38%	65%	48%	57%

Tabel 2 Scores op de vijf deelgebieden van de instaptoets 06/07, uitgesplitst naar vooropleiding

laatste categorie, vallen buiten het Wiskunde A programma, en dus ook buiten de instroomeis voor de UM-opleidingen. Daarom is de instaptoets afgenomen in een iets gewijzigde vorm: ook als meerkeuzetoets, maar met een extra vijfde optie: onbekend. Dat staat studenten toe om een vraag waarvoor ze onvoldoende voorkennis hebben, onbeantwoord te laten, daar waar in de oorspronkelijke opzet een student wordt gedwongen een beste gok te maken voor het goede antwoord. Bij onze afname zijn de studenten zelfs gestimuleerd om royaal gebruik te maken van de antwoordmogelijkheid 'onbekend', en niet te gokken, om zo het voor het onderwijs belangrijke signaal af te geven dat een onderwerp voldoende aandacht zou moeten krijgen. Om een vergelijking met de toetsuitkomsten van de 3TU's mogelijk te maken, zijn de antwoorden in de categorie onbekend toegerekend aan de an-

dere antwoorden volgens het gokmodel (dus gelijkelijk verdeeld over alle andere antwoordmogelijkheden). Wanneer daarna een vergelijking wordt gemaakt met scores behaald aan de TU-instellingen, dan is onmiddellijk duidelijk dat UM studenten met een B-profiel, dat wil zeggen alle studenten met een uitgebreid wiskundepakket, in dezelfde range scoren als de TU-studenten (1330 studenten uit tien TUD opleidingen scoorden bijvoorbeeld tussen 40% en 68% met een gemiddelde van 49%, acht TUE opleidingen scoorden tussen 49,5% en 64,5%, met een mediaan van 52,7%). Voor studenten met een B-profiel is de beheersing van wiskunde dus kennelijk niet een cruciale factor in de keuze tussen een gamma of bèta vervolgopleiding. Wanneer in Tabel 1 vooropleidingen worden vergeleken, valt op dat zowel op het basisniveau, als op het uitgebreide niveau, vwo'ers

zich in de achterhoede bevinden. Studenten met een buitenlandse/internationale vooropleiding, zowel MathMajor, IBMathHL en heel sterk Leistungskurs, onderscheiden zich positief van studenten van het vwo met een B1-opleiding, en zelfs ook die met een B12-opleiding. En aan de linkerkant van de verdeling: studenten met een Grundkurs, ook als dat geen onderdeel van het Abitur uitmaakt, MathMinor studenten en IBMathSL studenten overtreffen de vwo A1,2 studenten, meestal zelfs in aanzienlijke mate.

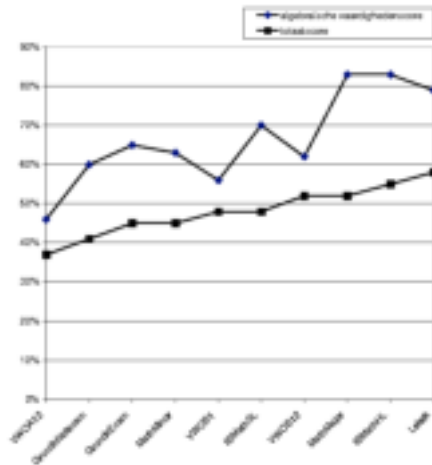
Analyse van de prestaties op deelgebieden

Tabel 3 geeft een overzicht van de toetsprestaties van UM-studenten op ieder van de vijf eerder genoemde deelgebieden. Studenten zijn onderverdeeld naar type vooropleiding. Vooropleidingen zijn geordend op gemiddelde totaalscore op de instaptoets.

Omdat de ordening van vooropleidingen gebaseerd is op gemiddelde totaalscore, is het belangwekkend na te gaan waar de kolommen uit Tabel 3 geen monotone toename laten zien: dat is een signaal dat voor dat onderwerp de rangorde afwijkt. De meer geavanceerde onderwerpen uit de toets, vergelijkingen, goniometrie, en differentiëren en integreren, geven weer dat vwo studenten het daar relatief goed doen. Vooral de vwo B studenten kunnen zich in die onderwerpen goed meten met studenten met buitenlandse of internationale opleidingen, en doorbreken zo het eerder geschetste algemene patroon. Maar als vwo'ers het op die terreinen verhoudingsgewijs goed doen, moet er ook een terrein zijn waar ze het verhoudingsgewijs slecht doen. Dat onderwerp is niet moeilijk te vinden: het onderwerp algebraïsche rekenvaardigheden geeft dramatische prestaties weer voor alle drie vwo categorieën. Zo sterk zelfs dat vwo B1,2 studenten lager scoren dan Grundkurs, MathMinor en IBMathSL studenten! In Figuur 2 is de informatie uit de kolom "Totaal" weergegeven, samen met de

	Algebraïsche Rekenvaardigheden	Vraagstuk 2	Vraagstuk 3	E-macht en logaritme	Vergelijkingen	Goniometrie	Differentiëren en Integreren	Totaal
vwoA12	46%	17%	33%	41%	52%	25%	25%	37%
GrundkNotexam	60%	60%	50%	41%	58%	26%	24%	41%
GrundkExam	65%	71%	54%	48%	62%	27%	28%	45%
MathMinor	63%	65%	57%	42%	59%	33%	32%	45%
vwoB1	56%	31%	46%	50%	61%	36%	39%	48%
IBMathSL	70%	56%	65%	47%	66%	28%	33%	48%
vwoB12	62%	72%	43%	51%	71%	43%	37%	52%
MathMajor	83%	82%	85%	50%	63%	39%	28%	52%
IBMathHL	83%	100%	61%	58%	55%	31%	44%	55%
Leistk	79%	87%	79%	63%	75%	31%	43%	58%
Total	63%	58%	54%	47%	61%	29%	30%	45%

Tabel 3 Scores op de vijf deelgebieden van de instaptoets 07/08, uitgesplitst naar vooropleiding



Figuur 2 Vergelijking totaalscore en score algebraïsche vaardigheden, uitgesplitst naar vooropleiding. Onderste lijn is de totaalscore, bovenste lijn de score op de algebraïsche vaardigheden

informatie uit de kolom algebraïsche vaardigheden.

Het beeld wordt nog duidelijker, wanneer we de prestaties per vraagstuk nader bekijken (zie figuur 3 en 4).

Analyse vraagstuk 3 (2007)

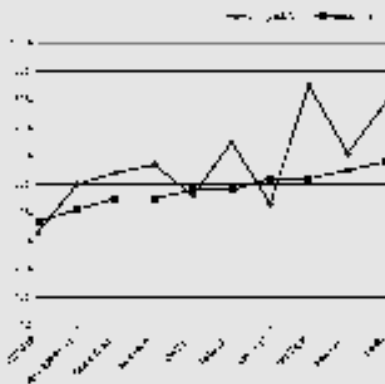
De uitdrukking:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$$

is gelijk aan

- a. $\frac{2x}{2x-2}$ b. $\frac{2x^2}{x^2-1}$
c. $\frac{2x^2}{1-x^2}$ d. $\frac{2x}{x^2-1}$

Figuur 3 specificeert de prestaties naar vooropleiding op deze derde opgave. De verschillen zijn minder extreem dan bij de tweede opgave, maar desondanks fors.



Figuur 3 Scores op vraagstuk 3 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Instaptoets jaar 06/07

Ook in het academische jaar 06/07 is een instaptoets afgenomen bij de instromende studenten van dezelfde twee studies, zodat na het vinden van de opmerkelijke resultaten in de 07/08 instaptoets, ook deze toets op deelgebieden geanalyseerd is. De instaptoets had een licht andere samenstelling, en was eerder bedoeld als een type 'leermogelijkheidentoets' voor de te geven bijspijkercurus, dan als een brede diagnostische toets; desondanks zijn er veel overeenkomsten tussen de twee instaptoetsen. De instaptoets 06/07 had betrekking op vijf onderwerpen: probleem oplossen, algebra, algebraïsche expressies, functies en afgeleiden. Tabel 2 bevat de scores op de instaptoets, uitgesplitst naar vooropleiding.

Wanneer we de resultaten van de instaptoets 06/07 met die van 07/08 vergelijken, blijkt dat de meeste patronen zich herhalen. Er zijn twee kleine verschillen. De restgroep, opgedeeld in MathMinor en MathMajor, doet het in 07/08 beter dan in 06/07. Oorzaak daarvan lijkt te zijn dat er in 07/08 een relatief grote groep van Belgische studenten in zit, veel groter dan in 06/07, die goed op de instaptoets presteren. Verder was tot 06/07 de groep van studenten met een IB vooropleiding zo klein, dat die niet werd uitgesplitst. In 06/07 was dat voor het eerst een grote, en ook sterk heterogene, groep, hetgeen de reden was om de groep in 07/08 te splitsten in een HL en SL deelgroep (voor 06/07 was de informatie nodig om dat te doen niet beschikbaar). Groepen die inderdaad heel verschillend presteren, wat de heterogeniteit van de IB-groep in 06/07 verklaart. Inspectie van Tabel 2 maakt snel duidelijk dat de categorie 'algebraïsche expressies' dezelfde rol speelt als algebraïsche rekenvaardigheden in de 07/08 toets. Wanneer meer specifiek naar de vragen in het onderdeel algebraïsche expressies wordt gekeken, is ook op itemniveau een herhaling te zien van wat hierboven besproken is voor de 07/08 instaptoets. Twee vragen vallen in het bijzonder op: de tweede en vijfde vraag van dit deelonderwerp: zie Figuur 5 en 6.

Conclusie

Internationale vergelijkingen van kennis- en vaardigheidsniveaus van leerlingen in het middelbaar onderwijs, zoals uitgevoerd door PISA, geven aan dat daar waar Nederlandse leerlingen gemiddeld heel behoorlijk scoren, er door de bijzondere verdeling van die scores toch een groot probleem aanwezig is: de betere leerlingen doen het relatief slecht.

Analyse vraagstuk 2 (2007)

De uitdrukking:

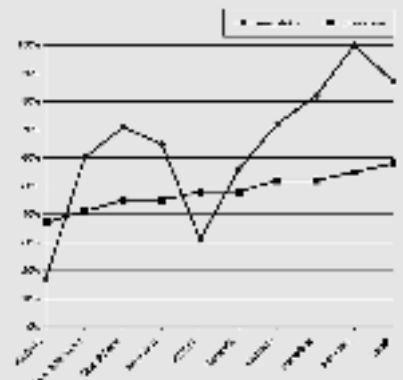
$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$$

is gelijk aan

- a. $\frac{x}{1-x}$ b. $\frac{1}{2x-1}$
c. $\frac{-x}{-2x+1}$ d. $\frac{x}{x-1}$

De derde antwoordoptie van meerkeuzevraag 2 vertegenwoordigt een heel intuïtieve oplossingsstrategie: laat de kwadratische term in teller en noemer van de breuk tegen elkaar wegvallen, zodat enkel de lineaire termen en constante overblijven. Hoe naïef die oplosstrategie ook is, studenten met zowel vwo A1,2 als vwo B1 vooropleiding kiezen er massaal voor. Zo massaal, dat de grafiek die de prestaties van de verschillende opleidingsgroepen weergeeft, Figuur 4, met een verticale schaal moet worden getekend die afwijkt van de eerder gepresenteerde totaalgrafiek.

Opmerkelijk genoeg gaat de heel lage goedscore van vwo A1,2 en B1 studenten gepaard met een 'onbekend' score van nagenoeg nul: iedereen denkt deze leerstof te beheersen (of vindt dat dit het geval zou moeten zijn). Meer dan enig ander vraagstuk, lijkt Vraagstuk 2 een aanwijzing te geven waar het probleem van het wiskundeonderwijs op vwo A en B1 zich het duidelijkst manifesteert: in de vaardigheid concepten toe te passen die in de onderbouw onderwezen worden, met als gevolg dat studenten meer geavanceerde concepten wel oppikken, maar in problemen komen bij toepassingsvraagstukken waar ook basale rekenstappen in voorkomen.



Figuur 4 Scores op vraagstuk 2 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Analyse vraagstuk 2 (2006)

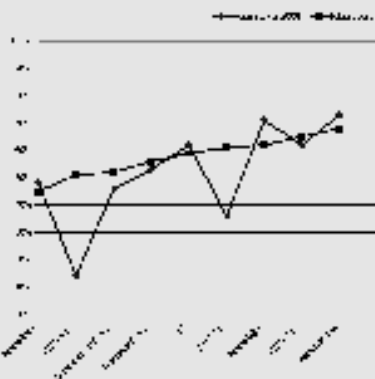
Vereenvoudig de volgende breuk zo ver mogelijk:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

wordt:

- a. $\frac{-1}{2x+1}$ b. $1-x$
 c. $\frac{x-1}{x+1}$ d. $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}$

De vraag is nagenoeg een kopie van de vraag nader bekeken in de 07/08 instaptoets, waarbij hier de vraag eigenlijk nog eenvoudiger is gemaakt, omdat antwoordalternatief (d) de aanwijzing geeft hoe de breuk te herschrijven is. Desondanks kiest een heel groot deel van vooral de vwo A1,2 populatie, maar ook vwo B1, voor het antwoordalternatief (a), waarbij men in teller en noemer de gelijke kwadratische termen tegen elkaar laat wegvallen. Een fout die in veel minder sterke mate wordt gemaakt door studenten met een buitenlandse/internationale opleiding.



Figuur 5 Scores op vraagstuk 2 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Het zijn juist die betere leerlingen die de instroom voor het hoger onderwijs vormen, hetgeen de ratio verklaart van bijspijkeronderwijs wiskunde dat instellingen van HO al een aantal jaren verzorgen. In het kader van dat bijspijkeronderwijs worden bij veel instellingen brede, diagnostische instaptoetsen afgenomen. Geconstateerde uitval op die toetsen wordt gebruikt voor de inrichting van bijspijkeronderwijs. In deze bijdrage is daar een aspect aan toegevoegd, mogelijk gemaakt door diezelfde instaptoetsen af te nemen aan een groep van studenten met een grote diversiteit aan vooropleidingen. Uit een analyse van de uitkomsten blijkt dat vwo leerlingen in het bijzonder tekort schieten in algebraïsche basisvaardigheden, terwijl ze daarentegen meer geavanceerde wiskundige onderwerpen relatief beter beheersen. Kennis van deze relatieve sterktes en zwaktes lijkt van belang bij de vernieuwing van het wiskundeonderwijs die aanstaande is.

Analyse vraagstuk 5 (2006)

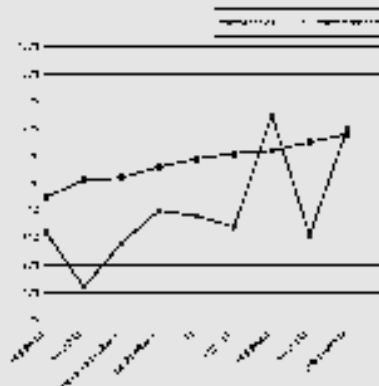
De uitdrukking:

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{x}{x-2}$$

is gelijk aan

- a. $\frac{3x-4}{(x+3)(x-2)}$ b. $\frac{2}{(x+3)(x-2)}$
 c. $\frac{-3x-4}{(x+3)(x-2)}$ d. geen van deze opties

Het bijzondere van het tweede vraagstuk is dat ook vwo B1,2 studenten hierdoor in de problemen worden gebracht; enkel studenten uit de groepen MathMajor en Leistungskurs hebben er geen moeilijkheden mee.



Figuur 6 Score vraagstuk 5 ten opzichte van totaalscore. De totaalscore is de stijgende lijn.

Referenties

- 1 'PISA 2006, Science Competencies for Tomorrow's World', OECD, Parijs, 2007. www.oecd.org
- 2 L. van Gastel, H. Cuypers, V. Jonker, E. van de Vrie, P. van der Zanden (red.) *Eindrapport Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde*, Amsterdam: Consortium NKBW, 2007. www.fi.uu.nl/nl/nap
- 3 T. Dekker, K. Lagerwaard, J. de Lange, G. Limpens & M.M. Wijers, *WISKUNDIGE geletterdheid volgens PISA — Hoe staat de vlag erbij?* 1. Analyse, Freudenthal Instituut-PISA/Citogroep, Utrecht/Arnhem, 2006
- 4 D. Tempelaar, 'Onderwijzen of bijspijkeren?', *Nieuwarchief voor wiskunde*, 8(1), 55-59, 2007. www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deelo8/mrt2007/tempelaar.pdf
- 5 B. Minne, M. Rensman, B. Vroomen, D. Web-bink, 'Excellence for productivity?', CPB, Den Haag, 2007. www.cpb.nl/nl/pub/cpbreeksen/bijzonder/69
- 6 *Parlementaire onderzoekscommissie Onderwijsvernieuwingen* (2008), eindrapport, Den Haag, Tweede Kamer der Staten-Generaal, www.tweedekamer.nl/images/kst113842.8s.tcm118-149847.PDF
- 7 Werkgroep 3TU (2006), 'Aansluiting vwo en Technische Universiteiten', *Euclides*, 81(5), maart

3TU instaptoets 2005

1. $\frac{10}{(3)^{-2}}$ is gelijk aan
 a. 900 b. 0,9 c. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ d. 90
2. $\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$ is gelijk aan
 a. $\frac{x}{1-x}$ b. $\frac{1}{2x-1}$ c. $\frac{-x}{-2x+1}$ d. $\frac{x}{x-1}$
3. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}$ is gelijk aan
 a. $\frac{2x}{2x-2}$ b. $\frac{2x^2}{x^2-1}$ c. $\frac{2x^2}{1-x^2}$ d. $\frac{2x}{x^2-1}$
4. $p^{\frac{2}{3}}$ is gelijk aan
 a. $(\sqrt[3]{p})^8$ b. $(\sqrt{p^3})^8$ c. $\frac{1}{p^{\frac{8}{3}}}$ d. $\sqrt[8]{p^3}$
5. $\sqrt[3]{-8a^6b^{-3}}$ is gelijk aan
 a. $\frac{-2a^3}{b}$ b. $\frac{-2a^2}{b}$ c. $\frac{-8a^2}{b}$ d. $\frac{8b}{a^2}$
6. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ is gelijk aan
 a. $\frac{^{10}\log 5}{^{10}\log 3}$ b. $\ln \frac{5}{3}$ c. $\ln 2$ d. $\ln 5 - \ln 3$
7. $e^{-2\ln a}$ is gelijk aan
 a. $a^{-\frac{1}{2a}}$ b. $a^{\frac{1}{2a}}$ c. $-a^2$ d. $\frac{1}{a^2}$
8. $\ln(e^3 - e^2)$ is gelijk aan
 a. $\frac{3}{2}$ b. $2 + \ln(e-1)$ c. $\ln e$ d. $2 - \ln(e-1)$
9. De oplossing van de vergelijking $\ln x = -2$ is
 a. $-\frac{1}{e^2}$ b. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ c. $\frac{1}{e^2}$ d. $(-e)^2$
10. De oplossing van de vergelijking $e^{2x} = 4$ is
 a. $\ln 16$ b. $\ln 2$ c. $\ln \sqrt{2}$ d. $-\ln 2$

Jeroen Spandaw

Faculteit EWI, Technische Universiteit Delft

Mekelweg 4, 2628 CD Delft

j.g.spandaw@tudelft.nl

Onderwijs

Wiskunde in de bèta-profielen

De bordjes zijn weer verhangen, de wiskundevakken op de middelbare school zijn gereorganiseerd. Wat is er veranderd? Wat is er verschoven en wat is er verdwenen? Opvallend is het ontbreken van statistiek bij Wiskunde B. Er zullen dus na twee jaar hele lichtingen vwo-ers op de universiteit komen die niets van statistiek weten. Zullen leerlingen die later een bètastudie willen gaan doen, zich dit wel realiseren? Jeroen Spandaw, wiskundevakdidacticus van de Technische Universiteit Delft licht ons in.

Dit schooljaar is de wiskunde voor de bovenbouw van havo en vwo weer op de schop gegaan. De leerlingen in 4-havo en 4-vwo krijgen niet langer wiskunde A1, A12, B1 of B12, maar wiskunde C, A, B of B en D. Volgend jaar wordt dit systeem voortgezet naar de vijfde klas en in 2010 zal de eerste lichting studenten die volgens dit nieuwe systeem wiskundeonderwijs hebben genoten de universiteiten binnenstromen. De aanleiding voor deze veranderingen, die overigens niet beperkt blijven tot de wiskunde, was niet inhoudelijk, maar organisatorisch van aard: de wens om de zogenaamde deelvakken af te schaffen en alle vakken evenveel studielasturen toe te delen. Dit laatste is uiteindelijk niet gelukt.

Behalve de havisten in het profiel *Cultuur en Maatschappij*, die wiskunde na de derde klas mogen laten vallen, moeten alle leerlingen kiezen tussen wiskunde A, B en C. Leerlingen die wiskunde B doen, mogen er wiskunde D bij kiezen. In de tabel staan de minimumeisen per profiel. Grofweg kan men stellen dat wiskunde A en C zijn bedoeld voor de leerlingen in de maatschappijprofielen, terwijl wis-

kunde B en D zich richten op de bèta's.

Een leerling kan echter als zijn school dit toestaat een zwaardere variant kiezen. Een CM-leerling kan dus bijvoorbeeld wiskunde A kiezen, maar een NT-leerling niet. In het vervolg zal ik me beperken tot de natuurprofielen van het vwo.

Wiskunde voor bèta's

Zoals de tabel aangeeft, kunnen leerlingen in het NG-profiel volstaan met wiskunde A. Voor veel bèta-studies zullen zij dan waarschijnlijk slechter voorbereid zijn (als ze al worden toegelaten) dan de huidige NG-leerlingen die minstens wiskunde B1 in hun pakket hebben. Ook in het meest exacte profiel, NT, is er sprake van een achteruitgang: wiskunde B heeft met 600 studielasturen (slu) 160 slu moeten inleveren ten opzicht van wiskunde B12.

Als we het programma van het nieuwe vak wiskunde B vergelijken met het programma van het oude vak wiskunde B1, dan zien we dat, ondanks de gelijke omvang van 600 slu, de volgende (sub)domeinen de vernieuwing niet hebben overleefd:

- discrete analyse: subdomein rijen;
- meetkunde: ruimtelijke objecten, berekeningen;
- combinatoriek en kansrekening;
- continue dynamische modellen;
- normale verdeling en toetsen van hypothesen.

De continue dynamische modellen werden

overigens in het oude systeem niet in het centraal schriftelijk examen getoetst. Uit het programma van wiskunde B12 zijn bovendien gesneuveld:

- voortgezette analyse: rijen en convergentie van rijen;
- delen van voortgezette meetkunde: afstanden en grenzen en meetkundige plaatsen en kegelsneden.

Hier staat tegenover dat in wiskunde B in tegenstelling tot wiskunde B1 aandacht besteed wordt aan redeneren en bewijzen in de meetkunde. Bovendien is het domein Vaardigheden uitgebreid met het subdomein algebraïsche vaardigheden.

Algebraïsche vaardigheden

Over de gebrekkige algebraïsche vaardigheden van vwo-leerlingen heerst alom onvrede. In de nieuwe vakken wiskunde A en B krijgt dit onderwerp daarom een belangrijkere plaats. In de syllabi, die te vinden zijn op [4], worden de eisen in detail beschreven. De voorbeelden uit deze syllabi in het kader op pagina 166 zijn illustratief voor het niveau dat wordt nagestreefd.

Wiskunde D

Behalve de hernieuwde aandacht voor algebraïsche vaardigheden is er nog een lichtpuntje: wiskunde B kan worden aangevuld met het vak wiskunde D, dat een omvang heeft van maar liefst 440 slu. Het vak wordt afgesloten met een schoolexamen; er is dus geen centraal examen wiskunde D. Dit geeft de docenten enige vrijheid bij de inhoudelijke invulling van het vak. Scholen zijn overigens niet verplicht om wiskunde D aan te bieden. Vervolgopleidingen kunnen dit vak dan ook niet als toelatingseis opnemen. Anderzijds mag

profiel	oud	nieuw
Cultuur & Maatschappij	A1	C
Economie & Maatschappij	A12	A
Natuur & Gezondheid	B1	A of B
Natuur & Techniek	B12	B (en D)



een school wiskunde D verplicht stellen voor het NT-profiel. Verder moet wiskunde D concurreren met de andere profielkeuzevakken informatica, biologie en het nieuwe bètavak *Natuur, Leven & Technologie* (NLT).

In dit eerste jaar heeft ongeveer de helft van de leerlingen in 4-vwo en ongeveer een kwart van de leerlingen in 4-havo wiskunde B gekozen (zie [9]). Voor wiskunde D hebben slechts 7% van de vwo-ers en 3% van de havo-leerlingen gekozen, terwijl dit vak wordt aangeboden door 70% van de scholen voor vwo en iets meer dan de helft voor havo. Er zijn scholen die wiskunde D pas vanaf 5-vwo gaan aanbieden, dus volgend jaar kunnen deze cijfers gunstiger zijn.

Er zijn twee varianten van wiskunde D voor het vwo: het *schoolmodel* en het *samenwerkingsmodel*. De overlap van deze twee modellen bestaat uit de volgende domeinen:

- Domein A: Vaardigheden
 - Domein B: Kansrekening en statistiek (160 slu)
 - Domein C: Dynamische modellen 1 (80 slu)
 - Domein D: Meetkunde (80 slu)
 - Domein H: Keuzeonderwerpen (40 slu)
- Het domein A wordt in samenhang met andere vakken ingevuld. De resterende 80 slu worden in het schoolmodel gevuld door
- Domein E: Complexe getallen (40 slu)
 - Domein F: Dynamische modellen 2 (40 slu)
- en in het samenwerkingsmodel door
- Domein G: Wiskunde in wetenschap (80 slu)

In de rest van dit artikel worden eerst de domeinen van het schoolmodel toegelicht. Vervolgens komt het domein G *Wiskunde in wetenschap* van het samenwerkingsmodel aan bod.

De domeinen van het schoolmodel

De domeinen van het schoolmodel spreken grotendeels voor zich, dus hierover kan ik kort zijn. Het domein *Vaardigheden* omvat zowel algemene studievoordigheden als meer specifieke vaardigheden als onderzoeken, ontwerpen, modelleren, redeneren, beheersing van vaktaal, conventies en notaties, oplossings- en algebraïsche vaardigheden. De subdomeinen van *Kansrekening en Statistiek* zijn combinatoriek, kansrekening, verwerking van statische gegevens, kansverdelingen en het toetsen van hypothesen. Bij *Dynamische Modellen* worden zowel discrete als continue dynamische modellen behandeld. Het domein *Meetkunde* van wiskunde D betreft analytische meetkunde. (De meetkunde in wiskunde B daarentegen is synthetisch.) Het domein *Complexe getallen* beperkt zich

tot de basisoperaties. Bij de *Keuzeonderwerpen* tenslotte kunt u denken aan thema's als π , Fermat, fractals, chaos, geschiedenis van de wiskunde, speltheorie, enzovoorts.

Overigens wordt al gewerkt aan een aanpassing van het programma in 2013. De meest opvallende verandering betreft het domein *Dynamische modellen*. Hier komt de nadruk weer meer te liggen op de wiskundige analyse van het model. Dit gaat ten koste van de aandacht voor het opstellen van dit model en de interpretatie.

Domein G: Wiskunde in wetenschap

Zoals al eerder vermeld, kunnen scholen kiezen voor het *samenwerkingsmodel*. De domeinen E en F van het *schoolmodel* worden dan vervangen door domein G: *Wiskunde in wetenschap*. Dit nieuwe domein beoogt volgens de Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO)

“... leerlingen zicht te geven op wiskunde als wetenschap en op de manier waarop wiskunde binnen exacte wetenschappen functioneert. Het gaat hierbij niet alleen om de wiskundige resultaten, maar ook om het proces van het bedrijven van wetenschap. Wiskunde in wetenschap wordt vormgegeven in nauwe samenwerking met universiteiten, wat de term ‘samenwerkingsmodel’ verklaart. Een dergelijke samenwerking bevordert de doorlopende leerlijn van vo naar ho en komt niet alleen de kwaliteit en actualiteit van de inhoud ten goede, maar heeft ook een positief effect op de doorstroming. Met het oog hierop zullen binnen de universiteiten steunpunten wiskunde D worden ingesteld, die worden gefaciliteerd.” (zie [5], *Rapport Wiskunde D 2007*).

Aan de universiteiten van Amsterdam, Utrecht, Nijmegen, Delft, Eindhoven en Twente wordt sinds 2006 gewerkt aan de concrete invulling van dit samenwerkingsmodel (zie [7]). Hiertoe zijn aan de drie technische universiteiten (Delft, Eindhoven en Twente) en de Radbouduniversiteit Nijmegen, samenwerkend onder de naam *T(R)U's*, kerngroepen van vwo-leraren onder leiding van universitair docenten gevormd. Deze kerngroepen zijn te rade gegaan bij wetenschappers, die hen van onderwerpen, ideeën en bronnen hebben voorzien. Vervolgens hebben zij deze input omgezet in bruikbaar materiaal voor het vwo. Er wordt echter wel een beroep gedaan op de professionaliteit van de docenten wiskunde D op het vwo: zij kunnen de door de kerngroep gemaakte modules naar eigen inzicht aanpassen. De ondersteuning voor docenten bestaat uit les- en achtergrondmate-

Voorbeelden van gewenste algebraïsche vaardigheden voor het VWO

Bron: CEVO [4].

1. $G = 10 \cdot \log(I) + 90 \Rightarrow I = \dots$
2. $S = \frac{1000}{R^3}$ en $R = \sqrt{100 + x^2} \Rightarrow S = 1000 \cdot (100 + x^2)^{-1,5}$
3. Druk O uit in V en omgekeerd als $V = R^3$ en $O = 6R^2$
4. $\left(6,9 + \frac{298,5}{T \cdot 3600}\right) \cdot L = 6,9L + 0,083T$
5. $\frac{1300-A}{\frac{1300}{1+44 \cdot 0,87^t}} = 44 \cdot 0,87^t \Rightarrow A = \frac{1300}{1+44 \cdot 0,87^t}$
6. $\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$
8. $x + \sqrt{8+x} = 4 \Rightarrow x = \dots$
9. $\frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 + 1 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2$

(De laatste vijf voorbeelden zijn alleen voor wiskunde B vereist.)

riaal, docentenhandleidingen en scholingen. De practica, die in principe aan de universiteiten plaatsvinden, worden gegeven door universitair docenten. Ze sluiten aan bij de stof die op school is bestudeerd. De onderwerpen van domein G bij de *T(R)U's* zijn *Optimaliseren in netwerken* in Delft, *Cryptografie en beslissen* in Eindhoven, *Astrofysica* in Nijmegen en *Modelleren* in Twente.

Concreet is in Delft gewerkt aan modules over minimaal opspannende bomen, kortste paden en maximale stromen. Een kenmerk van de Delftse modules is het gebruik van bronnen op academisch niveau, zoals [1], [2] en [3]. De modules bevatten tips die leerlingen moeten helpen dergelijke teksten, die een heel ander karakter hebben dan schoolboeken, te leren bestuderen. De vwo-docent vindt tal van suggesties over de mogelijke vormgeving van dit onderwijs. Op deze manier hoopt de Delftse kerngroep leerlingen beter voor te bereiden op het universitair onderwijs. In [10] vindt u meer informatie over de Delftse modules.

De Eindhovense module *Cryptografie* start met eenvoudige systemen als Caesar en Vigenère. Op de site van het Eindhovense steunpunt (zie [7]) zijn applets te vinden die leerlingen helpen bij het kraken van dergelijke systemen door middel van frequentieanalyse. Vervolgens wordt het bekende RSA-systeem behandeld, inclusief de benodigde getaltheorie. In de module *Beslissen* komen grafentheorie, lineair programmeren en speltheorie aan de orde. Deze module is gemaakt in samenwerking met de Fontys-hogeschool en is ook geschikt voor het havo. Het werk

van de kerngroep Eindhoven wordt uitvoeriger beschreven in [11].

De Nijmeegse modules *Vectoren en zwaartepunten*, *Krommen in het platte vlak*, *Krommen in de ruimte* en *Uitproduct tot Kepler* (zie [6]) richten zich op een paradox over de duur van de maand, dat wil zeggen de omlooptijd van de maan om de aarde. Aan de ene kant neemt deze namelijk *toe*, omdat de maan zich met ongeveer 4 centimeter per jaar van de aarde verwijderd. Aan de andere kant ontdekte de Engelse astronoom Edmond Halley in 1695 dat de maand *uitgedrukt in 'dagen'* juist *afneemt*. (Hierbij is een 'dag' de rotatieperiode van de aarde om haar as.) In de module komen ook andere planeten en hun manen aan de orde. Een deel van deze module is ook te lezen in de Vakantiecursus 2007 van het CWI, herdrukt in dit blad [8].

In Twente is rond het thema *Modelleren* een serie modules gemaakt over golven. Na een algemene inleiding op modelleren in de startmodule en een inleidende module over *waves* in sportstadions, volgt een module over tsunami's. Het gaat hierbij voornamelijk over de afhankelijkheid van profiel en voortplantingssnelheid van de diepte. De laatste modules behandelen filevorming en krommen. Voor meer informatie, zie [12].

Zoals reeds vermeld, hebben behalve de T(R)U's ook de universiteiten van Amsterdam en Utrecht activiteiten ontplooid in het samenwerkingsdomein *Wiskunde in wetenschap*. De Vrije Universiteit (VU) en de Universiteit van Amsterdam (UvA) en de Hogeschool van Amsterdam (HvA) werken hierbij samen in een regionaal steunpunt. De Am-

sterdamse activiteiten zijn zeer gevarieerd: enerzijds gaan studenten naar scholen om les te geven over discrete wiskunde, anderzijds is er een statistiekcursus voor docenten en een *e-klas* voor leerlingen over dynamische modellen. Deels wordt gebruik gemaakt van bestaand materiaal, deels van materiaal dat door ontwikkelgroepen van leraren is gemaakt in samenwerking met de universiteiten en hogeschool. Weer een andere ontwikkeling is de *ITS-academie*: leerlingen van een aantal scholen komen samen op één locatie, waar les wordt gegeven door een docent uit het hoger onderwijs over analytische meetkunde, dynamische modellen, discrete wiskunde en statistiek.

Door de samenwerking met de HvA is er ook een aanbod voor het havo, bestaande uit logistiek, statica (vectorrekening en zwaartepunten) en logica. Net als bij de T(R)U's is het materiaal gemaakt door een groep leraren, maar wordt het onderwijs op school verzorgd door de leraren aldaar. Aan het eind van een module komen de leerlingen naar de HvA voor een afsluitend practicum.

Ook in Utrecht werken universiteit en hogeschool samen. Het *Bètasteunpunt voor VO – regio Utrecht* biedt ondersteuning voor havo en vwo, niet alleen voor wiskunde D, maar ook voor het eerder genoemde *Natuur, Leven en Technologie*. Er zijn 4 modules van 40 slus ontwikkeld: *Complexe getallen en goniometrische functies* voor havo 4, *Problemen oplossen én uitleggen* voor havo 4 en vwo 5, *Diophantische vergelijkingen: gehele oplossingen gezocht!* voor vwo 5 en *Muziek en de Fast Fourier Transform* voor vwo 6. Deze modules

worden aangeboden aan de Hogeschool respectievelijk de Universiteit van Utrecht. Het betreft een reeks van 5 bijeenkomsten van ieder 4 uur.

Toepassingen en bètastudies

In dit artikel heb ik geprobeerd een beeld te schetsen van de veranderingen in het wiskundeonderwijs in de bèta-profielen. Zoals u ziet, is dit een nogal complexe aangelegenheid, die bovendien nog in ontwikkeling is. Toch zijn er trends te ontwaren, zoals de toegenomen aandacht voor algebraïsche vaardigheden in wiskunde A, B en D. Dit zou de aansluiting van voortgezet naar hoger onderwijs moeten verbeteren. Hopelijk gaat de versterkte nadruk op wiskundige vaardigheden niet ten koste van aandacht voor toepassingen. Deze zijn immers belangrijk om leerlingen te motiveren en om het beeld van wiskunde als wereldvreemd vak te corrigeren.

Een andere trend is de samenwerking tussen universiteiten, hogescholen en het voortgezet onderwijs. In allerlei projecten, waarvan het wiskunde-D-domein *Wiskunde in wetenschap* er een van is, wordt geprobeerd leerlingen enthousiast te krijgen voor bèta-studies. Regionale bèta-steunpunten moeten scholen helpen hun weg te vinden in het woud van initiatieven op dit terrein.

Voor meer informatie over het samenwerkingsmodel kunt u terecht op [7]. Op de website [5] van de *Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs* (cTWO) vindt u niet alleen informatie over wiskunde D, maar ook over de varianten A, B en C.

Referenties

- Hillier, Lieberman *Introduction to Operations Research*, 8th Edition, McGraw-Hill International Edition, Boston, 2005.
- Kees Roos *Optimaliseren in Netwerken*, Kaleidoscoop college, www.isa.ewi.tudelft.nl/~roos
- Henk Tijms, *Operationele analyse*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2004.
- www.cevo.nl
- www.ctwo.nl
- www.ratio.ru.nl
- www.wiskunded.nl
- Rainer Kaenders, 'Dubbelplaneten', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (4), 287–298
- 'Vernieuwde Tweede Fase, start in cijfers', *Tweede Fase Adviespunt*, december 2007, www.tweedefase-loket.nl
- Wim Caspers et al., 'Wiskunde in Wetenschap: Optimaliseren in netwerken', te verschijnen in *Euclides*.
- Hans Sterk, 'Steunpunt TU/e: Wiskunde in Wetenschap', *Euclides* (3), december 2007, jaargang 83, pp. 105–107
- UT-Kerngroep, 'Wiskunde in Wetenschap: Visie op een domein in Wiskunde D', *Euclides* (5), maart 2007, jaargang 82, pp. 173–175

Henk Visser

Kleverlaan 172

2023 JM Haarlem

h.visser@micc.unimaas.nl

Onderwijs

Rekenen?

Het reken- en cijferonderwijs is de laatste honderd jaar sterk veranderd. Dit lijkt logisch, gezien de enorme ontwikkelingen in de exacte wetenschap en techniek. In de zeventiger jaren van de vorige eeuw heeft het rekenonderwijs zich sterk gericht op toepasbaarheid en waren onderwijskundigen er sterk van overtuigd dat de rekentechniek ook via toepassingen moest worden aangeleerd: het zogenaamde realistische rekenen. Het formele, abstracte en algoritmische karakter van het rekenonderwijs werd radicaal afgezworen. Henk Visser, tot 2004 hoogleraar aan de afdeling Informatica van de Universiteit Maastricht en nu voorzitter van de E.W. Beth stichting, maakt zich grote zorgen over deze ontwikkeling.

Uit onderzoek van het CITO (2006) blijkt dat ruim de helft van de eerstejaars Pabo-studenten slechter rekt dan de beste leerlingen uit groep 8. Die ruime helft van de eerstejaars Pabo-studenten heeft ooit ook in groep 8 van de basisschool gezeten. Waren zij toen misschien ook niet sterk in rekenen? Of zijn hun rekenvaardigheden niet beklijfd? Wat waren die rekenvaardigheden dan wel? Zijn die anders dan wat indertijd op de 'lage-re school' werd geleerd?

De laatste drie vragen zijn het belangrijkste. Er is een groot verschil tussen de technieken die vandaag de dag in het rekenonderwijs worden aangeleerd en de technieken van vroeger. Vandaag de dag is de tijd dat leerlingen in groep 8 van de basisschool een rekentoets afleggen die voornamelijk bestaat uit ingeklede vraagstukken die bij goed lezen leiden tot sommetjes die uit het hoofd moeten worden opgelost. Hoewel dit geen doel van het rekenonderwijs hoeft te zijn, wordt het toch wel zo gezien, met name door voorstanders van realistisch rekenen. Het is ook de tijd dat onderwijskundigen verschillende manieren bedacht hebben om

één type opgaven te kunnen maken. Dit blijkt bijvoorbeeld uit figuur 1. Hoe een basisscholer en zijn docent hier mee kunnen omgaan, zal tegen het einde van dit betoog worden getoond.

'Vroeger' is de tijd dat het doel van het rekenonderwijs op de lagere school primair het 'op papier' kunnen uitvoeren van 'complexe' berekeningen was. Zogenaamde ingeklede vergelijkingen kwamen pas aan de orde als zulke berekeningen geen problemen

meer opleverden. Om het laatste te bewerkstelligen moesten alleen de bewerkingen die daarbij 'uit het hoofd' moeten kunnen worden gedaan, geconditioneerde rekenreflexen zijn geworden.

Om welke bewerkingen het ging, is betrekkelijk eenvoudig af te leiden uit voorbeelden van zulke berekeningen. Hiervoor hoeven we alleen maar een negentiende-eeuws boek als de *Beginnels der cijferkunst* van H. Strootman te bekijken [1]. Dit bevat na elke behandeling van een rekenkundige bewerking zowel een formulering van de bijbehorende regel als duidelijke voorbeelden. Omdat de indruk bestaat dat niet alle onderwijskundigen van tegenwoordig op de hoogte zijn van de aanpak van de onderwijzers van vroeger volgen hier letterlijke citaten uit het genoemde boek, te beginnen met de regel voor complexe optellingen en de daarbij aansluitende voor-

1 Weet je nog?

► splitsen

$$\begin{array}{r} 360 - 150 \\ \hline 360 - 150 = 210 \end{array}$$

langs een rond getal

$$\begin{array}{r} 405 - 12 = 393 \end{array}$$

met een rond getal

$$\begin{array}{r} 428 - 199 = 228 \end{array}$$

op de getallenlijn

$$\begin{array}{r} 263 - 56 = 207 \end{array}$$

Figuur 1 Vier verschillende methoden om een aftrekking uit te voeren (uit: *RekenRijk*, Wolters-Noordhoff)

REGEL.

1°. Men schrijft de getallen, wier som men begeert te vinden, zoodanig onder elkander, dat de eenheden onder eenheden, de tientallen onder tientallen, enz. komen te staan; in het algemeen de cijfers van dezelfde soort in een zelve kolom.

2°. Men zoekt door optelling, de sommen der eenheden, tientallen, honderdtallen, enz., van den laagsten rang beginnende, en van elken rang tot den naastvolgenden overgaande.

3°. Men schrijft elk dezer sommen, als zij minder dan tien bedraagt, op de plaats, die daarvoor beoemd is; maar zijn eenige dezer sommen meer dan negen, dan schrijft men slechts de eenheden, welke in die som voorkomen, in haren rang, en stelt de tientallen bij de som der naastvolgende kolom. De laatste som wordt schied geschreven.

Zie hier nog eenige uitgewerkte voorbeelden:

42456	692457	4567
2007	287634	86095
69584	51007	572348
970	67420	932467
85332	5138	34679
3854	6924	86304
7095	785035	283639
211308	1899835	1999999

Figuur 2 Bladzijde 15 uit *Beginselen der Cijferkunst* van H.Strootman: de optelling

beelden (figuur 2).

Op voorlopers van de Pabo, dus de normaalschool of de kweekschool, kregen de leerlingen daarbij de 'negenproef' aangereikt. Zij konden dit controlemiddel op hun beurt weer overdragen aan hun leerlingen. Maar in ieder geval leerden zij aan hen dat het ook nuttig kan zijn het resultaat van een optelling te controleren door deze vervolgens 'van beneden naar boven' uit te voeren.

Let wel, het werd voor de praktijk, bijvoorbeeld in de bouw, niet nodig geacht een berekening als $87 + 39$ uit het hoofd te kunnen uitvoeren. De op te tellen getallen werden daar immers al op een bepaalde achtergrond opgeschreven wanneer zij het resultaat waren van afzonderlijke metingen. Bovendien was het niet wenselijk die getallen te moeten onthouden, omdat niet iedereen een daartoe toereikend geheugen heeft. Hetzelfde geldt voor hun som — dus die moest ook schriftelijk worden vastgelegd.

Na de optelling kwam de vermenigvuldiging. Hier hoeft na het voorafgaande weinig meer over te worden gezegd, vandaar dat hier meteen de regel volgt (figuur 3).

Het is nu van het grootste belang dat het product van twee getallen onder de tien 'automatisch' kan worden geproduceerd. Op de stimulus 'zeven keer acht' moet onmiddellijk de respons 'zesenvijftig' volgen.

Aftrekkingen zoals het verschil van 87 en 39 uitrekenen, gaan uit het hoofd nog minder gemakkelijk dan optellingen, dus daar is het helemaal op zijn plaats om ze uit te schrijven.

Tenslotte de staartdelingen. De regel is ietwat gecompliceerder dan de vorige, omdat zulke delingen niet 'op 0' hoeven uit te komen (figuur 5).

Tegenwoordig wordt wel schamper gedaan over staartdelingen, terwijl deze nu juist ideale oefeningen in vermenigvuldigen en aftrekken opleveren. Bovendien was het zeker aanvankelijk van belang dat de delingen op 0 uitkwamen, want dat gaf de leerlingen het vertrouwen dat zij het goed gedaan hadden: 'een prettig gevoel'.

Het was voor de onderwijzers natuurlijk gemakkelijk om delingen op te stellen die zo goed uitkomen. Zij hoefden daarvoor alleen maar eerst een vermenigvuldiging te maken, bijvoorbeeld $648 \times 93457 = 60560136$. Hier kon de opgave $60560136 : 93457$ uit worden afgeleid (zie figuur 6).

Voor gevorderde lagere-schoolleerlingen ontstonden zulke prachtige opgaven zelfs na vermenigvuldigingen en een aftrekking, bijvoorbeeld:

$$\frac{6789 \times 6789 - 2345 \times 2345}{9134}$$

In het tweede voorbeeld na de regel voor de deling komt al een breuk voor. In eerste aanleg is dit echter slechts een voorstelling van het quotiënt dat overblijft. Breuken worden pas in een volgende klas behandeld!

Het gaat in de verhandeling van Strootman niet over didactiek, maar zeker is dat de invoering van breuken en elementaire bewerkingen met breuken in de negentiende eeuw kon bogen op de didactische ervaringen van zeer veel vroegere generaties. Niemand dacht er toen over nieuwe rekenmethoden in te voeren, zoals dat in de twintigste eeuw gebeurd is, zonder de nodige didactische ervaringen. 'Vroeger' ging het er om het uitvoeren van elementaire rekenkundige bewerkingen automa-

REGEL.

1°. Men schrijft het vermenigvuldigtal en den vermenigvuldiger zoodanig onder elkander, dat eenheden onder eenheden, tientallen onder tientallen, enz. komen te staan.

2°. Men vermenigvuldigt het vermenigvuldigtal met elk cijfer van den vermenigvuldiger; hierbij de nullen, die in den vermenigvuldiger voorkomen, als ledigstaande plaatsen weglatende, dan zal men zooveel gedeeltelijke producten verkrijgen, als er beteekenende cijfers in den vermenigvuldiger voorkomen.

3°. Men plaatst de gevondene gedeeltelijke producten zoodanig onder elkander, dat van elk gedeeltelijk product het achterste cijfer ter rechterhand in denzelfden rang komt, waarin het cijfer staat, waarmede men vermenigvuldigt.

4°. Eindelijk tellt men al deze gedeeltelijke producten bij elkander, en de som zal alsdan het begeerde product wezen.

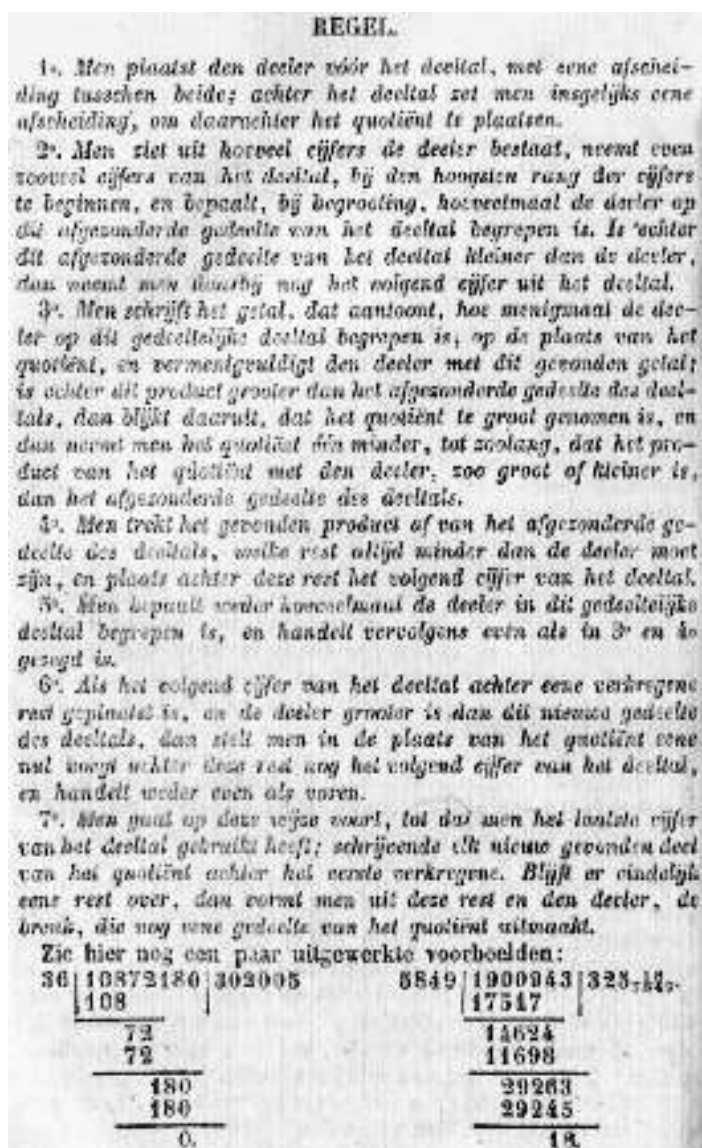
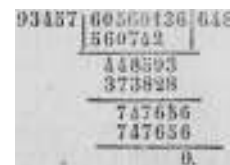
Zie hier nog een paar uitgewerkte voorbeelden:

6320045	1653287
307	80029
44240315	14879583
18960135	3306574
1940253815	13226296
	132310903323

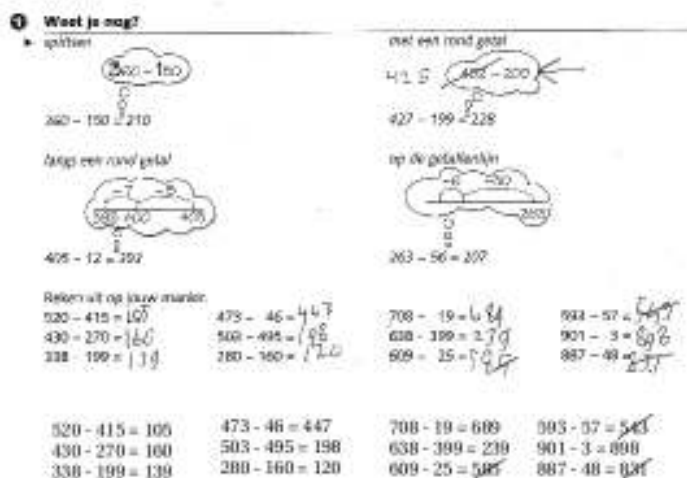
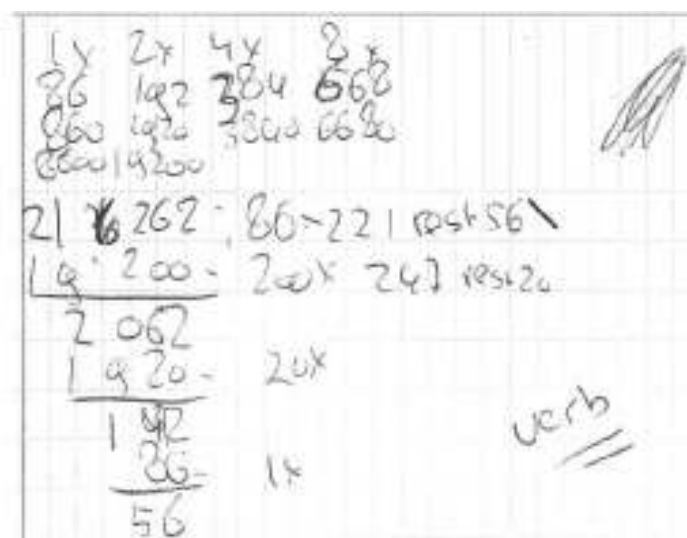
Figuur 3 Bladzijde 22 uit *Beginselen der Cijferkunst* van H.Strootman: de vermenigvuldiging

tismen te laten worden. Rekenen leren was net zoets als leren zwemmen: wie het eenmaal kan, verleert het nooit meer. Nadat een en ander was uitgelegd, volgden de regels en kwamen de oefeningen, de laatste net zo veel als nodig was om de bewerkingen te beheersen. Of de uitleg en de regels onthouden werden, was niet belangrijk, hoewel iedere 'oudere' zich de regel 'delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde' nog kan herinneren en er zo nodig naar handelt. Tafels van vermenigvuldiging werden zo lang herhaald dat over geen van de vermenigvuldigingen die in staartdelingen kunnen voorkomen meer behoefde te worden nagedacht. Let wel, de tafels werden in de vorm van $1 \times 8 = 8$, $2 \times 8 = 16$, $3 \times 8 = 24$, ..., $10 \times 8 = 80$ opgezegd. Er werd niet volstaan met het memoriseren van het rijtje 0 (!), 8, 16, 24, ..., 72 zoals dat tegenwoordig wel voorkomt. Geen wonder dat leerlingen die daarmee opgevoed zijn, naderhand nog niet eens meteen kunnen zeggen dat zeven keer acht zesenvijftig is.

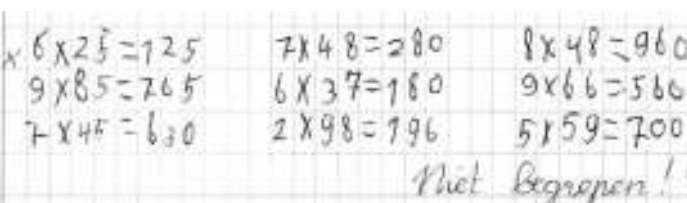
Het is onbegrijpelijk dat de klassieke rekenwijzen en -methoden grotendeels overboord zijn gezet. Hoe dat zo gekomen is, mag een taak voor ideeënhistorici worden. Of er een verband is tussen de wijze van toetsen en hoofdreenopgaven is ook iets wat nader onderzocht zou kunnen worden. Als toetsen zo opgesteld worden dat uitwerkingen op papier niet beoordeeld (kunnen) worden, dus dan maar achterwege moeten blijven, is er letterlijk en figuurlijk geen ruimte voor een opgave als 648×93457 . Als de lessen er vervolgens voornamelijk op gericht worden om toetsopgaven te kunnen maken, blijft er weinig gelegenheid meer over voor oefening in opgaven die niet uit het hoofd kunnen wor-

Figuur 4 Bladzijde 26 uit *Beginnelen der Cijferkunst* van H.Strootman: het aftrekkenFiguur 5 Bladzijde 39-40 uit *Beginnelen der Cijferkunst* van H.Strootman: de vermenigvuldiging

Figuur 6 Een staartdeling die op nul uitkomt

Figuur 7 Boven: verschillende methoden om het verschil te bepalen (uit: *Rekenrijk*, Wolters-Noordhoff); onder: uitwerkingen van een basisschoolleerling (met dank aan Christophe Meijer)

Figuur 8 De haphmethode (met dank aan Christophe Meijer)



Figuur 9 Voorbeeld uit een werkschrift (met dank aan Christophe Meijer)

den gemaakt. Daar blijft helemaal geen tijd meer voor over, als de leerlingen eerst nog eens vervelende verhaaltjes moeten lezen en begrijpen, zoals de aan arithmofobie lijdende voorstanders van realistisch rekenen ons willen doen geloven. Vergeet niet dat er veel oefening nodig is alvorens het stadium van automatismen bereikt wordt.

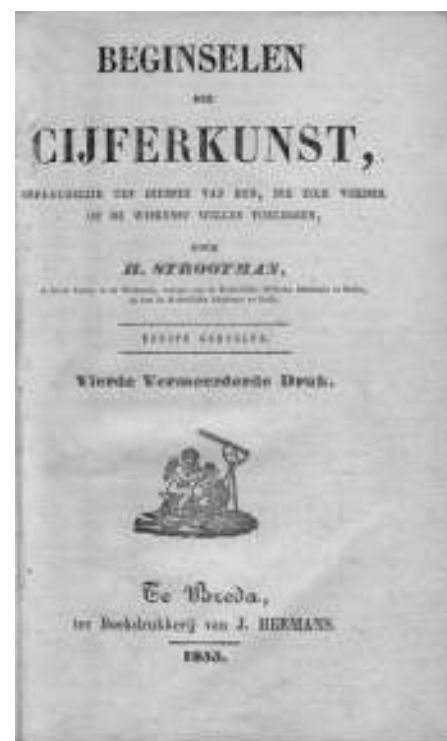
Wat is er tégen om automatismen aan te leren? Wat is er vóór om te verhinderen dat automatismen ontstaan? Wanneer kan iemand zwemmen, stukadoren, autorijden, salto's maken, pianospelen, vioolspelen, lezen, rekenen? Jongeren hebben er recht op om dingen blijvend aan te leren, dus recht op leraren die er voor zorgen dat ze automatismen ontwikkelen.

Over leraren gesproken, van hen wordt verwacht dat zij niet alleen kunnen beoordelen dat leerlingen fouten hebben gemaakt, maar ook begrijpen hoe zij tot fouten gekomen zijn. In het klassieke rekenonderwijs was dat eenvoudig, sterker nog, hadden de leerlingen zelf mogelijkheden om hun fouten op te sporen en te corrigeren. In het moderne op hoofdrekenen gerichte rekenonderwijs is dat veel moeilijker, om een *understatement* te gebruiken. Hopelijk is het volgende voorbeeld, dat overgenomen is uit een rekenschrift van een basisscholier, een teken aan de wand (Daniel

5: 25) en wordt ingezien dat het huidige rekenonderwijs de dood in de pot is (zie figuur 7).

Afgezien van de omslachtigheid om vier manieren te laten onthouden — is het niet veel economischer om de opgaven onder elkaar te schrijven? — klopt er iets niet. De lezer wordt dan ook uitgenodigd, deze opgaven op de oude, beproefde manier te maken, vervolgens de zo verkregen antwoorden met de bovenstaande uitkomsten te vergelijken, en tenslotte de vraag te beantwoorden: kunnen die Pabo-studenten het wel helpen dat zij niet (meer) zo goed kunnen rekenen? Hebben zij genoeg oefening gehad in het uiterst zorgvuldig onder elkaar schrijven van cijfercombinaties die bij complexe rekenkundige opgaven voorkomen?

Het is waar dat hedendaagse scholieren hun rekensommen in een ruitjesschrift maken, maar zelfs bij eenvoudige aftrekkingen leiden de tegenwoordig aangeleerde doorstrepingen tot chaos, om maar te zwijgen van de correcties die nodig zijn als per ongeluk een vergissing is gemaakt. Dit kan gemakkelijk worden gedemonstreerd aan het voorbeeld van een deling die volgens de nieuwe richtlijnen is uitgevoerd (zie figuur 8). Het is eveneens overgenomen uit een werkschrift.



Als toegift volgt een laatste voorbeeld uit een werkschrift, nu met het commentaar van de onderwijzer dat voor tweeërlei uitleg vatbaar is (figuur 9).

Referenties

- 1 Strootman, H., *Beginselen der cijferkunst, bepaaldelijk ten dienste van hen, die zich verder op de wiskunde willen toeleggen*, eerste gedeelte, vierde vermeerde druk, Breda: J. Hermans, 1855.
- 2 Visser, H., 'Reële bezwaren tegen realistisch reken- en wiskundeonderwijs', In: Maria L. A. Rietdijk - Helmer (red.), *Steeds minder leren. De tragedie van onderwijshervormingen* (2005) Essays, Utrecht: IJzer, pp. 293–302

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



M. Ben-Artzi and J. Falcovitz

Generalized Riemann Problems in Computational Fluid Dynamics

Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 11

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

349 p., prijs £65,-

ISBN 0-521-77296-6

Dit boek geeft een gedetailleerde beschrijving van een klasse van numerieke methoden voor hyperbolische behoudswetten, met name voor de Eulervergelijkingen uit de gasdynamica. Voor deze behoudswetten bestaan er vele zogenaamde Riemannoplossers. Dit zijn eindige volumemethoden waarbij de numerieke flux wordt bepaald uit de oplossing van een Riemannprobleem, dat wil zeggen een beginwaardeprobleem met stuksgewijs constante beginoplossing. Deze Riemannoplossers zijn slechts eerste orde nauwkeurig, hetgeen vaak onvoldoende is voor praktische berekeningen. Er zijn daarom vele verbeteringen op deze klasse van methoden beschreven in de literatuur, waaronder door de auteurs van dit boek. Het basisidee van hun methode is om de numerieke flux te berekenen uit een gegeneraliseerd Riemannprobleem, dat wil zeggen een beginwaardeprobleem met een stuksgewijs lineaire beginoplossing. Op deze manier zijn ze in staat een numerieke methode te construeren die tweede orde nauwkeurig is.

De globale inhoud van het boek is als volgt. In hoofdstuk 2 wordt de basistheorie van scalaire behoudswetten uiteengezet, met name een beschrijving van de oplossing van deze vergelijkingen, waarna in hoofdstuk 3 deze theorie wordt toegepast om het gegeneraliseerde Riemannprobleem op te lossen en het bijbehorende numerieke schema af te leiden. De volgende twee hoofdstukken volgen eenzelfde procedure voor hyperbolische stelsels. In hoofdstuk 4 wordt eerst de theorie van algemene een-dimensionale hyperbolische stelsels uitgelegd en daarna in detail uitgewerkt voor de Eulervergelijkingen. In hoofdstuk 5 wordt het gegeneraliseerde Riemannprobleem opgelost en worden de hierop gebaseerde numerieke methoden afgeleid. De resterende hoofdstukken bevatten uitbreidingen van de theorie, zoals tweedimensionale problemen of de vergelijkingen voor reagerende gasstroming.

De opbouw van het boek, zoals hierboven beschreven, is goed. De tekst begint eenvoudig maar wordt gaandeweg steeds ingewikkelder. Met name de beschrijving van het gegeneraliseerde Riemannprobleem voor de Eulervergelijkingen is zeer technisch en ingewikkeld en alleen maar goed te volgen door de echte specialist op dit gebied. Het boek is zeer gestructureerd; de theorie wordt netjes gepresenteerd in termen van definities, stellingen en dergelijke, afgewisseld met verklarende tekst. Verder bevat het boek enkele samenvattingen van numerieke algoritmen die de lezer in staat moet stellen om deze te implementeren en toe te passen op zijn eigen problemen. Voor de scalaire vergelijkingen is dit redelijk eenvoudig, echter voor hyperbolische stelsels lijkt me dit een stuk ingewikkelder. Tenslotte bevat het boek vele voorbeelden die overtuigend de kwaliteit van de door de auteurs ontwikkelde numerieke methoden demonstreren.

Samenvattend is deze geavanceerde tekst over numerieke gasdynamica interessant voor eenieder werkzaam op dit gebied.

J.H.M. ten Thije Boonkkamp



'Terese'

Term Rewriting Systems*Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 55**Cambridge: Cambridge University Press, 2003**906 p., prijs £95,-**ISBN 0-521-39115-6*

Een kloek boek: meer dan negenhonderd pagina's, degelijke uitvoering en dito inhoud. De auteursnaam lijkt een acroniem van de titel, maar is in feite afgeleid van Term Rewriting Seminar. Dit seminarium liep van 1988 tot 2000 aan de Vrije Universiteit te Amsterdam: het was de plaats waar de twaalf auteurs van de hoofdstukken van dit boek elkaar ontmoetten. Drie van hen (Mark Bezem, Jan Willem Klop en Roel de Vrijer) traden als editors op.

Termherschrijven is het stapsgewijs transformeren van termen door toepassing van herschrijfstappen. Een elementair voorbeeld:

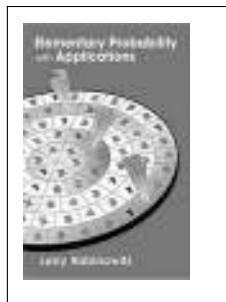
$$(xy + xz) + y(y + z) \rightarrow x(y + z) + y(y + z) \rightarrow (x + y)(y + z)$$

In het algemeen is er een verzameling T van termen met daarop een binaire herschrijfrelatie $\rightarrow$, die meestal is voortgebracht door gelijkheden tussen termen (bijvoorbeeld commutativiteit: $x + y = y + x$). Herschrijven is te zien als een abstract berekeningsmodel gebaseerd op equationele logica, en als zodanig een theoretisch interessante en praktisch bruikbare benadering van het begrip berekenbaarheid. Het wordt onder andere toegepast bij het implementeren van functionele programmeertalen, automatische stellingbewijzers en computeralgebra.

Dit boek combineert drie functies: tekstboek, naslagwerk en bron van originele onderzoeksresultaten. Als tekstboek lijkt het me zeer bruikbaar: de wiskundige basisbegrippen en het basismateriaal (onderwerpen zoals abstracte reductiesystemen, confluentie, normaalvormen, terminatie, kritieke paren, lambda-calculus, combinatorische logica) worden helder behandeld en er zijn opgaven met uiteenlopende moeilijkheidsgraad, met uitwerkingen op een aan dit boek gewijde webpagina. Als naslagwerk is het weliswaar lang niet volledig (daarvoor is het onderwerp inmiddels te omvangrijk), maar biedt het een aantal waardevolle overzichtshoofdstukken, onder andere over orthogonaliteit, beslisbaarheidsresultaten, modulariteit, terminatie, reductiestrategieën, hogere-orde herschrijven, herschrijven van oneindige termen en van termgrafen. Tevens is er een hoofdstuk over implementaties en andere toepassingen. Als bron van originele resultaten bevat het boek enkele (onderdelen van) hoofdstukken die ook als artikel in een erkend vaktijdschrift hadden kunnen verschijnen. Voorbeelden zijn het omvangrijke hoofdstuk over equivalentie van links-lineaire herschrijfsystemen, en het hoofdstuk over geavanceerde onderwerpen uit de theorie van abstracte herschrijfsystemen.

Al met al een hybride boek. Men kan dat als een nadeel zien, en wensen dat de auteurs hun energie aan twee of drie boeken van bescheidener formaat gewijd hadden. Voor mij weegt de multifunctionele waarde van het boek zwaarder: je kunt uit dit boek uitstekend leren wat termherschrijfsystemen zijn, en je krijgt een breed overzicht van de stand van zaken in het onderzoek hierover, inclusief toepassingen. Van harte aanbevelen.

Gerard Renardel de Lavalette



L. Rabinowitz

Elementary Probability with Applications*Wellesley, MA : A.K. Peters Ltd., 2005**198 p., prijs \$ 35.00**ISBN 1-56881-222-1*

There exist many introductions to probability. This book is one of the most elementary introductions to probability available. It covers discrete probability, and includes probabilities, random variables, as well as conditional probabilities and expectations. The writing style is quite pleasant, and many interesting examples are given. These applications are, in my opinion, the most interesting part of the book, and include the usual examples from card and other games, but also examples like the frequency of letters in English or detection of drug users. In the classical example of monkeys trying to type a Shakespeare text, the author extends the classical random key hitting by introducing the 'higher-level Shakespeare monkey', which takes the frequency of occurrence of letter combinations into account. When the monkey takes four letter frequencies into account, the text starts appearing considerably less random.

A lot of emphasis is given to the binomial distribution, one of the key examples of discrete distributions. Some of the other important discrete random variables, such as the hypergeometric and geometric distributions, are also treated without mentioning their names.

One difficulty in using this book in courses at Dutch universities is that the book covers only discrete probability, while most elementary probability courses in the Netherlands cover a wider range of topics. For example, the book does not cover the normal distribution. Therefore, also approximations for the binomial distributions are missing. In particular, the normal and Poisson approximations to the binomial distribution are serious omissions. An attempt to describe the normal approximation to the binomial distribution is given in section 6.2, but without introducing the normal distribution this is quite hard to follow and offers no insight. In my opinion, this text can best serve as a source for interesting examples, and possibly for exam questions.

R. van der Hofstad



W.P. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters, A. Van de Ven

Compact Complex Surfaces (2nd enlarged edition)*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge**A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 4, Berlin : Springer Verlag, 2004**436 p., prijs €106,95, ISBN 3-540-00832-2*

De eerste versie van het onderhavige boek verscheen in 1984 en heeft zich een plaats als leerboek en encyclopedische referentie voor de theorie van compacte complexe oppervlakken verworven. Bij het ter hand nemen van de nieuwe versie valt op dat er een auteur is toegevoegd (Hulek) aan het oorspronkelijke drie-

tal en dat de omvang van het boek duidelijk is toegenomen — niet alleen door een andere opmaak. Voor iemand die zich twintig jaar niet meer intensief met oppervlakken heeft bemoeid is het een interessante gelegenheid de vooruitgang in deze twee decaden te overzien. Wat is er naast de vanzelfsprekende vooruitgang (nieuwe resultaten, nieuwe trucs en simplificaties, veranderde standpunten) aan revolutionaire gebeurtenissen? In de eerste categorie (nieuwe resultaten) valt de stelling op dat een compact complex oppervlak Kähler is dan en slechts dan als het eerste Bettgetal even is; een prachtig definitief resultaat. In de tweede categorie (trucs en simplificaties) past de zogenaamde Reidermethode, een analyse van basispunten van lineaire systemen met behulp van vectorbundels van rang 2. Dat vindt zijn toepassing op de studie van pluri-canonieke systemen van oppervlakken en is duidelijk efficiënter dan de oudere methoden. In de categorie veranderde inzichten past de nef-kegel; duidelijk geïnspireerd door de ontwikkeling van de classificatie van drievouden en het werk van Mori.

Maar de werkelijk nieuwe inzichten stammen uit de hoek van de mathematische fysica. Revolutionair zijn de nieuwe invarianten: de Donaldsoninvarianten en de Seiberg-Witteninvarianten. Freedman heeft laten zien dat de topologische classificatie van variëteiten (manifolds) van dimensie vier ruwweg gegeven wordt door de classificatie van de snijvorm op de tweedimensionale homologie. Donaldson, geïnspireerd door de Yang-Mills-vergelijkingen, heeft laten zien dat er op een gegeven topologische vierdimensionale variëteit oneindig veel verschillende differentieerbare structuren kunnen leven, heel anders dan in dimensie groter dan vier. De Donaldsoninvarianten onderscheiden deze verschillende differentieerbare structuren.

De Seiberg-Witteninvarianten zijn geïntroduceerd door Witten en hebben bij het wereldkundig maken in 1994 zelfs de New York Times gehaald. Het zijn ook invarianten van de differentieerbare structuur en even nuttig voor de studie van complexe oppervlakken. Maar deze Seiberg-Witteninvarianten zijn veel gemakkelijker te berekenen dan de Donaldsoninvarianten. Hiermee wordt in het onderhavige boek bijvoorbeeld bewezen dat pluri-geglachten diffeomorfie-invarianten zijn. De invoering van zowel Donaldson- als Seiberg-Witteninvarianten is erg summier en schetsmatig en wellicht niet erg verhelderend. Wel wordt duidelijk gemaakt hoe hiermee nieuwe resultaten over oppervlakken afgeleid kunnen worden.

De waarde van dit nuttige standaardwerk is in deze aangepaste versie duidelijk vergroot. Ik vond het grappig dat ik net als in de originele versie soms duidelijk kon zien wie welke paragraaf heeft geschreven.

G. van der Geer



J. Carlson, S. Müller-Stach, C. Peters
Period Mappings and Period Domains

Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 85
Cambridge: Cambridge University Press, 2003
446 p., prijs £65,-
ISBN 0-521-81466-9

2003 bijna 2600 pagina's 'Selected Works' zijn uitgegeven. In een reeks artikelen, vanaf 1968, ontwikkelde hij een moderne theorie van periodendomeinen en -afbeeldingen die veel meetkundige inzichten heeft opgeleverd. Ook al is het Hodgervermoeden bestand gebleken tegen de aanvallen van Griffiths en zijn school, voor veel van wat we weten over Hodge-theorie en algebraïsche cycli ligt het werk van Griffiths aan de basis.

Het boek van Carlson, Müller-Stach en Peters staat vol interessante onderwerpen. Er is ook zeker behoefte aan een boek als dit, want veel materiaal was tot nu toe alleen maar te vinden in losse artikelen. Volgens de auteurs is het boek vooral bedoeld als tekstboek voor promovendi; dit wordt zichtbaar gemaakt doordat ze niet direct beginnen met de algemene theorie maar eerst een aantal voorbeelden uitwerken. Verderop in het boek gaat het niveau snel omhoog, en vinden we onder andere hoofdstukken over Torellistellingen, normale functies, Nori's samenhangstelling (in een verscherpte versie van Jan Nagel), en een heel deel gewijd aan de differentiaalmeetkunde van periodegebieden.

De recensie van dit boek in het Zentralblatt is juichend. Vergeleken daarmee is mijn eigen enthousiasme wat minder. Ik vind het een rijk boek, waarin veel mooie wiskunde wordt behandeld, maar over de schrijfstijl ben ik wat minder te spreken. Juist bij een tekstboek voor promovendi is het naar mijn mening cruciaal om precieze en volledige informatie te geven, ook al komt daar techniek bij kijken. Op dit punt vind ik het boek te ontwijkend. Bijvoorbeeld: hoofdstuk 3 begint met een sectie getiteld 'Is the Hodge decomposition holomorphic?'. Aan het einde van die sectie lezen we dat het nu waarschijnlijk gemaakt is dat de Hodge filtratie holomorf varieert, en dat daar in hoofdstuk 6 op verder gegaan wordt. Maar hoofdstuk 6 gaat vooral over spectraalrijen, en er staat nergens een duidelijke uitspraak over het holomorf variëren van de Hodgefiltratie. Bovendien, het antwoord op de oorspronkelijke vraag is negatief, en dat kan ik al helemaal nergens vinden. Het zijn misschien maar schoonheidsfoutjes, maar ze storen mij wel een beetje. Niettemin lijkt het me een zeer nuttig en inspirerend boek voor wie zich verder wil verdiepen in dit onderwerp.

B. Moonen



N. Manton and P. Sutcliffe
Topological Solitons

Cambridge Monographs on Mathematical Physics
Cambridge: Cambridge University Press, 2004
493 p., prijs £75,-
ISBN 0-521-83836-3

The subject of topological solitons has its origins in physics and is motivated by the desire to construct mathematical models for stable, spatially extended but localized physical structures. Examples are magnetic vortices in superconductors and atomic nuclei. In general mathematical terms, topological solitons are maps from a manifold X to another manifold Y which solve a non-linear (partial) differential equation, obey suitable boundary conditions and are homotopically non-trivial.

In this book the authors describe a theoretical framework for studying topological solitons, summarize relevant mathematical

Als je de titel leest van dit boek, is het niet moeilijk te raden aan wie het is opgedragen: Phillip Griffiths, van wie in het jaar

background and discuss in detail a number of examples such as kinks, lumps, global and gauged vortices, magnetic monopoles and Skyrmions. The last two chapters are devoted to localized solutions of classical field equations which, though not themselves topological solitons, are closely related to them: instantons (minima of the Yang-Mills action functional on $\mathbf{R}^4$) and unstable solutions, called sphalerons.

Topological solitons is written by two leading experts and provides a much needed summary of a research area which has developed rapidly since R. Rajaraman's textbook *Solitons and Instantons* written in 1982. Many of the developments have taken place in collaborations between theoretical physicists and pure mathematicians and are summarized here for the first time in a language which is accessible to both communities. They include the description of Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) monopoles in terms of Nahm data and rational maps and the geodesic approximation to soliton dynamics. The latter, proposed by the first author to approximate the interactive dynamics of several BPS monopoles, has inspired geometers to study the Riemannian geometry of monopole moduli spaces and has led, amongst others, to the discovery of the Atiyah-Hitchin manifold.

This book is a unique, up-to-date and authoritative resource for anyone who wants to learn about the latest developments in the field of topological solitons. Moreover, by clearly exhibiting the essential idea of any topic they discuss, the authors have succeeded in writing a book which should teach mathematicians much about physics and physicists much about mathematics. The book is accessible to graduate students in theoretical physics and mathematics and, despite the absence of exercises, could be used as a textbook for an advanced lecture course. A minor criticism concerns the rather short index which does not list some topics which are discussed in the book (e.g., Bianchi identity, Toda solitons) and the scarcity of cross referencing between sections (e.g., the notation K_k introduced on page 129, used again on page 446 without explanation). Hopefully this can be remedied in a future edition.

B. Schroers



M. Hazewinkel (ed.)
Handbook of Algebra, Volume III

Amsterdam : Elsevier Science, 2003

1161 p., prijs €195,00

ISBN 0-444-51264-0

Dit is het derde deel van het ambitieuze project *Handbook of Algebra*, opgesteld op de wijze zoals Michiel Hazewinkel dat voor ogen staat. Dat wil zeggen, 'wat een schrijver der bijdragen klaar heeft ter publicatie, wordt zo gauw mogelijk als Handbook-hoofdstuk uitgebracht'. Voor informatie over de gevolgde werkwijze en opzet, zij de lezer verwezen naar de recensie van de delen 1 en 2, zoals afgedrukt op blz. 267, NAW, vijfde serie, deel 3, september 2002, alsmede ook naar de inleidende beschouwingen in elk der drie delen.

In het derde en, naar de reviewer aanneemt, ook in de daarop volgende delen, wordt nadruk gelegd op een opbouw die meer

'elementair materiaal, recente ontwikkelingen, actieve gebieden' (vertaald citaat, RvdW) biedt. Dat heeft de grote verdienste dat, hoewel soms specialistisch, de bijdragen aan de soms onkundige doch geïnteresseerde lezer weliswaar niet ab ovo, maar toch in leerboekstijl worden gepresenteerd. Al lezende, ervoer uw recensent dit als een groot voordeel, waardoor dit deel gezien kon worden als een verzameling boekjes, lopende inhoudelijk tot in onze tijd, en met heel veel bekend en nieuw minder bekend referentiemateriaal. Wel, dan nu naar de inhoud.

Bij de sectie Linear Algebra vinden we: J.A. Hermida-Alonzo *On linear algebra over commutative rings*; in de sectie Category Theory schrijft E. Manes over *Monads of sets*. Bij de sectie Algebraic K-Theory gaat het om A. Kuku: *Classical algebraic K-theory: The functors K_0, K_1, K_2* . Bij de sectie Model Theoretic Algebra heeft M. Prest het over *Model theory for algebras*; dezelfde auteur vervolgt met *Model theory and models*. Dan, bij de sectie Commutative Rings and Algebras zien we van de hand van R.H. Villareal *Monomial algebras and polyhedral geometry* verschijnen. En dan, in de sectie Associative Rings and Algebras zien we een groot aantal bijdragen voorbijkomen: *Flat covers* van E.E. Enochs, *The Krull-Schmidt theorem* van A. Faccini, *Coherent rings and annihilator conditions in matrix and polynomial rings* van C. Faith, *Hamilton's quaternions* van T.Y. Lam, *Group rings* van S.K. Sehgal en ten slotte twee bijdragen van A. Turganbaev. Als u dit allemaal heeft verwerkt, dan bent u halfweg deel 3 van het Handbook gekomen. Verder bevat het Handbook bijdragen over Coassociative Coalgebras, Frames, Quasivarieties, Free Lie Algebras, zogeheten Yangians and their applications, Lambda-rings, dit alles behelzende een totaal van 397 bladzijden. Deel 3 van het Handbook besluit met de bijdrage van L. Bartholdi, R.I. Grigorchuk, Z. Sunik *Branch groups* in de sectie Groups and Semigroups.

Zoals gezegd, alle bijdragen zijn voortreffelijk geschreven, opbouwend met recente resultaten en van veel referenties voorzien. Het is ondoenlijk om hier inhoudelijk op details in te gaan. Neem dit deel ter hand en ontdek zelf dat uw algebrakennis blijkbaar nogal wat aanvulling behoeft, juist ook daarom, omdat er de laatste twintig jaren toch wel heel veel bijgekomen is. Uw reviewer heeft vooral de bijdragen in de secties Associative Rings and Algebras, Algebraic K-Theory en Groups and Semigroups met veel plezier tot zich genomen.

R.W. van der Waall



Y. Pinchover, J. Rubinstein
An Introduction to Partial Differential Equations

Cambridge: Cambridge University Press, 2005

371 p., prijs £65.00

ISBN 0-521-84886-5

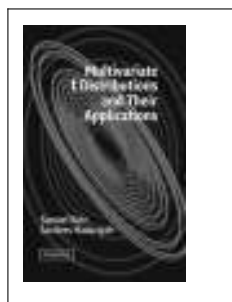
Dit boek is duidelijk bedoeld als een eerste kennismaking met partiële differentiaalvergelijkingen. Iedereen met wat voorkennis van calculus en gewone differentiaalvergelijkingen, en die weet wat een partiële afgeleide is, zou dit boek moeten kunnen lezen. Het boek bespreekt voornamelijk de klassieke theorie, dat wil zeggen dat er (op enkele plekken na) niet over functieruimten en

zwakke oplossingen wordt gesproken. Na een inleidend hoofdstuk, wordt een hoofdstuk aan eerste-ordevergelijkingen gewijd. Het derde hoofdstuk behandelt tweede-ordevergelijkingen en hun classificatie, en ook in de rest van het boek ligt de nadruk op tweede-ordevergelijkingen. Zo wordt de methode van scheiding van variabelen besproken voor alle drie de canonieke gedaanten van tweede-ordevergelijkingen. De theoretische rechtvaardiging van deze methode wordt gepresenteerd in een hoofdstuk over eigenwaardenproblemen. Verder behoort de integraalrepresentatie van oplossingen door middel van Greense functies, tot de behandelde klassieke theorie.

De laatste twee hoofdstukken wijzen de lezer de weg naar de wat modernere ontwikkelingen op het gebied van partiële differentiaalvergelijkingen. Het voorlaatste hoofdstuk behandelt variationele methoden en in deze context worden functieruimten en het begrip zwakke oplossing geïntroduceerd. Het boek sluit af met een hoofdstuk over numerieke methoden. Deze laatste twee hoofdstukken zijn slechts een zeer kort overzicht van twee grote wiskundige deelgebieden, iets wat de auteurs ook beseffen en waar ze dan ook melding van maken. De lezer die meer wil weten, wordt verder geholpen met relevante referenties.

Een studieboek over partiële differentiaalvergelijkingen kan niet zonder de behandeling van toepassingen. Dit gebeurt dan ook op verschillende plaatsen in het besproken boek. Zo wordt bijvoorbeeld de golfvergelijking voor een trillende snaar afgeleid op grond van fysische argumenten. Andersom worden ook theoretisch verkregen resultaten terugvertaald naar de toepassing.

Wat verder bij het lezen opvalt, zijn de vele historische feiten en achtergronden die in het boek vermeld worden. Vooral bij de historische naamgeving van wiskundige termen wordt stilgestaan. U moet hierbij denken aan termen zoals het Cauchyprobleem, de Fourierreeks, enzovoort. Hier en daar wordt het exposé zelfs onderbroken voor een kleine anecdote. Dit laat zien dat de ontwikkeling van wiskundige theorie mensenwerk is, iets wat in lang niet alle studieboeken naar voren komt. Het zorgt er bovendien voor dat het een voor de beginner op het gebied van de partiële differentiaalvergelijkingen prettig leesbaar boek is, zonder dat de wiskundige gedegenheid in het geding komt. T.L. van Noorden



S. Kotz, S. Nadarajah
Multivariate t Distributions and Their Applications

Cambridge: Cambridge University Press, 2004
284 p., £45,-
ISBN 0-521-82654-3

Dit boek bevat een nagenoeg volledig overzicht van de onderzoeksresultaten over de multivariate t -verdeling. De eerste drie hoofdstukken behandelen rekentechnieken en formules voor marginale karakteristieke functies, verdelingen van lineaire combinaties en dergelijke. De hoofdstukken 4 en 5 bevatten formules en eigenschappen van aanverwante dichtheden en veralgemeningen. Daarna volgen uitdrukkingen en benaderingen voor de distributiefunctie en kansen over verschillende gebieden (kegels, po-

lyhedra, enzovoort). Geleidelijk verschuift de aandacht naar het schatten van de parameters in een multivariaat t -model. Het boek sluit af met een korte greep uit praktische toepassingen.

Samuel Kotz is bekend om zijn complete overzichten van stochastische verdelingen. In dit boek wordt een eerder beperkt gebied zeer grondig uitgediept. Het boek is dan ook vooral interessant als *het* naslagwerk voor onderzoekers die met de multivariate t -verdeling of aanverwante verdeling te maken krijgen. Een extra meerwaarde ten opzichte van de artikelen in de literatuur had dit boek gekregen als het ook bij de verschillende stellingen had aangegeven waarin de stelling en de aannames ervan het bewijs uniek maken. Zo wordt bijvoorbeeld op pagina 210 een resultaat van Maronna uit 1976 aangehaald waar 'under general assumptions' 'existence, uniqueness, consistency, and asymptotic normality' bewezen wordt. De geïnteresseerde lezer wil dan misschien weten waarom dit resultaat belangrijk of vernieuwend was, waarin het resultaat of de veronderstellingen afwijken van eerdere, klassieke stellingen. Het aansluitend overzicht in de tabel op pagina 211 biedt de lezer ook weinig inzicht als hij of zij de bijhorende artikelen niet raadpleegt. Blijkbaar heeft plaatsgebrek de auteurs doen kiezen voor volledigheid eerder dan voor een uitgebreide bespreking van de essentiële resultaten. Plaatsgebrek is ook de reden voor het eerder summiere overzicht van toepassingen. Het boek haalt op verschillende plaatsen aan, dat de besproken verdelingen van belang zijn in tal van toepassingen, zoals in economische data sets, maar het bevat jammer genoeg geen uitgewerkte data sets of voorbeelden. De lezer die niet vertrouwd is met de toepassingen en wil leren waar de multivariate t -verdeling opduikt, kan met dit boek moeilijk aan de slag.

Samengevat: als naslagwerk in het gebied is dit boek voortreffelijk en zeer volledig. Voor nieuwsgierige lezers van buitenaf biedt het boek wat minder aanknopingspunten. M. Jansen



N.L. Carothers
A Short Course on Banach Space Theory

London Mathematical Society Student Texts,
64
Cambridge: Cambridge University Press, 2005
196 p., prijs £45.00
ISBN 0-521-84283-2

Dit vlot geschreven boekje is bedoeld voor eenieder met enige basiskennis van (functionaal)analyse, topologie en Lebesgue-integratie. Er worden 'klassieke' resultaten gepresenteerd, waarbij de ruimten c_0 , ℓ_p , L_p , $C(X)$ — die allereerst worden beschreven — het uitgangspunt zijn. De studie van deze ruimten vormt dan vervolgens de rode draad in het verhaal. Hierbij wordt het accent gelegd op isomorfismen, deelruimten, quotiënten en Schauderbases. (Een kleine greep ter illustratie: oneindigdimensionale gecomplementeerde deelruimten van ℓ_p zijn isomorf met ℓ_p ; $L_p \not\sim L_q$ zodra $p \neq q$; continue lineaire afbeeldingen $c_0 \rightarrow \ell_p$ zijn compact; separabele Banachruimten zijn inbedbaar in $C[0, 1]$; Schauder-, Haar-, Rademackersystemen.)

Als er aanleiding toe is worden er onderweg uitstapjes gemaakt naar een abstracter niveau (reflexiviteit, zwakke compactheid, uniforme convexiteit, de Dunford-Pettiseigenschap, Stone-Čech-

compactificatie).

Het is een leuke manier om de niet-ingewijde een indruk te geven van de verscheidenheid aan stellingen en technieken. Tegelijkertijd is het een rijke ideeënbron voor docenten en onderzoekers. De tekst is onderhoudend. Jammer dat er aan de inleiding en appendix weinig zorg is besteed. Enkele voorbeelden: er worden begrippen gehanteerd die pas later gedefinieerd worden, maar zonder behoorlijke verwijzing. Ook de context is vaak niet duidelijk. Bijvoorbeeld, op bladzijde 17 wordt de stelling van de gesloten grafiek gebruikt, maar voor een *genormeerde* ruimte en nergens is er een aanwijzing dat het hier wel om een Banachruimte zal moeten gaan. Op blz. 166 wordt beweerd dat een compact deel van een topologische ruimte X gesloten is. Ach, denk je dan, hij is even vergeten de Hausdorff-eigenschap te eisen. Maar nee, enige regels later komen de Hausdorffruimten ten tonele plus de geslotenheid van compacta in deze ruimten! Dieptepunt is het begrip 'complemented subspace' dat zonder waarschuwing drie verschillende betekenissen krijgt op respectievelijk de bladzijden 8, 16 en 17. Tenslotte zijn er nog de echte onjuistheden. Ik noem er één: op blz. 5 wordt beweerd dat $C(X)$ met de compact-open-topologie metriseerbaar is zodra X σ -compact is. Maar $X := \mathbb{Q}$ geeft een tegenvoorbeeld. (Metriseerbaarheid volgt wel als X hemicompact is.)

Waarschuwing: Zonder goede bijsluiters niet in handen geven van onervaren studenten! Verder wel de moeite waard.

W. Schikhof



J.D. Achenbach

Reciprocity in Elastodynamics

Cambridge Monographs on Mechanics

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

255 p., prijs £53.00

ISBN 0-521-81734-X

Het reciprociteitsbeginsel is een algemeen bekend, klassiek principe in de continuümfysica met toepassingen op tal van gebieden. De basis van toepassingen van reciprociteit op elastische systemen (bijvoorbeeld het Theorema van Betti) ligt al in de negentiende eeuw. Toch is er in de moderne literatuur weinig over dit principe gepubliceerd. Dit hiaat wordt voor een groot deel opgevuld door dit boek dat vooral ingaat op toepassingen op elastodynamische problemen. Het presenteert een heel scala aan nieuwe toepassingen op vooral tijd-harmonische problemen (elastische golven en trillingen). Naast nieuwe aanpakken van oude, bekende, problemen worden ook tal van nieuwe problemen beschreven. De aanpak is altijd elegant, dikwijls verrassend, en soms ook wel verrassend eenvoudig. Dit maakt een (nadere) kennismaking met deze originele aanpak zeer de moeite waard.

De indeling van het boek is globaal als volgt. De hoofdstukken 1, 2 en 3 geven een inleiding in het algemene idee van reciprociteit, de basis van de elastodynamica en de theorie van golven in oneindige elastische media.

In de hoofdstukken 4 tot en met 6 wordt een aantal elementaire voorbeelden, waarvan de oplossing al via andere methoden (bijvoorbeeld Fouriertransformatie) bekend is, besproken en hun

oplossing wordt met behulp van reciprociteit gegeven. Deze voorbeelden komen uit de akoestiek of uit de elastodynamica, en hebben steeds een tijd-harmonisch karakter. De essentie van de toepassing van reciprociteit ligt altijd in het vinden van een geschikte virtuele golf, welke de reciproke belastingstoestand representeert. Specifieke voorbeelden hier zijn de 1-D golfbeweging en daarin de reflectie aan een interface, of de reflectie van elastische golven aan een vrij oppervlak.

In de hoofdstukken 7–10 worden elastische oppervlaktegolven (Rayleigh waves) en golven door elastische lagen (Lamb waves) behandeld, zowel meer klassiek als met de reciprociteitmethode. Voorbeelden zijn de propagatie van vrije golven door elastische lagen en golven ten gevolge van een dynamische puntkracht in een elastische laag.

De hoofdstukken 11 en 12 bespreken de verstrooiing van elastische golven. Er wordt uitgegaan van een integraal-representatie, en een oplossing gebruikmakende van reciprociteit wordt aangegeven. Voorbeelden zijn verstrooiing aan een scheur of aan een inhomogeniteit.

De laatste twee hoofdstukken bespreken interacties van elastische velden met achtereenvolgens akoestische en piezo-elektrische velden. Voorbeelden zijn de wisselwerking tussen geluidsgolven en trillingen van elastische structuren, en reflectie en transmissie aan een scheur in een piezo-elastisch medium.

Samenvattend kan gezegd worden dat de voorgestelde aanpakken helder en duidelijk gepresenteerd worden. De zeer ervaren auteur toont zich hierin een meester en heeft hiermee een zeer lezenswaardig werk afgeleverd. De titel lijkt wellicht op een vrij eenzijdige methodiek te wijzen, maar de grote variatie in de gepresenteerde toepassingsgebieden en voorbeelden toont het tegendeel aan. De technisch meest relevante nieuwe toepassing van de gepresenteerde techniek lijken mij te liggen in de analyse van (niet-destructieve) detectie van scheuren of insluitsels (oliebronnen) door middel van hoog-frequente akoestische of elastische golven. Ik denk dat dit boek zowel interessant kan zijn voor meer theoretisch ingestelde studenten en onderzoekers in de elastodynamica of akoestiek als voor meer praktijk-gerichten in bijvoorbeeld geofysica of seismologie.

Ik kan dit boek van harte aanbevelen aan iedereen die geïnteresseerd is in een van bovengenoemde gebieden en die kennis wil nemen van deze originele en elegante methode.

A.A.F. van de Ven

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone. For each problem the most elegant correct solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The judges reserve the right to withdraw the prize if none of the solutions is deemed worthy. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

Occasionally there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro. Both suggestions for problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarechief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this edition is September 1, 2008.

Problem A (proposed by Ovidiu Furdui)

Denote the fractional part of a positive real number x by $\{x\}$, for example $\{\pi\} = \pi - 3$. Evaluate the following double integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{x}{y} \right\} \left\{ \frac{y}{x} \right\} dx dy.$$

Problem B (Folklore)

Let S be a set consisting of 15 integers, and such that for all $s \in S$ there exist $a, b \in S$ with $s = a + b$.

1. Show that there exists a non-empty subset $T \subset S$ of at most seven elements that add up to 0.
2. Show that this does not need to be true for S with 16 elements.

Problem C (Proposed by the Arithmetic Geometry group of Leiden University)

Let $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ be a C^∞ function (that is, all higher derivatives of f exist and are continuous) such that

1. $f(x) = 0$ if $x \leq 0$,
2. $f(x) > 0$ if $x > 0$.

Is it true that $\sqrt{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ is a C^1 function (that is, that its derivative exists and is continuous)?

Edition 2007/3

For Edition 2007/3 we received submissions from Birgit van Dalen (Leiden), Reza Takapoui (Delft), Kee-Wai Lau (Hong Kong), Michiel Vermeulen *et al.* (Zwaanshoek), Konstantine Zelator (Toledo, Ohio).

Problem 2007/3-A Let a be an integer. Let $(x_n)_n$ be the sequence determined by $x_1 = a$ and $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. Show that n and x_n are coprime for all n .

Solution We present the solution given (independently) by Birgit van Dalen and Kee-Wai Lau. This problem was also solved by Konstantine Zelator.

We must show that for all primes p and for all $k > 0$ we have that p does not divide x_{kp} . Consider the sequence modulo a prime p . If $0 \bmod p$ does not occur in the sequence then we are done. If not, there is a smallest positive integer m such that $x_m \equiv 0 \bmod p$. It follows that x_i is not congruent to 1 or $-1 \bmod p$ for $1 \leq i < m$ for otherwise we would have $x_j \equiv 1 \bmod p$ for all $j > i$. Also, the $x_1, \dots, x_{m-1}$ are pairwise distinct $\bmod p$, since if $x_i \equiv x_j \bmod p$ with $1 \leq i < j < m$ then from i on the sequence $\bmod p$ is periodic with period $j - i$, contradicting the minimality of m . We conclude that $m = 1$ if $p = 2$

Eindredactie:

Lenny Taelman, Johan Bosman

Redactieadres:

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

uwc@nieuwarechief.nl

and $m \leq p - 2$ if p is odd. It now suffices to observe that $x_{m+1} \equiv -1$ and $x_{m+k} \equiv 1$ for all $k > 1$.

Problem 2007/3-B Let G be a group with n elements and $S \subset G$ a non-empty subset. Show that the set

$$S^n = \{s_1 s_2 \cdots s_n \mid s_i \in S\}$$

is a subgroup of G .

Solution This problem was solved by Michiel Vermeulen *et al.* and Reza Takapoui. Their solutions are similar to one another and to the one we present here.

Choose an element s of S . Since $sS^i \subset S^{i+1}$ we have that the sequence of cardinalities $\#S, \#S^2, \#S^3, \dots$ is non-decreasing. Note that if $\#S^i = \#S^{i+1}$ then

$$\#S^{i+1} = \#S^{i+2} = \#S^{i+3} = \dots$$

Indeed, this is clear from

$$sS^{i+1} = sS^i S = S^{i+1} S = S^{i+2}.$$

As the cardinalities are bounded by n , it follows that

$$\#S^n = \#S^{n+1} = \dots$$

Clearly $e = s^n$ lies in S^n , hence $S^n \subset S^{2n}$. By the above we have $S^n = S^{2n}$ and hence it follows that S is closed under multiplication and that S is a subgroup.

Problem 2007/3-C (a) Given 2007 points in the plane such that no pair has distance strictly less than one, show that one can find a subset of 288 points in which no pair has distance strictly less than $\sqrt{3}$.

(b)* Supposedly the number 288 in part (a) is not optimal. Find upper and lower bounds for the optimal value.

Solution Unfortunately we received no submissions for Problem C. We present our own solution to (a). We would like to stress that the Star Problem (b) is still open for competition, with a 100 euro book token prize. Deadline: September 1, 2008.

First we introduce some notation. Given a finite set $S \subset \mathbb{R}^2$ such that no pair of elements of S has distance strictly less than one we define $f(S)$ as the maximum size of a subset in which no pair of elements has distance strictly less than $\sqrt{3}$. For a positive integer n we define $f(n)$ to be the minimum of the $f(S)$ over all S of cardinality n .

Theorem. For $n \geq 6$, the inequalities

$$\left\lfloor \frac{n+9}{7} \right\rfloor \leq f(n) \leq \lceil n/5 \rceil$$

hold.

In particular this gives $288 \leq f(2007) \leq 402$.

To see the upper bound: take S to consist of clusters of 5 points (plus a residue cluster if necessary). The main ingredient in the proof of the lower bound is the following lemma.

Lemma. $f(n+7) \geq f(n) + 1$ for all $n > 0$.

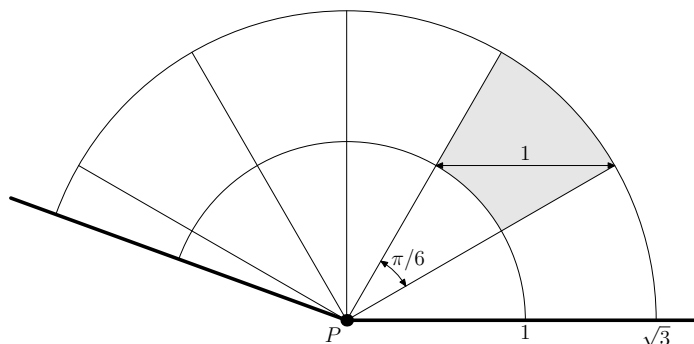
Proof of the lemma

Let S be such that $\#S$ equals $n+7$ and $f(S)$ is minimal, that is $f(S) = f(n+7)$. Pick a point $P \in S$ on the boundary of the convex hull of S . Denote by $S' \subset S$ the subset of

points that have distance at least $\sqrt{3}$ from P .

Claim: $\#S' \geq \#S - 7 = n$.

Indeed, see the picture: in any area such as the shaded one there can be at most one point of $S - S'$.



Now to finish the proof of the lemma consider a $T' \subset S'$ of cardinality $f(S')$ and such that the distance between any pair of distinct points of T' is at least $\sqrt{3}$. Then the same is true for $T := T' \cup \{P\} \subset S$ and hence

$$f(n+7) = f(S) \geq \#T = f(S') + 1 \geq f(n) + 1$$

where the last inequality follows from the claim and from the fact that f is a non-decreasing function of n .

Proof of the lower bound

By the lemma it suffices to show $f(6) \geq 2$ and $f(12) \geq 3$. This follows from essentially the same argument as the one given in the lemma, using that given a set S of 12 (resp. 6) points in the plane there is always a point P on the boundary of its convex hull such that the boundary forms an angle of at most $5\pi/6$ (resp. $2\pi/3$) at P .

