

Inhoud

| Contents

- 234 Colofon
- 235 Redactioneel *Derk Pik*
- 236 Agenda
- 238 Nieuws

Oraties | Lectures

- 244 De kracht van wiskundig modelleren *Jaap Molenaar*
- 252 Ik leg het nog één keer uit *Henk van der Vorst*

Onderzoek | Research

- 260 Pompje helpt hartpatiënten *Bennie Mols*
- 266 Slimme inzet van KLM-reservecrew *Bennie Mols*
- 268 Chips schrijven met een beamer *Bennie Mols*

Onderwijs | Education

- 270 Differentiaalvergelijkingen, oscillaties en planeetbanen *Joost Hulshof*
- 287 Dubbelplaneten *Rainer Kaenders*

Samenleving | Society

- 262 CWI: Een fundamenteel verschil *Jan Heering, Mark Mieras*
- 264 Presentatie Brouwer Postzegel *Joris Bierkens*
- 278 Eulerconferentie aritmetische meetkunde *Bas Edixhoven*
- 282 5ECM in Amsterdam *Jan Wiegerinck, André Ran, Herman te Riele*

Rubrieken | Departments

- 251 De favoriet van László Lovász *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
- 281 Canadian Winter *Reinier Bröker*
- 299 Boekbesprekingen
- 305 Problemen

Evidence based

Een belangrijk thema in het rapport *Leerkracht* van de commissie Rinnooy Kan is het zogenaamde evidence based onderwijs. Grofweg is een onderwijsvernieuwing *evidence based* te noemen, wanneer de methode wordt ingevoerd nadat wetenschappelijk onderzoek haar werking heeft bewezen. De bewijzen moeten bovendien zoveel mogelijk tot stand komen door middel van harde onderzoeksmethoden zoals gerandomiseerde steekproeven met controlegroep (zie het rapport van de Onderwijsraad *Naar een meer evidence based onderwijs*, 2006). Bij politieke en beleidsmatige onderwijsvernieuwingen is dit niet de gangbare praktijk.

Het principe, afkomstig uit de geneeskunde, is ontwikkeld door de Schotse epidemioloog Archie Cochrane. In zijn boek *Effectiveness and Efficiency: Random Reflections on Health Services* (1972) classificeert hij verschillende niveaus van bewijs, met als hoogste niveau het bewijs door gerandomiseerde gecontroleerde steekproeven en als laagste niveau de mening van experts, gebaseerd op klinische ervaring. Ook worden oudere methoden voortdurend verbeterd door constante screening van de meest recente literatuur. Reviews worden geschreven en herzien en meta-analyses uitgevoerd, die terechtkomen in de voor iedereen toegankelijke Cochrane library. Deze benadering is nu algemeen geaccepteerd als de beste manier om de kwaliteit van het medisch handelen te bewaken.

Het is zeker niet de eerste keer dat deze methode van kwaliteitsbeheersing in verband wordt gebracht met onderwijsvernieuwingen, vooral omdat vele grote veranderingen in het onderwijs juist zijn geïntroduceerd zonder ze vooraf te testen. De evidence based benadering wordt nog eens zo belangrijk, nu zich in het onderwijsveld grote veranderingen voordoen waarvan de gevolgen maar moeilijk te overzien zijn.

Ten eerste zijn er voortdurend heftige discussies in de samenleving over het doel van het onderwijs. Moet je leren rekenen of leren leren, moet je alles zelf ontdekken of moet je je gevestigde theorieën eigen maken. Scholen zouden bij dergelijke vragen een veel grotere rol moeten spelen dan nu het geval is, zodat leerlingen en ouders kunnen kiezen.

Ten tweede is het opleidingsniveau van de docenten de laatste tientallen jaren nogal achteruitgegaan. Bovendien wordt er op vrijwel alle scholen aan docenten gevraagd om vakken te geven waarvoor ze niet zijn opgeleid: een uit nood ontstaan verschijnsel. Men moet respect hebben voor docenten die zo'n taak op zich nemen, het is echter ook een onwenselijke situatie. Docenten baseren zich dus in toenemende mate op het lesmateriaal, de schoolboeken, en daarvan neemt de kwaliteit eveneens af.

Sinds tijden hebben we in Nederland eigenlijk slechts twee grote wiskundemethoden: *Moderne Wiskunde (MW)* en *Getal en Ruimte (GR)*. Ze staan tegenwoordig vol slordigheden. In de eens zo gerenommeerde methode *Getal en Ruimte* voor het derde jaar vmbo-t staat het hele hoofdstuk 6 lang een foute formule voor de oppervlakte van een driehoek. In dezelfde methode in het

vierde leerjaar wordt een overzicht van te beheersen stof gegeven waar een cosinus met een sinus wordt verward (*GR*, deel 4TGk2, blz. 109). Is er onder de dertien auteurs die voorin het boek zijn afgedrukt echt niemand die dit is opgevallen? In de methode *Moderne Wiskunde* vinden we voor positieve gehele n : 'de n -de machtswortel uit x is het getal waarvan de n -de macht gelijk is aan x ' (*MW*, vwo4-b, blz 99). De notie $x^{1/3}$ wordt bovendien ingevoerd voor alle reële getallen x (dus ook negatieve) waarna een opmerking volgt dat 'regels tot tegenspraken kunnen leiden'. Dan wil je zo'n definitie toch niet! Dit is slechts een kleine greep uit een grote lijst.

Op een meer fundamenteel niveau is er eigenlijk nog veel meer verkeerd, bijvoorbeeld in *Moderne Wiskunde (MW)* voor vwo4-b leren de leerlingen differentiëren zonder kennis van limieten. Vwo-5 leerlingen komen er door proberen achter dat $\sin x + \cos x = 1.41 \sin(x + 0.79)$. Waarom dit zo is, komt helemaal niet aan bod, laat staan de exacte waarden die op de plaats van 1.41 en 0.79 hadden moeten staan. Ter informatie: nergens in het hoofdstuk staat een formule voor de sinus van de som van twee hoeken. Nergens is er een moment dat leerlingen nog zelf hoeven te rekenen: dit wordt overgelaten aan de rekenmachine. Alle getallen lijken op elkaar; elke structuur is er uit verwijderd.

Beide methoden zijn zo ver losgezongen van wat er in de exacte wereld, buiten de school, gangbaar is, dat ze in handen van zwak opgeleide docenten wel tot onzinnige resultaten moeten leiden. Alleen al de grote verandering van het docentencorps is voldoende aanleiding om het rendement van de lesmethodes gedetailleerd en herhaaldelijk te toetsen. Wiskundigen aan de universiteiten zouden daar ook een rol in moeten spelen.

Op de universiteit is de inhoud van de middelbare schoolboeken echter al lang in quarantaine geplaatst van didactische opleidingsinstituten. De meeste wiskundigen aan de universiteit zijn er totaal niet in geïnteresseerd. Dit blijkt uit het feit dat schoolboeken in de meeste universiteitsbibliotheken ontbreken. Op de middelbare school is het schoolboek vaak de enig beschikbare routekaart en heeft daardoor een allesbepalende status. Zeker met de grote lerarentekorten moet het lesmateriaal in orde zijn.

De evidence based benadering kan een uitweg bieden aan de vaak bittere standpuntenoorlog tussen de diverse partijen in het onderwijs. Deze discussie zou enorm opknappen van een objectieve benadering. Bovendien hoeven we dan ook niet meer de gehele Nederlandse leerlingenpopulatie als proefkonijn te gebruiken.

Derk Pik
eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
drpik@math.leidenuniv.nl

Agenda

Upcoming Events

december 2007

3 – 7 december

□ Algorithmic Bioprocesses

Workshop over algoritmische bioprocesses, met name algoritmische zelfassemblage, RNA-vouwing, algoritmische grondslagen voor biochemische reacties

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

7 december

□ Berekend op de Toekomst?

Lustrumsymposium van de *Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs* over de vraag: wat is de kern van goed reken-wiskundeonderwijs?

info www.platformvvo.nl/vvo/verenigingen/nvoro.html

10 – 11 december

□ Multivariate Risk Management

Workshop met als focus de onderzoeksmethodologie

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

januari 2008

7 – 11 januari 2008

□ Multiscale Modeling and Singular Perturbations

Sprekers: Henk Broer, Arjen Doelman, Tasso Kaper en Martin Krupa

plaats De Reehorst, Ede

info wwwhome.math.utwente.nl/~meijerhge/announcement.pdf

11 januari 2008

□ Dertiende rekenconferentie

Landelijke rekenconferentie 'Zorg voor rekenen'

plaats De Reehorst, Ede

info www.seminarium.nl

12 januari 2008

□ Wintersymposium KWG

Thema: kopstukken uit de vaderlandse geschiedenis

plaats Academiegebouw Universiteit Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

15 – 17 januari 2008

□ 33rd Conference on Mathematics of Operations Research

Jaarlijkse bijeenkomst van het LNMB, met op 17 januari een seminar over Operations Research and Energy

plaats Lunteren

info www.lnmb.nl/conferences/lunteren2008

16 – 18 januari 2008

□ Numerical Approach of Oscillatory Functions

Sprekers: J. Vigo Aguiar, B. Paternoster, T. Vertse en S. Scott

plaats Gent

info www.naof.ugent.be

17 – 19 januari 2008

□ 25ste Panama Conferentie

Conferentie over een groot aantal actuele zaken die spelen in het rekenonderwijs

plaats Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

21 – 23 januari 2008

□ 7e Winter School Mathematical Finance

Twee minicursussen over Lévy Models en Life Insurance and Pensions gegeven door Ernst Eberlein en Ragnar Norberg

plaats Lunteren

info remote.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool.html

21 – 25 januari 2008

□ 62nd Study Group with Industry

Europese Studiegroep Wiskunde en Industrie, de eerste die in Ierland gehouden wordt

plaats Limerick, Ireland

info www.macs.ie/esgi62

23 – 25 januari 2008

□ 26e Panama Conferentie

Conferentie over reken- en wiskundeonderwijs

plaats Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

25 januari 2008

❑ Nederlandse Wiskunde Olympiade

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De resultaten worden medio maart bekend gemaakt. De uitreiking van de scholenprijs vindt plaats in maart of april op de winnende school.

plaats *Participerende scholen*

info olympiads.win.tue.nl/nwo/1er-tijdlijn.html

28 januari – 1 februari 2008

❑ 63rd Study Group Mathematics with Industry

De Europese Studiegroep Wiskunde en Industrie in Nederland. Wiskundigen en mensen uit de industrie werken een week lang samen om industriële problemen op te lossen.

plaats *Universiteit Twente*

info wwwhome.math.utwente.nl/~swiz2008

februari 2008

1 – 2 februari 2008

❑ Nationale Wiskundedagen

Dag voor leraren wiskunde in het voortgezet onderwijs. Plenaire sprekers: Hester Bijl, Rob Eastaway en Frits Beukers

plaats *Noordwijkerhout*

info www.fi.uu.nl/nwd

24 – 28 februari 2008

❑ Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students

Internationale conferentie met als thema *research and promotion of creativity and giftedness in mathematics*

plaats *Israël*

info cmeg-5.edu.haifa.ac.il

maart – juli 2008

4 – 7 maart 2008

❑ GOCPS 2008

De achtste Duitse open conferentie over kansrekening en statistiek

plaats *Aken, Duitsland*

info gocps2008.rwth-aachen.de

13 – 14 maart 2008

❑ Finale Wiskunde A-lympiade 2008

Finale van de jaarlijkse scholierenwedstrijd

plaats *Garderen*

info www.fi.uu.nl/alympiade

27 – 28 maart 2008

❑ Nationale Rekendagen

Ontmoetingsplaats voor leerkrachten basisonderwijs, met de thema's gecijferdheid, bijzondere rekenaars en tijd

plaats *Leeuwenhorst Congresscentrum, Noordwijkerhout*

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

2 – 11 april 2008

❑ Multivariate analyse: toepassing op ecologische en moleculaire gegevens

Technieken en methoden voor gegevensverwerking

plaats *Wageningen Business School*

info www.wbs.wur.nl

16 april 2008

❑ Grote Rekendag 2008

Zesde editie van deze jaarlijks terugkerende dag waarop basisscholen de kans krijgen om op een speciale manier met rekenen en wiskunde bezig te zijn. Het thema dit jaar is *tijd*.

plaats *Deelnemende scholen*

info www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag

17 – 19 april 2008

❑ 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics

Thema's: aspecten van de didactiek van rekenkunde en algebra; het onderwijzen en leren van meetkunde

plaats *University of Crete, Griekenland*

info www.edc.uoc.gr/5colloquium

19 – 30 mei 2008

❑ Network Synchronization: from dynamical systems to neuroscience

Synchronisatie in dynamische systemen en niet-lineaire data-analyse

plaats *Lorentz Center, Leiden*

info lc.leidenuniv.nl

23 mei 2008

❑ LIMO 2008

De vierde Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade voor bachelorstudenten wiskunde.

plaats *Universiteit Leiden, Snelliusgebouw*

info www.limo2008.nl

11 – 13 juni 2008

❑ HPOPT 2008

Tiende internationale workshop over *high performance optimization techniques: algebraic structure in semidefinite programming*. Thema: symmetrie in semidefiniet programmeren

plaats *Universiteit van Tilburg*

info www.uvt.nl/~edeklerk/hpopt2008

26 – 28 juni 2008

❑ WNI 2008

Workshop over *nonparametric inference*

plaats *Coimbra, Portugal*

info www.mat.uc.pt/~wni2008

30 juni – 4 juli 2008

❑ ICMI/IASE Study

Studiegroep *Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education*

plaats *Monterrey, Mexico*

info www.ugr.es/~icmi/iase_study

6 – 13 juli 2008

❑ ICME11

Elfde editie van het *International Congress on Mathematical Education*

plaats *Monterrey, Mexico*

info www.icme11.org.mx/icme11

7 – 11 juli 2008

❑ The Geometric Langlands Program

Workshop georganiseerd door het onderzoekscuster *Geometry and Quantum Theory* als nevenactiviteit van het *Fifth European Congress of Mathematics*

plaats *Lorentz Center, Leiden*

info lc.leidenuniv.nl

13 – 18 juli 2008

❑ Fifth European Congress of Mathematics

Europees wiskundige congres onder de auspiciën van de *European Mathematical Society* en het *Koninklijk Wiskundig Genootschap*, georganiseerd door het CWI, de UVA en de VU

plaats *RAI, Amsterdam*

info www.5ecm.nl

21 – 25 juli 2008

❑ Operator Structures and Dynamical Systems

Workshop als nevenactiviteit van het *Fifth European Congress of Mathematics* over de relatie tussen dynamische systemen en de daaraan verbonden operatorstructuren

plaats *Lorentz Center, Leiden*

info lc.leidenuniv.nl

Nieuws

| News

Wiskundetoernooi 2007

Op vrijdag 21 september vond alweer voor de zestiende keer aan de *Radboud Universiteit* in Nijmegen het *Wiskundetoernooi* plaats. Maar liefst honderd teams van scholieren deden mee aan deze spannende wedstrijd, waaronder ook teams uit België en Duitsland.

Om elf uur verzamelden de vijfhonderd scholieren zich in het Gymnasium en werd de aftrap gegeven voor de Estafette, een teamwedstrijd waarbij binnen een uur zoveel mogelijk opgaven opgelost moeten worden. De scores van de teams werden live bijgehouden op grote scoreborden in de zaal. Na een uur zweten op problemen over damstenen, wielervedstrijden en draaideuren werd het eindsignaal gegeven en kon er nog van hartelust nagepraat worden onderweg naar de welverdiende lunch.

Ook tijdens de lunch was er van alles te beleven. Met de *math machine* kon je de wiskunde achter de mp3's beleven, terwijl ondertussen bij de *Talent&Pro Kubuscompetitie* de meest onwaarschijnlijke tijden werden neergezet voor het oplossen van een Rubiks kubus.

's Middags volgde het tweede wedstrijdonderdeel, waarbij een aandelenhandel gesimuleerd werd. De scholierenteams konden in vier rondes aandelen en opties kopen en verkopen, met natuurlijk als doel om zoveel mogelijk geld te verdienen. Dit werd het beste gedaan door het team van het *Stedelijk Gymnasium Breda*, wat daarmee ook de hoogste totaalscore en een reis naar New York in de wacht sleepte. Ook de tweede prijs was een reis naar New York en deze is gewonnen door het team van het *Barleaus Gymnasium* te Amsterdam. Voor het team van het *College Hageveld* te Heemstede, dat de derde plaats behaalde, waren er Mac Minicomputers als prijs.

Al met al hebben honderden scholieren een leuke dag beleefd in Nijmegen en mag het zestiende *Wiskundetoernooi* een groot succes genoemd worden.

Birgit van Dalen



foto: Birgit van Dalen

Tijdens het *Wiskundetoernooi* wordt er pas echt gezweet in de gymzaal

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgevoerde activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

Wintersymposium: Wiskundehelden uit de Gouden Eeuw

Het wintersymposium van het KWG staat in het teken van drie wiskundehelden uit de 17e eeuw. Teun Koetsier, universitair hoofddocent geschiedenis van de wiskunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam, opent het symposium met een voordracht over Simon Stevin. Jan van Maanen, hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen, zal spreken over vader en zoons Van Schooten en Fokko Jan Dijksterhuis, universitair docent

wetenschapsgeschiedenis aan de Universiteit Twente, sluit het symposium af met een lezing over Christiaan Huygens.

Het symposium wordt gehouden op 12 januari 2008 in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht. Het programma start om tien uur en eindigt om ongeveer 14.45 uur. U kunt zich aanmelden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap www.wiskgenoot.nl. Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden. Leden van het KWG betalen 12,50 euro; niet-leden 17,50 euro.

Iris van Gulik



Grote toename instroom eerstejaars

De studie wiskunde mag zich dit jaar verheugen in een grote toename van het aantal studenten, zo blijkt uit de gegevens over de vooraanmeldingen bij de universiteiten van het Platform Bèta Techniek. De Radboud Universiteit gaat van 16 naar 29, de Rijksuniversiteit Groningen van 16 naar 18. Het aantal bij Universiteit Leiden groeit van 28 naar 34, bij de Universiteit Utrecht van 57 naar 77 (waarmee wiskunde in Utrecht de grootste groeier aan de bètafaculteit is). Ook in Amsterdam is de groei zichtbaar: van 21 naar 25 voor de Universiteit van Amsterdam en van 16 naar 20 aan de Vrije Universiteit.

Bedrijfswiskunde & Informatica aan het Vrije Universiteit heeft dit jaar 42 vooraanmeldingen tegenover 30 vorig jaar. Technische Wiskunde wordt op vier universiteiten aangeboden. De toename van het aantal vooraanmeldingen is opvallend: in totaal van 68 vorig jaar naar 115 dit jaar. De Rijksuniversiteit Groningen ging van 2 naar 3 en bij de Technische Universiteit Eindhoven ging het aantal van 21 naar 34. Bij de Technische Universiteit Delft was de toename van 24 naar 43 en bij de Universiteit Twente kon een toename van 21 naar 35 geregistreerd worden.

www.wiskundepersdienst.nl

Wiskunde voor veiligheid en betrouwbaarheid

Vrijdag 28 september kwamen zo'n vijftig aio's vanuit het hele land samen op het universiteitsterrein in Utrecht voor de Ph.D. day for Mathematicians. Dit is een evenement georganiseerd voor en door aio's met dit jaar als thema 'Safety and Prevention'.

De dag begon met een lezing van Jurgen Bos (*Equens Nederland*) over RFID-chips die vaak in autosleutels ingebouwd worden. De communicatie tussen de RFID-chip en auto wordt beschermd door een cryptografisch protocol. De spreker liet zien hoe deze cryptografische bescherming van een RFID-chip werd gebroken en hoe dit gebruikt kon worden om de auto te stelen.

De tweede spreker van de dag was Hans Heesterbeek (*Universiteit Utrecht*). Hij legde uit hoe wiskunde gebruikt kan worden om inzicht te verkrijgen in de verspreiding en beheersing van besmettelijke ziektes in populaties van mensen en dieren.

Na de lunch werd het programma vervolgd door Patrick Oonincx (*Nederlandse Defensie Academie*). Satelliet navigatie systemen zoals GPS waren het onderwerp van de lezing. Zijn lezing ging over welk soort wiskunde bij zulk soort systemen gebruikt wordt en welke nieuwe wiskundige algoritmes gebruikt kunnen worden om de verwerking van de gegevens verkregen van satellieten te verbeteren.

Patrick Oonincx werd gevolgd door Sanne Heesmans (*TNO Defensie en Veiligheid*). TNO is een strategische partner van het ministerie van defensie en in die hoedanigheid ontwikkelt het bedrijf methodes die tijdens militaire operaties gebruikt kunnen worden als beslissings-ondersteunende systemen. In deze lezing werden de eerste resultaten gepresenteerd van een onderzoek van TNO over welke methodes het beste op een eenvoudige manier de gevolgen van een beslissing kunnen modelleren.

Na de laatste pauze werden door Henk van Tilborg (*Technische Universiteit Eindhoven*) de basisbeginselen van cryptografische primitieven zoals encryptie, authenticatie, digitale handtekeningen en hash functies uitgelegd. Vervolgens werd het programma afgesloten door Rudolf Hoogenveen (*RIVM*). Hij besprak enkele wiskundige modellen die de relatie tussen epidemiologische risico factoren en chronische ziektes beschrijven.

Jos in 't panhuis (sic)



foto: Yves van Gennip

Het gemiddelde van het centraal schriftelijk

Het examenverslag 2007 waarin Cito de resultaten op de meest recente schoolexamens rapporteert, is beschikbaar via hun website: www.cito.nl/vo/ce/verslag/eind.fr.htm. Voor alle wiskundevakken (A1, A1,2, B1, B1,2) op havo en vwo ligt het gemiddelde cijfer voor het centraal schriftelijk eindexamen tussen een 6,1 en een 6,5, met percentages onvoldoendes variërend tussen dus 24% en 31%. In de Wiskunde-

brief nr. 429 van 17 september 2007, geeft Gerard Koolstra een kort overzicht van de ontwikkeling van de gemiddelde cijfers over de afgelopen jaren.

www.digischool.nl/wi/Wiskunde-brief

Nieuwe hoogleraren

Rob Stevenson is benoemd tot hoogleraar Toegepaste Analyse aan de *Universiteit van Amsterdam*. Zijn onderzoek is toegespitst op het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen, aan de *Technische Universiteit Eindhoven* is Luc Florack benoemd tot hoogleraar Mathematische Beeldanalyse en Patrick Ooninx is benoemd tot hoogleraar navigatie aan de *Netherlands Defense Academy*.

www.science.uva.nl, www.win.tue.nl en www.nlda.nl



Luc Florack, Rob Stevenson en Patrick Ooninx

Hoezo, wiskunde en patronen?

In de uitzending van 13 september 2007 bracht *Hoe?Zo! Radio* een interview met Mark Peletier. Hierin werd ingegaan op de rol die wiskunde kan spelen bij het beschrijven van uiteenlopende patronen in de natuur, van de strepen op een zebra's huid tot patronen in het zand.

Het interview staat op onderstaand internetadres.

www.teleac.nl/radio/index.jsp?nr=134903&news.nr=1386860

Binary, done that

In een disco bij stampende muziek aangeschoten jongeren het binaire stelsel uit te leggen: dat klinkt als een nachtmerrie van wiskundeleer. Maar dat is precies wat de *Wiskundemeisjes* (Ionica Smeets en Jeanine Daems) van plan waren op het kunst- en wetenschapsfeest *Discovery 07*. Zij hadden nog tien andere wiskundemeisjes opgetrommeld als versterking. Zodoende stond ik 28 september in iemands oor te scheeuwen: "De eerste plek staat voor 1, de tweede voor 2, de derde voor 4, enzovoort."

Het idee was dat mensen een ketting konden maken van zwarte en witte kraaltjes die de binaire encoding van hun verjaardag voorstelde. Als ze zich daarna weer in het feestgedruis stortten, en dan nog twee andere mensen met hetzelfde kettinkje tegenkwamen konden ze een gratis cocktail halen. En net als je denkt dat iemand het begrijpt, roept hij: "Hey, wat gaaf, mijn verjaardag kun je ook maken met die getallen 1, 2, 4 enzo."

Naast verjaardagskettinkjes organiseerden de *Wiskundemeisjes* ook een optreden, gepresenteerd door Denvis. Tijdens dat optreden mocht het publiek het opnemen tegen een wiskundemeisje in een potje Nim: er liggen 21 lucifers, je speelt met twee personen en om de beurt mag je één, twee of drie lucifers pakken. Degene die precies één lucifer overlaat heeft gewonnen. Natuurlijk waren wij wiskundemeisjes zo galant om de ander te laten beginnen, en zodoende wonnen wij keer op keer. De meeste tegenstanders verlieten vol onbegrip het podium, maar een van mijn tegenstanders drukte mij met een knip-

oog een visitekaartje van het Academisch Rekencentrum Amsterdam in handen...

Het feest *Discovery 07* is een initiatief van Stichting *Very Disco*, 'een uitgebreid netwerk van jonge wetenschappers en gelijkgestemde generatiegenoten, die net zo wild enthousiast zijn over nieuwe wetenschap als over nieuwe muziek, nieuwe kunst en nieuwe ideeën'. Daarom gaven niet alleen de wiskundemeisjes acte de présence, maar kon je ook een stukje van je DNA isoleren, een 3D-scan laten maken, virtueel pingpongen en meedoen aan een live-onderzoek naar netwerken. Daarnaast waren er *20PK microtalks* van wetenschappers zoals Robert Dijkgraaf en Bas Haring. Zij mochten met behulp van 20 slides, met maximaal 20 seconden per slide, vertellen over hun onderzoek.

Wie komt er op zo'n kunst- en wetenschapsfeest af? Natuurlijk liep er een behoorlijk aantal studenten rond, maar ze waren waarschijnlijk niet in de meerderheid. Er waren fans van de verschillende bands en DJ's, die zich desalniettemin enthousiast stortten op onze kraaltjeskraam. Verder waren er PR-medewerkers van verschillende universiteiten. Ook de kunstacademiestudenten waren ruimschoots aanwezig: één jongen vond het concept van een ruimte zonder richting buitengewoon inspirerend voor zijn kunstproject — ik had geprobeerd uit te leggen wat een Banachruimte is. Waarschijnlijk waren bijna alle aanwezigen vrienden of kennissen van een van de deelnemende partijen, maar dat waren dan wel ruim achthonderd vrienden!

Nu zijn er altijd sceptici die vrezen dat een dergelijk evenement bij het grote publiek de indruk wekt dat wetenschap beoefenen inhoudt dat je de hele dag alleen maar binair aan het coderen bent. Ik denk dat deze mensen het publiek schromelijk onderschatten. Het enthousiasme voor de *20PK* lezingen en de andere activiteiten was overweldigend. En uiteindelijk heb ik van velen de ogen zien oplichten toen ze het binair coderen of het spel Nim daadwerkelijk *begrepen* en ik geloof dat ze wel degelijk doorhadden dat het daar om ging.

Sonja Cox



Poster Discovery 07

foto: Calixtus Portier

Leven met algebraïsche meetkunde

Algebraïsche meetkunde blijkt ook licht te kunnen werpen op het ontstaan van organismen. Tijdens een workshop van het *Institute for Mathematics and its Applications* in Minneapolis eerder dit jaar, werd duidelijk dat het veld van de algebraïsche biologie de afgelopen jaren flink gegroeid is.

Filogenetische stambomen zijn schematische weergaven van de verwantschap tussen verschillende soorten organismen. Een moderne en veel gebruikte techniek is het vergelijken van het DNA van verschillende soorten. Vereenvoudigd gesteld is het zo dat een nieuwe tak aan de filogenetische stamboom ontstaat als er een mutatie in het DNA

plaatsvindt in een enkele positie. Deze mutaties worden gemodelleerd met Markovmatrices.

Wanneer dit idee consequent doorgevoerd wordt, leidt het tot een parametrisatie van de stamboom in termen van een polynoom van hoge graad. Bij het verkrijgen van relevante informatie uit deze polynomen, speelt algebraïsche meetkunde een grote rol.

www.siam.org/news/news.php?id=1146

2007-1967=....

De zakrekenmachine bestaat veertig jaar. Het was 29 september 1967 toen *Texas Instruments* het eerste patent kreeg op de Cal-Tech, het eerste rekenapparaat dat een handzaam formaat had.

De twee jaar die het Jack Kilby, Jerry Merryman en James Van Tassel kostte om het idee van een klein rekenapparaat om te zetten in (het patent op) de Cal-Tech, vallen in het niet bij de veertig jaar van gebruik, door-ontwikkeling en didactische discussies die het apparaatje tot gevolg heeft gehad.

Ter ere van het verjaardagsfeestje heeft *Texas Instruments* verschillende modellen gedoneerd aan het *National Museum of American History*.

mathgateway.maa.org/do/ViewMathNews?id=182

Wiskundig Onderzoeksprogramma Dep. of Defense

Het *Defense Advanced Research Projects Agency* (DARPA) van het *Department of Defense* (DoD) van de Verenigde Staten heeft 23 uitdagingen gesteld aan de wiskunde 'with the goal of dramatically revolutionizing mathematics and thereby strengthening the scientific and technological capabilities of DoD.' Onderzoeksvoorstellen die aangeven hoe substantiële vooruitgang geboekt kan worden op het gebied van deze uitdagingen dingen mee naar onderzoeksgelden.

Opvallend veel van de uitdagingen hebben betrekking op de biologie, zoals wiskunde van het brein, biologische kwantumveldtheorie en de fundamentele wetten van de biologie. Ook andere onderzoeksgebieden komen aan bod in uitdagingen als de gevolgen voor de fysica van Perelman's bewijs van Thurston's Geometrisatiestelling, 'arithmetic Langlands', topologie en meetkunde en de Riemannhypothese.

Het moge duidelijk zijn dat hoog ingezet wordt, en vandaar dat 'submissions that merely promise incremental improvements over the existing state of the art will be deemed unresponsive'.

www.fbo.gov/spg/ODA/DARPA/CMO/BAA07-68/Attachments.html

Concepten examenprogramma's beschikbaar

De conceptexamenprogramma's voor wiskunde A, B, C en D havo en vwo zijn beschikbaar op de website van de *Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs*. Het is de bedoeling dat deze voorstellen per 2011 van kracht worden.

www.fi.uu.nl/ctwo

Dit is de druppel

Kleine druppels kunnen de zwaartekracht aan hun laars lapen en heuvels opklimmen. Dit hebben Philippe Brunet, Jens Eggers en Robert Deegan, wiskundigen van de *University of Bristol*, aangetoond.

Als de ondergrond waarop de druppels zich bevinden sterk genoeg vibreert, dan kunnen de druppels zelfs onder een hoek van 85 graden klimmen. De trilling zorgt ervoor dat de druppel een beetje naar voren valt, op het moment dat de ondergrond naar beneden valt en zo de

heuvel opklimt.

De gebruikte vloeistof moet iets visceuzer zijn dan water, om te voorkomen dat de druppel breekt. Te dikke vloeistoffen, zullen echter langzaam vooruit komen.

Dat dit idee niet slechts theoretisch is, valt te zien in het internet-filmpje op de website van de universiteit.

www.bris.ac.uk/news/2007/5630.html

Geometrische Algebra

Leo Dorst, Daniel Fontijne en Stephen Mann hebben een systeem ontwikkeld voor het programmeren van meetkunde, dat zij *Geometric Algebra* noemen. In dit systeem kan direct met meetkundige objecten als lijnen, vlakken, cirkels, bollen en raaklijnen gerekend worden, zonder al deze objecten eerst te vertalen naar de taal van de lineaire algebra.

Behalve het praktische nut dat het systeem bezit —er hoeft namelijk geen rekenkracht gewijd te worden aan het omzetten van data in de corresponderende vectoren en matrices uit de lineaire algebra— heeft het systeem ook theoretische waarde. Zo kunnen binnen het systeem bijvoorbeeld de complexe getallen en quaternionen ingebed worden in reële meetkunde.

Leo Dorst is universitair docent bij het Intelligent Systems Laboratory van de Universiteit van Amsterdam. Daniel Fontijne is in oktober gepromoveerd met Leo Dorst als copromotor op zijn proefschrift *Efficient Implementation of Geometric Algebra*. Stephen Mann is een Associate Professor aan de David R. Cheriton School of Computer Science en ook verbonden met de werktuigbouwkunde-afdeling van de University of Waterloo in Ontario, Canada.

www.geometricalgebra.net

Gödel

Studenten van de *Nederlandse Film en Televisie Academie* maakten als eindexamenproject een film over Kurt Gödel gemaakt. De focus is de laatste periode van zijn leven. Als zijn vrouw Adele onverwachts in het ziekenhuis terecht komt, verliest hij zijn greep op de realiteit wat er uiteindelijk toe leidt dat hij zich doodhongert.

Het scenario is van de hand van Marko Martens, de regie heeft Igor Kramer op zich genomen en uitvoerend producent is Jeroen J. Meijer. Om zorg te dragen voor de wiskundige correctheid is Henk Barendregt geraadpleegd.

De film is te zien geweest op het eindexamenfestival van de filmacademie en is in de nacht van 6 september ook vertoond op *Nederland 2*. Wie deze kansen gemist heeft, of de film nogmaals wil bekijken, krijgt deze kans wanneer de film op dvd verschijnt. Wanneer dit zal gebeuren is op het moment van schrijven nog niet bekend.

whoisgodel.com

Priemen, prijzen en bewijzen

De *Shanmugha Arts, Science, Technology, Research Academy* (SASTRA) heeft dit jaar de *SASTRA Ramanujan Prize* toegekend aan Ben Green. Deze dertigjarige Brit, momenteel verbonden aan *Cambridge University* in Engeland kreeg deze prijs vanwege zijn "fenomenale bijdragen aan verscheidene belangrijke problemen in combinatorische additieve getaltheorie, zowel op eigen kracht als in samenwerking met *Fields Medal* winnaar Terence Tao. Deze laatste won vorig jaar de SASTRA prijs, die wordt uitgereikt voor belangrijke bijdragen aan die gebieden van de wiskunde die beïnvloed zijn door de wiskundige Ramanujan."

Twee belangrijke resultaten van Green die worden genoemd als re-

den voor de toekenning van deze prijs, zijn het bewijs van het Cameron-Erdős vermoeden en zijn studie van lange rekenkundige rijen van priemgetallen. Het Cameron-Erdős vermoeden behelst het vinden van een bovengrens voor het aantal somvrije deelverzamelingen van de verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$. Een verzameling heet somvrij als de som van twee getallen in die verzameling niet ook element van de verzameling is.

Op het gebied van rekenkundige rijen van priemgetallen, heeft Green veel samengewerkt met Tao. Zij bewezen onder andere dat elke verzameling van priemgetallen met positieve relatieve dichtheid willekeurig lange rekenkundige rijen bevat. Ook breidden zij de zogenaamde *cirkelmethode* uit, oorspronkelijk een vinding van Hardy en Ramanujan.

De prijs van 10.000 dollar zal worden uitgereikt tijdens de *International Conference on Number Theory, Mathematical Physics, and Special Functions*, die van 20 tot en met 22 december 2007 gehouden zal worden in Kumbakonam, India, de geboorteplaats van Ramanujan.

www.math.ufl.edu/sastra-prize/2007.html



foto: Peter van Erde/Boas

Mooi Möbius

Het mooie filmpje *Möbius Transformations Revealed* van Douglas Arnold en Jonathan Rogness dat prachtig toont hoe deze transformaties, ook wel bekend onder de naam *gebroken lineaire transformaties*, eruit zien, heeft een *Honorable Mention* gewonnen in de 2007 *Science and Engineering Visualization Challenge*. Deze wedstrijd wordt gesponsord door het tijdschrift *Science* en de *National Science Foundation*.

Behalve op de genoemde website, is het filmpje ook op YouTube te zien, waar het op het moment van schrijven (17 oktober) al 50.480 maal bekeken is. Samen met de andere winnaars is het ook gepubliceerd in *Science*.

www.ima.umn.edu/arnold/moebius

Een foton zegt meer dan duizend woorden

Niet-commutativiteit komt veel voor in wiskundige constructies, maar is vaak lastig direct waar te nemen in natuurlijke verschijnselen. Meestal zit het diep verstopt in de onderliggende theorie. Fysicus Marco Bellini van het *National Institute of Applied Optics* in Florence en zijn collega's is het nu echter gelukt dit fundamentele aspect van de kwantummechanica direct aan te tonen in een laserstraal.

Via een ingenieus experiment kan Bellini het aantal fotonen in een laserstraal meten en daarna fotonen creëren of annihilieren. Volgens de theorie commuteren deze twee operaties niet: de resulterende toestand is verschillend afhankelijk van de volgorde waarin fotonen toegevoegd of weggehaald worden. Het is zelfs mogelijk het

gemiddelde aantal fotonen in de straal te vergroten door een foton te annihilieren. Het experiment is volledig in overeenstemming met de theorie: het niet-commutatieve karakter van de creatie- en annihilatie-operatoren in de kwantumtheorie is nu waargenomen in de natuur.

mathgateway.maa.org/do/ViewMathNews?id=181

Maffia, aliens en Pythagoras

Het boek *Het Mysterie van Pythagoras* van Jan Helmer is een boek waarin alle wiskunde die in de onderbouw van het middelbaar onderwijs gegeven wordt, verwerkt is in één context. Deze context is het verhaal van Sophia en Matteo, die bij hun problemen op school en met de maffia hulp krijgen van Pythagoras, die een buitenaards wezen van de planeet Symmetria blijkt te zijn.

De Amsterdammer Jan Helmer heeft onder meer gewerkt aan de ontwikkeling van de wiskundemethode *Matrix*, waarvan hij ook eindredacteur werd. Momenteel is hij docent wiskunde aan het Blaricumcollege in Venlo-Blerick en druk bezig aan het schrijven van een vervolg op *Het Mysterie van Pythagoras*.

In de radio-uitzending van *Cappuccino* van 8 september jongstleden werd Helmer geïnterviewd. Dit interview zal spoedig op internet te beluisteren zijn.

www.pythagorasproject.nl

Ware feiten

In het vorige nummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* maakten van melding van een toneelstuk over de wiskundigen Ramanujan en Hardy en het in het verschiep liggen van twee films over deze kleurrijke personen. Ook de lezers onder u kunnen nu kennis nemen van hun verhaal. In september verscheen namelijk *The Indian Clerk*, een roman over Hardy en Ramanujan van de hand van David Leavitt.

Het verhaal is een gedramatiseerde versie van de gebeurtenissen die plaatsvonden omtrent Ramanujans komst naar en verblijf in Cambridge. Het is wel, zoals dat heet, gebaseerd op ware feiten.

Voor een radio-interview met de auteur David Leavitt, die zelf overigens geen specifieke wiskundige achtergrond heeft, kunt u een kijkje nemen op de website van *National Public Radio* (NPR): www.npr.org/templates/story/story.php?storyId=15171296. www.ams.org/mathmedia

Leven en werk van Willebrord Snellius

De Wreede, die onlangs in Utrecht promoveerde, is de eerste onderzoekster die het totaal van het werk van Snellius (1580–1626) beschouwt, dat zowel meetkunde en aritmetica, maar ook sterrenkunde, navigatie, landmeetkunde en optica omvat. Ook Snellius' privéleven komt aan bod, voor zover hier informatie over te vinden was. Zo zijn er geruchten dat hij maar liefst achttien kinderen gehad zou hebben, maar slechts van zeven kon De Wreede op grond van de archieven het bestaan bevestigen.

Dat de bekende 'brekingswet van Snellius' op zijn naam staat, had Snellius aan zijn contacten in de wetenschappelijke wereld te danken. Zelf heeft hij zijn wet namelijk nooit officieel gepubliceerd, maar onder andere Christiaan Huygens heeft zijn naam aan dat resultaat gekoppeld.

Het boek dat classica en wiskundige Liesbeth de Wreede schreef over haar promotieonderzoek heet *A Humanist Reshaping the Mathematical Sciences*. Zowel de *Volkskrant* als het *NRC* wijdden

artikelen aan de Wreedes onderzoek. Op de website *Noorderlicht* staat een interview met haar. Momenteel werkt De Wreede als medisch statisticus aan het *Leids Universitair Medisch Centrum*.
www.science.uu.nl/nieuwsbrief/2007.12

Bring it on

In opdracht van het *Platform Bèta Techniek* is er een *Wiskundefilm* gemaakt voor wiskundeleraars en decanen in de onderbouw van havo en vwo. Het doel is om de beeldvorming rond wiskunde bij scholieren uit 2 havo en 3 vwo ten positieve te veranderen, met name met het oog op de profielkeuze. In de twintig minuten durende film presenteert cabaretier Noël Deelen op een hopelijk aansprekende manier verschillende aspecten die invloed op de profielkeuze kunnen hebben.

Zo is wiskunde vaak een van de toelatingseisen voor vervolgonopleidingen, is wiskunde in vele toepassingen en apparaten terug te vinden (het is ook heel erg nuttig voor managers), maar de voornaamste boodschap lijkt te zijn 'schaam je niet voor wiskunde'. Als je het leuk vindt, als je er goed in bent, laat je dan niet door vrienden of anderen ervan weerhouden om het te kiezen. En als je er niet goed in bent, bedenk dan dat training wiskunde makkelijker maakt.

De film sluit af met de oproep 'wees uniek, neem meer wiskunde; eis meer wiskunde'. Een oproep die nog eens ondersteund wordt door het logo op het t-shirt van de cabaretier: een mannetje met potloden in zijn haar en een t-shirt dat uitdagend roept 'bring it on'.

Op onderstaande website is de film gratis te bestellen op dvd of te downloaden.
www.meerwiskunde.nl



De regel die de uitzonderingen bevestigt

Werkwoorden veranderen. Nu zal het nog wel even duren voordat de onregelmatige verledentijdsvorm 'las' in onze Nederlandse taal vervangen wordt door 'leesde', maar de trend dat onregelmatige werkwoorden regelmatig worden, bestaat wel degelijk. Wiskundigen Erez Lieberman, Jean-Baptiste Michel, Joe Jackson, Tina Tang en Martin A. Nowak hebben onderzocht of er regelmaat zit in de snelheid waarmee dit gebeurt in de Engelse taal.

Regelmaat blijkt er inderdaad te zijn en deze blijkt te vangen in een simpele wiskundige uitdrukking. De onderzoekers onderzochten de evolutie van 177 werkwoorden die in het Oud-Engels (1200 jaar geleden) onregelmatig waren door de eeuwen heen. Hiervan waren er nog 145 onregelmatig in het Middel-Engels en slechts 98 zijn nog altijd onregelmatig. Analyse van deze resultaten leidde tot de conclusie dat de 'snelheid van regularisering' van een werkwoord omgekeerd evenredig is met de wortel van de gebruiksfrequentie.

Deze stelregel geeft *halfwaardetijden* van 38.800 en 14.400 jaar

respectievelijk voor veelgebruikte woorden als 'be' en 'think'. Deze woorden zullen praktisch gezien dus nooit regelmatig worden. Minder gebruikte woorden als 'shrive' of 'smite' hebben halfwaardetijden van 300 en 700 jaar respectievelijk.

Hoewel minder dan 3% van de moderne Engelse werkwoorden onregelmatig is, behoren tot deze groep wel de tien meest gebruikte werkwoorden: be, have, do, go, say, can, will, see, take, get. Volgens het onderzoek zullen in de komende 500 jaar nog eens 15 van de 98 onderzochte werkwoorden die nu nog onregelmatig zijn, regelmatig worden, al is de kans zeer klein dat een van de tien hiervoor genoemd daartussen zit.
Nature, Volume 449, 11 oktober 2007, www.kennislink.nl

Wiskundemeisjes winnen wederom

De *Wiskundemeisjes* Ionica Smeets en Jeanine Daems hebben een *NFTVM-award* gewonnen in de categorie *interactief*. Op de website (www.nftvm.nl) van de uitreikende organisatie, de vereniging van *Nieuwe Film- en Televisiemakers* schrijft Chris Borowski over Ionica Smeets: "Ze had er zelf niet erg op gerekend winnaar te worden (Ik doe niks met film!) maar krijgt toch een prijs voor haar website wiskundemeisjes.nl in haar handen gedrukt. Dat de award uit de lucht komt vallen blijkt wel uit het feit dat ze de, bij mijn weten, tot dusver onbestaande organisatie NFTVM bedankt."

Na de twee gewonnen *Dutch Bloggies* voor best geschreven weblog en beste themaweblog eerder dit jaar, vielen de *Wiskundemeisjes* nu dus opnieuw in de prijzen. De award werd op 29 september uitgereikt tijdens het *Nederlands Film Festival* in Utrecht. www.wiskundemeisjes.nl

Zenuwenwerk

Henk Nijmeijer, Erik Steur (wetuigbouwkunde, *Technische Universiteit Eindhoven*), Cees van Leeuwen, Alexey Semyanov, Inseon Song (*RIKEN Brain Science Institute*, Japan) en Ivan Tyukin (wiskunde, *University of Leicester*) ontwikkelden een methode die leidt tot betere wiskundige modellen van het gedrag van zenuwcellen.

Hun methode reconstrueert automatisch verborgen variabelen uitgaande van door de cellen opgewekte elektrische activiteit. De hoop is dat deze techniek kan resulteren in een veelheid van toepassingen, variërend van het beter begrijpen van de berekeningen in de hersenen, het maken van hersen-machine interfaces tot het verminderen van de kans op een beroerte.
mathgateway.maa.org/do/ViewMathNews?id=180

Rectificatie

In de nieuwsrubriek van het septembernummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* is onder het kopje 'Lang Leve Lattice Basis Reduction' de voornaam van een van de auteurs van het artikel *Factoring polynomials with rational coefficients* onjuist vermeld. Hier had 'Hendrik Lenstra' moeten staan. *Derk Pík, eindredacteur*

Jaap Molenaar

Biometris

Wageningen Universiteit en Researchcentrum

Postbus 100

6700 AC Wageningen

jaap.molenaar@wur.nl

Oratie

De kracht van wiskun

Vanaf september 2006 is Jaap Molenaar hoogleraar Toegepaste Wiskunde binnen het instituut Biometris van de Universiteit Wageningen. Tot dusver heeft hij altijd gewerkt in de toegepaste analyse, waarbij hij zich sterk maakt voor meer gebruik van wiskundige inzichten in industrie en maatschappij. Zijn onderzoek concentreert zich rond het modelleren van continue fysische processen. In onderstaande oratie beschrijft Jaap Molenaar de overstap van de dode materie naar de levende natuur. Het is een controversiële tekst: zo betoogt hij dat een wiskundig model niet leidt tot begrip van het beschreven fenomeen en trekt hij het evolutiemodel in twijfel. Onze brievenrubriek staat open voor gefundeerde reacties.

Toen ik na de middelbare school een studie moest kiezen, heb ik over veel richtingen nagedacht. Eén richting echter sloot ik bij voorbaat uit: biologie. Dat leek me veel te moeilijk en ongrijpbaar. Maar wat gebeurt er nu? Na me vele jaren met de dode natuur bezig gehouden te hebben, stap ik op rijpere leeftijd toch de wereld van de levende natuur binnen. En dat het echt een andere wereld is, blijkt wel uit het volgende voorval. Toen ik voor het geven van mijn eerste collega mijn fiets stalde aan de Binnenha-

ven, viel mijn oog op een bouwseltje rond een struik pal naast de fietsenstalling. Dichterbij gekomen las ik: "Wespen/Wasps. Niet storen s.v.p./Please, don't disturb. *Vespula germanica* (F.)" Men bleek hier een wespennest te koesteren. Terwijl men overal elders een gifspuit zou hebben ingezet om zo'n nest weg te krijgen, zet men er hier een beschermend hekje omheen. Als dat niet Wageningen is! Ik had het kunnen weten. In Wageningen houdt men van dieren: zie figuur 2. Maar ook — en dat is minder bekend bij de buitenwacht — van wiskunde en statistiek. Met mijn benoeming kom ik te staan in een lange traditie. Reeds een paar jaar voor de 'verheffing' in 1918 van de toenmalige Rijks Hogere Land-, Tuin- en Boschbouwschool tot Landbouwhogeschool was Van Uven hier persoonlijk hoogleraar in — let wel — de zuivere en toegepaste wiskunde tegelijk [1]. In figuur 4 staat Van Uven temidden van het toenmalige hoglerarenkorps. De wiskundelijn werd voortgezet door N.H. Kuiper, B. van Rootselaar en J. Grasman. De statistieklijn laat ik even buiten beschouwing om geen gras weg te maaien voor de voeten van mijn colle-

ga Van Eeuwijk. Opmerkelijk was het abstracte, hoge niveau van het vroegere onderwijs in de wiskunde en de breedte van het onderzoek. Van Uven hobbyde in de relativiteitstheorie, Van Rootselaar was een intuïtionist. Kennelijk was er erg veel vrijheid. Echter, het is mooi om juwelen te willen verkopen, maar dan moeten er ook kopers zijn. In de negentiger jaren, onder mijn directe en zeer gewaardeerde voorganger Grasman veranderde er veel. Men kwam tot de — op zich niet zo opzienbare — conclusie dat de wiskunde in de Wageningse context gedoed en beoefend diende te worden om te landen bij de doelgroep. Overigens was deze wending landelijk: aan alle universiteiten veranderde toentertijd het wiskundeonderwijs nogal grondig van karakter. Dat had alles te maken met de veranderingen in het vwo-onderwijs. Zelfs studenten met wiskunde als hoofdvak kunnen momenteel niet meer de dictaten lezen die



Figuur 1 Bouwsel ter bescherming van een wespennest



Figuur 2 In Wageningen houdt men van dieren...



Jaap Molenaar

dig modelleren

zo'n twintig jaar geleden algemeen — dus ook door niet-wiskundestudenten — gebruikt werden. Die zijn voor de huidige generaties te abstract van toonzetting. Wat mij betreft, de onder mijn voorganger ingezette lijn om het wiskundeonderzoek en -onderwijs te richten op het modelleren van voor de WUR relevante onderwerpen trek ik graag door. Wiskundig modelleren fascineert me sowieso en, anders dan ik vroeger besepte, er valt fascinerend veel wiskundig te modelleren binnen de levenswetenschappen.

Modelleren bij de konijnen af...

Deze rede heeft als onderwerp de kracht van wiskundig modelleren. Aanvankelijk dacht ik die kracht te illustreren door een flink aantal voorbeelden van wiskundige modellen in de biologie in chronologische volgorde te behandelen. Maar direct al bij het eerste voorbeeld kreeg ik zoveel stof tot overpeinzen dat ik de rest van de geschiedenis maar laat schieten en daarna direct naar het heden en de toekomst spring.

Ik ga nu een aantal aspecten van wiskundig modelleren illustreren aan de hand van een simpel voorbeeld dat alle eerstejaars in de exacte vakken in Nederland voorgeschooteld krijgen, maar dat in Wageningen toch wel speciaal moet landen:

Leonardo van Pisa, ook wel 'Fibonacci' ('Figlio di Bonaccio, zoon van Bonaccio') genoemd, schrijft in 1202: "Iemand plaatst één paar konijnen in een afgesloten gebied. Hoe-

veel paren konijnen zijn er na zekere tijd als we aannemen dat elk paar na twee maanden voor het eerst een nieuw paar werpt en vervolgens iedere maand een paar voortbrengt?"

Wat meteen opvalt zijn de nonsenselementen in de vraagstelling: worden konijnen per paar geboren? Leven konijnen eeuwig? Kennen konijnen geen overbevolking? Fibonacci was dan ook geen konijnenfokker, maar iemand die goed was in rekenen en veel van wiskundige puzzels hield. Hij goot een praktische vraag in dusdanige vorm dat hij er wiskundig wat mee aankon. Dit is nu precies wat wiskundigen in de ogen van andere wetenschappers nogal eens verdacht maakt. Ze wekken de indruk dat als je hun een praktische vraag stelt, ze de werkelijkheid dusdanig vervormen dat ze wel met een antwoord komen, maar op een 'misvormde' vraag. Zie de cartoon in figuur 3.

In feite is dat vervormen onontkoombaar bij het gebruik van wiskundige modellen. Maar de vraag is natuurlijk hoe ver je kunt gaan. Om dat duidelijk te maken moeten we eerst stilstaan bij wat een wiskundig model eigenlijk is. Ik kies voor de volgende omschrijving, die niet gespeend is van enig opendeurghalte:

Een wiskundige model is een beschrijving van een fenomeen in wiskundige taal.

Deze taal zal meestal bestaan uit formules, maar grafieken en plaatjes kunnen ook geweldig helpen. Omdat de meeste fenomenen in het echte leven erg ingewikkeld zijn, is vrij-

wel ieder model een reductie van de werkelijkheid. U herinnert zich dat nog wel van meetkunde op school: de lijnen en punten werden geacht geen 'dikte' te hebben. Vreselijk abstract eigenlijk! Het zette mij op school in ieder geval wel aan het denken waar we eigenlijk mee bezig waren. Fibonacci reduceerde extreem. De belangrijkste vraag in dit verband is altijd of het gebruikte model nog antwoorden geeft die relevant zijn. Dat kan alleen het geval zijn als het model nog essentiële kenmerken van het systeem bevat.

Om de 'kwaliteit' van een model aan te geven zijn er twee zaken van belang. Ik noem



copyright: Ad Kolkman

Figuur 3 Wiskundig antwoord op een 'misvormde' vraag



Figuur 4 In 1918 zette Prins Hendrik (midden vooraan in grijze jas) de start van de Landbouwhogeschool luister bij met zijn aanwezigheid.

een model goed als

1. het model de beschikbare waarnemingen goed beschrijft.
2. het model voorspellingen mogelijk maakt die, na verificatie, goed blijken te kloppen.

Natuurlijk zou je 'goed' nog nader moeten specificeren. In dit kader is echter het belangrijkste de opmerking dat de 'voorspelkracht' van een model vele malen zwaarder weegt dan de 'beschrijfkraft'. Laten we ter illustratie eens als data nemen de luchttemperaturen gemiddeld over een jaar en boven land over de gehele aarde in de periode 1850 – 2006, zie figuur 5.

Het is kinderlijk eenvoudig om modellen te vinden die precies deze datapunten gene-

ren. We zouden als model ook de ingetekende trend kunnen nemen, die verkregen is door steeds te middelen over tien opeenvolgende jaren. Allemaal beschrijvende modellen voor deze datareeks. We noemen dit ook wel 'data fitten'. Dit illustreert trouwens en passant een algemene waarheid: er zijn vrijwel altijd meerdere modellen te vinden voor hetzelfde verschijnsel. Ze hebben echter geen van alle voorspelkracht: als er één de gemiddelde temperatuur voor het jaar 2007 goed voorspelt is dat puur toeval. U weet hoe moeilijk het weer enkele dagen vooruit is te voorspellen: dat vereist al modellen waarin enorm veel fysische kennis verwerkt zit en gigantische rekenkracht.

Begrip?

Voor we teruggaan naar Fibonacci en zijn konijnen is een waarschuwing op zijn plaats: Een wiskundig model leidt niet tot begrip van het fenomeen zelf. Ik kies hier voor een extreem standpunt: begrijpen, in de zin van 'doordringen tot het wezen van de zaak', doen we niets. Een mooie gedachte om ons nederig te houden. Als we zeggen dat een model iets 'verklaart', bedoelen we gewoon dat het model voorspelkracht heeft. En als men in wetenschapsfilosofische discussies over 'begrijpen' spreekt, blijkt het niets anders te zijn dan thuis raken in een model [3–4]. Men duidt dan slechts een soort gewenningsproces aan. Bijvoorbeeld, als student slikte ik de uiterst abstracte manier van denken in de quantummechanica voor zoete koek en vond die 'gewoon', terwijl de interpretatie ervan geruime tijd controversieel is geweest [5]. Een ander prachtig voorbeeld vind ik: licht. Licht staat heel dicht bij onze beleavingswereld, we koesteren ons graag in het zonlicht. We hebben er met de Maxwell- en de Klein-Gordonvergelijkingen buitengewoon krachtige modellen voor en toch, we kunnen niet zeggen wat het is. Het is met licht net als met liefde: de eerste de beste dichter kan er waarschijnlijk wezenlijker dingen over zeggen dan de wetenschapper. Iets dergelijks geldt ook voor elementaire deeltjes. En aangezien alles daaruit is opgebouwd, geldt het voor alle meetbare zaken in en rond ons. Uiteindelijk blijft alleen de verwondering over.

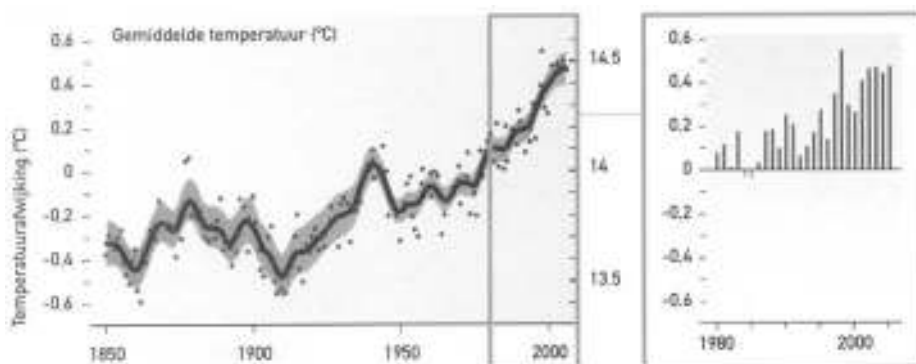
Fibonacci en de explosieve groei

We keren nu terug naar de konijnen. In figuur 7 staat uitgebeeld wat er gebeurt. Op zich is zo'n plaatje al een wiskundig model. Maar meer inzicht krijg ik uit de bijbehorende formule. Ik ben me er overigens bewust van dat voor veel mensen het omgekeerde geldt. Als F_n het aantal paren konijnen voorstelt in jaar n , dan geldt er

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

We noemen dit een recursierelatie. Als je de toestand in twee opeenvolgende jaren weet, kun je F_n voor alle volgende jaren uitrekenen. Variëren we bijvoorbeeld F_1 en F_2 , dan krijgen we steeds een andere rij. Ze worden Lucas-rijen genoemd. Als we beginnen met één paar, dan geldt $F_1 = F_2 = 1$ en krijgen we de beroemde rij van Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$



Figuur 5 Gemiddelde luchttemperatuur over de hele aarde; rechts detail

De kracht van de wiskunde komt nu tot uiting in het feit dat we in dit geval, dankzij de lineaire structuur van het probleem, de algemene oplossing van de recursierelatie direct kunnen opschrijven:

$$F_n = c_1(\lambda_1)^n + c_2(\lambda_2)^n,$$

waarin λ_1 en λ_2 gegeven zijn door

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1.618033988 \dots$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx -0.618033988 \dots$$

De coëfficiënten c_1 en c_2 zijn eenvoudig te berekenen uit de beginaantallen F_1 en F_2 . Als u deze formule even op u laat inwerken zal een gevoel van grote schoonheid u overmeesteren. Waarom? Wel, bedenk dat λ_1 en λ_2 beide irrationale getallen zijn. Zulke getallen hebben achter de komma oneindig veel cijfers die nooit gaan repeteren. In de aangegeven combinatie echter leveren ze F_n op en dat is voor alle n een geheel getal. Maar het wordt nog mooier. Als we kijken hoe de rij zich gedraagt voor heel grote n , dan vinden we

$$F_n \sim c_1(\lambda_1)^n,$$

omdat $(\lambda_2)^n \rightarrow 0$ voor grote n ; λ_2 is immers in absolute waarde kleiner dan 1. De rij gedraagt zich dus voor grote waarden van n 'exponentieel', dat wil zeggen als een macht van zeker grondtal. En dat groeit erg snel.

Even een vraag tussendoor: als Fibonacci nu eens nog extremer had gereduceerd en niet die eerste kinderloze maand had ingevoerd? Dan had onze recursierelatie eruit gezien als $F_{n+1} = 2F_n$. En daar ziet iedereen onmiddellijk de oplossing van. Als iedere maand het aantal paren verdubbelt, geldt er natuurlijk $F_n = 2^n$. Nog steeds exponentiële groei, nu met grondtal 2. Kortom, het enige effect van de kinderloze eerste maand is een verschuiving van het grondtal 2 naar $\lambda_1 = 1,618033988 \dots$. In feite zijn dit soort kwalitatieve inzichten de voornaamste lessen die we van dit onrealistische model leren. Overigens, een ervaren modelleur ziet zulke kwalitatieve conclusies al op kilometers afstand aankomen.

Zonnebloemen, de Gulden Snede en de Club van Rome

Hoe onzinnig dat konijnenmodel ook moge zijn, de Fibonaccirij en de constante λ_1 lijken een universele betekenis te hebben. In de natuur duikt de Fibonaccirij op honderd en één plaatsen op. Bijvoorbeeld, bij het tellen van de spiralen die je kunt waarnemen in een zonnebloem. Zie figuur 6.

In de architectuur fungeert λ_1 als de zoge-

naamde 'gulden snede', de verhouding tussen de zijden van een speciale rechthoek die volgens sommigen een volmaakte harmonie uitdrukt. Er zijn hele boeken over deze onderwerpen volgeschreven, maar niet alles is zo algemeen als het voorgespiegeld wordt [6].

Merkwaardig genoeg had het geruchtmakende model van de Club van Rome, dat dateert uit 1972, een hoog konijnengehalte. De rijperen onder u herinneren zich dat nog wel. In hun model namen de experts van deze Club bepaalde relaties aan tussen de veranderingen in grootheden als bevolkingsdichtheid, milieuvervuiling, grondstoffenvoorraad, industrialisatie, enzovoorts [7]. Dit alles op een uiteraard globale, maar zo goed mogelijk verantwoorde manier. Vervolgens rekenden ze uit welke rampen ons op welke termijn zouden gaan treffen als we op de toenmalige voet zouden doorgaan met energiever-spilling, bevolkingsgroei en grondstoffenverbruik. Hoewel het model qua formules vele kantjes beslaat en vol met terugkoppelingen zit, merkte Nobelprijwinnaar Herbert Simon erover op:

"One does not have to run such a model very long on a large computer to conclude that the system will, sooner or later, explode." [8]

Het werk van de Club van Rome sloeg bij het brede publiek in als een bom en het heeft een bijzonder nuttige bewustwording in gang gezet. Als model had het wel kwalitatieve, maar nauwelijks kwantitatieve voorspelkracht. Ik heb het sterke vermoeden dat iets soortgelijks geldt voor de klimaatmodellen waarvan de uitkomsten momenteel hevig in de belangstelling staan [9–10]. Voor politieke bewustwording en het testen van scenario's zijn ze heel effectief, maar vanwege de onzekerheden in de te modelleren mechanismen is hun kwantitatieve voorspelkracht zeer gering. Dat ligt anders met de modellen die gebruikt worden voor het bepalen van de vangstquota in de visserij. Omdat er inmiddels veel bekend is over de populatiedynamica van de visstand hebben die wel een redelijk grote voorspelkracht. Dat in de praktijk de vangstquota mede sterk bepaald worden op grond van politieke en economische motieven is een andere zaak.

Aggregatieniveau's en natuurwetten

In het universum treffen we uiterst verschillende lengteschalen aan: van de minuscule atomen tot de onvoorstelbaar grote melkwegstelsels. Bij het opstellen van modellen is het uiterst belangrijk je eerst te realiseren op welk 'aggregatieniveau', ook wel 'organisatie-

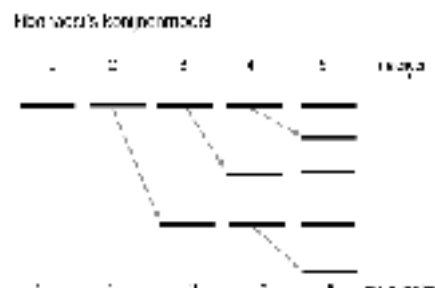


Figuur 6 Voorbeelden in de natuur en de cultuur waarin de rij van Fibonacci en de gulden snede voorkomen

niveau' genoemd, je bezig bent.

Bij ieder niveau hoort een karakteristieke lengteschaal. Als we een model voor een bepaald niveau opstellen, zullen we de effecten van wat er op de lagere niveaus in detail gebeurt op een geïntegreerde manier moeten verdisconteren, anders krijgen we volstrekt onhanteerbare modellen. Bijvoorbeeld, in een model voor de populatiedynamica van konijnen negeren we uiteraard dat ook konijnen uit organen, weefsels, cellen en moleculen bestaan. Ieder niveau heeft zijn eigen grootheden en relaties die voor dat niveau karakteristiek zijn.

Ik ben tot voor kort altijd bezig geweest met modellen voor de dode natuur. Naderkend over wat er ten aanzien van de levende natuur anders is, bemerk ik dat er juist grote overeenkomsten zijn. Ook in de biologie zijn de wetten en inzichten uit de fysica en chemie van kracht. Bijvoorbeeld, een diffusieproces beschrijf je wiskundig altijd op dezelfde manier, of het nu om deeltjes, mensen of konijnen gaat. Dat unificerende aspect draagt sterk bij aan de kracht van wiskundig modelleren.



Figuur 7 Schematische weergave van de konijnenvoortplanting volgens Fibonacci

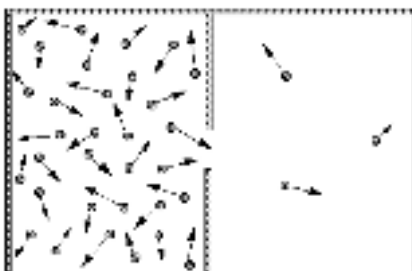


Figuur 8 Aggregatieniveau's levende materie: bij het modelleren is de keuze van het aggregatieniveau heel belangrijk.

Natuurlijke selectie en evolutie

Maar, leven is inherent aan voortplanten. En dan stuiten we toch op een modelleringsaspect dat typisch voor de levende natuur is: de dynamica van populaties wordt mede bepaald door natuurlijke selectie. Dat is een voor de hand liggend concept: als een individu om de een of andere reden, bijvoorbeeld mutatie, afwijkt van de rest en daardoor betere overlevings- en dus voortplantingskansen heeft, zal de frequentie van deze mutante eigenschap in de volgende generaties toenemen.

Sommigen menen dat dit selectieprincipe de sleutel vormt tot de verklaring voor het ontstaan van steeds complexere vormen van leven. Anderen gaan een stapje verder en pomen een model waarin alle leven zoals we dat nu kennen via kleine evolutiestapjes is voortgekomen uit een oersoep. Naar aanleiding van een terloopse opmerking op de weblog van onze vorige Minister van Onderwijs Maria van der Hoeven is er veel discussie gestart over dit model. Ik kan het niet laten hier iets over te zeggen vanuit het standpunt van wiskundig modelleren, vooral omdat populariserende auteurs hier graag over de onderliggende vragen heenstappen. Ik denk dat het verhelderend is eerst te kijken naar een diep inzicht dat we in de dode natuur opgedaan hebben. Iedereen kent de tweede hoofdwet van de thermodynamica: in een afgesloten systeem neemt de entropie nooit af. De entropie is een maat voor de wanorde. Deze wet geldt typisch op het aggregatieniveau van veel-deeltjessystemen. Immers, op het



Figuur 9 Standaardvoorbeeld van entropietoename in de statistische mechanica

niveau van een individueel molecuul is wanorde helemaal niet gedefinieerd. Door sommigen is de tweede hoofdwet ingebracht tegen het evolutiemodel. Dat klopt niet, want deze hoofdwet verbiedt lokale toename van orde niet. Ik heb iets anders op het oog. Gek genoeg kunnen we de vraag stellen: hoe waar is deze tweede hoofdwet? Om dit toe te lichten kijken we even naar het standaardvoorbeeld: deeltjes in een doosje.

We delen een volume in tweeën door middel van een tussenschot en het linker compartiment vullen we met een gas. Als het tussenschot aanwezig is, geldt er een zekere mate van orde: alle gasmoleculen zitten links. Make we nu een gat in het tussenschot, dan verspreiden de moleculen zich over het gehele volume. De wanorde neemt toe. Een soortgelijk experiment wordt miljoenen keren per dag gedaan. Als u melk in uw thee of koffie giet, constateert u steeds dat de melkmoleculen zich verspreiden over het kopje. Als u roert gebeurt dat snel, als u niet roert ook, maar dan langzaam. Wat is hiervan op een lager aggregatieniveau de beschrijving, oftewel welk wiskundig model op molecuulniveau leidt tot dit gedrag? Op dat lagere niveau zien we deeltjes die kriskras door elkaar bewegen. Een principiële aanname is dat de deeltjes volkomen willekeurig door elkaar bewegen: er is geen *intelligent design* of iets dergelijks bij betrokken. Stel, er zijn N deeltjes en daarvan zitten er op gegeven moment p links. Alle verdelingen zijn in principe mogelijk, dus p kan variëren van 0 tot en met N . Voor iedere waarde van p is dan de bijbehorende kans eenvoudig uit te rekenen door gewoon te tellen op hoeveel manieren we p deeltjes uit een verzameling van N kunnen kiezen. Die kans is enorm scherp gepiekt rond $p = N/2$. De kans dat p flink afwijkt van $N/2$ en er dus ontmenging optreedt is niet nul, maar wel ontzettend klein vergeleken met de kans dat $p = N/2$. Bijvoorbeeld, de verhouding tussen de kans op $p = N$ (alle deeltjes links) en de kans op $p = N/2$ (evenveel deeltjes rechts als links) wordt gegeven door $2^{(-N)}$ en neemt dus exponentieel af met het aantal deeltjes N . Aangezien $N \sim 10^{23}$, is dit een onvoorstelbaar klein getal.

Al zou u pakweg zo'n 13,7 miljard jaar in uw kopje koffie of thee kunnen staren, u heeft geen schijn van kans om ook maar het begin van ontmenging te ontwaren gedurende een picoseconde. Die kans is, hoewel niet nul, zo klein dat we de tweede hoofdwet toch maar de status van 'Wet' gegeven hebben.

En nu naar het model met die kleine evolutiestapjes. In dat model is er de aanname,

net als bij de deeltjes in een doosje, dat de veranderingen door toevallige mutaties oftewel 'blind toeval' tot stand komen. De kans op een 'gunstig' evolutiestapje is in het algemeen klein. De kans dat het leven zoals wij dat kennen door middel van een gigantische serie van die stapjes is ontstaan, is waarschijnlijk nog kleiner dan de kans dat de melk in uw koffie ontmengt, hoewel niemand er precies een getal aan kan hangen. Hoewel een kans die niet nul is zich kan realiseren, zit er voor mijn gevoel iets dubbels in om wel de tweede hoofdwet als wet te aanvaarden, en tevens klakkeloos het leven als een 'onmogelijke mogelijkheid' te accepteren. Daar komt nog bij dat er vragen te stellen zijn bij de 'beschrijfkraft' van het evolutiemodel en dat het zeker geen 'voorspelkraft' heeft: ik zou niet weten wat het voor de toekomst van het leven voorspelt.

Ik vermoed dat een bekende voorvechter van dit model als Richard Dawkins dit soort overwegingen ook heel goed beseft. Desondanks weerhoudt het hem niet dit model wel-sprekend en fanatiek te promoten [11–13]. Het lijkt voor hem wel een geloofszaak te zijn. Voor mij is het ook een geloofsstap te belijden dat ik geloof in God als Schepper van het leven, maar ik zeg er tenminste expliciet bij dat het geen wetenschappelijke uitspraak is.

Discussies over de evolutietheorie verliezen zich vrijwel altijd in specifieke voorbeelden. Een interessante poging om algemene argumenten aan te dragen die binnen het wetenschappelijke domein blijven komt van William Dembski. In zijn boek *No free lunch* [14] probeert hij een solide wiskundige basis te verschaffen aan het idee dat zeer complexe systemen, zoals bijvoorbeeld het leven, een 'onherleidbare complexiteit' kunnen bezitten, wat betekent dat ze nooit door toevalsprocessen tot stand kunnen gekomen zijn. Zijn poging heeft schipbreuk geleden [15]. Echter, ik acht het toch niet onmogelijk dat een dergelijke stelling inderdaad bewezen kan worden. Het zou een inzicht opleveren van dezelfde verrassendheid en diepgang als de onvolledigheidsstelling van Gödel en de onvoorspelbaarheid van chaotische systemen. Aardig als juist de wiskunde, een discipline die in deze discussies toch een beetje aan de zijlijn staat, een fundamentele bijdrage aan dit debat zou kunnen leveren.

Toekomstplannen

Mijn eerste jaar in Wageningen was er één van veel organiseren en relatief weinig onderzoek en onderwijs. Nu ik ingewerkt ben is het de uitdaging een bevredigende balans te vin-

den. Wat betreft het onderwijs merk ik op dat het bijzonder jammer is dat we door een tekort aan contacturen in het lagerejaaronderwijs de diepere doorkijkjes in de wiskunde wel kunnen aanstippen, maar de reikwijdte en schoonheid ervan nauwelijks kunnen overdragen. Speciaal punt van zorg is de aansluiting met het vwo. Nu het abstractie- en rekenvaardigheidsniveau van de binnenkomende studenten nog meer zal gaan dalen door de recente ‘verarming’ van het vwo-curriculum wat betreft wiskunde, moeten wij nog meer aandacht besteden aan de aansluiting. Bijvoorbeeld, de verwachting is dat Wiskunde T, de ‘zware’ variant van ons basisonderwijs, flink bijgesteld zal moeten worden. Dat is des te urgenter nu het belang van kwantitatieve methoden in vrijwel alle Wageningse richtingen alleen maar groter wordt. U begrijpt, nu de Biologieopleiding geherstructureerd wordt hebben we al aangegeven dat we graag participeren in cursussen over wiskundige modellen en methoden. Ik beschouw het als een van de belangrijke doelstellingen van Biometris om meer te gaan bijdragen aan het hogerejaars Bacheloronderwijs en aan de MSc- en PhD-cursussen. Eén van onze idealen, alleen in nauwe samenwerking met de andere collega's te realiseren, is bijvoorbeeld het starten van een interdisciplinaire masteropleiding met als mogelijke naam *Quantitative methods for the Life Sciences*. Een dergelijke afstudeerrichting zou de kandidaten op een degelijke wijze toerusten voor bijvoorbeeld een aio-schap in de richting van de Systeembio- logie.

Wat betreft onderzoek merk ik op dat mijn vorige oratie onder andere over de modellering van visco-elastische stoffen ging. De expertise die ik daarin inmiddels heb opgedaan hoop ik ook hier goed toe te kunnen passen. De gluten in ons brood bijvoorbeeld gedragen zich typisch visco-elastisch. In samenwerking met het TIFN en de groep levensmiddelen-proceskunde is een voorstel in voorbereiding over het modelleren van deegkneden.

Systeembio- logie

Een voor mij nieuwe richting is de Systeembio- logie. Binnen WUR waren er voor mijn komst al vele discussies geweest hoe dit onderwerp aandacht te geven. Zo dat vakgebied ergens kan bloeien, dan is dat toch wel in Wageningen. Al snel ben ik als trekker van het IP/OP thema Systeembio- logie bij de uitwerking ervan nauw betrokken geraakt. Aardig om in dit verband eerst even een citaat uit een column van onze huidige Minister van Onderwijs te geven:

“Er waart een ziekte door de wetenschap. Die ziekte heet systeembio- logie. Vooral oude- re mannen lijken gevoelig...”

Vervolgens betoogt Ronald Plasterk dat systeembio- logie niets nieuws is en vooral gepusht wordt door “mediocre wetenschappers, die nooit een serieus wetenschappelijk probleem hebben opgelost, en nu proberen via organisatorische activiteit belangrijk te worden” [16]. Dit gepruttel heeft niet verhinderd dat het vakgebied een vrij explosieve groei aan het doormaken is. In het buitenland zijn er reeds grote gespecialiseerde groepen voor in het leven geroepen. In Nederland gaat het wat langzamer, maar volgt men ook. Zo streven we naar de oprichting van het Wageningen Centrum voor Systeembio- logie (WCSB), waarin we al onze inspanningen op dit gebied gaan bundelen.

Wat is Systeembio- logie eigenlijk? Ik kan dit hier alleen aanstippen; de echte kenners zitten in de zaal. De term zelf is erg ongelukkig gekozen. In feite gaat het om de aloude vraag de fundamentele levensprocessen te model- leren. Inzoverre heeft Plasterk gelijk, dat wilde de biologie altijd al. Die processen overspan- nen een groot aantal aggregatieniveaus. Aan de ene kant hebben we het genotype, oftewel de informatie opgeslagen op het DNA, het on- noemelijk lange molecuul met de welbekende helixstructuur:



Figuur 10 Schematische weergave van de dubbele helix-structuur van DNA

Die structuur kunnen we tegenwoordig prima meten. Het DNA wordt voortdurend afgelezen — op zich al een uiterst vernuftig mechanisme — en dat leidt tot de aanmaak van onder andere eiwitten. Aan de andere kant hebben we het fenotype, oftewel de eigenschappen die openbaar komen tijdens de ontwikkeling. Uw blauwe of bruine ogen bijvoorbeeld. En dan laat ik de neurobiologie nog maar even buiten beschouwing. Als een beginnening in de biologie als ik erover gaat nadenken hoe je nu

ooit de afstand kunt overbruggen tussen deze puur chemische afleesmechanismen en iets als bewustzijn en bijvoorbeeld de gedachten die momenteel in uw hoofd omgaan, dan zou je kunnen gaan huiveren en spontaan stop- pen met de hele onderneming. Is dit geen hybris? Maar goed, alles went. Zelfs weten- schappers staan bloot aan afstomping.

Het gedetailleerd modelleren van wat er al- lemaal gebeurt op de aggregatieniveaus tus- sen geno- en fenotype is ondenkbaar, hoewel er natuurlijk wel deelsystemen goed bekend zijn. Zelfs als we ons tot de cel en zijn di- recte omgeving beperken, is er nog bijzonder veel onbekend. De afleesprocedures van het DNA bijvoorbeeld vormen een gigantisch te- ruggekoppeld systeem. Een aangemaakt ei- wit kan de aanmaak van hetzelfde of een an- der eiwit versnellen of vertragen. Men geeft dit gewoonlijk weer met een netwerk, waarin de knooppunten de betrokken stoffen voorstel- len en de pijlen aangeven of twee stoffen el- kaars aanmaak beïnvloeden. Zie bijvoorbeeld een schema als:



Figuur 11 Netwerk van transcriptiefactoren in E. Coli

En ondertussen treden er allerlei andere re- acties op. Vrijwel alle mechanismen in de cel zijn gevoelig voor omgevingsinvloeden. De temperatuur en de zuurtegraad zijn zulke beïnvloedingsfactoren. En een stofje dat door de celwand naar binnen komt kan een hele keten van reacties aan de gang brengen. Er dringt zich een vergelijking op met een aloud inzicht uit de pedagogie:

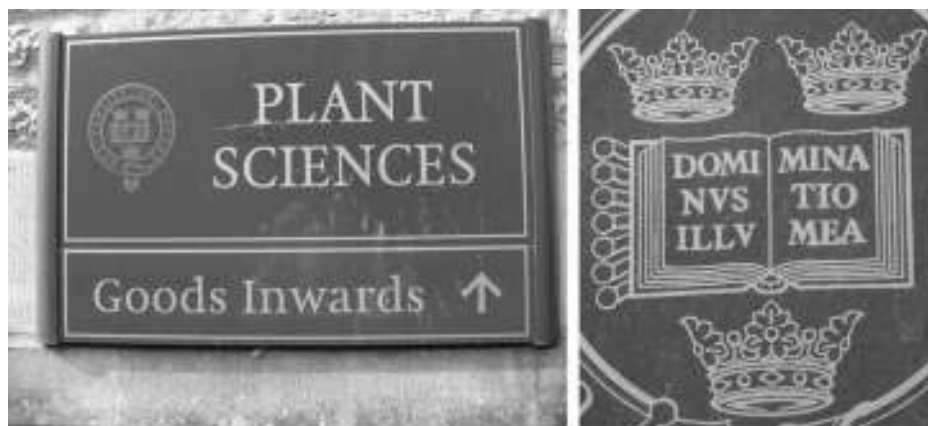
Het resultaat is een samenspel tussen ‘na- ture’ en ‘nurture’, oftewel tussen aanleg en omgevingsinvloeden.

Een deeldiaal van de Systeembio- logie is de ‘virtuele cel’. Dat is een wiskundig model waarin alle mechanismen binnen de cel ver- werkt zitten tezamen met hun afhankelijkheid van de fysiologische parameters. Gegeven het DNA zou je daarmee de respons van de cel kunnen berekenen. Laten we eerlijk zijn: dit geldt nu nog als toekomstmuziek. Hoe is men ertoe gekomen te denken dat hier iets te be- reiken valt? De reden is heel duidelijk: dat zijn

de gigantisch toegenomen mogelijkheden om data te vergaren over het DNA en de andere stoffen die op een bepaald moment in een cel aanwezig zijn. Maar pas op, dit kan wel tot verkeerde verwachtingen leiden. Men denkt dan bijvoorbeeld: we laten op die enorme datasets geavanceerde wiskundige methoden los en als vanzelf rolt daaruit wat er precies gebeurt in de cel. Voor je het weet ben je dan slechts bezig met 'data fitten' en, zoals boven al eens gezegd, dat leidt niet tot enige voorspelkracht. Het in kaart brengen van een specifieke netwerkstructuur eist veel expertkennis en zorgvuldig geplande metingen. Vervolgens, het schatten van de parameters die de interacties karakteriseren is wiskundig gezien een geweldige uitdaging. Kennis van zowel statistische schattingstechnieken als van differentiaalvergelijkingen kunnen hier uitstekend gecombineerd worden, en het is dit terrein waarop ik, in samenwerking met vele collega's binnen en buiten Biometris, mijn aandacht zou willen richten. Voor het moment laat ik het hierbij. In mijn afscheidsrede hoop ik u te kunnen uitleggen hoe het nu precies zit met die Systeembioogie.

Tenslotte

Zoals velen zich zullen herinneren vormde in



Figuur 12 Links: gevelplaat van de Plant Sciences Group van Oxford University; rechts: detail

mijn vorige oratie de 'Mathematical Bridge' in Cambridge de rode draad. Als je zo'n traditie start moet je hem volhouden. Recent liep ik rond in Oxford, dat andere Engelse eerbiedwaardige centrum van wetenschap. Mijn oog viel op het bord links, en het deed me wat. Voor de niet-ingewijden: Biometris is in de WUR-structuur onderdeel van de Plant Sciences Group. Een jaar lang meedraaien in die plantenwereld laat je kennelijk niet onberoerd. De planning is dat we ook fysiek bij elkaar komen te zitten in nieuwbouw genaamd Radix. De symboliek is aardig: radix betekent

de 'wortel' in wiskundige zin, maar staat ook voor de 'wortel' van een plant. Maar waarom vind ik dat bord in Oxford nu zo'n mooi besluit van mijn oratie? Vanwege het logo met de tekst:

Dominus Illuminatio mea, oftewel: De Heer is mijn Licht.

Dat drukt precies uit hoe ik op deze leerstoel bezig wil zijn; op een voluit wetenschappelijke wijze en in het besef dat juist daarbij Gods leiding nodig is. Een oude traditie dus.

Referenties

- 1 J. van der Haar, *De geschiedenis van de Landbouwwuniversiteit Wageningen, deel 1: 1873 – 1945*, ISBN 90-6754-261-X, LUW, 1993
- 2 Leonardi van Pisa (of 'Fibonacci'): *Liber Abaci*, Chapter XII, 1202.
- 3 H.W. de Regt en D.Dieks, 'A contextual approach to scientific understanding', *Synthese*, 144, pp 137–170, 2004.
- 4 W.C.Salmon, *Causality and explanation*, Oxford University Press, ISBN 9780195108644, 1998
- 5 J.T.Cushing, *Quantum mechanics, Historical contingency and the Copenhagen hegemony*, University of Chicago Press, 1994.
- 6 Zie bijvoorbeeld de site www.lhup.edu/~dsimanek/pseudo/fibonacc.htm voor een cynische beschouwing over het magisch voorkomen van de gulden snede.
- 7 D.H.Meadows, J. Randers, D.L.Meadows, *Limits to growth; The 30-Year Update*, ISBN 1-93-1498199, 2002.
- 8 H. Simon, *IASA Conference on Perspectives and Futures*, June 14-15, 1988
- 9 M.Crok en T.Jaarsma, 'Mist in kristallen bol', *Natuurwetenschap&Techniek*, Maart 2007
- 10 M.Crok, A.Jaspers, E. Vermeulen, 'Doemsce-nario's', *Natuurwetenschap&Techniek*, Mei, 2007
- 11 R. Dawkins, *The blind watchmaker*, London: Longman, ISBN 0-58-2446945, 1986.
- 12 R. Dawkins, *The God delusion*, ISBN 0-59-3055489, 2006
- 13 A. McGrath, *Dawkins' God: Genes, Memes, and the Meaning of Life*, ISBN 1-405125-38-1, 2007
- 14 W.A. Dembski, *No free lunch*, Rowman and Littlefield Publishers Inc., ISBN 0-7425-1297-5, 2002
- 15 O. Häggström, 'Intelligent Design and the NFL Theorems', *Biology and Philosophy* 22 (2007), pp 217-230.
- 16 R. Plasterk, *Bionieuws* 16, 26-09-2003.

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



László Lovász



Vera Sós

De favoriet van László Lovász

Vera Sós

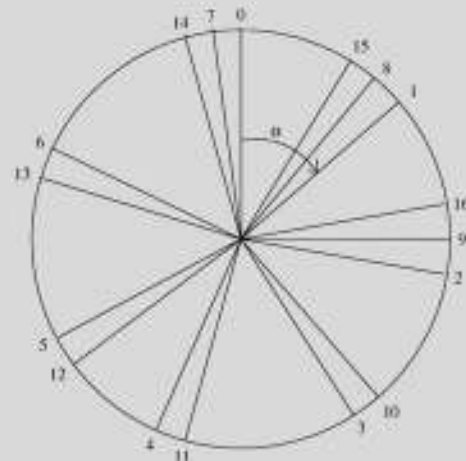
Elke maand vragen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun weblog www.wiskundemeisjes.nl aan een bekende wiskundige wie zijn favoriete nog levende wiskundige is. Hiermee willen ze bijzondere wiskundigen van deze tijd in het zonnetje zetten. In elke Nieuw Archief voor Wiskunde staat een bladzijde over zo'n favoriet en zijn werk. Deze keer vragen ze aan László Lovász wie hij bewondert.

De Hongaarse wiskundige László Lovász is een van drie bedenkers van het Lenstra-Lenstra-Lovász-algoritme, dat vijftien jaar geleden werd bedacht. We vragen hem tijdens het verjaardagcongres LLL25+ in Caen naar zijn favoriete (nog levende!) wiskundige. Lovász hoeft niet lang na te denken. En als hij de naam noemt, knikt zijn vrouw Katalin Vesztegombi (zelf ook een wiskundige) instemmend: "Ik wilde me er niet mee bemoeien, maar ik hoopte al dat je deze zou noemen."

Lovász kiest Vera Sós. Zij is een Hongaarse wiskundige die deel uit maakte van een zeer levendig wiskundig gezelschap in Budapest. Ze werkte bijvoorbeeld met de legendarische Paul Erdős. Sós was getrouwd met wiskundige Paul Turán en met hem publiceerde ze ook verschillende artikelen. Haar interesses liggen onder andere bij grafentheorie, getaltheorie en Diophantische approximatie.

Vera Sós begeleidde Lovász tijdens zijn promotie, al was ze officieel niet zijn promotor. Lovász noemt een resultaat van Sós dat hij erg aardig vindt: het bewijs van het vermoeden van Steinhaus. Neem een cirkel en een getal a . Kies een willekeurig punt op de cirkel en teken het volgende punt op afstand a langs de omtrek van de cirkel. Het volgende punt teken je weer afstand a op de cirkel verder en zo ga je door. Na een eindig aantal van zulke stappen, snijd je de cirkel door op elk punt dat je getekend hebt. Hoeveel verschillende soorten stukken krijg je dan maximaal?

Hugo Steinhaus vermoedde dat je hooguit drie verschillende lengtes kon krijgen. De eerste die een bewijs van dit vermoeden gaf, was Vera Sós in de jaren vijftig.



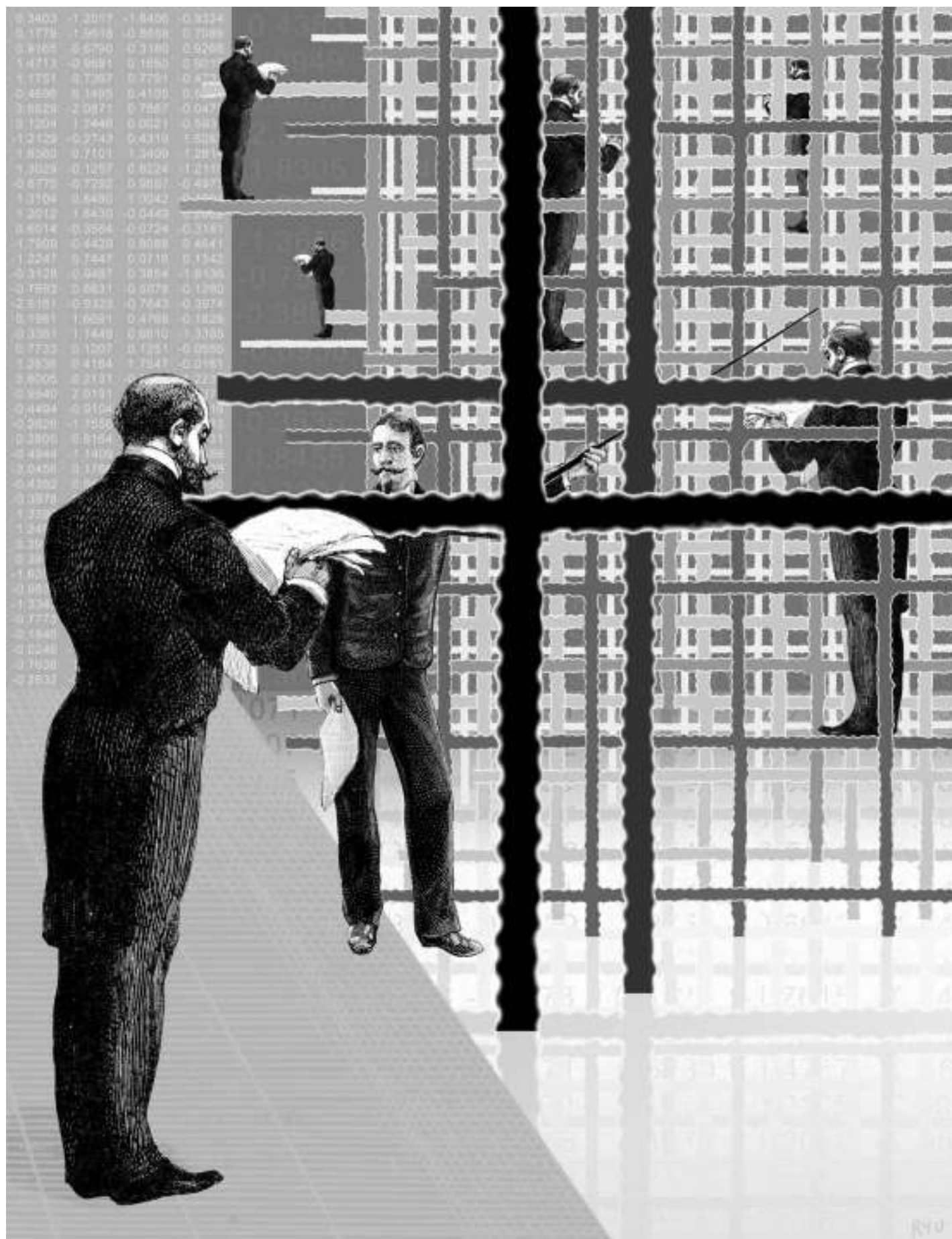
Krzysztof Apt noemde het vermoeden van Steinhaus eerder dit jaar in het juni-nummer [1]. Naar aanleiding van dat artikel gingen de vingers van Jan Draisma jeuken en ging hij zelf op zoek naar een bewijs. Zijn bewijs is te vinden op internet [2]. Misschien is het aardig om ook eens te proberen zelf het vermoeden te bewijzen.

Vera Sós is nog steeds actief, zowel wiskundig als sociaal. "En", voegt Vesztegombi toe aan de lovende woorden van haar man, "ze is een geweldig rolmodel voor vrouwelijke wiskundigen."

Referenties

1. Krzysztof Apt, 'Post your articles in ArXiv Math and CoRR!', *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/8 (2), juni 2007
2. www.win.tue.nl/~jdraisma/index.php?location=recreational#3gap





Illustratie: Kyu Tajiri

Henk van der Vorst

Mathematical Institute

Utrecht University, P.O. Box 80.010

3508 TA Utrecht, The Netherlands.

vorst@math.uu.nl

Afscheidsrede

Ik leg het nog één keer uit

Waarom wordt er nog research gedaan naar het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen? Toen Henk van der Vorst zijn onderzoeksloopbaan begon zag hij daar het belang ook niet echt van in. Pas toen hij, als werknemer van Reactor Centrum Petten, geconfronteerd werd met het praktisch en onmiddellijk belang van het oplossen van dergelijke stelsels, ging hij zich voor dit onderwerp interesseren. Het werd zijn levenswerk; zijn baanbrekend artikel over de zogenaamde Bi-CGSTAB-methode werd het meest geciteerde artikel ter wereld van de negentiger jaren. Nu is Henk van der Vorst de eerste die deze prestatie zal willen relativeren. Toch toont de impact van deze publicatie wel het maatschappelijk belang aan van zijn wiskundig onderzoek.

Bijna op de kop af veertig jaar geleden studeerde ik af aan deze universiteit als toegepast wiskundige. Wat doet een wiskundige voor de kost, of meer algemeen: wat kan je met wiskunde in de maatschappij? Dat vroeg ik me toen ook af. Wiskunde is er in vele varianten; ik had een flink aantal daarvan tijdens de studie voorbij zien komen. De weg van de fundamentele van de wiskunde naar de daadwerkelijke toepassing is een zeer lange. Ik zou mij in mijn loopbaan aan de zeer toepasbare kant gaan bevinden. In 1964 volgde ik het eerste college Numerieke Wiskunde van mijn latere promotor, professor van der Sluis, die toen net benoemd was in Utrecht. Hoe kon je met de computer wiskundige sommetjes uitrekenen? Dat leek me toen tamelijk voor de hand liggend, maar alras bleek dat dit verre van eenvoudig was. Als je bijvoorbeeld de wortels van een vierkantsvergelijking wilt uitrekenen via de bekende formules die je al op de middelbare school had geleerd, dan

komt daar in veel gevallen één nauwkeurig en één (soms veel) minder nauwkeurig bepaalde wortel uit. Via een eenvoudig trucje kun je beide wortels echter even nauwkeurig berekenen. Blijkbaar representeert de gegeven vergelijking de beide wortels even nauwkeurig, maar moet je er moeite voor doen om die informatie, rekenend met de computer in een eindige precisie, boven water te krijgen. En dat was dan nog maar een eenvoudige vierkantsvergelijking. Het zou al gauw nog aanzienlijk gecompliceerder worden omdat veel rekenwerk ook nog eens veel tijd vergt, zelfs op de allersnelste computers. Een fascinerend vak: snelheid en nauwkeurigheid speelden een cruciale rol. Een intellectuele variant van Formule 1 racen.

Lineaire stelsels in Petten

Tegen het eind van mijn doctoraalstudie volgde ik een seminarium over het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen aan de hand

van het toen pas verschenen boek van de Amerikaan Richard Varga. Die had het over de problemen bij het oplossen van grote stelsels. Niet alleen had ik toen geen flauw idee van wat groot was bij stelsels, ik had ook het idee dat de voorgestelde oplostechieken een race tegen de electronica-techniek inhielden. Computers werden immers steeds sneller en krachtiger, zodat wat toen een probleem scheen, een paar jaar later mogelijk een trivialiteit zou zijn. Het reflecteerde evenwel de tijdgeest onder de toenmalige numeriek wiskundigen.

Niet veel later, zo begin jaren zeventig meenden velen onder hen dat de belangrijkste algoritmen al wel bedacht waren en dat de almaar toenemende computersnelheid de rest zou doen. In werkelijkheid leidden de krachtiger computers tot de vraag om oplossing voor steeds weer grotere problemen en de huidige zienswijze onder numerici is veel eerder dat we meestal met de handen in het haar zitten.

De meesten onder u zullen op de middelbare school al wel kennis gemaakt hebben met het oplossen van eenvoudige stelsels vergelijkingen, bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 11, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Als je drie keer de tweede vergelijking van de eerste aftrekt, houd je over $y = 1$. Het kan ook wat ingewikkelder door eenderde keer de eerste vergelijking van de tweede af te trekken, maar dat levert natuurlijk hetzelfde op. De volgorde van de vergelijkingen voor het elimineren van de variabele x is dus van belang voor het rekenwerk. Dit zijn natuurlijk mooie getallen. Het blijkt alras, dat als je met gebroken getallen rekent en je neemt maar een eindig aantal decimalen mee, dat die volgorde ook van groot belang is voor de nauwkeurigheid van het berekende resultaat. Om die reden dacht men in de jaren veertig van de afgelopen eeuw nog dat men praktisch gesproken met een computer in het algemeen geen stelsels van meer dan twintig vergelijkingen met twintig variabelen op zou kunnen lossen, tenzij die stelsels een speciale structuur hadden.

Het probleem van het oplossen van een stelsel vergelijkingen van het bovenstaande type is wiskundig gezien bijzonder eenvoudig en bevindt zich helemaal aan het eind van de wiskundeketen die van zeer fundamenteel naar zeer toegepast loopt, als je tenminste van zo'n keten kunt spreken. Het probleem is in wiskundige zin dan ook allang opgelost. Men weet heel precies wanneer zo'n stelsel een eenduidig bepaalde oplossing heeft en ook wanneer dat niet het geval is. Wat overblijft is het probleem om in concrete gevallen de oplossing uit te rekenen en dat is, omdat het basisrecept daarvoor bekend is, voor de mens alleen maar een vervelende klus. Tegenwoordig heb je daar computers voor en je kunt je dus afvragen waarom tal van wiskundigen over de hele wereld zich nog steeds buigen over dit probleem en ook waarom talloze wetenschappers, industrieel ontwerpers, en analisten ongeduldig staan te wachten op nieuwe inzichten. Er worden met grote regelmaat hele congressen aan dit type probleem gewijd. Dat wist ik ook nog niet toen ik pas afgestudeerd was en eigenlijk had ik ook nog geen goed idee waar grote stelsels optreden en hoe groot ze dan kunnen zijn. Om eerlijk te zijn: het probleem had ook niet mijn belangstelling en ik begon als jong onderzoeker met het numeriek integreren van functies, ofwel het met de computer bepalen van de oppervlakte onder een mogelijk ingewikkelde kromme. Daar was de aardigheid na dik twee jaar van af, waarna ik mijn promotiebaan in Utrecht opzegde en in 1969 ging werken bij het Reactor Centrum in Petten, het tegenwoordige Energie Centrum Nederland. Daar liep ik frontaal tegen grote stelsels op, ze deden met hun grote computer vrijwel niet anders. Die

stelsels ontstonden bij het numeriek modeleren van het gedrag van de kernreactor op hun terrein. Men wilde graag, voordat men stralingsexperimenten deed, weten hoe de reactor daar op zou reageren. Tenslotte stond die reactor vlakbij en dan wil je je best wel doen.

Warmtestroming in een plaat

De modellering die gebruikt wordt om het gedrag van een kernreactor te bestuderen is wat ingewikkeld en daarom wil ik u een eenvoudiger voorbeeld voorzetten. Stelt u zich een dunne rechthoekige plaat metaal voor. We kennen de temperatuur langs de zijden van de rechthoek en we willen weten hoe warm de plaat overal is. Dat zouden we natuurlijk gewoon kunnen meten, maar in werkelijkheid is zo'n plaat natuurlijk niet zeer dun en dan willen we de temperatuur in het inwendige kennen. Bovendien wil je in ontwerpprocessen van te voren weten wat je te wachten staat. We houden het voor het gemak dus maar even bij het vereenvoudigde voorbeeld. Het is slechts een vingeroefening en het wordt vanzelf erger. Overal de temperatuur berekenen is voorlopig wat veel, maar het zou al mooi zijn als we de temperatuur in een aantal punten zouden kunnen berekenen.

We leggen daartoe een denkbeeldig regelmatig rooster over de plaat aan. Dat rooster heeft 12 knooppunten en de lijntjes geven aan hoe de knooppunten aan elkaar gerelateerd zijn. De bolletjes geven de knooppunten aan waar we de temperatuur zouden willen kennen. Voor de temperatuur in een roosterpunt,



Numeriek model

- Fysische warmtevergelijking:
 $-T_{XX} - T_{YY} = 0$
- Benaderingsformule:
 $T_6 \approx \frac{T_5 + T_7 + T_{10} + T_2}{4}$
- Rekenmodel:
 $4T_6^h - T_5^h - T_7^h - T_{10}^h - T_2^h = 0$
- Twaalf vergelijkingen, twaalf onbekenden

in de figuur roosterpunt nummer 6, gebruiken we een eenvoudige benaderingsformule voor de fysische warmtevergelijking die het temperatuursverloop beschrijft. De temperatuur in elk roosterpunt geven we aan met het symbool T met als index het nummer van het roosterpunt. In het rekenmodel voegen we nog een index h toe om aan te duiden dat we niet de exacte temperatuur berekenen en dat de benaderde waarden van de roosterafstand h afhangen.



Complex rekenrooster

Dat leidt in dit geval tot 12 vergelijkingen met 12 onbekenden en die kunnen we gelukkig oplossen omdat de knooppunten die met randpunten verbonden zijn een bekend rechterlid opleveren. De verkregen benadering is grof, maar je kunt bewijzen dat de afwijking van het antwoord ten opzichte van de echte temperatuur afneemt met het kwadraat van de roosterafstand: een tien keer zo kleine roosterafstand h levert zo ongeveer een honderd keer zo kleine afwijking van het exacte antwoord op. Voor een plaat van 1 bij 1 meter hebben we ruwweg een rooster met roosterafstand 1 cm nodig om ongeveer 4 cijfers precisie in het resultaat te krijgen. Dat betekent dus $100 \times 100 = 10000$ vergelijkingen met even zoveel onbekenden. Driedimensionaal kom je zo voor een kubus van 1 kubieke meter aan een miljoen vergelijkingen met een miljoen onbekenden. Zou je dat zonder verder nadenken aan een computer aanbieden, om met de standaard eliminatieprocedure het antwoord te bepalen, dan zou dat ongeveer tien tot de achttiende rekenoperaties (optellingen, vermenigvuldigingen, ...) vergen. Een immense klus, waar de allersnelste computers op dit moment toch al gauw een week rekentijd voor nodig hebben.

Gauss

U zult zich nu kunnen voorstellen dat het voor de volgende situatie nog problematischer wordt: rond 1820 hield de Duitse wis-

kundige Gauss zich ook bezig met het praktisch oplossen van stelsels vergelijkingen. In zijn geval stelsels van vier vergelijkingen met vier onbekenden die optraden bij het nauwkeurig bepalen van afstanden en hoeken bij landmeting via driehoeken. De coëfficiënten in zijn stelsels waren geen mooie getallen en het rekenwerk met de hand werd al gauw erg vervelend: hoe nauwkeurig moest hij zijn tussenresultaten uitrekenen? Bovendien: hoe kwam je er achter dat je je niet vergist had? Hij bedacht daarom een methode waarmee hij snel bruikbare benaderingen kon uitrekenen. Een voorbeeld:

$$\begin{cases} 8x + y = 10, \\ x + 10y = 21. \end{cases}$$

In dit voorbeeld heb ik gehele getallen als coëfficiënten gekozen, maar daar was in het geval van Gauss geen sprake van. De oplossing van dit stelsel is $x = 1$ en $y = 2$, maar neem even aan dat we dat nog niet weten, dat de getallen in het voorbeeld niet zo mooi zijn en dat we het risico op vergissen willen beperken.

Gauss liet om te beginnen de y uit de eerste vergelijking weg:

$$\begin{cases} 8x = 10, \\ x + 10y = 21. \end{cases}$$

De oplossing is nu eenvoudig te bepalen: $x = 1.25$, $y = 1.975$. Niet zo heel best, maar we hebben de grootteorde redelijk te pakken. Dit werkt alleen maar als de coëfficiënten die we weg laten klein zijn ten opzichte van de overblijvende invloeden coëfficiënten en dat was bij Gauss het geval. Gauss paste nog een aantal trucs toe, zoals het geschikt veranderen van de volgorde van de vergelijkingen om de benadering nog iets te verbeteren. Vervolgens dacht hij na over het corrigeren van de benadering. Hij zag in dat de (nog onbekende) correcties voldeden aan dezelfde vergelijkingen, echter nu met een ander rechterlid. Daarom kan dezelfde truc, het weglaten van de coëfficiënt, rechtsboven weer toegepast worden om een benadering voor de correctie te verkrijgen. Met deze benaderde correctie kan de benaderde oplossing 1.25, 1.975 aangepast worden en dat leidt tot een betere benadering, om precies te zijn: 1.00313, 1.999687. Zo verder gaand komen we in een klein aantal stappen zeer dicht bij de oplossing $x = 1$, $y = 2$. Het aantrekkelijke voor Gauss was dat hij in elke rekenstap niet erg nauwkeurig hoef-

de te rekenen: hij mocht zich zelfs vergissen, want het proces corrigeert zichzelf in de volgende stappen. Hij schreef dan ook enthousiast aan zijn collega Gerling dat men dit proces half slapend kon doen of desnoods tijdens het rekenen aan iets anders kon denken. Dit was een eerste voorbeeld van een zogenaamd iteratief proces: elke rekenslag om een betere benadering te krijgen heet een iteratie.

Krylov

Na Gauss kwamen er nog aanpassingen op dit proces maar de basisgedachte bleef onaangetast. Jacobi bedacht een nog iets eenvoudiger proces, rond 1846, om stelsels van zeven vergelijkingen met zeven onbekenden te kunnen oplossen. Dat had hij nodig om de stabiliteit van de planetenbanen in ons zonnestelsel te kunnen bestuderen. Men dacht toen nog dat er maar zeven planeten waren en de gevonden afwijkingen waren er mede de oorzaak van dat men een achtste planeet op het spoor kon komen.

Het duurt dan ruim tachtig jaar voordat de volgende essentiële stap gemaakt kon worden. De Russische wiskundige Krylov kwam rond 1930 op het idee om in een gegeven stelsel een willekeurige benadering voor de oplossing in te vullen en dan het rechterlid uit te rekenen. Dat rechterlid vulde hij daarna ook weer in het stelsel in en kreeg zo het volgende rechterlid. De serie rechterleden die hij zo achtereenvolgens verkreeg vormde wat men later een Krylovruimte is gaan noemen [2].

Krylov bestudeerde stelsels van zes vergelijkingen met zes onbekenden, die optraden bij een ruwe modellering van stabiliteitsproblemen in de scheepsbouw. Hij genereerde zes achtereenvolgende rechterleden en probeerde deze zo te combineren, met geschikt gekozen coëfficiënten, dat ze samen nul opleverden. De zo gevonden coëfficiënten stelden hem in staat om de stabiliteitsfactoren (eigenwaarden) uit te rekenen. Voor zes vergelijkingen met zes onbekenden leverde dit proces nog redelijke stabiliteitsconstanten op. Voor stelsels met (veel) meer vergelijkingen liep het al gauw spaak, maar dat bleek pas (veel) later toen de computer het rekenen met grotere stelsels toeliet.

In 1952 – we zijn weer 20 jaar verder – paste de Hongaar Lanczos het proces van Krylov verder aan. Hij construeerde een betere basis voor de Krylovruimte, in plaats van de rechterleden die Krylov gebruikte, en kon zo nog weer grotere stelsels goedkoper oplossen [3].

Een aardige bijkomstigheid was dat je voor een stelsel van n vergelijkingen met n on-

bekenden hooguit n rekenslagen (iteraties) hoefde uit te voeren om aan de gewenste oplossing van het stelsel te komen, als je tenminste exact rekende. Bij Gauss was dat aantal iteraties in principe nog ongelimiteerd. Voor beide aanpakken gold dat je in veel gevallen ook met minder dan n stappen al dicht genoeg bij de oplossing kon zijn.

De strijd tussen wiskundige en computer

Nu hebben computers grote moeite met exact rekenen. Daar kwam men bij de Eidgenössische Technische Hochschule (ETH) in Zürich al snel achter. Men bestudeerde daar het gedrag van een aan één kant ingeklemde balk en dat leidde tot het voor die tijd al fantastische aantal van 64 vergelijkingen met 64 onbekenden. Bij het rekenen in ongeveer 14 decimalen constateerde men dat de Lanczos-methode na 64 iteraties nog ver van de oplossing verwijderd bleef; men had wel 200 iteraties nodig om een nauwkeurige oplossing te verkrijgen. Dat was verdacht en de in 1959 gepubliceerde resultaten [4] wierpen dan ook een smet op de aanvankelijk zo veelbelovende Lanczosmethode. De rekenende onderzoekswereld wierp zich met grote energie op andere varianten van de oorspronkelijke Gaussmethode, waarbij men uit opeenvolgende Gaussstappen een betere oplossing trachtte te extrapoleren door nauwkeurig naar de trend in die benaderingen te kijken: de zogenaamde Successieve Overrelaxatie Methoden. Deze methoden, die tot bloei kwamen rond 1970, mede door het werk van de Amerikanen Young en Varga, werden redelijk populair in de industrie. Ze moesten wedijveren met de klassieke eliminatiemethode, die door het werk van de Engelsman Wilkinson rond 1960 ook goed bruikbaar voor computers gemaakt was en die door de steeds sneller wordende computers ook attractief werd voor steeds grotere stelsels. Voor de ingeklemde balk kon die methode al redelijk wedijveren met de Lanczos methode voor 64 vergelijkingen in 1959.

Echter, doordat computers sneller werden konden ze grotere problemen aan en werd de vraag naar deze grotere problemen ook groter. Ik noem dat gekscherend wel eens de frustratie van de numeriek wiskundige: nauwelijks heb je een methode bedacht om een rekenprobleem van zekere omvang nauwkeurig en efficiënt op te lossen of de toepassende wereld wil vrijwel onmiddellijk nog weer grotere problemen oplossen. Nagenieten van het succes is er dus niet bij, je wordt constant uitgedaagd door nieuwe en moeilijker problemen. Dat is ook de grote aantrekkingskracht

van dit vak. Je zou dat kunnen vergelijken met topsport. Het geldt overigens voor vrijwel alle wetenschapsbeoefening.

Rekenboer in Utrecht

Na mijn tijd bij het Reactorcentrum in Petten ging ik in 1971 werken bij het computercentrum van de Utrechtse universiteit, als wiskundig adviseur. Tal van wetenschappers, voornamelijk chemici en fysici, moesten geholpen worden met hun rekenwerk. Dat was niet altijd eenvoudig want die onderzoekers wisten meestal zelf vrij goed van wanten. Alleen als ze volkomen vast zaten kwamen ze langs voor advies en dat betekende dat je vrij goed op de hoogte moest blijven van een uiteenlopend spectrum aan rekenmethoden en de achterliggende wiskunde. Het rekencentrum was gevestigd in hetzelfde gebouw als het wiskunde-instituut, maar de intellectuele afstand tussen beide instellingen werd als groot ervaren. Wij voelden ons rekenboeren. Of, zoals mijn latere promotor, de in 2004 overleden professor van der Sluis ooit eens zei: wij hielden ons bezig met intellectueel zaklopen. De wiskunde gaf voor tal van problemen elegante en compact geformuleerde oplossingen, maar als je die daadwerkelijk in getalvorm wilde uitrekenen kreeg je te maken met de beperkingen van de computer: de eindige rekensnelheid en de eindige rekenprecisie.

In die tijd had ik contact met de bij Shell werkende numericus Koos Meijerink en samen bogen we ons over voor die tijd zeer grote stelsels vergelijkingen: duizenden vergelijkingen met even zovele onbekenden. Deze ontstonden bij het modelleren van olie-stroming door poreuze aardlagen. We wierpen ons op twee verschillende aanpakken: een variant van de directe eliminatietechniek van Gauss: de zogenaamde Choleskimethode, en een variant van de Lanczosmethode: de zogenaamde Geconjugeerde Gradiënten methode. De Choleskimethode was voor onze problemen veel te duur (in termen van rekentijd en benodigde geheugenruimte), de Geconjugeerde Gradiënten methode was verdacht omdat deze zich onbegrijpelijk gedroeg in de eindige rekenprecisie van een computer. We hadden opgemerkt dat de Choleskimethode bij het rekenen aan ons soort grote stelsels al snel tot kleine getallen leidde als tussenresultaat. Die kleine tussenresultaten lieten we dus maar gewoon weg in de hoop dat dat het totale resultaat niet al te zeer zou beïnvloeden. We noemden dat, terecht, de Incomplete Choleskimethode. Die aanpak leverde geen goede benaderingen voor de ge-

zochte oplossing op. Echter, als je met de gevonden benaderingen voor de oplossing weer volgens het recept van Krylov een ruimte opbouwde en daarbij te werk ging met de zojuist genoemde Geconjugeerde Gradiënten methode, dan kreeg je opeens een zeer snel werkende methode (ICCG): de Incomplete Choleski Conjugate Gradients-methode [5].

Incomplete Choleski Conjugate Gradients

In 1972 publiceerden we ons eerste rapport over deze methode. Werd dat een onmiddellijk succes? Ik herinner me dat we bij onze eerste voordrachten over deze methode een beetje wantrouwend werden bekeken: we voerden immers het Choleskiproces beroerd uit en we combineerden dat dan nog eens met methoden waarvan men in Zürich al had laten zien dat die uiterst verdacht waren. Beroerd en verdacht lijken nu niet precies de ideale ingrediënten voor wat een zeer succesvolle methode zou blijken te zijn. Het publiceren werd een martelgang: opeenvolgende tijdschriften weigerden publicatie. We zouden de rekenvoorbeelden te gunstig gekozen hebben en in feite zouden we niets nieuws te zeggen hebben. Toen de gezaghebbende Stanfordiaan Golub in 1975 toevallig op doorreis was in Utrecht, vertelde Van der Sluis over onze resultaten. Golub toonde zich zeer sceptisch: er was al zoveel onderzoek op dit gebied geweest in Amerika en hij kon zich dan ook niet voorstellen dat er nu plotseling iets nieuws uit de hoge hoed getoverd kon worden. Toch nieuwsgierig geworden nodigde hij mij uit voor een bezoek aan Stanford voor de zomer van 1975. Daar raakte hij overtuigd van de kracht van ICCG, onder meer doordat hij een eigen promovendus de zaak ook eens had laten doorrekenen en toen kwam er schot in de zaak. Ons artikel werd eindelijk gepubliceerd in 1977.

De Amerikaanse fysicus David Kershaw was een van de eersten die de ICCG-methode gebruikte voor het doorrekenen van stelsels die voortvloeiden uit de laser-techniek en publiceerde enthousiast de resultaten in 1978. Dat was het feitelijke begin van de zegetocht van deze methode. Als er eenmaal één schaap over de dam is, volgen er meer en al gauw kwamen er de nodige citaties. De groep rond Simon Polak bij het Natlab van Philips was de eerste die, buiten Shell Exploratie waar Koos Meijerink werkte, de ICCG-methode oppikte voor het rekenen aan halfgeleiders. Op numeriek wiskundige congressen werden incomplete decompositietechnieken gemeengoed en ook de geconjugeerde gradiëntenmethode werd plotseling zeer populair (daar had ook

de Engelsman John Reid behoorlijk aan bijgedragen). Opmerkelijk dat de geconjugeerde gradiëntenmethode, in 1952 gepubliceerd door Hestenes en Stiefel [6], er ongeveer vijftientig jaar voor nodig had om door te breken als grensverleggende rekentechniek. Onze incomplete Choleskitechniek had ongeveer een jaar of tien nodig om definitief door te breken. Dat zijn geen unieke situaties; het geldt voor veel nu populaire rekenmethoden. In 1986 bedachten de Amerikanen Saad en Schultz de GMRES-methode, die geschikt was voor nog weer een bredere klasse van problemen dan de Geconjugeerde Gradiëntenmethode (voor de laatste methode moesten de coëfficiënten van het stelsel aan speciale eisen voldoen). Ook voor GMRES duurde het ongeveer een jaar of tien voordat het de method of choice zou worden.

ICCG en zaken daaromheen leidden er ook toe dat ik, nog steeds als medewerker bij het Academisch Computer Centrum Utrecht (ACCU), dan eindelijk in 1982 zou promoveren en twee jaar later werd ik benoemd tot hoogleeraar in Delft (bij de groep rond Piet Wesseling). Daar ontmoette ik Peter Sonneveld: een vat vol ideeën maar met merkwaardig weinig publikatiedrift. Zulke personen zijn in de huidige academische cultuur moeilijk te handhaven, maar naar mijn overtuiging zou elke groep zich de handen moeten dichtknijpen zo'n persoon in hun midden te hebben als brandpunt van de discussies en als aanjager van ideeën. Jaren later zou er gepleit worden voor wiskunde-onderzoeksgroepen van voldoende omvang om een beter klimaat te scheppen voor funderend en toepasbaar onderzoek in samenhang. Zulke groepen zouden beter in staat moeten zijn om diverse vormen van talent te bundelen. Daarover later nog.

Combineren van methodes

Sonneveld bestookte me met zijn gedachten over varianten van de geconjugeerde gradiënten methode die bruikbaar zouden moeten zijn voor algemenere stelsels vergelijkingen. Zo'n variant was begin jaren zeventig door Fletcher al voorgesteld, maar deze zogenaamde Bi-Conjugate Gradientmethode was niet echt doorgebroken. Menig toegepast wiskundige stond uiterst sceptisch tegenover Bi-CG: een methode met menige valkuil. Sonneveld liet zien hoe je deze methode met vrijwel dezelfde inspanning (rekentijd en geheugenruimte) in feite twee keer herhaald kon uitvoeren: in feite dus twee keer zo snel bij de oplossing, als de methode zich tenminste een beetje netjes gedroeg. Het gedrag van Bi-CG

was zeer wispelturig en Sonneveld kreeg met zijn presentatie voor de Nederlandse numeriek wiskundigen geen poot aan de grond. Zijn CGS methode was in feite al bekend begin jaren 80, maar werd in 1989 na een moeizaam proces gepubliceerd [7]. De methode werd een groot succes en het betreffende artikel kon zich al snel temidden van meest geciteerde wiskundepublicaties scharen. Toen ik eindelijk zo'n beetje begreep welk gedachtengoed er achter CGS schuil ging, kon ik zelf de Bi-CGSTAB-methode presenteren in 1992: in feite een goedkope, maar zeer effectieve, combinatie van BiCG en GMRES (in plaats van twee keer BiCG). Onderwijl verruilde ik in 1990 mijn aanstelling in Delft voor een aanstelling aan de Utrechtse universiteit.



Presentatie van ICCG

Het betrekkelijke van een citatie index

De publicatie over Bi-CGSTAB werd in 2000 door het ISI (Institute for Scientific Information) aangemerkt als het wereldwijd meest geciteerde wiskundeartikel dat in de jaren negentig gepubliceerd was: 379 citaties op dat moment. Sonneveld's CGS-publicatie kon toen ook al op 338 citaties bogen. Ter vergelijking: het beroemde artikel van Andrew Wiles uit 1995 met het bewijs voor de laatste stelling van Fermat had toen nog geen honderd citaties. Dit geeft overigens ook aan dat je met enige reserve naar citatietellingen moet kijken. Deze citatieaantallen zijn ontleend aan de gezaghebbende Science Citation Index. Het wapenfeit leverde veel publiciteit op: onder meer een groot artikel in de Volkskrant en zelfs het gratis reizigersblad Metro gaf een klein berichtje over deze opmerkelijke citatiescore.

Geciteerd worden is voor wetenschappers een belangrijke zaak: het toont min of meer objectief hun zichtbaarheid en belang aan. Men kijkt daarbij meestal naar de citaties die gedaan worden in de eerste paar jaar na het verschijnen van een artikel. Of dat het hele verhaal vertelt is zeer de vraag. Een voorbeeld: in 1995 werden

de citatiescores van Utrechtse wetenschappers geanalyseerd, als vingeroefening voor komende VSNU-visitaties. Mijn Bi-CGSTAB-publicatie (1992) kon toen bogen op 75 citaties en dat was veel. De meeste artikelen komen niet verder dan slechts een paar citaties. Zoals gemeld, na de eeuwwisseling was het het wereldwijd meest geciteerde artikel met 379 citaties. Op dit moment ligt haar citatiescore ruim boven de duizend. De meeste citaties, dat wil zeggen het grootste succes, kwamen dus pas tien jaar na de publikatiedatum. Die aantallen worden evenwel bij VSNU-visitaties niet meer meegeteld: daar sluiten de citatievensters na tien jaar. Op die manier zouden een behoorlijk aantal succesverhalen uit de (toegepaste) wiskunde nauwelijks, of helemaal niet, zichtbaar zijn geworden. De Lanczos-methode werd pas populair ongeveer dertig jaar na haar verschijning, voor de geconjugeerde gradiënten methode zou de bloei na vijftig jaar komen.

Het belang van geschiedenis van wiskunde

Soms komen methoden op een wonderlijke en schijnbaar toevallige manier tot stand. Weer een voorbeeld uit de eigen praktijk. Midden jaren negentig nam onze numerieke groep deel aan het NWO-project Massaal Parallel Rekenen. Dit was een door de Utrechtse plasmafysicus Hans Goedbloed geleid project, waar verschillende onderzoeksgroepen in participeerden: plasmafysici, geologen, astronomen, oceanografen, informatici, en numeriek wiskundigen. De gemeenschappelijke noemer van het project was dat de deelnemers tegen enorm grote stelsels vergelijkingen aanliepen die allemaal voortvloeiden uit vrijwel hetzelfde type wiskundige modelering.

De informatici en numeriek wiskundigen moesten helpen om het mogelijk te maken deze enorme stelsels op te kunnen lossen met de moderne grootste computers (die inmiddels parallel waren geworden). Goedbloed had het project intelligent opgezet. Er werden ons kleine stelseltjes als worstjes voor de neus gehangen, er waren grote stelsels waarvan het denkbaar was dat we die ook zouden kunnen helpen oplossen en aan de horizon waren de zeer grote stelsels geplaatst als grote uitdaging. Een van de uitdagingen was het doorrekenen van de modellen voor de stabiliteit van het plasma in een Tokamak-fusioreactor.

Rond 1994 kon dat gemodelleerd worden met rekenmodellen met ongeveer maximaal 20.000 vrijheidsgraden (onbekenden). Dat gebeurde met de Lanczosmethode en de



Tokamak fusioreactor

daarmee verwante Arnoldimethode. Dit aantal vrijheidsgraden was volstrekt onvoldoende om een realistisch beeld te krijgen. Omdat wij goed op de hoogte waren met beide methoden leek onze groep geschikt om de modellen te helpen opschalen. Goedbloed had rekenmodellen met meer dan 500.000 vrijheidsgraden aan onze gezichtseinder geplaatst, ver buiten het bereik van beide methoden. Dit aantal was nodig om instabiliteiten in het plasma, die inmiddels in de praktijk geconstateerd waren (met veel schade), te kunnen voorspellen. Rond diezelfde tijd hadden we contact met de Utrechtse chemicus Joop van Lenthe, die ook grote stabiliteitsproblemen doorrekende. Die haalde zijn neus op voor 'onze' Lanczosmethoden en wees op de successen die de chemici behaalden met de zogenaamde Davidsonmethode. Dit was een in 1975 door de Amerikaanse chemicus Davidson gepubliceerde rekenmethode [8]. Deze methode had bepaalde eigenaardigheden: hoe meer het stelsel leek op een uiterst gemakkelijk op te lossen stelsel, hoe beroerder het convergeerde en voor diagonaalstelsels, stelsels waarin je de oplossing in één oogopslag kon aflezen, was de methode helemaal niet in staat die oplossing te berekenen. Numeriek wiskundigen liepen met een boogje om de methode heen; het aantal publicaties uit numeriek wiskundige kring over Davidson's methode was tot rond 1992 op de vingers van één hand te tellen.

Mijn medewerker Gerard Sleijpen en ik bestudeerden deze methode, daartoe min of meer uitgedaagd door van Lenthe, maar we konden er evenmin als anderen onze vingers achter krijgen. Op dat moment bleek de kracht van een breed geschakeerd Mathematisch Instituut. Dat instituut herbergt een klein, maar uiterst fijn, groepje Geschiedenis van de Wiskunde, toenmaals onder leiding van Henk

Bos. Henk Bos had een afstudeerstudente, Anjet den Boer, die met hulp van Gerard Sleijpen oude artikelen van de astronoom-wiskundige Jacobi (1804-1851) bestudeerde: artikelen uit de periode 1845-1850. Jacobi bestudeerde lineaire stelsels, maar kon destijds nog niet over moderne matrixnotatie beschikken. Dat maakt zijn artikelen moeilijk leesbaar. Hij ontwierp een paar zeer krachtige methoden die echter later in de vergetelheid raakten. Een van die methoden, de Jacobi-diagonalisatiemethode, werd rond 1950 herontdekt door de wiskundige John von Neumann en is nog immer populair. Anjet den Boer bestudeerde de geschiedenis rond deze artikelen en herschreef de oude technieken van Jacobi in moderne matrixnotatie. Dat leverde ons een schat van gegevens op. Zo werden wij een door Jacobi beschreven uitbreiding gewaar die hij gebruikte om zijn diagonalisatiemethode te versnellen. We hadden toen tamelijk snel in de gaten dat deze techniek ook gebruikt kon worden om de Davidson's methode te corrigeren. Dit leidde in 1996 tot publicatie van de inmiddels ook al weer bekende Jacobi-Davidsonmethode [9]. Een aantal elementen kwam in deze methode elegant samen: de reductie van een probleem tot een kleiner probleem in de geest van Krylov, de modificatie van het probleem van Davidson en de correctie-aanpak van Jacobi. De mogelijkheid om tot deze methode te komen werd geschapen door de omgeving waarin we verkeerden: een uitstekende afdeling Theoretische Chemie, die zeer goed op de hoogte was van moderne rekenmethoden, de aanwezigheid van een groepje Geschiedenis van de Wiskunde (uniek in Nederland) en de intellectuele druk geleverd door uitdagende problemen in het NWO-project. De verstrekte mogelijkheden van de nieuwe Jacobi-Davidson methode konden verder uitgebuit worden door de beschikbaarheid van een stel uitstekende promovendi. Bovendien zaten we in die tijd nog vrij ruim in de afstudeerstudenten. Met deze methode konden uiteindelijk rond de eeuwwisseling de zeer grote rekenmodellen rond de Tokamak-stabiliteit worden opgelost. Anjet de Boer, die een zeer leesbare scriptie had geschreven, koos voor een andere voortzetting van haar loopbaan. Onder het pseudoniem Anjet Daanje schreef zij onder meer de roman *De blinde Fotograaf* (1997).

Zo aan het einde van een actieve loopbaan komt ook het moment om de eigen publicatielijst nog eens te overzien. Wetenschappers informeren het publiek op uiteenlopende wijze: de publicaties voor vakgenoten, voor toegepaste wetenschappers ook de publikaties

voor wetenschappers in andere vakgebieden en de industrie, lezingen voor uiteenlopende gezelschappen (van uiterst wetenschappelijk tot vrij populair), populariserende bijdragen, Patenten, en wat dies meer zij. Ik heb zelf met veel plezier meegewerkt aan een paar boeken op mijn vakgebied. Enkele daarvan hebben redelijk hoge oplagen bereikt, echter voordat men daar verkeerde conclusies aan verbindt: doorgaans komen de revenuen daarvan niet direct bij de auteurs terecht. In ons geval werd een deel van de opbrengst besteed aan een fonds om studenten te kunnen laten deelnemen aan congressen in Amerika.

Het afrekenen op resultaat

Ik heb u geprobeerd uit te leggen met wat voor soort problemen ik mij lange tijd heb bezig gehouden. Die problemen vond ik zelf ontzettend belangrijk, maar dat vindt elke wiskundige van zijn problemen. Daarin hebben ze meestal dan ook gelijk. Ik had het voordeel dat mijn problemen van direct belang waren voor de toepassende wereld; men stond als het ware te trappelen van ongeduld om deze toegang tot de wiskunde te kunnen gebruiken. Desondanks moet je constateren dat oplossingen die achteraf zeer succesvol bleken toch de nodige tijd vergden om werkelijk ingang te vinden in de gebruikerswereld. Daar kun je je over verbazen, maar het is minder vreemd dan het lijkt. De computerprogramma's die gebruikt worden voor ingewikkelde simulaties zijn groot en complex. Men is met de hebbelikheden, mogelijkheden en beperkingen daarvan vertrouwd. Men leert zich als het ware aan te passen aan die beperkte mogelijkheden. Dan komt er opeens een nieuwe rekenmethode waarmee grotere en moeilijker stelsels kunnen worden uitgerekend. Wordt dat meteen omarmd? Natuurlijk niet. De eerste fase bestaat uit het zich er van te vergewissen dat die nieuwe methode ook inderdaad beter is. Niemand van de kennissen gebruikt hem immers en dat rechtvaardigt een zeker wantrouwen. Men moet er dus eerst wat ervaring mee op doen. Als dan blijkt dat er inderdaad enige gerechtvaardigde hoop bestaat op betere en sneller resultaten, dan komt een lastiger situatie. Niet alleen moet er, vaak ingrijpend, in een grote computercode worden gesneden (de vervanging van het rekenhart), echter die code moet nu ook geschikt gemaakt worden voor die grotere problemen. De onderdelen van die codes zijn vaak gemaakt door verschillende programmeurs, velen daarvan zijn al verdwenen naar andere werkplekken, en men moet dus inbreken in het gedachtengoed van anderen.

Men moet wel heel zeker zijn van zijn zaak om aan deze klus te beginnen. Men moet immers de inspanningen ook met enig succes kunnen rapporteren aan de werkleider. Nieuwe wiskundige technieken, zelfs als ze al aangeboden worden als hapklare in programmeerbare vorm gegoten brokken voor problemen die door iedereen in deze programmeerwereld begrepen worden, vinden dus maar zeer langzaam ingang. Ik bevind mij met mijn problemen, zoals al eerder opgemerkt, aan de uiterst toepasbare kant van de wiskunde. Via dit soort rekentechnieken wordt vaak een venster geopend op de onderliggende nog weer verder van de directe toepassing gelegen, maar o zo essentiële diepere wiskunde. Men kan zich dan een beetje voorstellen hoe lang het duurt voordat die algemeen toepassing vindt. Dat brengt wiskundigen in een lastig parket in deze op direct resultaat afrekenende samenleving. Organisaties die het fundamentele onderzoek financieren worden door hun geldgevers ook weer afgerekend op het al dan niet zichtbare resultaat. Het mooiste is het wanneer dat onderzoek meteen een grens verlegt, een beroerde ziekte oplost, de televisie nog weer platter en goedkoper maakt, de auto schoner, het verkeer soepeler laat doorstromen, en het klimaat op korte termijn verbeterd of schonere energie tegen lagere prijs oplevert. Dat dwingt de onderzoekers min of meer om hun geldschietters gouden bergen voor te spiegelen. Zij willen hun doen geloven in een toekomst waar ze zelf een klein radertje in zijn. Dat is lang niet altijd een valse voorstelling van zaken, maar de aangesprokenen, zowel als de boodschapper, vergissen zich meestal in de tijdschaal waarmee nieuwe inzichten de samenleving penetreren. De zichtbare resultaten van het fundamentele onderzoek zijn meestal niet binnen een jaar of twintig te verwachten. Echter als dat onderzoek twintig of meer jaren geleden niet had plaats gevonden, dan hadden we met elkaar hier niet gezeten zoals we nu zitten. De economie was gaan achter lopen, de welvaart zou gedaald zijn, onze gezondheidszorg zou zijn blijven steken, enfin, vult u zelf maar verder in.

Mijn betoog moet nu ook weer niet uitgelegd worden als een pleidooi om elke zichzelf funderend noemend onderzoeker zonder voorbehoud maar in de watten te leggen. Natuurlijk moeten er kwaliteitscriteria aangelegd worden, we moeten echter voorzichtig zijn met het afrekenen op direct economisch of maatschappelijk nut. Dat is er meestal niet. Wat goed onderzoek in elk geval wel oplevert zijn uitstekende jonge onderzoekers die ge-

traineerd zijn in zich het hoofd te breken over ingewikkelde materie. Zulke denkkracht is in onze maatschappij op tal van plaatsen broodnodig en gewenst. Er is dus wel degelijk ook een direct nut op de korte termijn.

Het belang van clustervorming

Daarmee kom ik op een zorgelijk punt. Eerder noemde ik de beschikbaarheid van afgestudeerde studenten als een der sleutels voor succesrijk onderzoek. Helaas zijn in de afgelopen decennia de studentenaantallen in de wiskunde in Nederland zorgelijk gedaald. Men kan dat toeschrijven aan de talrijke verbeteringen in ons middelbaar onderwijs, zoals ik een kunsthistoricus ooit cynisch hoorde opmerken, of aan veranderingen in de maatschappij, feit blijft dat de aantallen veel te laag zijn geworden voor een samenleving die het van innovatieve slagkracht moet hebben om haar welvaart op peil te houden. De wiskundigen hebben deze ontwikkelingen niet rustig afgewacht, integendeel, ze hebben geprobeerd op allerlei wijzen het tij te keren: intensieve voorlichting, aanpassingen in de aangeboden studiepakketten en meer contact met middelbare scholen.

Omdat de financiering van het universitaire onderzoek mede afhangt van de studentenaantallen, kwam ook de omvang van het onderzoek onder druk te staan. De KNAW bracht de bedreigingen voor het onderzoek in het TWON-rapport duidelijk in kaart [10]. De wiskundigen bundelden hun krachten in het zogenaamde OOW en in een unieke samenwerking met NWO, en zeker door de niet-aflatende inzet van de NWO-ers Annejet Meijler en Lex Zandee, werd een steunplan voor de wiskunde tot wasdom gebracht, zoals neer-

gelegd in de notitie *Nieuwe Dimensies Ruimer Bereik* [11]. Samen met collega Rien Kaashoek (emeritus VU), Chris Zaaij en de eerder genoemde ruime NWO-steun, heb ik hier aan mee kunnen werken.

Alhoewel het allemaal beter had gekund, stemt het toch tot tevredenheid dat inmiddels een drietal clusters van wiskunde-onderzoek van start kon gaan met, voor de wiskunde, ruimere onderzoeksfinanciering. De financiën hiervoor werden geleverd door de ministeries van Economische Zaken (EZ) en Onderwijs, Cultuur en Wetenschap (OCW) en door NWO. Inmiddels lijkt het tij gunstig voor het opstarten van een vierde en mogelijk zelfs een vijfde cluster.

Clustering van het Master-onderwijs

Parallel hieraan loopt een unieke landelijke samenwerking van de Nederlandse wiskundigen bij het Master-onderwijs. Door de dalende aantallen studenten en de daardoor ook in omvang dalende staf, dreigde met name het onderwijsaanbod in de masteropleidingen te verschrompelen in diversiteit. De wiskundigen, onder lichte dwang van OCW en door de VSNU aangemoedigd, sloegen de handen ineen en ontwierpen een aantrekkelijke serie colleges die centraal gegeven worden.

Dit had meerdere voordelen. Zo konden onderwerpen aan bod komen die anders slechts op een publiek van slechts een paar studenten hadden kunnen rekenen (weinig effectief dus), de topwiskundigen konden zich zo presenteren aan een groter studentenpubliek en, ook niet onbelangrijk, studenten uit verschillende universiteiten ontmoeten elkaar in grotere groepen rond onderwerpen van wederzijds belang. Dit landelijke

masteronderwijs vult het lokale masteronderwijs substantieel aan en loopt nu al weer een paar jaar met groot succes.

Wiskunde staat midden in de maatschappij

Ik kom aan het eind van mijn beschouwingen. Heel veel is niet aan de orde gekomen, maar ik hoop u een blik op het leven van een toegepast wiskundige geboden te hebben. Wiskundigen hebben de reputatie enigszins van de wereld afgekeerde wetenschappers te zijn die in hun kamertjes eenzaam op hun problemen zitten te broeden. Die voorstelling, mocht zij ooit al karakteristiek zijn geweest, klopt heden ten dage zeker niet. Wiskunde wordt in interactie in grotere groepen bedreven met veel uitwisseling van ideeën. Het is een uitermate prettig en schoon bedrijf: ik ben dan ook mijn hele loopbaan met veel plezier naar mijn werkplek gegaan. Naast de jaren in Petten (Reactor Centrum) en bij het Computercentrum ACCU in Utrecht, heb ik zes jaar als hoogleraar in Delft gewerkt. De contacten daar opgedaan hebben mijn verdere loopbaan ingrijpend (en positief) beïnvloed. Zij hebben onder meer geleid tot mijn lidmaatschap van de huidige Netherlands Academy of Technology and Innovation (voorheen FORUM). Dat heeft mij een gevarieerd beeld gegeven van de impact van wetenschappelijk onderzoek op onze samenleving. De langste tijd heb ik doorgebracht in Utrecht bij het Mathematisch Instituut: een bijzonder collegiale werkomgeving van zeer hoog wetenschappelijk niveau. Toen ik nog bij het ACCU werkte kon ik vanuit de lift af en toe een glimp daarvan opvangen, nog niet bevroedende dat ik daar een substantieel deel van mijn actieve loopbaan zou doorbrengen. ←

References

- 1 R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- 2 Zie voor meer informatie over Krylov: www.math.uu.nl/people/vorst/kryl.html
- 3 C. Lanczos, 'Solution of systems of linear equations by minimized iterations', *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **49** (1952), pp. 33–53.
- 4 M. Engeli, T. Ginsburg, H. Rutishauser, E. Stiefel, *Refined Iterative Methods for the Computation of the Solution and the Eigenvalues of Self-Adjoint Boundary value Problems*, Birkhäuser, Basel, 1959
- 5 J.A. Meijerink, H.A. van der Vorst, 'An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix', *Math. Of Comp.* **31** (1977), pp. 148–162.
- 6 M.R. Hestenes, E. Stiefel, 'Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems', *J. Res. Natl. Bur. Stand.* **49** (1952), pp. 409–436.
- 7 P. Sonneveld, 'CGS: A fast Lanczos-type Solver for nonsymmetric linear Systems', *SIAM. J. Sci. Statist. Comp.* **10** (1989), pp. 36–52.
- 8 E.R. Davidson, 'The iterative Calculation of a Few of the lowest Eigenvalues and corresponding Eigenvectors of large real symmetric matrices', *J. Comp. Phys.* **17** (1975), pp. 87–94.
- 9 G.L.G. Sleijpen, H.A. van der Vorst, 'A Jacobi-Davidson iteration Method for linear Eigenvalue Problems', *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **17** (1996), pp. 401–425.
- 10 *De toekomst van het wiskunde-onderzoek in Nederland*, Verkenningen, deel 1, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1999.
- 11 *Nieuwe dimensies, ruimer bereik – Een nationale strategie voor wiskundeonderzoek en gerelateerde master opleidingen*, Overleg Onderzoekscholen Wiskunde, NWO, 2002.

Bennie Mols

Bennie Mols,
Kijkduinstraat 121-2,
1055XW Amsterdam
bmols@orange.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2007

Pompje helpt hartpatiënten

Bij patiënten met een acuut hartfalen, kan een klein pompje tijdelijk het pompen van het hart ondersteunen. Omdat niet alle relevante parameters te meten zijn in het hart van een patiënt, moet een wiskundig model die berekenen. Met deze kennis kan het pompje de patiënt nog beter helpen en kan hartschade worden verminderd.

Het hart is een holle, ongeveer vuistdikke spier, die bloed door het lichaam pompt door met een bepaalde regelmaat samen te trekken. Bij de mens bestaat het hart uit vier kamers, die door kleppen van elkaar gescheiden zijn. Samen vormen ze twee pompen, die achter elkaar zijn geschakeld. De ene dient voor de longcirculatie — in de longen neemt het bloed zuurstof op — en de ander voor de lichaamscirculatie. Het hart pompt zuurstofrijk bloed door het lichaam. Lichaamscellen verbruiken de zuurstof, waarna zuurstofarm bloed naar het hart terugkeert. In rust pompt het hart bij een gemiddelde volwassen persoon tussen vijf en zeven liter bloed per minuut rond. Het aantal hartslagen ligt daarbij tussen de zestig en honderd per minuut.

In 2004 startte in het Academisch Medisch Centrum (AMC) in Amsterdam het programma Mechanical Assistance in congestive heart failure. In het kader van dit programma is voor verschillende groepen hartpatiënten de toepassing van een klein hartpompje (de *Impella*-hartpomp) onderzocht. Met het onderzoek naar deze mechanische hartondersteuning loopt het AMC voorop in de wereld. Het pompje stuwt het bloed met een bepaalde snelheid van de linker hartkamer naar de aorta, en ondersteunt zo de normale hartfunctie. Aan de ene kant is hij bedoeld voor hartpatiënten die een dotterbehandeling met

een hoog risico moeten ondergaan. Het pompje moet dan tijdens het dotteren de bloedcirculatie ondersteunen. Deze patiënten lopen namelijk de kans dat ze in een cardiogene shock raken, wat gepaard gaat met een plotselinge daling van de bloeddruk, een verhoogde hartslagfrequentie, vaatvernauwing en ernstige kortademigheid.

Aan de andere kant wordt hetzelfde pompje ook gebruikt bij patiënten die een hartinfarct hebben gehad. Het idee is dat door de pompondersteuning minder hartspierweefsel afsterft en dat de hartfunctie beter herstelt na het infarct. In maart 2007 werden op een congres van de American College of Cardiology in New Orleans de eerste resultaten gepresenteerd. De patiënten die na het hartinfarct ondersteuning kregen van een pompje, vertoonden een belangrijke verbetering van de hartfunctie.

Geen ingrijpende operatie nodig

Het pompje bestaat in twee versies: een die het bloed met een snelheid van 2,5 liter per minuut rondpompt, en een die een maximum haalt van vijf liter per minuut. Het eerste pompje, dat uiteindelijk in de modellen van de studiegroep is gebruikt, meet vier millimeter in doorsnede en is ongeveer vijf tot zes centimeter lang. Er zit een klein motor-tje in, dat een soort schroef van Archimedes

aandrijft. Het pompje wordt via de liesslagader naar de grote lichaamsslagader geschoven, en van daaruit verder door de aortaboog tot in de linker hartkamer. De katheter waarmee het pompje door de aderen wordt ingebracht zorgt ook voor de elektriciteit die het pompje nodig heeft. Het grote voordeel van dit pompje is dat er geen ingrijpende borstkasoperatie voor nodig is om hem in het hart aan te brengen.

Krischan Sjaauw werkt als arts-onderzoeker en promovendus op de cardiologieafdeling van het AMC. “Wij hebben in de afgelopen drie jaar bij zo’n zeventig patiënten het hartpompje ingebracht. Hoewel we zien dat het pompje het hart ondersteunt wat betreft de bloedstroom en de bloeddruk, weten we niet precies welk deel van de bloedstroom het pompje voor zijn rekening neemt en welk deel het hart zelf verzorgt. Dat kunnen we niet direct in de patiënt meten. Daarnaast weten we niet precies of de huidige manier om de bloedstroom indirect te bepalen geschikt is in aanwezigheid van de hartpomp. De hartpomp verandert namelijk de bloeddoodstroom. Toch willen we graag het antwoord weten. Dan kunnen we namelijk bepalen in hoeverre een patiënt afhankelijk is van de pomp, of de pomp harder moet werken of juist minder hard, en wanneer we de ondersteuning kunnen afbouwen, zodat het hart het bloed uiteindelijk weer helemaal op eigen kracht rondpompt.”

Bas de Mol, hoogleraar veiligheidskunde in de gezondheidszorg, en werkzaam op de afdeling hartchirurgie van het AMC wees

Sjauw op het bestaan van de studiegroep. Hij had een paar jaar geleden al eens een ander medisch probleem ingebracht bij de studiegroep wiskunde met de industrie. Sjauw: "Onze vraag aan de studiegroep was of ze een wiskundig model konden maken dat berekent hoeveel bloed het hart zelf rondpompt, en hoeveel het pompje voor zijn rekening neemt. In een experimentele omgeving, buiten het lichaam, is daar wel naar gekeken, maar eenmaal in het lichaam kunnen we niet exact meten wat er verandert door het aanbrengen van de pomp."

Elektrisch netwerk

Het lijkt voor de hand te liggen om de bloedstroming in en rond het hart in drie dimensies te simuleren. Gewoon de geometrie van het hart en de aderen modelleren, en dan de stroming van het bloed met computationaal fluid dynamics nabootsen. Hoewel daar verschillende modellen en numerieke technieken voor bestaan, zijn die rekenintensief en missen ze de flexibiliteit om door te rekenen wat er gebeurt als het hart van een pompje wordt voorzien. "We hebben er daarom voor gekozen om het probleem te modelleren naar analogie met een elektrisch netwerk", vertelt Michel Vellekoop, wiskundige van de Universiteit Twente. "Dan hoef je niet alle stromingsdetails van het systeem mee te nemen. Die details worden in de modellering automatisch uitgemiddeld. Het pompje representeren we dan als een batterij, de elasticiteit van de aderen als condensatoren, de wrijving die het bloed voelt, als weerstanden, en de traagheid van het bloed als een spoel. De vraag is dan hoe je al die componenten goed aan elkaar moet knopen zodat het elektrische netwerk inderdaad een hart met een pompje erin voorstelt."

Op zo'n elektrisch netwerk gelden de twee wetten van Kirchhoff: behoudswetten voor lading en energie. De eerste wet van Kirchhoff stelt dat op elk punt in het netwerk de som van de in- en uitstromende ladingen gelijk aan nul is. Voor het cardiovasculaire systeem komt de elektrische lading overeen met het bloedvolume. Volgens de tweede wet van Kirchhoff moet de som van de potentiaalverschillen in een gesloten lus gelijk aan nul zijn. In het cardiovasculaire systeem is het potentiaalverschil analoog aan een drukverschil. De wiskundigen hebben de eenvoudige sommaties uit de twee wetten van Kirchhoff vertaald in een stelsel van twaalf gekoppelde differentiaalvergelijkingen.

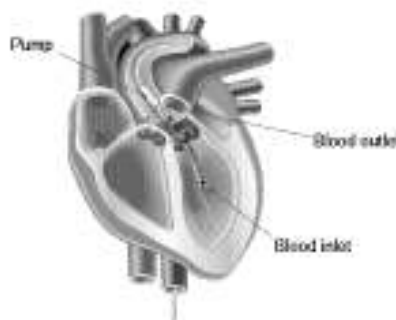
Vellekoop: "Dat stelsel kunnen we niet analytisch oplossen. De hartklep bijvoor-

beeld, blijkt een niet-lineair element te zijn, waar je analytisch niet ver mee komt. Daarom hebben we het programma Matlab gebruikt om de oplossingen numeriek te simuleren. We hebben verder aangenomen dat de pomp een constante pompsnelheid van 2,5 liter per minuut levert."

Kalibratie

Typisch zijn alleen meetgegevens bekend van de druk en het volume van het bloed in de hartkamers. Door het modelsysteem zo te regelen dat deze meetgegevens worden gereproduceerd, hoopten de wiskundigen de niet meetbare grootheden – hoeveel van het werk van het hart de pomp heeft overgenomen – toch op een betrouwbare manier te berekenen.

"Om ons model te vergelijken met de experimenteel bekende gegevens, hebben we de druk in de linker hartkamer als functie van het volume berekend", vertelt Vellekoop. "Ons model slaagt er dan aardig in de meetgegevens te reproduceren. Dat gaf ons het vertrouwen dat we ook iets zinvol kunnen zeggen over de niet te meten grootheden. Zo hebben we de bloedstroom door de pomp als functie van de tijd berekend. Dat is waar het AMC naar zocht."



Een via een katheter in het hart gebracht pompje

Het belangrijkste resultaat dat uit de simulaties volgt, is dat de extra weerstand die de pomp zelf aan het systeem toevoegt, een belangrijke parameter in het hele systeem blijkt te zijn. Vellekoop: "De pomp zorgt voor een extra weerstand in de aorta. Die weerstand hangt van allerlei factoren af, en levert een niet-lineaire bijdrage. Omdat de weerstand per pomp en per patiënt kan verschillen, denken we dat er meer onderzoek nodig is om die bijdrage verder te onderzoeken."

Ook blijkt uit de resultaten dat er een terugstroom mogelijk is als de pomp te weinig bloed rondpompt. Dat zou een sterk ongewenste situatie opleveren. Krischan Sjauw van het AMC: "Deze situatie zou je kunnen vergelijken met het inbrengen van de pomp,

wanneer de pomp nog niet op volle toeren draait. Alleen duurt dit maar hooguit een minuut. Zodra de pomp namelijk is ingebracht, wordt de pomp snel ingeschakeld en levert hij genoeg bloedstroom om terugstroom te voorkomen."

Verder laten de berekeningen zien dat de pomp de bloeduitstroom van het hart onder normale omstandigheden met zeven procent vergroot: van 5,54 tot 5,95 liter per minuut. Dat is het netto resultaat van een toename van ongeveer 1,5 liter per minuut in bloeduitstroom tijdens de relaxatiefase van het hart, en een afname van ongeveer 1,1 liter per minuut in bloeduitstroom tijdens de fase waarin het hart samentrekt.

Zwak hart

De wiskundigen denken dat het model zich gemakkelijk laat aanpassen om complexere omstandigheden door te rekenen. Daarbij is het niet nodig om het bloedvatenstelsel in meer detail mee te nemen, omdat blijkt dat het huidige model de dynamica van de bloedstromen door de vaten goed genoeg meeneemt. Ze bevelen aan dat verder onderzoek zich concentreert op de exacte relatie tussen de druk en de stroming door de pomp onder meer extreme omstandigheden. Het huidige model richt zich alleen op een constante pompsnelheid. Maar het model biedt ook de mogelijkheid om te onderzoeken of het variëren van de pompsnelheid misschien betere resultaten levert onder bepaalde omstandigheden.

Nu zijn de gebruikte meetgegevens nog afkomstig van een gezond persoon. Een zwak hart is echter minder elastisch. Een andere uitdaging voor de toekomst is daarom volgens Vellekoop om het model daarop aan te passen, wat een iets ander verband tussen druk en volume levert: "Ik denk dat we dat kunnen aanpassen door de condensatoren in het elektrische model iets te wijzigen."

"In de korte tijd van een week heeft de studiegroep knap werk geleverd", vertelt Krischan Sjauw. "Ze hebben de pomp gemodelleerd, en een aantal situaties gesimuleerd. Het is een eerste, veelbelovende aanzet. De studiegroep heeft ons een nieuwe kijk op het probleem gegeven, bijvoorbeeld dat de weerstand van de pomp zelf zo'n belangrijke rol blijkt te spelen. Verder zijn er ook enkele nieuwe vragen naar boven gekomen. Het AMC zou via bijvoorbeeld een afstudeerproject ook graag verder gaan met een wiskundig onderzoek van het probleem. Ook willen we het model verder doortesten met patiëntgegevens."



Jan Heering

Centrum voor Wiskunde en Informatica,
Department of Software Engineering,
Kruislaan 413, Amsterdam
Jan.Heering@cwi.nl

Mark Mieras

Van Ostadestraat 196,
Amsterdam

Maatschappij

CWI: Een fundamenteel verschil

Het is ruim zestig jaar geleden toen de ‘Stichting Mathematisch Centrum’ (SMC) door Van der Corput, Van Dantzig, Koksma, Kramers, Minnaert en Schouten werd opgericht. Het instituut, dat tegenwoordig de naam Centrum voor Wiskunde en Informatica draagt, heeft zich van meet af aan ingespannen om de beoefening van toegepaste wiskunde te bevorderen door samenwerkingsverbanden met andere wetenschapsgebieden en bedrijven. Het instituut is ook bijzonder, omdat informatica en wiskunde onder één dak huizen en veel samenwerken. Het instituut blijft inzetten op toegepast en fundamenteel onderzoek en blaakt van zelfvertrouwen, getuige de laatste strategienota en ook onderstaand artikel van een van hun medewerkers.

Het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), een instituut van NWO, de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, gaat zich de komende jaren voornamelijk richten op vier maatschappelijke thema's: aard- en levenswetenschappen, maatschappelijke logistiek, de data-explosie, en software als service. Dit staat in de *CWI Strategienota 2007–2012*, die op 4 juli 2007 aan Peter Nijkamp, voorzitter van het Algemeen Bestuur van NWO, werd gepresenteerd.

In 2005 werd het CWI door een internationale evaluatiecommissie als ‘excellent’ beoordeeld. Om deze positie verder te versterken, werd het beleid voor de komende jaren geformuleerd in een nota, waarin zowel heden als toekomst aan bod komen. Deze nota heeft als titel *Een fundamenteel verschil*. Dat is wat het CWI de komende vijf jaar wil maken.

Wat het CWI nu is

Het CWI is sinds zijn oprichting in 1946 het nationale onderzoekscentrum voor wiskunde en informatica. “Een kruispunt van kennis en contacten en een kraamkamer voor hoogleraren”, aldus directeur Jan Karel Lenstra. “Het instituut heeft ruim 170 hoogleraren af-

geleverd, van wie er nu nog zo'n 120 actief zijn.”

Het CWI richt zich op fundamenteel onderzoek geïnspireerd door praktische vraagstellingen en heeft daarmee een eigen plaats in het Nederlandse onderzoeksveld. Lenstra: “Onze kracht ligt in het ontdekken, onderkennen, onderzoeken en ontwikkelen van nieuwe ideeën, om de inzichten vervolgens te laten doorstromen naar wetenschap en industrie. Het gaat ons om wiskunde en informatica die elkaar bezielen: algoritmische wiskunde, gericht op modelleren, analyseren, simuleren en optimaliseren, en kern-informatica, zoals complexiteit en algoritmen, softwaretechnologie en database-architectuur. Onderzoek op het grensvlak van wiskunde en informatica dat uniek is in Nederland en vrucht heeft afgeworpen.”

“De resultaten zijn belangrijk voor de economie: van betaalsystemen en cryptografie tot telecommunicatie en optiehandel, van openbaar vervoer en internet tot waterhuishouding en meteorologie”, aldus Lenstra.

Internationaal netwerk

Met 55 vaste onderzoekers, 40 postdocs en 65

promovendi is het CWI een compact instituut. Het vormt een zwaartepunt in het Europese wiskunde- en informatica-onderzoek. De Europese Commissie noemt wiskunde en digitale vaardigheden sleutelcompetenties voor economische ontwikkeling. Het CWI levert een wezenlijke bijdrage aan de verdere ontwikkeling van deze competenties. Met andere instituten en universiteiten gericht op fundamenteel onderzoek legt het de basis voor nationale en Europese innovatie.

Medewerkers kunnen zich bij het CWI vrijwel volledig concentreren op hun onderzoek en het internationale netwerk en zich daarmee profileren. Meer dan de helft van de vaste onderzoekers heeft een band met een universiteit als deeltijdhoogleraar. Het onderzoeksn netwerk werkt als een magneet op wetenschappelijk talent. Het CWI is een ontmoetingsplaats voor onderzoekers uit de hele wereld. De postdocs en promovendi op het instituut komen uit meer dan vijftig landen.

Om trots op te zijn

Het CWI stond aan de wieg van internet: cwi.nl is de oudste landendomeinnaam ter wereld. We hielpen bij de ontwikkeling van de vleugel van de Fokker Friendship, uitgeroepen tot het mooiste Nederlandse ontwerp van de twintigste eeuw. Het CWI ontwikkelde de populaire taal Python, waarin Google is geprogrammeerd, en paste combinatorische algoritmiëk toe op de treinloop van de Nederlandse Spoorwegen. Het maakte programmatuur voor XML-databases van het Nederlands Forensisch In-



Foto's: Wim Klerkx

stituut en 3D-visualisatietechnieken voor het herkennen van tumorcellen.

Fundamenteel

Het CWI doet niet alleen toegepast, maar ook veel fundamenteel onderzoek. Lenstra: "Fundamenteel onderzoek loopt op de toepassingen vooruit. Een land dat zijn onderzoek puur door de vraag laat leiden raakt achterop. Onderzoek gedreven door nieuwsgierigheid is de bron van alle vernieuwing. Maatschappelijke thema's inspireren ons tot het stellen en bestuderen van fundamentele vragen. De spanning tussen fundamenteel en toegepast onderzoek is voor ons een bron van inspiratie, geen punt van zorg. Vroeger was wiskunde bijvoorbeeld een instrument voor bèta-wetenschap en technologie maar nu is het een universele taal. Hetzelfde onderzoek dat je nu voor Van Gend & Loos (DHL) gebruikt, gebruik je morgen voor DNA-sequencing".

Grensverleggende wiskunde en informatica met een concreet doel

Het CWI richt zijn onderzoek de komende jaren op vier maatschappelijk belangrijke thema's, die goed aansluiten bij de expertise van het instituut: aard- en levenswetenschappen, maatschappelijke logistiek, de data-explosie, en software als service.

Aard- & levenswetenschappen

In het geo- en bio-onderzoek maken klassieke experimenten steeds vaker plaats voor modelleren en simuleren. Deze methoden zijn de komende jaren cruciaal in de celbiologie en bij het onderzoek naar grootschalige ecologische systemen. De wiskunde en de informatica bevestigen daarmee hun plaats in de aard- en levenswetenschappen. Interdisciplinaire onderzoeksprojecten stimuleren een samenwerking die barrières slecht en kennis bundelt.

Uitdaging: tumorgroei eerder opsporen. De silicon-cell is een metafoor voor een ambitieus computermodel waarin de belangrijkste processen in een levende cel gesimuleerd kunnen worden. Het model kan er aan bijdra-

gen dat we tumorgroei in een eerder stadium kunnen opsporen en effectief behandelen. De silicon-cell zal de farmacie helpen doelgericht nieuwe geneesmiddelen te ontwikkelen en celbiologie in te zetten voor de productie. Het CWI gaat zijn bijdrage aan dit onderzoek versterken.

De data-explosie

De explosie van de hoeveelheid digitale data stelt samenleving en wetenschap voor nieuwe vragen. Hoe halen we uit de stortvloed aan gegevens zinvolle en compacte informatie? Er is een grote behoefte aan modellen, methoden en technieken om de databerg te ontsluiten, te doorzoeken en te beheren. Het CWI gebruikt zijn expertise in data-management en learning om een sturende rol te spelen bij de ontwikkeling van technologie die de data-explosie het hoofd biedt.

Uitdaging: de digitale tijdmachine. Onze wereld, samenleving en cultuur laten zich in steeds ruimere mate digitaal vastleggen. Dit suggereert het concept van een digitale tijdmachine: een softwarearchitectuur en infrastructuur waarin media, tijd en plaats samenvloeien in één digitale registratie van onze wereld. Daarmee kunnen onze kleinkinderen de wereld van hun grootouders beleven. De technologie heeft ook de potentie het web zoals we dat kennen te herstructureren. Het CWI wil extra investeren in deze lijn van onderzoek.

Maatschappelijke logistiek

Een efficiënte en flexibele organisatie van logistieke processen zoals verkeer en vervoer, goederenstromen en publieke diensten is essentieel om de samenleving draaiende te houden. Fundamenteel onderzoek levert principes en methoden die breed toepasbaar zijn. Het CWI blijft werken aan grensverleggende oplossingen voor de knelpunten in de samenleving: van treinloop tot files en van wachtlijsten in de gezondheidszorg tot communicatienetwerken.

Uitdaging: de perfecte schoolroostermachine. Schoolroosters kosten hoofdbrekens. Door de complexiteit en omvang van het probleem is er een collectieve gecoördineerde onder-

zoeksinspanning nodig om belangrijke stappen te zetten op weg naar de perfecte schoolroostermachine. Het belang daarvan strekt tot ver buiten het onderwijs. De kennis zal direct bijdragen aan betere werkroosters, spoorboekjes en planning in ziekenhuizen. Het CWI wil toekomstige extra middelen besteden aan deze uitdaging.

Software als service

Door de opkomst van digitale dienstverlening evolueert software van product tot dienst. Veilige en betrouwbare toepassing van los gekoppelde gedistribueerde applicaties is van toenemend economisch belang en vraagt om onderzoek naar service-oriented computing. Kenmerkend daarin is de integratie van diensten van een groot aantal onafhankelijke aanbieders. Het CWI onderzoekt klassieke software-integratie, maar ook peer-to-peer architecturen en semantische webtechnologie. **Uitdaging: services à la carte.** Internet groeit uit tot een wereldwijde collectie van samenwerkende services. Het wordt zowel een enorme marktplaats als een flexibele werkplaats waar iedereen zijn eigen services à la carte kan samenstellen. De sleutel tot deze ontwikkeling ligt in standaarden en methoden voor het opsporen, evalueren, combineren en integreren van services, zonder toegang tot de code. Het CWI gaat deze uitdaging aan, in samenwerking met andere onderzoeksinstituten.

Informatie

Exemplaren van de nota *Een fundamenteel verschil* kunnen worden aangevraagd via info@cwi.nl. De nota is ook te downloaden op www.cwi.nl/strategy. Verder is er een korte samenvatting beschikbaar, zowel in het Engels als het Nederlands.

Joris Bierkens

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
joris@math.leidenuniv.nl

Samenleving

Presentatie Brouwer postzegel

Het gebeurt bijna nooit dat een Nederlandse wiskundige op een postzegel verschijnt, laat staan op een Nederlandse zegel. Alleen Christiaan Huygens, de econometrist Jan Tinbergen en Simon Stevin vielen deze eer te beurt, waarbij de laatste op een Belgische zegel verscheen. Nu is het eindelijk weer een keer gebeurd: de topoloog en intuïtionist Brouwer prijkt op een zegel van 44 eurocent. Hoeveel Nederlanders zullen weten wie hij eigenlijk is en hoeveel mensen hebben een idee van zijn resultaten? Een goede reden voor een publiciteitsoffensief. Zover was het echter nog niet in het Trippenhuys van de KNAW, waar de sprekers dit mooie initiatief vooral te baat nemen om hun eigen stokpaardjes te berijden, getuige het verslag van Joris Bierkens.

Voor Dirk van Dalen, emeritus-hoogleraar in de logica en de filosofie van de wiskunde, is 21 september 2007 een bijzondere dag. Sinds 1978 heeft hij zich ingezet voor de verschijning van een postzegel ter ere van de Nederlandse wiskundige Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966). En vandaag, honderd jaar na het verschijnen van diens proefschrift getiteld 'Over de grondslagen der wiskunde', is het zover: in de Oude Vergaderzaal van het Trippenhuys te Amsterdam, waar de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (KNAW) is gevestigd, wordt aan Dirk van Dalen het eerste exemplaar gepresenteerd.

Topologie

Het is dezelfde zaal waar L.E.J. Brouwer in 1912 door Lorentz geïnstalleerd werd tot lid van de KNAW. In deze jaren (1909–1913) was Brouwer uiterst productief in de topologie. Zo heeft hij in deze fase invariantie van dimensie aangetoond en zijn beroemde dekpuntstelling bewezen:

Stelling *Zij $D := \{|x| \leq 1 : x \in \mathbb{R}^n\}$ de gesloten eenheidsbol in $\mathbb{R}^n$ en zij $f : D \rightarrow D$ continu. Dan is er ten minste één $x \in D$ zodat $f(x) = x$.*

Veel van Brouwers werk behoort nu tot de ba-

sis van de algebraïsche topologie en hiervoor bestaat internationaal veel erkenning.

Intuitionisme

Brouwer geldt echter ook als grondlegger van het *intuitionisme*. De volgende gedachtegang is een goed voorbeeld van een intuitionistische redenering.

"But now let us pass to infinite systems and ask for instance if there exists a natural number n such that in the decimal expansion of π the n th, $(n+1)$ th, $\dots$, $(n+8)$ th and $(n+9)$ th digits form a sequence 0123456789. This question, relating as it does to a so far not judgeable assertion, can be answered neither affirmatively nor negatively. But then, from the intuitionistic point of view, because outside human thought there *are* no mathematical truths, the assertion that in the decimal expansion of π a sequence 0123456789 either does or does not occur is devoid of sense. [2]"

Kort gezegd: voor een intuïtionist is wiskundig construeren een bezigheid van de menselijke geest, en daarom geldt niet het *principium tertii exclusi*

$$A \vee \neg A;$$

ofwel $\neg \neg A$ (of, in Brouwers termen: 'de absurditeit van de absurditeit van A ') is niet voldoende voor A om te gelden. Deze wijsheid prijkt op de vandaag verschenen postzegel.

Het intuïtionisme bouwt een verzamelingenleer op gebaseerd op 'de tijd', die als a-priori gegeven wordt beschouwd.

"First act of intuitionism: (...) This perception of a move of time may be described as the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the twoity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of all twoities. And it is this common substratum,



De Brouwerzegel

Goed nieuws: er is nu een postzegel van een Nederlands wiskundige op de markt verschenen; het definitieve bewijs dat er met wiskunde wél eer en aanzien te verwerven valt.

Het betreft een zegel van 44 cent. Hij is te koop in postzegelmapjes van 4 zegels en vellen van 50 zegels. Verder is er een speciale envelop met een eerstedagafstempelingsverschenen. De mapjes zijn bij de grotere postkantoren verkrijgbaar en op erkende verkooppunten. De grote vellen, de mapjes en de eerstedagenvelop zijn verkrijgbaar bij de online winkel van TNT.

this empty form, which is the basic intuition of mathematics. [2]"

Brouwer was uitgesproken fanatiek in de verkondiging van zijn ideeën over het intuïtionisme, wat leidde tot diverse conflicten, onder andere met David Hilbert. Hilbert wist Brouwer hierop in 1928 uit de redactie van het tijdschrift *die Mathematische Annalen* te werken, tot grote bitterheid van Brouwer. Hilbert: 'Ons doel is om meer, en niet minder stellingen te krijgen.'

Snaartheorie

Zo onconventioneel en uitgesproken als Brouwer door het leven ging, zo gemoedelijk verloopt de bijeenkomst in het Trippenhuys van de presentatie van de Brouwerzegel. In korte,

onderling zeer op elkaar gelijkende presentaties vertellen Pim Levelt (oud-president KNAW), Karel Gaemers (decaan Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica van de UvA), Henk Broer (voorzitter KWG) en Dirk van Dalen over het grote belang van Brouwer voor de wiskunde. Martin Veltman (Nobelprijswinnaar natuurkunde) laat de gelegenheid niet onbenut om zijn mening over de natuurkundige supersnaartheorie te laten blijken. De overige sprekers blijven dicht bij het eigenlijke onderwerp van de bijeenkomst, het leven en vooral de wiskunde van L.E.J. Brouwer.

Markten

Dirk van Dalen blijkt virtuoos met petten te kunnen gooien, en wisselt moeiteloos tus-

sen de rollen van dagvoorzitter, gastspreker, en gelukkige eerste ontvanger van de zegel. In zijn eigen woorden: "het heeft zo wel iets van de jaarvergadering van een maoïstische vereniging."

Aan het einde van de plechtigheid komt de opmerking uit de zaal: "Wat zou Brouwer zelf van deze bijeenkomst gevonden hebben?" Dirk van Dalen: "Daar ben ik wat bezorgd over."

Referenties

1. Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer (1881–1966) - Een biografie*, Bert Bakker, Amsterdam, 2001.
2. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Edited by D. van Dalen, Cambridge University Press, 1981.



Voorzitter van het KWG Henk Broer houdt een voordracht in de Oude Vergaderzaal van het Trippenhuys te Amsterdam

Bennie Mols*Kijkduinstraat 121-2**1055 XW Amsterdam**bmols@orange.nl***Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2007**

Slimme inzet van KLM-reservecrew

Als KLM-crewleden door ziekte, vertraging of schemawisselingen niet op een ingeroosterde vlucht kunnen werken, moeten er reservecrewleden klaar staan om in te vallen. Daarbij staat de KLM voor de vraag wat de optimale manier is om reservecrewleden in te roosteren. Die planning gebeurt nu nog op grond van de ervaring van de crewplanners en crewcontrollers, maar KLM wil graag weten of een wiskundig model de reservestelling verder kan optimaliseren.

KLM heeft meer dan honderd vliegtuigen en meer dan achtduizend cabinepersoneelsleden. Elke week starten circa 3500 cabineleden aan een nieuwe roosteropdracht, bestaande uit één intercontinentale vlucht of een aaneenschakeling van vluchten binnen Europa. KLM publiceert wekelijks een nieuw rooster voor het cabinepersoneel. In dat rooster kan het cabinelid zijn indeling voor de twee komende weken zien. De vluchtopdrachten in deze indeling bestaan veelal uit een aantal routedagen (waarop de cabinebemanning vliegt of op een buitenstation verblijft), gevolgd door een aantal dagen reisverlof. Parttime crew krijgt aansluitend nog deeltijdverlof. Bij het samenstellen van het rooster moet ook rekening worden gehouden met de rangen van het cabinepersoneel en met de vliegtuigtypen waarvoor een personeelslid is gekwalificeerd. Het KLM-cabinepersoneel kent vier rangen: de senior purser, de purser, de business class flight attendant en de economy class flight attendant. De eerste twee vervullen de rol van managers aan boord. In het algemeen werken er alleen pusers en economy flight attendants op Europese vluchten. Op intercontinentale vluchten wordt personeel van alle vier de rangen ingezet. De KLM

opereert met vijf verschillende vliegtuigtypen: Boeing 737, 747 en 777, Airbus 330 en M11 (de toestellen F50, F70 en F100 van KLM Cityhopper niet meegerekend). Elk type toestel heeft zijn eigen kenmerken, die een bemanningslid volledig moet kennen. Om gekwalificeerd te blijven voor een bepaald type, moet een personeelslid een minimaal aantal vluchten per jaar in dat type vliegen. De meeste cabineleden zijn gekwalificeerd voor drie verschillende vliegtuigtypen. Het opgestelde rooster kan op verschillende manieren verstoord worden. Dat kan door interne oorzaken, zoals ziekte of andersoortige uitval van een bemanningslid. Dat kan ook om externe redenen, zoals een vertraagde vlucht, of een vervanging van een vliegtuigtype door een ander type, wat ook geregeld voorkomt als bijvoorbeeld het aantal passagiers te klein is, of juist groter dan verwacht. De KLM moet deze verstoringen uiteraard zien op te vangen. In overleg tussen de planners en crewcontrollers wordt aan het begin van een seizoen bepaald hoeveel reserves per dag beschikbaar moeten zijn. Daarin bepalend is ook de dienstregeling. Er moeten namelijk voldoende reserves zijn om verstoringen gedurende de hele dag en op alle types te kunnen opvangen. Zo zijn er vroege en

late reservediensten en reservediensten voor crew met verschillende typekwalificaties. De reserveplanning gebeurt nu nog grotendeels op grond van ervaring. Vanaf twee weken voor de dag van uitvoering heeft de afdeling Crew Control de beschikking over de ingedeelde reservecrew. Een crewlid krijgt jaarlijks een aantal keren een reserveblok ingedeeld. Nu bestaat een reserveblok typisch uit een dag of vijf paraat zijn om als reserve in te vallen, waarna er twee vrije dagen volgen. Als een reservelid moet invallen, dan neemt deze een volledige vluchtopdracht (routedagen + reisverlofdagen) over van het oorspronkelijk ingeroosterde bemanningslid.

Domino-effect

Als een reservelid echter bijvoorbeeld op de vijfde dag pas moet invallen, dan moet hij zelf verstek laten gaan bij het volgende reguliere blok waarvoor hij stond ingepland. Zo ontstaat een secundaire verstoring. Daarna kan er in het ergste geval zelfs een domino-effect ontstaan waarbij diverse reserveleden elkaars verstoring opvangen. Dit werkt verstorend in de operatie en is onaangenaam voor de crewleden, omdat ze zo niet goed weten hoe hun vervolgrooster er uit zal zien. In principe kan een langere reserveperiode zo'n domino-effect voorkomen. Stel dat iemand drie weken reserve kan staan in plaats van vijf dagen, dan is de kans veel kleiner dat het reservelid zelf moet afzeggen voor zijn volgende dienst na afloop van die drie weken.

Maar als crewleden drie weken achter elkaar reserve staan, is dat wellicht ook niet fijn voor de crew. Bovendien moet een stijging van de kosten worden voorkomen. Het is onwenselijk voor zowel de crew als de KLM om iemand zo lang achter elkaar reserve te laten staan als er binnen het blok ook veel dagen zullen zijn waarop het reservelid niet werkt. De huidige lengte van een reserveblok (zeven dagen waarvan vijf reservedienst) is vanwege het domino-effect misschien niet de beste keuze. Het aantal reserveblokken dat dagelijks wordt ingedeeld is gebaseerd op jarenlange ervaring maar kan misschien nog verder geoptimaliseerd worden. Zou de wiskunde niet een betere oplossing kunnen berekenen? “De uitdaging waar de KLM voor staat,” vertelt Marc Paelinck van KLM, “is de optimaliseringsvraag om bij een gegeven dienstregeling te bepalen hoeveel mensen er op een dag reserve moeten staan, en hoe lang iemand reserve moet staan. Daarnaast is de vraag welke achtuursperiode op een bepaalde dag het reservelid paraat moet staan. Want vanwege arbeidswetgeving heeft het geen zin om een reservelid langer dan acht uur achter elkaar reserve te laten staan: omdat de reservedienst wettelijk als werktijd gerekend wordt, mag een crewlid na acht uur reserve nog maar een beperkt aantal uren vliegen. De vraag is dan in welke perioden van een dag de meeste verstoringen zijn te verwachten. In die perioden moeten dan de meeste reserveleden klaar staan. Aan de andere kant kunnen verstoringen op elk moment van de dag voorkomen, en dus moeten er altijd wel enkele reserves klaar staan om in te vallen. Deze optimaliseringsvragen hebben we aan de studiegroep voorgelegd.”

Arbeidsinspectie

Marco Bijvank zat als wiskundige in de stu-

diegroep, en hij legt uit hoe lastig het probleem is te modelleren: “We hebben er een hele tijd over gedaan om een goede definitie van het probleem te bepalen. Het was moeilijk om duidelijk te krijgen wat we als gegeven mogen opvatten en wat niet. De wiskunde kan wel een bepaalde oplossing aangeven, maar als die oplossing vervolgens niet mag van de arbeidsinspectie, dan heb je er nog niets aan.” Drie criteria bepalen nu de kwaliteit van een reservestrategie: het aantal secundaire verstoringen, het aantal ongebruikte reservedagen en het aantal open dagen dat er ligt tussen het einde van een reservedienst en het begin van de volgende reguliere dienst. De laatste twee zijn aan elkaar gerelateerd. Hoe kleiner elk van deze drie, hoe beter de reservestrategie. Om het probleem te vereenvoudigen, namen de wiskundigen aan dat elk crewlid in elk type vliegtuig mag werken, dat er geen verschillen in rangen zijn en dat alle crewleden fulltime werken. Verder gebruikten ze de KLM-gegevens over de kans waarmee interne en externe verstoringen het reguliere rooster in de war schoppen. Bijvank: “We zijn uitgegaan van een gegeven rooster dat zegt hoeveel mensen op een bepaalde dag op vluchten worden ingezet. Daarbovenop hebben we een stochastisch proces van verstoringen gedefinieerd.” Het basisidee dat de wiskundigen vervolgens gebruikten modelleert de bemanningsleden die uitvallen als een workforce out-flow en de bemanningsleden die na een verstoring weer terugkeren als een workforce in-flow. Op de lange termijn is de workforce out-flow ongeveer gelijk aan de workforce in-flow. Maar op elk individueel tijdstip zijn ze met elkaar in onbalans, wat moet worden opgevangen met een reservestrategie. De tactiek is nu om de uitgevallen crewleden zo snel mogelijk weer te laten te-

rugkeren naar het oorspronkelijke rooster. Dat werd namelijk beschouwd als optimaal. Bijvank: “Uitgaande van het stochastische proces van verstoringen hebben we met een statistische methode bepaald hoeveel reservecrewleden er op een bepaalde dag nodig zijn, en hoeveel dagen een reserveblok moet duren. De eerste resultaten laten zien dat de huidige strategie van vijf dagen reserve staan en twee dagen vrij weliswaar tamelijk goed werkt voor vluchten binnen Europa, maar niet goed voor de lange, intercontinentale vluchten. In het tweede geval ontstaan er immers secundaire verstoringen. Om verstoringen op lange vluchten goed op te vangen, zijn er ook reserveblokken van een langere lengte nodig dan nu gebeurt. Maar aan de andere kant moet je ook weer niet te veel van dat soort blokken inroosteren. Voor het berekenen van meer gedetailleerde resultaten hadden we nog numerieke simulaties willen uitvoeren, maar daar hebben we uiteindelijk geen tijd meer voor gehad.”

“De studieweek heeft veel inzicht opgeleverd over het spel van het domino-effect”, zegt Marc Paelinck, “maar er was onvoldoende tijd om volledig uitgewerkte voorstellen voor verbetering te maken.” De studiegroep heeft het onderzoek echter na de week voortgezet en is er in geslaagd om een model te ontwikkelen dat de oorspronkelijke vragen kan beantwoorden. Dit model gaat uit van de stochastische aard achter de uitval van crewleden. De kans dat een bepaald aantal reservecrewleden nodig is, wordt vergeleken met een gegeven reserverooster. Op deze manier kan achterhaald worden hoeveel reserveshifts van een bepaalde lengte nodig zijn op een dag. ←



Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

bmols@orange.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie

Chips schrijven met een beamer

Momenteel worden computerchips gemaakt door licht via een masker op de chip te laten vallen – een soort diaprojectie. ASML onderzoekt een nieuwe, maskerloze techniek, die net als een beamer werkt. Het traditionele, continue masker moet daarvoor worden vertaald naar een discreet grid van pixels. De daarvoor benodigde rekentijd is gigantisch. De uitdaging voor wiskundigen is om het aantal rekenstappen flink te reduceren.

Het Veldhovense bedrijf ASML is een wereldleider in lithografietechnieken voor de halfgeleiderindustrie. Lithografiemachines schrijven met ultraviolet licht structuren op een siliciumschijf, de wafer. De golflengte van dit licht is in de loop van de jaren afgenomen van 365 nanometer naar 193 nanometer (een nanometer is een miljoenste millimeter), en de structuren zijn gekrompen tot 45 nanometer. Hoe kleiner de structuren die de machine op een wafer kan afbeelden hoe meer transistoren per vierkante millimeter geplaatst kunnen worden en hoe krachtiger de computerchip wordt. Een enkele wafer bestaat uit een herhaald patroon van dezelfde computerchips. Bijna alle grote chipfabrikanten zoals IBM, Motorola en Samsung gebruiken ASML-machines.

Tot nu toe werkten lithografiemachines volgens het principe van een diaprojector. In de lithografie heet die 'dia' een masker. Het masker bevat het patroon dat op de wafer wordt geprint. Het bepaalt waar op de chip wel en waar niet een lijntje wordt geprint. ASML onderzoekt nu of maskerloze lithografie een interessante optie is. Het idee is om van het principe van een diaprojector over te stappen op het principe van een

'beamer'. De beamer gebruikt geen masker meer, maar creëert meteen een lichtpatroon dat direct op de siliciumwafer wordt afgebeeld. "In feite willen we het conventionele masker nabootsen via een systeem met miljoenen microscopische spiegeltjes", vertelt Wouter Mulckhuysen van ASML. "Neem een chip van 1 bij 1 centimeter, waarop je lijnen wilt schrijven van 45 nanometer breed. Stel dat je daarvoor pixels van twintig nanometer gebruikt. Dan heb je daarvoor 250 miljard pixels nodig. En elk pixel komt overeen met een spiegelstand. De vraag is vervolgens wat de juiste stand is van elk spiegeltje zodat we het gewenste patroon kunnen printen."

"Ons probleem zit vooral in het voortraject van het aansturen van de spiegels", legt projectleider Gosse de Vries van ASML verder uit. "Klanten die de lithografiemachine gebruiken, leveren een masker aan dat bestaat uit een heleboel veelhoeken. Dat is een continu patroon. Maar dat continue patroon moeten we samplen om er een discreet patroon van te maken. We zoeken een vertaling van het continue domein van veelhoeken naar een discreet patroon van pixels die een bepaalde grijswaarde hebben."

Kunnen de pixels niet ofwel wit ofwel zwart

zijn – ofwel er is een lijntje, ofwel er is geen lijntje? Nee, dat kan in het algemeen niet. Een overgang van een lijn naar een tussenruimte kan immers midden in een pixel vallen. De pixel krijgt dan een grijswaarde tussen wit en zwart in, afhankelijk van hoeveel van de lijn binnen het pixel valt. En omdat een chippatroon uit heel veel overgangen van een lijn naar een tussenruimte bestaat, hebben de meeste pixels een grijswaarde die tussen zwart en wit in ligt. De Vries: "Ons rekenprobleem zit nu in het met grote nauwkeurigheid berekenen van die grijswaarden."

Voor kleine oplages

Maskerloze lithografie zal de op maskers gebaseerde lithografie echter niet gaan vervangen, omdat de traditionele methode in dezelfde tijd meer chips kan printen. Toch biedt de beamermethode in een aantal gevallen belangrijke voordelen ten opzichte van de diaprojectiemethode. Ten eerste worden hoge maskerkosten bij kleine oplages vermeden. De maskerkosten zijn met het verkleinen van de af te beelden structuren exponentieel gestegen. Waar een maskerset voor negentig nanometer nog een half miljoen euro kostte, kost een maskerset nu, voor 45 nanometer, al bijna vier miljoen euro. Door de maskerkosten uit te sparen, kan een producent veel goedkoper kleine series, of zelfs unieke chips maken. Ten tweede kan de fabrikant veel goedkoper prototypen maken en tests draaien tijdens het ontwikkelen van de chip.

Omdat de klant direct over moet kunnen stappen van het testen met een maskerloos lithografiesysteem naar het produceren met een conventioneel maskergebaseerd lithografiesysteem, moet het maskerloze systeem het conventionele systeem imiteren met alle onvolkomenheden die in het maskersysteem zitten. Die onvolkomenheden ontstaan door optische afwijkingen. De kleine golflengte van het gebruikte uv-licht is niet verwaarloosbaar ten opzichte van de patronen in het masker. Daardoor wordt licht door het masker verstrooid: het komt niet alleen terecht op een plek waar dat volgens het masker zou moeten, maar ook een beetje daarbuiten. Het ontwerp van het masker wordt daarvoor gecorrigeerd. Maar dat betekent ook dat het ontwerp van het maskerloze patroon diezelfde correctie moet meenemen.

De studiegroep van wiskundigen ging uit van een stukje chip met afmetingen van 150 bij 50 micrometer. Het patroon dat in zo'n stukje moet worden belicht, bevat typisch zo'n zes miljoen veelhoeken, met elk gemiddeld twintig hoekpunten. Dat patroon moet nu worden afgebeeld op een grid met pixels die elk een grootte van twintig bij twintig nanometer hebben. Om voor de hele chip te berekenen hoe het continue patroon moet worden gesampled tot een discreet patroon, blijven nu 10^{17} rekenoperaties nodig te zijn.

"En we hebben maar een uur voor de berekeningen", zegt Mulckhuysen. "Dat lukt een gewone computer met een pentiumchip niet. Onze vraag aan de wiskundigen was dan ook om het aantal rekenoperaties bij het samplen significant terug te brengen."

Fourierwereld

Wat het masker met het licht doet, valt wiskundig gezien handig te analyseren in de wereld van frequenties, in plaats van in de 'gewone' wereld van plaats en tijd. Om een signaal in de 'gewone' wereld om te zetten in de frequentiewereld, is een wiskundige truc nodig die Fouriertransformatie heet. "Licht dat door het masker wordt vervormd, heeft een bepaalde frequentie-inhoud. De projectielens verwijdert de hoge frequenties uit deze Fourierwereld", vertelt Eric Cator van de Technische Universiteit Delft. "Wat je dan overhoudt, kun je vanuit de frequentiewereld weer terugtransformeren naar de gewone wereld. In principe is het probleem goed gedefinieerd en oplosbaar, alleen kost het veel rekentijd. Je moet een discrete Fouriertransformatie op een raster met 10^{13} rasterpunten gaan doen."

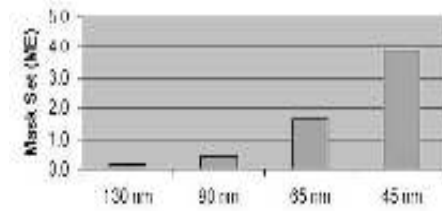
Het idee van de wiskundigen was nu om de scherpe hoeken in al die veelhoeken een

beetje af te vlakken. Want juist die scherpe hoeken corresponderen met de hoge frequenties, die je toch niet kan afbeelden, maar wel voor meer rekenwerk zorgen. Cator: "Als je eerst de hoeken afvlakt, en daarna de Fouriertransformatie uitvoert, dan heb je in principe een minder fijn grid nodig om toch de juiste precisie te halen. En inderdaad: dat principe werkt. Maar er zit een adder onder het gras. Want nu heb je het probleem verschoven naar het afvlakken van de hoeken. Dat werd onze nieuwe bottleneck."

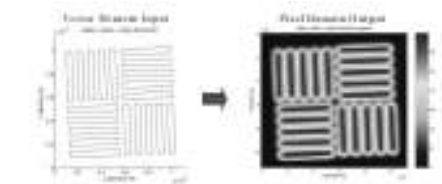
De wiskundigen onderzochten twee manieren om toch tot een snellere oplossing te komen. In de eerste manier werd de berekening voor het afvlakken niet exact uitgerekend, maar numeriek benaderd. Cator: "Onze simulaties laten zien dat je dan een factor vier



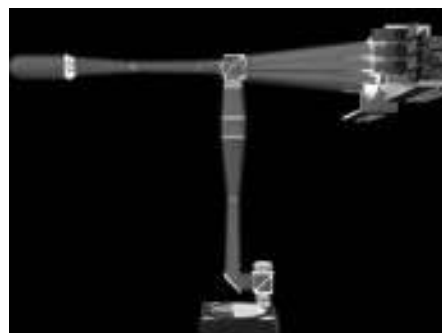
Voorbeeld van een traditioneel masker en de bijbehorende afdruk op een chip



Met een afnemende structuurgrootte op de chip nemen de maskerkosten exponentieel toe.



De input en de output bij de nieuwe methode om structuren op chips te schrijven



Het nieuwe projectiesysteem dat met spiegeltjes het gewenste patroon direct — zonder masker — afbeeldt op de chip

winst kunt behalen, maar dat is eigenlijk veel minder dan ASML nodig heeft."

De tweede manier gebruikt een meer exotische truc. Alle veelhoeken worden benaderd door een collage van aan elkaar geplakte driehoekjes. Cator: "Dat valt vrij snel uit te rekenen. Vervolgens ga je alle wiskundige operaties op die driehoekjes doen. Maar in plaats van dat we elke keer per driehoek een rekensom oplossen, maken we een opzoektabel met de uitkomst van een flink aantal driehoeken. En dan zoeken we voor een willekeurige driehoek de best passende in de tabel op. Met een relatief kleine opzoektabel krijgen we dan toch een hoge nauwkeurigheid. Weliswaar krijgen we zo tien- tot twintigmaal zo veel driehoeken als het oorspronkelijke aantal veelhoeken, maar de berekeningen per driehoek zijn nu een stuk overzichtelijker geworden." Hoeveel sneller deze methode in de praktijk werkt, konden de wiskundigen echter niet bepalen, omdat een week daarvoor te kort was. "Of de methode met de opzoektabel sneller werkt, hangt sterk af van hoe groot de tabel is, hoe snel de computerprocessor is, en hoe groot het computergeheugen is", zegt Wouter Mulckhuysen van ASML. "Maar we denken dat de verbetering niet genoeg is."

Computers parallel schakelen

Toch is ASML niet teleurgesteld door het resultaat. Mulckhuysen: "Wij hebben meegedaan met de studieweek om te kijken of we zelf met onze eigen methode toch niet dingen over het hoofd hadden gezien. We hebben nu eigenlijk de bevestiging gekregen dat dat waarschijnlijk niet het geval is. Onze eigen samplemethode bleek al behoorlijk efficiënt te zijn. Dat vertrouwen in onze eigen aanpak is voor ons de meerwaarde van de studieweek geweest."

Hoe gaat ASML het rekenprobleem dan in de toekomst oplossen? "We gaan niet verder zoeken naar een snellere rekenmethode", zegt projectleider Gosse de Vries. Het komt er op neer dat we voor het sampleprobleem gewoon meer computerkracht gaan inzetten. We gaan computers parallel schakelen, en als we dat met genoeg computers doen, dan lossen die het sampleprobleem toch binnen een uur op. We zochten een alternatief in een slimme rekenmethode, maar als wij die niet kunnen vinden, en de studiegroep ook niet, dan rest ons niets anders dan meer computerkracht. En dankzij de vooruitgang in de lithografie, is dergelijke hardware gelukkig beschikbaar."

Joost Hulshof

Vrije Universiteit Amsterdam
 Faculteit der Exacte Wetenschappen, afdeling Wiskunde
 De Boelelaan 1081
 1081 HV Amsterdam
 jhulshof@few.vu.nl

Vakantiecursus

Differentiaalvergelijkingen, oscillaties en planeetbanen

Differentiaalvergelijkingen komen weer terug in het middelbaar onderwijs. Dit is logisch vanwege het enorme toepassingsgebied van dit soort vergelijkingen. Het is verrassend hoeveel kwalitatieve analyse er gedaan kan worden op een differentiaalvergelijking met elementaire, in het vwo onderwezen middelen. Dit vergt wel een zekere cultuuromslag: de basisprincipes van de analyse moeten veel vroeger worden ingevoerd. Hiervoor heb je heel wat idealisme nodig. Joost Hulshof, hoogleraar analyse aan de Vrije Universiteit in Amsterdam in zo'n idealist: in onderstaande tekst afkomstig van de Vakantiecursus 2007 van het CWI leidt hij met elementaire middelen onder andere de planeetwetten van Kepler af uit enkele fundamentele differentiaalvergelijkingen.

Nu differentiaalvergelijkingen terugkeren in de havo- en vwo-wiskunde is er alle reden om daar in de vakantiecursus aandacht aan te besteden. Differentiaalvergelijkingen beschrijven hoe toestanden van allerhande systemen in tijd of plaats veranderen. Een hangende kabel, een trillend membraan, stromingen in de lucht, een groeiende celwand, reagerende chemische stoffen, het zonnestelsel, etc. In alle exacte wetenschappen komen differentiaalvergelijkingen voor als wiskundige modellen van wat we zien in de wereld om ons heen, op kleine en op grote schaal.

De onbekende in een differentiaalvergelijking is niet een getal maar een functie. Een functie van de plaats, van de tijd, of van allebei. Ik beperk mij in dit verhaal tot differentiaalvergelijkingen waarin de onbekende een functie is van de tijd, van één reële variabele dus, die ik bij voorkeur t noem. Een triviaal voorbeeld van zo'n differentiaalvergelijking (DV) is

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = 0.$$

De onbekende functie is $x = x(t)$. Net als de meeste differentiaal-

vergelijkers gebruik ik de letter x hier op twee manieren: als afhankelijke variabele maar ook als functie. Wiskundig netter is een notatie $x = f(t)$ als vergelijking voor de grafiek van de functie f in het t, x -vlak, maar dat doet bijna niemand in dit deelgebied van de wiskunde.

De DV $x'(t) = 0$ zegt dat de onbekende functie $x = x(t)$ differentieerbaar moet zijn met afgeleide functie $x'(t)$ gelijk aan nul. De oplossingen van deze DV worden gegeven door

$$x(t) = C,$$

waarin C een willekeurige constante is. De DV heeft dus oneindig veel oplossingen. Om één oplossing te selecteren is een *beginconditie* nodig. Dat is een conditie die zegt wat de waarde van $x(t)$ is op een *begintijdstip*, bijvoorbeeld de beginconditie

$$x(0) = 1.$$

De vergelijking $x'(t) = 0$ met beginconditie $x(0) = 1$ heeft precies één oplossing, namelijk de oplossing $x(t) = 1$. Die oplossing is gedefinieerd voor alle t , dus zowel voor $t > 0$ als voor $t < 0$. De term *beginconditie* is strikt genomen wat misleidend: we beginnen op $t = 0$ maar we gaan zowel voor- als achteruit in de tijd. Achter de op het oog triviale conclusie dat het *beginwaardeprobleem* $x'(t) = 0$, $x(0) = 1$ precies één oplossing heeft, zit een wiskundige stelling, die in het eerste jaar van een studie wiskunde bij het vak Analyse bewezen wordt.

Stelling. Een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide op een interval bestaat en gelijk is aan nul, is een constante functie op dat interval.

Het volgende voorbeeld is fundamenteel,

$$x'(t) = x(t),$$

de DV voor exponentiële groei. Ook deze DV heeft precies één oplossing die voldoet aan de beginconditie $x(0) = 1$, namelijk de functie

$$x(t) = \exp(t) = e^t.$$

Bij dit voorbeeld hebben we een 'kip/ei' situatie. Wat is er eerst, het *beginwaardeprobleem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t); \\ x(0) &= 1, \end{aligned}$$

of de functie $\exp(t)$ en het getal $e = \exp(1)$?

Een elegante manier om de functie $\exp$ in te voeren is als de unieke oplossing van dit beginwaardeprobleem. Daarna kunnen we laten zien dat de functie $\exp$ de multiplicatieve eigenschap heeft: voor alle reële t en s geldt

$$\exp(t+s) = \exp(t)\exp(s).$$

Als t van min naar plus oneindig (∞) loopt, dan loopt $\exp(t)$ (monotoon) van nul naar $+\infty$. Per definitie is $e = \exp(1)$. Eenvoudig na te gaan is dat $e^t = \exp(t)$ voor alle rationale t . Voor de details verwijs ik naar [1]. Hier wil ik benadrukken dat we twee ingrediënten nodig hebben voor het bewijs van de multiplicatieve eigenschap.

Globale existentie en uniciteit: *Het beginwaardeprobleem*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t); \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}$$

heeft voor elke reële t_0 en x_0 een unieke oplossing $x(t)$ die voor alle reële t gedefinieerd is.

Schuiven en schalen: Als we de grafiek van een oplossing van $x'(t) = x(t)$ horizontaal schuiven of vertikaal schalen, krijgen we weer de grafiek van een oplossing.

Het eerste ingrediënt is een *existentie-uniciteit stelling* die veel algemener geldt. Het tweede ingrediënt formuleert twee *invarianties* (ook wel *symmetrie-eigenschappen*) van de vergelijking: omdat t niet apart in de DV voorkomt maakt het niet uit waar we op de t -as de nul kiezen (en dus kunnen we in een bewijs volstaan met $t_0 = 0$). Als we de grafiek van een oplossing in de t -richting heen en weer schuiven, dan krijgen we weer de grafiek van een oplossing. Dit heet *translatie-invariantie*, zie Figuur 1, links. Veel specifieker voor de DV $x'(t) = x(t)$ is dat grafieken van oplossingen vertikaal (in de x -richting) geschaald mogen worden. Als we x schalen dan komt de schaalfactor in alle termen van de DV naar voren en kan weggestreept worden. Evenzo is gemakkelijk na te gaan dat de som van twee oplossingen weer een oplossing is. De differentiaalvergelijking $x'(t) = x(t)$ heet daarom *lineair*. In het bijzonder zien we dat (met schaalfactor -1) de grafiek van een oplossing van een *lineaire* DV na *spiegeling* in de t -as

weer een grafiek van een oplossing is.

Met deze ingrediënten kunnen we de belangrijkste eigenschappen van oplossingen afleiden zonder de DV op te lossen. Na de invoering van de functie $\exp$ wordt de unieke oplossing van $x'(t) = x(t)$ met beginvoorwaarde $x(t_0) = x_0$ gegeven door

$$x(t) = x_0 \exp(t - t_0) = x_0 e^{t-t_0},$$

de exponentiële functie waar we mee begonnen zijn, geschaald met een factor $x(t_0)$ en verschoven over t_0 .

Als we eenmaal de functie $e^t = \exp(t)$ tot onze beschikking hebben, ingevoerd als oplossing van een beginwaardeprobleem of op een andere manier waaruit volgt dat $e^0 = 1$ en de afgeleide van e^t bestaat en gelijk is aan e^t zelf, dan kunnen we in principe alle DV's aan die van de vorm

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

zijn, met $a(t)$ en $b(t)$ continue functies op een gegeven interval. Dit is de algemene *eerste orde lineaire inhomogene differentiaalvergelijking*. Lineair vanwege de lineaire vorm waarin x en x' voorkomen, inhomogeen vanwege de term $b(t)$. Zonder $b(t)$ heet de vergelijking *homogeen*.

We gebruiken hiertoe de volgende wiskundige stelling.

Primitieve functies: Als $a(t)$ continu is op een interval, dan heeft $a(t)$ op dat interval een primitieve functie $A(t)$, i.e. de functie $A(t)$ is op dat interval differentieerbaar en $A'(t) = a(t)$.

Voor een oplossing $x(t)$ van de lineaire inhomogene eerste orde DV geldt de volgende keten van equivalente DV's:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \iff x'(t) - a(t)x(t) = b(t)$$

(vermenigvuldig met de positieve (!) 'integrerende' factor $e^{-A(t)}$)

$$\iff e^{-A(t)} (x'(t) - a(t)x(t)) = e^{-A(t)} b(t)$$

(gebruik de kettingregel en de produktregel)

$$\iff \left(e^{-A(t)} x(t) \right)' = e^{-A(t)} b(t)$$

Laat nu $F(t)$ een primitieve zijn van de functie aan de rechterkant van de laatste vergelijking. Dan volgt

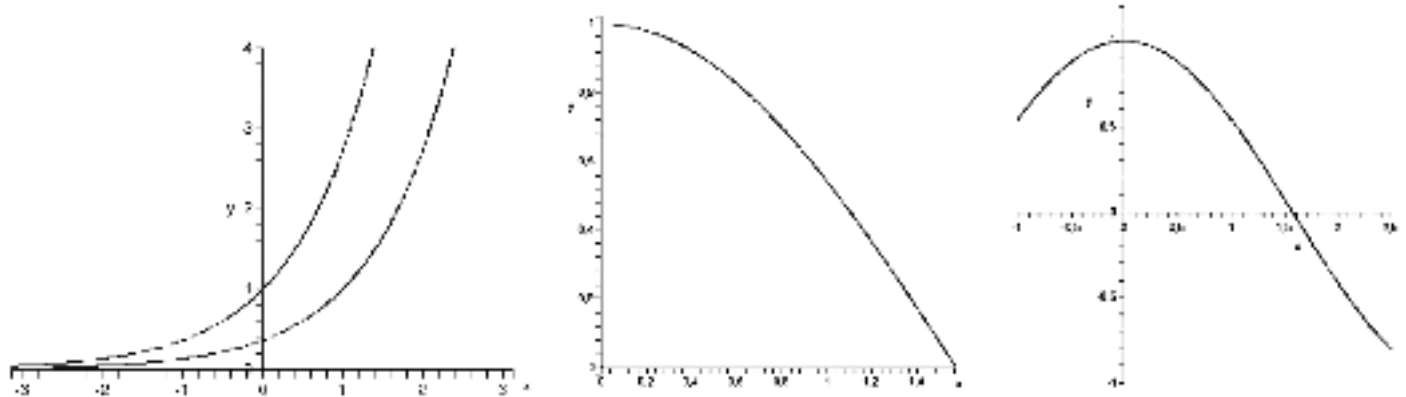
$$e^{-A(t)} x(t) - F(t) = C,$$

met C een (nog onbekende) constante. De afgeleide van het linkerlid is immers nul. Omschrijven geeft als algemene oplossing

$$x(t) = e^{A(t)} (C + F(t)),$$

waarin de keuze

$$C = e^{-A(t_0)} x_0 - F(t_0)$$



Figuur 1 Links: een oplossing en een verschoven oplossing; midden: de grafiek van de oplossing $X(t)$ begint horizontaal in $(t, x) = (0, 1)$ en loopt daarna met toenemende steilheid naar beneden tot het snijpunt met de t -as in $(t, x) = (T, 0)$; rechts: symmetrie in x -as, puntsymmetrie in $(x, t) = (T, 0)$, periode $4T$.

nodig en voldoende is om aan de beginwaarde $x(t_0) = x_0$ te voldoen, hetgeen dan geeft

$$x(t) = x_0 e^{A(t)-A(t_0)} + e^{A(t)} (F(t) - F(t_0)).$$

Met $a(t) = 1$ en $b(t) = 0$ reduceert dit tot de oplossing van $x'(t) = x(t)$ met $x(t_0) = x_0$ die we al hadden.

De afleiding hierboven geldt voor elke oplossing. In het bijzonder is existentie en uniciteit voor het beginwaardeprobleem teruggebracht tot de eerdergenoemde stelling over functies met afgeleide nul en het bestaan van een exponentiële functie.

De functie $\exp$ wordt transcendent genoemd omdat we $\exp(t)$ niet met alleen maar algebraïsche manipulaties uit t kunnen destilleren. Hieronder behandel ik de nauw met $\exp$ verbonden transcendenten functies $\cos$ en $\sin$ als oplossingen van de tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$, de eenvoudigste DV die periodieke verschijnselen beschrijft.

Newton heeft de differentiaalrekening ontwikkeld om de door Kepler empirisch bepaalde wetten voor elliptische planeetbanen te verklaren. Die verklaring komt verderop aan de orde als ik de bewegingsvergelijkingen voor een deeltje in een centraal krachtveld behandel. Maar daarvoor sta ik eerst nog even stil bij de vraag naar het bestaan van oplossingen in het algemeen.

In het algemeen zijn DV's bijna nooit exact oplosbaar, maar zijn er wel stellingen die zeggen dat oplossingen bestaan. Eigenschappen van oplossingen moeten dan uit de DV zelf worden afgeleid. Ook als er wel een exacte oplossing bestaat is het vaak inzichtelijker om de eigenschappen van die oplossing uit de DV zelf en niet uit de oplossingsformule te halen.

Oscillaties en cirkels

In de inleiding is de functie $\exp$ geïntroduceerd als oplossing van een beginwaardeprobleem. Op dezelfde manier kunnen de functies $\cos$ en $\sin$ worden geïntroduceerd.

De slingervergelijking

De tweede orde DV

$$x''(t) = -x(t)$$

staat bekend als de *lineaire slingervergelijking* zonder wrijving. Voor elke t moet de tweede afgeleide $x''(t)$ bestaan en gelijk zijn aan $-x(t)$. Zien we $x(t)$ als de positie van een op een lijn bewe-

gend punt, dan is $x'(t)$ de *snelheid* van dit punt en $x''(t)$ de *versnelling*. In de mechanica van Newton is de versnelling van een puntmassa gelijk aan het quotient van de kracht F die op de puntmassa werkt en de massa m van het punt. De slingervergelijking beschrijft dus de beweging van een puntmassa met massa 1 in een *krachtveld* gegeven door $F = -x$. Het krachtveld trekt de puntmassa terug naar het *evenwicht* $x = 0$, als gevolg waarvan $x(t)$ heen en weer slingert om $x = 0$. Daarbij is er een *behouden grootte* want voor elke oplossing geldt

$$\left((x'(t))^2 + (x(t))^2 \right)' = 2x'(t)x''(t) + 2x(t)x'(t) = 0,$$

en dus is

$$(x'(t))^2 + (x(t))^2 = C,$$

waarin $C \geq 0$ een constante is die van de beginvoorwaarden afhangt. Deze behouden grootte correspondeert met de wet van behoud van energie (de som van kinetische en potentiële energie) in conservatieve krachtvelden.

Globale existentie en uniciteit: Voor elke reële t_0, x_0, x_1 heeft het beginwaardeprobleem

$$x''(t) = -x(t);$$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x'(t_0) = x_1,$$

een unieke oplossing $x(t)$ die gedefinieerd is voor alle reële t .

Omdat de vergelijking lineair is en een nogal bijzondere (som van kwadraten) behouden grootte heeft, is uniciteit makkelijk in te zien: als we twee oplossingen hebben van het beginwaardeprobleem, dan is het verschil een oplossing met beginwaarde $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, en heeft dus constante $C = 0$ voor zijn behouden grootte. Beide kwadraten in de behouden grootte zijn dus nul en de verschiloplossing kan alleen maar de nulfunctie zijn.

Een tweede orde DV heeft dus twee beginwaarden nodig om de oplossing uniek te bepalen: in mechanische termen een beginpositie en een beginsnelheid, in wiskundige termen, een beginwaarde voor de oplossing en een beginwaarde voor de afgeleide.

De oplossing met $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$ (in de stelling $t_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 0$) noem ik $X(t)$. Wat kunnen we over deze oplossing zeggen?

1. $X(t)$ heeft een maximum in $t = 0$ omdat $X''(0) = -X(0) = -1 < 0$. Laten we t vanaf $t = 0$ groter worden, dan is $X''(t) = -X(t) < 0$ en wordt daarmee $X'(t)$ negatiever zo lang $X(t)$ positief is. We concluderen dat $X(t)$ niet positief kan blijven. Het eerste positieve nulpunt van $X(t)$ noem ik T . Dus $X(T) = 0$ en $X'(t) < 0$ voor $0 < t \leq T$. Zie Figuur 1, midden.
2. De DV $x''(t) = -x(t)$ heeft nog een invariantie. Behalve dat t niet apart voorkomt, komt ook de eerste afgeleide $x'(t)$ niet voor in de DV. De DV bevat alleen afgeleiden van even orde. Hierdoor geeft spiegeling in de x -as van de grafiek van een oplossing weer de grafiek van een oplossing. In het bijzonder is de grafiek van de oplossing $X(t)$ na spiegeling in de x -as weer de grafiek van een oplossing met $x(0) = 1$ en $x'(0) = 0$. Vanwege de uniciteit stelling vallen de grafiek en zijn gespiegelde samen. De grafiek van $X(t)$ is dus symmetrisch in de x -as: $X(t) = X(-t)$, zie Figuur 1, rechts.
3. Net als bij de DV $x'(t) = x(t)$ kunnen we oplossingen van DV $x''(t) = x(t)$ schuiven en verticaal schalen. Combineren we schuiven met spiegelen in de x -as, dan zien we dat we mogen spiegelen in elke verticale lijn. Dus ook in de lijn $t = T$. Combinatie van spiegeling in de lijn $t = T$ met spiegeling in de t -as geeft een puntspiegeling in het punt $(t, x) = (0, T)$. Omdat $X(T) = 0$ is ook de puntgespiegelde grafiek de grafiek van een oplossing die nul is in $t = T$, met (kijk naar de raaklijn) dezelfde afgeleide in $t = T$. Vanwege de uniciteit stelling vallen de grafiek van $X(t)$ en zijn puntgespiegelde samen en is de grafiek van $X(t)$ puntsymmetrisch in $(t, x) = (0, T)$, zie Figuur 1, rechts.
4. Herhaling van de argumenten hierboven geeft voor de grafiek van $X(t)$ symmetrielijnen $t = 0$, $t = 2T$, $t = -2T$, $t = 4T$, $t = -4T, \dots$, en symmetriepunten $(x, t) = (0, -T)$, $(x, t) = (0, 3T)$, $(0, -3T)$, $(0, 5T), \dots$. Daarmee wordt de oplossing $X(t)$ periodiek met periode $4T$. De oplossing $X(t)$ heeft nulpunten in $t = \pm T$, $t = \pm 3T$, $t = \pm 5T, \dots$, maxima in $t = 0$, $t = \pm 4T$, $t = \pm 8T, \dots$, minima in $t = \pm 2T$, $t = \pm 6T, \dots$

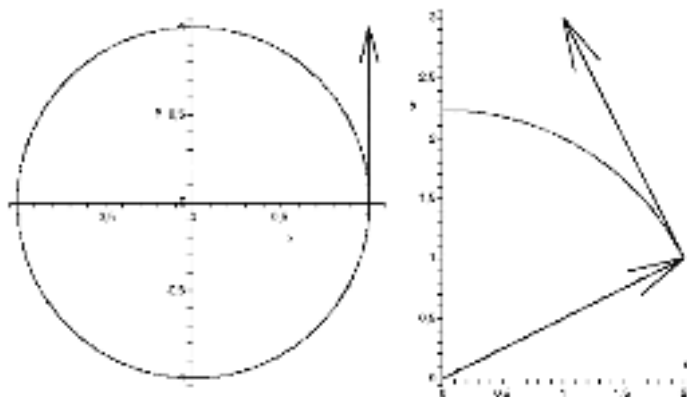
Het fasevlak

Van de tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$ kunnen we een eerste orde stelsel maken door de afgeleide van de onbekende functie een nieuwe naam te geven, bijvoorbeeld $y(t) = -x'(t)$. De 'min' hier is niet helemaal gebruikelijk, en is erbij gezet vanwege het specifieke voorbeeld en het verband met de goniometrische functies. De tweede orde DV $x''(t) = -x(t)$ wordt nu $y'(t) = -x''(t) = x(t)$ en is equivalent met een stelsel van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$:

$$\begin{aligned}x' &= -y; \\ y' &= x.\end{aligned}$$

Ik laat vanaf nu in de notatie vaak de expliciete t -afhankelijkheid weg.

Oplossingen $(x(t), y(t))$ kunnen we zien als geparametriseerde krommen in het x, y -vlak, in deze context vaak het *fasevlak* genoemd. Anders gezegd, oplossingen zien we als bewegende punten in het vlak. Een beginpositie (twee beginwaarden) is nodig (en



Figuur 2 Links: $X(t) = \cos t$, $Y(t) = \sin t$, parametrisatie van de cirkel; rechts: positievector, snelheidsvector, oplossingskromme

voldoende) om de oplossing uniek te bepalen.

Globale existentie-uniciteit: Voor elke reële t_0 , x_0 , y_0 heeft het stelsel

$$\begin{aligned}x' &= -y; \\ y' &= x\end{aligned}$$

een unieke en voor alle reële t gedefinieerde oplossing $(x(t), y(t))$ met $x(t_0) = x_0$ en $y(t_0) = y_0$.

Primitieve functies: Als $a(t)$ continu is op een interval dan heeft $a(t)$ op dat interval een primitieve functie $A(t)$, i.e. de functie $A(t)$ is op dat interval differentieerbaar en $A'(t) = a(t)$.

De vector

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

is de snelheidsvector van het bewegende punt $(x(t), y(t))$. Bij dit stelsel wordt de snelheidsvector verkregen door de positievector

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

tegen de klok in over 90 graden te draaien, zie Figuur 2, rechts. De behouden grootte zien we nu uit

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

$$-2x(t)y(t) + 2y(t)x(t) = 0.$$

Oplossingen bewegen dus over cirkels. De oplossing $x = X(t)$ van de slinger vergelijking $x'' = -x$ met begincondities $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ geeft zo, met $Y(t) = -X'(t)$, een parametrisatie

$$x = X(t), y = Y(t)$$

van de cirkel

$$x^2 + y^2 = 1.$$

De snelheidsvector heeft constante lengte 1. Het punt $(X(t), Y(t))$ begint op $t = 0$ in $(x, y) = (1, 0)$ en loopt de cirkel precies één keer linksom rond als t van $t = 0$ naar $t = 4T$ loopt. Kortom,

$$X(t) = \cos t, \quad Y(t) = \sin t, \quad 4T = 2\pi,$$

zie Figuur 2, links.

De 'multiplicatieve' eigenschap, complexe e -machten

De functies $X(t) = \cos t$ en $Y(t) = \sin t$ voldoen allebei aan de tweede orde DV $x'' = -x$. Begincondities zijn

$$X(0) = 1, \quad X'(0) = 0$$

voor $X(t)$ en

$$Y(0) = -X'(0) = 0, \quad Y'(0) = -X''(0) = X(0) = 1$$

voor $Y(t)$. Omdat de vergelijking $x'' = -x$ lineair is, wordt de oplossing met beginwaarde $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$ gegeven door

$$x(t) = x_0 X(t - t_0) + x_1 Y(t - t_0).$$

De keuze $x_0 = X(t_0)$ en $x_1 = X'(t_0) = -Y(t_0)$ geeft vanwege de uniciteitsstelling de oplossing $X(t)$ zelf en dus concluderen we dat

$$X(t) = X(t_0)X(t - t_0) - Y(t_0)Y(t - t_0),$$

en ook, na differentiatie naar t en vermenigvuldigen met -1 , dat

$$Y(t) = X(t_0)Y(t - t_0) + Y(t_0)X(t - t_0).$$

Dit zijn de somregels voor $X = \cos$ en $Y = \sin$. Differentiatie links en rechts naar t en vervolgens $t = t_0$ invullen geeft $X'(t_0)$ en $Y'(t_0)$ in termen van $X(t_0)$, $Y(t_0)$, $X'(0) = 0$ en $Y'(0) = 1$, waarmee het klokje rond is.

De afleiding hierboven is volstrekt analoog aan de afleiding dat

$$\exp(t) = \exp(t_0) \exp(t - t_0),$$

de multiplicatieve eigenschap van de functie $\exp$, die volgt uit de eigenschappen van oplossingen van $x' = x$.

Identificeren we het x, y -vlak $\mathbb{R}^2$ met $\mathbb{C}$ via $z = x + iy$, waarbij

$$i^2 = -1,$$

dan voldoet $Z(t) = X(t) + iY(t) = \cos t + i \sin t$ aan

$$Z(t) = Z(t_0)Z(t - t_0),$$

omdat

$$\begin{aligned} X(t) + iY(t) &= X(t_0)X(t - t_0) - Y(t_0)Y(t - t_0) \\ &\quad + i(X(t_0)Y(t - t_0) + Y(t_0)X(t - t_0)) \\ &= (X(t_0) + iY(t_0))(X(t - t_0) + iY(t - t_0)). \end{aligned}$$

Verder geldt

$$\begin{aligned} Z'(t) &= X'(t) + iY'(t) = -Y(t) + iX(t) \\ &= i(X(t) + iY(t)) = iZ(t), \end{aligned}$$

en $Z(0) = 1$. Het ligt dus voor de hand om

$$Z(t) = \exp(it) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

als notatie in te voeren.

De existentie-uniciteit stelling

Bij iedere functie $f(x)$ van één variabele kunnen we een differentiaalvergelijking

$$x'(t) = f(x(t))$$

opschrijven. Wat kunnen we in het algemeen zeggen over het bestaan van oplossingen?

Lokale existentie: Als f continu is op een open interval J dat x_0 bevat, dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop de DV $x'(t) = f(x(t))$ tenminste één oplossing $x(t)$ heeft met $x(t_0) = x_0$.

Dit is echt een stelling; een bewijs is op school niet haalbaar, de formulering wel. Het bewijs is gebaseerd op integratie van de DV van t_0 tot t . Dat geeft, voor het gemak met t_0 ,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds,$$

een integraalvergelijking die op diverse manieren kan worden aangepakt, bijvoorbeeld door iteratie, zie het verhaaltje uitgedeeld in Leiden.

Uniciteit: Als f ook voldoet aan

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|}$$

blijft begrensd als $x_1 \neq x_2$ door J lopen, dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop de DV $x'(t) = f(x(t))$ een unieke oplossing $x(t)$ heeft met $x(t_0) = x_0$.

In de praktijk: In het bijzonder is er lokale existentie en uniciteit als $f(x)$ een continue afgeleide heeft op een omgeving van x_0 .

Maximale existentie interval: Als de oplossing $x(t)$ niet voor alle $t > t_0$ bestaat dan is er een maximaal interval $[t_0, T)$ vooruit in de tijd waarop de oplossing bestaat. Als $t \rightarrow T$ geldt tenminste één van de volgende uitspraken

1. $x(t)$ komt willekeurig dicht bij de rand van J .
2. $x(t)$ is onbegrensd.

Een soortgelijke uitspraak geldt terug in de tijd voor $t < t_0$.

De volgende voorbeelden illustreren wat er mis kan gaan.

- a. $x' = x^2$, beginwaarde $x(0) = 1$,
onbegrensd oplossing $x(t) = \frac{1}{1-t}$.

- b. $x' = 2\sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$,
oplossingen $x(t) = 0$ en $x(t) = t^2$ voor $t \geq 0$.

Gekoppelde vergelijkingen

Voor stelsels van de vorm

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y); \\y' &= g(x, y),\end{aligned}$$

geldt soortgelijke stellingen.

Lokale existentie: Als f en g continu zijn op een rechthoek R die (x_0, y_0) bevat, (x_0, y_0) niet op de rand van R , dan is er een open interval I dat t_0 bevat waarop het stelsel tenminste één oplossing $(x(t), y(t))$ heeft met $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Uniciteit: Als f voldoet aan

$$\frac{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|}{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|}$$

blijft begrensd als $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ in R , idem voor g , dan is er er een open interval I dat t_0 bevat waarop de oplossing met $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ uniek is.

In de praktijk: Als $f(x, y)$ en $g(x, y)$ op een omgeving van (x_0, y_0) gemaakt zijn door 'gewone' continue differentieerbare functies van één variabele te combineren via optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen (niet door nul) en samenstellen, dan is er lokale existentie en uniciteit van de oplossing met (x_0, y_0) als beginvoorwaarde op $t = t_0$.

Door het punt (x_0, y_0) gaat er dan precies één oplossingskromme, tenzij $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. In dat geval is de oplossing constant gelijk aan (x_0, y_0) en kunnen we niet echt over een kromme spreken.

Deze uitspraak is ook makkelijk uit breiden tot stelsels van meer vergelijkingen.

Maximale existentie interval: Als de oplossing niet voor alle $t > t_0$ bestaat dan is er een maximaal interval $[t_0, T)$ vooruit in de tijd waarop de oplossing bestaat. Als $t \rightarrow T$ geldt tenminste één van de volgende uitspraken

1. $(x(t), y(t))$ komt willekeurig dicht bij de rand van R .
2. $(x(t), y(t))$ is onbegrensd.

Een soortgelijke uitspraak geldt terug in de tijd voor $t < t_0$.

NB: Overall waar hierboven over een rechthoek gesproken wordt mag men ook een willekeurige deelverzameling van R van $\mathbb{R}^2$ nemen met $(x_0, y_0) \in R$, (x_0, y_0) niet op de rand van R .

Toegestaan in de praktijk zijn bijvoorbeeld

$$f(x, y) = e^{\sin(x^2+y^2)+\cos y} + \frac{y}{1+x^2}, \quad g(x, y) = \ln(1+x^2+y^2),$$

voor elke (x_0, y_0) , maar niet (althans niet meteen voor alle

(x_0, y_0))

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)+\cos y} + \frac{y^2}{1+x^2}, \quad g(x, y) = e^{x+\cos y}.$$

Newton en Kepler

We zagen dat de slingervergelijking $x'' = -x$ de beweging beschrijft van een puntmassa met massa 1 op een lijn onder de invloed van een krachtveld gegeven door $F = -x$. In deze sectie kijken we naar de differentiaalvergelijking (bewegingsvergelijking) voor zo'n puntmassa bewegend in de x, y, z -ruimte in een centraal krachtveld F . Het directe analogon zou zijn

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

maar dat geeft drie ontkoppelde gewone slingervergelijkingen voor $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$. In plaats daarvan kijken we naar een krachtveld dat naar binnen gericht is, en dat kwadratisch afvalt met de afstand r tot de oorsprong, dus

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = - \frac{A}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Deze F heeft als som van de kwadraten van zijn componenten precies A gedeeld door $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Denk hierbij aan een universum met de zon vastgeprikt (in de oorsprong) en een planeet die als puntmassa beweegt onder invloed van de aantrekkingskracht van (alleen) de zon.

De positieve constante A kan ik, door tijd of plaats te schalen, gelijk aan 1 kiezen. Schalingsinvarianties zijn makkelijker te zien met de differentiaalquotientnotatie voor de afgeleiden, al zijn die wat moeilijk in de vector te proppen. Als we t met een factor C^3 schalen en x, y, z met een factor C^2 , dan blijft A hetzelfde. (Welke conclusie is hieruit te trekken?)

Van de drie gekoppelde tweede orde DV's is een stelsel van zes gekoppelde eerste orde DV's te maken,

$$\begin{aligned}x' &= -u; \\u' &= Ax(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\y' &= -v; \\v' &= Ay(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}; \\z' &= -w; \\w' &= Az(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Met begincondities

$$x(0) = x_0, u(0) = u_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, z(0) = z_0, w(0) = w_0,$$

heeft dit stelsel een unieke lokale oplossing, tenzij $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Als $(x(t), u(t), y(t), v(t), z(t), w(t))$ een oplossing is, dan is ook $(x(t), u(t), y(t), v(t), -z(t), -w(t))$ een oplossing.

Op grond van de lokale uniciteit van oplossingen moet een oplossing waarvoor $z(0) = w(0) = 0$ voor alle t waarvoor de oplossing bestaat ook voldoen aan $z(t) = w(t) = 0$. Anders zouden we een tweede oplossing kunnen maken door $z(t)$ en $w(t)$ een min te geven. We concluderen dat als de beginpositie en de beginsnelheid geen verticale component hebben ($z(0) = 0, w(0) = -z'(0) = 0$), de baan van de puntmassa in het x, y -vlak ligt.

Met poolcoördinaten r en φ schrijven we

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = x + iy = re^{i\varphi},$$

waarbij we de complexe notatie gaan gebruiken. Voor $r = r(t)$ en $\varphi = \varphi(t)$ als de onbekende functies van t worden de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r(t) \cos \varphi(t))'' \\ (r(t) \sin \varphi(t))'' \end{pmatrix} = -\frac{A}{r(t)^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix},$$

of, in complexe notatie,

$$(r(t)e^{i\varphi(t)})'' = -\frac{A}{r(t)^2}e^{i\varphi(t)}.$$

We gaan nu het linkerlid uitwerken met behulp van de productregel en de kettingregel voor differentiëren. We laten hierbij de variabele t weg uit de formules. De eerste afgeleide is

$$(re^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + r(e^{i\varphi})' = r'e^{i\varphi} + rie^{i\varphi}\varphi'.$$

De tweede afgeleide is

$$\begin{aligned} (re^{i\varphi})'' &= (r'e^{i\varphi})' + (rie^{i\varphi}\varphi')' = \\ r''e^{i\varphi} + r'(e^{i\varphi})' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri(e^{i\varphi})'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' &= \\ r''e^{i\varphi} + r'ie^{i\varphi}\varphi' + r'ie^{i\varphi}\varphi' + ri^2e^{i\varphi}\varphi'\varphi' + rie^{i\varphi}\varphi'' &= \\ e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') &. \end{aligned}$$

Invullen in de complexe bewegingsvergelijking geeft

$$e^{i\varphi}(r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'') = -\frac{A}{r^2}e^{i\varphi}.$$

We delen nu door $e^{i\varphi}$. Dan

$$r'' + 2ir'\varphi' - r(\varphi')^2 + ir\varphi'' = -\frac{A}{r^2},$$

ofwel

$$r'' - r(\varphi')^2 + \frac{A}{r^2} + i(2r'\varphi' + r\varphi'') = 0 = 0 + 0i.$$

Reële en imaginaire delen links en rechts gelijkstellend vinden we nu het stelsel

$$\begin{aligned} r'' - r(\varphi')^2 + \frac{A}{r^2} &= 0 \\ 2r'\varphi' + r\varphi'' &= 0 \end{aligned}$$

De i is verdwenen en vanaf hier rekenen we weer reëel.

De laatste vergelijking kan, na vermenigvuldigen met r , geschreven worden als

$$(r^2\varphi')' = 0,$$

dus

$$r^2\varphi' = B = \text{constant}.$$

Dit is de perkenwet van Kepler, die zegt dat het verbindende lijnstuk tussen de oorsprong en het bewegende punt in gelijke tijdsintervallen gelijke oppervlakten doorloopt. Als deze constante nul is, dan vliegt het punt recht naar de oorsprong toe of recht van de oorsprong af, met alle vervelende gevolgen vandie.

We kunnen nu

$$\varphi' = \frac{B}{r^2}$$

invullen in de eerste vergelijking van het stelsel voor r en φ . Dat geeft

$$r'' = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^2}.$$

Het is zo net alsof we een eendimensionale beweging hebben in een krachtveld gegeven door het rechterlid.

Essentieel is hier dat de exponent 2 kleiner is dan 3. Dat heeft tot gevolg dat de 'kracht'

$$F = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^2}$$

voor r groot negatief is en het punt dus naar binnen getrokken wordt (de kwadratische term overheerst), terwijl voor r dicht bij nul F positief is en het punt naar buiten geduwd wordt (de kubische term overheerst). Daartussen zit een evenwicht waar de oplossing omheen slingert, met, gelukkig, $r(t) > 0$ voor alle t , zoals we nog zullen zien.

De A/r^2 in de formule staat nog steeds voor de grootte van het oorspronkelijke krachtveld. Fysisch gezien is deze omgekeerd evenredig met r^2 omdat de (zwaarte)kracht zich moet verdelen over de oppervlakte van een bol met straal r . De exponent 2 is gelijk aan $3 - 1$, waarbij 3 de dimensie van onze ruimte is. In een 4-dimensionale ruimte zou de 2 dus een 3 worden en in een N -dimensionale ruimte een $N - 1$. Voor de DV

$$r'' = \frac{B^2}{r^3} - \frac{A}{r^{N-1}}$$

gaat de geruststellende analyse hierboven alleen door als $N < 4$. Voor $N > 4$ is het juist de afstotende 'kracht' die ver weg, en de aantrekkende 'kracht' die dicht bij overheerst. Evenwicht is dan ver te zoeken. Ook met $N = 4$ gaat het mis. Stabiele banen zijn alleen maar mogelijk voor dimensie N ten hoogste 3.

In de rest van het verhaal nemen we $B > 0$. Vermenigvuldigen van de r -vergelijking (met $N = 3$) met r' geeft, als we alles weer naar een kant brengen,

$$r'r'' - \frac{B^2r'}{r^3} + \frac{Ar'}{r^2} = 0,$$

ofwel

$$\frac{(r')^2}{2} + \frac{B^2}{2r^2} - \frac{A}{r} = \text{constant},$$

een behouden grootheid, net als bij de slingervergelijking, zie Figuur 3, links.

We kunnen hieruit verder redeneren en concluderen dat $r(t)$ een positieve periodieke functie is. Dat in één periode de hoek $\varphi(t)$ precies 2π toeneemt, met andere woorden dat de baan gesloten is, is minder evident en eigenlijk het gevolg van een klein wonderdje.

Het wonderdje openbaart zich als we als nieuwe *onafhankelijke* variabele φ (i.p.v. t), en als nieuwe *afhankelijke* variabele $w = \frac{1}{r}$ nemen. We krijgen dan, met de kettingregel, en ook omdat

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{B}{r^2} = Bw^2,$$

dat

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{w} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\varphi} Bw^2 = -B \frac{dw}{d\varphi},$$

en

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(-B \frac{dw}{d\varphi} \right) = -B \frac{d^2w}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} = -B^2 \frac{d^2w}{d\varphi^2} w^2,$$

zodat de vergelijking voor $r(t)$ (met N) overgaat in de vergelijking

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{A}{B^2} w^{N-3}$$

voor $w(\varphi)$.

Het wonder is de $w^0 = 1$ in het rechterlid als $N = 3$. We krijgen dan een lineaire inhomogene tweede orde DV voor $w(\varphi)$ die exact oplosbaar is. Het lijkt wel een tentamensom die zo voorbereid is dat het antwoord goed uitkomt. De w -vergelijking heeft een (hele) bijzondere oplossing, namelijk

$$w(\varphi) = \frac{A}{B^2}.$$

Omdat, zoals we gezien hebben, de 'homogene' vergelijking

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = 0$$

als algemene oplossing $w(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ heeft, met a en b vrije constanten, is de algemene oplossing van de 'inhomogene' w -vergelijking te schrijven als

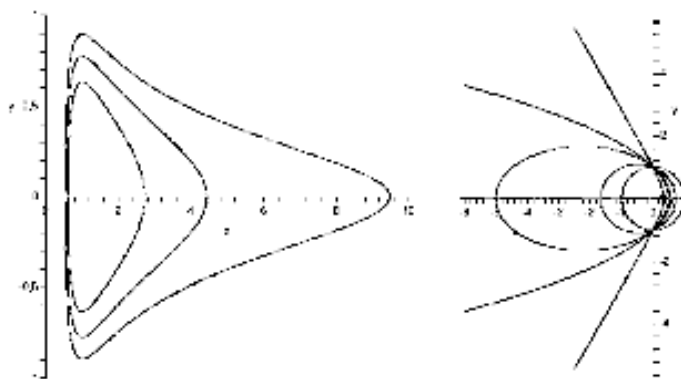
$$w(\varphi) = \frac{A}{B^2} + a \cos \varphi + b \sin \varphi.$$

Na een geschikte draaiing van ons coördinatenstelsel is kunnen we de baan beschrijven als

$$r = r(\varphi) = \frac{R}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad R = \frac{B^2}{A}$$

met $\varepsilon \geq 0$ en φ_0 vrije constanten. Dit is de formule voor een kegelsnede met brandpunt in de oorsprong: $\varepsilon = 0$ geeft een cirkel, $0 < \varepsilon < 1$ een ellips, $\varepsilon = 1$ een parabool en $\varepsilon > 1$ een (tak van een) hyperbool, zie Figuur 3, rechts.

Wie dat niet meteen ziet is in goed gezelschap, zie Arthur Koestler's boek *The Sleepwalkers*. We schrijven de formule voor r als $R = r + r\varepsilon \cos \varphi = r + \varepsilon x$, dus $r = R - \varepsilon x$, zo dat, na kwadra-



Figuur 3 Links: in het r, r' -vlak beweegt de oplossing zich over een gesloten kromme waarlangs $r(t) > 0$, $A = B = 1$; rechts: oplossingen $r(1 + \varepsilon \cos \varphi) = 1$, $\varepsilon = 0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1, 2$.

teren en sorteren,

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon Rx + y^2 = R^2.$$

Voor $\varepsilon^2 < 1$ inderdaad een ellips, met kleinste en grootste diameter gelijk aan

$$\frac{2R}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad \frac{2R}{1 - \varepsilon^2}, \quad \text{en oppervlakte } O = \frac{\pi R^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(de kleinste diameter is dus niet $2R$). Die oppervlakte is ook gelijk aan

$$O = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi =$$

(substitueer $\varphi = \varphi(t)$ en gebruik de perkenwet)

$$\int_0^T \frac{1}{2} r(\varphi(t))^2 \varphi'(t) dt = \int_0^T \frac{1}{2} B dt = \frac{BT}{2},$$

waarin T de omlooptijd is. Samenvattend hebben we voor R en T

$$R = \frac{B^2}{A}, \quad T = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{B^3}{A^2}.$$

Hier is A de constante in de bewegingsvergelijking waar we mee zijn begonnen. De constante B was een vrije constante in de oplossing. We zien dus dat de derde macht van R en de tweede macht van T aan elkaar gekoppeld zijn via ε , de *excentriciteit* van de ellips. In termen van de halve lange as a is het verband het mooist,

$$a^3 = A \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2,$$

met dank aan Gert Heckman, die me hier op wees nadat ik slaap-rekenend doorgewandeld was met de foutieve kleinste diameter. Ach ja...

Referenties

1. www.math.vu.nl/~jhulshof/echtebrwwiskunde.pdf
2. Koestler, A., *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*, Penguin, 1990

Bas Edixhoven

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
edix@math.leidenuniv.nl

Samenleving Viering driehonderdste geboortejaar Euler

Eulerconferentie aritmetische meetkunde

Leonhard Euler was een van de grootste en productiefste wiskundigen ooit. Hij werd in Bazel geboren in een predikantenfamilie. Na het gymnasium liet zijn vader hem Grieks, Hebreeuws en wiskunde studeren; zijn leraar was Johann Bernoulli. In 1726 studeerde hij af en in het voorjaar 1727 ging hij, net twintig jaar oud, op weg naar St. Petersburg om daar hoogleraar te worden. Zijn geboortejaar, 1707, is ook daar op grootse wijze gevierd met een serie conferenties over de verschillende thema's uit zijn onderzoek. Bas Edixhoven, hoogleraar meetkunde in Leiden, was ook uitgenodigd om er een lezing te geven: hij vertelt over zijn bezoek aan het deelcongres over aritmetische meetkunde.

Ter gelegenheid van de driehonderdste verjaardag van Leonhard Euler vonden er in juni en juli van 2007 een aantal conferenties plaats in St. Petersburg. Euler werd geboren op 15 april 1707 in Basel (Zwitserland), en stierf op 18 september 1783 in St. Petersburg. Op zijn negentiende werd hij lid van de academie van wetenschappen in St. Petersburg, na een mislukte sollicitatie in Basel. Euler is een van de giganten in de geschiedenis van de wiskunde, en hij staat dan ook zeker in mijn top 5 van favoriete wiskundigen tot nu toe: Archimedes, Euler, Gauss, Serre, en Grothendieck. Euler heeft aan vele gebieden van de wiskunde bijgedragen (in ieder geval getaltheorie, algebra, analyse — waaronder variatierekening, meetkunde, mechanica, optica), en een belangrijk aantal van de nu gebruikte notaties en concepten is van hem afkomstig, zoals bijvoorbeeld het grondgetal e van de

natuurlijke logaritme, alsook de mooie identiteit $e^{i\pi} = -1$, en zelfs het begrip functie, inclusief de notatie $f(x)$. Zijn verzameld werk (*Leonhard Euler Opera Omnia*) bestaat uit 82 volumes; de volledige index is te vinden op de webpagina's van Springer-Verlag. Tot bijna vijftig jaar na zijn dood verschenen er nog artikelen van hem in de verslagen van de academie in St. Petersburg. Om recht te doen aan zijn bijdragen op al deze gebieden is dan ook een serie van tien conferenties georganiseerd. Waar normaal op de aankondigingsposter een lijst van sprekers staat, staat in dit geval een even lange lijst van conferenties (zie [1]). Voor één daarvan, over aritmetische meetkunde, kreeg ik een uitnodiging.

Deze uitnodiging was de aanleiding tot mijn eerste reis naar Rusland. De voorbereiding begon met een bezoek aan het Russisch consulaat in Den Haag, waar ik op vertoon

van een officiële uitnodiging en na het betalen van ongeveer 100 euro een visum kreeg. Het contrast met het consulaat van de Verenigde Staten in Amsterdam viel me erg op. Direct achter de voordeur kwam ik in de hal met de loketten, waar mooie blondines met grote boezems behulpzaam visumaanvragen verwerkten. De orde werd bewaard door slechts één persoon waar duidelijk niet mee te spotten viel. Daarna kocht ik een vliegticket voor de gewenste data. Aangezien de KLM niet op die dagen vloog werd het de Scandinavian Airlines (SAS).

Enige dagen voor vertrek informeerde ik eens bij onze Russische master-studente hoe ik eigenlijk aan roebels moest komen. Het antwoord was simpel: die trek je uit de muur, net als in Nederland, maar kijk wel uit waar je dat doet. De avond voor vertrek kwam toch nog onverwacht, en met mijn vrouw overlegde ik of het nodig was nog snel een testament op te maken (het is er niet van gekomen, en is gelukkig ook niet nodig gebleken).

De vliegreis verliep probleemloos. Het vliegveld van Kopenhagen, waar ik een overstap had, bracht me al in een Scandinavische sfeer: de vloeren van de terminals zijn geheel van parket. In St. Petersburg aangekomen doorstond mijn visum de toets, afge-



Figuur 1 Vanaf links naar rechts, boven naar onderen: Nevski Prospekt bij middernacht, buste van Euler op de binnenplaats van het Eulerinstituut, Hermitage museum, een straat in St. Petersburg, hotel (in een park), een straat, Fontanka-rivier

nomen door een strenge blondine achter een hoog loket, en ik bevond me voor het eerst van mijn leven in Rusland.

Een promovendus van Sergei Vostokov, de lokale organisator van de conferentie, haalde mij op in de aankomsthal. Deze uiterst vriendelijke jongen heette mij welkom in Rusland, en begon meteen met grapjes over spionnen en de KGB. De onofficiële taxi die hij geregeld had bracht ons naar mijn hotel. De reis werd door hem continu voorzien van commentaar. Het vliegveld ligt ten zuiden van de stad, in het gebied dat tijdens de tweede wereldoorlog door de Duitsers was bezet. De omsingeling van St. Petersburg door Duitsers (en minder actieve Finnen) heeft zo'n negenhonderd dagen geduurd, en men zegt dat er in de stad ongeveer een miljoen doden zijn gevallen (het huidige inwonersaantal is zo'n 5 miljoen). De plaats tot waar de Duitsers zijn gekomen is nu gemarkeerd door een monument. Het centrum, dat wonderwel goed bewaard is gebleven, ligt slechts een tiental kilometers verderop. Door het zeer drukke verkeer duurde de reis meer dan een uur. Het aantal auto's is natuurlijk sterk gestegen in de laatste jaren, terwijl het wegennet niet is aangepast. Daarentegen is er een efficiënte en fraaie metro, waarmee het reizen veel sneller gaat. Het hotel bleek een oude villa in een park te zijn, met een vijftiental kamers. Erg comfortabel was het hotel niet: geen internet, 's nachts mugenjacht, en een enigszins rustieke douche. De prijs was wel Europees: 70 euro per nacht, maar de ligging was dat zeker waard.

Vanaf het hotel was het vijf minuten lopen,

via een brug over een de vele takken van de Neva, naar het Eulerinstituut. Dit instituut is gehuisvest in een fraai gebouw, dat recentelijk gerenoveerd is. Op de binnenplaats staat een buste van Euler. Wie goed kijkt kan een bekende formule ontcijferen in het bloemperk ervoor (zie ook de foto rechts).

Het wetenschappelijke programma bestond uit drieëndertig voordrachten verdeeld over zes dagen (zie [3] voor de lijst). Het gemeenschappelijke thema was de moderne theorie van zeta en L-functies. In de uitnodiging hadden de organisatoren laten weten het liefst overzichtsvoordrachten te hebben, dus niet te specialistisch, met daarin liefst ook nog iets over het werk van Euler.

Om aan dit verzoek te voldoen heb ik de aankondigingsposter in detail bekeken, deze bevatte namelijk een flink aantal formules van Euler. Na mij verbaasd te hebben over een foute formule vond ik wat ik zocht:

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k x^{(3k^2+k)/2}.$$

Euler bewees deze identiteit vast met behulp van combinatoriek. Gewoon het product uitschrijven laat zien dat de coëfficiënt van x^m het verschil is van het aantal partities van m in een even aantal ongelijke delen en het aantal partities van m in een oneven aantal ongelijke delen. Daarna moet dan bewezen worden dat dit verschil 0 is als m niet van de vorm $(3k^2 + k)/2$ is, en $(-1)^k$ als $m = (3k^2 + k)/2$ (voor details, zie [4]). Tegenwoordig wordt dit soort functies bestudeerd via modulaire vormen. Mijn voordracht ging over het snel uitre-

kenen van de coëfficiënt van x^m in machten

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n)^r.$$

Snel betekent hier: in tijd polynomiaal in $r \log m$. Het is een diep resultaat dat dit kan als r een veelvoud van 24 is en $m + r/24$ een priemgetal is (zie [6] voor details).

Don Zagier gaf een opmerkelijke voordracht die begon met Euler's oplossing van het zogenaamde *Baselprobleem*: geef de exacte waarde van $\sum_{n > 0} 1/n^2$, en eindigde met de hedendaagse vermoedens over waarden van L-functies in gehele getallen. Nikolai Durov, een promovendus bij Faltings, is een fenomeen waar we nog meer van zullen horen. Zijn voordracht gaf een goed overzicht van de preprint van 568 pagina's die hij in april op arxiv heeft geplaatst. Christopher Deninger werd vergezeld door een televisieploeg uit Basel.

Natuurlijk vonden er buiten het wetenschappelijk programma ook andere activiteiten plaats. St. Petersburg is een prachtige stad, die door al het water doet denken aan Amsterdam en Venetië. St. Petersburg is echter een stuk groter, en het aantal paleizen aan de rivieren en kanalen is enorm. In 1703 werd deze stad gesticht door tsaar Peter de Grote, die een paar jaar daarvoor, tijdens een reis door Europa, in Nederland ervaring had opgedaan in scheepsbouw en ook in stedenbouw in natte streken. De conferentie vond plaats in juni, dus in de periode van de 'white nights', wanneer het 's nachts niet volledig donker wordt, en het om middernacht nog volledig

licht is. Eén dag van de conferentie was gevuld met een excursie naar Peterhof, het Versailles van St. Petersburg. Ter plekke moest extra entreegeld worden betaald voor het maken van foto's, met het gevolg dat niemand dat deed. Dat deze excursie de hele dag in beslag nam kwam vooral doordat de reis per bus ging, en nog wel op vrijdag, de dag dat vele Russen voor het weekend naar hun datsja vertrekken. Peterhof is een indrukwekkend geheel, dat te denken geeft over de middelen waarmee dat allemaal is bereikt (maar goed, ditzelfde geldt natuurlijk ook voor Versailles en Paleis Het Loo). Ondanks het afgaan van het alarm tijdens de passage van onze groep in een kwetsbare zaal eindigde onze excursie niet in Siberië. 's Avonds was er het officiële conferentiediner. Tegen mijn verwachting, gewekt door verhalen van studiegenoten die in de jaren 80 met hun promotor naar Mos-

kou waren geweest, en door mijn voormalige student Andrei Yafaev, was de hoeveelheid beschikbare wijn en wodka redelijk, en niet veel te veel. Dit diner werd interessant omdat, onder voorzitterschap van Dorian Goldfeld, alle deelnemers uiteindelijk een speech hielden. Gemeenschappelijke thema's in al deze speeches waren de betere mogelijkheid tot samenwerking met Rusland sinds het einde van de Sovjet periode, en relaties met Euler. Hier bleek nog eens dat de deelnemers aan de conferentie een aardige mix vormden van de wereldbevolking. Behalve de gebruikelijke Amerikanen, West-Europeanen, Japanners, Russen en sinds kort Chinezen, waren er ook duidelijk meer Oost-Europeanen: Polen, Letten, Albanezen, ... Ik was de enige Nederlander. Helaas was mij niets bekend over de relatie van Euler met Nederland, maar ik heb beloofd mijn best te doen om te zorgen dat

over honderd jaar een Nederlander zal rapporteren over dit onderwerp tijdens de conferenties die dan ongetwijfeld zullen plaatsvinden. Informatie hierover is dus welkom! Er waren nog andere excursies: een prachtige boottocht (bijzonder aan te raden) en een bezoek aan het gebouw van de academie waar Euler heeft gewerkt (niet zo aan te raden). Tijdens de boottocht heb ik het beroemde Hermitage-museum van buiten gezien. Voor de binnenkant had ik deze keer geen tijd, maar dat komt de volgende keer wel goed. Ik ben zeker van plan een keer terug te gaan.

Tot slot nog een kleine en misschien nuttige wetenswaardigheid over de terugreis. Het vliegveld (Pulkovo) is klein, waardoor men kennelijk niet teveel mensen tegelijk wil binnenlaten. Men kan pas een uur voor vertrek inchecken, en de rij is daardoor ook kort. ←

Referenties

1. Lijst van conferenties: www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/Euler300
2. Wikipedia Euler: en.wikipedia.org/wiki/Euler
3. Program: www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/AG/prog.html
4. Wikipedia pentagonal: en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_number_theorem
5. Mactutor Euler: www.groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Euler.html
6. ArXiv comp: www.arxiv.org/abs/math.NT/0605244



Figuur 2 Binnenplaats Eulerinstituut met ervoor in het bloemperk een bekende formule uit de grafentheorie

Reinier Bröker

Department of Mathematics

University of Calgary

2500 University Drive NW

Calgary, AB, T2N 1N4

Canada

reinier@math.ucalgary.ca

Column Wiskundigen in den vreemde

Canadian winter

In Toronto, in Canada, is het Fields Institute gevestigd: een trekpleister voor vele jonge onderzoekers. De gasten van dit instituut nemen aansluitend aan hun bezoek vaak een baan als post-doc aan een van de Canadese universiteiten, waar ze ook voor universitair wiskundeonderwijs worden ingezet. In Canada staat dit onderwijs stevig onder controle van studenten en bestuurders. Stof en tempo zijn meestal volledig vastgelegd en docenten worden continu geëvalueerd. Reinier Bröker, gepromoveerd in Leiden in de algebra, ging naar Toronto en Calgary om daar een jaar als post-doc te werken. Hoe redde hij zich in deze bureaucratie?

Voordat ik in augustus 2006 naar Canada vertrok, had ik de overtuiging dat Canada het metrisch stelsel omarmd had. Geen rare dingen als mijlen, Fahrenheit en 12 inches in een voet. Hoewel dit officieel waarschijnlijk waar is, is de praktijk weerbarstiger. De situatie is zo mogelijk nog lastiger voor Europeanen dan in de Verenigde Staten: in Canada zijn beide systemen in omloop, het hangt er van af waar je het over hebt welk systeem je gebruikt. Zo gaan afstanden per auto in kilometer, maar afstanden per trein gaan in mijl. Sneeuwhoogte in inch, regenval in millimeter. Buitentemperatuur in Celcius, maar de oven moet natuurlijk in Fahrenheit ingesteld worden!

Mijn Canadees werkavontuur begon aan het Fields Instituut in Toronto. Dit instituut wordt voornamelijk bevolkt door zo'n vijftig gastonderzoekers die een semester lang deelnemen aan een 'thematisch programma', cryptografie in mijn geval. De filosofie hier is dat er vanzelf goede ideeën ontstaan als je voldoende mensen bij elkaar hebt. Iedereen doet in principe zijn eigen onderzoek en probeert aanknopingspunten te vinden met het onderzoek van andere bezoekers. Om de paar weken is er een conferentie in het Fields, en het gebouw barst dan bijna uit zijn voegen. Praktisch iedereen is bij de dagelijkse koffiepauze, compleet met exotisch fruit en allerhande rariteiten. Deze atmosfeer is erg goed voor het opzetten van nieuw onderzoek, en uiteraard vaart ook je wiskundig netwerk er wel bij.

Na in december zelf de pepernoot geïntroduceerd te hebben als exotische rariteit bij de koffiepauze, vertrok ik in janu-

ari naar de winter in Calgary voor de resterende zes maanden van mijn postdoc. Wat wij in Nederland winter noemen is vergelijkbaar met april in Calgary, de lokale winter is eufemistisch uitgedrukt een stukje kouder. Een maximumtemperatuur onder de -10 is eerder regel dan uitzondering, ik weet nu dat er een groot verschil is tussen -10 en -25. Zelfs in de nabij gelegen Rocky Mountains (waar je overigens Nederlands snoep kunt kopen, in Banff worden boterbabbelaars verkocht) is het een stuk warmer, aangezien de poolwind daar minder invloed heeft. En waar in Nederland gehoopt wordt op wat sneeuw, meldde een steeds ongeloofwaardiger wordende weerman iedere dag dat hij hoopte dat het volgende week toch echt zou stoppen met sneeuwen. Twee weken na Pasen had hij eindelijk gelijk...

Mij was de eer te beurt gevallen een college te geven voor tweedejaars studenten. Wat dan direct opvalt, is de voorliefde op Canadese universiteiten voor bureaucratie. Zo is er een gewoon kopieerapparaat en een kopieerapparaat voor tentamens — ze staan uiteraard gewoon naast elkaar. Voordat mijn college kon beginnen, moesten er twee belangrijke formulieren ingevuld worden: een 'syllabus' en het beoordelingssysteem.

In de syllabus wordt precies dichtgetimmerd wat er behandeld wordt gedurende het college en hoeveel uren er besteed wordt aan onderdeel X. Dat het niet zo praktisch is te beloven exact één uur aan de definitie van een groep te besteden als het niveau en achtergrondkennis van de studenten volstrekt onbekend is, wordt niet begrepen. In plaats van mee te gaan in de Canadese bureaucratie heb ik maar praktisch ongezien de syllabus van het jaar daarvoor overgenomen, er de zin "The instructor reserves the right to slightly deviate from this syllabus" ondergeschreven en er verder niet meer naar omgekeken.

Naar goed Nederlands gebruik besloot ik meteen maar huiswerkopgaven als onderdeel van de beoordeling in te voeren. Drie per week leek me mooi, maar dat stuitte op een veto van de decaan. Drie opgaven per week zou te veel zijn voor de studenten, dat kon absoluut niet. Mijn 'compromis' zes opgaven iedere twee weken op te geven was direct akkoord. Het spreekt voor zich dat ik in het eerste college uitgelegd heb dat die zes opgaven onderverdeeld waren in drie opgaven per week... ←

Jan Wiegerinck

Korteweg-De Vries Institute for Mathematics
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
janwieg@science.uva.nl

André Ran

Department of Mathematics
Vrije Universiteit Amsterdam
De Boelelaan 1081a
1018 HV Amsterdam
ACM.Ran@few.vu.nl

Herman te Riele

Centrum voor Wiskunde en Informatica
P.O. Box 94079
1090 GB Amsterdam
Herman.te.Riele@cwi.nl

Samenleving 14–18 juli 2008

5ECM in Amsterdam

Over ruim een half jaar kunnen we genieten van het vijfde ‘European Congress of Mathematics’. De laatste keer dat Nederland op een wiskundige conferentie van deze omvang heeft kunnen bogen, is het Wereld Mathematisch Congres van 1954, meer dan vijftig jaar geleden. Eerdere afleveringen van het Europees congres vonden met tussenpozen van vier jaar plaats in Parijs, Budapest, Barcelona, en Stockholm. Nu is Nederland aan de beurt. In 2008, van 14 tot 18 juli is Amsterdam het ontmoetingspunt van wiskundig Europa.

Het scientific committee heeft een prachtig programma samengesteld. Een congres met tien plenaire voordrachten, waar ik verderop ruimschoots aandacht aan besteed, en ruim dertig voordrachten op uitnodiging van excellente wiskundigen over de nieuwste en belangwekkendste ontwikkelingen in de hele wiskunde, vindt maar zelden plaats in ons land. Voeg daarbij de drie science lectures en twee en twintig minisymposia, en niet te vergeten de voordrachten van de tien winnaars van de EMS-prijzen, dan hebben we het mischien wel over de wiskundige bijeenkomst van de eeuw in ons land!

Op de website www.5ecm.nl groeit langzaam de informatie over de voordrachten en minisymposia en nog veel meer.

Voorgeschiedenis

Hoe we zover gekomen zijn is een heel verhaal. De eerste aanzet is drie jaar geleden beschreven in het Nieuw Archief. Hier volgt een korte samenvatting.

Nadat in 1990 de European Mathematical Society was opgericht, vond in 1992 het eerste European Congress of Mathematics plaats, en wel in Parijs. Dit grootste Europese wiskundecongres wordt eenmaal in de vier jaar gehouden, in de jaren 0 mod 4, alternerend met de grote IMU-congressen (ICM) die in de jaren 2 mod 4 worden gehouden [1].

Op verzoek van de toenmalige voorzitter van het KWG, Eduard Looijenga, hebben de drie Amsterdamse wiskunde-instellingen CWI, Korteweg-de Vries Instituut (UvA) en Afdeling Wiskunde (VU) eind 2002 een zogenaamd bidbook uitgebracht met het voorstel om het vijfde ECM in Amsterdam te organiseren. In dit bidbook, opgesteld door de auteurs, stond een groot aantal aanbevelingen van o.a. de burgemeester van Amsterdam, de ministeries van Onderwijs en EZ, de rectores van de UvA en de VU, de directeur van het CWI, de president van de KNAW, de directoren van de drie wiskunde onderzoekscholen, aan het bestuur van de European Mathematical Society om Amsterdam als locatie voor 5ECM te kiezen. Belangrijke zaken als plaats van samenkomst (de RAI), ondersteuning door een professioneel congresbureau, een gedegen begroting waarin gerekend werd op financiële en logistieke steun vanuit heel wiskundig Nederland, als ook vanuit het bedrijfsleven en de overheid, kwamen in dit bidbook aan de orde. Na een zogenaamd site-bezoek van een delegatie van het EMS-bestuur in juli 2003 aan Amsterdam waarin alle aspecten van de organisatie onder de loep werden genomen werd tijdens 4ECM in Stockholm het vijfde ECM aan Amsterdam toegewezen. Toen dit bekend werd zijn een aantal stappen gezet. Er is een congresbu-

reau geselecteerd (ICS, voorheen Lidy Groot). De stichting 5ECM werd opgericht door VU, UvA en CWI; hierin worden alle activiteiten voor het congres ondergebracht. Nobelprijswinnaar 't Hooft en de Spinoza-laureaten Barendregt (RU), van Benthem (UvA), Dijkgraaf (UvA) en Lenstra (UL), alsmede de (voormalige) rectores van de UvA en VU, Bouters, van der Heijden, van den Boom en Zwemmer, en de heren Cohen (burgemeester van Amsterdam) en Rinnooy Kan (voorzitter SER), voor- aanstaande representanten van wetenschap, maatschappij en bedrijfsleven, werden bereid gevonden in het comité van aanbeveling zitting te nemen. De website voor 5ecm werd opgestart (www.5ecm.nl), en het Scientific Committee (onder leiding van Lex Schrijver, UvA en CWI) en het Prize Committee (onder leiding van Rob Tijdeman, UL) werden gevormd.

Inmiddels zijn ook het Grants Committee (voorgezeten door Frank den Hollander, UL), Satellite Committee (voorzitter Jaap Top, RUG) en Poster Committee (voorzitter Peter Stevenhagen, UL) opgestart. Op ICM en EMS congressen is de afgelopen jaren een locale speciale uitgave van de *Mathematical Intelligencer* verschenen, met verhalen over het (wiskundige) leven ter plaatse. Iets dergelijks zal ook in Amsterdam onder verantwoordelijkheid van Gerard Alberts verschijnen.

Kosten en Baten

We hebben een aantrekkelijke groep sprekers uit alle belangrijke takken van de wiskunde bereid gevonden om een bijdrage te leveren; korte beschrijvingen van hun leven en werk vindt u hiernaast.

Tenslotte moeten we een paar vrij banale zaken uitlichten. De congresfee is met 220 Euro zelfs voor KWG-leden die zich op tijd (vóór 1 april 2008) aanmelden, vrij hoog. Tenminste, wanneer je het vergelijkt met de kosten van een 'gewoon' wiskundecongres. Hoe komt dat? Economies of scale werken de verkeerde kant op. Een groot congres wordt duurder doordat je een congresbureau in de arm moet nemen, een congrescentrum als locatie moet kiezen (geen universiteit kan 1200 man in een zaal herbergen) en ook de commerciële koffie- en theevoorziening is veel duurder dan de twee kannen thee die de secretaresse 's middags bij een kleine bijeenkomst in de hal neerzet.

Wanneer je echter de entreeprijs vergelijkt met wat gebruikelijk is voor congressen in de RAI, dan is hij belachelijk laag! Hij is zelfs lager dan de entreeprijs tijdens de ICIAM meeting van afgelopen jaar in Zürich (die bedroeg ongeveer 240 euro).

Voor wiskundigen met minder financiële mogelijkheden, denk aan Oost-Europeanen, zijn een aantal grants beschikbaar, waardoor ook zij aan 5ECM kunnen deelnemen.

Wij als organisatoren hebben hard gezocht naar financiële ondersteuning voor het congres, en zijn daar behoorlijk in geslaagd. Allelei organisaties die bij wiskunde in Nederland betrokken zijn, steunen het congres financieel. Op de website staan zij allemaal vermeld. De ruimhartige steun van NWO, KWG en de stichting Compositio willen wij hier expliciet vermelden, omdat deze doorslaggevend zijn voor het welslagen van de onderneming.

Nu we toch over financiële ondersteuning spreken, ook uit het bedrijfsleven mogen wij steun ontvangen, maar de eerlijkheid gebiedt ons te zeggen dat we hier te licht over dachten. Tegenwoordig wil een bedrijf een duidelijke tegenprestatie die past bij het beleid van het bedrijf, en het is voor organisatoren van een wiskundecongres niet eenvoudig om die aan te geven! Kleine bedragen zijn daarom regel, en dat betekende erg hard werken om substantiële sponsoring bij elkaar te krijgen.

KWG en 5ECM

Het KWG speelde een belangrijke rol bij het binnenhalen van het congres. Ook werd in een vroeg stadium besloten dat het Nederlands Mathematisch Congres 2008 zou worden ingebed in 5ECM. Wat dit inbedden betekende was toen niemand duidelijk. Nu ziet het er naar uit dat alleen de vaste, typisch KWG-congresonderdelen als zodanig zullen plaatsvinden: voordrachten zijn er genoeg tijdens 5ECM! De jaarvergadering van het KWG met

de uitreiking van de Chris Zaalbokaal, de Bee-gerlezing en de Philips promovendiprijs wedstrijd worden gehouden tijdens het congres, in de RAI.

De uitreiking van de Brouwer Medaille, de Laudatio en de Brouwerlezing vinden op maandagavond plaats in de VU, gecombineerd met een receptie, aangeboden door het KWG.

We komen weer terug bij het begin. Het vijfde European Congress of Mathematics is een unieke wiskundige manifestatie in Nederland. Voor jong en oud is dit een uitgelezen mogelijkheid om voor geringe kosten een geweldig congres bij te wonen zoals normaal gesproken alleen in het buitenland plaatsvindt. Mis die kans niet en schrijf je in! 

Referenties

1. J. Wiegerinck, 'Op weg naar Amsterdam', Nieuw Archief Wiskunde 5 (3), 2004, pp. 204–206



Christine Bernardi (CNRS en Université Pierre et Marie Curie Paris)
Geboren in 1955 in Frankrijk.

Christine Bernardi promoveerde in 1979 en kreeg in 1995 de Prix Blaise Pascal van de GAMNI-SMAI van de Franse Academie van Wetenschappen.

Christine Bernardi behoort tot de top van de Europese Numerieke Analyse. Zij heeft samen met haar groep belangrijke bijdragen geleverd aan verschillende deelgebieden van de numerieke analyse, zoals de ontwikkeling van spectraalmethoden voor elliptische problemen en van domein-decompositiemethoden, en, meer recentelijk, van de gereduceerde bases-methode en enkele nieuwe toepassingen van a posteriori analyse.



Felix Otto (Universität Bonn)
Geboren in 1966 in Duitsland.

Felix Otto promoveerde in 1993 in Bonn bij S. Luckhaus. Daarna bracht hij verscheidene jaren door in de VS: aan het Courant Institute, aan de Carnegie Mellon University, en aan de UC Santa Barbara, alvorens in 1999 terug te keren naar Bonn. Hij heeft invited lectures gegeven bij verschillende congressen (SIAM, GAMM, ICM sectional speaker in 2002, ICIAM 2007) en was Stieltjes Visiting Professor in Leiden in 2004. Hij ontving een A.P. Sloan Research Fellowship in 1997, de 2001 Max-Planck Forschungspreis, de 2006 Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Preis en de 2007 Collatz Prijs.

Het onderzoek van Otto concentreert zich op de analyse van patroonvorming in modellen uit de fysica, partiële differentiaalvergelijkingen en multi-scale methoden. Zijn groep gebruikt een veelomvattend scala van analysemethoden: numerieke simulatie, asymptotische analyse, en rigoureuze analyse. Een paar specifieke onderwerpen van recent onderzoek in zijn groep zijn micromagnetisme, complexe rheologie, en 'coarsening' van ruimtelijke structuur in de tijd.



François Loeser (ENS Paris)
Geboren in 1958 in Frankrijk.

Loeser promoveerde in 1983 bij B. Teissier. Hij was plenary speaker tijdens de 2005 AMS Algebraic Geometry Summer School in Seattle. In 2007 kreeg hij de Prix Charles-Louis de Saulces de Freycinet van de Franse Academie van Wetenschappen.

Zijn onderzoeksgebieden zijn algebraïsche meetkunde, aritmetische meetkunde, en 'motivic integration'.



Jean Bourgain (IAS Princeton)
Geboren in 1954 in België.

Bourgain promoveerde in 1977 in Brussel op een proefschrift over de theorie van Banach ruimtes. Hij kreeg in 1994 een Fields Medaille, kreeg de Ostrowski Prize in 1991 en vele andere prijzen en onderscheidingen. Hij was invited speaker tijdens ICM 1983, 1986 en 1994, en tijdens ECM 1992.

Bourgain heeft meer dan driehonderd artikelen gepubliceerd op verschillende gebieden van de wiskunde, zoals analyse (Banachruimtes, harmonische analyse) analytische getaltheorie, combinatoriek, ergodentheorie en partiële differentiaalvergelijkingen.



Juan Ignacio Cirac (Garching, Germany)
Geboren in 1965 in Spanje

Juan Ignacio Cirac is een internationaal erkend leider op het gebied van kwantum informatietheorie met een buitengewoon breed overzicht over het gebied, van theoretische aspecten tot fysische realisaties. Hij studeerde in 1988 af aan de Universidad Complutense de Madrid en verhuisde in 1991 naar de VS om te werken als postdoc aan het Joint Institute for Laboratory Astrophysics van de University of Colorado at Boulder. Later werd hij hoogleraar aan het Institut für Theoretische Physik in Innsbruck, Oostenrijk. Sinds 2001 is hij directeur van de Theoretische Divisie van het Max Planck Instituut voor kwantum Optica in Garching, Duitsland. Zijn onderzoeksgebied is kwantuminformatietheorie. Hij heeft een rekensysteem ontwikkeld gebaseerd op kwantummechanica dat hopelijk in de toekomst zal leiden tot het ontwerp van veel snellere algoritmen. Hij heeft bijdragen geleverd aan toepassingen die de bruikbaarheid van zijn theorieën demonstreren, waarbij berekeningen worden uitgevoerd die niet mogelijk zijn met de huidige systemen voor het verwerken en transporteren van informatie. Volgens zijn theorieën zal kwantuminformatie de informatiemaatschappij op zijn kop zetten en leiden tot veel efficiëntere en veiligere communicatie van informatie. Naast zijn werk aan kwantumtheorie heeft hij gedegenereerde kwantumgassen en kwantumoptica bestudeerd. Hij is een van de meest geciteerde schrijvers op zijn gebied.



Nicolai Reshetikhin (Univ. of California, Berkeley)
Geboren in 1958 in Leningrad (St Petersburg).

Reshetikhin promoveerde in 1984 bij Fadeev aan het LOMI in Leningrad. Hij was spreker tijdens ICM 1990. Tegenwoordig is hij verbonden aan de UC Berkeley en aan Aarhus, waar hij de Niels Bohr leerstoel bekleedt voor de jaren 2006-2010. In het voorjaar 2008 is hij visiting professor aan de Universiteit van Amsterdam.

Reshetikhin is werkzaam in overlappende gebieden van de meetkunde, topologie en mathematische fysica. Hij heeft grote invloed uitgeoefend op een aantal wiskundige disciplines, zoals representatietheorie, knopentheorie, en moduli-ruimtes van vlakke verbindingen. Zijn werk met Vladimir Turaev op het gebied van topologische kwantumveldtheorieën in dimensie drie heeft veel invloed gehad op jonge onderzoekers: het heeft de weg geopend naar de zogenaamde kwantumtopologie. Hij is coauteur van een deel van het werk waarvoor Okounkov in 2006 de Fieldsmedal kreeg.



László Lovász (Eötvös Loránd University, Budapest)
Geboren in 1948 in Hongarije.

Lovász promoveerde in 1971 bij Tibor Gallai. Hij was tot 2006 verbonden aan het Microsoft Research Redmond lab. (WA, USA). Hij ontving vele prijzen en onderscheidingen, zoals de Wolfprijs en de Knuthprijs, en hij was plenary speaker tijdens ICM 1990. Kortgeleden ontving hij de Bolyaiprijs. Hij is voorzitter van de IMU. Lovász' onderzoek concentreert zich op discrete wiskunde, optimalisering, complexiteit en algoritmen. Zijn naam is verbonden met verschillende problemen en resultaten in de wiskunde: in de grafentheorie kennen we het Erdős-Faber-Lovász vermoeden over het kleuren van grafen en het Lovász vermoeden betreffende Hamiltonpaden in bepaalde klassen van grafen. In de theorie van algoritmen is het Lenstra-Lenstra-Lovász roosterbasis-reductie (LLL) algoritme beroemd.



Richard Taylor (Harvard University, Cambridge)
Geboren in 1960 in Engeland.

Taylor promoveerde in 1988 in Princeton bij Andrew Wiles. Hij ontving de Fermat Prize 2001, de Ostrowski Prize 2001, de Cole Prize 2002 van de American Mathematical Society, en de Shaw Prize 2007 in Mathematical Sciences voor zijn werk aan het Langlands programma. Hij was spreker tijdens ICM 1994 en 2002.

Taylor is waarschijnlijk het beste bekend door zijn bijdrage aan de oplossing van de Laatste Stelling van Fermat, dat hij enkele jaren na het behalen van zijn PhD met Andrew Wiles deed. Zijn onderzoeksgebieden zijn: algebraïsche getaltheorie, modulaire vormen en Galois representaties. Hij wordt beschouwd als de belangrijkste expert op het gebied van de interactie van automorfe vormen en aritmetische meetkunde, in het bijzonder het Sato-Tate vermoeden en het modulaire vermoeden van Serre. Hier wordt de laatste tijd forse vooruitgang geboekt.





Luigi Ambrosio (Scuola Normale Superiore di Pisa)

Geboren in 1963 in Italië.

Ambrosio promoveerde in 1985 in Pisa onder supervisie van E. De Giorgio. Hij was spreker tijdens ECM in 1996 en tijdens ICM in 2002. Hij kreeg de Fermat Prijs 2003 van de Universiteit van Toulouse en verschillende andere prijzen van de Unione Matematica Italiana.

De Giorgio is een vooraanstaande expert op het gebied van de variatietheorie. Zijn belangrijke resultaten beginnen bij de introductie van zogenaamde SBV-ruimtes door middel van de theorie van stromen (currents), massatransport en rectificeerbare verzamelingen.



Jonathan Sherratt (Edinburgh, UK)

Geboren in 1967 in Groot-Brittannië.

Jonathan Sherratt is hoogleraar wiskunde aan de Heriot-Watt University sinds januari 1998. In 2001 kreeg hij een Fellowship van de Royal Society of Edinburgh. Sinds zijn eerste onderzoek op het gebied van wondgenezing is hij zeer actief geweest. In 2006 werd hem de Whitehead Prize van de London Mathematical Society verleend voor zijn bijdragen aan de mathematische biologie en, in het bijzonder, voor de ontwikkeling en analyse van nieuwe wiskundige modellen voor complexe biologische processen. Hij heeft gewerkt aan een breed scala van onderwerpen, ondermeer wondgenezing, patroonvorming, en ruimte-tijd-chaos. Zijn werk is intrinsiek multidisciplinair en wordt vaak in samenwerkingsverbanden uitgevoerd. Het wordt gekarakteriseerd door originaliteit en inventiviteit. Hij heeft veel gepubliceerd in mathematische biologie-tijdschriften. Zijn artikelen worden gemotiveerd door biologische en medische problemen, passen modellering en analyse toe om ze te begrijpen, en leggen vervolgens een significante terugkoppeling naar de biologie.



Jean-François Le Gall (Université Paris-Sud Orsay)

Geboren in 1959 in Frankrijk.

Le Gall promoveerde in 1982 op een proefschrift over waarschijnlijkheidstheorie onder supervisie van Marc Yor. In 1997 kreeg hij de Loeve Prize in Probability en in 2005 de Fermat Prize van de Universiteit van Toulouse en de Grand Prix Sophie Germain van de l'Académie des Sciences de Paris. Hij was invited speaker bij ECM 1992 en bij ICM 1998. Hij was promotor van Wendelin Werner die in 2006 de Fields-medaille kreeg.

Zijn onderzoeksgebied is waarschijnlijkheidstheorie: Brownse beweging, Lévyprocessen, superprocessen en hun verbindingen met partiële differentiaalvergelijkingen, de Brownse slang, random trees, branching processen en coalescentie. Bijzonder interessant is zijn recente werk op het gebied van schaallimieten van random planeaire afbeeldingen. Dit ligt op het raakvlak van waarschijnlijkheidsrekening, combinatoriek en statistische fysica.



Matilde Marcolli (Max Planck Institut Bonn)

Geboren in 1969 in Italië.

Marcolli promoveerde in 1997 in Chicago bij M. Rotherberg. Zij ontving de Sofia Kowalewskaya Award en de Heinz-Maier-Leibnitz-Preis van de DFG. Ze is editor van het door het EMS Publishing House uitgegeven tijdschrift *Journal of Noncommutative Geometry*.

Haar onderzoek ligt op de volgende gebieden: niet-commutatieve meetkunde met toepassingen in de fysica, getaltheorie en differentiaalmeetkunde. Marcolli staat bekend als een van de meest actieve en originele wiskundigen in Europa.



Tim Palmer (Reading, UK)

Geboren in 1952 in Groot-Brittannië

Tim Palmer werkt sinds het midden van de tachtiger jaren van de vorige eeuw aan het European Centre for Medium-Range Weather Forecasts in Reading. Hij is daar nu hoofd van de Predictability and Seasonal Forecast Division. Hij is Fellow van de Royal Society. Palmer heeft significante bijdragen geleverd aan het ontwikkelen en toepassen van niet-lineaire wiskundige methoden voor het bestuderen en begrijpen van niet-triviale aspecten van global warming. Zijn team ontwikkelt gecompliceerde modellen van de aarde, gebaseerd op de wetten van de fysica, bestaande uit tientallen miljoenen vergelijkingen. Voorspellingen uit dit model worden gebruikt bij de meeste nationale weerinstituten in Europa. Palmer ontwikkelt zogenaamde ensemble voorspellingstechnieken op langere tijdschalen, gebruik makend van gekoppelde oceaan-atmosfeer modellen. Deze modellen kunnen bijvoorbeeld maanden van tevoren risicoschattingen geven van het uitblijven van moesson-regens.

Op nog grotere tijdschaal is hij betrokken bij vraagstukken van global warming. Daarnaast is Palmer betrokken bij interdisciplinair onderzoek voor het voorspellen van zeldzame gebeurtenissen zoals malaria-epidemieën, overstromingen van rivieren en het mislukken van oogsten. Uiteraard speelt de afhankelijkheid van het weer een rol. Het ultieme doel van dit soort onderzoek is om methoden te ontwikkelen waarmee een malaria-epidemie kan worden voorkomen in gebieden waar het risico hierop het grootst is.

Rainer Kaenders

*Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Universität zu Köln
Gronewaldstrasse 2
50931 Köln
r.kaenders@uni-koeln.de*

Vakantiecursus

Dubbelplaneten

De maan verwijderd zich elk jaar van de aarde met een afstand van 3,82 cm en de satelliet Phobos van Mars zal in de toekomst eens op het Marsoppervlak te pletter slaan. Hoe zijn deze verschijnselen te verklaren? In dit artikel kunnen we dit met relatief eenvoudige vector-dynamica begrijpen. Het verscheen eerder in de bundel behorende bij de vakantiecursus 2007 wiskunde. Deze cursus, die jaarlijks georganiseerd wordt door het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam in samenwerking met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, heeft dit jaar het thema Wiskunde in Beweging. Het thema is speciaal gekozen met het nieuwe havo- vwo vak wiskunde D in gedachten. Met dit vak hebben de differentiaalvergelijkingen hun rentree gemaakt in het middelbaar onderwijs. Dubbelplaneten van Rainer Kaenders lijkt daartoe als vakoverstijgend project zeer geschikt.

In 1695 heeft de Engelse astronoom Edmond Halley voorspeld dat de maanden (dat wil zeggen de omlooptijd van de maan rond de aarde) in de loop van de zeshonderd jaar vóór zijn tijd ongeveer een tienduizendste uur korter zijn geworden [2]. Hoe kon hij met de middelen van toen een dergelijke uitspraak doen?

Twee jaar eerder, in 1693, heeft Halley samen met een Oxfordse arabist de vertaling (door een zekere Plato Tiburtinus) van de observaties van de astronoom al-Battani vanuit een vakdeskundig perspectief herzien [1]. De Arabier al-Battani (850 – 923), wiens naam door Halley tot *Albategnius* werd gelatiniseerd, beschreef verschillende maans- en zonsverduisteringen.

Naar aanleiding hiervan beweerde Halley [2] dat hij aan kon tonen dat de maanden korter werden. De Utrechtse astronoom Frank Verbunt speculeert in [4], [6] hoe Halley tot deze conclusie gekomen zou kunnen zijn: Omdat zonsverduisteringen uitsluitend bij een nieuwe maan plaatsvinden moet er altijd een geheel aantal maanden tussen twee zonsverduisteringen zitten. Halley kende de lengte van een maand al enigszins nauwkeurig en kon dus terugrekenen wanneer en waar 800 jaar (oftewel ongeveer 10.000 maanden) eerder al-Battani een zonsverduistering gezien zou kunnen hebben. Stel nou dat Halley had berekend dat er toen een zonsverduistering in Alexandrië plaats moest hebben gevonden terwijl al-Battani een zonsverduistering op deze dag in Bag-

dad verslaat. Dit had Halley dan kunnen verklaren door aan te nemen dat de zonsverduistering een uur eerder plaatsvond dan hij had berekend, hetgeen betekent dat de doorsnee maandlengte tijdens deze 800 jaar met 10^{-4} uur langer was dan in zijn tijd. De derde wet van Kepler, die we later nog zullen leren kennen, legt een verband tussen de omlooptijd en de afstand tussen aarde en maan en heeft tot gevolg dat met de lengte van de maanden ook de afstand tussen aarde en maan af moet nemen. Tegenwoordig weten wij echter door middel van lasermetingen aan de planeet Mars dat deze afstand tussen aarde en maan met 3,82 cm per jaar toeneemt en daarmee de maanden langer zouden moeten worden. Hoe is dit te verklaren? Had Halley gewoon ongelijk?

Deze vraag van Halley is een vraag zoals die werkelijk in de wetenschap, of preciezer in de astrofysica speelt. De vraag oefent een fascinerende werking uit op astronomen maar ook op leerlingen, leraren en andere belangstellenden. Ook al spreken de metingen Halley tegen, toch is de vraag: Op grond waarvan heeft Halley zijn conclusie getrokken? Het antwoord is te vinden in de analyse van het achterliggende wiskundige model. Aarde en maan vormen een zogenaamde dubbelplaneet en dubbelplaneten zijn weer draaiende systemen die onderhevig zijn aan de wet van behoud van impulsmoment (of draai-impuls). Dit is de natuurkundige notie om de *hoeveelheid draaiing* van een systeem te kwantificeren. Door een zorgvuldige analyse van deze wet voor aarde-maan is de constatering van Halley logisch te verklaren [4], [5], [6]. Naast de toename van de maandlengte heeft het behoud van impulsmoment namelijk ook een sterkere toename van de daglengte tot gevolg. Als de maanden in dagen worden gemeten dan worden zij daadwerkelijk korter en had Halley dus toch gelijk.

Uiteindelijk kan door toepassing van de wet van behoud van impulsmoment de toekomst van de dubbelplaneten aarde-maan, Mars-Phobos en Neptunus-Triton worden voorspeld. Voor alle drie de dubbelplaneten geldt dezelfde wet maar toch gaat elk van hen een ander noodlot tegemoet.

In deze bijdrage zullen we de wiskundige achtergronden belichten van begrippen als koppel en impulsmoment en daarmee de wet van behoud van impulsmoment afleiden. De wetten van Newton worden toegelicht en vormen de enige inbreng vanuit de



Figuur 1 Links: Edmond Halley, rechts: de Halley-komeet

natuurkunde – de rest is wiskunde. Vectorfuncties, dat wil zeggen functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^3$, worden ingevoerd en de productregel voor in- en uitproducten van zulke vectorfuncties afgeleid. Daarmee ligt de wet van behoud van impulsmoment al voor het oprapen. In het vervolg gaan we deze wet interpreteren. Daarvoor kijken wij naar zwaartepunten, hoeksnelheden, middelpuntzoekende krachten en traagheidsmomenten. Als loon voor deze moeite zullen we zien dat planeten in een vlak bewegen, dat de perkenwet van Kepler geldt. Hiermee kunnen we het gyroscopisch effect begrijpen.

De studie van het impulsmoment in ons zonnestelsel en in het bijzonder het antwoord op het probleem van Halley vormen een schoolvoorbeeld voor de kracht van wiskunde in de natuurwetenschap. De observaties leveren een tegenspraak op, die alleen op te lossen is door een gepast wiskundig model dat in dit geval door de klassieke mechanica van Newton is gegeven. Met dit model wordt vervolgens puur wiskundig geredeneerd en dat levert uiteindelijk resultaten op die naar de werkelijkheid terug kunnen worden vertaald. Daarmee zijn dan de paradoxaal lijkende observaties te verklaren. Zodra het probleem van Halley is doorgrond wordt duidelijk dat dit model veel meer dan een enkele vraag op kan lossen – het maakt voorspellingen in uiteenlopende situaties mogelijk: de ene formule over behoud van impulsmoment levert uiteenlopende voorspellingen op in de drie gevallen aarde-maan, Mars-Phobos en Neptunus-Triton. Het probleem van Halley is een vraag die leerlingen toegang zou kunnen verlenen tot het cultuurgebied van wetenschap die berust op wis- en natuurkunde. Bijvoorbeeld het schoolboek [3] is een aanrader voor iedereen die op schoolniveau verder wil lezen over hemelmechanica en ruimtevaart.

Het wiskundig gereedschap

De wiskunde die nodig is om dit hoofdstuk uit het boek van de astronomie te begrijpen is wat elementaire lineaire algebra en de notie van geparametriseerde krommen in het vlak en de ruimte en haar afgeleiden.

In's en out's van producten in $\mathbb{R}^3$

We beginnen met een herinnering aan in- en uitproducten in $\mathbb{R}^3$. De symbolen $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ en $\vec{e}$, met of zonder indices, staan in deze

paragraaf voor vectoren in $\mathbb{R}^3$.

Inproduct Het *in(wendig)product* van twee vectoren $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ en $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ uit $\mathbb{R}^3$ is gedefinieerd als

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Wij spreken het inproduct uit als ' $\vec{u}$ in $\vec{v}$ ' en het is een voorschrift om uit twee vectoren een reëel getal te berekenen. Eenvoudig na te gaan is dat het inproduct symmetrisch (dat wil zeggen $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$) en in beide argumenten lineair is – dit noem je dan bilineair. Wij noemen $|\vec{u}| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ de *norm van een vector* $\vec{u}$ uit $\mathbb{R}^3$ en met de stelling van Pythagoras ziet men dat de waarde van de norm gelijk is aan de lengte van de vector $\vec{u}$. Als wij het pijltje $\vec{}$ boven een vector $\vec{u}$ weglaten, dan bedoelen wij de absolute waarde $u = |\vec{u}|$ van deze vector.

Het inproduct is zeer geschikt om de projectie van een vector $\vec{u}$ op een vector $\vec{v}$ te berekenen. Er bestaat een op $\vec{v}$ loodrechte vector van de vorm $\vec{u} - \lambda \vec{v}$. Het getal λ bepaal je door te eisen dat deze vector loodrecht staat op $\vec{v}$. Met het inproduct betekent dit

$$\langle \vec{u} - \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2}.$$

De *projectievector* en de *loodvector* van een vector $\vec{u}$ op een vector $\vec{v}$ worden gegeven door

$$\vec{u}_{\vec{v}} := \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \quad \text{en} \quad \vec{u}_{\vec{v}^\perp} := \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{v}|^2} \vec{v}.$$

Projectie- en loodvector geven aanleiding tot een ontbinding $\vec{u} = \vec{u}_{\vec{v}} + \vec{u}_{\vec{v}^\perp}$ van de vector $\vec{u}$ in een vector in de richting van $\vec{v}$ en een vector die loodrecht op $\vec{v}$ staat.

Uitproduct In de natuurkunde en de techniek kom je vaak situaties tegen waar grootheden loodrecht op elkaar staan. Wij zoeken dus een manier om aan twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ een derde vector $\vec{u} \times \vec{v}$ uit $\mathbb{R}^3$ toe te kennen zodat, als $\vec{u} \neq 0$ en $\vec{v} \neq 0$, de volgende eigenschappen gelden:

- $\vec{u} \times \vec{v}$ staat loodrecht op $\vec{u}$ en $\vec{v}$,
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{u} \times \vec{v}$ vormen een rechtshandig assenstelsel (zie figuur op bladzijde 290),
- als $\vec{u}$ en $\vec{v}$ loodrecht op elkaar staan geldt: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$,
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}_{\vec{u}^\perp} = \vec{u}_{\vec{v}^\perp} \times \vec{v}$.

Als één van de vectoren de nulvector is, dan is ook het uitproduct gelijk aan de nulvector. Voor vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ geldt: $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ en $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$. De tweede eigenschap volgt uit de toepassing van de eerste eigenschap op het uitproduct $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.

De eigenschappen hierboven maken duidelijk dat $\vec{u} \times \vec{v}$ de eenduidig bepaalde vector is waarvoor geldt dat hij loodrecht staat op het door $\vec{u}$ en $\vec{v}$ opgespannen parallellogram, zijn lengte gelijk is aan de oppervlakte (zie de opgave hierboven) van dat parallellogram, waarbij $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{u} \times \vec{v}$ georiënteerd zijn volgens de rechterhand-regel.

Definitie: Wij noemen $\vec{u} \times \vec{v}$ het *uit(wendig)product* van de vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ (spreek uit: 'u uit v').

Het koppel

Een andere toepassing voor het uitproduct is de definitie van het koppel. Als men een schroef wil schroeven dan gaat dat het beste met een arm die loodrecht staat op de schroef: een schroevensleutel. Hoe groter de afstand is tussen de schroef en het punt op de schroevensleutel waarop een kracht wordt uitgeoefend hoe beter de schroef te draaien zal zijn. Als de arm niet loodrecht staat dan is het enige wat voor het schroeven telt het loodrechte deel van de arm. (Bijvoorbeeld als iemand probeert te schroeven door de schroevensleutel in verlenging op de schroef erop te zetten dan is de schroefkracht kennelijk nul.)

Op een punt van de arm wordt er bij het schroeven een kracht uitgeoefend en het enige wat er voor de *schroefkracht* toe doet is het gedeelte van de kracht dat loodrecht staat op de schroef en de schroevendraaier.

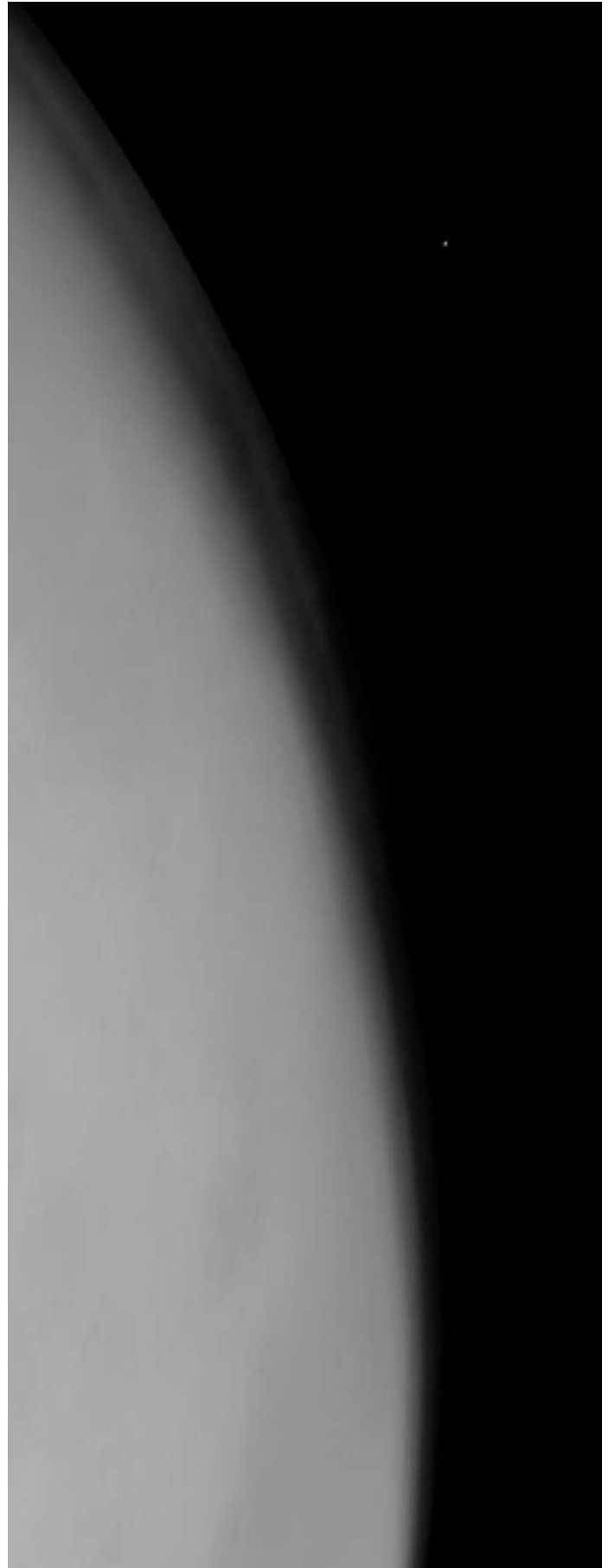
De effectiviteit van het schroeven in een gegeven richting heeft te maken met enerzijds de lengte van de schroevensleutel en de mate waarin hij loodrecht staat op de schroef en anderzijds met de kracht die op een punt van de schroevensleutel wordt uitgeoefend en de mate waarin deze kracht loodrecht staat op de schroef en de schroevensleutel.

We kunnen ook andersom redeneren. Gegeven een arm of hefboom, wiskundig voorgesteld door een vector $\vec{r}$, en een krachtsvector $\vec{F}$. Deze vectoren $\vec{r}$ en $\vec{F}$ leggen een richting vast waarin het beste geschroefd kan worden. Hoe sterker de kracht is en hoe langer de arm, hoe effectiever er geschroefd kan worden. Uit de bovenste beschouwingen blijkt dat de mate en de richting waarin er effectief geschroefd kan worden gegeven wordt door het zogenaamde *koppel* ten opzichte van de oorsprong O dat wordt uitgedrukt door: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Als er een kracht werkt op een massadeeltje dan kunnen we het koppel van dat deeltje ten opzichte van elk willekeurig punt berekenen, hetgeen weergeeft in welke richting en hoe goed deze kracht toegepast op een hefboom naar dat willekeurig punt in staat zou zijn om een draaiing in gang te zetten.

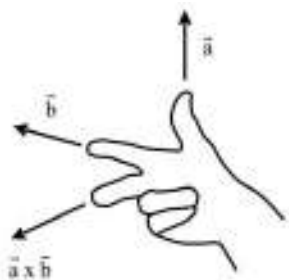
Geparametriseerde ruimtekrommen

In het vervolg kijken we naar afbeeldingen van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^3$ waarbij wij denken aan de beweging van puntmassa's in de driedimensi-



Mars en Phobos; foto Mars Global Surveyor (1998)

De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$ vormen een zogenaamd rechtshandig assenstelsel.



onale ruimte. Zo'n afbeelding $\vec{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ wordt gegeven door drie gewone differentieerbare functies:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}.$$

De parameter noemen we meestal t , omdat wij hierbij denken aan de tijd.

De afgeleide van een dergelijke afbeelding kunnen we net als bij gewone functies verkrijgen door

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)) \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t} \right) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opgave 1

- Bewijs dat geldt $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_{\vec{u}} \rangle = \langle \vec{u}_{\vec{v}}, \vec{v} \rangle$.
- De vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ spannen een parallellogram op. Laat zien dat de oppervlakte daarvan gelijk is aan

$$|\vec{u}_{\vec{v}^\perp}| |\vec{v}| = |\vec{v}_{\vec{u}^\perp}| |\vec{u}| = \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2}.$$

Opgave 2

- Toon aan dat: $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$ en $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$, waarbij θ de hoek tussen $\vec{u}$ en $\vec{v}$ is.
- Bewijs dat voor vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ geldt:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = |\vec{u}| \vec{v}_{\vec{u}^\perp}.$$

- Gegeven twee vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$ dan geldt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{pmatrix}.$$

Zodra men hierbij denkt aan de afgeleide naar de tijd geeft deze afbeelding voor elk moment de richting en de snelheid aan waarmee een denkbeeldig massapunt beweegt. Als het gaat om de tijd, schrijven wis- en natuurkundigen $\vec{F}(t)$ voor $\frac{d\vec{F}}{dt}$. De uitdrukking $\frac{1}{\Delta t} (\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t))$ waarin de vectoren $\vec{F}(t + \Delta t)$ en $\vec{F}(t)$ worden vermenigvuldigd met het reële getal $\frac{1}{\Delta t}$ schrijven wij soms ook als $\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$.

Productregel voor in- en uitproduct van functies

Met dergelijke afbeeldingen $\vec{F}$ en $\vec{G}$ kan men rekenen als met vectoren (waarbij wij denken dat ze met de tijd veranderen). Bijvoorbeeld: de afbeeldingen $\vec{F} \times \vec{G}$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$ zijn gedefinieerd door $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle(t) = \langle \vec{F}(t), \vec{G}(t) \rangle$ waarbij aan de rechterkant voor elke t producten van gewone vectoren staan. De afgeleiden van deze afbeeldingen $\vec{F} \times \vec{G}$ en $\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle$ kunnen we net zo bepalen als wij dat kennen van gewone functies – met de productregel. Het bewijs hiervoor is bijna letterlijk hetzelfde als bij de productregel voor gewone functies.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t} (\vec{F} \times \vec{G}(t + \Delta t) - \vec{F} \times \vec{G}(t)) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left([\vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t + \Delta t) - \vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t)] \right. \\ &\quad \left. + [\vec{F}(t + \Delta t) \times \vec{G}(t) - \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)] \right) \\ &= \left(\left[\vec{F}(t + \Delta t) \times \frac{\vec{G}(t + \Delta t) - \vec{G}(t)}{\Delta t} \right] + \left[\frac{\vec{F}(t + \Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t} \times \vec{G}(t) \right] \right). \end{aligned}$$

Als men nu Δt naar nul laat gaan blijkt dat ook voor het uitproduct de gewone productregel geldt:

$$\frac{d}{dt} (\vec{F} \times \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G} + \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt} = \dot{\vec{F}} \times \vec{G} + \vec{F} \times \dot{\vec{G}}.$$

Newton mechanica

Het natuurkundige uitgangspunt voor alle wiskunde die nu volgt, wordt gegeven door de klassieke wetten van Newton.

Laat $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ de positievectoren van deeltjes met massa's m , m_1 , m_2 ten opzichte van O zijn. De vectoren $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ zijn hierbij functies van de tijd t . (Wiskundig gezien gaat het hier om drie ruimtekrommen zoals we die hierboven hebben ingevoerd en drie positieve getallen m , m_1 , m_2 .) Dan noteren wij de bijbehorende snelheden als $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Hierbij horen impulsen $\vec{P}$, $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_2$ gegeven door $\vec{P} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ als ook $\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1$ en $\vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2$ die kunnen worden opgevat als de hoeveelheid beweging.

- **Newtons eerste wet** Een lichaam blijft stil staan of beweegt eenparig (zonder versnelling) als er geen kracht op wordt uitgeoefend.
- **Newtons tweede wet** De versnelling die een lichaam ervaart is evenredig met de op hem werkende kracht en omgekeerd evenredig met de massa van het lichaam: $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}$ of $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}$. Kort: $\vec{F} = \dot{\vec{P}}$.
- **Newtons derde wet (actio = reactio)** Als twee lichamen onderling krachten op elkaar uitoefenen dan wordt er op beide lichamen een even grote kracht uitgeoefend in tegengestelde

richtingen. dat wil zeggen de som van de kracht $\vec{F}_{12}$ op het eerste lichaam (1) vanuit het tweede lichaam (2) en de kracht $\vec{F}_{21}$ op het tweede lichaam (2) vanuit het eerste lichaam (1) is gelijk aan nul, i.e. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ oftewel $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

- **Newtons wet van universele gravitatie** Verder heeft Newton de gravitatiewet geformuleerd die beschrijft hoe sterk de kracht is die een lichaam met massa m_1 uitoefent op een lichaam met massa m_2 . Als we met $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de vector tussen de twee lichamen aangeven met afstand d dan geldt voor deze kracht:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \frac{\vec{r}_{21}}{d} = G \frac{m_1 m_2}{d^3} \vec{r}_{12}.$$

De constante G heet de *gravitatieconstante*. Haar waarde is

$$G \approx 6,672610^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}.$$

Bewegen op een cirkel

Voor cirkelvormige bewegingen is er een bijzondere middelpuntzoekende kracht nodig en de beschrijving van de snelheid van deze beweging kan het beste via de hoeksnelheid gebeuren.

Middelpuntzoekende kracht We kijken nu naar cirkelvormige bewegingen in de ruimte. Stel dat $\vec{r}$ de positievector is van zulk een cirkelvormige beweging met constante absolute snelheid. Dan is $|\vec{r}|^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle$ constant en met de productregel vinden wij de eerste afgeleide naar de tijd: $\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle + \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = 2 \langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = 0$. Dus $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ staat loodrecht op $\vec{r}$. Omdat de snelheid van de beweging constant is, is $|\vec{v}|^2 = \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle$ constant. Daarom is de afgeleide hiervan nul waaruit volgt dat $\ddot{\vec{r}}$ dus weer loodrecht staat op $\dot{\vec{r}}$ en dus in de richting van $\vec{r}$ of in de tegengestelde richting wijst. In de eerder gebruikte notatie betekent dit:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \frac{\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^2} \vec{r} = \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Differentiëren van $\langle \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle$ levert dan ook op $\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle + \langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle = 0$. Anders geschreven vinden wij de uitdrukking voor de *middelpuntzoekende versnelling*:

$$\ddot{\vec{r}} = - \left(\frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{|\vec{r}|} \right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Voor de grootte van de versnelling is dus $a = \frac{v^2}{r}$ met $a = |\ddot{\vec{r}}|$. Met de tweede wet van Newton is de centripetale kracht of middelpuntzoekende kracht gelijk aan

$$\vec{F}_{\text{centripetaal}} = -m \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

en voor de grootte van deze kracht geldt: $F_{\text{centripetaal}} = m \frac{v^2}{r}$. Deze kracht is dus nodig om een deeltje op een cirkelbaan te laten bewegen.

Hoeksnelheid De snelheid van een draaiing kan het beste worden weergegeven door de hoeksnelheid die aangeeft hoe een hoek θ (in radialen) met de tijd verandert, dus $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. De hoek-

snelheid is dus niet meer de snelheid van beweging maar wel *de snelheid van een draaiing*. Voor de snelheid zelf geldt dan $v = \omega R$ omdat voor de afgelegde afstand s geldt $s = \theta R$. Hiermee kan de centripetale kracht worden uitgedrukt door $F_{\text{centripetaal}} = m R \omega^2$. Wij zien hieruit dat bij een gegeven hoeksnelheid de middelpuntzoekende kracht lineair groeit met de afstand naar het middelpunt.

Het uitproduct geeft ons de mogelijkheid om voor een cirkelvormige beweging *de snelheid en de richting van de draaiing* in een enkele grootheid, de *hoeksnelheidsvector*, samen te vatten. De snelheidsvector $\vec{v}$ van een cirkelvormig, rond een punt O bewegend deeltje kan als veralgemenisering van $v = \omega R$ worden uitgedrukt door $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Daarbij wijst de vector $\vec{\omega}$ in de richting van de draaias en staat loodrecht op de positievector $\vec{r}$ en daarom geldt dan ook hier $v = \omega R$ met $v = |\vec{v}|$, $\omega = |\vec{\omega}|$ en $r = |\vec{r}|$. Wij zien dus dat de lengte ω van deze vector gelijk is aan de hoeksnelheid zoals boven weergegeven.

Impuls, koppel en impulsmoment

Nu leggen wij uit hoe uit de wetten van Newton het behoud van impuls en impulsmoment (draai-impuls) volgt.

Impulsbehoud Laat $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ de positievectoren zijn van deeltjes met massa's m , m_1 , m_2 ten opzichte van O . Deze drie positievectoren zijn hierbij functies van de tijd t en de bijbehorende impulsen zijn $\vec{P}$, $\vec{P}_1$ en $\vec{P}_2$. Newtons derde wet (actio = reactio) zegt nu dat als twee lichamen krachten op elkaar uitoefenen, de som van de kracht $\vec{F}_{12}$ op het tweede lichaam (2) vanuit het eerste lichaam (1) en de kracht $\vec{F}_{21}$ op het eerste lichaam (1) vanuit het tweede lichaam (2) gelijk is aan nul, i.e. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$. Hieruit volgt met de tweede wet dat $\dot{\vec{P}}_1 + \dot{\vec{P}}_2 = 0$. Dus is $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ constant (de wet van impulsbehoud).

Hieruit kan men bijvoorbeeld rechtstreeks eenvoudige gevolgtrekkingen maken voor de botsing van twee deeltjes, zij het elastisch (dat ze weer uit elkaar vliegen) of inelastisch (dat ze samen blijven klonteren), die in natuurkundeboeken uitgebreid worden besproken.

Impulsmoment of draai-impuls Laat $\vec{r}$ de positievector (als functie van de tijd t) van een deeltje met massa m ten opzichte van een willekeurig punt O zijn met impuls $\vec{P}$. Dan heet

- $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$ het *impulsmoment* of de *draai-impuls* met betrekking tot oorsprong O (vaak gebruikt men ook de letter L resp. $\vec{L}$),
- $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ het *koppel* of *draaimoment* met betrekking tot oorsprong O (hiervoor wordt ook de letter τ resp. $\vec{\tau}$ gebruikt).

Het impulsmoment kan worden opgevat als de *hoeveelheid draaiing*. Door de productregel voor het uitproduct van de vectorfuncties toe te passen vinden wij eenvoudig:

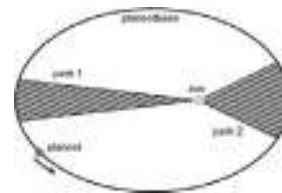
Stelling 1 Voor een enkel massadeeltje geldt: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$.

In het resterende gedeelte van deze bijdrage worden alleen nog maar conclusies uit deze stelling getrokken. Hier al enkele eenvoudige gevolgen voor een enkel massadeeltje.

- Als het deeltje in een centraal krachtenveld beweegt waarbij de oorsprong O in het centrum van dat krachtenveld ligt en alle krachtsvectoren naar de oorsprong wijzen, dan is $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ omdat $\vec{r}$ en $\vec{F}$ in tegengestelde richting wijzen. Met de stelling volgt hieruit dat het impulsmoment $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{P} = 0$ blijft behouden. Dat betekent dus dat de met de tijd veranderende vector $\vec{r}$



Neptunus en Triton; foto: Voyager II, 3 juli, 1989



Figuur 2 De tweede wet van Kepler: de perkenwet

altijd loodrecht staat op de vaste vector $\vec{J}$. Dat betekent dat de vector $\vec{r}$ alleen nog maar in een vlak kan bewegen namelijk het vlak van alle vectoren die loodrecht staan op deze vaste vector $\vec{J}$.

- Het feit dat $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ constant is, betekent dat $\vec{r} \times \vec{v}$ constant blijft. Als wij nu voor kleine tijdsintervallen Δt de afgeleide benaderen door $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, dan is $\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\vec{r} \times \Delta \vec{r})$ voor kleine tijdsintervallen altijd even groot. De uitdrukking $|\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$ geeft twee keer de oppervlakte aan van de driehoek die wordt opgespannen door $\vec{r}$ en $\Delta \vec{r}$. Bij benadering is dat de oppervlakte die de positievector $\vec{r}$ in de tijd Δt heeft bestreken. Als wij nu met $A(t)$ de oppervlakte noteren die de positievector vanaf een tijdstip t_0 heeft bestreken dan volgt uit het bovenstaande $\frac{\Delta A}{\Delta t} \approx \frac{1}{2\Delta t} |\vec{r} \times \Delta \vec{r}|$ en daarom geldt: $\dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} |\vec{r} \times \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| = \frac{1}{2m} J$ en dat is constant. Dus is de oppervlakte een lineaire functie in t . Uit het behoud van het impulsmoment in een centrale kracht (zonder dat er meer over bekend is) volgt de zogenaamde *perkenwet van Kepler* die ook bekend staat als zijn tweede wet. Deze kan ook zonder de boven geschetste benaderingen worden afgeleid.

De snelheid van een planeet in haar omloopbaan verandert zodanig dat in gelijke tijdsintervallen de oppervlakte, bestreken door de rechte lijn (voerstraal) tussen de zon en de planeet, gelijk is.

Opmerking: Als het deeltje met massa m net als boven in een centraal krachtenveld beweegt dat ontstaat door de zwaartekracht vanuit een andere massa M in de oorsprong O , dan is de kracht dus bepaald door de universele gravitatiewet. Hieruit kan dan worden afgeleid dat het deeltje op een ellipsbaan beweegt. Dit is de *eerste wet van Kepler* en het was Isaac Newton die uit Kepler's wetten de universele gravitatiewet wist af te leiden. In het vervolg van dit stuk echter veronderstellen wij de planetenbanen als cirkelvormig. Gezien de kleine excentriciteiten van de beschouwde ellipsbanen blijft dit het gedrag van de dubbelpianeten goed beschrijven.

Behoud van het totale impulsmoment Veel systemen bestaan uit meerdere puntmassa's: aan de ene kant kunnen bijvoorbeeld planeten worden opgevat als samenvoeging van afzonderlijke kleine puntmassa's en aan de andere kant kunnen systemen van meerdere planeten worden opgevat als puntmassa's die in hun zwaartepunten zijn geconcentreerd. In het eerste geval denken wij aan

Opgave 3

Bewijs stelling 1. Voor een deeltje waarop geen uitwendige kracht werkt, geldt dus dat $\vec{J}$ constant is. Hoe verhoudt zich dit tot de eerste wet van Newton?

oneindig veel deeltjes en kunnen tot de limiet overgaan en in het tweede geval gaat het maar om enkele massadeeltjes.

Gegeven zijn N deeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$ en positievectoren $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ vanuit een willekeurig punt O . Het totale impulsmoment van het systeem is dan gegeven door $\vec{J}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ en het totale koppel is $\vec{N}_{tot} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$. De boven bewezen stelling leidt rechtstreeks tot de volgende stelling.

Stelling Voor het totale impulsmoment en het totale koppel geldt:

$$\frac{d\vec{J}_{tot}}{dt} = \vec{N}_{tot}.$$

Als het totale koppel verdwijnt, blijft ook het totale impulsmoment behouden. Op het i -de deeltje werkt een kracht $\vec{F}_i$ die is samengesteld uit de krachten $\vec{F}_{ij}$ die door de andere deeltjes worden uitgeoefend en een externe kracht $\vec{F}_{i,ext}$. Dus

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{i,ext}.$$

Het aandeel $\sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$ van de kracht $\vec{F}_i$ noemen we de *interne kracht* $\vec{F}_{i,int}$ op deeltje (i). Dus $\vec{F}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}$ op deeltje (i).

Stelling Als een aantal puntmassa's óf zonder externe krachten, óf in een centraal krachtenveld beweegt, is het totale koppel gelijk aan nul en het totale impulsmoment blijft behouden.

Bewijs: In beide gevallen geldt voor de i -de puntmassa: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = 0$: als er geen externe kracht is geldt $\vec{F}_{i,ext} = 0$ en in een centraal krachtenveld wijzen $\vec{r}_i$ en $-\vec{F}_{i,ext}$ in dezelfde richting, dus ook hier geldt: $\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext} = 0$.

De krachten F_{ij} die door de massadeeltjes op elkaar worden uitgeoefend wijzen in dezelfde of de omgekeerde richting als $r_i - r_j$ en er geldt: $F_{ij} = -F_{ji}$.

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times (\vec{F}_{i,ext} + \vec{F}_{i,int}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,ext}}_{=0} + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,int} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{i < j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i < j} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \\ &= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Rotaties Als we kijken naar een draaiende hoepel of een fietswiel met massa m vanuit het middelpunt dat wij ons voorstellen als bestaand uit kleine puntmassa's $m_1, \dots, m_N$, dan is het totale impulsmoment

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{N} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i.$$

De vectoren $\vec{r}_i$ en $\vec{v}_i$ staan altijd loodrecht op elkaar en daarom wijst $\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ in de richting van de draaias en heeft lengte $|\vec{r}_i| |\vec{v}_i| = r \cdot v$ waarbij r en v de afstand van de puntmassa naar het middelpunt en de snelheid aangeven die voor elke puntmassa hetzelfde zijn. Dus $\vec{J}$ wijst in de richting van de draaias en



Het maanoppervlak

$J = mrv$. Als wij de snelheid v met behulp van de hoeksnelheid ω uitdrukken, $v = \omega \cdot r$, dan vinden wij $J = mr^2\omega$. Hierdoor blijkt al dat hoe kleiner de straal r wordt hoe groter de snelheid ω van de draaiing wordt. Dit is een effect dat ook veelvuldig bij kunstschaatsers en op speeltuintoestellen te observeren is.

Gyroscopisch effect Stel wij oefenen nu voor een korte tijd Δt een kracht $\vec{F}$ in de richting van de rotatie-as uit op de rand (door bijvoorbeeld een slag of door een korte beweging van het stuur). De formule $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$ kunnen wij bij benadering lezen als: $\Delta\vec{J} = \vec{N}\Delta t$. Bij een dergelijke toepassing van het koppel $\vec{N}$ op het systeem wijst dus het verschil $\Delta\vec{J}$ van het impulsmoment in dezelfde richting als $\vec{N}$ en niet in dezelfde richting als de kracht $\vec{F}$ (het koppel $\vec{N}$ staat loodrecht op $\vec{F}$) of als de draai-impuls $\vec{J}$ want die wijst in de richting van de draaias. De draaias verandert dus met $\Delta\vec{J}$ van richting als $\vec{N}$ voor een moment Δt werkt. Dat is in een andere richting dan de uitoefening van de kracht doet vermoeden. Dit noemt men het *gyroscopisch effect*. Dit effect gaat bij veel mensen tegen de intuïtie in. Het verklaart waarom een tol niet kantelt; zodra de zwaartekracht hem naar beneden duwt zorgt dit effect ervoor dat hij in een zijwaartse beweging, de zogenaamde *precessie*, terecht komt waardoor de bovenkant van de tol rondjes gaat draaien. Ook de aantrekkingskracht van de zon op de aarde heeft tot gevolg dat de draaias van de aarde zich in een precessiebeweging bevindt.

Impulsmoment verdelen op zwaartepunten

Gegeven zijn N deeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$ en positievector $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Dan definiëren wij het *zwaartepunt* van deze N deeltjes door $\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{m} \vec{r}_i$ waarbij we $m = \sum_{i=1}^N m_i$ beschouwen als massa van het zwaartepunt (CM staat voor *center of mass*). Een zwaartepunt gedraagt zich in veel opzichten als een enkel massapunt. Daardoor zijn enkele grootheden die voor de afzonderlijke deeltjes bestaan ook zinvol te definiëren voor het zwaartepunt.

Als wij met een homogeen lichaam met dichtheid ρ te maken hebben, is $m = \rho V$ waarbij V de inhoud van het lichaam weergeeft. Vaak stellen wij ons voor dat dit lichaam bestaat uit een groot aantal (N) kleine massadeeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$. Een vast lichaam kan men opvatten als een verzameling van verschillende kleine massadeeltjes $m_1, \dots, m_N$ met positievector $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ waarvoor geldt: $m = m_1 + \dots + m_N$. De totale impuls is dan gelijk aan de *impuls van het zwaartepunt*: $\vec{P}_{CM} = m\vec{v}_{CM}$. Men kan hiermee het zwaartepunt opvatten als massapunt met massa m , positievector $\vec{r}_{CM}$ en impuls $\vec{P}_{CM}$.

Impulsmoment van baan en spin

De definities van impulsmoment en koppel gelden met betrekking tot een willekeurig punt O . Hier kijken wij nu naar een systeem van N deeltjes en onderzoeken de grootheden in kwestie door ze zowel te relateren aan het punt O als ook aan het zwaartepunt. Bijvoorbeeld in systemen als de dubbelplaneet aarde-maan kan het zwaartepunt hiervan worden gerelateerd aan het impulsmoment gezien vanuit de zon.

Gegeven N deeltjes met massa's $m_1, \dots, m_N$ en positievector $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ vanuit een willekeurig punt O . Dan kunnen we het totale impulsmoment ten opzichte van O als volgt splitsen in impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van O (baan-impulsmoment) en impulsmoment van alle deeltjes ten opzichte van het zwaartepunt (spin-impulsmoment):

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N (\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}}_{\text{spin}}) \times \vec{p}_i + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}}_{\text{baan}} \\ &= \vec{J}_{\text{spin}} + \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}. \end{aligned}$$

De vectoren $\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$ noemen we $\vec{z}_i$. Dan is $\vec{J}_{\text{spin}} = \sum_{i=1}^N \vec{z}_i \times \vec{p}_i$ het *spin-impulsmoment* of de *spin-draai-impuls* het totale impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt en $\vec{J}_{\text{baan}}$ is het impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van O , het zogenaamde *baan-impulsmoment* of de *baan-draai-impuls*.

Een vergelijkbare opsplitsing als bij het impulsmoment kan ook voor het totale koppel worden gemaakt. Dan is

$$\vec{N} = \vec{N}_{\text{int}} + \vec{N}_{\text{ext}}$$

met $\vec{N}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{z}_i \times \vec{F}_i$ en $\vec{N}_{\text{ext}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}}$. Daarbij draagt $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ zijn naam terecht want $\vec{F}_{\text{ext}}$ is ook gelijk aan $\sum_{i=1}^N \vec{F}_{i,\text{ext}}$, zoals wij boven bij de definitie van het zwaartepunt al hebben gezien.

Opmerking: Als wij naar een dubbelplaneet kijken als bijvoorbeeld aarde-maan (met massa's m_A en m_M en totale massa $m = m_A + m_M$) in het centraal krachteveld van de zon met massa M , dan is het totale impulsmoment behouden. Wij kunnen het totale impulsmoment splitsen in een deel ten opzichte van de zon en een deel ten opzichte van het zwaartepunt van de dubbelplaneet. Het eerste impulsmoment van het zwaartepunt ten opzichte van de zon is $\vec{J}_{\text{baan}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$ en de afgeleide geeft: $\frac{d\vec{J}_{\text{baan}}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}}$. Deze vector $\vec{F}_{\text{ext}}$ wijst niet noodzakelijk precies in de richting van $-\vec{r}_{CM}$.

De externe kracht op de dubbelplaneet is

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -G \frac{Mm_A}{r_A^3} \vec{r}_A - G \frac{Mm_M}{r_M^3} \vec{r}_M$$

waarbij $\vec{r}_A$ en $\vec{r}_M$ de positievector van de zon naar aarde en maan zijn. Als wij echter veronderstellen dat $\vec{r}_A \approx \vec{r}_M$ ongeveer gelijk zijn aan $\vec{r}_{CM}$ (de verschillen zijn verwaarloosbaar klein in verhouding met de grootte van $\vec{r}_{CM}$) dan geldt $\vec{F}_{\text{ext}} = -G \frac{Mm}{r^3} (\frac{m_A}{m} \vec{r}_A + \frac{m_M}{m} \vec{r}_M) \approx -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}_{CM}$ en daarmee is dan $\frac{d\vec{J}_{\text{baan}}}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{\text{ext}} = 0$. In de beschouwingen over dubbelplaneten zullen wij daarom ook veronderstellen dat het impulsmoment $\vec{J} - \vec{J}_{\text{baan}}$ van de dubbelplaneet ten opzicht van het zwaartepunt van de dubbelplaneet behouden blijft.

Traagheidsmoment

De laatste grootheid die wij hier invoeren is het traagheidsmoment. Stel je hebt een hoepel met straal r en massa m . Als wij de hoepel opdelen in kleine stukjes met massa m_i , die allemaal met dezelfde snelheid $v = r\omega$ bewegen waar ω de hoeksnelheid weergeeft, dan is het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt (spin-impulsmoment) gelijk aan

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i r^2 \vec{\omega} = mr^2 \vec{\omega}.$$

De grootheid $I = mr^2$ hangt dus alleen af van het lichaam en niet van de snelheid ω van de draaiing (hoeksnelheid). Het deel I , dat alleen maar afhangt van het lichaam, heet het *traagheidsmoment* van de hoepel.

Als we nu kijken naar een star lichaam, dan draaien alle de-

len van het lichaam weliswaar met verschillende absolute snelheden afhankelijk van de afstand naar de draaias maar met dezelfde hoeksnelheid ω . We kijken nu naar een massadeeltje met massa m , positievector $\vec{r}$ vanuit het zwaartepunt van het lichaam en snelheid $\vec{v}$. Nu kunnen we de hoeksnelheid beschouwen als vector $\vec{\omega}$ met lengte ω waarvoor geldt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. De hoeksnelheid $\vec{\omega}$ wijst in de richting van de draaias. Hiermee zijn wij in staat om een uitdrukking voor het impulsmoment ten opzichte van het zwaartepunt te vinden die alleen afhangt van vorm en dichtheid van het lichaam en de hoeksnelheid $\vec{\omega}$. In principe gaat dit net als bij de hoepel.

Het totale impulsmoment is in het algemeen $\vec{J}_{tot} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$. Net als bij de hoepel willen wij hieruit een uitdrukking afleiden waarin de hoeksnelheidsvector los staat van de rest van de uitdrukking die dan alleen nog maar afhangt van de eigenschappen van het lichaam. Bij een willekeurig lichaam leidt dit tot de definitie van de zogenaamde *traagheidstensor*. In het geval van een homogeen bolvormig lichaam met straal R en dichtheid ρ is dit echter niet veel moeilijker dan bij de hoepel.

Hierbij herhalen wij in wezen het bewijs van de in opgave 2 te bewijzen formule $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} = |\vec{u}|^2 \vec{v}_{\perp}$ voor vectoren $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

Elke vector $\vec{r}_i$ kunnen wij opsplitsen in een deel $\vec{a}_i$ dat loodrecht staat op $\vec{\omega}$ en een deel $\vec{u}_i$ dat in dezelfde of in de tegengestelde richting van $\vec{\omega}$ wijst. Dus $\vec{r}_i = \vec{a}_i + \vec{u}_i$ met $\vec{a}_i = (\vec{r}_i)_{\omega^\perp}$ en $\vec{u}_i = (\vec{r}_i)_{\omega}$.

Dan berekenen wij $\vec{J}$ als volgt:

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{a}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i) + \vec{u}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{a}_i)) \\ &= \sum_i m_i (|\vec{a}_i|^2 \vec{\omega} - \omega |\vec{u}_i| \vec{a}_i) \\ &= \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i |\vec{u}_i|^2 \vec{a}_i. \end{aligned}$$

Het gedeelte $-\omega \sum_i m_i |\vec{u}_i|^2 \vec{a}_i$ verdwijnt echter bij een bolvormig lichaam omdat een bolvormig lichaam op zo'n manier in kleine massastukjes kan worden opgedeeld dat er een even aantal bijbehorende positievectoren $\vec{r}_{+1}, \dots, \vec{r}_{+N}$ en $\vec{r}_{-1}, \dots, \vec{r}_{-N}$ ontstaat, bestaande uit paren van telkens twee vectoren $\vec{r}_{\pm i} = \vec{u}_i \pm \vec{a}_i$ waar de loodrecht op $\vec{\omega}$ staande delen $\pm \vec{a}_i$ elkaar opheffen. Voor een bolvormig lichaam houden we dus over:

$$\vec{J} = \vec{\omega} \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2 = I_{bol} \vec{\omega},$$

waarbij $I_{bol} = \sum_i m_i |\vec{a}_i|^2$ het *traagheidsmoment* is. Hierbij kan m_i worden gezien als ρV_i met het bijbehorende deel V_i van de inhoud V . Om het traagheidsmoment te berekenen delen wij de bol op in even grote schijfjes van dikte Δh . Op hoogte h heeft een dergelijke schijf breedte B , waarbij geldt: $B = \sqrt{R^2 - h^2}$. Deze schijfjes de-

len wij vervolgens op in ringen met een straal van b tot $b + \Delta b$ en dikte Δh . Het traagheidsmoment voor zo'n ring is dan $\rho \pi ((b + \Delta b)^2 - b^2) \cdot \Delta h \cdot b^2$. Als we dit verder uitwerken krijgen we:

$$\begin{aligned} \rho \pi (2b\Delta b + \Delta b^2) \cdot \Delta h \cdot b^2 \\ = \rho \pi 2b\Delta b \cdot \Delta h \cdot b^2 + \rho \pi \Delta b^2 \cdot \Delta h \cdot b^2. \end{aligned}$$

Nu nemen we de som over de ringen in de schijf met straal B . Dan wordt de som over $\rho \pi \Delta b^2 \cdot \Delta h \cdot b^2$ willekeurig klein als we Δb klein kiezen.

Het impulsmoment van een dergelijke ring wordt dus gegeven door

$$\rho \pi \Delta h \int_0^B 2b^3 db = \rho \frac{\pi}{2} \Delta h B^4.$$

Nu sommeren wij over alle schijven en vinden voor het traagheidsmoment: $I_{bol} = \rho \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - h^2)^2 dh$. Met de formule $\frac{4}{3} \pi R^3$ voor de inhoud van de bol is $\vec{J} = I_{bol} \vec{\omega}$, waarbij I_{bol} het *traagheidsmoment* is van een bolvormig lichaam met straal R dat gegeven wordt door: $I_{bol} = \frac{2}{5} m R^2$.

Behoud van impulsmoment bij dubbelplaneten

Hier passen we de boven geschetste theorie toe op speciale gevallen die een rol spelen voor onze beschouwingen in de astrofysica. Wij hanteren hierbij de vereenvoudigende (en feitelijk onjuiste) aanname dat de maan rond de aarde langs een cirkelbaan beweegt. Eveneens veronderstellen wij dat het zwaartepunt van de twee niet, respectievelijk eenparig, beweegt.

Dubbelplaneten

Hier hebben wij te maken met twee bolvormige vaste lichamen met massa's m_1 en m_2 , positievectoren $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ vanuit het gemeenschappelijk zwaartepunt en onderlinge afstand r . Dan is de positievector van het zwaartepunt gelijk aan

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m}$$

met $m = m_1 + m_2$ en er geldt

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \text{ en } \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Daarmee liggen dus m_1 resp. m_2 op afstand $r_1 = |\vec{r}_1| = \frac{m_2}{m} r$ resp. $r_2 = |\vec{r}_2| = \frac{m_1}{m} r$ van het zwaartepunt. Nu kijken we naar de draaiing van de twee massa's rond het zwaartepunt en willen hiervoor de hoeksnelheid bepalen. Dit doen wij middels de derde wet van Newton door de centrifugale kracht en de gravitatiekracht aan elkaar gelijk te stellen. Op massa m_1 werkt in de richting $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de gravitatiekracht vanuit massa m_2 die zich op afstand $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ van elkaar bevindt. Deze kracht is dus gelijk aan $\vec{F}_{gravitatie} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$. Tegelijkertijd werkt de centrifugale kracht op massa m_1 de andere kant op:

$$\vec{F}_{centrifugaal} = -m_1 \frac{v^2}{r_1 r} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -m_1 r_1 \omega^2 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{r},$$

Opgave 4

Laat aan de hand van de wetten van Newton zien dat als op het i -de deeltje een kracht $\vec{F}_i$ werkt, dat dan met $\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ ook voor het zwaartepunt de tweede wet van Newton geldt, i.e. $\vec{F}_{ext} = m \ddot{\vec{r}}_{CM}$ of $\vec{F}_{ext} = \ddot{\vec{P}}_{CM}$.

waarbij ω de hoeksnelheid aangeeft met $v = r_1\omega$. Hiermee lukt het de hoeksnelheid te bepalen.

$$G \frac{m_1 m_2}{r^3} = -m_1 r_1 \omega^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{G \frac{(m_1 + m_2)}{r^3}}.$$

Wij zien hieruit bijvoorbeeld dat de lichamen steeds sneller roteren naarmate ze dichter bij elkaar komen.

Opmerking: Uit het evenwicht van gravitatiekracht en middel-puntzoekende kracht blijkt dat de omlooptijd T evenredig is met $r^{\frac{3}{2}}$. Dit staat in zijn algemene vorm bekend als de *derde wet van Kepler*, die een verband aangeeft tussen de afstand van de planeten en de omlooptijd. Behalve voor cirkelbanen geldt dit ook voor ellipsbanen (r is de halve lange as).

Met de voorbereiding in de paragrafen hiervoor zijn wij nu in staat om het totale impulsmoment te berekenen. Omdat dubbelplaneten in een centraal krachtenveld ver weg van de zon bewegen, is het totale impulsmoment $\vec{J}$ ten opzichte van het zwaartepunt van de dubbelplaneet nagenoeg constant (zie opmerking op pagina 294). Wij splitsen $\vec{J}$ op in het impulsmoment ten opzichte van de zwaartepunten van elk van de planeten en de impulsmomenten van elk massadeeltje van een planeet ten opzichte van het zwaartepunt van deze planeet. $\vec{r}_{1,i}$ resp. $\vec{r}_{2,i}$ met impulsen $\vec{P}_{1,i}$ en $\vec{P}_{2,i}$ zijn de positievectoren van het i -de massadeeltje van planeet (1) resp. (2) met massa $m_{1,i}$ resp. $m_{2,i}$.

Voor de positievectoren vanuit de zwaartepunten van de planeten schrijven wij $\vec{z}_{1,i} = \vec{r}_{1,i} - \vec{r}_{1,CM}$ en $\vec{z}_{2,i} = \vec{r}_{2,i} - \vec{r}_{2,CM}$. Dan vinden wij:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{z}_{1,i} \times \vec{P}_{1,i} + \sum_i \vec{z}_{2,i} \times \vec{P}_{2,i} + \sum_i \vec{r}_{1,CM} \times \vec{P}_{1,i} + \sum_i \vec{r}_{2,CM} \times \vec{P}_{1,i}$$

waarbij de positievectoren $\vec{r}_{1,CM}$ en $\vec{r}_{2,CM}$ uitgaan van het algemene zwaartepunt van de dubbelplaneet. $\vec{P}_{1,i}$ is gelijk aan $(\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}) + \vec{P}_{1,CM}$ en daarbij is $\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}$ de impuls waarmee de i -de puntmassa rond het zwaartepunt van planeet (1) roteert. $\sum_i \vec{z}_{1,i} \times \vec{P}_{1,CM} = (\sum_i \vec{z}_{1,i}) \times \vec{P}_{1,CM}$ is gelijk aan nul als de bolvormige planeet op een symmetrische manier in massadeeltjes is opgedeeld waarbij er voor elke vector $\vec{z}_{1,i}$ zo'n tegenovergestelde vector in de som $\sum_i \vec{z}_{1,i}$ te vinden is. Hetzelfde geldt voor planeet (2). Als we dit samenvatten, houden wij de volgende uitdrukking over:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{z}_{1,i} \times (\vec{P}_{1,i} - \vec{P}_{1,CM}) + \sum_i \vec{z}_{2,i} \times (\vec{P}_{2,i} - \vec{P}_{2,CM}) + \vec{r}_{1,CM} \times \vec{P}_{1,CM} + \vec{r}_{2,CM} \times \vec{P}_{2,CM}.$$

Met de berekeningen voor het traagheidsmoment vinden wij:

$$\vec{J} = I_1 \vec{\Omega}_1 + I_2 \vec{\Omega}_2 + (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \vec{\omega} \quad \text{oftewel} \quad (1)$$

$$\vec{J} = I_1 \vec{\Omega}_1 + I_2 \vec{\Omega}_2 + \mu r^2 \vec{\omega}$$

Hierbij is $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ de zogenaamde *gereduceerde massa*. $\vec{\Omega}_1$ en $\vec{\Omega}_2$, respectievelijk I_1 en I_2 , staan voor de rotatiesnelheden, respectievelijk traagheidsmomenten van de planeten (1) en (2).

Dit was het voorwerk. Met deze bagage zijn wij nu toegerust

om diepere inzichten in bijvoorbeeld de eigenschappen van dubbelplaneten te verkrijgen.

Halley had toch gelijk

Hoe zit het nu met het verhaal van Halley? Hiervoor gaan wij zorgvuldig kijken naar het totale impulsmoment van aarde en maan. De traagheidsmomenten van aarde $I_A = \frac{2}{5} m_A R_A^2$ en maan $I_M = \frac{2}{5} m_M R_M^2$ zijn nogal verschillend van grootte: $I_A = 9,69865 \cdot 10^{31} \text{ kg km}^2$ en $I_M = 8,87948 \cdot 10^{28} \text{ kg km}^2$, dat wil zeggen I_M is minder dan een duizendste van I_A (zie tabel 1).

De hoeksnelheid van aarde en maan wordt relatief tot de vaste sterren gemeten. Hierbij verwaarlozen wij het tolleren van de aardas (precessie). Gezien vanuit de vaste sterren draait de aarde in 365,2564 dagen 366,2564 keer om haar eigen as. Daardoor geldt voor de hoeksnelheid

$$\Omega_A = 2\pi \frac{366,2564}{365,2564} \frac{1}{\text{dag}} = 6,30039 \frac{1}{\text{dag}}.$$

De maan draait niet meer ten opzichte van de aarde maar wel ten opzichte van de vaste sterren. De maanden zoals wij die vanaf de aarde zien (de *synodische* maanden) zijn 29,53 dagen lang. Gezien vanuit de aarde draait de maand in één jaar dus $\frac{365,2564}{29,53}$ keer rond de aarde. Omdat het hele systeem in een jaar rond de zon draait is

$$\Omega_M = 2\pi \frac{\frac{365,2564}{29,53} + 1}{365,2564} \frac{1}{\text{dag}} = 0,229975 \frac{1}{\text{dag}}.$$

Dit geeft aan dat in de formule (1) het spin-impulsmoment van de maan kleiner dan een tienduizendste is van het spin-impulsmoment van de aarde. Daarom zullen wij het hier verwaarlozen. De draaiassen ω en Ω_A wijzen vrijwel in dezelfde richting. Met m geven wij weer de totale massa aan: $m = m_A + m_M$.

$$J = \mu r^2 \omega + I_A \Omega_A = \mu \sqrt{Gm} r^{\frac{1}{2}} + I_A \Omega_A. \quad (2)$$

De wet van impulsbehoud geeft daarmee een verband tussen r en Ω_A waarbij de tweede uitdrukking is afgeleid met behulp van de derde wet van Kepler

$$\omega = \sqrt{Gm} r^{-\frac{3}{2}} \quad (3)$$

die de afhankelijkheid tussen r en ω aangeeft. De tweede vergelijking uit (2) kunnen wij ook schrijven als:

$$\Omega_A = \frac{J}{I_A} - \frac{\mu}{I_A} \sqrt{Gm} r^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Het is een feit dat de getijden de draaisnelheid Ω_A van de aarde langzaam af laten nemen (zie [4–6]). Uit vergelijking (2) en het behoud van impulsmoment zien we dat daarmee r toe moet nemen. Dit is wat er ook werkelijk wordt geobserveerd. De afstand neemt met 3,82 cm per jaar toe.

De vergelijkingen (3) en (4) geven aan hoe r , ω en Ω_A van elkaar afhangen. Wij weten dat r langzaam toeneemt. Met name

zijn we nu geïnteresseerd in de afhankelijkheid van de in dagen gemeten maandlengte van r .

Wij noemen $\lambda_m(r)$ de lengte van een maand en $\lambda_d(r)$ de lengte van een dag zoals wij die op aarde bij een gegeven afstand r tussen aarde en maan zouden waarnemen (dat wil zeggen *synodisch*). Dan geeft λ_m/λ_d het aantal dagen aan in een maand. Wij willen nu aantonen dat λ_m/λ_d voor de dubbelplaneet aarde-maan als functie van de afstand r rond de werkelijke afstand $r_0 = 3,8440 \cdot 10^5$ km dalend is. Omdat de afstand r daadwerkelijk toeneemt weten we dan dat de maanden korter worden als zij in dagen worden gemeten. Hiervoor willen we eerst het verband formuleren tussen λ_m en λ_d aan de ene kant en ω en Ω_A aan de andere kant die ten opzichte van de vaste sterren zijn gedefinieerd. Grootheden die ten opzichte van de vaste sterren worden bepaald, noemen we ook *siderisch* wat afkomstig is van het Latijnse woord *sidus* = ster. λ_j staat voor de lengte van een jaar en die hangt dus niet af van r .

De maan draait λ_j/λ_m keer per jaar rond de aarde, gezien vanuit de zon. Ten opzichte van de vaste sterren draait hij in één jaar $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_m} + 1\right)$ keer rond zijn eigen as. Hierbij gebruiken wij weer dat de maan ten opzichte van de aarde stilstaat en dus ten opzichte van de zon per maand een rondje om zichzelf draait.

De siderische hoeksnelheid ω van de draaiende dubbelplaneet aarde-maan is dan

$$\omega = 2\pi \frac{\frac{\lambda_j}{\lambda_m} + 1}{\lambda_j} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

Willen we de afhankelijkheid van deze grootheden van r onderzoeken, dan kunnen wij hier de afgeleide naar r bestuderen die we met een accent ' aangeven, dus bijvoorbeeld $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial r}$.

$$\omega' = -2\pi \frac{\lambda'_m}{\lambda_m^2}. \quad (5)$$

Net zo draait de aarde λ_j/λ_d keer per jaar rond haar eigen as, gezien vanuit de zon. Ten opzichte van de vaste sterren draait hij in één jaar $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_d} + 1\right)$ keer rond zijn eigen as. De siderische hoeksnelheid Ω_A van de aarde is dan

$$\Omega_A = 2\pi \frac{\frac{\lambda_j}{\lambda_d} + 1}{\lambda_j} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_d} + \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

De afgeleide naar r geeft hier:

$$\Omega'_A = -2\pi \frac{\lambda'_d}{\lambda_d^2}. \quad (6)$$

Wij willen weten of λ_m/λ_d voor aarde-maan bij groter wordende r rond de werkelijke afstand r_0 daalt of stijgt. In ieder geval vertelt ons de quotiëntregel dat geldt:

$$\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_d} \right)' < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda'_m}{\lambda_d} < \frac{\lambda_m}{\lambda_d}.$$

Hierbij moet wel worden gecontroleerd dat $\lambda'_d > 0$ is. Uit (4) volgt dat $\Omega'_A < 0$ is en samen met (6) zien we $\lambda'_d > 0$. Uit de formules (5) en (6) concluderen wij

$$\frac{\lambda'_m}{\lambda_d} = \frac{\omega' \lambda_m}{\Omega'_A \lambda_d} \frac{\lambda_m}{\lambda_d}.$$

	Aarde	Maan
Straal	6371 km	1738 km
Massa	$5.9736 \cdot 10^{24}$ kg	$7.349 \cdot 10^{22}$ kg

Tabel 1 Straal en massa van aarde en maan

De in dagen gemeten maanden worden dus daadwerkelijk korter als geldt:

$$\frac{\omega' \lambda_m}{\Omega'_A \lambda_d} < 1. \quad (7)$$

Door de derde wet van Kepler te differentiëren volgt:

$$\omega' = -\frac{3}{2} \sqrt{Gm} r^{-\frac{5}{2}}.$$

De wet van impulsbehoud geeft na differentiatie naar r :

$$\Omega'_A = -\frac{\mu}{2I_A} \sqrt{Gm} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Dit ingevuld in de ongelijkheid (7) levert de conditie:

$$\frac{\omega' \lambda_m}{\Omega'_A \lambda_d} = 3 \frac{\mu}{I_A} \frac{\lambda_m}{\lambda_d} r^{-2} < 1,$$

en dat is werkelijk het geval (zie opgave 6).

Twee andere dubbelplaneten nader bekeken

Een en dezelfde formule (1) kan heel verschillende scenario's voor een dubbelplaneet tot gevolg hebben.

Mars en Phobos De planeet Mars heeft twee manen *Phobos* en *Deimos* oftewel *vrees* en *verschrikking*. Wij kijken hier naar de dubbelplaneet Mars-Phobos.

Mars draait langzamer om zijn eigen as dan zijn maan Phobos om hem heen draait. Dat betekent dat de hoeksnelheid van Mars Ω_M en de hoekssnelheid van Phobos Ω_P wel in dezelfde richting wijzen, maar dat geldt: $\Omega_M < \Omega_P$. De getijdewerking zorgt er dan voor dat Ω_M toeneemt. De formule

$$\vec{J} = \mu r^2 \vec{\omega} + I_M \vec{\Omega}_M + I_P \vec{\Omega}_P$$

Opgave 5

Laat zien dat $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r^2$.

Opgave 6

- Gebruik de data in de tabellen om te laten zien dat bij aarde-maan werkelijk aan dit criterium is voldaan.
- Wat gebeurt er als aarde en maan dichter bij elkaar zouden staan?

Opgave 7

Vind een variant van het argument uit de tekst die rekening houdt met het feit dat de banen van Neptunus en Triton in vlakken liggen die een hoek van 23° met elkaar maken.

tijdseenheid	tijd
siderische dag	86164,1 seconde
siderische maand	27,32166 dag
siderisch jaar	365,2564 dag
synodische maand	29,530589 dag
synodische dag	1 dag = 24 h

Tabel 2 Tijdseenheden

afstand aarde-maan	$3,8440 \cdot 10^5$ km
toename per jaar	3,82 cm
excentriciteit maanbaan	0,05490

Tabel 3 Betrekkingen tussen aarde en maan

wordt met behulp van het verband tussen hoeksnelheid en afstand Mars-Phobos $\omega^2 r^3 = G(m_M + m_P)$ tot de identiteit:

$$J = \mu (G(m_M + m_P)r)^{\frac{1}{2}} + I_M \Omega_M + I_P \Omega_P.$$

We zien dus dat het impulsmoment alleen kan worden behouden als met toenemende Ω_M de afstand r afneemt. Mars en Phobos gaan dus langzaam naar elkaar toe totdat Phobos op Mars te pletter slaat.

Neptunus en Triton Triton is met afstand de grootste van 13 bekende manen van Neptunus. De kleinste drie van deze manen zijn pas sinds 2004 bekend en de allerkleinste heeft een doorsnede van maar 54 km. Triton is de langst bekende maan van Neptunus, waarvan het bestaan al een maand na de ontdekking van de planeet (1846) werd bevestigd. Pas in 1949 werd door de Amerikaanse astronoom van Nederlandse afkomst Gerard Kuiper (1905-1973) de tweede maan Nereïde ontdekt. In de Griekse mythologie was Triton de oudste zoon van Poseïdon die in de Romeinse mythologie Neptunus werd genoemd.

Bijzonder aan de dubbelplaneet Neptunus-Triton is dat Neptunus om zijn eigen as draait maar tegelijkertijd draait zijn maan Triton tegen de draaiing van Neptunus in: Triton beweegt *retrograde* om Neptunus heen. Triton heeft, als enige grote maan in ons zonnestelsel, zo'n retrograde baan. Daarnaast heeft de baan

van Triton een opmerkelijk grote hoek (23°) ten opzichte van de evenaar van Neptunus. Hieruit concludeert men dat Triton niet is ontstaan rond Neptunus, maar later is ingevangen door Neptunus. Het lijkt dan ook goed mogelijk dat Triton vroeger deel uitmaakte van de zogenaamde Kuipergordel, een gordel van vele miljarden komeetachtige, uit rots en ijs bestaande objecten, voorbij de baan van Neptunus, de achtste planeet van ons zonnestelsel.

Ook bewegen Neptunus en Triton niet in hetzelfde vlak, al gaan we dit hier voor het gemak wel aannemen. Het is niet moeilijk het argument te nuanceren met de toevoeging dat de banen in een hoek van 23° staan.

De retrograde beweging betekent dat de hoeksnelheid van Neptunus Ω_N en de hoeksnelheid van Triton Ω_T in tegengestelde richting wijzen. De getijdewerking zorgt er ook hier voor dat Ω_N afneemt. De formule

$$\vec{J} = \mu r^2 \vec{\omega} + I_M \vec{\Omega}_M + I_P \vec{\Omega}_P$$

wordt dan met behulp van het verband tussen hoeksnelheid en afstand Mars-Phobos $\omega^2 r^3 = G(m_M + m_P)$ tot:

$$J = -\mu (G(m_N + m_T)r)^{\frac{1}{2}} + I_N \Omega_N + I_T \Omega_T.$$

Het behoud van impulsmoment zegt ons nu dat als Ω_T afneemt de afstand r eveneens af moet nemen. Dus ook Triton zal steeds dichterbij Neptunus komen totdat hij zo dichtbij komt dat hij door de getijden uiteen wordt getrokken nadat hij de zogenaamde *Rochelimit* heeft bereikt. Triton zal naar verwachting binnen honderd miljoen jaar op Neptunus neerstorten. $\leftarrow$

Verantwoording

Deze bijdrage komt voort uit de samenwerking van het *Regionale Steunpunt Wiskunde D* in Nijmegen met Jan Kuijpers, hoogleraar astrofysica en decaan aan de Radboud Universiteit, en een kerngroep van negen wiskundeleraars: Mark van den Aarsen, Hanneke Abbenhuis, Herman Alink, Leon van den Broek, Bart Jordens, Maris van Haandel, Dolf van den Hombergh, Richard Klein Breteler en Jos Winkel. Ook op de universiteiten van Delft, Eindhoven en Twente is voor een soortgelijke aanpak gekozen (zie [7]).

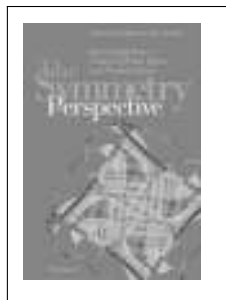
Referenties

- 1 E. Halley (1695). 'Some account of the ancient state of the city of Palmyra, with short remarks upon the inscriptions found there', *Philosophical Transactions*, XIX:160-175.
- 2 E. Halley (1693). 'Emendationes ac notae in vetustas albatēnii observationes astronomicas', *Philosophical Transactions*, XVII:913-921.
- 3 U. Uffrecht & T. Poppe (2002). *Himmelsmechanik und Raumfahrt*, Klett Verlag, Stuttgart Düsseldorf Leipzig.
- 4 F. Verbunt (2001). 'Van Halley tot lunar ranging', *Zenit*, april, 180-186.
- 5 F. Verbunt (2001). 'VLBI, zonsverduisteringen, schelpjes en modder', *Zenit*, juni, 290-297.
- 6 F. Verbunt (2002). *The Earth and Moon: from Halley to lunar ranging and shells*, www.astro.uu.nl/~verbunt/onderzoek/earth.pdf.
- 7 T(R)U's, samenwerking van de *regionale Wiskunde D steunpunten* aan de universiteit en Delft, Eindhoven, Twente en Nijmegen, www.wiskundeDsteun.nl.
- 8 *Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs*, cT-WO, ministeriële vernieuwingscommissie wiskunde, www.ctwo.nl.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



M. Golubitsky, I. Stewart
**The symmetry perspective
 From Equilibrium to Chaos in
 Phase Space and Physical Space**

Progress in mathematics; vol 200

Basel: Birkhäuser, 2002

325 p., prijs €75,-

ISBN 3-7643-6609-5

De auteurs hebben gezamenlijk al diverse boeken geschreven om het begrip symmetrie duidelijk te maken voor een breed publiek. Bekende titels zijn onder andere *Fearful symmetry: is God a geometer?* en *Symmetry in chaos: a search for pattern in mathematics, art and nature*. In deze boeken vindt men toepassingen van de theorie van symmetrie in de natuurlijke wereld. Het onderhavige boek gaat met name nu dieper in op de wiskundige achtergrond van deze toepassingen. Symmetrie wordt vaak gebruikt om, zoals in de klassieke kristallografie, regelmatige vormen of patronen te beschrijven. De auteurs laten echter zien dat symmetrie ook bij de totstandkoming van patronen een rol speelt. Symmetrieën van systemen niet-lineaire differentiaalvergelijkingen of partiële differentiaalvergelijkingen verschaffen de mogelijkheid om een catalogus te maken van verschillende soorten gedrag met patroonvorming. De ondertitel van het boek luidt: 'From equilibrium to chaos in phase space and physical space'. De auteurs benadrukken hiermee dat symmetrieën een belangrijke schakel zijn tussen abstracte theorie en het experiment. Zo is er vaak geen directe relatie tussen de tijdreeksen die een experimentator observeert en de banen en meetkundige objecten die de theorie van niet-lineaire systemen beschrijft. Maar in de meeste gevallen blijkt juist dat de symmetrie van een systeem zowel een fysische interpretatie heeft als een abstracte betekenis. De symmetrie-eigenschappen van een baan in de faseruimte laten zich veelal vertalen in een symmetrie van de gerelateerde fysische waarneming. Het boek kent een graduele opbouw. De symmetriemethoden worden achtereenvolgens toegepast op steeds complexere dynamische verschijnselen: evenwichtstoestanden, periodieke oplossingen, zadelpunten met homokliene en heterokliene banen en, tenslotte, chaotische fenomenen. Daarbij wordt telkens de link gelegd met toepassingsgebieden, variërend van theoretische fysica tot evolutiebiologie. Het boek is uitstekend verzorgd met foto's en illustraties en is helder geschreven. De brede scope van het boek maakt het aantrekkelijk voor algemeen geïnteresseerden die wat meer wiskundige diepgang zoeken, maar zeker ook voor specialisten die een overzicht willen hebben van de verschillende toepassingsgebieden en van de literatuur op deze gebieden. Zo kent het boek een zeer uitgebreide literatuurlijst. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de rijke inhoud van dit boek en de aangename presentatie aanleiding zijn geweest om in 2001 aan dit boek een prijs toe te kennen, vernoemd naar de internationaal gerespecteerde Catalaanse toegepaste wiskundige Ferran Sunyer i Balaguer (1912 – 1967). En te weten dat dit boek door een computer crash bijna verloren was gegaan! Het werk is namelijk de neerslag van een serie lezingen die in het begin van 1993 aan het Fields Institute door de auteurs werden gegeven. De aantekeningen op de PC waren niet gebackupt en werden pas in 2000 gereconstrueerd voor een nieuwe serie lezingen.

G.B. Huitema



B. Bonnard, M. Chyba
**Singular Trajectories and their Role
 in Control Theory**

Mathématiques et Applications, Vol. 40

Berlijn: Springer Verlag, 2003

373 p., prijs €69,50

ISBN 3-540-00838-5

The contents and aims of this book are convincingly explained in its preface. Given a (nonlinear) control system $\dot{x} = f(x, u)$, with the state x taking values in an n -dimensional manifold, and a control vector $u \in U \subset \mathbf{R}^m$, consider the *end-point mappings* $E : u(\cdot) \mapsto x(T, x_0, u)$ where $x(T, x_0, u)$ denotes the state at some fixed time $T > 0$ resulting from applying the control function $u(\cdot)$ to the control system, starting from a fixed initial state x_0 at time 0. The singularities of this mapping are called the *singular trajectories* of the control system.

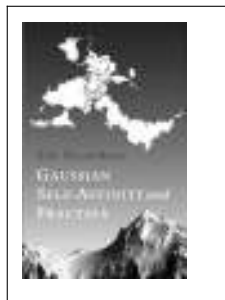
These singular trajectories crucially show up in at least three instances: (1) The singular trajectories are candidate minimizers for the *time-optimal control problem* of steering the system to a desired end-point in a minimal amount of time. The singular trajectories are parametrized by the Pontryagin Maximum principle applied to the time-optimal control problem. (2) The singular trajectories are the *abnormal extremals* of optimal control problems for the control system. Indeed, the optimal control problem can be seen as minimizing a cost functional over the set of all possible system trajectories, with the singular trajectories being the singular points of this set. A particular example of this case is provided by sub-Riemannian geometry. (3) The singular trajectories remain the same when applying a general state feedback to the control system. Hence they are invariants under the action of the *feedback group*. It turns out that the singular trajectories can be used to generate a *complete* set of invariants. In particular, with the aid of singular trajectories one may compute invariants for the classification of *distributions*.

The book brings together a wealth of results on the topic of singular trajectories and its applications, which were up to now for a large part scattered throughout the literature. Hence the book serves as a very valuable source of information for every researcher interested in these and related areas.

Generally speaking, the book is well accessible. The goals of the individual chapters and sections are stated clearly. In addition, the book contains a large number of useful exercises at the end of every chapter. On the other hand, the present reviewer feels that as a textbook the book exhibits some flaws. First, there is occasional sloppiness in the notation. For example, in Proposition 8 the time-invariant linear system is denoted as $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ and on p. 67 the alternative notation $[\vec{F}, \vec{G}] = \vec{G} \circ \vec{F} - \vec{F} \circ \vec{G}$ for the Lie bracket suddenly shows up. The English of the book sometimes would have benefited from a closer inspection (cf. 'In 1963 was published given an example' on p. 82, 'It has in some extend slopped the post-war research in this area' on p. 233). Its mathematical contents, although generally of an admirable quality, could also be improved at some points (e.g. the proof of Proposition 2 does not appear correct, while much better, — and more constructive —, proofs for Proposition 8 are available in the literature).

Summarizing, the book is a very welcome and useful addition to the literature, especially as a research monograph and source of information and inspiration.

A.J. van der Schaft



B.B. Mandelbrot
Gaussian Self-Affinity and Fractals

Berlijn: Springer Verlag, 2002

654 p., prijs €64,15

ISBN 0-387-98993-8

Mandelbrot heeft grote bekendheid gekregen door zijn onderzoek aan fractals. Het is niet eenvoudig voor dit begrip een bevredigende algemene definitie te geven, maar men moet denken aan objecten die, bij goede herschaling, er in hun kleinste details (ongeveer) net zo uit zien als het geheel. Ter toelichting twee van de eenvoudigste voorbeelden. Eerst de 'middelstederde-Cantorverzameling': hierbij is zowel de linker als de rechter 'helft', na opschaling met een factor drie, congruent met het geheel; door herhaalde toepassing van dit principe zien we dat we de oorspronkelijke Cantorverzameling overal in verkleinde vorm terugvinden. Een tweede voorbeeld is de Brownse beweging. Bij een dergelijke beweging treedt in een tijdsinterval van lengte t gemiddeld een verplaatsing op over een afstand die evenredig is met $\sqrt{t}$. Hier geldt dat, bij een opschaling van de tijd met een factor α en tegelijkertijd een opschaling van de 'ruimtelijke afstanden' met een factor $\sqrt{\alpha}$, we weer hetzelfde stochastische proces van Brownse beweging krijgen. Dus ook hier is Brownse beweging in het klein gelijk aan Brownse beweging in het groot.

In het onderzoek van Mandelbrot komen veel meer en veel gecompliceerdere voorbeelden van dit soort situaties aan de orde; met name komen in dit werk ook varianten van de Brownse beweging aan de orde waarbij de afgelegde weg in een tijdsinterval van lengte t gemiddeld evenredig is met t^α , waarbij α niet gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Ook wordt met veel nadruk en voorbeelden aangetoond dat vaak situaties buiten de wiskunde vragen om een beschrijving in termen van dergelijke fractale structuren. Een bekend voorbeeld, dat wel met een korreltje zout genomen moet worden, is de kustlijn van bijvoorbeeld Noorwegen: die ziet er op een kaart grillig uit; maar niet alleen dat, bij gebruik van een gedetailleerdere kaart blijft die kustlijn ongeveer even grillig omdat er nieuwe details zichtbaar worden (ik heb het niet gecontroleerd). Ook ruwe oppervlakken van materialen hebben vaak (bij benadering) een fractale structuur — bij de keuze van de term *fractal* heeft voor Mandelbrot de associatie met een *breukvlak* een belangrijke rol gespeeld. Ook in de wiskunde zelf komen deze fractals voor. Heel bekend is wat we nu de Mandelbrotverzameling noemen, hoewel daar het principe dat we overal in het klein de hele verzameling weer terugvinden minder streng geldig is dan bij de bovenstaande voorbeelden. Dit is de verzameling van die waarden c in het complexe vlak waarvoor de rij punten $\{\varphi_c^n(0)\}_n$, waarbij $\varphi_c(x) = x^2 + c$, begrensd is. Het is een schitterende figuur met een ongelooflijk complexe structuur die aanleiding gegeven heeft tot veel mooi wiskundig werk. Uit deze korte beschrijving moge het duidelijk zijn dat we hier te maken hebben met een man

die niet de standaard wegen van de wetenschapsbeoefening laat staan van de wiskundebeoefening gevolgd heeft: vaak wierp hij meer vragen op dan hij oploste (maar in een niet onaanzienlijk aantal gevallen inspireerden zijn ideeën anderen tot substantiële bijdragen) en ook met een man die terecht een ruime bekendheid geniet. Zoals men kan verwachten waren de reacties op dit werk, vooral in het begin, sterk wisselend. Mijn indruk is echter dat nu vrij algemeen wordt ingezien dat fractals in een aantal gevallen goede hulpmiddelen zijn bij het beschrijven van situaties uit de werkelijkheid en ook dat er een begin is van een goede wiskundige theorie van (ten minste bepaalde klassen van) dit soort objecten.

Het werk waar het hier om gaat bevat een selectie van zijn artikelen, aangevuld met een aantal speciaal voor deze uitgave geschreven artikelen. Het is het derde deel in de serie 'Selected works of Benoit B. Mandelbrot'. De eerste twee hadden als titel *Fractals and scaling in finance* en *Multifractals and $1/f$ noise*. Uit het bovenstaande moge duidelijk zijn dat ik het toejuich dat (een selectie uit) de werken van Mandelbrot door een nieuwe uitgave toegankelijker gemaakt worden. Wat mij echter tegenviel is dat de schrijver het niet kan laten om voortdurend te hameren op het grote belang van fractals en zijn eigen grote bijdragen op dit gebied. Hij lijkt een permanente strijd te voeren voor erkenning. Dit kende ik ook al uit eerdere publicaties, maar ik heb de indruk dat dit hier nog sterker was geworden. Nu kan men hier natuurlijk overheen lezen. Maar erger is dat, tenminste in het eerste grote overzichtsartikel dat speciaal voor deze uitgave was geschreven en dat ik nauwkeurig heb proberen te lezen, iedere keer waar ik mededelingen tegenkwam met een meer wiskundige inhoud de zaak niet klopte. Het varieerde van slordige notatie (zie midden pagina 15) en het vergeten van een min-teken (zie midden pagina 32) tot een geval waar de lezer naar mijn mening echt belazerd wordt. De eerste twee gevallen kan men afdoen als slordigheden (hoewel uiterst hinderlijk als men wil begrijpen wat er staat) maar dat laatste geval is natuurlijk het ernstigste en zal ik in iets meer detail bespreken (het staat in de alinea die op pagina 41 begint en op pagina 42 eindigt).

Het gaat over de dichtheidsverdeling van melkwegstelsels in het universum. Die schijnt in eerste benadering niet uniform te zijn maar clusteringen te vertonen zodat men aan een fractale verdeling zou kunnen denken. De vraag was of een dergelijke clustering het gevolg zou kunnen zijn van de gravitatie-theorie van Newton. Mandelbrot vertelt dat dit aannemelijk gemaakt werd door computersimulaties die uitgevoerd werden bij IBM (waar Mandelbrot al heel lang werkt). Hierbij werd uitgegaan van een universum in de vorm van een 3-dimensionale torus (dit komt op hetzelfde neer als een universum dat gewoon de vorm van $\mathbf{R}^3$ heeft, met coördinaten x , y en z , waarbij alles periodiek is in zowel x , y als z). Hierin werd een begintoestand genomen met puntmassa's (die melkwegstelsels voorstelden) die bij benadering uniform verdeeld waren en werd vervolgens berekend hoe dit systeem zou evolueren volgens de mechanica van Newton: men zou een clustering gezien hebben die lijkt op de waargenomen clustering van melkwegstelsels. Op het eerste gezicht lijkt dit heel verstandig. Maar schijn bedriegt. Gelukkig heb ik als bijvak sterrenkunde (zoals dat toen nog heette) moeten doen. Daar heeft Van Albada ons toen geleerd dat, zoals Newton al ingezien had, een universum, waarbij de massa bij benadering uniform verdeeld is (en dat is het geval in zo'n multiperiodiek universum), de mechanica van

Newton niet mogelijk is omdat de gravitatiekrachten die het gevolg zijn van zo'n massaverdeling gegeven worden door divergerende integralen. In het geval van een universum in de vorm van een 3-dimensionale torus kan de argumentatie als volgt gegeven worden.

De potentiaal van een puntmassa in $\mathbf{R}^3$ is van de vorm $V = -c/r$ waarbij c positief is en r de afstand tot de puntmassa voorstelt. Buiten de puntmassa voldoet dit aan de vergelijking van Laplace. Op een 3-dimensionale torus verwachten we dus een potentiaal die naar $-\infty$ nadert bij de puntmassa en elders voldoet aan de vergelijking van Laplace. Maar zo'n functie moet, omdat de torus compact is, een maximum aannemen. En dat gaat niet samen met het voldoen aan de vergelijking van Laplace.

Er wordt dus gewoon verwezen naar een numerieke simulatie die niet mogelijk is. Voor mij was dit het punt om te stoppen met een nauwkeurige lezing. Ik kan het boek dan ook niet aanbevelen als een betrouwbare bron van informatie. Dit is vooral te betreuren omdat op het gebied van de fractals, behalve waar het sterk wiskundig georiënteerde werken betreft zoals de beide boeken van Falconer, moeilijk aan betrouwbare informatie te komen is.

F. Takens



G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward

Recurrence Sequences

Mathematical Surveys and Monographs 104
Providence : American Mathematical Society,
2003

318 p., prijs \$ 79,-

ISBN 0-8218-3387-1

Recurrenties komt men veelvuldig tegen in de wiskunde en informatica: bij machtreeksen van rationale functies, pseudo-randomgetallengeneratoren, cellulaire automaten, Diophantische vergelijkingen en in de cryptografie bijvoorbeeld. De beoefenaars van deze (soms ver uit elkaar liggende) wetenschapsgebieden zijn soms nauwelijks op de hoogte van elkaars werk en dit boek zal ongetwijfeld leiden tot meer contacten tussen mensen van verschillende disciplines met een gemeenschappelijke belangstelling in recurrenties. (Inderdaad vertelde een van de auteurs me dat dit al gebeurd is.) Dat de auteurs toch met autoriteit over deze uiteenlopende zaken hebben kunnen schrijven, is te danken aan hun uiteenlopende expertises.

Recurrenties zijn al sinds oudsher bestudeerd (met als bekendste voorbeeld de recurrentie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, die met $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$ als startwaarden de Fibonaccigetallen geeft). De literatuur erover is dan ook zeer uitgebreid, alleen al omdat allerlei resultaten met zeer eenvoudige middelen bewezen kunnen worden. Gelukkig zijn de auteurs relatief selectief met hun referenties geweest (niettemin zijn er meer dan 1400 referenties).

Er bestaan al verscheidene boeken over recurrenties, maar dit is het meest omvattende. Het boek bespreekt ook enkele onderwerpen die recent sterk in de belangstelling zijn komen te staan (Somosrijen en elliptische-deelbaarheidsrijen). De auteurs beogen ook na verloop van tijd met een update van hun boek te komen.

Het boek is bedoeld als overzichtswerk en bevat niet veel bewijzen. In sommige gevallen wordt het basisidee van een be-

wijs gegeven, soms ook nieuwe resultaten (maar dan gedetailleerd). De wiskundige methodes die gebruikt worden zijn meest afkomstig uit de Diophantische approximatie, p -adische analyse en de theorie van karaktersommen. Enige getaltheoretische en algebraïsche achtergrond is nuttig voor het lezen van dit boek.

Ik meen dat de wiskundegemeenschap de auteurs dankbaar kan zijn voor hun harde en vele werk en het nuttige boek dat daaruit is voortgekomen. Voor liefhebbers van recurrenties en voor bibliotheken beveel ik het van harte aan!

P. Moree



J. Kollár, K.E. Smith, A. Corti
Rational and Nearly Rational Varieties

Cambridge Studies in Ad. Mathematics, 92
Cambridge: Cambridge University Press, 2004
235 p., prijs £38.00
ISBN 0-521-83207-1

Een algebraïsche variëteit V heet rationaal als er een birationale afbeelding bestaat naar een projectieve ruimte, dat wil zeggen een afbeelding die 1-1 duidelijk is en die in beide richtingen gegeven wordt door rationale functies (maar de afbeeldingen hoeven slechts op Zariski-open stukken gedefinieerd te zijn). Men spreekt van 'rationaal' (zo zonder meer) als de afbeelding gedefinieerd kan worden over hetzelfde lichaam als waarover de variëteit gedefinieerd is (het grondlichaam) en van 'meetkundig-rationaal' als hiervoor een uitbreiding van het lichaam nodig is (dan is de variëteit rationaal over de algebraïsche afsluiting van het grondlichaam).

De meest bekende rationale variëteiten zijn – naast de projectieve ruimten zelf – de hyperoppervlakken van graad 2 (kwadrieken); deze zijn echter slechts meetkundig-rationaal en rationaal dan en alleen dan als ze een punt bezitten gedefinieerd over het grondlichaam. Verder zijn de gladde oppervlakken van graad 3 in de driedimensionale projectieve ruimte (gladde kubische oppervlakken) meetkundig-rationaal, en rationaal alleen onder zekere subtiële condities.

De (meetkundig-)rationale variëteiten vormen een weliswaar zeer speciale, maar toch erg interessante klasse, enerzijds omdat ze vaak intrinsiek een rijke structuur bezitten zowel vanuit meetkundig als vanuit aritmetisch oogpunt – men denke bijvoorbeeld aan de fascinerende configuratie van de 27 lijnen op een glad kubisch oppervlak – en anderzijds omdat er in dimensie groter dan twee vele interessante variëteiten zijn die 'bijna-rationaal' zijn, in de zin dat hun numerieke invarianten triviaal zijn (zoals bij de projectieve ruimten), maar die toch niet (of vermoedelijk niet!) rationaal zijn. Voorbeelden van zulke 'bijna-rationale' variëteiten zijn de gladde driedimensionale hyperoppervlakken van graad 3 (kubische drievouden) en van graad 4 (kwartische drievouden); het feit dat deze variëteiten niet rationaal zijn was reeds vermoed in de Italiaanse meetkunde, in het bijzonder door Fano, maar de bewijzen zijn pas gegeven in de jaren zeventig van de vorige eeuw, voor de kubieken door Clemens-Griffiths en voor de kwartieken door Iskovskikh-Manin.

In dit boek komen beide soorten, rationale en bijna-rationale variëteiten, uitgebreid en diepgaand aan de orde.

De eerste drie hoofdstukken gaan over (meetkundig-)rationale variëteiten. In hoofdstuk 1 vinden we als inleiding vele voorbeelden van zulke rationale variëteiten waarvan sommige wel meetkundig-rationaal zijn, maar niet rationaal over het grondlichaam. Verder treffen we er een prachtige stelling aan van B. Segre (1943, 1951), met een uitbreiding van Kollár uit 2002, handelend over de vraag naar de zogenaamde 'unirationaliteit' van kubische hyperoppervlakken (unirational betekent dat er een dominante rationale afbeelding bestaat van een projectieve ruimte naar de variëteit). Het tweede hoofdstuk is voornamelijk gewijd aan kubische oppervlakken met boeiende stellingen van B. Segre (1942) en Y. Manin (1966), betreffende gevallen van niet-rationaliteit over het grondlichaam. Het hoofdstuk besluit met de beroemde stelling van Max Noether en Castelnuovo over de structuur van de groep van de birationale transformaties van het projectieve vlak zelf. Hoofdstuk 3 gaat over de theorie van rationale oppervlakken in het algemeen. We treffen er Castelnuovo's rationaliteitscriterium en de classificatie van de del Pezzo oppervlakken aan, maar naast deze klassieke onderwerpen is er ook ruime aandacht voor de methode van de minimale modellen die zo belangrijk is voor de moderne theorie van Mori voor hoger-dimensionale variëteiten.

In de volgende twee hoofdstukken ligt de nadruk op 'bijna-rationale' variëteiten. In hoofdstuk 4 wordt de door Kollár in 1995 ontwikkelde methode besproken waarbij zulke variëteiten worden verkregen (verrassend!) via reductie naar priemkarakteristiek. In hoofdstuk 5 wordt de Noether-Fano methode voor niet-rationaliteit behandeld met als toepassing het bewijs van Iskovskikh-Manin voor de niet-rationaliteit van gladde hyperoppervlakken van dimensie 3 en graad 4. Deze Noether-Fano methode bestaat uit het in detail analyseren van de vaste punten en vaste 'infinitesimale-punten' van lineaire systemen. Sommige van de meer technische en moeilijke punten uit deze analyse worden vooruitgeschoven naar hoofdstuk 6 dat een technisch karakter heeft en de meer geavanceerde machinerie bespreekt. Het boek besluit met een hoofdstuk waarin de oplossingen gegeven worden van de vele 'oefeningen' die in het boek voorkomen.

De theorie van de rationale variëteiten gaat terug tot het midden van de negentiende eeuw (bijvoorbeeld Clebsch 1866, kubische oppervlakken), maar het onderzoek strekt zich uit tot op de dag van heden met nieuwe, vaak verrassende, ontwikkelingen. Er zijn talloze diepe, open vragen waarvoor waarschijnlijk een nieuw origineel inzicht nodig zal zijn. Om slechts een voorbeeld te noemen: het is bekend dat er in dimensie groter dan drie families bestaan van gladde kubische hyperoppervlakken die rationaal zijn, maar het is onbekend of het 'algemene' kubische hyperoppervlak in dimensie groter dan drie (meetkundig-)niet-rationaal is.

Dit boek geeft een prachtig en diepgaand beeld, zowel van klassieke als van moderne methoden en resultaten in dit fascinerende gebied uit de algebraïsche meetkunde. Van harte aanbevelen!

J.P. Murre



J. Montaldi, T. Ratiu (eds.)
**Geometric Mechanics and Symmetry
 The Peyresq Lectures**

London Mathematical Society Lecture Note Series 306

Cambridge: Cambridge University Press, 2005

402 p., prijs £46.00

ISBN 0-521-53957-9

In de jaren 2000 tot 2004 bestond onder de naam MASIE een Europese onderzoeksschool omtrent symmetrie en mechanica. Om de toekomstige promovendi en postdocs ervan een vliegende start te geven, werden in 2000 en 2001 twee zomerscholen gehouden. De Lecture Notes van meer dan de helft van de toen gegeven colleges zijn in het voorliggende boek verzameld, gebaseerd op lezingen van Ken Meyer, Tudor Ratiu, Darryl Holm, Richard Cushman, Henk Broer en James Montaldi.

De naam 'Lecture Notes' is hier zeer terecht, want deze werden grotendeels door de deelnemers zelf vervaardigd. Dit concept zorgt er meteen voor dat de zes teksten zeer toegankelijk zijn. Immers, de inhoud van elke cursus is door de handen gegaan van deelnemers/auteurs die de stof al hebben kunnen begrijpen.

Formeel zijn de zes teksten onafhankelijk van elkaar, maar er is wel een grote onderliggende samenhang. De steunpilaren worden gevormd door de hoofdstukken II, IV, V en VI.

Hoofdstuk II is een caput college over meetkundige mechanica. De centrale onderwerpen van de moderne aanpak van de mechanica komen aan de orde en worden door talloze (terugkerende!) voorbeelden geïllustreerd. De formuleringen zijn meestal zo gekozen dat het geval van oneindig veel vrijheidsgraden ook afgedekt wordt. Waar nodig wordt dit geval bovendien nader toegelicht. Hierdoor kan men hoofdstuk II ook gebruiken als aanvulling op de technische aspecten van het meer gevorderde hoofdstuk III over vloeistofmechanica.

De presentatie van de mechanica in hoofdstuk IV is sterk gedreven door drie voorbeelden. Terwijl hun aantal kleiner is dan in hoofdstuk II, worden deze in detail geanalyseerd en laten ze zo de grote rijkdom aan dwarsverbindingen met algebra en topologie zien.

Hoofdstuk VI behandelt de bifurcatietheorie van evenwichten en relatieve evenwichten in Hamiltoniaanse systemen met symmetrie. Ook hier worden de behandelde stellingen teruggekoppeld naar expliciete voorbeelden. Men kan in dit verband zelfs het hele hoofdstuk I (her)lezen.

Hoofdstuk V gaat niet over mechanica. Hier wordt de Kolmogorov–Arnol'd–Mosertheorie (KAM) uit de doeken gedaan. Het behandelde geval van dissipatieve systemen laat duidelijk zien waar parameters nodig zijn en waarom. In het conservatieve geval zijn deze parameters van begin af aanwezig in de vorm van (vaak vanwege symmetrie) behouden grootheden. De lektuur van de andere hoofdstukken bereidt de lezer al voor op deze conclusie en in de appendix wordt hij nog expliciet op het goede spoor gezet.

Elk hoofdstuk kan uitstekend gebruikt worden als basis voor (een deel) van een op het behandeld onderwerp toegesneden master vak. Bovendien lenen deze teksten zich door hun toegankelijkheid ook goed voor studenten die een in een college aangesneden zijpad wat dieper in willen gaan — zonder meteen in

dikke boeken over het onderwerp te verdwalen. Hoofdstuk I zou dan zelfs de basis voor een of twee voordracht(en) door studenten tijdens het college kunnen bieden.

Heinz Hanmann



P. Etingof, F. Latour
**The Dynamical Yang-Baxter equation,
 Representation Theory, and
 Quantum Integrable Systems**

Oxford : Oxford University Press, 2005

Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 29

138 p., prijs £41.00

ISBN 0-19-853068-4

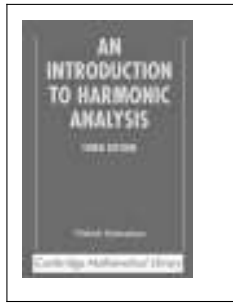
De Yang-Baxtervergelijking is $R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}$. De betekenis is als volgt. Voor V een n -dimensionale complexe vectorruimte is $R \in \text{End}(V \otimes V)$ een $n^2 \times n^2$ -matrix en we stellen $R^{12} = R \otimes \text{Id} \in \text{End}(V \otimes V \otimes V)$ zodat R^{12} betekent dat R in de eerste twee componenten van het drievoudige tensorproduct werkt. Evenzo betekent R^{13} , respectievelijk R^{23} , dat R in de eerste en derde, respectievelijk tweede en derde, component werkt. De Yang-Baxtervergelijking is dus een gelijkheid voor $n^3 \times n^3$ -matrices. Er zijn vele oplossingen van de Yang-Baxtervergelijking bekend, waaronder $R = \text{Id}$ en de flipoperator $a \otimes b \mapsto b \otimes a$. De Yang-Baxtervergelijking, of een van zijn vele varianten, komt op verschillende plaatsen voor: in de statistische mechanica gerelateerd aan het werk van Baxter, waar het de star-triangle equality heet, in Poisson-Liegroepen, quantumgroepen, Hopfalgebra's, vlechtgroepen, knopeninvarianten, speciale functies enzovoort. In feite is de genoemde Yang-Baxtervergelijking de constante Yang-Baxtervergelijking, en er zijn ook versies waarbij R als functie van een spectrale – complexe – parameter of een dynamische – vectorwaardige – parameter wordt gezien en waarbij deze parameters op verschillende niet-triviale manieren in de vergelijking verwerkt zijn. In het geval van de dynamische Yang-Baxtervergelijking wordt dit nu een differentievergelijking waaraan de matrixelementen moeten voldoen.

Dit boek behandelt de dynamische Yang-Baxtervergelijking en relaties daarvan met de representatietheorie van quantum- en Liegroepen en met quantum-integreerbare systemen. Er wordt duidelijk aangegeven hoe de representatietheorie van een simpele Lie-algebra aanleiding geeft tot oplossingen van de dynamische Yang-Baxtervergelijking. De dynamische parameter komt dan voor als representatielabel. Deze aanpak is sterk gerelateerd aan de bepaling van oplossingen van de Knizhnik-Zamolodchikovvergelijkingen, zie *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations* van Etingof, Frenkel, Kirillov Jr. In dit deel worden vrijwel alle bewijzen uitgebreid gegeven, en wordt de noodzakelijke voorkennis over simpele Lie-algebra's en hun representatietheorie herhaald. Het tweede deel bespreekt de relatie met quantum-integreerbare systemen. Een quantum-integreerbaar systeem is een 'interessante' verzameling van onderling commuterende operatoren. Er wordt aangetoond hoe je zo'n collectie kunt maken uitgaande van een oplossing van de dynamische Yang-Baxtervergelijking door middel van zogenaamde spoorfuncties. Deze aanpak wordt duidelijk gemaakt aan de hand van karakters. Vervolgens gebruiken de auteurs dit om recent werk van Etingof en Varchenko over het Macdonald-Ruijsenaars

systeem voor het voetlicht te brengen. In dit deel worden niet meer alle uitspraken expliciet bewezen.

Het boek is de neerslag van aantekeningen van Latour van een college van Etingof. De bewijzen in het boek zijn duidelijk en helder, waardoor het als collegedictaat gebruikt zou kunnen worden. Als nadeel van deze aanpak geldt dat het onderwerp niet of nauwelijks in een grotere context wordt geplaatst, en dat de stijl soms te droog is. Dit nadeel had gemakkelijk kunnen worden voorkomen.

Erik Koelink



Y. Katznelson

An Introduction to Harmonic Analysis

Cambridge Mathematical Library

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

314 p., prijs £23,99

ISBN 0-521-54359-2

The book under review is the third, revised, edition of Katznelson's famous 1968 book, which won the author the 2002 Steele prize for exposition. Katznelson aims at graduate students and mathematicians with a reasonable background in analysis. Rudin's *Real and Complex Analysis* would do handsomely as background material.

Nowadays there is a tendency towards offering introductions to Fourier analysis without assuming any knowledge of functional analysis and the theory of integration. This approach has the advantage that a larger audience may be reached. Katznelson's book, on the other hand, shows in a truly masterly way how beautiful the subject really is and how efficient and incisive the proofs can be, if a little abstract analysis is used. Two words of warning are appropriate. 'Application' in this book means 'application in harmonic analysis or maybe in another branch of pure math, NOT in physics, PDE or signal analysis'. The clarifying L^2 theory is broached on page 29 only. For readers without any experience with Fourier analysis this perhaps makes the book inaccessible; they should read through an elementary introduction like Körner's, and come back!

The book consists of eight chapters: I. *Fourier Series on $\mathbb{T}$* , II. *The Convergence of Fourier Series*, III. *The Conjugate Function*, IV. *Interpolation of Linear Operators*, V. *Lacunary series and Quasi-analytic Classes*, VI. *Fourier Transforms on the Line*, VII. *Fourier analysis on Locally Compact Abelian Groups*, VIII. *Commutative Banach Algebras*. There are appendices on vector-valued functions and probabilistic methods.

I will not try to give a description of the host of material that was already assembled in the older editions. Instead I will discuss what is new. The new edition counts 45 pages of added material dealing with approximation and probabilistic methods. In Chapter I we now find the ergodic theorem in Hilbert space setting, and two new sections on applications, mainly about Jackson-type theorems relating smoothness of functions to the quality of approximation by trigonometric polynomials. Extensions of the theory from the circle to the torus are also treated. Chapter IV now contains a section on Marcinkiewicz' interpolation theorem. In Chapter VI positivity, in particular Bochner's theorem character-

izing the Fourier-Stieltjes transforms of positive measures as positive definite continuous functions, is further elaborated and some probabilistic concepts are briefly introduced. (A function φ on $\mathbb{R}$ is called positive definite if all matrices $(\varphi(\xi_i - \xi_j))$, $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathbb{R}$, are positive definite.) A final new feature is the appendix on probabilistic methods, which includes the de Leeuw-Kahane-Katznelson theorem stating that, given $\{a_n\} \in l^2$, there exists a continuous function f on the circle with $|\hat{f}(n)| \geq |a_n|$. Many small corrections and ameliorations have been made throughout the book, a few exercises have been added, and the bibliography has been extended slightly.

Katznelson managed to improve on a seemingly perfect book! I enjoyed reading through it again and the beauty of both the subject and the presentation struck me once more. I recommend it wholeheartedly to anyone with a serious interest in Harmonic Analysis.

J. Wiegerinck

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone. For each problem the most elegant correct solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The judges reserve the right to withdraw the prize if none of the solutions is deemed worthy. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

Occasionally there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro. Both suggestions for problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarchief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover that a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this edition is March 1, 2008.

The prizes for the Problem Section are sponsored by *Optiver Derivatives Trading*.



Problem A (Folklore)

Let p be a prime number. Determine all n such that in the binomial formula

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

none of the coefficients is divisible by p .

Problem B (Folklore)

Determine all positive real numbers a for which there exists a function $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ such that the inequality

$$f(x + \delta) > \delta f(x)^a$$

holds for all x and for all $\delta > 0$.

Problem C (Communicated by Michiel Vermeulen)

Let G be a finite group with n elements. Let c be the number of pairs $(g_1, g_2) \in G \times G$ such that $g_1 g_2 = g_2 g_1$. Show that either G is commutative or that $8c \leq 5n^2$. Show that if $8c = 5n^2$ then 8 divides n .

Edition 2007/1

For Edition 2007/1 we received submissions from M.G. de Bruin, Martinus van Hoorn, Ruud Jeurissen, Marnix Klooster, A.J. Th. Maassen, Marco Pouw, H.F.H. Reuvers, Anton R. Schep, Jaap Spies, Fejéntaláltuka Szeged, Sep Thijssen, R.W. van den Waall, and Jianfu Wang.

Problem 2007/1-A Define the sequence $\{u_n\}$ by $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 1 + (n/u_n)$. Prove or disprove that

$$u_n - 1 < \sqrt{n} \leq u_n.$$

Solution This problem was solved by Ruud Jeurissen, Marnix Klooster, A.J. Th. Maassen, Marco Pouw, H.F.H. Reuvers, Anton R. Schep, Jaap Spies, Fejéntaláltuka Szeged, Sep Thijssen, R.W. van den Waall, and Jianfu Wang. The solution below is based on that of Marco Pouw.

For $n = 1$ the statement is that $0 < 1 \leq 1$, which is correct. Suppose that for some $n \geq 1$ we have the following inequalities:

Eindredactie:

Lenny Taelman, Johan Bosman,

Matthijs Coster, Reinie Ern 

Redactieadres:

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

uwc@nieuwarchief.nl

1. $u_{n+1} = 1 + n/u_n$
2. $u_n - 1 < \sqrt{n}$
3. $\sqrt{n} \leq u_n$

Then

$$u_{n+1} - 1 = \frac{n}{u_n} \leq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

and

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{n}{u_n} > \frac{n}{\sqrt{n+1}} \\ &> \frac{n}{\sqrt{n+1} + 1} = \frac{n(\sqrt{n+1} - 1)}{(\sqrt{n+1} - 1)(\sqrt{n+1} + 1)} \\ &= \frac{n(\sqrt{n+1} - 1)}{\sqrt{n+1}^2 - 1^2} = \sqrt{n+1} - 1. \end{aligned}$$

Combining the two inequalities gives $u_{n+1} - 1 < \sqrt{n+1} \leq u_{n+1}$. We conclude by induction on n that the inequalities 1 through 3 hold for all $n \geq 1$.

Problem 2007/1-B Given a non-degenerate tetrahedron (whose vertices do not all lie in the same plane), which conditions have to be satisfied in order that the altitudes intersect at one point?

Solution This problem was solved by Martinus van Hoorn, Ruud Jeurissen, A.J.Th. Maassen, H.F.H. Reuvers, Jaap Spies, and R.W. van den Waall. The solution below is based on that of Ruud Jeurissen.

In a tetrahedron ABCD, the altitudes from A and B are both orthogonal to CD. If they intersect, say at S, then CD is orthogonal to the plane ABS, hence to AB.

Conversely, suppose that CD is orthogonal to AB. Take T on CD such that AT is the altitude from A in $\triangle ACD$. Then CD is orthogonal to the plane through A, B and T, hence also to BT. The altitudes from A and B, respectively, in $\triangle ABT$ are then orthogonal to CD and to BT and AT, respectively, so must be the altitudes from A and B, respectively, in ABCD. The altitudes from A and B intersect in $\triangle ABT$.

Likewise, for the altitudes from A and C to intersect it is necessary and sufficient that AC and BD be perpendicular.

Next suppose that AB and CD are perpendicular to each other, and AC and BD as well. Then AD and BC are also perpendicular to each other (if for vectors a, b and c in a Euclidean space, the inner products $\langle b - a, c \rangle$ and $\langle c - a, b \rangle$ are 0, then $\langle b - c, a \rangle = 0$).

The altitude from C intersects both that from A and that from B. Both points of intersection are on the plane through A, B and T (as above), so they coincide with S (as above). The same holds for D instead of C.

We conclude that the altitudes of a tetrahedron intersect at one point if and only if there are two pairs of perpendicular altitudes.

Problem 2007/1-C Let e be a positive integer, and let d be an element of $\{0, 1, 2, \dots, 3e\}$. Show that the polynomial

$$P = \sum_{\substack{a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0 \\ a+b+c=d}} \frac{d!}{a!b!c!} \binom{e}{a} \binom{e}{b} \binom{e}{c} x^a y^b z^c$$

in the three variables x, y , and z is not divisible by $x + y + z$ unless $d = 1$.

Solution We did not receive any solutions to this problem. The solution below is the proposer's.

The proof is split into two parts. The case where $d \geq 2e$ is easy: P is symmetric in x, y, z , and hence equal to $Q(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ for a unique integral polynomial Q , where $\sigma_1 := x + y + z$, $\sigma_2 := xy + xz + yz$, and $\sigma_3 := xyz$. The fact that the lexicographically largest monomial in P with respect to $x > y > z$ is $x^e y^e z^{d-e}$ implies that Q contains the monomial $\sigma_3^{d-2e} \sigma_2^{3e-d}$, which is not divisible by σ_1 . For $d < 2e$ we use that P is the coefficient of $X^e Y^e Z^e$ in

$$\frac{1}{d!} (X + Y + Z)^d \left(x \frac{\partial}{\partial X} + y \frac{\partial}{\partial Y} + z \frac{\partial}{\partial Z} \right)^d X^e Y^e Z^e.$$

Modulo $(x + y + z)$ the derivation $(x\partial/\partial X + y\partial/\partial Y + z\partial/\partial Z)^d$ and the operation of multiplying with $X + Y + Z$ commute, so that the above expression is congruent to $\frac{1}{d!} (x\partial/\partial X + y\partial/\partial Y + z\partial/\partial Z)^d (X + Y + Z)^d X^e Y^e Z^e$ modulo $x + y + z$. The coefficient of $X^e Y^e Z^e$ in this expression equals

$$(-1)^d \sum_{a+b+c=d} \frac{d!}{a!b!c!} \binom{-e-1}{a} \binom{-e-1}{b} \binom{-e-1}{c}.$$

Writing $P = P_e$, we thus find the functional equation

$$(-1)^d P_{-e-1} \equiv P_e \pmod{x + y + z}.$$

Let $Q = Q(e)$ be the coefficient of $x^{d-1}y$ in $P_e(x, y, -x - y)$; this is a polynomial in $\mathbb{Z}[e]$ of degree $\leq d$. We are done if we can show that $Q(e)$ is non zero for all e with $2e > d$; we do this by constructing many other zeroes of Q . First, Q is not the zero polynomial; this small exercise uses $d \neq 1$ and we skip it here. Next take $e' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $2e' < d - 1$; we claim that $Q(e') = 0$. Indeed, the term

$$\frac{d!}{a!b!c!} \binom{e}{a} \binom{e}{b} \binom{e}{c} x^a y^b (-x - y)^c$$

in $P_e(x, y, -x - y)$ can only contribute to Q if $a + c \geq d - 1$. But then we find that at least one of a and c is $> e'$ so that one of the binomial coefficient vanishes. Finally, Q inherits the functional equation from P :

$$Q(-e - 1) = (-1)^d Q(e),$$

which means that the zeroes of Q lie symmetrically around $-1/2$. This shows that if $d = 2l$ is even, then the zeroes of Q are $-l, -l + 1, \dots, l - 1$, and if $d = 2l + 1$, then Q has (at most) one more zero, at $-1/2$. We conclude that $Q(e) \neq 0$ for $e > d/2$ and we are done.

Edition 2007/2

For Edition 2007/2 we received submissions from Kee-Wai Lau, Ronald Kortram, Hans Montanus, H.F.H. Reuvers, Lieke de Rooij, and Arne Smeets.

Problem 2007/2-A

1. Find the largest number c such that all natural numbers n satisfy $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor \geq \frac{c}{n}$.
2. For this c , find all natural numbers n such that $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor = \frac{c}{n}$.

Solution This problem was solved by Kee-Wai Lau, Hans Montanus and Arne Smeets. The solution below is based on that of Kee-Wai Lau.

We first show that $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor > \sqrt{2}/(4n)$ for all natural numbers n . Since $\sqrt{2}$ is

irrational, we have $n\sqrt{2} > \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$, $2n^2 > \lfloor n\sqrt{2} \rfloor^2$ and so $2n^2 - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor^2 \geq 1$. Hence

$$n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor = \frac{2n^2 - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor^2}{n\sqrt{2} + \lfloor n\sqrt{2} \rfloor} \geq \frac{1}{n\sqrt{2} + \lfloor n\sqrt{2} \rfloor} > \frac{1}{n\sqrt{2} + n\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4n}.$$

Next we show that the constant $\sqrt{2}/4$ cannot be replaced by any larger number. For natural numbers m , let

$$a_m = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2m-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2m-1}}{2\sqrt{2}}.$$

By using the binomial theorem we see that a_m and

$$a_m\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)^{2m-1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2m-1} - (\sqrt{2} - 1)^{2m-1}}{2}$$

are positive integers. Since $a_m\sqrt{2} - 1 < a_m\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)^{2m-1} < a_m\sqrt{2}$, we have $\lfloor a_m\sqrt{2} \rfloor = a_m\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)^{2m-1}$. Hence

$$2a_m^2 - \lfloor a_m\sqrt{2} \rfloor^2 = 2a_m^2 - (a_m\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)^{2m-1})^2 = 1$$

and

$$a_m (a_m\sqrt{2} - \lfloor a_m\sqrt{2} \rfloor) = \frac{a_m}{a_m\sqrt{2} + \lfloor a_m\sqrt{2} \rfloor} = \frac{a_m}{2\sqrt{2}a_m - (\sqrt{2} - 1)^{2m-1}},$$

which tends to $\sqrt{2}/4$ as m tends to infinity. This completes the solution.

Problem 2007/2-B Find polynomials $f(x)$ and $g(x)$ such that

$$\int_0^x \frac{6t dt}{\sqrt{t^4 + 4t^3 - 6t^2 + 4t + 1}} = \log(f(x) + g(x)\sqrt{x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1}).$$

Solution This problem was solved by Ronald Kortram, Lieke de Rooij and Arne Smeets. The solution below is based on that of Arne Smeets.

Let

$$p(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1.$$

Deriving the given equality with respect to x and rewriting the result gives

$$\frac{6x}{\sqrt{p(x)}} = \frac{2\sqrt{p(x)}f'(x) + 2p(x)g'(x) + p'(x)g(x)}{2\sqrt{p(x)}f(x) + 2p(x)g(x)},$$

or, equivalently,

$$(f'(x) - 6xg(x))2\sqrt{p(x)} + (2p(x)g'(x) + p'(x)g(x) - 12xf(x)) = 0.$$

From this we can easily deduce, for example using the fact that $\mathbf{R}[x]$ is a unique factorization domain, that

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6xg(x), \\ 2p(x)g'(x) &= 12xf(x) - p'(x)g(x). \end{aligned}$$

The first equation implies that $\deg f(x) - \deg g(x) = 2$. Let $n = \deg g(x)$ and let α and β be the coefficients of x^{n+2} and x^n in $f(x)$ and $g(x)$, respectively. The first equation implies that $(n+2)\alpha = 6\beta$, while the second implies that $2n\beta = 12\alpha - 4\beta$, or $(n+2)\beta = 6\alpha$. Consequently $n = 4$ and $\alpha = \beta$. Let

$$\begin{aligned} f(x) &= a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \\ g(x) &= b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

The two equations given above imply the following relations between the coefficients:

$$\begin{aligned}
 6a_6 &= 6b_4 \\
 5a_5 &= 6b_3 \\
 4a_4 &= 6b_2 \\
 3a_3 &= 6b_1 \\
 2a_2 &= 6b_0 \\
 a_1 &= 0 \\
 32b_4 + 6b_3 &= 12a_5 - 12b_4 - 4b_3 \\
 -48b_4 + 24b_3 + 4b_2 &= 12a_4 + 12b_4 - 12b_3 - 4b_2 \\
 32b_4 - 36b_3 + 16b_2 + 2b_1 &= 12a_3 - 4b_4 + 12b_3 - 12b_2 - 4b_1 \\
 8b_4 + 24b_3 - 24b_2 + 8b_1 &= 12a_2 - 4b_3 + 12b_2 - 12b_1 - 4b_0 \\
 6b_3 + 16b_2 - 12b_1 &= 12a_1 - 4b_2 + 12b_1 - 12b_0 \\
 4b_2 + 8b_1 &= 12a_0 - 4b_1 + 12b_0 \\
 2b_1 &= -4b_0.
 \end{aligned}$$

The solutions

$$(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, b_4, b_3, b_2, b_1, b_0)$$

of this system of linear equations are proportional to

$$(1, 12, 45, 44, -33, 0, 43, 1, 10, 30, 22, -11).$$

Finally, setting $x = 0$ leads to the condition $f(0) + g(0) = a_0 + b_0 = 1$, so that

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{32} (x^6 + 12x^5 + 45x^4 + 44x^3 - 33x^2 + 43), \\
 g(x) &= \frac{1}{32} (x^4 + 10x^3 + 30x^2 + 22x - 11).
 \end{aligned}$$

On Problem B of NAW 5/8 nr. 2 juni 2007, by Bas Edixhoven

The aim of this short note is to give some indication of the interesting and well-known theoretical background of this problem. Let $h(x)$ denote the polynomial $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$. The problem is then to find polynomials $f(x)$ and $g(x)$ such that:

$$\int 6xh(x)^{-1/2} dx = \log(f(x) + g(x)h(x)^{1/2}).$$

The left-hand side is an example of an *elliptic integral*: the function to be integrated is a rational function in x and the square root of a polynomial of degree 3 or 4 in x . Only very special elliptic integrals can be expressed in terms of elementary functions as is the case here (the interested reader is advised to consult the Wikipedia page on this subject). So, what makes this possible in the present case? The answer will be given in terms of algebraic geometry, and, in particular, of a Riemann surface (the possibly intimidated reader is kindly asked *not* to stop reading at this point).

We let E_0 be the solution set in $\mathbf{C}^2$ of the equation $y^2 = h(x)$. The projection from E_0 to $\mathbf{C}$ that sends (a, b) to a is a two-to-one map, except at the a 's with $h(a) = 0$. Using Euclid's algorithm one finds that $h(x)$ and $h'(x)$ have no common zeros. This implies that E_0 is non singular: the gradient $(-h'(x), 2y)$ of the function $y^2 - h(x)$ has no common zero with $y^2 - h(x)$ itself. A complex analytic version of the implicit function theorem then shows that every point P of E_0 has an open neighborhood U that is analytically isomorphic to a small disk D around 0 in $\mathbf{C}$; any function $z: U \rightarrow D$ that gives such an isomorphism is then called a *coordinate* at P .

In the theory of analytic functions, one often completes (or *compactifies*) $\mathbf{C}$ (with coordinate x , say) to the so-called Riemann sphere $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ by adding one point, called ∞ . In fact, one takes another copy of $\mathbf{C}$ with coordinate u , say, and glues the two copies along their subsets $\mathbf{C} - \{0\}$ by identifying a in the x -copy with a^{-1} in the u -copy.

We want to complete E_0 in a similar way. In $(\mathbf{C} - \{0\}) \times \mathbf{C}$, E_0 is given by the equation

$$y^2 = h(x) = h(u^{-1}),$$

and hence also by $(u^2 y)^2 = u^4 h(u^{-1})$.

We let $k(u)$ be the polynomial $u^4h(u^{-1})$ (this happens to be $h(u)$ but that is just a coincidence). We let E_∞ be the solution set in $\mathbb{C}^2$ (with coordinates u and v) of the equation $v^2 = k(u)$. The projection from E_∞ to $\mathbb{C}$ that sends (c, d) to c is two-to-one except at the four zeros of $k(u)$, and E_∞ is non-singular as well. We glue E_0 and E_∞ along their subsets where the first coordinate is non-zero by identifying (a, b) in E_0 with (a^{-1}, ba^{-2}) in E_∞ . The result is a compact Riemann surface that we call E , with a map to $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

As an oriented surface, it can be seen that E is a torus. Such Riemann surfaces are called elliptic curves (the interested reader can again consult Wikipedia). Just as on the Riemann sphere, meromorphic functions are rational functions (quotients of functions given by polynomials in x and y (or in u and v)).



The three pictures show, topologically, how the Riemann surface E , a torus, is mapped to the Riemann sphere. The map is the quotient for the rotation over 180 degrees about the axis that is shown in the first picture. As this rotation interchanges the 'front half' and the 'back half' of E , the quotient is obtained by identifying the boundary points in the way shown in the second picture. This has the effect of closing the two ends of the cylinder, giving a (deformed) sphere. The third picture shows this sphere, with the images of the two boundary circles drawn a bit fatter, on the equator. The four endpoints of these two segments, drawn still fatter, are the four ramification points.

One also has the notion of meromorphic differential form. Such a form ω gives for each local coordinate $z: U \rightarrow D \subset \mathbb{C}$ a differential form Fdz , with F a meromorphic function on U . For example, any meromorphic function F on E gives the form dF which in a local coordinate is just $F'dz$, where F' is the derivative of F with respect to z . In terms of power series, or, in fact, Laurent series, if $F = \sum_n F_n z^n$ then $F' = \sum_n n F_n z^{n-1}$; here the F_n are in $\mathbb{C}$, zero for n sufficiently negative.

Problem B can now be stated as follows: find a meromorphic function F on E such that $(dF)/F = (6xdx)/y$.

Let P be in E , and z a local coordinate at P . Then we can write, uniquely, in a neighborhood of P :

$$(6xdx)/y = z^{n_P} G dz = z^{n_P+1} G(dz)/z,$$

with $G = \sum_{n \geq 0} G_n z^n$ and $G_0 \neq 0$. The integer n_P is called the *order* of $(6xdx)/y$ at P , and the complex number G_{-1-n_P} is called the *residue* of $(6xdx)/y$ at P (if $-1-n_P$ is negative, the residue is zero).

Suppose that $(6xdx)/y = (dF)/F$, with F a meromorphic function on E . For P in E , and z a local coordinate at P , we can write, uniquely, in a neighborhood of P :

$$F = z^{m_P} H, \quad \text{with } H = \sum_{n \geq 0} H_n z^n \text{ and } H_0 \neq 0,$$

and hence

$$(dF)/F = (dz^{m_P})/(z^{m_P}) + (dH)/H = m_P(dz)/z + (dH)/H.$$

As $H_0 \neq 0$, the order of $(dH)/H$ at P is ≥ 0 , and so it follows that the order of $(dF)/F$ at P is -1 precisely at the P with $m_P \neq 0$, with residue m_P .

It is a standard exercise to find all P where n_P is negative. One finds that this happens at the points P_+ and P_- in E_∞ with $u(P_\pm) = 0$ and $v(P_\pm) = \pm 1$, and that $n_{P_\pm} = -1$. Indeed, as a coordinate at these points one can take the function u , and one simply computes:

$$(6xdx)/y = 6u^{-1}d(u^{-1})/(vu^{-2}) = (-6/v)(du)/u.$$

This means that F must have order 6 at P_- , order -6 at P_+ , and no poles or zeros outside $\{P_+, P_-\}$. The theory of elliptic curves (see Wikipedia for more information) shows that such a function F , if it exists, is unique up to a multiplicative constant, and that the existence is equivalent to the difference $P_+ - P_-$, in the so-called *group law* of E , being of finite order, dividing 6. As this group is isomorphic to a product of two circles, we conclude that this property of $P_+ - P_-$ is very special indeed.

Let us end by mentioning that the explanation above does not make the calculations found in the solution of Problem B easier, but that it does help in understanding what is happening. In particular, such a calculation becomes more than just a manipulation of formulas; one can understand what one is doing. This year, the Dutch national master-math program (see www.mastermath.nl) contains two courses on elliptic curves, one in the Fall of 2007 (late news, unfortunately) and one in the Spring of 2008.

Problem 2007/2-C Consider the following game with persons A and B. Player A receives a random number uniformly distributed between 0 and 1. Player B receives two random numbers uniformly distributed between 0 and 1, and chooses the highest one. Each player can then choose to discard his number and receive a new random number between 0 and 1, in order to get a higher number. This choice is made without knowing the other player's number or whether the other player chose to replace his number. The player with the highest number wins. What strategy should the players follow to ensure they will win the game? What is the probability that person B wins the game? See also domino.research.ibm.com/Comm/wwwr.ponder.nsf/challenges/February2007.html

Solution This problem was solved by Hans Montanus, H.F.H. Reuvers and Lieke de Rooij. The solution below is based on that of Hans Montanus.

Let g be the boundary under which player A chooses to discard his number. We have the following stochastic variables for player A: X is the first number, Y is the new number, if it exists, and V is the final choice. That is, $V = X$ if $X \geq g$ and $V = Y$ if $X < g$.

For $0 \leq v < g$, the distribution function of V is

$$\begin{aligned} f(v) &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{P(v < V < v + \Delta v)}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{P(X < g) \cdot P(v < Y < v + \Delta v)}{\Delta v} \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{g \cdot \Delta v}{\Delta v} = g. \end{aligned}$$

For $g < v \leq 1$, it is

$$\begin{aligned} f(v) &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{P(v < V < v + \Delta v)}{\Delta v} \\ &= \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{P(v < X < v + \Delta v) + P(X < g) \cdot P(v < Y < v + \Delta v)}{\Delta v} = 1 + g. \end{aligned}$$

Let h be the boundary under which player B chooses to discard his number. For player B we use the following stochastic variables: X is the first number, Y is the second number, Z is the new number, if it exists, and W is the final choice.

For $0 \leq w < h$, the distribution function of W is

$$\begin{aligned} f(w) &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{P(w < W < w + \Delta w)}{\Delta w} \\ &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{P(X < h) \cdot P(Y < h) \cdot P(w < Z < w + \Delta w)}{\Delta w} = h^2. \end{aligned}$$

For $h < w \leq 1$, it is

$$\begin{aligned} f(w) &= \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \left\{ \frac{P(X < w) \cdot P(w < Y < w + \Delta w)}{\Delta w} + \frac{P(Y < w) \cdot P(w < X < w + \Delta w)}{\Delta w} \right. \\ &\quad \left. + \frac{P(X < h) \cdot P(Y < h) \cdot P(w < Z < w + \Delta w)}{\Delta w} \right\} = 2w + h^2. \end{aligned}$$

If $h \geq g$, the probability $P_1(B)$ that player B wins is

$$\begin{aligned} P_1(B) &= \int_0^1 P(V < w) f(w) dw \\ &= \int_0^g P(V < w) h^2 dw + \int_g^h P(V < w) h^2 dw + \int_h^1 P(V < w) (h^2 + 2w) dw. \end{aligned}$$

Substituting

$$P(V < w|w < g) = \int_0^w f(v)dv = \int_0^w gdv = gw$$

$$\text{and } P(V < w|w > g) = \int_0^g gdv + \int_g^w (1+g)dv = w - g + gw,$$

gives

$$\begin{aligned} P_1(B) &= \int_0^g gwh^2dw + \int_g^h (w - g + gw)h^2dw + \int_h^1 (w - g + gw)(h^2 + 2w)dw \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}g + \frac{1}{2}h^2 - \frac{2}{3}h^3 + \frac{1}{2}gh^2 - \frac{2}{3}gh^3 + \frac{1}{2}g^2h^2. \end{aligned}$$

If $h \leq g$, the probability $P_2(B)$ that player B wins is

$$\begin{aligned} P_2(B) &= \int_0^1 P(V < w)f(w)dw \\ &= \int_0^h P(V < w)h^2dw + \int_h^g P(V < w)(h^2 + 2w)dw + \int_g^1 P(V < w)(h^2 + 2w)dw. \end{aligned}$$

Once more substituting

$$P(V < w|w < g) = gw \text{ and } P(V < w|w > g) = w - g + gw,$$

we find

$$\begin{aligned} P_2(B) &= \int_0^h gwh^2dw + \int_h^g gw(h^2 + 2w)dw + \int_g^1 (w - g + gw)(h^2 + 2w)dw \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}g + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{2}gh^2 - \frac{2}{3}gh^3 + \frac{1}{2}g^2h^2. \end{aligned}$$

The probability $P(B)$ that player B wins satisfies $P(B) = P_1(B)$ if $h \geq g$ and $P(B) = P_2(B)$ if $h \leq g$. For any value of g ($0 \leq g \leq 1$), $P(B)$ attains a maximum. If $h \geq g$, the maximum lies on the curve $h = (1 + g + g^2)/(2 + 2g)$ (using $\partial P_1(B)/\partial h = 0$); if $h \leq g$, it lies on the curve $h = (1 - g + g^2)/(2g)$ (using $\partial P_2(B)/\partial h = 0$). These two curves meet at the point $(g, h) = ((-1 + \sqrt{5})/2, (-1 + \sqrt{5})/2)$. At this intersection point, $P_1(B)$ has a local minimum $(4 - \sqrt{5})/3$ on the curve $h = (1 + g + g^2)/(2 + 2g)$ ($0 < g \leq (-1 + \sqrt{5})/2$); $P_2(B)$ has an absolute minimum on the curve $h = (1 - g + g^2)/(2g)$ ($((-1 + \sqrt{5})/2) \leq g \leq 1$, at a saddle point. This saddle point satisfies $\partial P_2(B)/\partial g = 0$, that is, $g^2 + gh^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}h^2 - \frac{2}{3}h^3 = 0$. Substituting $h = (1 - g + g^2)/(2g)$ leads to the equation

$$4g^6 + 15g^5 + 12g^4 - 15g^3 + 3g - 2 = 0.$$

The polynomial $4g^6 + 15g^5 + 12g^4 - 15g^3 + 3g - 2$ appears to be irreducible. A numerical approximation of the roots gives one positive real root, namely $g = 0,6488849\dots$, with corresponding value of h equal to $0,5949951\dots$.

The strategy that the players should follow is this: player A asks for a new number if his first is less than $0,6488849\dots$ and player B asks for a new number if his first two are both less than $0,5949951\dots$. Substituting these values in the expression for $P_2(B)$ we find that the probability that player B wins is $0,587003\dots$.

