

Inhoud | Contents

- 154 Colofon
- 155 Redactioneel *Jaap Top*
- 156 Agenda
- 158 Nieuws

Oraties | Lectures

- 164 Nieuwe kansen *Michel Mandjes*

Onderzoek | Research

- 171 Are mutations spontaneous or directed? *Ellen Baake*
- 175 Abel prize winner 2006; Lennart Carleson: achievements until now *Hans Duistermaat*
- 195 Het HSA-vierkant: de hype en zijn gevolgen *Arno van den Essen*
- 218 Op zoek naar luchtdicht verpakkingsfolie *Bennie Mols*

Geschiedenis | History

- 178 Ce périodique foncièrement international *Dirk van Dalen, Volker R. Remmert*

Onderwijs | Education

- 201 Computergebruik en demathematisering *Henk Broer*
- 207 Dynamisch modelleren: aanzet tot een curriculum *Elwin Savelsbergh*
- 214 De opgaven van de LIMO *Esther Bod*
- 222 2011: IMO in Nederland *Wim Berkelmans*

Samenleving | Society

- 220 Lowlandsfestival: Droste-effecten en multiversa *Yves van Gennip*

Boeken | Books

- 192 Leonhard Euler: ein Mann, mit dem man rechnen kann *Jan Draisma*
- 198 Als zuurstof *Jan van de Craats*
- 225 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 163 De favoriet van Terence Tao *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
- 190 Sehr Geehrter Herr Dr. *Remke Kloosterman*
- 194 Brieven
- 232 Problemen

Meten is ...

Vrijdagmiddag 13 juli, net terug in eigen land na een week vakantie, nadat we vanaf de A73 op de A50 waren gekomen, begon het. Een bord meldde dat de weg zeker tot Arnhem filevrij was. Nog geen minuut later voorkwam hard remmen een ongewenst contact met een voorganger. Het filerijden begon, en eindigde pas toen we ergens op de A12 waren. Welke meting zou tot de evident foute uitspraak op dat bord hebben geleid? Het gebeuren bracht mijn gedachten bij het Nieuw Archief: in zijn verslag over het Nederlands Mathematisch Congres van dit jaar beschrijft Wieb Bosma ook al hoe hij in het staartje van een file terecht kwam. En via deze gedachtensprong wist ik dat het aanstaande nummer nog een redactioneel van me tegood had. In elk geval had ik nu een idee voor een onderwerp.

Metten is duidelijk 'in'. Impactfactoren van wetenschappelijke tijdschriften, citaties van wetenschappers, ranglijsten van instituten, rendementen van opleidingen, trends in aantallen studenten, het bestaat allemaal. Beleidsmakers en bestuurders blijken heel vaardig conclusies te extraheren uit deze overvloed aan data. Leest u de ingezonden brief van Fred Steutel in dit nummer: de 'Hirschindex' is slechts een van de getallen die door bibliometrische instituten over ons worden bijgehouden. Het is een getal dat een soort indicatie zou moeten geven, hoe groot de impressie is die het gepubliceerde werk van een wetenschapper op zijn collega's achterlaat. Opmerkelijk is dat iedereen op quadsrch.csd.auth.gr/index.php?lan=1&s=2 deze Hirschindex van zichzelf en van anderen kan vinden.

Deze week heb ik mezelf gemeten. Dat gebeurde tijdens het winkelen met ons zoontje. Een favoriete zaak voor hem is Nedgame, gespecialiseerd in nieuwe en tweedehands spellen voor alle soorten game consoles. Een bezoek met hem aan de Groningse vestiging ervan kost gewoonlijk vrij veel tijd. Deze keer heb ik die gebruikt om een demonstratie-exemplaar van een *Nintendo DS* uit te proberen. Het programma dat daarop draaide, heette *brain trainer*, dus dit leek me een verantwoord gebruik van mijn wachttijd. Minutenlang moest ik melden hoeveel gele of pulserende of over het display glijdende of juist weer stilstaande cijfers er op een scherm te vinden waren. Na afloop meldde het apparaat dat ik de score had van een 40-er. Ik kreeg het advies, dit te vergelijken met mijn werkelijke leeftijd en afhankelijk van het resultaat te blijven oefenen, dan wel juist meer te gaan oefenen. Mooi, nietwaar? Geen enkel bibliometrisch instituut heeft me ooit op basis van een door hen uitgevoerde meting een advies gegeven.

Eerlijk gezegd viel mijn *brain trainer* score me tegen. Ik dacht redelijk bedreven te zijn in het in een oogopslag herkennen van kleine aantallen. Als student, na gelezen te hebben over Ramanujans fabelachtig vermogen op dit gebied, had ik zelfs wel eens wat geoefend. Bovendien betrof het hier cijfers, iets waar ik als wiskundige toch vaak mee in aanraking kom. Desondanks komt de

score precies overeen met mijn werkelijke leeftijd?! Enigszins ontgoocheld kwam ik dan ook bij het tweede doel van onze winkelsessie: Scapino, waar de zomeruitverkoop aanleiding was voor kortingen van maar liefst 50 en 70%. Ik heb me dan ook niet gewaagd aan de meetapparaten in deze volgende winkel, waarmee niet de grootte van een wetenschappelijke 'footprint', maar die van een gangbaarder soort voetmaat bepaald kan worden. Het duurde maar even voor we ons in de rij bij de kassa aansloten. Zoontje was heel tevreden vanwege een t-shirt met een fraaie spelfout erop: 'binairy' stond er boven een afbeelding van een beeldscherm. Mijn tevredenheid betrof naast de snelheid waarmee tot deze aankoop besloten was, ook de paarse sticker op de shirt die een korting van 70% in het vooruitzicht stelde.

Het oriëntaalse gezin voor ons in de rij was niet tevreden over het te betalen bedrag. Na enige discussie haalde het meisje achter de kassa er haar baas bij. Deze pakte de kassabon, en begon zijn uitleg: "Kijk, u heeft wel degelijk 70% korting gekregen. Hier, dit is het oorspronkelijke bedrag. Vorige maand was het artikel al afgeprijsd, en hier op uw bon ziet u dat er al 50% van de prijs wordt afgetrokken. Een week geleden verhoogde Scapino het kortingspercentage tot 70%, en kijk: hier trekken we de resterende 20% korting er af." "Maar", verzuchtte de klant, "Dit jasje kostte eerst 19,95 dus met 70% korting moet ik ongeveer 6 euro betalen." Quasi-geduldig vertelde de baas, dat die middag al meer klanten de rekenkracht van hun kassa-apparaat in twijfel hadden getrokken, maar zoals hij had uitgelegd, het was allemaal prima in orde. Met iets tussen berusting en verwarring in werd betaald, en baas en klant verwijderden zich. Ik wist: ditzelfde zou nu ons overkomen. Voor het meisje het t-shirt van me overnam, legde ik haar daarom uit: "Jullie halen die 20% resterende korting alleen af van de halve prijs, dat klopt niet, je zou eigenlijk 40% extra korting moeten rekenen." Ze keek me gepijnigd aan, kennelijk weer zo'n zeurende klant. "We geven 70, en geen 90 procent korting, meneer." Wat moest ik? M'n uitleg bleek onvoldoende, dus als docent faalde ik hier. Kort daarvoor was m'n Nintendo score ook al niet geweldig. En mijn Hirschindex zou hier vast ook geen krachtig extra argument opleveren. Ik heb dus maar betaald.

Prachtig allemaal, dat metten. Als test heb ik op internet de respectievelijke Hirschindices van een aantal Lenstra broers opgezocht. Conclusie: dit getal zegt minder over 'wetenschappelijke footprint' dan wel wordt gesuggereerd. Ik preferer de gewone schoenmaat. Van de meeste mensen is deze bovendien niet op het web te vinden. 

Jaap Top
hoofredacteur

Instituut voor Wiskunde en Informatica, Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
top@math.rug.nl

Agenda

Upcoming Events

september 2007

7 september

□ CWI Lectures in Mathematics and Computer Science 2007

Lezingen op het gebied van de theoretische informatica, ter ere van Paul Viányi

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl

7 – 12 september

□ Mathematics Education In A Global Community

Negende internationale conferentie van *The Mathematics Education into the 21st Century Project*

plaats University of North Carolina, Charlotte, VS

info math.unipa.it/~grim/convegni.htm

10 – 13 september

□ Sandpile models and related fields

Workshop over onderzoek naar zandhoop modellen in de kansrekening, natuurkunde, combinatoriek en algebra

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

14 september

□ Nederlandse Wiskunde Olympiade

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De prijsuitreiking vindt plaats op 9 november te Eindhoven

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info olympiads.win.tue.nl/nwo

14 september

□ Dé Start

Herhaling van de studiedag van 13 juni over de invoering van wiskunde D in havo en vwo

plaats Jaarbeurs Utrecht

info www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/programma_2.html

17 – 21 september

□ Galois Theory and Explicit Methods

Eerste jaarlijkse bijeenkomst van het Marie Curie Research raining Network Galois Theory and Explicit Methods

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

22 september

□ Reünie Internationale Wiskunde Olympiade

Reünie voor Nederlandse oud-deelnemers aan de Internationale Wiskunde Olympiade. Deze vindt alleen plaats bij voldoende belangstelling.

plaats Amsterdam Centraal Station

info www.wiskundeolympiade.nl

24 – 26 september

□ Algorithms in Complex Systems

Workshop over algoritmes in statistische analyse met restricties, Bayesiaanse procedures, beeldanalyse en *machine learning*

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

27 – 28 september

□ Spatial fluctuations in cell biology

Workshop over mesoscopische modellen voor fluctuaties en ruimtelijk detail in celbiologie

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl

28 september

□ Ph.D. Day 2007

Dag voor wiskunde-aio's met informatiemarkt en voordrachten van wetenschappers en gepromoveerde wiskundigen werkzaam in het bedrijfsleven, met als thema veiligheid en bescherming

plaats Utrecht

info www.math.vu.nl/~mbijvank/phdday

oktober 2007

3 – 5 oktober

□ Thirty-second Woudschoten Conference

Conferentie voor numerici met als thema's gekoppelde heterogene problemen en numerieke optimalisatie technieken

plaats Woudschoten Conference Centre, Zeist

info www.cwi.nl/projects/wnw/conf2007

3 oktober – 14 november

□ HOVO cursus wiskunde

Cursus van zeven bijeenkomsten door Frans Oort met de titel *Van Fermat tot Wiles, fascinerende wiskunde* voor een breed publiek. Leidraad *Fermat's Last Theorem* van Simon Singh

plaats Universiteit Utrecht

info www.hovoutrecht.nl/cursus.php?id=200721

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: agenda@math.leidenuniv.nl

5 oktober

□ BWI-middag

Informatiemiddag van de opleiding *Bedrijfswiskunde en Informatica* aan de Vrije Universiteit voor decanen en docenten wiskunde in de bovenbouw van het vwo

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info www.few.vu.nl/stagebureau/bwimiddag

8 – 10 oktober

□ Young European Statisticians workshop

Workshop over *shape restricted inference* voor jonge statistici, met lezingen door onder andere Lutz Dümbgen, Günther Walther en Jon Wellner

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

8 – 12 oktober

□ Cryptography

Vijfdaagse Eidma en Diamant minicursus over cryptografie door Ueli Maurer en Renato Renner

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/wsk/eidma/courses/minicourses/maurerrenner/maurerrenner.html

15 – 19 oktober

□ Hamiltonian Lattice Dynamical Systems

Workshop voor wiskundigen, fysici en numerici met een interesse in Hamiltoniaanse dynamische systemen op roosters

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

17 – 19 oktober

□ Queueing theory without limits: transient and asymptotic analysis

Workshop met lezingen van onder andere Søren Asmussen, Sir John Kingman en William Massey

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

17 – 24 oktober

□ 22ste WetenWeek

De 22ste editie van de WetenWeek zal in het teken staan van de klimaatverandering. Titel: Het Topje van de Ijsberg

plaats Door heel Nederland

info www.wetenweek.nl

22 – 27 oktober

□ Complexity in Economics and Finance

Workshop voor onderzoekers werkzaam in het onderzoek van complexiteit

plaats Lorentz Center, Leiden

info lc.leidenuniv.nl

november – december 2007

1 november

□ Panama Opleidersdag

Dag Bestemd voor opleiders van reken- en wiskundeonderwijs. Presentatie van het door pabo-docenten geschreven boek *Opleiden in geuren en kleuren*

plaats Universiteit Utrecht

info www.fi.uu.nl

10 november

□ Studiedag/jaarvergadering NVvW

De jaarlijkse studiedag van de *Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren*

plaats Anna van Rijncollege, locatie Albatros, Nieuwegein

info www.nvww.nl

12 – 16 november

□ Two decades of probabilistic verification: reflections and perspectives

Workshop over het controleren van modellen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lorentzcenter.nl

24 november

□ Ars et Mathesis-dag 2007

Jaarlijkse bijeenkomst van de Stichting *Ars et Mathesis* over het grensgebied tussen kunst en wiskunde. Georganiseerd in samenwerking met ArtEZ, Academie voor beeldende kunsten Arnhem

plaats Arnhem

info www.arsetmathesis.nl

29 – 30 november

□ DIAMANT/EIDMA Symposium

Symposium met sprekers Aner Shalev, Rob de Jeu, Marius van der Put en Gert-Martin Greuel

plaats Conferentiehotel Kapellerput, Heeze

info www.win.tue.nl/math/eidma

7 december

□ Rekenen-wiskunde en de toekomst

Lustrumsymposium van de *Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken Wiskunde Onderwijs*

info www.platformvwo.nl/vvvo/verenigingen/nvoro.html

2008

11 januari 2008

□ Dertiende rekenconferentie

Landelijke rekenconferentie

plaats De Reehorst, Ede

info www.seminarium.nl

12 januari 2008

□ Wintersymposium KWG

Symposium met als thema: kopstukken uit de vaderlandse geschiedenis. Het exacte programma en de wijze van inschrijving volgen in het najaar

plaats Academiegebouw Universiteit Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

17 – 19 januari 2008

□ 25ste Panama Conferentie

Conferentie over de toekomst van het rekenonderwijs

plaats Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

25 januari 2008

□ Nederlandse Wiskunde Olympiade

Eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. De resultaten worden medio maart bekend gemaakt. De uitreiking van de scholenprijs vindt plaats in maart of april op de winnende school

plaats Participerende scholen

info olympiads.win.tue.nl/nwo/1er-tijdlijn.html

28 januari – 1 februari 2008

□ Study Group Mathematics with Industry

62ste Europese studiegroep Wiskunde en Industrie waarin wiskundigen en mensen uit de industrie een week lang samenwerken om verschillende industriële problemen op te lossen

plaats Universiteit Twente

info wwwhome.math.utwente.nl/~swizoo8

24 – 28 februari 2008

□ Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students

Internationale conferentie in Israël met thema creativiteit en begaafdheid

info cmeg-5.edu.haifa.ac.il

Nieuws

| News

Puzzels, prijzen en Sint Petersburg

Puzzels en wiskunde, een aantrekkelijke combinatie, zo blijkt telkens weer. Sla er alleen maar al deze nieuwsrubriek op na. Ook voor het winnen van nationale en internationale profielwerkstukprijzen blijkt deze combinatie bij uitstek geschikt.

De *Van Melsen Prijs* van de Radboud Universiteit Nijmegen is de grootste scholierenwedstrijd van het land. Scholieren uit 5 en 6 vwo kunnen met profielwerkstukken op het gebied van biologie, scheikunde, natuurkunde, wiskunde en informatica meedingen naar deze prijs. Dit jaar was er een recordaantal van 71 aanvragen, waarvan 14 op het gebied van de wiskunde. De gedeelde eerste prijs ging naar twee groepjes scholieren die wiskunde op puzzels hebben losgelaten.

Een van de winnende groepen was al eerder in het nieuws. Petra Alkema, Jesse Hoekstra en Willem Schilte maakten het magische HSA-vierkant, waar ze het nationale nieuws mee haalden. Hun profielwerkstuk over magische vierkanten, leverde ze ook de gedeelde eerste plaats bij de *Van Melsen Prijs* op.

De andere winnaars, Bruno van Albeda, Valentijn Karemaker en Brigitte Sprenger, zochten hun heil bij de Rubiks kubus en schuifpuzzels, waar ook veel wiskunde achter verscholen zit.

De derde prijs ging naar Noud Brasjen en Sjoerd Huininga die de *Navioscan* ontwikkelden, een systeem dat met behulp van sonar en GPS de bodem onder water in kaart kan brengen.

De prijswinnaars mochten naar de internationale profielwerkstukwedstrijd *International Conference for Young Scientists* in Sint Petersburg, waar ze met 118 andere teams uit Wit-Rusland, Kroatië, Tjechië, Georgië, Hongarije, Litouwen, Macedonië, Polen, Rusland, Oekraïne, Duitsland, Indonesië en Brazilië streden om de prijzen.

Beide Nederlandse wiskundige teams moesten opnieuw de prijs delen: zij werden gedeeld tweede in de categorie *mathematics*. Brasjen en Huininga werden derde bij *applied physics*. Bron: www.ru.nl



foto: Dick van Aalst

Van Melsen Prijswinnaars Petra Alkema, Jesse Hoekstra, Willem Schilte en Bruno van Albeda, Valentijn Karemaker, Brigitte Sprenger

Lang Leve Lattice Basis Reduction

LLL+25. Onder deze noemer werd de vijfentwintigste verjaardag van het *Lenstra-Lenstra-Lovász lattice basis reduction* algoritme gevierd in het Franse Caen.

In 1982 schreven Arjen Lenstra, Henk Lenstra en László Lovász het artikel 'Factoring polynomials with rational coefficients' in: *Mathematische Annalen* 261, 515 – 534) waarin zij een algoritme introduceerden om in polynomiale tijd een niet-triviaal polynoom met rationale coëfficiënten te ontbinden in irreducibele polynomen met rationale coëfficiënten.

Tijdens de driedaagse conferentie op de grens van juni en juli kwamen makers en gebruikers van het algoritme bij elkaar om een overzicht te geven van het vakgebied van de algoritmische meetkunde van getallen. Bron: lll25.info.unicaen.fr

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijge activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

Wiskunde heeft veel noten op haar zang

Sinds Pythagorese tijden zijn wiskunde en muziek onlosmakelijk met elkaar verbonden. Mike McCready en zijn bedrijf *Platinum Blue* proberen deze band te ontrafelen met behulp van software die ze *Music X-ray* noemen.

Dit programma analyseert een dertigtal aspecten van een muziekstuk, zoals bijvoorbeeld ritme en melodie, en kent daar waardes aan toe. Aan de hand van deze waarden krijgt ieder muzikaal nummer zijn eigen plek in *Platinum Blue's music universe*. Nummers die dicht bij elkaar liggen in dit muziekuniversum, hebben een vergelijkbare onderliggende wiskundige structuur. Deze overeenkomst is niet altijd direct hoorbaar.

Het blijkt zo te zijn dat een groot gedeelte van de hedendaagse hits clusteren in dit universum. Tachtig tot vijftientachtig procent van de hits ligt in een van een zestigtal clusters. Een van de toepassingen van deze software is dan ook om een inschatting te geven welke liedjes de meeste kans hebben om hits te worden. Platenmaatschappijen die moeten beslissen welke nummers van een album ze als single uit gaan geven, zijn zeer geïnteresseerd in deze informatie.

Naast deze vorm van *hit prediction*, is het ook mogelijk om de *Music X-ray* te gebruiken voor persoonlijke aanbevelingen. Als iemand een bepaald muziekstuk leuk vindt, is er een grote kans dat hij of zij de nummers in de omgeving van dat stuk ook kan waarderen. Er is ook nog de mogelijkheid om de zo gevonden resultaten door een sociale filter heen te halen. Een liefhebber van Bach zit misschien niet te wachten op de aanbeveling van de Rolling Stones, hoewel liedjes van beide artiesten dicht bij elkaar zouden kunnen liggen in het muziekuniversum. Dit soort aanbevelingen zouden echter ook kunnen leiden tot een verbreding van de muziekinteresse.

Overigens is het niet zo dat een plaatsje in een van de zestig hitclusters een garantie voor een nummer is om door iedereen gewaardeerd te worden. Voor de gemiddelde luisteraar heeft zijn persoonlijke voorkeur een overlap met ongeveer vijf hitclusters.

Op de hieronder vermelde website van *The New Yorker* is een video-opname van een interview met McCready te vinden, afkomstig van de 2007 *New Yorker Conference* getiteld 2012: *Stories from the Near Future*.
Bron: www.newyorker.com/online/video/conference/2007/mccready



Mike McCready licht muziek door met zijn *Music X-ray*.

Nieuwe draai aan Rubiks kubus

Sudoku's en magische vierkanten zijn geliefde objecten in de huidige recreatieve wiskunde, maar nog niet zo heel lang geleden hadden puzzelaars minstens drie dimensies nodig om uit hun luie stoel te komen. In de jaren tachtig was de Rubiks kubus een graag geziene gast in menige huiskamer. Het doel van deze puzzel is om de verschillende vlakjes zo te draaien, dat elke zijde van de kubus uit vakjes van slechts een kleur bestaat.

Behalve de vorm van zijn zijden, heeft Rubiks kubus nog iets anders gemeen met magische vierkanten en Sudoku's: hij trekt wiskundigen en informatici aan. De permutaties van de gekleurde vlakjes op de kubus leiden op natuurlijke manier naar een groeptheoretische beschrijving van de kubus. De sport wordt nu om te ontdekken wat de boven- en ondergrens zijn voor het aantal stappen waarin de kubus opgelost kan worden. De best bekende ondergrens op het moment is twintig. Dat wil zeggen dat er toestanden bestaan van waaruit er minstens twintig stappen nodig zijn om tot de oplossing te komen. Tot voor kort was de best bekende bovengrens zevenentwintig, wat wil zeggen dat vanuit elke toestand de oplossing te bereiken is in hoogstens zevenentwintig draaiingen.

Nu hebben Gene Cooperman en Dan Kunkle van *Northeastern University*, Boston, de bovengrens omlaag gehaald tot zesentwintig. Zij deden dit door een efficiënte oplossingsmethode te implementeren in software. Veruit de meeste begintoestanden waren met deze methode binnen zesentwintig stappen op te lossen. De overgebleven begintoestanden waren zo weinig in aantal dat deze compleet doorgerekend konden worden en op deze wijze oplossingsmethoden van hoogstens zesentwintig draaiingen gevonden werden.

Totdat de boven- en ondergrens aan elkaar gelijk zijn, blijft er ook voor de wiskundigen nog wat te puzzelen.
Bron: www.kennislink.nl

Wiskunst

Dat wiskunde vaak de nodige passie en creativiteit met zich meebrengt, is een wijsheid die voor de meeste wiskundigen even voor de hand liggend is als de oplossing van een lineaire vergelijking, maar voor de niet-wiskundigen voor wie elke vergelijking spaak loopt, komt dit inzicht vaak als een grote verrassing. Zo ook voor Simon McBurney, de acteur uit Cambridge, wiens naam eerder dit jaar als schrijver en producent op de titelrol van *Mr. Bean's Holiday* prijkte en die nu op de theaterplanken staat met *A Disappearing Number*, een toneelstuk over de relatie tussen wiskundigen Godfrey Harold Hardy en Srinivasa Ramanujan.

Het verhaal van de Indiase wiskundige, die zonder vergaande wiskunde-opleiding vele opmerkelijke bijdragen aan wiskundige gebieden als de analyse en getaltheorie leverde, leent zich bij uitstek voor dramatisering. Van zijn 'ontdekking' door de wiskundige wereld, zijn samenwerking met culturele tegenpool Hardy, tot zijn voortijdige dood op zevenendertigjarige leeftijd door tuberculose, zijn levensverhaal heeft al velen aangesproken.

Wie de uitvoering van theatergroep *Complicite* wil bezoeken, kan nog tot en met 6 oktober terecht in het *Barbican* theater in Londen. Wie voor een gedramatiseerde versie van Ramanujans levensverhaal niet naar Londen wil gaan, kan ook wachten op de twee films over dit Indiase genie die in de pijpleiding zitten. Een zal er geregisseerd worden door Engelsman Stephen Fry en Indiër Dev Benegal, de andere, gebaseerd op het boek *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan* van Robert Kanigel, wordt geproduceerd door Edward Pressman en

Matthew Brown.

Op onderstaande internetpagina kan een interview met Simon McBurney gevonden worden waarin hij ingaat op zijn theaterproductie.

Bron: www.depers.nl/UserFiles/File/De.Pers.dinsdag.5.juni.2007.pdf

Wiskunde en misdaad: een prijzenswaardige combinatie?

We use math everyday. Met dit motto weet hitserie *Numb3rs* niet alleen de aandacht van vele televisiekijkers vast te houden, maar ook prijzen van de *National Science Foundation* (NSF) in de wacht te slepen. De show over de broers Eppes, de een briljant wiskundige, de ander doorgewinterde FBI-agent, die ook op de Nederlandse televisie te zien is, lijkt de juiste mix gevonden te hebben tussen wiskunde en entertainment om een groot publiek te bereiken. Niet alleen is deze door CBS Paramount geproduceerde show de grootste publiekstrekker tijdens de vrijdagavondprogrammering in de VS met bijna twaalf miljoen kijkers, er zijn ook vele internetsites te vinden die aandacht besteden aan de show én aan de wiskunde die in de show gebruikt wordt.

De NSF heeft dan ook dit jaar de *National Science Board group Public Service Award* uitgereikt aan *Numb3rs* en zijn makers Cheryl Heuton en Nick Falacci wegens hun bijdrage aan het verbeteren van de bekendheid van het grote publiek met wetenschap en wiskunde. De rol die wiskundige adviseurs hierin spelen, om de wiskundige juistheid in het oog te houden, mag niet weggecijferd worden.

Met de waardering van zowel de wetenschappelijke gemeenschap als het televisiekijkend publiek op zak kunnen we erop rekenen dat *Numb3rs* voorlopig nog niet uitgeteld is. Bij ons wordt de serie door *Veronica* uitgezonden.

Bron: www.nsf.gov/news/news_summ.jsp?cntn_id=108701&org=NSF

Mathematica ad fundum

“Zien eten doet eten”, zegt het spreekwoord, maar hoe zit het met drinken? Fabio Sánchez van Cornell University en partners hebben geprobeerd dit verschijnsel in een wiskundig model te vangen. Hun model van differentiaalvergelijkingen modelleert de verspreiding van alcoholisme door sociale contacten. Kunnen alcoholisten gematigde drinkers ‘bekeren’ en zo een epidemie van alcoholisme veroorzaken?

In het model wordt de totale populatie ingedeeld in drie verschillende groepen: gematigde drinkers, die vatbaar zijn voor alcoholisme, alcoholisten en ex-alcoholisten die het drinken hebben afgezworen. De differentiaalvergelijkingen beschrijven de dynamica volgens welke deze groepen onderling leden uitwisselen.

Een van de opmerkelijke conclusies die uit het model rollen, betreft de rol van hulpprogramma's voor alcoholisten. Wanneer deze programma's niet effectief genoeg zijn, vergroten zij verspreiding van alcoholisme in een populatie, omdat ze een grote groep ex-alcoholisten creëren die zeer vatbaar zijn om terug te vallen in hun oude gewoonten.

Een andere, schrikbarende, conclusie, die niet uit simpelere epidemiologische modellen volgt, is dat bij een beginconditie waarin slechts 3% van de populatie uit alcoholisten bestaat een epidemie van alcoholisme onafwendbaar is, ongeacht de effectiviteit van hulpprogramma's.

Bron: *SIAM News*, Volume 40, Number 3, April 2007 (www.siam.org/news)

Biertje?

Meer dan een halve eeuw geleden gaf John von Neumann een formule om de groeisnelheid te berekenen van een cel in een tweedimensi-

onale cellulaire structuur. Op 26 april 2007 publiceerden Robert D. MacPherson en David J. Srolovitz het artikel ‘The von Neumann relation generalized to coarsening of three-dimensional microstructures’ in *Nature*. Hierin geven zij een formule voor celgroei in een willekeurig aantal dimensies.

Net zoals Von Neumanns resultaat is ook de generalisatie ervan gebaseerd op twee aannames: er is een (bekende) relatie tussen de snelheid van de celwanden en de gemiddelde kromming van die wanden en de celwanden ontmoeten elkaar onder hoeken van 120° .

Om hun (driedimensionale) resultaat te bewijzen voeren MacPherson en Srolovitz het begrip ‘gemiddelde breedte’ van de cel in, dat verkregen wordt door de Euler karakteristiek van doorsneden van de cel slim te middelen over lijnen.

Als mogelijke toepassingen van hun resultaat noemen de onderzoekers metaalbewerking door opwarming, maar ook het controleren van het schuim op bier. Onderzoek dat smaakt naar meer. Bier-tje?

Bron: www.ams.org/mathmedia/archive/06-2007-media.html

Wiskundefobie of dyscalculie?

Angst voor getallen of moeite ze te verwerken? Wiskunde-angst en dyscalculie worden onder de loep gelegd. Studenten die gezakt zijn voor een tentamen, geven regelmatig als reden aan dat ze in paniek raken als ze wortels of integralen in een opgave zien staan. Een diep ingebakken angst lijkt zich van hen meester te maken, met alle kwalijke gevolgen van dien.

Cognitief psycholoog Mark Ashcraft beschreef dit fenomeen, dat hij wiskunde-angst noemt, begin dit jaar tijdens de jaarlijkse conferentie van de *American Association for the Advancement of Science*. Naar aanleiding van eigen onderzoek stelt Ashcroft dat wiskunde en angst beide in je werkgeheugen zetelen en daarom niet samen gaan. Raak je angstig, dan lijdt de wiskunde.

Studies gericht op het aanpakken van deze angst, lijken erop te wijzen dat vooral ontspanning goed helpt. Lavendelgeur en lachen worden in het bijzonder aangeprezen. Psycholoog Richard Hopko presenteert wiskunde-angst in zijn studie als serieus te nemen leerprobleem.

Dyscalculie is een al langer bekende aandoening. Deze term wordt gebruikt als mensen moeite hebben met het verwerken van getallen, analoog aan dyslexie, waarbij mensen problemen hebben met het verwerken van woorden. Wetenschappers onder leiding van het University College London zijn er nu voor het eerst in geslaagd om dyscalculie op te wekken in proefpersonen die deze aandoening voorheen niet hadden. Deze studie wees uit dat de rechter pariëtale kwab invloed heeft op het voorkomen van dyscalculie.

Proefpersonen werden gevraagd om uit twee getallen van verschillende fontgrootte het getal te kiezen met de grootste numerieke waarde. Tijdens deze test werden verschillende delen van de hersenen magnetisch gestimuleerd. Op de momenten dat bij de proefpersonen zonder dyscalculie de rechter *pariëtale kwab* werd gestimuleerd, vertoonden zij hetzelfde gedrag in de testen als de proefpersonen die aan dyscalculie leden. Hun reactietijd bij het kiezen van het getal met de grootste waarde nam namelijk toe.

De volgende stap is onderzoeken welke gevolgen dit voor diagnose en behandeling van dyscalculie kan hebben.

Bron: www.timesonline.co.uk en www.eurekalert.com

Nieuwe ereleden KWG

Tijdens het eerste gedeelte van de 230ste Algemene Ledenvergadering

van het KWG, die op 12 april in Leiden gehouden werd, zijn drie nieuwe ereleden benoemd: Jan van de Craats, Dirk van Dalen en Ferdinand Verhulst. De aanbevelingen werden als volgt geformuleerd.

Jan van de Craats heeft zich in het bijzonder verdienstelijk gemaakt door zijn vele bijdragen aan het populariseren van de wiskunde en zijn vele inspanningen ter verbetering van het wiskundeonderwijs in het vwo en de aansluiting daarvan bij de wiskunde op de universiteit.

Dirk van Dalen heeft de geschiedschrijving van de wiskunde een zeer belangrijke dienst bewezen door leven en werk van L.E.J. Brouwer te beschrijven, de nalatenschap te ordenen en te beschrijven, en manuscripten die dat verdienen uit te geven.

Ferdinand Verhulst werd gehuldigd als oprichter, in 1985, van de uitgeverij *Epsilon uitgaven*, waar onder zijn hoofdredacteurschap bijna zestig Nederlandstalige wetenschappelijke boeken over wiskunde en wiskundige onderwerpen, en vijftientig delen van de Zebra-reeks voor leerlingen van het vwo zijn verschenen.

Bron: www.wiskgenoot.nl/not23osteALV.pdf

Oproep

Hendrik Lenstra is benoemd tot *Chair of the Program Committee of the International Congress of Mathematicians 2010* in Hyderabad, India, dat gehouden wordt van 19 tot en met 27 augustus 2010. Een ieder die suggesties heeft aangaande het wetenschappelijk programma van ICM 2010 kan dit aan hem kenbaar maken. Onder de hieronder vermelde internetpagina zijn contactgegevens te vinden.

Bron: www.mathunion.org/ICM/PC/2010.html

Vergelijk het met plaatjes

Sarah heeft vijftien snoepjes en ze krijgt er negentien bij. John heeft eenenvijftig snoepjes. Wie heeft de meeste? Er is groot optimisme nodig om te kunnen beweren dat iedereen deze vraag zonder problemen kan beantwoorden, maar kleuters weten er wel raad mee. In ieder geval als ze er tekeningen bij zien. Dat beweren Elizabeth Spelke en collega's.

In december 2005 meldde deze nieuwsrubriek onder het kopje *Wiskunde is kleuterspel* dat deze psychologe van *Harvard University* erachter gekomen was dat kleuters, die nog geen rekenonderwijs gehad hadden, goed aantallen stippen met elkaar kunnen vergelijken en kunnen aangeven of een verzameling meer of minder stippen heeft dan een andere. Wanneer echter cijfers vergeleken moesten worden, scoorden de kinderen beduidend minder goed bij de testen.

In een nieuwe test werden aan de kleuters vragen gesteld zoals die waarmee deze tekst opende. Hierbij kregen de kinderen ook tekeningen te zien van een jongen en een meisje, beide met een even grote zak snoep met daarop het aantal snoepjes geschreven. In deze context konden de kinderen wel cijfers met elkaar vergelijken, zolang de te vergelijken getallen maar niet te dicht bij elkaar lagen.

Precies de berekeningen uitvoeren, lukte de vijfjarigen dan ook niet, wat erop wijst dat ze wel goed kunnen schatten. De aanwezigheid van de tekening bleek echter essentieel te zijn. Zonder illustratie waren de scores beduidend slechter.

Een ander verschil met het eerdere onderzoek was de precieze vraagstelling. Voorheen werden vragen gesteld als "Je krijgt van je moeder 27 marshmallows. Daarna krijg je er nog eens 31. Is het nu zoets als 58 of is het meer in de buurt van 33?" In het nieuwe onderzoek lag de nadruk op het vergelijken van getallen. Of deze andere vraagstelling ook een significante invloed heeft gehad op de uitkomst van het

onderzoek is voer voor een volgend onderzoek.

De kleuters hebben veel meer lol in het oplossen van de vraagstukken als de focus niet bij de precieze getallen ligt, maar bij het schatten en vergelijken, constateerde Spelke ook nog. Ze pleit ervoor deze wijsheid mee te nemen in de ontwikkeling van het rekenonderwijs.

Het onderzoek is gepubliceerd in *Nature*, 31 mei 2007: Camilla Gilmore, Shannon McCarthy, Elizabeth Spelke, 'Symbolic arithmetic knowledge without instruction'.

Bron: www.nature.com en noorderlicht.vpro.nl/artikelen/34862505

Instabiliteit in tumorgroei

Wiskundigen Natalia Komarova, Alexander Sadovsky en Frederic Wan van de University of California in Irvine hebben een belangwekkende ontdekking gedaan in het onderzoek naar de groei van tumoren. Zij vonden dat kankertumoren het beste groeien als ze instabiel zijn in het beginstadium van hun ontwikkeling en later stabiel worden.

Kankercellen moeten 'een afweging maken' tussen stabiliteit en instabiliteit. Het laatste vergroot de kans op kwaadaardige mutaties, maar het vergroot ook het aantal cellen dat afsterft. Voor een snelle groei is het voor de tumor van belang de juiste mate van instabiliteit te hebben.

Dit probleem leent zich uitstekend voor een aanpak met *optimal control theory*, waarbij de mutatiesnelheid de controleparameter is. Het blijkt zo te zijn dat een snelle mutatie in het begin gevolgd door een stabiele periode het gunstigste is voor de groei van tumoren. Deze fases van ontwikkeling worden ook in tumoren waargenomen.

Het artikel 'Selective pressures for and against genetic instability in cancer: a time-dependent problem' verscheen in *Journal of the Royal Society Interface*, DOI: 10.1098/rsif.2007.1054.

Bron: today.uci.edu/news/release_detail.asp?key=1628



foto: University of California, Irvine

Natalia Komarova onderzocht de groei van tumoren.

Vidi voor topologie en statistiek

In juli heeft NWO 83 Vidi-subsidies toegekend aan jonge onderzoekers. Iedere gelukkige krijgt maximaal 600.000 euro om vijf jaar lang een eigen onderzoekslijn te ontwikkelen.

Onder de gesubsidieerden bevinden zich twee wiskundigen. Marius Crainic van de Universiteit Utrecht doet onderzoek naar Poisson-topologie, wiskundige structuren die ten grondslag liggen aan de klassieke mechanica. Harry van Zanten van de Vrije Universiteit in Amsterdam ontwikkelt wiskunde om de prestaties van verschillende statistische methoden met elkaar te kunnen vergelijken.

Bron: www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOA-74YCVF

Ze bestaan niet

In de nieuwsrubriek van de vorige uitgave van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* maakten we gewag van de mooie prestatie van de drie middelbare scholieren Jesse Hoekstra, Willem Schilte en Petra Alkema die, in hun zoektocht naar een twaalf bij twaalf magisch Franklinvierkant, op een magisch vierkant gestuit waren dat veel van de eigenschappen van een Franklinvierkant bezit, maar net niet alle: de halve rijen en kolommen tellen niet op tot de juiste waarde. Het gevonden vierkant, HSA-vierkant genaamd, had wel veel meer andere leuke eigenschappen. Cor Hurkens van de Technische Universiteit Eindhoven heeft nu bewezen dat twaalf bij twaalf Franklinvierkanten niet bestaan.

Hurkens bewees dit door een handige representatie van Franklinvierkanten te maken, waardoor alle kandidaatvierkanten relatief gemakkelijk getest konden worden door een computerprogramma.

In de uitgave van *Cursor*, het universiteitsblad van de Technische Universiteit Eindhoven, van 31 mei 2007, stond naar aanleiding van Hurkens ontdekking het nogal opmerkelijke bericht dat "Cor Hurkens van de TU/e heeft aangetoond dat de bijzondere magische vierkanten, die een groepje scholieren eind maart claimde te hebben gevonden, niet bestaan." Door het HSA-vierkant expliciet te geven, is de existentie natuurlijk afdoende bewezen.

De claim dat dit vierkant een twaalf bij twaalf Franklinvierkant zou zijn, is nooit door de betrokkenen gedaan. Zie www.win.tue.nl/~wscor/Magic en ook het artikel over het HSA-vierkant in dit blad.

Yves van Gennip

Recht of rekenen?

Het blijft rommelen in het rekenonderwijs aan de pabo's. Volgens een schatting van de HBO-raad moeten 2500 eerstejaars pabo-studenten stoppen met de opleiding omdat ze de pabo-rekentoets niet gehaald hebben. De Landelijke Studentenvakbond (LSvb) vindt dit onterecht.

De studenten zouden slecht begeleid zijn in de voorbereiding op de toets en ook mochten veel studenten na het maken van de (digitale) toets deze niet meer inzien, waardoor zij zich niet goed op de herkansing konden voorbereiden. Tenslotte hebben veel hogescholen ook niet in hun Onderwijs en Examen Regeling (OER) vermeld staan dat het falen voor de rekentoets een negatief bindend studieadvies tot gevolg heeft. Via www.lsvb.nl/actueel/checklistpabo biedt de LSvb studenten een stappenplan aan om na te gaan of hun bindend studieadvies rechtsgeldig is.

Wie nu wel eens wil weten wat deze beruchte toets inhoudt, kan terecht op vakcommunities.kennisnet.nl/vo/decaan/downloads/pabo-test

Bron: www.ad.nl

De rijken hebben veel vrienden

"De rijken worden alleen maar rijker," is een veelgehoorde klacht onder degenen die zich niet tot de rijken rekenen. In de studie van netwerken wordt het *preferential attachment* genoemd: de meeste nieuwe verbindingen worden gevormd met die knooppunten die al veel verbindingen met andere knooppunten hebben. Niet alleen in het geldverkeer is dit terug te zien, maar ook bijvoorbeeld in netwerken van internet routers.

Tot nu toe werd deze eigenschappen verondersteld een fundamentele eigenschap van netwerken te zijn, maar onderzoek van Raissa D'Souza van het *Center for Computational Science and Engineering* van UC Davis, Christian Borgs en Jennifer T. Chayes van *Microsoft Research* in Redmond, Washington, Noam Berger van UCLA en Robert D.

Kleinberg van Cornell University, nuanceert dit beeld nu.

Door de afstand en het aantal verbindingen tussen knooppunten te variëren kunnen ze de *preferential attachment*, dat wil zeggen de machtswet die de verdeling van verbindingen beschrijft, sterker of zwakker maken. Volgens D'Souza worden op deze manier de wortels blootgelegd van iets dat als axiomatisch aangenomen werd.

Het onderzoek is gepubliceerd in de *Proceedings of the National Academy of Sciences*: www.pnas.org/cgi/content/short/104/15/6112.

Bron: www.news.ucdavis.edu

Errata

In de nieuwsrubriek van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* van juni 2007 werd foutief gemeld dat Hendrik Lenstra door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen tot universiteitshoogleraar benoemd zou zijn. De KNAW heeft Lenstra tot *akademiehoogleraar* benoemd.

Bij het zetten van de rede *Summa cogitatio* van Piet Groeneboom is een zinsnede helaas op onjuiste manier ingekort, waardoor de betekenis is veranderd. Er staat: "Grigori Perelman heeft dit laatste vermoeden bewezen en vervolgens de \$1,000,000 prijs geweigerd." (tweede kolom blz. 123). Er had moeten staan, zoals ook in de originele afscheidsrede: "De Riemann hypothese is één van de zeven "Millennium prize problems"; het vermoeden van Poincaré (1904) is een ander. Men denkt op het moment dat Grigori Perelman dit laatste vermoeden heeft bewezen en in aanmerking komt voor de \$1,000,000. Hij heeft al meegedeeld dat het Clay Mathematics Institute eerst de prijs maar eens aan hem toe moet kennen en dan zal hij nog wel zien of hij hem zal accepteren."

De juiste versie van de rede staat open op onze internetpagina onder de link www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deelo8/jun2007/groeneboom.pdf

Derk Pik, eindredacteur

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Terence Tao



Endre Szemerédi

De favoriet van Terence Tao

Endre Szemerédi

Elke maand vragen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun weblog www.wiskundemeisjes.nl aan een bekende wiskundige wie zijn favoriete nog levende wiskundige is. Hiermee willen ze bijzondere wiskundigen van deze tijd eens in het zonnetje zetten. In elke Nieuw Archief voor Wiskunde komt een bladzijde over zo'n favoriet en zijn werk. Deze keer vragen ze aan Terence Tao wie hij bewondert.

Terence Tao is professor in de analyse op University of California, Los Angeles, maar hij werkt in verschillende gebieden van de wiskunde. Hij is pas 32 en al erg beroemd. In 2006 kreeg hij de Fieldsmedaille en in april kreeg hij samen met Ben Green de Ostrowskiprijs, die werd uitgereikt op het Nederlands Mathematisch Congres. We grijpen die gelegenheid aan om te vragen welke wiskundige Tao bewondert. Hij vindt het een moeilijke vraag, maar uiteindelijk kiest hij voor Endre Szemerédi.

De Hongaarse wiskundige Endre Szemerédi werd in 1940 geboren en hij studeerde bij de legendarische Paul Erdős. Hij is nu professor aan de Amerikaanse Rutgers University. Het vakgebied waarin hij werkt is de combinatoriek en veel resultaten dragen zijn naam. Een van de bekendste heet simpelweg de stelling van Szemerédi. Deze zegt: als voor $A \subset \mathbb{N}$ geldt dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, n\}|}{n} > 0,$$

dan bevat A voor elk positief geheel getal k aritmetische progressies van lengte k . Aritmetische progressies zijn niets meer dan rijtjes getallen met steeds hetzelfde verschil tussen twee opeenvolgende getallen.

In 1939 had de Nederlander Johannes van der Corput al bewezen dat er oneindige veel aritmetische progressies van lengte 3 bestaan die alleen uit priemgetallen bestaan. Wiskundigen vermoedden wel dat er willekeurig lange aritmetische progressies van priemgetallen bestaan, maar niemand kon dat

bewijzen. Priemgetallen voldoen niet aan de voorwaarde van de stelling van Szemerédi, dus die kon niet zomaar gebruikt worden. Toen Tao en Green zich met het probleem gingen bezighouden, begonnen ze toch met de stelling van Szemerédi en ze bedachten iets slims: in plaats van naar alle natuurlijke getallen te kijken, keken ze naar een grote deelverzameling daarvan, door een aantal niet-priemgetallen te verwijderen. In die nieuwe verzameling komen de priemgetallen net wel vaak genoeg voor, en het bleek dat ze Szemerédi's argument zó konden aanpassen dat hun vermoeden inderdaad bewezen werd.

Terence Tao bewondert Szemerédi omdat hij dingen laat werken die anderen opgegeven zouden hebben. Zijn bewijzen zitten vol met creatieve ideeën. Tao vindt het ook prettig dat Szemerédi erg bescheiden en vriendelijk is gebleven. Hij herinnert zich een conferentie in Montreal, waar veel van het werk van Szemerédi voorbij kwam. Sprekers gebruikten zijn resultaten en checkten af en toe bij Szemerédi, die in de zaal zat, of het klopte wat ze zeiden: "Is this the way you proved it?" Eigenlijk zou Szemerédi tijdens die conferentie zelf geen voordracht geven, maar door het enthousiasme van de andere wiskundigen besloot hij spontaan om toch te spreken. Hij hield een voordracht over ongepubliceerde resultaten en alternatieve bewijzen van zijn eigen stellingen. Normaal wordt bij een wiskundige voordracht alleen aan het einde geklapt, maar Szemerédi kreeg een warm en luid applaus voor hij begon. Tao: "Everybody just loves Endre Szemerédi." Maar ook veel mensen houden van Terence Tao: de volgende dag geeft hij een voordracht op het Nederlands Mathematisch Congres, en de zaal klappt al enthousiast voor hij begint. 

Referenties

1. discovermagazine.com/2005/jan/mathematics/prime-time-news
2. www.math.ucla.edu/~tao



Michel Mandjes

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muijdergracht 24
1018 TV Amsterdam
mmandjes@science.uva.nl

Inaugurele rede

Nieuwe Kan

Kansrekening, de wiskundige discipline die zich bezighoudt met het beschrijven van het toeval, kent al een eeuwenlange geschiedenis. Centraal staan steeds begrippen zoals het gemiddelde, de standaarddeviatie en het lange termijn gedrag van een systeem. Aan de oratie van Michel Mandjes is goed te zien hoe zich op dit vakgebied een verschuiving heeft voorgedaan: inmiddels is er toenemende aandacht voor zeldzame gebeurtenissen, en worden de uiteinden van kansverdelingen in kaart gebracht. Aan de hand van voorbeelden op het gebied van internet, kankeronderzoek en beurshandel laat Michel Mandjes zien hoe dit nieuwe gezichtspunt mogelijkheden biedt om greep te krijgen op allerlei soorten onzekerheid in de wereld om ons heen. Michel Mandjes is sinds 2004 hoogleraar Toegepaste Kansrekening aan het Korteweg-de Vries Instituut van de Universiteit van Amsterdam, en daarnaast deeltijds verbonden aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica en EURANDOM.

Toen mij gevraagd werd na te denken over een uit te spreken oratie, bekwam me een gevoel van jongensachtig enthousiasme, maar daarnaast ook een zekere bezorgdheid, die ongetwijfeld verklaart waarom ik een en ander heb uitgesteld tot zes jaar na mijn benoeming. Een oratie dient een breed publiek aan te spreken, variërend van de naaste collega's tot familie en vrienden. Hierbij zijn de collega's vooral geïnteresseerd in de wetenschappelijke intenties van de nieuwe hoogleraar, de zogenaamde leeropdracht, en zijn ideeën ten aanzien van het academische klimaat aan deze universiteit, in dit land en in de wereld. De minder ingewijden geven de voorkeur aan een meer laagdrempelige inhoud, en uit hun mond heb ik in het verleden dan ook verschillende malen vernomen dat een oratie volledig langs

hen heen gegaan was. Zie hier het complexe probleem waarvoor de spreker zich gesteld ziet. Ik moet ook bekennen dat, hoewel lid van de wetenschappelijke gemeenschap, mij ook menige oratie zwaar te moede werd. De hierboven beschreven spagaat leidt al gauw tot een knieval naar een van beide zijden. Bovendien leek het gemeengoed een wat voorspelbare structuur te hanteren waarin eerst een blik op het vakgebied wordt geworpen, dan de wetenschappelijke geloofsbrieven aan bod komen, vervolgens de visie op het onderzoeksbeleid en het onderwijs, om af te sluiten met enkele passages van meer persoonlijke aard. Deze bespiegelingen in acht nemend leek het me een goed idee om voor mijn oratie eens een radicaal afwijkende vorm te kiezen. Mijn plan is u mee te nemen naar het Korteweg-De Vries Instituut, afgekort KdV, en

u een dag uit mijn leven te laten meeleven. Op die dag zullen we zien waar mijn vakgebied zich mee bezig houdt, wat mijn plannen zijn, wat mij drijft, en hoe ik denk over de ontwikkelingen binnen de academische wereld. Ik hoop dat na afloop zowel mijn collega's als alle minder ingewijden een goede indruk hebben gekregen van dit alles.

Vroeger begon elke werkdag met koffie, tegenwoordig met email. Email is de zegening en plaag van deze tijd. Het is je inmiddels moeilijk voor te stellen dat tot vijftien jaar geleden alle communicatie met vakbroeders plaatsvond per post (of later fax), en een of twee keer per jaar tijdens een conferentie. Intensieve samenwerking was daardoor welhaast onmogelijk, tenzij men zich op dezelfde plek bevond. Die situatie is nu anders: ik werk samen met mensen uit alle windstreken, en er zijn geregeld dagen dat ik communiceer met Peter Taylor in Australië, Krzysztof Debicki in Polen, Ilkka Norros in Finland, Offer Kella in Israël, Peter Glynn in California en Alan Weiss in New Jersey.

Large deviations —

lange-termijn afhankelijkheid

Misschien is dit een goed moment om iets te zeggen over hoe een dergelijke samenwerking er dan in de praktijk uit ziet. Laten we eens kijken naar bijvoorbeeld het werk dat ik

sen

met Ilkka Norros doe, en dan is het goed te beginnen met de inhoud. Die heeft betrekking op een gebied van de kansrekening dat bekend staat als *large deviations*, of, in het Nederlands, de theorie van grote afwijkingen. Als we terug gaan naar de basis van de kansrekening, dan weten we dat het steekproefgemiddelde van een rijtje onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische variabelen, onder milde voorwaarden convergeert naar de verwachting van die stochastische variabele. We schrijven dit als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \text{ bijna zeker,}$$

Dit is een resultaat dat terug gaat naar de tijden van de 'grote Russen' Kolmogorov [14] en Khinchine [13], in de eerste helft van de vorige eeuw. Het is een heel krachtige stelling, want doorgaans wil men iets weten over het gemiddelde gedrag van een systeem. In heel veel toepassingen, is het echter niet zo zeer het gemiddelde dat de kwaliteit bepaalt, maar veeleer de zeldzame calamiteiten. Ik heb me in het verleden enkele jaren beziggehouden met het ontwerp van communicatienetwerken; daar hadden die calamiteiten betrekking op de situatie dat er onvoldoende capaciteit aanwezig was om de klanten adequaat te helpen. Met deze overweging in het achterhoofd

zou het interessant zijn de kans op een zeldzame gebeurtenis te analyseren:

$$P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq \mu + \epsilon\right).$$

De tak van de kansrekening [9, 10, 12, 17] die dergelijke kansen bestudeert heet dus *large deviations*, en ontwikkelde zich, na eerste resultaten in de jaren '30 van de vorige eeuw door de Zweedse onderzoeker Cramér [7], in hoog tempo in de jaren '50 en '60, interessant genoeg parallel door een Russische school en een Westerse school. De relevantie met het oog op het ontwerp van communicatienetwerken werd pas later, vanaf de jaren '80, onderkend en ten volle uitgebuit [23].

Naast de ontwikkeling van *large deviations*, is er nog een tweede interessante trend zichtbaar. Die heeft betrekking op de modellering van verkeer in die telecommunicatienetwerken. Waar aanvankelijk basale modellen met beperkte correlatiestructuur werden gebruikt (zoals het traditionele Poissonmodel), bewezen metingen telkens weer dat verkeer, bijvoorbeeld Internetverkeer, veel grilliger is. Een van de bevindingen van enkele onderzoekers van het vermaarde AT&T Bell Labs was dat Internetverkeer een fractale structuur heeft [3, 24]. Een en ander wordt geïllustreerd in het plaatje. Hierin heeft

de linkerkolom betrekking op Poissonverkeer: als men 'uitzoomt' wordt het verkeerspatroon steeds gladder. In het gemeten verkeer, als zichtbaar in de middelste kolom, kan men onmogelijk zeggen welke tijdschaal is afgebeeld; na een zekere herschaling van de verticale as zien alle plaatjes er eender uit. Er is een sterke gelijkenis met de rechterkolom, waar fractaal verkeer wordt getoond. Men noemt dit fenomeen *self-similarity*.

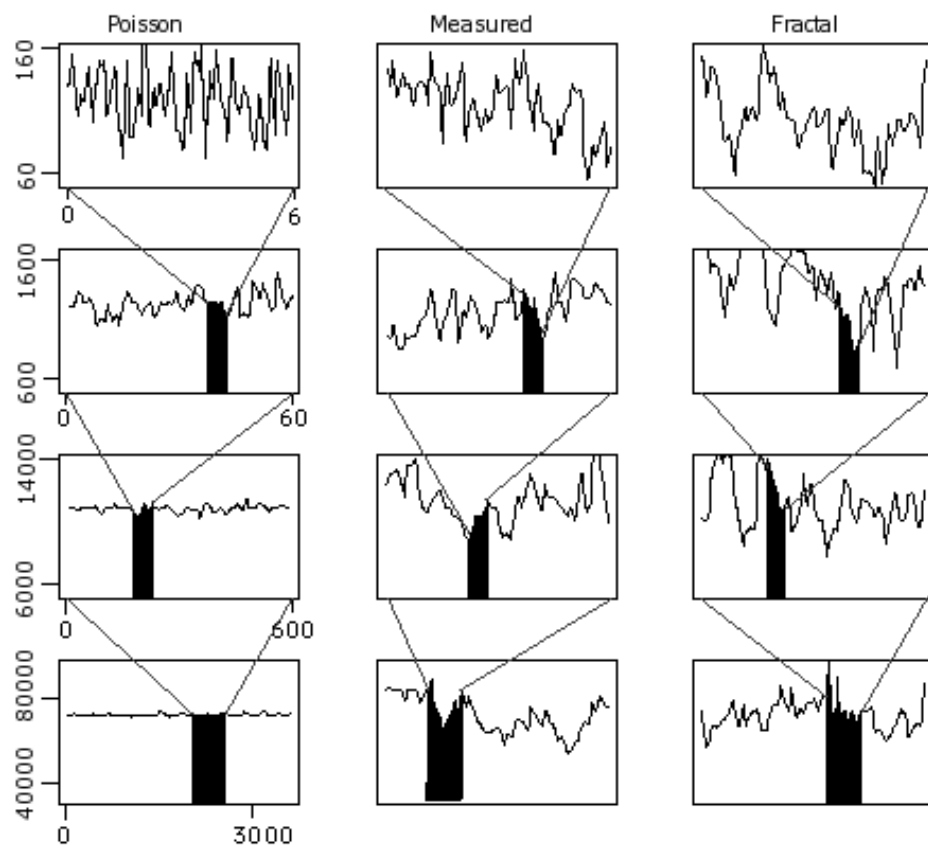
Norros heeft pionierswerk verricht op het gebied van self-similar modellen. Hij heeft gekeken naar een belangrijk speciaal geval: fractionele Brownse beweging [16]. Dit is een bijzonder intrigerend stochastisch proces: het heeft continue paden die nergens differentieerbaar zijn (aldus recht doende aan het grillige karakter), en bovendien is het self-similar. Preciezer geformuleerd bedoelen we daar het volgende mee. Als we met $A(t)$ definiëren de hoeveelheid gegenereerd verkeer in een willekeurige periode van lengte t , dan geldt dat de variantie van de hoeveelheid verkeer tijdens een interval van lengte αt gelijk is aan α^{2H} keer de variantie van de hoeveelheid verkeer tijdens een periode van lengte t :

$$\text{Var } A(\alpha t) = \alpha^{2H} \text{Var } A(t), \quad \alpha, t > 0.$$

Hierin is H de zogenaamde Hurst-parameter, die weergeeft hoe sterk de correlatie binnen



Michel Mandjes



Figuur 1 Verkeersaanbod op meerdere tijdschalen, onder de Poisson-aanname (links), zoals gemeten (middel), en onder een fractaal model (rechts)

het verkeersaanbod is. Deze formule laat zien dat, als we de tijd herschalen met een factor α , we hetzelfde stochastische proces zien, mits ook de verticale as op de juiste manier wordt aangepast. Het werk dat ik met Norros en anderen heb gedaan heeft betrekking op wachtrijen gevoed door fractionele Brownse beweging [18, 19]. Daarnaast hebben we veel aandacht besteed aan een aanzienlijk algemenere klasse van inputprocessen, te weten de zogenaamde Gaussische processen. Voor die Gaussische processen wordt krachtig en elegant wiskundig gereedschap ontwikkeld, gebruik makend van mooie structureigenschappen, zoals de onderliggende *reproducing kernel Hilbert space*. De wachtrijen die je zo krijgt kunnen dan de bufferinhoud van een netwerkelement in het Internet modelleren, en met de resultaten kan geschat worden hoeveel vertraging het verkeer ondervindt in dat knooppunt. Er waren al veel resultaten voor het geval dat een enkel knooppunt wordt beschouwd. Netwerken bestaan echter uiteraard niet uit geïsoleerde knooppunten, en daarom hebben we ons gericht op ingewikkeldere systemen, waarin de output van een eerste wachtrij wordt gerouteerd naar een volgende wachtrij. Deze systemen zijn aanmerkelijk lastiger, en we hebben ons van zwaar geschut moeten bedienen om de *large de-*

viations van de bufferinhoud te karakteriseren. In de analyse dient men optimaliseringsproblemen over een oneindig-dimensionale toestandsruimte op te lossen, waarbij men handig gebruik moet maken van de structuur van het probleem. We hebben daarnaast ook veel aandacht besteed aan knooppunten die niet werken volgens het principe van first-in-first-out, maar waarin één klasse voorrang heeft boven een andere. Dat is typisch iets dat men zou wensen in een communicatienetwerk: geef vertragingssgevoelig verkeer (telefonie bijvoorbeeld) voorrang boven vertragingstolerant verkeer (email bijvoorbeeld). Met mijn promovendus Pascal Lieshout, die deels op het CWI werkt, en aan de UvA gaat promoveren, kijk ik naar dit soort problemen [15]. De antwoorden die men vindt zijn vaak in termen van wat wordt genoemd logaritmische asymptotiek. Bekijk bijvoorbeeld zo'n wachtrijstelsel als ik hierboven beschreef, met n verkeersstromen die van het knooppunt gebruik maken. Het verkeer in het knooppunt wordt met constante snelheid verder het netwerk in gepompt; zeg dat die snelheid nc is. Als Q nu de bufferinhoud aanduidt, op een willekeurig moment, dan vinden we een positief getal ζ zo dat de kans dat een buffer-niveau nb wordt overschreden exponentieel daalt in n :

$$P(Q > nb) \approx \exp(-n\zeta).$$

De samenwerking met Norros is een prototypische Internet-samenwerking. We hebben elkaar ooit, toen ik nog bij het onderzoekslab van KPN werkte, bij een Europees project ontmoet, en toen we er jaren later achterkwamen dat we inmiddels in soortgelijke problemen geïnteresseerd waren hebben we contact met elkaar opgenomen. We bezoeken elkaar elk jaar een weekje, zien elkaar soms bij workshops en congressen, maar de rest van de communicatie gaat via email.

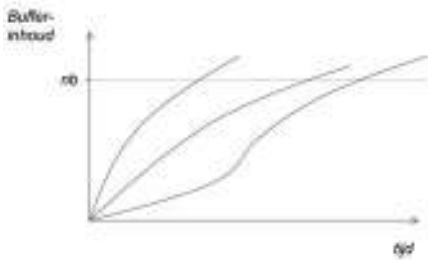
Oplosmethoden uit de variatierekening –

Markovse modellen

Een andere persoon met wie ik nog steeds, en voornamelijk via email, werk is Alan Weiss. Weiss is een van de grondleggers van het gebruik van large deviations in de context van communicatienetwerken [23]. We zijn een tijdje collega's geweest, toen ik bij Bell Labs werkte. Zijn belangrijkste bijdrage naar mijn smaak is de karakterisering van de decay rate ζ als oplossing van een variationeel probleem, een concept waarvan Norros en ik ook veelvuldig gebruik hebben gemaakt. In meer concrete bewoordingen is het idee dat ζ uitgedrukt kan worden als het minimum van een 'kostenfunctie' over een padenruimte:

$$\zeta = \inf_{f \in S} I(f),$$

dus het minimum van $I(f)$ over f in S . Hierbij bestaat de verzameling S uit alle paden (in de tijd) die starten met een lege wachtrij, en eindigen bij het overschrijden van bufferniveau nb . De functionaal $I(\cdot)$ geeft uitdrukking aan de kosten: een pad f heeft zekere 'entropie' (die geïnterpreteerd kan worden als 'kosten') $I(f)$. Hoe verder f afwijkt van het gemiddelde gedrag van het aankomstproces, des te hoger die entropie. Het gaat er dus om om een pad te vinden, dat start met een leeg systeem en eindigt bij een volle wachtrij, en dat zo 'goedkoop' mogelijk is. Het vinden van zo'n pad vereist de nodige handigheid met variatierekening. Het optimaliserende pad heeft de interessante interpretatie van meest waarschijnlijke pad: de gebeurtenis die we bekijken treedt zeer zelden op, maar als hij optreedt dan is het zeer waarschijnlijk dat dit gebeurt door middel van een pad dat in de buurt ligt van dat meest waarschijnlijke pad. Dit verklaart ook waarom men voor deze klasse van problemen vaak de term 'padsgewijze large deviations' bezigt. In de loop der tijd is er voor verschillende stochastische proces-



Figuur 2 Paden die leiden tot een volle buffer

sen een onderliggende theorie ontwikkeld, en grote namen in dit verband zijn Mogulskii, Schilder, Donsker en Varadhan.

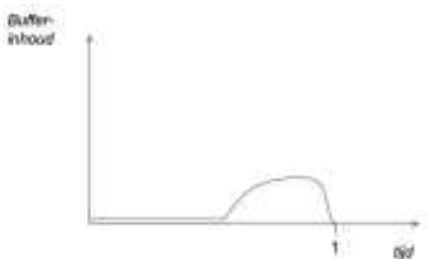
Als gezegd is het vinden van zo'n pad f in S dat $I(f)$ minimaliseert doorgaans geen sinecure. Met Weiss ben ik er in geslaagd de klasse van Markovse modellen waarvoor zoiets mogelijk is aanzienlijk op te rekken [20]. Uiteindelijk blijkt een en ander voor niet-Markovse modellen, zoals fractionele Brownse beweging, aanzienlijk lastiger te zijn.

Zoekt men bijvoorbeeld het meest waarschijnlijke pad dat ervoor zorgt dat een wachtrij gevoed door fractionele Brownse beweging gedurende één tijdseenheid niet leeg is geweest, dan kan men na veel rekenwerk aantonen dat dit pad er uit ziet als op het plaatje. Met andere woorden: dat de buffer nagenoeg leeg is tot aan een tijdstip s^* , en dat er daarna een strikt positieve bufferinhoud is — deze uitkomst is uitermate ongewoon, en we konden het eerst nauwelijks geloven.

De decay rate (ofwel 'norm') die bij dit pad hoort heeft deze fascinerende gedaante:

$$\| \chi_{[0, s^*]} \|^2 + \frac{(1 - \chi_{[0, s^*]}(1))^2}{\text{Var}(Z_1 - E[Z_1 | F_s, s \in [0, s^*]])}$$

waarbij de eerste term betrekking heeft op de norm van het rechte pad χ tussen 0 en s^* , en de tweede term in rekening brengt wat de kosten zijn van het pad tussen s^* en 1. De zojuist beschreven problematiek raakt aan het onderwerp van een OiO-project met promovendus Abdel Es-Saghouani dat ik op dit moment begeleid. Hij bekijkt onder andere de correlatiestructuur van de bufferinhoud van



Figuur 3 Meest waarschijnlijk pad van busy period voor fractionele Brownse beweging

de wachtrij, een tot dusver onopgelost probleem. Mijn verwachting is dat het verder ontwikkelen van de theorie van grote afwijkingen, en haar toepassingen in de wachtrijtheorie prominent op mijn (en ook de internationale) onderzoeksagenda zullen blijven staan.

Europa

Ik merk dat ik afdwaal. De zegeningen van email lijken me nu ruim genoeg bezongen, en het is nu tijd om aan te geven waarom ik email ook als plaag ervaar. De hoeveelheid tijd die ik besteed aan het behandelen van nagenoeg zinloze email is zorgwekkend. Er komt bijvoorbeeld zeer veel email voort uit Europese projecten, zogenaamde Networks-of-Excellence. Deze ronkende naam ten spijt, heb ik deze projecten vaak als bureaucratische gedachten ervaren. Het wrange is dat Europese projecten zeker de toekomst hebben: samenwerkingen die al bestonden op een informeel niveau kunnen zo bestendig of verder uitgebreid worden. De financieringsstructuur, waarbij 'Brussel' zich graag spiegelt aan de Amerikaanse NSF, is echter af en toe ronduit lachwekkend. De inspanningen die men zich moet getroosten om aan de administratieve verplichtingen te voldoen, staan vaak in schril contrast met de opbrengsten. Mijn advies zou zijn om de beoordelingsprocedures volledig te herzien, en hierin de wetenschappers zelf een belangrijke rol te laten spelen. Zorg er verder voor dat daadwerkelijke excellentie wordt beloond, en hecht minder aan zuiver beleidsmatige criteria zoals bijvoorbeeld geografische spreiding. Alleen als er genoeg wetenschappelijke kwaliteit is, en er zorg gedragen wordt voor de transfer van de opgedane kennis naar de samenleving, kunnen Europese projecten tot een krachtig instrument uitgroeien.

Modellen voor het delen van capaciteit —

ad-hoc netwerken

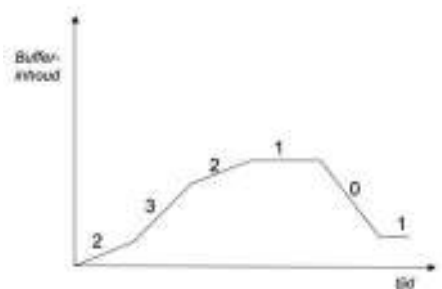
Als de administratie weer enigszins op orde is, is het meestal tijd voor de wiskunde. In mijn geval betekent dat: kladblok en papier. Vaak heb ik ook een bijeenkomst met een van mijn promovendi. Naast de OiO's die ik al eerder noemde, is dat verder Frank Roijers, die hier over een paar jaar gaat promoveren. Frank werkt deeltijds op het Korteweg-de Vries Instituut, en deeltijds bij TNO Informatie en Communicatie Technologie. Hij is het levende bewijs dat onderzoek zoals dat aan onze universiteit gedaan wordt, een directe link kan hebben met een operationele context. In zijn project richten we ons op zogenaamde ad-hoc netwerken [5]. Dat zijn net-



Figuur 4 Een ad-hoc netwerk

werken waarin de fysieke infrastructuur ontbreekt: er zijn geen kabels of andere transmissieapparatuur. In plaats daarvan worden de knooppunten gevormd door de mobieltjes, of laptops, van de gebruikers van het netwerk. Als twee van die gebruikers met elkaar willen communiceren, dan zoeken zij een pad van mobieltjes waarover hun verkeer dan vervoerd kan worden. Een eerste interessante vraag is: gegeven het feit dat elk mobieltje maar een eindig bereik heeft, wat is dan de kans dat er zo'n pad is? Dat is een vraag met stochastische en combinatorische aspecten, en waarin ook percolatie-theorie een rol zou kunnen spelen.

Verder is het zo dat in zo'n netwerk vaak een knooppunt is aan te wijzen dat als bottleneck fungeert [4]: een positie in het netwerk zonder welke geen communicatie mogelijk zou zijn. Als we dat knooppunt in meer detail bekijken, zien we dat de bedieningscapaciteit beschikbaar voor het knooppunt verdeeld moet worden tussen het binnenhalen van aankomend verkeer, en het bedienen van uitgaand verkeer. Het standaardprotocol voor ad-hoc netwerken werkt als volgt. Stel dat er op zeker moment N zendende mobieltjes zijn. Die krijgen elk $1/(N+1)$ van de capaciteit, samen dus $N/(N+1)$. De resterende $1/(N+1)$ wordt benut om het knooppunt te bedienen. De buffer groeit dan dus aan met een snelheid $(N-1)/(N+1)$. Met andere woorden:



Figuur 5 Evolutie van bufferinhoud voor een bottleneck in een ad-hoc netwerk

de hoeveelheid verkeer in het knooppunt vormt een wachtrij die alleen maar leeg loopt als er even géén zendende mobieltjes zijn, zoals zichtbaar in Figuur 5.

Het hier beschreven model is een zogenaamd fluid model [1, 6]. Het is echter een fluid model met een zeer ongebruikelijk koppeling tussen de input en output, en daarom niet standaard oplosbaar. Een doel zou kunnen zijn de verdeling te bepalen van de tijd die een boodschap erover doet door de bottleneck heen te komen; deze kennis kan dan weer gebruikt worden bij het verder verfijnen van de protocollen — heeft het bijvoorbeeld zin meer dan een fractie $1/(N + 1)$ van de capaciteit toe te kennen aan het bedienen van de wachtrij?

We hopen het fluid model te kunnen analyseren met de daartoe geëigende methoden, bijvoorbeeld het opstellen van een stelsel differentiaal-vergelijkingen voor het tijdsafhankelijke gedrag, of wellicht via Wiener-Hopf-technieken. Fluid modellen hebben ook al een traditie van enkele decennia en vormen een uitermate boeiend gebied. Er zijn echter nog veel fundamentele wiskundige vragen die niet opgelost zijn, en die we samen met Frank en zijn begeleider Hans van den Berg van TNO hopen op te lossen.

CWI en EURANDOM

Veel van mijn werk in de komende jaren zal in samenwerking zijn met verschillende verwante groepen in binnen- en buitenland. Vanzelfsprekend zal ik nauwe contacten blijven onderhouden met mijn vorige werkplek, de groep PNA2 van het CWI. Het CWI is voor mij de ideale plaats geweest om me wetenschappelijk te ontwikkelen. Ik hoop dat de plezierige samenwerking, met name met Rob van der Mei en Sindo Núñez Queija, nog lang niet ten einde is. Het is onmiskenbaar van het grootste belang dat er zo'n instituut bestaat als het CWI, en ik wil graag bijdragen aan zijn toekomst.

Daarnaast zal ik als adviseur betrokken blijven bij het instituut EURANDOM in Eindhoven. EURANDOM is een instituut waarin jonge onderzoekers, postdocs, optimale mogelijkheden worden geboden zich verder in de kansrekening en statistiek te verdiepen. Ik ben de directeur van EURANDOM, Onno Boxma, zeer erkentelijk dat hij me de gelegenheid heeft gegeven deze positie te bekleden.

Ook hoop ik dat de banden met de Vrije Universiteit, mijn alma mater, even hecht blijven als ze nu zijn. Het is een goed moment stil te staan bij de rol die Henk Tijms in mijn loopbaan heeft gespeeld. Ik heb ook aan de

Universiteit Twente gewerkt — ik ben de UT zeer dankbaar voor het feit dat men het heeft aangedurfd me destijds te benoemen, wat ik als grote eer en erkenning beschouw. En het heeft me een heel plezierige samenwerking opgeleverd met Werner Scheinhardt, die tot op de dag van vandaag voortduurt.

Zoals al blijkt uit het voorgaande, hebben de vakgebieden van de toegepaste kansrekening, stochastische besiskunde en wachtrijtheorie een lange traditie in Nederland. In deze zin ben ik schatplichtig aan een indrukwekkende reeks voorgangers. Zonder anderen te kort te willen doen, wil ik graag de naam van Jacob Willem Cohen noemen. Hij is vooral bekend om zijn nauwgezette analyse van een belangrijke klasse van wachtrijsystemen, zich met name beroepend op methoden uit de complexe functietheorie [7]. Na zijn dood, in 2000, mocht ik zijn toga overnemen — ik ben er heel trots op dat ik deze mag dragen.

Onderwijs

Het spreekt voor zich dat sinds mijn overgang van het CWI naar de UvA onderwijs een steeds belangrijker rol is gaan spelen in mijn bezigheden. Ik geef nu colleges voor eerstejaars en derdejaars. Dat eerste was nieuw voor mij, en heb ik als zeer verfrissend ervaren, en daarnaast ook nuttig, want lesgeven dwingt de docent nog eens goed na te denken over de fundamenteën van zijn vak. Ik heb nog steeds veel baat bij de sterke docenten die ik zelf heb gehad, en die mijn belangstelling voor wiskunde aanwakkerden, zoals Rein Nobel en Piet Holewijn. Het is verleidelijk om ten aanzien van het onderwijs mee te gaan huilen met de wolven in het bos. Het niveau zou sinds de invoering van de Mammoetwet slechts een zorgwekkende neerwaartse trend vertonen, de eisen zouden steeds lager worden gesteld, en de moderne onderwijsvormen zouden louter beknellend werken. Ik acht het echter zeer kortzichtig hierom maar te opteren voor de onderwijsmethoden van een halve eeuw geleden [25]: de wereld is veranderd, en de student is veranderd, en het is noodzakelijk het onderwijs hierop aan te passen. Het valt me echter steeds weer op dat in de top van de populatie — dus de bovenmodale wiskundestudenten — nauwelijks verandering optreedt. In elk jaar zitten wel een paar zeer getalenteerde studenten, die het later tot een promotie schoppen. Het gemiddelde niveau lijkt echter wel te dalen, om nog maar te zwijgen van het wiskundig niveau binnen studierichtingen die de wiskunde slechts als hulpmiddel gebruiken (economie bijvoorbeeld). Evidente oorzaak is de ach-

teruitgang van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school, maar ook het negatieve imago van exacte vakken onder scholieren. Ik zie een verdere popularisering van wiskunde-onderwijs niet als zaligmakend. Een bepaalde groep leerlingen zal het inderdaad aanspreken als benadrukt wordt waar je die wiskunde zoal voor kunt gebruiken. Aan de andere kant valt het mij ook steeds weer op dat er daarnaast veel studenten zijn die de schoonheid en het systematische van de wiskunde waarderen — dit aspect krijgt momenteel te weinig aandacht, denk ik. Betere aansluiting bij de toepassing, waar mogelijk, is dus prima, maar blijf aandacht houden voor de groep studenten die zich met name laat leiden door generieke aandacht voor abstracte vraagstukken.

Een mythe waarvan het hoog tijd wordt dat deze eens drastisch wordt ontzenuwd, is dat een wiskunde-opleiding een matige toegang tot de arbeidsmarkt zou geven. Ik zou graag het tegendeel willen beweren. Mijn waarneming is dat nagenoeg alle afgestudeerden binnen korte tijd werk vinden dat bij hen past, in het onderwijs, onderzoek of bedrijfsleven. Binnen de muren van KPN heb ik ook mogen ervaren dat een wiskundige achtergrond vaak wonderen doet bij het snel analyseren van problemen. Het verwerven van domeinkennis, dus achtergronden van toepassingsgebieden, hoort mijns inziens nauwelijks in de wiskunde-opleiding thuis. Die kan men zich namelijk zeer snel eigen maken wanneer men eenmaal bij een bedrijf werkt, terwijl de ervaring leert dat men, na het afstuderen, nauwelijks de gelegenheid krijgt nog enige wiskunde bij te leren.

Onderzoekssubsidies

Een substantieel deel van mijn tijd zal ik in de komende jaren blijven besteden aan het verwerven van onderzoekssubsidies, bijvoorbeeld om promovendi te kunnen aanstellen. Enkele decennia geleden liep die financiering met name via de universiteiten, maar tegenwoordig wordt vrijwel al het geld geworven via competities. Dit zijn de competities van NWO, maar daarnaast allerlei subsidieprogramma's die samenwerking met de 'toepassers' stimuleren, en natuurlijk ook projecten direct voor het bedrijfsleven of voor de overheid.

De competities van NWO zijn van groot belang, zeker voor een relatief fundamenteel instituut als het KdV. Het is daarom zorgelijk dat NWO zich in zwaar weer bevindt, en er slechts beperkte middelen zijn. De kansrekening en statistiek zijn bij een vorige grootschalige subsidieronde (de zogenaamde 'clustering')

buiten de boot gevallen, maar ik zou er voor willen pleiten deze tak van wiskunde extra te ondersteunen — gezien de (hoge) kwaliteit van de Nederlandse onderzoekers op dit gebied, en gezien de relevantie van het veld. Hierin zou een centrale rol kunnen worden gespeeld door de stochastiegroepen van de Amsterdamse instituten KdV en CWI, en mogelijk ook de VU, enerzijds, en EURANDOM anderzijds.

Over het werven van derde-geldstroom-onderzoek lopen de meningen sterk uiteen [11]. Sommigen redeneren dat financiële steun van het bedrijfsleven een bewijs is van de relevantie van het onderzoek. Er zijn echter typen onderzoek die wat verder van de praktijk afstaan, of minder directe economische waarde hebben, en die slagen er daardoor minder goed in subsidies te bemachtigen. Uiteraard zegt dit weinig over het wetenschappelijk kaliber. Daarnaast krijg ik soms de indruk dat met name wordt beloofd in welke mate men het ambacht verstaat een goed, glad voorstel te schrijven.

Het is mijn doel onderzoeksprojecten te werven in het bedrijfsleven, maar daarnaast is het voor het KdV ook van groot belang dat ik bijdraag tot de totstandkoming van interessante stageplaatsen. Geld verdienen zal echter nooit leidend zijn: de inhoud moet in voldoende mate wetenschappelijk interessant zijn. Een punt van zorg in dit alles betreft de budgetten die van overheidswege toegekend worden aan research en development. In Nederland betreffen die slechts 0.78% van het bruto binnenlands product, waar de norm, als vastgelegd in de Barcelona-convenanten, 1% is [21]. Het wordt voor mij daarom ook steeds onbegrijpelijker dat de politiek Nederland graag afschildert als een 'kenniseconomie'.

Een belangrijk gevaar dat ik observeer in mijn huidige contacten met bedrijven en in toegepast projectonderzoek, is de grote afstand tussen de voortreffelijke wetenschappelijke resultaten enerzijds, en hun toepassing (in concrete producten en diensten) anderzijds, de zogenaamde kennisparadox. Nieuwe subsidieprogramma's als *Smartmix* en *Casimir*, die die kloof moeten dichten, zijn hoopgevend, maar zie ik als slechts een eerste stap. Ik spreek mijn hoop uit dat de door NWO geclaimde uitbreiding van de tweede geldstroom [22] gerealiseerd zal worden.

Financiële toepassingen

Uit mijn onderzoeksactiviteiten blijkt mijn wens me te verbreden — mijn leerstoel heet 'Toegepaste kansrekening', en er zijn tal van



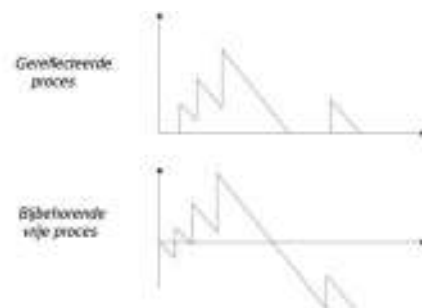
Figuur 6 Een Lévy-proces met een continue component en sprongen

domeinen waarin die toepassingen zouden kunnen liggen. Hiervoor sprak ik al over telecommunicatie, maar er zijn tal van andere mogelijkheden. Via Peter Spreij en zijn promovendus Vincent Leijdekker kom ik steeds meer in aanraking met het toepassen van stochastiek in de financiële wereld. Vincent Leijdekker werkt deeltijds bij ABN-AMRO, en deeltijds bij ons, en brengt momenteel het stochastische gedrag van failliet gaande bedrijven in kaart. Eenvoudig gezegd: voor banken is het nuttig te analyseren wat het risico, de kans dus, is, dat meerdere van hun klanten binnen een vaste tijdshorizon failliet gaan. Met ander woorden: ook in de financiële sector hebben veel relevante vragen te maken met zeldzame gebeurtenissen die eventueel geanalyseerd zouden kunnen worden met large deviations, of wellicht met andere probabilistische technieken.

Binnen de financiële toepassingen is ook een belangrijke rol weggelegd voor Lévy-processen. Dat zijn stochastische processen die zich kenmerken door onafhankelijke stationaire aangroeiingen. Die klasse van processen is, vanwege deze mooie eigenschappen, bijzonder goed te analyseren. Ze omvat belangrijke speciale gevallen. Die kunnen continu zijn, zoals de beroemde Brownse beweging (waarvan de relevantie in de financiële wereld al werd benadrukt door Bachelier in 1900 [2] — vijf jaar voor Einstein dus!), maar ze kunnen ook discontinu zijn, zoals het 'compound Poisson proces'. Figuur 6 toont een voorbeeld van een algemeen Lévyproces, met intervallen waarop het proces continu is, maar op bepaalde punten maakt het sprongen. Het is bekend dat dit soort processen goed gebruikt kan worden voor het modelleren van processen uit de financiële wereld.

Wanneer men bijvoorbeeld ruïneringsproblemen, die een centrale rol spelen voor verzekeringsmaatschappijen, wil onderzoeken, is men geïnteresseerd in de kansverdeling van de extreme waarden van zo'n Lévyproces. Opmerkelijk genoeg zijn er directe connecties tussen die verdeling en de stationaire verdeling van een gerelateerd wachtrijproces (dat gereflecteerd wordt op 0), zoals getekend in onderstaand figuur.

Dit betekent dat allerlei resultaten uit de zeer krachtige en zeer sterk ontwikkelde theorie van Lévy-processen in de wachtrijtheorie gebruikt kunnen worden, en vice versa. Het blijkt bijvoorbeeld dat het aloude resultaat van Pollaczek en Khinchine over de stationaire verdeling van de M/G/1-wachtrij uitgebreid kan worden naar gereflecteerde Lévy-processen.



Figuur 8 Gereflecteerd proces en bijbehorend vrij proces.

Met Onno Boxma en Offer Kella heb ik de laatste jaren naar dergelijke relaties gekeken. Hier liggen nog veel open problemen, zeker als men kijkt naar modellen waarin het Lévy-proces gemoduleerd wordt door een Markovketen. De analyse van die laatste klasse van modellen vereist de toepassing van een breed scala van geavanceerde technieken, variërend van martingaaltheorie tot spectraalmethoden. Met Ton Dieker, die hier vorig jaar onder mijn begeleiding is gepromoveerd, ben ik gekomen tot de volgende generalisatie van Pollaczek-Khinchine. Dit is mijn favoriete formule van de laatste jaren (zie Figuur 7).

Bio-stochastiek

Langs een andere weg ben ik recentelijk in aanraking gekomen met toepassingen van kansrekening in het kankeronderzoek. Een van de onderzoeksrichtingen hierin betreft de

$$(\psi - X(\beta) - \alpha I) E \left[e^{-\alpha F^X - \beta \tilde{X}}; \tilde{I} \right] = \begin{pmatrix} 0_{ss} & 0_{sz} & 0_{s-} \\ 0_{zs} & K_{zz} - \alpha I_{zz} & K_{z-} \\ 0_{-s} & K_{-z}^\alpha & \beta I_{--} + K_{--}^\alpha \end{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} 0_s \\ P_z(\tilde{X} = 0) \\ v_- \end{pmatrix}$$

Figuur 7 De favoriete formule van Michel Mandjes van de laatste jaren

vraag welke genen verantwoordelijk zijn voor het ontstaan van kanker. Veel onderzoek is gewijd aan de zogenaamde 'insertie mutagenese' waarbij de hypothese is dat kanker ontstaat door mutaties van genen. Om dit te onderzoeken laat men eerst laboranten op kunstmatige wijze mutaties veroorzaken bij proefdieren, bijvoorbeeld door virussen te injecteren. Hierdoor krijgt het proefdier een gewel, en dat kan dan weer nader geanalyseerd worden. De centrale vraag betreft nu de positie van het virus in het DNA: heeft het virus een 'voorkeur', in de zin dat specifieke genen zijn gemuteerd? Als onze hypothese juist is en kanker inderdaad ontstaat door mutaties van genen, verwacht je clusters van mutaties; bij een andere oorzaak zouden die volledig willekeurige posities innemen. Het menselijk genoom bestaat uit een zeer groot aantal van die posities, of *nucleotiden*; in de orde van drie miljard. Het aantal van die posities waarin het virus zich genesteld heeft, zogenaamde 'in-

serties', is veel kleiner: in de orde van 10000. Plaatjes van de verdeling van die inserties over het genoom lijken te suggereren dat er inderdaad van die clusters zijn, maar kan men dat ook statistisch onderbouwen? In stochastische termen is de vraag nu of die inserties, zouden kunnen stammen uit een homogene verdeling. Om dit vast te stellen moet, onder de hypothese van homogene spreiding, bepaald worden hoe waarschijnlijk het specifieke patroon is dat we observeren. In verband met 'multiple hypothesis testing correction' komen we, ook al zijn we geïnteresseerd in een betrouwbaarheidsdrempel van 5%, terecht in het domein van de zeer kleine kansen (in de orde van 10^{-5}). Het is gebleken dat ook hier large deviations toegepast kan worden.

Moraal

De moraal van het verhaal is de volgende. In verschillende toepassingsgebieden kunnen de cruciale vragen vaak geherdefinieerd wor-

den in generieke termen. Die kunnen geanalyseerd worden door bestaande technieken uit de kansrekening toe te passen, of door die bestaande technieken verder te ontwikkelen, of door een geheel nieuw instrumentarium op te zetten. De analyse van zeldzame gebeurtenissen door middel van large deviations, die we aantreffen bij de analyse van telecommunicatienetwerken, bij financiële modellen en bij kankeronderzoek, is daar maar een voorbeeld van. Bij het bekleden van mijn ambt zal het steeds mijn doel zijn bij te dragen op methodologisch gebied, maar ook die methoden te gebruiken bij het analyseren van concrete problemen. 

Referenties

- 1 D. Anick, D. Mitra en M. Sondhi, 'Stochastic theory of a data-handling system with multiple sources', *The Bell System Technical Journal* **61** (1982), pp. 1871–1894.
- 2 L. Bachelier, 'Théorie de la Spéculation (Thèse)', *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* III -17 (1900), pp. 21–86.
- 3 J. Beran, R. Sherman M. Taqqu en W. Willinger, 'Long-range dependence in variable bitrate video traffic', *IEEE Transactions on Communications* **43**, pp. 1566–1579
- 4 H. van den Berg, M. Mandjes en F. Roijers, 'Performance modeling of a bottleneck node in an IEEE 802.11 ad-hoc network', In: T. Kunz and S.S. Ravi (Red.): *Ad Hoc Now 2006*. 5th International Conference on Ad hoc Networks & Wireless 'Ad Hoc Now', Ottawa, Canada, *Lecture Notes in Computer Science Series* **4104** (2006), pp. 321–336.
- 5 T. Bheema Reddy, I. Karthigeyan, B. S. Manoj en C. Siva Ram Murthy, 'Quality-of-Service provisioning in ad hoc wireless networks: a survey of issues and solutions', *Journal of Ad Hoc Networks* **4** (2006), pp. 83–124.
- 6 J.W. Cohen, 'Superimposed renewal processes and storage with gradual input', *Stochastic Processes and their Applications* **2** (1974), pp. 31–58.
- 7 J.W. Cohen, *The Single Server Queue*. Gereviseerde editie, North-Holland, Amsterdam Nederland, 1982.
- 8 H. Cramér, 'Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités', *Actualités Scientifiques et Industrielles* **736** (1938), pp. 5–23
- 9 A. Dembo en O. Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, Jones and Bartlett Publishers, Boston MA, Verenigde Staten, 1993.
- 10 R. S. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, Springer, New York, Verenigde Staten, 1985
- 11 F. Geerdink (Red.), *Onderzoek is altijd belangrijker!*, 2e editie. Verslag van de conferentie over bewegingen in de wetenschappelijke loopbaan. Stichting SOFOKLES, 2006.
- 12 F. den Hollander, 'Large Deviations', *Fields Institute Monographs* **14**, American Mathematical Society, Providence RI, Verenigde Staten, 2000
- 13 A.YA. Khinchin, *Fundamental laws of probability theory*, Moskou (in het Russisch), 1927.
- 14 A.N. Kolmogorov, 'Sur la loi forte des grands nombres', *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **191** (1930), pp. 910–912.
- 15 P. Lieshout, M. Mandjes en S. Borst, 'GPS scheduling: Selection of optimal weights and comparison with strict priorities', *Proc. ACM Sigmetrics/Performance. Performance Evaluation Review* **34** (2006), pp. 75–86.
- 16 B. Mandelbrot en J.W. van Ness, 'Fractional Brownian motions, fractional noises and applications', *SIAM Review* **10** (1968), pp. 422–437.
- 17 M. Mandjes, *Large deviations for Gaussian queues*, Wiley, Chichester, Verenigd Koninkrijk, 2007.
- 18 M. Mandjes, P. Mannersalo en I. Norros, 'Gaussian tandem queues with an application to dimensioning of switch fabrics', *Computer Networks* **51** (2007), pp. 781–797.
- 19 M. Mandjes, P. Mannersalo, I. Norros en M. Van Uiter, 'Large deviations of infinite intersections of events in Gaussian processes', *Stochastic Processes and their Applications* **116** (2006), pp. 1269–1293.
- 20 M. Mandjes en A. Weiss, 'Sample path large deviations of a multiple time-scale queueing model', *Ingediend*, 2004.
- 21 *Wetenschap gewaardeerd!* NWO-strategie 2007–2010. Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek.
- 22 M. Persson, 'Geef onderzoekers rust, rust alstublieft', *de Volkskrant*, 27 mei 2006, p. Kennis-5.
- 23 A. Schwartz en A. Weiss, *Large Deviations for Performance Analysis*, Chapman & Hall, Londen, Verenigd Koninkrijk, 1995.
- 24 M. Taqqu, W. Willinger en R. Sherman, 'Proof for a fundamental result in self-similar traffic modeling', *Computer Communications Review* **27** (1997), pp. 5–23.
- 25 A. Verbrugge en M. Verbrugge, 'Help, het onderwijs verzuipt! Leraren, leerlingen en ouders moeten samen de strijd aangaan voor beter onderwijs', *NRC Handelsblad*, 3 juni 2006, pp. 15–16.

Ellen Baake

Faculty of Technology, Bielefeld University
Box 100131, 33501 Bielefeld, Germany
ebaake@techfak.uni-bielefeld.de

Research: The Luria-Delbrück experiment

Are mutations spontaneous or directed?

Where do mutations come from, and what do they have to do with mathematics? A lot, as this article will demonstrate. Indeed, it was a historical milestone of mathematical biology that revealed some fundamental insight into the nature of mutations during the 1940's. An unresolved question in those days was: 'Are mutations due to directed adaptation to environmental change, or do they occur spontaneously, in a random way?' Today, the answer is basic knowledge in genetics, and many textbooks briefly describe the crucial experiment, along with some plausibility arguments. It is hardly known, however, that it was a fascinating interaction of theory and experiment that made this breakthrough possible. Ellen Baake, professor in bio-mathematics at the university of Bielefeld in Germany, and 'Kloosterman-hoogleraar' 2006–2007 at the University of Leiden gives an account of this history.

Before we formulate the problem in a precise way, let us describe the experimental observation that solicited the question in the early 1940's (see Figure 1).

The experimental observation

The microbiologist S. Luria analyzed how resistance against certain bacteriophages originated in *E. coli* bacteria. Bacteriophages are viruses that attack bacteria, multiply within their cells and eventually destroy them — provided the bacterium is *sensitive* to this phage, that is, if it is not resistant. To this end, Luria raised *E. coli* cultures in a suitable medium, starting from a single sensitive cell every time (or very few of them, but let us idealize a bit here). The growth of the bacterial popula-

tion is visible through the increasing turbidity of the medium, caused by the scattering of light by bacteria (which distribute themselves all over the medium). After a few days, when the population is fairly dense, one adds a certain amount of phages. As a consequence, the bacteria are destroyed, the dead cell fragments sediment, and the culture clears. But after a few days, the medium turns turbid again, meaning that a new bacterial population is growing. What has happened?

Two hypotheses

Clearly, a few cells have survived that are happy in the presence of the phage, so they must be *resistant*. This resistance persists over many further generations in culture, so it must

be *heritable*. But all our bacteria go back to a single sensitive cell, so a *mutation* must have happened under way. The crucial question is: when? Figure 2 shows the two principal possibilities.

- (SM) A few bacteria are already resistant before the phage arrives; mutations thus happen *spontaneously* while the culture is growing, independently of the selection to be applied later by the phage.
- (DM) A few bacteria acquire resistance when they are exposed to the phage; that is, mutations are *directed* (in the sense of a specific response to the selection applied; they would not occur in the absence of the phage).

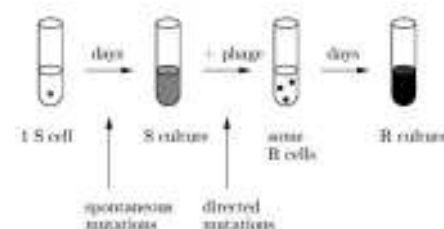


Figure 1 The origin of resistance in a bacterial culture. S stands for sensitive, R for resistant

Today, it is basic biological knowledge that (SM) is true: mutations occur in a spontaneous way. Beneficial mutations (these tend to be very rare!) may later be filtered out (selected) by the environment (in our case, only resistant cells survive the phage), but they are not directed by selection.

Luria and Delbrück managed to prove this in 1943 [1], at a time where one could not even think of the powerful genetic methods that are standard in modern labs. The molecular basis of inheritance, and even more so that of mutations, was still in the dark. (It had to wait until 1952, when Hershey and Chase discovered that genetic information is carried by DNA; one year later, Watson and Crick unravelled its famous double helix structure.) Indeed, Luria and Delbrück's decisive experiment boiled down to nothing more than counting cells; and the evaluation of their data required only elementary probability. However, the story is fascinating due to exactly this simplicity, in combination with the underlying idea and the stringency of the argument.

The model

In what follows, we will even simplify the original considerations a bit further. This will make the essential idea still clearer; we hope that specialists will forgive us. The hypotheses (SM) and (DM) lead to the following fundamental consideration (see Figure 2).

After T rounds of division (or generations) starting from the initial cell, the bacteria come in contact with the phage. In case (SM), the mutants have originated before this; one will

assume that every sensitive (S) bacterium becomes resistant (R) in every generation $t < T$ with some small probability p . Resistance is heritable, that is, it is passed on to the offspring. In generation T , we will therefore have resistant clones, the offspring of the primary mutants.

In case (DM), resistance solely originates in generation T . Now, every bacterium mutates independently of all others, with probability $\tilde{p}$, and survives; the others fall prey to the phage. It is actually irrelevant whether every individual cell truly has the same chance $\tilde{p}$; it may also be conceived that the result is determined by small physiological differences between the cells (e.g., size or nutritional status, which may vary within certain limits). In this case, one would assume that cells with certain favourable properties are predisposed in the sense that they will become (stably) resistant if they meet a phage. As long as these physiological dispositions themselves are not heritable, i.e., as long as they are not passed on to the offspring over several generations, the situation still boils down to the described random experiment (provided the experimentalist cannot, or does not, distinguish between the different cell variants).

The essential property of (DM), relative to (SM), lies in the fact that physiological dispositions are defined by their temporary occurrence — if they were heritable, we would be in the setting (SM). This is because it is irrelevant for the result whether the cell is already resistant before T , or whether it has a heritable disposition that leads to resistance as soon as it comes across the phage.

How could Luria and Delbrück distinguish between these possibilities? The only method available to them was counting resistant cells in generation T (we will describe below how exactly this is done). The question therefore reads: How can we decide, by counting resistant cells, whether they are clones or independent individuals (in the sense of a random sample from the population)?

Clearly, this is impossible to decide on the basis of the number of R cells in a single experiment (cf. Figure 2), and the average over many experiments is equally uninformative. However, the stochastic fluctuations between experiments yield the desired distinction. To analyze these, we will now formulate an idealization (a model) of the scenarios (SM) and (DM), and make our assumptions more precise.

The model must describe both cell divi-

sion (i.e., population growth) and the mutation process. *Population growth* will be modelled *deterministically*, owing to the fact that it only takes a few generations until the population is very large. For simplicity, we assume that cells divide into two daughter cells in a synchronous way (that is, time is discrete). Starting with a single cell then results in a population of $n(t) = 2^t$ cells in generation t . We set

$$N := n(T) = 2^T,$$

the number of cells in generation T .

In contrast, the *mutation process* must be described in a stochastic manner, for mutations are rare events ($p, \tilde{p} \ll 1$). The quantity to be described is Z , the number of resistant cells in generation T ; it is a random variable. In this section, we will calculate the expectation $\mathbb{E}(Z)$ and the variance $\mathbb{V}(Z)$ under the hypotheses (SM) and (DM); on the basis of these quantities, Luria and Delbrück solved the problem in 1943. In the next section, we will characterize the distribution of Z in more detail.

In the case (DM), no further assumptions are required. Each of the N cells in generation T turns resistant with probability $\tilde{p}$, hence Z has a binomial distribution with parameters N and $\tilde{p}$; we write $Z \sim B(N, \tilde{p})$. Therefore,

$$\mathbb{E}(Z) = N\tilde{p}, \quad \mathbb{V}(Z) = N\tilde{p}(1 - \tilde{p}). \quad (1)$$

In experiments, $\tilde{p} \approx 10^{-8}$ and N lies between 10^8 and 10^{10} ; hence, expectation and variance are equal up to a tiny error term. (This error term is just the deviation that occurs if the binomial is approximated by a Poisson distribution with parameter $\lambda = N\tilde{p}$.)

To treat case (SM), we must first make our assumption about the mutation mechanism more precise. We will use the following *idealization*.

- (Ao) The initial cell is sensitive.
- (A1) Mutations ($S \rightarrow R$) occur on the occasion of cell divisions. With probability p , one of the daughter cells is a mutant. (Here we have in mind a mechanism of division where the 'original' remains intact, whereas the 'new copy' may contain an error.)
- (A2) As long as the phage is absent, S and R cells divide in the same way, i.e., in every generation.
- (A3) The number of resistant cells is, at any time, negligible relative to $n(t)$ (this is justified since $p \ll 1$), so that the number of S cells may be described by $n(t)$.
- (A4) Back mutations ($R \rightarrow S$) are negligible. (The probability for any single R cell to

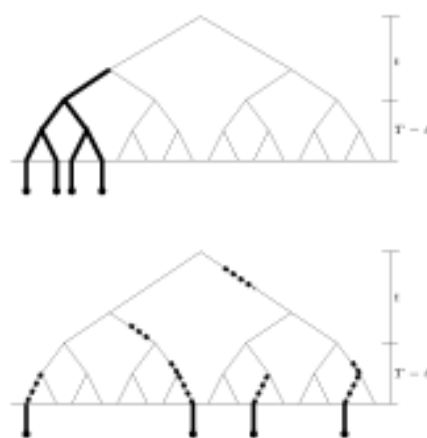


Figure 2 Genealogy (discrete generations) of a bacterial culture with spontaneous (top) and directed (bottom) mutations. Thin lines indicate sensitive bacteria, fat lines mean resistant ones. Dashed lines indicate cells that are predisposed to become resistant when they come in contact with the phage. The phage arrives in generation T ; only resistant, or predisposed, cells survive it. If mutations arise spontaneously, we observe resistant clones; if they are directed, the resistant cells are independent.

mutate back is of a similar magnitude as p , wherefore — given (A3) — the number of events is tiny indeed.)

In order to calculate $\mathbb{E}(Z)$ and $\mathbb{V}(Z)$, we will now proceed generation by generation. We will denote by $X(t)$ the number of *mutation events* that occur at the t 'th cell division (that is, the division that leads from generation $t-1$ to generation t , where the initial cell is generation 0). Let $Y_T(t)$ then be the number of *mutants* in generation T that go back to a *mutation event* in generation t . With a *mutation event*, we mean every transition $S \rightarrow R$, whereas a *mutant* is any R cell, whether it just originated by a 'primary' mutation event, or is an offspring of an already resistant cell.

Due to (A2), every mutation event that occurred in generation t will produce a resistant clone of size 2^{T-t} until generation T . Therefore,

$$Y_T(t) = 2^{T-t} X(t), \quad 1 \leq t \leq T. \quad (2)$$

For ease of notation, we will, in what follows, abbreviate $Y_T(t)$ by $Y(t)$; but keep in mind the dependence on T .

Finally, the number of resistant cells in generation T is

$$Z = \sum_{t=1}^T Y(t). \quad (3)$$

Let us now calculate expectation and variance for $X(t)$, $Y(t)$ and Z . Due to (A1), (A3), and (A4), we have $X(t) \sim B(n(t), p)$ and therefore

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)) &= n(t)p, \\ \mathbb{V}(X(t)) &= n(t)p(1-p) \\ &= (1-p)\mathbb{E}(X(t)). \end{aligned} \quad (4)$$

In contrast to $X(t)$, $Y(t)$ is not binomially distributed (the members of a clone are not independent!). Actually, it has none of the standard distributions, but its expectation and variance follow directly from (2) and (4) (as well as $2^T = N$):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(t)) &= 2^{T-t} \mathbb{E}(X(t)) = Np \\ \mathbb{V}(Y(t)) &= 2^{2(T-t)} \mathbb{V}(X(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

These relationships are simple but illuminating. Eq. (5) shows that, on average, every generation eventually produces the same number of mutants: for small t , there are few mutation events, but those that do occur have large offspring, and vice versa, and these effects just compensate each other. Equation (5) contains an important hint towards the idea of

the Luria-Delbrück experiment: the variance of $Y(t)$ is increased by a factor of $2^{T-t}(1-p)$ (i.e., close to clone size) relative to the expectation.

Finally, (3) and (5) jointly give

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E}(Y(t)) = T N p \quad (6)$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z) &= \sum_{t=1}^T \mathbb{V}(Y(t)) \\ &= 2^T N p (1-p) \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{2}\right)^t \\ &= 2^T \left(1 - \frac{1}{2^T}\right) N p (1-p). \end{aligned} \quad (7)$$

In the first step of (7), we have used the independency of $Y(t)$ (one has dependence *within* clones, but none *between* clones — the latter being due to (A3).)

Comparing (1), (6) and (7) now yields the crucial difference between spontaneous and directed mutations, which we summarize as

Fact 1. Under assumptions (A0)–(A4), the ratio of variance to expectation is

$$\frac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)} = \begin{cases} 1 - \tilde{p} \approx 1 & \text{for directed mutations,} \\ (2^T - 1)(1-p)/T \gg 1 & \text{for spontaneous mutations.} \end{cases} \quad (8)$$

Experiment and control

Equation (8) suggests how to distinguish between (SM) and (DM). Grow a large number of parallel cultures (each from a single cell), add the phage, count the surviving cells, and compare the mean m_z to the empirical variance s_z^2 (as estimates of $\mathbb{E}(Z)$ and $\mathbb{V}(Z)$). What is still missing is the counting method. This is illustrated in Figure 3 and works as follows.

Every culture is transferred to a separate agar plate covered amply with a suspension of phages (filled arrowheads in Figure 3). The sensitive cells die, the (few) resistant ones continue to divide. Every single one of them forms a colony, which may be discerned with the unaided eye. Proceeding this way with 50–100 parallel cultures and counting the resistant cells in each of them, Luria and Delbrück [1] obtained values for s_z^2/m_z in the range of 4 to 620, with a typical value of 225 as in the example in Figure 4. This figure shows the empirical distribution of R in one particular set of parallel cultures, and compares it with the corresponding distribution that would be expected under the direct-

ed mutation hypothesis. The observed histogram deviates from the expected one in a striking way, clearly demonstrating the 'jackpot effect' that results from the rare early mutations with their large progeny.

Although the results look very convincing, it must be mentioned that a factor as large as $(2^T - 1)(1-p)/T$ (as predicted by (8) for spontaneous mutations) is never observed in any such set of experiments. Indeed, it is not expected to be observed in any real experiment due to a sampling effect. By (5), the largest contribution to the variance comes from the very early generations; here, however, cells are so few, and mutation events so rare, that they are practically never observed in any given (*finite*) number of parallel experiments. To correct for this, Luria and Delbrück replaced T by $\hat{T}$, where $\hat{T}$ is (essentially) the expected age of the oldest mutation, taken over the given number of parallel experiments. With this (heuristic) correction for sampling, the predicted factor is even smaller than the observed one in all but one set of experiments [1].

Clearly, therefore, the observations do point towards spontaneous rather than directed mutations. As we have seen, this has been decided on the basis of the underlying source(s) of randomness, for which there are two possibilities. The fluctuations caused by the fact that some cells become resistant while others don't is present in either case; it leads to a binomial distribution. The additional (and much larger) fluctuations caused by the variability of the *time* at which a mutation event occurs are only present if mutations are spontaneous. Since early mutations with very large progeny are rare, they cause the jackpot distribution with its abnormally high variance.

This latter insight occurred to Delbrück (the theoretician in the team) while watching a

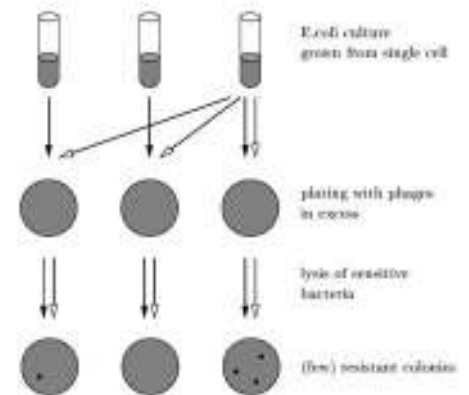


Figure 3 The Luria-Delbrück experiment (filled arrowheads) and its control experiment (hollow arrowheads)

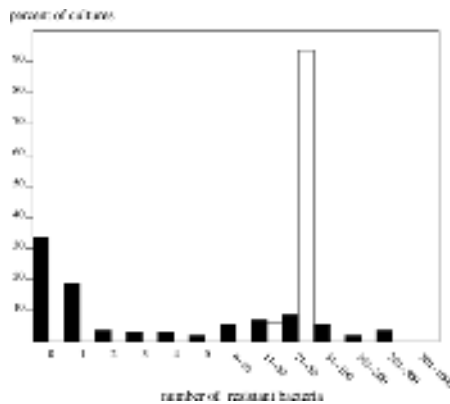


Figure 4 Histogram of the number of resistant bacteria, as observed in 87 parallel cultures (black bars; set of experiments no. 23 in [1]), and corresponding distribution expected under directed mutation (white bars). The latter is a binomial distribution determined by the observed total number of cells per culture, $N = 2.4 \times 10^8$, and the observed mean number of resistant cells, $N\bar{p} = 28.6$; this is indistinguishable from the Poisson distribution with mean 28.6, $P(28.6)$. Note the increasing class sizes on the horizontal axis. In this set of experiments, $s_z^2/m_z = 225$.

(maybe illegal) slot machine in a country club in Bloomington, which, in true slot machine manner, spits out a little money fairly frequently, whereas only very rarely, one receives a large return.

Luria (the experimentalist among the two) suspected something different. Performing a large number of experiments over an extended period of time, he worried about the large fluctuations of his cell counts from day to day, and first blamed the counting method (incubation on selective medium and colony formation) to be unreliable and bring about the fluctuations — until he performed the decisive *control* experiment, which we will now describe.

Here, a large number of plates (again with phage suspension) is inoculated with samples from *the same* bacterial culture (Figure 3, hollow arrowheads). If the counting method

works correctly, the number of bacteria per plate should now be distributed according to $B(m, \bar{p})$, if m is the number of bacteria per plate and $\bar{p}$ the proportion of resistant cells in the particular culture used, so one would expect $s_z^2/m_z = 1 - \bar{p}$, i.e., a value very close to one. This is indeed what is observed: the average and empirical variance of Z now turn out approximately equal. This proves that the extra fluctuations observed in the experiment proper are inherent in the original cultures, rather than being an artifact of plating and counting.

Afterthoughts

The insight gained by Luria and Delbrück was the beginning of our understanding of mutations. Of course, the analysis may be (and has been) improved (statistically and otherwise), but the essence remains unchanged: Large fluctuations point to spontaneous mutations. It should be noted that Luria and Delbrück did not ‘only’ *answer* the question about the nature of mutations — in fact, they were the first to clearly *pose* it, formulate the alternatives, and put up the correct conceptual framework. Their original paper is illuminating to read because of the clarity of the argument.

Their historical experiment has lost nothing of its relevance until today. Known under the name of ‘fluctuation test’, it belongs to the standard repertoire of many genetics practicals, for the simple reason that it always works, in a foolproof way, independently of the selection pressure applied. In particular, resistance to antibiotics is readily bred by applying antibiotics — an ardent problem these days.

For Luria and Delbrück, their 1943 paper was only a start into further fundamental research in genetics of both bacteria and phages; to-

gether with A. Hershey, they received the Nobel Prize for physiology and medicine in 1969.

To avoid misunderstandings, let us briefly revisit the notions concerning the mutation mechanism. The attentive reader may have noticed that, following standard terminology, we have formulated the alternative mutation mechanisms as ‘spontaneous’ versus ‘directed’, in the sense of ‘arising independently of selection’ versus ‘arising as a response to selection’.

We have, so far, not considered the alternative that mutations may be *induced* by the environment, but in an undirected way. Of course, it is common knowledge today that UV radiation, mutagenic substances etc. can drastically increase an organism’s mutation rate; and these mutations are independent of whether they are advantageous or deleterious for the organism under the given circumstances. In the conceptual framework used here, they would simply be spontaneous mutations. Luckily, the T1 phages used by Luria and Delbrück were not mutagenic (phages are rarely mutagenic). If the phage had been (highly) mutagenic, the counts of R cells would have been dominated by the mutations induced by the phage at the moment of its appearance, which would have pointed to directed mutations. Indeed, as Luria and Delbrück correctly note, their experiment tells us *when* the mutations arise, but not *why*.

Acknowledgement

It is my pleasure to thank Evelyn Rost for designing the figures.

References

- 1 S. Luria and M. Delbrück, ‘Mutations of bacteria from virus sensitivity to virus resistance’, *Genetics* **28** (1943), pp. 491–511.

Hans Duistermaat

Mathematisch Instituut Universiteit Utrecht
Postbus 80 010, 3508 TA Utrecht
duis@math.uu.nl

Abel prize winner 2006: Lennart Carleson

Achievements until now

What conjecture will Lennart Carleson attack next? Lennart A.E. Carleson, 2006 Abel Prize winner is known for at least three cornerstone achievements in mathematical analysis. The proofs of these long-standing conjectures are all very complicated. At the Dutch Mathematical Conference 2007 in Leiden, Hans Duistermaat, professor in mathematics at the Utrecht University and one of the great specialists in the field of Fourier theory, explains Carleson's results.

Lennart Axel Edvard Carleson was born in 1928. He obtained his PhD in 1950 in Uppsala with Arne Beurling with the thesis, *On a class of meromorphic functions and its exceptional sets*. He has been professor at the University of Uppsala (1955–1993) and the University of California at Los Angeles, and has had 26 PhD students. He was director of the Mittag-Leffler Institute in Djursholm from 1968–1984, where he placed special emphasis on stimulating young mathematicians, and was president of the International Mathematical Union 1978–1982.

He has been awarded the Leroy Steel Prize (AMS) in 1984, the Wolf Prize in Mathematics in 1992, the Lomonosov Gold Medal in 2002, the Sylvester Medal in 2003, and the Abel Prize in 2006. The latter “for his profound and seminal contributions to harmonic analysis and the theory of smooth dynamical systems.”

MathSciNet has 68 matches. His most famous ones are:

- ‘Interpolations by bounded analytic functions and the *corona problem*’, *Annals of Math* **76** (1962), pp. 547–559.
- ‘On the convergence and growth of partial sums of *Fourier series*’, *Acta Math* **116** (1966), pp. 135–157.
- (with M. Benedicks) ‘The dynamics of the *Hénon map*’, *Annals of Math* **133** (1991), pp. 73–169.

The corona theorem

According to the uniformization theorem, every simply connected complex one-dimensional complex analytic manifold which admits a non-constant *bounded* holomorphic function is conformal to the open unit disc $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ in the complex plane. The set B of all bounded holomorphic functions on D forms a Banach algebra, when provided with the supremum norm.

Let $f_1, \dots, f_n \in B$ and let I denote the ideal in B generated by $f_1, \dots, f_n$, so I is the set of all $\sum_{i=1}^n g_i f_i$ where $g_i \in B$. We have $I = B$ if and only if there exist $g_i \in B$ such that $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$. If there exists $z \in D$ such that $f_i(z) = 0$ for $1 \leq i \leq n$, then $h(z) = 0$ for every $h \in I$, and I is a proper ideal in B .

If the f_i do not have a common zero in D , but if there exists a sequence $z_j \in D$ such that $f_i(z_j) \rightarrow 0$ for $j \rightarrow \infty$, for every $1 \leq i \leq n$, then $\forall h \in I$ $h(z_j) \rightarrow 0$ for $j \rightarrow \infty$, and again I is a proper ideal in B . Note that in this case $|z_j| \rightarrow 1$, and by passing to a subsequence we can arrange that the z_j converge to a point on the boundary $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ of D . The case which remains is that there exists a $\delta > 0$ such that

$$\sum_{i=1}^n |f_i(z)| \geq \delta \quad (*)$$

for every $z \in D$, when h belonging to I does not correspond to h having a zero in D or, in the above sense, in ∂D , so $h \in I$ would be a ‘corona property’ when the disk of the sun is eclipsed by the moon.

Carleson proved that condition (*) implies that $I = B$, which settles the matter.

Fourier series

Limits of sums

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

where the coefficients $c_k \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{Z}$, are given, and $n \rightarrow \infty$ appeared in the 18-th century. In the beginning of the 19-th century Fourier very convincingly demonstrated their usefulness in analysis and, among others, proved that if $s_n(x) \rightarrow f(x)$ as $n \rightarrow \infty$ in a weak sense, then

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

The right hand side is called the k -th Fourier coefficient $c_k(f)$ of an arbitrary integrable function f (or even 2π -periodic distribution f). In this way each integrable 2π -periodic function has its Fourier series, and around 1800 one had the camp of people who believed that 'every' function f was equal to its own Fourier series, and the skeptics who couldn't believe this.

In 1829 Dirichlet gave a convergence proof which worked for every continuous function f which is piecewise monotonic. He suggested that every continuous function is piecewise monotonic, which is a bit strange, because it is easy to construct a convergent Fourier series which is not monotonic on any subinterval.

Then in 1876 Du Bois-Reymond constructed a continuous 2π -periodic function f such that for every x in a countable dense subset E of $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ the partial sums $s_n(x)$ are not even bounded. This shows that, for a given integrable function f on $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, the problem for which $x \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ the $s_n(x)$ converge to $f(x)$ is quite subtle. Carleson's proof that, when $f \in L^2(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$, the set of $x \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ such that the $s_n(x)$ do not converge to $f(x)$ has zero Lebesgue measure, was a breakthrough in harmonic analysis.

The Hénon map

The Hénon map is defined by the transformation

$$T : (x, y) \mapsto (1 + y - ax^2, bx)$$

from the plane to itself, with $a, b \in \mathbf{R}$ as parameters. It had been

introduced in 1978 by Hénon, with $a = 1.4$ and $b = 0.3$, as a simple example where computer simulations indicate the existence of a strange attractor for iterations of T , similar to those obtained by Lorenz in 1963 in his higher dimensional weather models. The simulations with such models indicate not only parameter values for which the dynamical system has chaotic behaviour, but also open regions in the parameter space with finite periodic orbits as attractors, and these open regions even could be dense in the parameter space. Sheldon and Newhouse proved that (long-)periodic attractors are topologically (not in measure) generic, and actually it turned out to be very hard to *prove* that the set of parameter values, for which the iterates of the transformation show chaotic behaviour, has positive Lebesgue measure.

Benedicks and Carleson studied the dynamics of the Hénon map for small positive values of b and for a close to 2. In this case the Hénon map is a small perturbation of the one-dimensional quadratic map

$$x \mapsto 1 - ax^2 \quad (**)$$

for which Jakobson in 1981 had proved chaotic behavior for a set of parameter values a with positive Lebesgue measure. Using Lyapunov exponential estimates for (**) with a close to 2, Benedicks and Carleson proved the following theorem.

Theorem. *Let W^u be the unstable manifold of T at its fixed point in $x > 0$, $y > 0$. Then for every $c < \log 2$ there exists a number $b_0 > 0$ such that for all $0 < b < b_0$ there exists a set $E(b) \subset \mathbf{R}$ of positive Lebesgue measure such that for all $a \in E(b)$ the following statements hold.*

- i. *There is a nonempty open U such that for all $z \in U$: $\text{dist}(T^v(z), \overline{W^u}) \rightarrow 0$ as $v \rightarrow \infty$. Moreover, the domain of attraction of $\overline{W^u}$ has non empty interior.*
- ii. *There exists an element $z_0 \in W^u$ such that $\{T^v(z_0)\}_{v=0}^\infty$ is dense in W^u , and*

$$||DT^v(z_0)(0, 1)^t|| \geq e^{cv}.$$

The above theorem implies strange attractors for each pair of numbers a and b satisfying $0 < b < b_0$, $a \in E(b)$.

Later developments

For each of the three problems, the subject had already intensively been studied when Carleson entered, and the statements had been conjectured, with the recognition that it looked very difficult to prove these. Therefore one cannot say that Carleson invented the subject or the theorems, but that in each case his contribution consisted of the introduction of techniques which were powerful enough to prove these basic theorems in the subject. Because these techniques are the main contributions of Carleson, I would have loved to be able to explain these to you in sufficient detail here, so that you would really understand what is going on. However, I have to admit that trying to understand Carleson's proofs, I soon realized that it would probably take months of concentrated work for me to do so, and because I did not have that time, I had to admit defeat. It was only a slight consolation that in later articles on the subject many of the specialists in the subject also found Carleson's proofs to be technically very difficult, but at the same time his techniques to be very powerful, notably for the proof of the one particular theorem. Therefore other proofs were also of great interest to the specialists. I mention, regarding later



Lennart Carleson receives the Abel prize from Queen Sonja of Norway

Photo: Knut Falch/Scampix; copyright: Det Norske Videnskaps-Akademiet/Abelprisen

developments, the following articles.

- T.W. Gamelin, 'Wolff's proof of the corona theorem', *Israel J. Math.* **37** (1980), pp. 113-119, which unlike Carleson's proof, is based on the use, suggested by Hörmander in 1967, of estimates for the Cauchy-Riemann operator $\partial/\partial\bar{z}$. E. L. Stout: "This proof is a gem of classical analysis".
- R. A. Hunt, 'On the convergence of Fourier series', pp. 235-255 in the *Proc. Conf. on Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues, Edwardsville, 1967*, Southern Illinois Univ. Press, Carbondale (1968) shows that almost everywhere convergence of Fourier series is true for any $f \in L^p$, $p > 1$.
- C. Fefferman, 'Pointwise convergence of Fourier series', *Annals of Math.* **98** (1973) pp. 551-571 contains a new proof of Hunt's theorem which has been very influential.
- C. Thiele, 'Wave Packet Analysis', *CBMS Reg. Conf. Series* **105**, AMS, Providence (2006), Chapter 7, contains a very nice exposition in terms of wave packets.

There are quite many more recent papers in dynamical systems which build on the methods of Benedicks and Carleson, for example [3]. However, I have not seen an essentially new proof of the theorem of Benedicks and Carleson, where also by the specialists B and C's proof is characterized as 'a true tour de force'. Instead I found an article by Dobrynskii in the *Doklady* 2004 [2], in which it is claimed that the Benedicks-Carleson set is empty, in flat contradiction with the B-C theorem. The *Math. Reviews* reviewer M.L. Blank drily remarks that "unfortunately D's paper is written in a way that makes it very difficult, if not impossible, to check the claim". As the Abel prize was awarded in 2006 to Carleson for, among others, "his profound and seminal contributions to the theory of smooth dynamical systems", I surmise that the Abel prize committee had sufficient support from the specialists to be convinced that the Benedicks-Carleson theorem is correct.

Carleson's proof of the corona theorem

I would like at least to convey *some* of the techniques in which Carleson excels. For the proof of the corona theorem, let $f_1, \dots, f_n \in B$ and $\sum_{i=1}^n |f_i(z)| \geq \delta > 0 \forall z \in D$. His proof is by induction on n . First assume that f_n has only finitely many simple zeros a_v in D and is bounded away from zero near ∂D . For z in a sufficiently small open neighborhood E of the zero set of f_n we have $|f_n(z)| \leq \frac{1}{2}\delta$, hence $\sum_{i=1}^{n-1} |f_i(z)| \geq \frac{1}{2}\delta$. Therefore if E is the union of disjoint simply connected domains, then in each of these the corona theorem holds for $f_1, \dots, f_{n-1}$, which leads to bounded holomorphic functions $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ on E such that $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i f_i = 1$ on E . Let $g_1, \dots, g_{n-1}$ be bounded holomorphic functions on D such that $g_i(a_v) = \gamma_i(a_v)$ for all v . We can take the g_i as polynomials, but later in the proof it becomes essential to take $g_i \in B$ with minimal supremum norm. Now $g_n = (1 - \sum_{i=1}^{n-1} g_i f_i) / f_n$ is analytic in D

because $1 - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(a_v) f_i(a_v) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(a_v) f_i(a_v) = 0$ for every v . The function g_n is bounded because f_n was assumed to be bounded away from zero. For any finite set of distinct point a_v in D the Blaschke product

$$A(z) = \prod_{v=1}^s \frac{a_v - z}{1 - \bar{z} \bar{a}_v} \frac{\bar{a}_v}{|a_v|}$$

is the prototype of a bounded analytic function on D with simple zeros in the a_v . Actually $|A(z)| = 1$ when $|z| = 1$ and therefore $|A(z)| \leq 1$ when $|z| < 1$. For general $f_n \in B$, using suitable approximations of suitable B-multiples of f_n by means of Blaschke products, it is sufficient, in the above proof with f_n replaced by A , that the above interpolation problem $g(a_v) = \gamma(a_v)$, has solutions $g \in B$ with $\|g\| < \delta^{-C}$, when the γ is holomorphic and $|\gamma| < 1$ in a neighborhood of the a_v where $|A(z)|$ is of order δ .

In a previous paper [4] Carleson had showed that the minimal norm for G is equal to

$$\sup \left\{ \left| \sum_{v=1}^s \frac{G(a_v) \gamma(a_v)}{A'(a_v)} \right|, G \text{ analytic on } D, \|G\|_1 = 1, \right\}$$

where

$$\|G\|_1 = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(re^{i\theta})| d\theta.$$

On the other hand, Cauchy's integral formula yields

$$\sum_{v=1}^s \frac{G(a_v) \gamma(a_v)}{A'(a_v)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G(z) \gamma(z)}{A(z)} dz,$$

where Γ is a one-dimensional cycle which runs once around each zero a_v of A . We therefore have the desired estimate if we can arrange that

$$\delta^N < |A(z)| < \delta \text{ on } \Gamma, \quad (\dagger)$$

with $N > 1$ suitably chosen, and there is a constant M such that

$$\int_{\Gamma} |G(z)| |dz| \leq M, \quad (\dagger\dagger)$$

for all G analytic on D such that $\|G\|_1 = 1$. Because the level curves of $|A(z)|$ can become too long for the arbitrary Blaschke products, these level curves in general cannot be taken as Γ . The heart of Carleson's proof is a very ingenious construction of Γ such that $(\dagger)$ and $(\dagger\dagger)$ holds. This shows Carleson's mastery in making *geometric* constructions which satisfy the needed analytic estimates, in situations where *no simple constructions* yield the desired estimate. $\leftarrow$

References

- 1 D.K. Arrowsmith, and C.M Place, *Dynamical systems*, Chapman & Hall, 330 pp., 1992.
- 2 V.A. Dobrynskii, 'On the existence of Hénon attractors', *Doklady Math.* **70** (2004), pp. 574-579.
- 3 M. Benedicks, 'Non uniformly hyperbolic dynamics: Hénon maps and related dynamical systems', *Int. Congr. of Mathematicians, Beijing 2002*, vol. III, pp. 255-264.
- 4 L. Carleson, 'An interpolation problem for bounded analytic functions', *Amer. J. Math.* **80** (1958), pp. 921-930.

Dirk van Dalen

Department of Philosophy
Utrecht University
Heidelberglaan 8
P.O. Box 80126
3508 TC Utrecht
The Netherlands
dirk.vandalen@phil.uu.nl

Volker R. Remmert

AG Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
FB 08 - Physik, Mathematik und Informatik
Johannes-Gutenberg-Universität Mainz
D-55099 Mainz
Germany
vrr@mathematik.uni-mainz.de

Geschiedenis

Ce périodique foncièrement international

The birth and youth of *Compositio Mathematica*

The journal '*Compositio Mathematica*' was founded by Luitzen E.J. Brouwer to counter his dismissal from the '*Mathematische Annalen*' in 1928. In spite of the economic crisis, Brouwer succeeded in finding a publisher, Noordhoff, an editorial board and subscribers. The founding took place at the time of the rise of the Third Reich, which caused problems of a political nature. The German editors followed Ludwig Bieberbach in 1934 when he left the board because Brouwer refused to dismiss the Jewish editors. After a period of flourishing, the publication was suspended at the beginning of the occupation of Holland in 1940. The post-war restart of the journal led to a painful conflict between Brouwer and the publisher, which ended with Brouwer's withdrawal from power. After having founded his own journal in the early 1930s, he lost it again some twenty years later. This article appeared in the September 2006 issue of the '*Compositio Mathematica*'.

The early history of *Compositio Mathematica* is intimately intertwined with political issues, which in turn are closely linked to general European history. This is true for not only Luitzen E.J. Brouwer's initial motivation to found *Compositio*, but also for the considerable editorial turmoil in 1934–35 and, finally, for the temporary demise of *Compositio* after German troops invaded the Netherlands in May 1940. One can discern three periods in the history of *Compositio*: the first period under Brouwer's aegis; the second one after the reorganization in the 1950s, which is where our account stops; and we are now in the third period under the new publisher.

The main sources we draw on are *Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L.E.J. Brouwer. Hope and Disillusion* [5], and *Mathematicians at war. Power struggles in Nazi Germany's mathematical community: Gustav Doetsch and Wilhelm Süss* [9]. In addition use is made of oral communications of Hans Freudenthal and of material in the Brouwer and the Freudenthal archives. We are indebted to Oxford University Press and *Revue d'histoire des mathématiques* for their permission to make free use of the material published in the above-mentioned sources. Letters to and from Brouwer and Freudenthal are in the archives of Brouwer and Freudenthal.

How *Compositio* was founded

In a sense, the birth of *Compositio* was the result of totally unforeseen circumstances. Nobody was actually planning for a new mathematics journal, and the mathematical community was quite content with the assortment of international journals. The unintended cause of the founding of this new journal was a curious conflict, that, from our present-day point of view, was totally unnecessary.

The conflict is known by the name Albert Einstein gave it: the *war of the frogs and the mice*. The story has been told elsewhere, and there is no need to go into it here. It will suffice to say that there were at least three causes (more or less independent) of the conflict. There was a deep foundational rift separating the two antagonists, L.E.J. Brouwer and David Hilbert. This part has gone down in history as the 'intuitionism-formalism debate'. The second cause was of a political nature; it was the legacy of the 1914–18 war that had split the scientific community along the lines of the opposing parties. Brouwer's unreserved and full opposition to the boycott of scientists from the Central coalition by the Allied countries had rendered him in the eyes of Hilbert un-

fit to act in the name of the *Mathematische Annalen*. Finally there was a hardly veiled conviction that the *Mathematische Annalen* belonged in Göttingen; Brouwer was viewed in this respect as a threat by Hilbert. Needless to say, this combination of frictions did not endear the two parties to each other. Hilbert's ill-health in combination with the altercation concerning the International Congress of Mathematics in Bologna caused Hilbert to dismiss Brouwer from the editorial board of the *Mathematische Annalen*. Although a face-saving solution to this grave insult was found, the whole affair left a nasty impression (see [4] and [5]).

The affair left Brouwer with a deep grudge. He felt that he was the victim of malicious injustice, and he considered ways and means to counteract the results of the past events. Thus he contemplated the plan to found his own journal, originally brought up in a discussion between the publisher Ferdinand Springer and Brouwer and Ludwig Bieberbach (1886–1982), editors of the *Annalen*, perhaps for tactical reasons. Springer himself had at the time judged this a fair solution. He may have had his doubts about the feasibility, but that clearly was not his business. Indeed Brouwer cautiously inquired with the Teubner Verlag whether it was interested in founding a new journal. The reaction was predictable but disappointing. After consulting Bieberbach, who had been on Brouwer's side in the *war of the frogs and the mice*, the publisher reached the conclusion that a new journal was a highly doubtful business proposition, and that it was questionable whether enough subscribers could be found to make the journal profitable. One must keep in mind that the world, but in particular Germany, was experiencing one of its worst economic crises, so any publisher would think twice before starting a new journal. The sale of the status journal, *Mathematische Annalen*, to Springer must still have rankled, for the Teubner spokesman wrote that they would not gladly run the risk of another debacle, 'after the *Annalen* had already been wrenched from our hands'.

However discouraging this might have been, Brouwer did not give up so easily; he approached the Dutch publisher Noordhoff, a firm with some experience in mathematics, as it published the journal of the Dutch Mathematical Society, *Wiskundig Genootschap*, and it brought Dutch language mathematics textbooks onto the market. Already in 1929 Brouwer had opened negotiations with Noordhoff. On 24 October J. Noordhoff and

Brouwer met in the house of Pieter Wijdenes, the publisher's advisor in mathematical matters. The mathematician Wijdenes, like Brouwer one of D. J. Korteweg's students, was an extremely successful author of mathematics textbooks for high schools; Wijdenes' acquaintance with Brouwer went back to their student years. The agenda for the meeting mentioned 'the Journal and further publications'. Noordhoff was no stranger to Brouwer; his publishing company had already marketed the commercial versions of Brouwer's dissertation and his inaugural lecture, and it had published a small booklet containing the unreliability paper, which has become famous for its rejection of the principle of the excluded middle, and both inaugural lectures (see [1], [2], [3]). Noordhoff carried a number of Brouwer's publications in his catalogue until 1958.

In 1929 Noordhoff tried to convince Brouwer that a new edition of the dissertation should be published. Brouwer was, however, not too keen on the idea. In his view, 'the book is now out of date and it would have to be totally revised. In principle I am prepared to do so, but first there is a lot of other work to be done by me, among other things the publication as a book of the course on intuitionism I gave in Berlin, which I hope to submit to you soon, if in the meantime the journal has been realized.' (Brouwer to Noordhoff, 10 October 1929; cf. also p. 550 ff [5]. Unless otherwise noted, the material quoted can be found in the Brouwer archive.)

Noordhoff was sufficiently interested in the publication of an international mathematics journal to give Brouwer the go-ahead. And so the preparations started; one of Brouwer's first decisions was the name: *Compositio Mathematica*. An important detail was the choice of editors for the journal. Brouwer decided to follow the example of the old *Annalen*: a modest board of managing editors and a large board of associate editors. Already in June 1930 the first letters went out to sound the prospective editors, and in October the definite letters of invitation were mailed.

The first list of mathematicians invited to join contained the names of Paul Alexandrov, Reinhold Baer, Ludwig Bieberbach, Émile Borel, Élie Cartan, Eduard Čech, Johannes van der Corput, Théophile de Donder, Gustav Doetsch, Luther Eisenhart, Georg Feigl, Maurice Fréchet, Guido Fubini, M. Fujiwara, René Garnier, Jacques Hadamard, Godfrey Harold Hardy, Poul Heegaard, Arend Heyting, Einar Hille, Heinz Hopf, Gaston Julia, Alexander Khintchine, Solomon Lefschetz,

Tullio Levi-Civita, Paul Lévy, Alfred Loewy, Richard von Mises, Paul Montel, John von Neumann, Niels Erik Nørlund, Alexander Ostrowski, Frigyes Riesz, Marcel Riesz, Walter Saxer, Francesco Severi, Waclaw Sierpiński, Wilhelm Süss, Gábor Szegő, Teiji Takagi, Leonida Tonelli, George Valiron, Charles de la Vallée-Poussin, Oswald Veblen, Rolin Wavre, Roland Weitzenböck, Edmund Whittaker, B. M. Wilson and Julius Wolff (Brouwer to Veblen, 11 October 1930, Oswald Veblen Papers, Library of Congress, Washington DC, USA).

In his letter of invitation Brouwer stressed the international character of *Compositio* ('un journal de mathématiques international') (Brouwer to Veblen, 10 June 1930). Though he did not explicitly say so, this was at the same time a pun at Hilbert's leading *Mathematische Annalen*, whose editorial board of twelve had only included two mathematicians from outside Germany before the reorganization of late 1928: Harald Bohr and Brouwer. *Compositio*, however, was to be of highly international character as indicated by the publicity notice on its back cover, which stated in English, French, German and Italian: '*Compositio Mathematica* is intended to further the development of mathematics and at the same time of international co-operation, as is indicated by the international character of the editorial staff.' But the composition of Brouwer's editorial board reflected another issue that was very dear to him: the full reintegration of German mathematicians into the international community: ten out of the forty-nine invited taught in Germany.

The board was in fact as international as one could possibly wish, and there was a judicious mix of the older, established generation, and the younger, coming generation.

One may well assume that most of the above, if not all, were aware of the motivation for the founding of this new journal. This is illustrated by Brouwer's old friend Hadamard. Their friendship went back to 1910, when Brouwer stayed with his brother in Paris. Brouwer had a very high opinion of Hadamard; he was eager to get him on the board, but Hadamard did not quite know what to make of the invitation. He wrote for advice to Einstein, saying that it was tempting to join a truly international journal, but that he was somewhat uncertain if he would in this way be used as a pawn against Hilbert (Hadamard to Einstein, 16 October 1930). Einstein replied a month later that there had indeed been a fell struggle,

"for which Hilbert, in my opinion, carried most of the blame. Brouwer, however, be-



Luitzen E.J. Brouwer

© Photocredit/copyrightcredit

haved at this occasion so excessive and obstinate, that he appears to me a man of pathological irritability (Einstein to Hadamard, 15 November 1930)."

He advised Hadamard to steer clear of this new journal,

"I would unconditionally wash my hands of it, in spite of all respect for the subtleness and the honest character of Brouwer, who is not aware of the abyss of his temperament."

Eventually, Hadamard and his student Fréchet were alone among the nine French mathematicians invited by Brouwer in not joining the editorial board of *Compositio*. Borel, Cartan, Garnier, Julia, Lévy, Montel and Valiron all joined. So, on the eve of the launch of *Compositio Mathematica* in 1934 it seemed as if the Gods smiled on Brouwer's truly international project.

The publisher Noordhoff had from the beginning watched the various preparations with a keen interest, but like a good businessman he was not prepared to skate on thin ice; so he took his time, and only on 30 May 1933 did he inform Wijdenes that he agreed to publish *Compositio*, 'with the professors Brouwer, Van der Corput, Wilson, Julia, and Bieberbach as leaders' (In the Brouwer archive).

Einstein's dark predictions concerning Brouwer's handling of the *Compositio* turned out to be unfounded, partly because Brouwer was a conscientious scholar, who could not sin against scientific codes, and partly because his new assistant, Hans Freudenthal, first under Brouwer's guidance and gradually on his own, conducted the managing of the journal. Eventually Freudenthal just submitted each complete issue to Brouwer for his fiat. Often Brouwer would not even answer, but he could also, suddenly, show interest in certain papers, and spend his time lavishly on the refereeing and on the supervision of the corrections. Sometimes Brouwer noticed a particular point in a paper a year later, but by then it had already been published.

When the journal was about to be launched, the publisher sent out flyers with information. Among Freudenthal's documents there is a draft of the German text of the flyer; apparently he was asked to edit the final wording. It is interesting to read Brouwer's views on the role of a scientific journal in a time when in certain quarters the primacy of politics over science was taken for gospel. As a true internationalist Brouwer was not going to give in to new trends.

"Shortly the first issue of the mathematical journal *Compositio Mathematica*, edited

by 48 representatives of the mathematical sciences from 16 countries, will find itself in print with the publishing house Noordhoff. It will be the task of *Compositio Mathematica*, not only to encourage the development of mathematics by accepting for publication valuable mathematical papers, but also to serve the international scientific cooperation, which is at present more than ever necessary (a covert reference to the events in Germany). To do justice to this aim it is not sufficient to abstain from imposing any national or language-barrier; rather a, as far as possible, international composition of the editorial board is required in order to avoid any bias with respect to national aspects. In view of the nowadays often occurring specialization of mathematicians of specific nations on specific areas of research and methods of research, such a composition offers at the same time a guarantee against any one-sidedness with respect to the mathematical character of the published papers." (Translation from the German text. There is probably an English version somewhere in some archive, but we have not found any.)

Among those invited to join the board, the Soviet topologist Paul Alexandrov was confronted with a difficult problem. He fully realized that support from the Göttingen group was more valuable than the support Brouwer could give. Although Brouwer had got him a Rockefeller grant, the effective influence of Brouwer was limited and, as things were in the world of mathematics, the backing of Hilbert's circle, including the publisher Springer, carried infinitely more weight than Brouwer's influence. So when he was asked to join the editorial board of *Compositio*, he feared a clash of interest with the followers of Hilbert (who would, he thought, not welcome a competing journal). So he declined the invitation.

Freudenthal, always a good observer of the mathematical scene and usually well informed, deplored Alexandrov's urge to ingratiate himself with the Göttingen people, "...who knows if they are so sincere. From the way they treat Noether, one might conclude that they will think twice to get him something in order not to lose him for Göttingen" (Freudenthal to Hopf, 22 December 1930).

Brouwer did not take kindly to Alexandrov's refusal, (ibid.: "Brouwer schimpft jetzt auf Alexandrov.") he was doubly disappointed as he had been using his influence attempting to get Alexandrov a chair in Groningen. As we will see, Alexandrov joined the board after all.

The shadows of German politics

Compositio entered the mathematical world in a very awkward period. When Brouwer composed his first list of candidates for the editorial board, the political horizon was unclouded, but by the time real commitments had to be made, the political landscape in Germany was no longer the same. Many competent mathematicians had been forced into exile, or silenced. The first list Brouwer had made contained the following German mathematicians: Baer, Bieberbach, Doetsch, Feigl, Hopf, Loewy, von Mises, von Neumann and Süß.

In 1933, however, when the journal was about to be launched, Hopf had already left Germany for Zürich (in 1930). Following the Nazis' rise to power in January 1933, and the rapidly enacted anti-Jewish legislation of April 1933, Baer emigrated later that year; Loewy was dismissed but stayed in Germany; von Mises left for Istanbul in 1934; von Neumann had decided to go to Princeton for good in 1933; and Szegő also went to the United States. This left, when the first issue of *Compositio* was published in 1934, Bieberbach, Doetsch, Feigl, Loewy and Süß as the contingent on the board from Germany. In addition to these events, Bieberbach, who came to be the most prominent mathematician embracing the Nazi ideology, had come to see the presence of some names on the list of editors as flagrantly incompatible with his new political guidelines. Bieberbach for himself had considered his membership on the editorial board, he had indeed become one of five managing editors, along with Brouwer, Julia in Paris, Wilson in St. Andrews and de Donder in Bruxelles) a good thing, for, in his opinion, it made certain that the name of a man of 'German spirit' appeared among the editors of an international journal.

"I assumed that one would recognise this as an example that the new Germany, notwithstanding its fight with the international Jewry, gladly co-operates with other nations, that meet us, if not with sympathy, then at least with loyalty. Instead people now see often the crucial point in the fact that Jews occur on the cover of *Compositio*." (Bieberbach to Brouwer, 21 June 1934 – copy, Doetsch papers.)

And, he continued, this was explained as a sign of his co-operation with Jews. He could accept the fact that names of Jews occurred on the cover, to show that he was prepared to tolerate the presence of Jews on the board as a defect, in view of the

demonstrated willingness to join the international community. Other nations he assumed would in the end recognize the necessity of the German actions. To his disappointment he was subjected to hostile reactions from all sides. And so "I feel obliged to make the disappearance of the Jews from the editorial board a condition for my presence in the editorial board of *Compositio*." He hoped, he wrote, that the old alliances in matters of international co-operation would make it easier for Brouwer to carry out the necessary steps. The letter ended with the barely veiled threat that the present composition of the board would cause difficulties for the distribution of *Compositio* in Germany. (On the context of Bieberbach's letter, see pp. 16–18 [9].)

In July 1934 Bieberbach wrote to Doetsch, who also was on the board of *Compositio*, urging him to take the same position against Brouwer. Bieberbach explicitly pointed to the fact that he himself acted in complete accordance with the views of the mathematician Theodor Vahlen, a long-standing Nazi who in 1934 had become an influential government official in the Ministry of Education and Research. (Bieberbach to Doetsch, 12 July 1934, Doetsch papers). Doetsch, however, did not give way to Bieberbach but adopted a wait-and-see attitude instead. He wrote to Feigl a few days later, saying that although he felt inclined to join Bieberbach, it would be better if the three of them, i.e. Doetsch, Feigl and Süß, acted unanimously in case Bieberbach did resign. Naturally neither Loewy, who was Jewish, nor Szegő, whom Doetsch thought either to be Jewish or married to a Jewess, played a role in his considerations. This much is clear from a card to Feigl, which contains, in addition to some scathing remarks about Jewish mathematicians and reviewers, the following passage:

"If Bieberbach resigns from *Compositio*, then it would be most desirable that we remaining German editors and editors of German descent act unanimously. Only you and Süß are to be considered. Szegő is a Jew, isn't he? Anyway, he is married to a Jewess. I will just wait for the result of the discussion between Bieberbach and Brouwer, but I am very much inclined to join Bieberbach. Heil Hitler! (Doetsch to Feigl, 16 July 1934.)"

By September, Feigl and Doetsch had decided not to follow Bieberbach's lead. However, in a postcard to Süß, Doetsch acknowledged the necessity to demand an 'appropriate and purely Aryan representation of Germans' on the board of *Compositio*.

(Doetsch to Süß, 9 September 1934, University Archives Freiburg, Süß papers, C89/34). Brouwer, for his part, had no intention of fulfilling Bieberbach's wishes. The list of editors, distributed in November 1934, included all the names Bieberbach wanted to see erased: Baer, Levi-Civita, Loewy, von Mises, etc. Moreover on New Year's Day 1935 the secretariat of *Compositio* sent a circular, composed by Brouwer, to all members of the board declaring that "any editor's public participation in manifestations which could harm the mutual esteem of people and nations was incompatible with his function." ("En raison du caractère délicat que présentent dans plusieurs domaines par le temps qui court les rapports internationaux, la Science semble plus que jamais être appelée à constituer pour l'humanité un refuge sûr d'entendement mutuel. En conséquence le Secrétariat de la Rédaction de *Compositio Mathematica* croit devoir recommander aux rédacteurs de ce périodique foncièrement international, de considérer comme incompatible avec leur fonction, la participation publique à des manifestations pouvant nuire à l'estime mutuelle des peuples et des nations." Cf. p. 18 [9]. This message had its own irony. Would Hilbert not have said the same thing in 1925?) A week later Bieberbach conceded the good intentions of this declaration in a letter to Brouwer, but he could hardly have overlooked that the circular letter had the appearance of an overt admonition to himself, and as a consequence he resigned from *Compositio* with harsh words: "My national sentiment forbids me to belong to an editorial board which includes so many representatives of international Jewry and in particular emigrants." (Bieberbach to Brouwer, 8 January 1935, copy from Doetsch papers.) Brouwer did not even try to keep Bieberbach aboard. He replied: "I hardly have to say, that your decision upset me very painfully, but on the other hand is completely respected by me, as I know that it was dictated by your conviction and your conscience." (Brouwer to Bieberbach, 15 January 1935.) And that was the end of a long association between two persons who had shared a mathematical interest for many years, and who had fought the *Conseil* and its boycott shoulder to shoulder.

Bieberbach subsequently wrote again to Doetsch, as well as to Feigl and Süß. He explained that he had discussed the matter with Vahlen and demanded that they follow his example, suggesting that this would be greatly appreciated by Vahlen. Moreover, their resignation would prove them to be in

complete accord with 'fundamental considerations of the leadership of the state' (Bieberbach to Doetsch, 19 January 1935, Doetsch papers; on the following see pp. 19–21 [9]). Neither Doetsch nor Feigl nor Süß followed Bieberbach's advice, but naturally they became nervous by the implicit threat concerning Vahlen and the Ministry of Education and Research. Bieberbach renewed his demand in February 1935. This time Feigl and Süß considered it more than a request; they took it to be an official ministerial order, and thus they were prepared to resign from *Compositio*. But Doetsch had no intention of being bullied into resignation by Bieberbach, who had in the meantime lost his former position as DMV secretary. In March, Doetsch wrote to Bieberbach that his arguments in the letter of resignation to Brouwer were unintelligible, and that he himself would not leave *Compositio*. Doetsch also noted that Bieberbach's tactics had been very poor in similar cases, such as in 1928, when he had opposed Hilbert in the question of German participation at the Bologna congress, and in September 1934 at the DMV meeting at Pyrmont. On top of this he boldly questioned Bieberbach's assertion that Vahlen's opinion on the *Compositio* affair represented the official position of the Ministry of Education and Research or the government. To these reproaches Bieberbach replied that he followed the same tactics as Adolf Hitler: "All power or none" ("*Alle Macht oder keine*") (Bieberbach to Doetsch, 11 March 1935, Doetsch papers). He suggested that Doetsch should apply for an official statement of the Ministry of Education and Research if he did not feel bound by Vahlen's instructions and pressed him once more to resign from the board of *Compositio*. Things became even more complicated when, some days later, Brouwer invited his 'dear friend Doetsch' to succeed Bieberbach, who had in Brouwer's words resigned 'due to his extreme position', as managing editor representing Germany (Brouwer to Doetsch, 20 March 1935, Doetsch papers). In April 1935 the Ministry of Education and Research decreed that the participation of German scientists in foreign scientific organizations, which in itself was desirable, was nevertheless subject to ministerial approval. Doetsch applied for this approval only in July when he sought to determine whether he could accept Brouwer's proposal. The official response which finally arrived in September was negative: international co-operation was fine, but participation in an editorial board, which included Jews, was 'not desirable' (Ministry of Education and Re-

search, 5 September 1935, Doetsch papers). Doetsch was not happy about this, as he was now compelled to decline Brouwer's offer, though he would have liked to accept it. He asked for permission to send Brouwer the exact wording of the ministry's decision, but this was of course not granted. Consequently by mid-November 1935 Doetsch, Feigl and Süß had sent their own letters of resignation to Brouwer. Bieberbach paid a high price for his apparent victory: the collaboration between him, on the one hand, and Doetsch, Feigl and Süß, on the other, came to an early end. The latter three would have liked to remain on the *Compositio* board: Feigl was a friend of Brouwer and one of the teachers of Freudenthal, to whom Brouwer had delegated most of the *Compositio* work; for Süß it would have been a good opportunity to enhance his poor professional status and for Doetsch the position as a managing editor was tempting. He had already considered the membership of the board of *Compositio* prestigious enough to have it mentioned in his entry in the German 'Who's who?' of 1935. In both Doetsch's and Süß' career promoting, *Compositio* would have been a welcome device. Therefore they did not willingly co-operate with Bieberbach and Vahlen in the *Compositio* affair, and it needed considerable pressure to bring them into line. Neither of them had anything to gain by joining Bieberbach in his resignation from *Compositio* especially after Bieberbach's fall from power in the DMV in January 1935.

As it turned out, Bieberbach's resignation probably was to the advantage of *Compositio*'s further development. His highly visible position as one of the managing editors might have given extra substance to reservations among mathematicians. His resignation, indeed, was welcomed. Norbert Wiener, for example, wrote to Dirk Struik in February 1935: "Now that friend Bieberbach is off the *Compositio* I am sending some of my stuff there." (Wiener to Struik, 9 February 1935, MIT archives, Norbert Wiener papers, Box 3, 41.)

Running *Compositio*

Compositio thus certainly had its share of difficulties at the start. But once the journal was on its way, things ran smoothly.

Indeed, *Compositio Mathematica* could now begin 'business as usual'. We find many well-known names among the contributors between 1934 and 1940: Paul Alexandrov, Stefan Bergmann, Garret Birkhoff, Henri Cartan, Samuel Eilenberg, Hans Freuden-

thal (Brouwer's alter ego in *Compositio* matters), Guido Fubini, Heinz Hopf (who served as one of the managing editors from 1936), Paul Lévy, Alexander Khintchine, Kunihiko Kodaira, Alexander Kurosch, Louis Joel Mordell, John von Neumann, etc. Also, it seems that quite a number of Jewish mathematicians who felt after 1933 no longer welcome to publish in the prestigious German journals turned to *Compositio* as an alternative: Reinhold Baer, Stefan Cohn-Vossen, Friedrich Levi, Alfred Loewy, Robert Remak, Erich Rothe, Issai Schur and Olga Taussky. In sum, by the outbreak of the Second World War *Compositio Mathematica* was a well-established, highly regarded and truly international mathematical journal.

Although Brouwer was the responsible editor, most of the work was done swiftly and competently by Freudenthal. Those who had judged Brouwer incapable of running a journal properly, turned out to be wrong. All the fears that Hilbert claimed to have for the disastrous influence of his Dutch opponent were after all ill-founded. Brouwer did not do any of the things he was suspected of; he did not veto French or Belgian authors or editors, he did not turn his journal into a vehicle for intuitionistic mathematics, he did not reject Russian Jewish authors. In short, *Compositio* became a normal respectable journal. Intuitionistic mathematics did not play an important role; until the Second World War only six such papers appeared, written by Brouwer, Freudenthal, Heyting and Johanson. The scientific journal landscape, in particular in Germany, had changed dramatically since 1933. The new regime did not lose time in infiltrating existing journals; whenever possible and convenient, the *Führer* principle was enforced. This meant as a rule that political motives could, and often did, overrule scientific standards. The *Mathematische Annalen* was no exception. There is a pressing letter from Blumenthal to Hilbert in November 1933, in which he painted in vivid colours the dangers that lay ahead. The worst effect of the new times was the uncertainty that surrounded the Göttingen faculty. 'If Göttingen becomes a desert, or is populated by professors who discard tradition, then we have to open up new wells, or we come to nought.' In the light of the present threats, the founding of *Compositio*, which seemed so harmless at the time of the *Annalen* conflict, assumed ominous proportions: 'On the other hand the *Annalen* are threatened by Brouwer's newly founded *Compositio Mathematica*, in which, in numbers, a very large staff of international associate editors (*Mitarbeiter*) is brought together. Since

Bieberbach and Feigl have joined this staff, it is clear that we cannot hope for the cooperation of the Berlin school for the *Annalen*. It is even more worrying that also Hopf (Zürich), with whom we always have worked well, has committed himself to this competing enterprise.' (Blumenthal to Hilbert, 11 November 1933.) Blumenthal's conclusion was that the *Annalen* urgently needed an expansion of the editorial board. He suggested Bartel Leendert van der Waerden as a perfect candidate.

The relatively weak position of the *Annalen* at this point in time was a consequence of an over-confident decision in the past: to minimize the editorial board, and to make the *Annalen* even more exclusively a Göttingen matter. Nobody could have surmised that a momentous decision, taken for the wrong reason, would be regretted so soon.

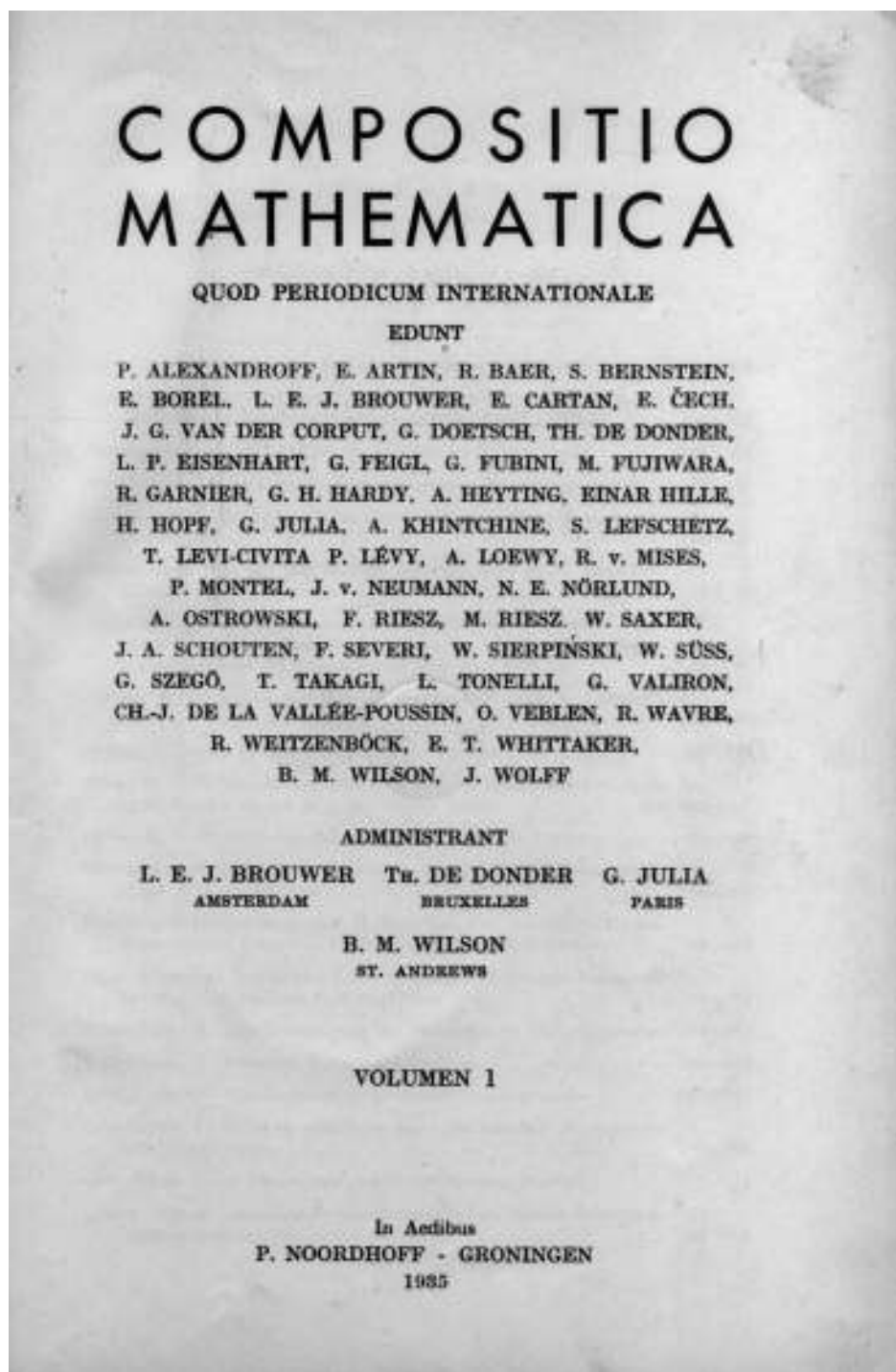
The years between the end of the Grundlagenstreit and the Second World War are almost devoid of creative mathematics in Brouwer's life. A great deal of time was taken up by all kinds of non-mathematical activities, e.g. the town council in Blaricum. Among the more mathematically oriented activities, the founding and organization of the new journal *Compositio Mathematica* was by far the most prominent. Brouwer, after his initial enthusiasm, soon withdrew from the editorial tasks that he had so conscientiously carried out for the *Mathematische Annalen*. He did handle a number of papers himself, and corresponded with the referees and authors. He refereed, for example, the notes of Heyting and Freudenthal on intuitionistic logic and the meaning of implication. The result was a succinct approval:

"Report on the discussion Freudenthal–Heyting.

Interesting discussion on the meaning of the implication of a theorem by another, when nothing is known about the correctness of the latter."

Both papers were duly published in *Compositio* [7], [6]. It is a pity that Brouwer did not enter into the arguments of the papers, as there is scant information on Brouwer's views on intuitionistic logic, and this would have been a perfect occasion. On the other hand, he, as editor in chief, was the only person to read the report. It is only a happy coincidence that this particular report was preserved; the chances were that nobody would ever read it.

Freudenthal handled the editorial matters so diligently and efficiently, that one might wonder why he had not been made an editor. Indeed, he was promised a place on



De voorpagina van het eerste nummer van *Compositio*.

the board, but it never came to anything before the war. It should be pointed out that prestigious journals insisted on prestigious editors, and the fact that Freudenthal was already making his name in mathematics, did not compensate the fact that he was not a professor. Brouwer attached a good deal of value to these formal matters. (The fact that Heyting was an associate editor may be explained by the distribution of the specialisms. There was already ample topological expertise in the board, but Heyting was the only

foundationalist. Moreover, Heyting was a lecturer, and thus he outranked Freudenthal.)

Publication suspended during the war

The quiet situation at *Compositio* was disrupted by the beginning of the Second World War. At first Holland was no party in the conflict, but nonetheless the consequences were being felt even in the country that had known no war since Napoleon. At the university the consequences of the war were at first rather modest, and life went on

much as usual. Freudenthal, Alexandrov and Hopf had started in 1939 the preparations for a *Festschrift* for Brouwer's sixtieth birthday; even after the occupation of Holland, correspondence with the Soviet Union and Switzerland was carried on as usual. Hopf had reacted positively to Freudenthal's suggestion to honour Brouwer in this way, adding "Moreover, Brouwer's work is not sufficiently valued; it would therefore be doubly advisable to demonstrate the contemporaries how much he is appreciated." (Hopf to Freudenthal, 21 December 1939). The plan to dedicate a volume of *Compositio Mathematica* to Brouwer was frustrated by the war. In the end the initiators advised the prospective authors to submit their papers for the Brouwer *Festschrift* to a journal of their choice.

Freudenthal complained in June 1940 that it had become very difficult, not to say impossible, to reach the editors of *Compositio*, (Freudenthal to Brouwer, 15 June 1940) and he asked Brouwer what to do. Should one appoint editors that could easily be reached by mail? The publication of the next issue, he wrote, had become problematic. Brouwer replied that the first issue of Volume 8 could be published, but that in view of the difficulties it would be better not to start any new typesetting (Brouwer to Freudenthal, 26 June 1940). A month later Wijdenes told Freudenthal that Brouwer and he had decided to halt the publication of *Compositio* for the time being, (Wijdenes to Freudenthal, 27 July 1940) and a couple of weeks later Brouwer wrote that no permanent closing down of *Compositio* was intended (Brouwer to Freudenthal, 9 August 1940). At the beginning of September censorship of newspapers and journals was introduced with respect to information with military significance, including a large number of civil topics, e.g. the building of roads, bridges. Even *Compositio* received the instructions of the Military commander in the Netherlands (*Wehrmachtbefehlshaber in den Niederlanden. Militärische Zensurstelle*, 9 September 1940). In view of all the problems and uncertainties, Brouwer, after some deliberation, decided to end all activities of *Compositio* (Freudenthal to Hopf, 10 November 1940). Obviously, authors of already submitted and refereed papers should be completely free to resubmit their papers elsewhere. In view of the fact that the first issue of volume 8 had not yet appeared, five months after the announced date of appearance, he also decided that issue should be cancelled altogether (Brouwer to Freudenthal, 17 October 1940).

Even though direct evidence shedding

light on the political circumstances of *Compositio's* demise is scarce, it has to be understood that it was part of the Nazi's semi-official occupation policies that publishing in the occupied countries was to be strictly controlled. There were several reasons for this: (1) practical ones, such as shortage of paper and other more or less direct consequences of the war; (2) economic ones, that is the policy to support German publishers by restricting publishing facilities in the occupied countries; and (3) ideological ones, the control of scientific publishing just being one instance of the projected cultural imperialism and exploitation of science by the Nazi's. *Compositio*, too, was affected by these policies after German troops had occupied the Netherlands in May 1940. It took eleven years to resume *Compositio's* publication in 1951.

Publisher versus Brouwer

During the war and the first few post-war years, *Compositio* was not issued, either in Holland or abroad. The confusion in academic and publishing circles, the shortage of paper, and the restricted availability of printing facilities made serious planning impossible. Eventually, however, Brouwer turned his attention towards a restart of the journal. This gradually led to a major conflict between Brouwer, the publisher, and his Dutch colleagues. The fight for *Compositio* is one more drama in Brouwer's life, the last big one. It took place at the end of his academic career, and it is a vivid illustration of the erosion of his position in Dutch mathematics, and his inability to build and maintain a sufficient support in mathematical circles. For the lone operator Brouwer it was no longer possible to defend his position. Even his considerable command of argumentation and persuasion had lost its magic power. As Kreisel put it, in the obituary of Brouwer for the Royal Society: "... while, ..., solipsism seems an excellent first approximation for an analysis of mathematical reasoning, it would not be expected to be equally sound in public relations." (p. 46 [8])

Most of the documents of the *Compositio* affair are to be found in the Brouwer archive. Unfortunately the publisher Noordhoff has not preserved the correspondence and documents pertaining to the matter. (In fact Noordhoff merged with Wolters (and Wolters with Kluwer), and it is no longer an independent company. In the transitions the relevant material was probably discarded.)

When life resumed its course after the war, many threads had to be picked up which were either dropped at the outbreak of the war, or



Hans Freudenthal

© Photocredit/copyrightcredit

had become entangled in a number of ways during the war. In almost all organizations and companies there was a, sometimes subtle, sometimes not so subtle, power struggle between the forces of renewal and those of restoration. Next to the old political parties, new parties sprung up with new names and new programmes. In art, young men eagerly waited for the fall of the establishment. New dailies and weeklies appeared, most of them the legal successors of the underground papers published by the various resistance movements.

In the universities one could also observe a mild echo of the socio-political changes in the Netherlands. By and large the most significant phenomenon was a temporary speed-up of appointments of professors. The war and the subsequent purge had left vacancies to be filled. On the whole one could speak in the case of the post-war developments in academia more of a restoration than of a revolution. A disruption like that of the 1960s and its democratization was out of the question. The scientific organizations, as a rule, resumed their activities, their regular meetings and their publications.

The publishing houses could not immediately join the upsurge of economic and cultural life, hampered as they were by the shortage of paper. This had consequences in particular for scientific publications; for a long time libraries, professors and students alike had to make do with second-hand pre-war copies and with books donated by (mostly American) universities.

As the man in charge, Brouwer had to consider the future of his *Compositio*. Freudenthal, who had run the journal almost single-handedly, was the first to bring up the matter of re-issuing *Compositio*. In a letter to Hopf he gave an account of the situation: (Freudenthal to Hopf, 9 October 1945.)

“Concerning *Compositio*, the matter is that I have officially no business with *Compositio*. I am simply not a member of the editorial board. *Compositio* can probably not appear legally with the editorial board as it was on May 14, 1940. For here everything is ‘purged’, the civil service, the professions, associations, editorial boards, etc. If an editorial board has not itself been infected, it can of its own proceed to purge itself. How this is done with editorial boards in which also foreigners are present, I do not know. In the case of *Compositio* the matter is especially unpleasant; Weitzenböck is stepping down anyway. The purging of Brouwer is yet open — I mean his purging as a professor,

and the result will have its consequence for his further membership of the editorial board. [...] If Brouwer returns as a professor, he will certainly claim his right to sit on the editorial board. But probably the remaining Dutch mathematicians (apart from Heyting) have no wish to work with him. This can be said with certainty of Van der Corput. [...] I don’t see at the moment any possibility but the founding of another journal under a similar name. I will discuss the matter with Van der Corput. Perhaps he can say something. What would be your position with respect to a *Compositio* without Brouwer or with Brouwer thrown out?”

In fact, nothing happened at all. Brouwer did not even consider a quick re-animation of *Compositio*. It would have been rather unlikely that the authorities would have allotted the required amount of paper for the journal.

The activities around *Compositio* during the first years after the war are somewhat obscure. On the one hand, Brouwer started to explore the possibilities of re-issuing the journal. On the other hand, a number of Brouwer’s opponents would rather see a *Compositio* without Brouwer. It seems that Brouwer was approached by Noordhoff with the request to resume the publication of *Compositio* (Brouwer to Ed. Board Comp. Math. 10 July 1949, 27 January 1950). Apparently the efforts of Noordhoff were not very satisfactory, for Brouwer was cautiously shopping around in 1947 for a new publisher. In January 1947, for instance, he inquired with Father Van Breda, professor of philosophy in Leuven, renowned for his founding of the Husserl Archive, if there were printers in Belgium who could handle an international mathematics journal. Van Breda duly supplied the information (Van Breda to Brouwer, 25 January 1947).

On 3 February 1948 the difficulties had been overcome insofar as Brouwer informed the Committee of Administration (editorial board) of *Compositio* (de Donder, Hopf, Julia, Whittaker) of his plans to send out a circular letter to all editors. (Strangely enough “to the editors belonging to the United Nations.” What had happened to his internationalist convictions of 1919?) In this letter the editors were asked to stay on and to publish their own papers and ‘those originating from your school’ in *Compositio*.

Noordhoff set itself to produce a first post-war issue, but it discovered that the printer had lost patience, and re-used the lead of the type of the 1940 issue (Noordhoff to Freudenthal, 1 November 1948). Having some doubts



Johannes van der Corput

as to the wisdom of leaving the daily affairs of *Compositio* to Brouwer, Noordhoff casually asked Freudenthal's opinion on the future of *Compositio* under Brouwer. Freudenthal expressed his willingness to give his opinion, but declined to do so in writing (Freudenthal to Noordhoff, 1 December 1948). He urgently counselled Noordhoff to clean up the editorial board; no more than one third of the old board ever took active part in the editing. One should, in his opinion, attract some 20 young mathematicians "who are at the peak of their creative power, and who are not yet members of other editorial boards". Moreover Noordhoff should attract a young, active mathematician with a broad interest and good qualifications for the position of secretary. The person should have relations with the top circles in mathematics, should have enough personal courage to reject mediocre work, etc. He ended with the harsh words: "if one wishes to salvage anything at all of the goodwill of *Compositio Mathematica*, one should take action promptly and energetically. A journal that keeps plodding on or that degenerates into a rubbish dump would do considerable harm to the international reputation of Dutch mathematics."

Noordhoff did not act solely on Freudenthal's advice; it even went so far as to poll the mathematics professors in the Netherlands. In January 1949 the publisher sent a letter to the Dutch mathematics professors, asking them for their support, announcing the re-issuing of *Compositio* under the temporary secretarial care of Brouwer, who had taken the initiative. The letter contained the seemingly harmless sentence: "As we are of the opinion that the journal with its good reputation should appear at the same level as before, we would appreciate if the journal in addition to the support of its foreign contributors, would also receive the total support of the Dutch mathematicians."

The letter elicited quite a number of reactions, one of which was provided by Van der Corput, who was one of the old editors. Brouwer apparently had not included Van der Corput in his list of recipients of the announcement of the re-animation of *Compositio*. One can easily imagine why; a man who had deftly outmanœuvred Brouwer in the faculty and in the Mathematical Centre affair, (Cf. p. 799 ff [5].) was not to be trusted on an editorial board.

Van der Corput did not accept Brouwer's move without protest, he complained to Noordhoff that he was, to his surprise, unaware of the plans concerning *Compositio* (Van der

Corput to Noordhoff, 26 January 1949). Noordhoff cleverly made use of Van der Corput's dismay, expressing surprise that one of the co-founders of *Compositio*, with the same rights as Brouwer, had not been informed by Brouwer (Noordhoff to Van der Corput, 29 January 1949). Noordhoff wrote to Van der Corput that the plan for resuscitating *Compositio* was greeted with applause by most Dutch mathematicians; perhaps one should ask Brouwer how (and why) he happened to overlook Van der Corput. "Is there any objection on your side, that we show your letter to Professor Brouwer", he subtly inquired. This was not quite what Van der Corput had in mind; he immediately replied that "Some of the mathematicians consulted by you have expressed themselves very cautiously. It seems to me that my answer should rather not be passed on to Professor L.E.J. Brouwer." (Van der Corput to Noordhoff, 31 January 1949, draft.)

As one could expect, Brouwer did not react kindly to the Noordhoff circular letter. He interpreted it as an attempt to import more Dutchmen into the editorial board; worse, he viewed it, according to Jan Arnoldus Schouten (Schouten to Hopf, 8 November 1949), as "an action (by some person or persons unknown) to throw him out, and he took the whole thing as a personal affront." On these grounds he refused to work any longer with Noordhoff, and the preparations came to a complete halt. That did not mean that Brouwer had put *Compositio* out of his mind altogether. He actively looked for new editors; one of the persons approached was Paul Bernays. In order to get a better representation of the subject of mathematical logic in *Compositio*, Brouwer invited him to join the board of editors, at the same time asking his advice as to another editor from the logical corner of mathematics. Hopf had suggested MacLane, but Brouwer thought that Stephen Kleene might be a good candidate. Bernays apparently advocated Kleene's membership, for Brouwer wrote to Kleene "I have the pleasure to invite you, *firstly* to enter the editorial staff of *Compositio Mathematica*, *secondly* to favour this periodical with some work of your own." (Brouwer to Kleene, 12 April 1949.)

In order to get the journal under way again, Noordhoff and some mathematical colleagues called in the help of Schouten, who was the Dutch mathematician following Brouwer in seniority. Schouten's reputation as a geometer was beyond question, and he was considered one of the leading Dutch mathematicians. He had in 1943 resigned from his Delft chair, and withdrawn himself to

a quiet part of the country, but his influence was still considerable and Noordhoff must have seen in him a valuable ally in the attempt to edge out Brouwer. Although Brouwer and Schouten had had their differences in the early 1920s (patched up in 1929 after the mediation of Weitzenböck), animosity was certainly not the motivation of Schouten to take Noordhoff's side. Schouten was one of the editors of *Compositio* of the first hour; it was probably a sincere wish to restore *Compositio* to its old glory, that made him an actor in the *Compositio* affair.

Schouten met Brouwer on 28 May and discussed the matter. According to Schouten, Brouwer agreed to enlarge the Committee of Administration with Hendrik Douwe Kloosterman, Heyting, and J. C. H. Gerretsen (professor in Groningen, a function theorist) as the secretary.

When this agreement was reached Schouten immediately informed Noordhoff, and a meeting with Brouwer was scheduled for 5 July. To general disappointment Brouwer asked for postponement of the meeting, (Telegram, 30 June 1949) and subsequently did not respond to any letters.

In all fairness it must be said that no personal attacks on Brouwer were envisaged; Van der Corput at one point argued forcibly that the combination 'Brouwer-*Compositio*' was from an international point of view the strongest possible, and that Noordhoff should really try to keep Brouwer in charge. Neither was Schouten out for Brouwer's removal, but he clearly wanted to reduce him to 'one of the editors'. Unfortunately Schouten did not possess the tact needed to handle a mercurial person like Brouwer. His letters, obviously well-meant, were of the half-patronizing, half-schoolmastering kind that goes against the grain. Brouwer in particular had no wish to be lectured. In the end it must have been a mixture of exasperation and genuine worry about the future of *Compositio* that drove Brouwer to desperate steps.

Brouwer clearly had given up hope of reaching an agreement with the Noordhoff faction. Why is not quite clear. Maybe it was the old story of a personal consultation interpreted differently by the parties. Brouwer had learned a lesson in his relation with Van der Corput: never rely on verbal agreements. Whatever caused the final disruption of connections with Schouten and Noordhoff, Brouwer lost no time in taking counter measures. On 10 July he sent a letter to the members of the Committee of Administration,

proposing to sever all ties with Noordhoff.

“Dear Colleagues,

When the House of Noordhoff Groningen, which had functioned from 1934 to 1940 as bookseller-publisher-agent of *Compositio Mathematica* offered us to resume from 1945 its old function, there was no reason to refuse it the opportunity to prove its claim to be up to that task. However, having taken up this task, it had started by working so miserably, be it through a lack of equipment, be it through a lack of zeal, be it through a lack of good will, and it finally demanded, before continuing its work, a reorganization of the editorial board which would change completely the character, and in particular the international character, of our journal.”

Under the circumstances, he went on, I propose to take our business to another publisher, “I have good hopes to find for that purpose a house of renown, well directed and equipped, which will serve us better than the one that has deceived us.”

Brouwer must have thought of the North-Holland Publishing Company (which also printed for the Academy, and of which Brouwer was a member of the board of commissioners), for he had already approached that firm early in July. Unfortunately for Brouwer that particular plan fell flat. When North-Holland was informed by Noordhoff of its purported rights, it lost interest in the acquisition of a journal that might bring a string of lawsuits

A majority of the Committee of Administration agreed with Brouwer: de Donder, Julia and Saxer sent their approval for further action. Schouten in the meantime tried his best to get Brouwer back to the negotiating table; he asked Van der Corput to talk Brouwer round. Noordhoff wrote a conciliatory letter and Heyting tried to influence Brouwer. None of this was of any avail (Schouten to Hopf, 8 November 1949).

With nothing to lose, Schouten decided to take to the offensive. His first object was to make the members of Committee of Administration see the *Compositio* problem his way. In a long letter to Hopf, Schouten set out to justify his and Noordhoff's cause and to prove Brouwer wrong (Freudenthal guessed that similar letters went to the other members). Apart from a recounting of the events, the letter contained a list of refutations of Brouwer's claims or suspicions. Some of Schouten's arguments and claims had a degree of plausibility, but if they contained some truth, certainly not the whole truth. In particular his protestation that he did not attempt to

remove Brouwer seems a bit lame, unless one supplements the claim that the action was not being directed against Brouwer, by the clause “as long as Brouwer does not interfere with the journal”. As Schouten saw it, the situation held a grave risk for Brouwer:

“Up till now as a mediator I was able to prevent legal action from the side of the publisher. But after the strict refusal of Mr. Brouwer this will not be possible any longer. So if nothing is done, there will be a legal action and the Committee of Administration, especially Mr. Brouwer, will be made responsible for further delay. As I see it now, it would have been better if I had written to the other members of the Committee of Administration at an earlier time. But my intention was to be very careful and to make things for Mr. Brouwer, as little disagreeable as possible, and this held me back till now from this action. Up till now the most influential Dutch mathematicians agreed with me that we must aim at a solution giving Mr. Brouwer the place and the honour that are naturally due to the man who founded the ‘*Compositio Mathematica*’. But with Mr. Brouwer now turning down any compromise, a solution has to be found in whatever way. For Mr. Brouwer this would lead to a very serious defeat and I think we ought to try, if possible, to avoid such a defeat for a man of his age and fame.”

On the whole, Schouten's action should be taken at its face value. He was not the evil man Brouwer had thought him to be. It is more likely that he had taken the role of mediator in a sincere wish to solve the problem without hurting Brouwer. He would probably have preferred to solve the *Compositio* conflict without damage to the parties concerned. Nonetheless he had to play the game for Noordhoff, and in that role he cleverly bent the facts to his advantage. One should not forget that at the same time Schouten, Van der Corput *et al.* were the subject of Brouwer's guerrilla warfare in the faculty. So if Schouten showed some exasperation, he was entitled to it.

In order to minimize the damage to all concerned, Schouten launched a proposal for salvaging *Compositio*. A Temporary Committee of Reorganization should be installed, consisting of four Dutch members (one distinguished man from each of the four Dutch universities (Schouten, for unknown reasons, counted only four universities. There were five at the time.)) with the following task:

- i. start the editing of *Compositio*,
- ii. arrange the election of a new Committee

of Administration,

- iii. draft rules for *Compositio* and a contract with the publisher,
- iv. submit the rules and contract to the vote of the general committee,
- v. dissolve itself.

Schouten did not wish to become a member of the Committee of Administration, “At my age it is a big mistake to do things or to go on doing things that younger people can do so much better. A wise man has to know the time at which he has to withdraw,” he wrote, but he was willing to act as the “central man who has to constitute the Temporary Committee and to work as its Chairman, and to mediate the parties concerned”. He would make it his special duty to ensure that Mr. Brouwer got the honour and the place due to the founder of the *Compositio Mathematica*.

The secretary designate, Gerretsen, had the task to get legal advice, for it was not unthinkable that Brouwer would take the publisher or the new board to court. After weighing the possible actions, the legal adviser deemed it safe to proceed along the lines indicated by Schouten (Kluyver to Gerretsen, 11 December 1949).

Schouten set to work without delay, and soon he could present the General Committee with his Temporary Committee of Reorganization: Freudenthal, Gerretsen, Kloosterman and Koksma (Schouten to General Committee, 2 January 1950; cf. Brouwer to eds, 1 January 1950).

He had ascertained, as he stated, that the greatest possible majority of the Committee of Administration had agreed to his proposals. Brouwer was blessedly unaware of all the goings on (which shows how a once central person may get isolated).

Noordhoff had reacted with an invitation for further talks, an unacceptable proposition for Brouwer, who insisted that the work should be resumed first. Van der Corput, in a letter of 20 January to Brouwer, completely ignored the *Compositio* matter. Probably for a good reason, for the Temporary Committee had drafted a rather tactless letter to Brouwer, informing him of the existence of the Committee and demanding preemptively that he hand over the administration of *Compositio*. This letter reached Brouwer not before February. Brouwer only learned about the activities of the Noordhoff party through a chance remark of a French mathematician, probably Lévy, who told Brouwer that he was informed by Gerretsen that his paper would soon appear in *Compositio*.

From correspondence of Brouwer's wife,

Lize, it appears that in the autumn of 1949 (and perhaps earlier) Brouwer had been suffering from a mixture of complaints. In particular he feared that his heart and lungs were in a bad shape. On 27 November Lize wrote to her daughter that Brouwer had been thoroughly examined by one of his colleagues in the medical faculty, Professor Formijne. The examination showed that heart and lungs were in good order, and that the stomach was the problem. Brouwer was immediately put on a diet. In any case he was greatly relieved, and he was eyeing the future with more optimism, all the more as he had been invited to lecture in Paris in December 1949 and January 1950. He started his lectures on 13 December, returned for Christmas to Blaricum, and taught the second part of his course in January. He had duly reported to the board of the university that his work as a ‘professeur d’échange’ at the Sorbonne was not yet finished, and he had asked permission to return to Paris for another month of teaching (Brouwer to Mayor and Aldermen, 3 January 1950). His absence suited the *Compositio* conspirators wonderfully.

On 9 January, the day before he returned to Paris in order to resume his series of lectures on intuitionism, he had written to Van der Corput that the latter’s intervention with Noordhoff had been a failure. In October Brouwer had asked Van der Corput to inform Noordhoff that he agreed to enlarge the editorial board as soon as Noordhoff resumed the work on the forthcoming issue of *Compositio*.

Brouwer was furious when he found out what was going on. He immediately wrote a long letter to the Committee of Administration (Brouwer to Comm. of Adm., 27 January 1950). In his function as (temporary) secretary of *Compositio* he was responsible for the manuscripts of the authors, he wrote, and now he found that Noordhoff had betrayed his confidence by giving Gerretsen, the ‘self-styled secretary’, access to the manuscripts. After a short résumé of the history of *Compositio*, Brouwer concluded that the latest actions of Noordhoff left him no choice but to go to court. He asked the members of the committee to authorize him to start the legal procedures. “I don’t expect an easy law suit. The manœuvre of Mr. Gerretsen made me think that there is a well meditated machination, by which the House of Noordhoff hopes to get *Compositio* in its possession, and for which purpose it has succeeded to ally itself to some mathematicians in my country who wish to enter into the Committee of Administration of the journal.”

Returning home, he had found the new issue of *Compositio* waiting for him. He again turned to the members of the Committee of Administration (Brouwer to Comm. of Adm., 3 February 1950). The publication of the issue under the name *Compositio Mathematica* with the traditional cover constituted such a colossal fraud, that the impudence of “our adversary should hopefully facilitate our law suit.” The letter had hardly been written when Brouwer received with more than a month’s delay, Schouten’s letter of 2 January. This was the first indication that Schouten had managed to turn the (or at least some) members of the Committee of Administration. Brouwer again addressed the Committee of Administration, explaining to them what had been discussed between him and Schouten (Brouwer to Comm. of Adm., 7 February 1950).

Hopf, who was well aware of the difficult sides of Brouwer’s personality, felt that he could not take Schouten’s side. The years of friendship with Brouwer could not be erased that easily. In reply to a card from Brouwer with a picture of *Le Penseur* – a reference to the past: “Does Hopf still remember how he, with Neugebauer, found me here in the Louvre?”, (Brouwer to Hopf, 28 January 1950), the reply was “Of course I remember very well how Neugebauer and I found you in the summer of 1926, sitting in front of the Mona Lisa.” (Hopf to Brouwer, 12 February 1950), he lamented the recent developments. In spite of the advanced stage of the fight, he implored Brouwer to accept a compromise. He argued persuasively that one could not blame a publisher for clinging to a journal. Publishers need editors who are prepared for minor compromises, he said. It would not be a shame at all for Brouwer to accept a younger Dutchman at his side on the board. There would be enough foreigners to guarantee the international character.

That same day Hopf sent a letter to Schouten, informing him of his letter to Brouwer. Hopf also castigated Schouten for not informing Brouwer of the setting up of the Temporary Committee. He disapprovingly commented on Freudenthal’s membership of the committee; in this way, he wrote, the committee lost its neutrality right at the beginning. Schouten answered with an extensive justification of his policy (Schouten to Hopf, 14 February 1950). Since Brouwer had cut all communication, it had been impossible to consult him. Apparently it had not occurred to Schouten that, in order to inform a person, one does not have to consult him.

The choice of Freudenthal, Schouten argued, was not motivated by anti-Brouwer feel-

ings. One simply had to look for four prominent mathematicians from the four universities. Freudenthal, as a Utrecht professor, was a natural choice; the other professor, Jan Popken, was a young man, who, moreover, was the son-in-law of Van der Corput. In view of the situation in Amsterdam, Schouten did not wish to aggravate the differences between Brouwer and Van der Corput. Freudenthal’s long experience with *Compositio* made him a valuable addition to the committee, and, he added, “I note with pleasure that Freudenthal is extremely correct, and in no way hostile to Brouwer.” Of course, I was aware of the frictions between Brouwer and Freudenthal, he wrote, “but as Brouwer permanently gets into a fight, then with one person and then with another, one could not seriously take this into account. Where would the world be if everybody could insist on keeping company only with those they could love, and by whom they are loved? This is ridiculous child’s play, and it is most regrettable that an excellent scholar possesses so little wisdom, that he stoops to playing Indians and cowboys.” Schouten left no doubt that he saw no place for Brouwer in the affairs of *Compositio*:

“Personally I hope for an official reconciliation with Mr. Br. He had ‘terminated the friendship’ on January 28, 1950 from Paris, apparently in response to some correspondence of Gerretsen with a French mathematician on overdue proofs, without having read the letters of January 1 and 2, 1950 and not being aware of the appearance of the *Compositio Mathematica*, which by then had already taken place, nor of the real state of affairs. Moreover he had written that he did not wish to receive letters from me and that he would not read any. Those are, however, child’s games, which will not induce me to withdraw my friendship from him. From one day to another this could change, as I have experienced before. As you see from the new statutes, the possibility has been created to appoint an especially excellent man, who has been of great importance for the *Compositio Mathematica*, to honorary president of the editorial board (*Hauptredaktion*). Perhaps the solution is to be found there. At his age something like that would be exactly the right place for Mr. Br., and the honour would be saved!”

In spite of Schouten’s attempt to treat Brouwer ‘en bagatelle’, one has no difficulty in seeing through the rather obvious ‘propaganda’. Schouten had succeeded in reducing Brouwer’s position in the considerations of the Committee to that of a capricious child who could be placated with a shining

toy. The last sentence, in particular, gives away Schouten's opinion of Brouwer: an elderly dodderer, only good for some honorary position.

History seemed to repeat itself; exactly as in the case of the *Mathematische Annalen*, Brouwer was completely ignored by the new rulers. The reorganization was carried out according to plan, and on 5 May Schouten could announce to the members of the General Committee of *Compositio* that the new regulations had been accepted by a majority vote. In a letter to Veblen, (Schouten to Veblen, 9 May 1950) Schouten explained the reasons for certain formulations of the rules. He added that "As matters are now, it is all a bit disagreeable for Mr. Brouwer. It is his own fault, but personally I should like to make things as pleasant as possible for him. I have in mind to propose him for 'Honorary President' of the General Committee. It is quite impossible to make him a member because then the difficulties would begin all over again, he being what he is. Best if he is so wise to accept this honorary Presidentship, the honour is in this way saved and in this position he is quite unable to do any mischief." It could not have been expressed clearer!

On 31 May a letter was sent to the members of the General Committee (formerly the editorial board) containing the list of candidates for the General Committee (H. Cartan, J.C.H. Gerretsen, E. Kamke, H.D. Kloosterman and J.F. Koksma), the Special Committee (formerly the Committee of Administration) (Cartan, Kamke, Kloosterman, Koksma, W. Saxer and J.M. Whittaker) and finally the name of L.E.J. Brouwer for Honorary President of the Special Committee.

In fact, when volume 8 of *Compositio* was completed (1951), the cover carried more new members than the above listed: G. Ancochea,

E. Bompiani, S. Eilenberg, H. Freudenthal, S. C. Kleene, S. MacLane and M. Picone.

Here the *Compositio* affair ended. Brouwer had not only lost a battle, he had lost for the second time a journal: this time it was his own journal, expropriated by his colleagues and supposed friends.

The cover of *Compositio* did not list Brouwer as a Honorary President, so either the members did not support Schouten's proposal, or Brouwer refused to accept the honour. Brouwer refused to resign himself to the inevitable; as late as December 1950 he was still corresponding with his lawyer (Brouwer to Baron van Haersolte, 22 December 1950).

He had not been able to carry on the matter, he wrote, because of two disastrous developments:

- i. Shortly after I wrote you for the last time, I had to observe that my foreign confrères in the Comm. of Adm., who were in July 1949 without any reserve on my side, have abandoned me as a consequence of communications and promises of my adversaries, which have remained a secret for me.
- ii. The physical shock, inflicted on me by this bewildering observation, left me, after a heart attack, weakened in mind and body to such a degree, that I have been put out of action for a longer period, with respect to the mentioned aggression, and that every sojourn in the realm of thought of this conflict was forbidden for some time.

Nonetheless he planned further action against Noordhoff because it "not only reflected on my honour, but also on the honour of my country".

Apparently these plans did not materialize, and the conclusion to the *Compositio* conflict is lost in vagueness. Brouwer remained very bitter, however, about the whole affair. He used to refer to 'the theft of my journal'. In

spite of the insulting treatment, however, he remained a member of the editorial board of *Compositio* until his death.

Looking at the *Compositio* affair from a distance, one can see what the parties wished and feared. Schouten and his followers thought that Brouwer would stand in the way of a recovery of *Compositio*, and they were more inclined to be loyal to the publisher than to the founding father. Brouwer, on the other hand, was confident that he could maintain the pre-war quality even without Freudenthal's help. He was firmly convinced that his Dutch colleagues together with the publisher would reduce *Compositio* to a provincial periodical. Justified or not, he feared that the lesser gifted would finally see a possibility to enhance their status by joining an editorial board, rather on the basis of their nationality than on the basis of competence. Noordhoff, finally, had a straightforward commercial interest. The publisher successfully played on the secret dreams of the mathematical community: to be an editor of this prestigious journal!

Probably Brouwer did not fully realize to what extent the success of *Compositio* was due to Freudenthal, but it is not impossible that, with a suitable substitute for Freudenthal, he could have made *Compositio* a success. His complaints about Noordhoff were, one would guess, the usual complaints of editors, aggravated by the post-war shortage. In short the conflict seemed to be based as much on personalities as on facts.

The standard of conduct in the conflict is maybe best characterized by the motto 'dealing with Brouwer, anything goes'. If one judges by the standards of 'obeying the rules', Brouwer definitely cut a better figure than Schouten. The episode does little credit to the Dutch mathematical community; it is at best an interesting topic for psychologists.

Referenties

- 1 L.E.J. Brouwer, *Het wezen der meetkunde*, Clausen, Amsterdam, 1909.
- 2 L.E.J. Brouwer, *Intuitionisme en formalisme*, Clausen, Amsterdam, 1912.
- 3 L.E.J. Brouwer, *Wiskunde, waarheid, werkelijkheid*, Noordhoff, Groningen, 1919.
- 4 D. van Dalen, 'The war of the frogs and the mice, or the crisis of the Mathematische Annalen', *Math. Intelligencer* **12** (1990), pp. 17–31.
- 5 D. van Dalen, *Mystic, geometer, and intuitionist: The life of L.E.J. Brouwer*, vol. 2, *Hope and disillusion*, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- 6 H. Freudenthal, 'Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln', *Compositio Math.* **4** (1936), pp. 112–116.
- 7 A. Heyting, 'Bemerkung zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln', *Compositio Math.* **4** (1936), pp. 117–118.
- 8 M.H.A. Newman and G. Kreisel, 'Luitzen Egbertus Jan Brouwer 1881–1966. Elected for Mem. R.S. 1948', *Biograph. Mem. Fellows Roy. Soc.* **15** (1969), pp. 38–68.
- 9 V. R. Remmert, 'Mathematicians at war. Power struggles in Nazi Germany's mathematical community: Gustav Doetsch and Wilhelm Süss', *Rev. Histoire Math.* **5** (1999), pp. 7–59.

Remke Kloosterman*Institut für Algebraische Geometrie**Leibniz Universität Hannover**Welfengarten 1, 30167 Hannover**Duitsland**kloosterman@math.uni-hannover.de***Column Wiskundigen in den vreemde**

Sehr geehrter Herr Dr.

Ondanks de nabijheid, zijn de verschillen met Duitsland wat betreft het onderwijs groot. Remke Kloosterman, gepromoveerd in maart 2005 bij Marius van der Put en Jaap Top op een onderwerp uit de arithmetische algebraïsche meetkunde, vertelt over zijn ervaringen als postdoc in Hannover.

“Sehr geehrter Herr Dr. Kloosterman,” begon het eerste mailtje dat ik van een student kreeg, een vierdejaars student nog wel. Ik dacht toen terug aan mijn laatste serie werkcolleges in Nederland (eerste trimester van het eerste jaar) waar de studenten mij vanaf de tweede week bij mijn voornaam noemden. Tegelijk dacht ik ook aan al die Nederlandse hoogleraren die mij ervoor gewaarschuwd hebben hoe merkwaardig Duitsland toch is. Over het algemeen waren deze waarschuwingen niet terecht, Duitsland is niet meer het West-Duitsland van dertig jaar geleden, net zo min als Nederland niet meer het Nederland van de jaren zeventig is. Op het sociale vlak lijken mij de verschillen binnen Duitsland groter, dan die tussen (noordoost-)Nederland en (noordwest-)Duitsland. De inwoners van Nedersaksen hebben de reputatie gesloten en nuchter te zijn; redelijk wars van het sociaal-moralistische conservatisme uit het zuiden van het land, en een tikkeltje argwanend

ten opzichte van veranderingen, die niet zo nodig lijken. Er zijn genoeg Nederlanders die inwoners van Noord-Oost-Nederland precies zo zouden beschrijven.

Habilitation

Tussen de universiteiten in Nederland en Duitsland zijn wel degelijk grote verschillen. In principe kan een postdoc geen hoorcollege geven, tenzij dit in de plaats is van een hoogleraar en de postdoc “precies vertelt wat de hoogleraar anders zou vertellen”. Een postdoc kan tevens niet als begeleider van afstudeerders optreden. In de praktijk neemt men het hier niet meer zo nauw mee. Daarnaast staat het fenomeen *Habilitation* erg onder druk: er zijn teveel manieren zijn om iets Habilitation-equivalents te doen, en veel mensen binnen bijvoorbeeld de DFG (Duitse versie van NWO) en binnen de Duitse universiteiten vinden het een achterhaald systeem. De universiteiten zijn op veel kleinere schaal georganiseerd. Een individuele C4/W3-hoogleraar heeft tamelijk veel vrijheid en hij kan veel meer zelf beslissen als een Nederlandse professor. Decanen, College van Bestuur en dergelijke hebben minder invloed. Een hoogleraar hoeft echt geen functioneringsgesprek met de decaan te voeren.

Fragmentatie

In Hannover hebben wij zes wiskunde-instituten, bij deze zes instituten zijn net iets meer mensen in dienst dan er wiskundigen werken aan het Instituut voor Wiskunde en Informatica in Groningen. Deze zes instituten hebben in totaal acht secretaresses, maar geen een instituut is groot genoeg om een (gespecialiseerde) systeembeheerder aan te stellen, dus die is er dan ook niet. Bij alle andere instituten waar ik enige tijd ben geweest, bestond ongeveer de helft van het ondersteunde personeel uit systeembeheerders.

De gevolgen van het ontbreken van systeembeheer zijn duidelijk: de enige software die geïnstalleerd is op mijn computer, is een standaard linux distributie, die eens in de paar jaar wordt ververst door een van de promovendi. Een centrale file-server voor alle wiskunde-instituten met redelijk wat software daarop geïnstalleerd schijnt onmogelijk te zijn, alhoewel dit de promovendi in ons instituut veel tijd zou uitsparen.

Ook is er geen terminalruimte voor de studenten. De officiële reden is dat computer makkelijk uit een vrij toegankelijke ruimte kunnen worden gestolen, toch zijn vaak de computers in vrij toegankelijke ruimtes zo goed vastgezet, dat een inbreker liever de computer uit de afgesloten hoogleraarskamer mee neemt.

De universiteiten maken organisatorisch veel sterker deel uit van de overheid dan in Nederland. Het land Nedersaksen betaalt mijn salaris uit, niet de Leibniz Universität Hannover. Iedere hoogleraarbenoeming moet worden goedgekeurd door het ministerie. Het ministerie mag zich niet met de inhoudelijke aspecten bemoeien, maar controleert wel of alles volgens de regels gebeurt. Er zijn echter zoveel regels, dat er een redelijke kans is dat er een overtreden wordt.

Respect

Bij het onderwijs zijn er grote verschillen. Allereerst zijn studenten veel braver, hebben zij (te)veel respect voor de docent, en een ongelofelijke angst iets verkeerd te zeggen bij een werkcollege. De studenten verwachten van een werkcollegedocent dat hij sommen voordoet die erg lijken op de huiswerksommen. Actief meedenken en vragen stellen of zelf proberen een opgave op te lossen hoort niet bij een werkcollege; het bord kopiëren wel.

Een eenzijdig beeld van wiskunde

De opbouw van de studie wiskunde is anders. Een beginnend student krijgt in de eerste twee jaar van zijn studie weinig verschillende hoogleraren te zien. De docent van Lineaire Algebra 1 is ook de docent van Lineaire Algebra 2 in het twee semester en is ook de docent van Algebra 1 in het derde semester. Voor de Analyse 1 tot en met 4 geldt hetzelfde principe. Het heeft een groot voordeel: de docent en de (zich snel uitdunnende) groep studenten raken op elkaar ingespeeld.

Helaas krijgt de student een eenzijdiger beeld van de wis-

kunde te zien, dat erg afhangt van precies die vier docenten die hij/zij in het semester tegenkomt. Vervolgens probeert de docent zoveel mogelijk studenten te overtuigen in het derde en vierde jaar veel keuzevakken bij hem te volgen. (bijvoorbeeld Algebra 2 en Algebraïsche Meetkunde 1, 2 en 3 en twee seminaria) om daarna bij dezelfde docent af te studeren. Zo krijg je afstudeerders die bijna een vol jaar aan keuzevakken bij de afstudeerdocent hebben gevolgd.

Vrijheid

De vrijheid van een hoorcollegedocent is tamelijk groot. Vakken worden geëvalueerd, maar daar worden vrijwel geen consequenties aan verbonden. Bij de vakken in de eerste twee jaar ligt er lijstje van onderwerpen die in ieder geval behandeld moeten worden, maar vaak is er genoeg tijd om nog een aantal onderwerpen toe te voegen. Deze extra onderwerpen hebben veel invloed op het niveau van de cursus: het maakt nogal uit of je de tijd die bij Lineaire Algebra 1 over is, besteedt aan het oplossen van stelsel lineaire vergelijkingen of deze gebruikt wordt om normaaldelers en quotientgroepen te behandelen. Dit alles geeft de docent de kans een jaargang te vormen zoals hij dat wil.

Een aantal nadelen is ook duidelijk aanwezig. Er is weinig variatie van docenten voor de studenten, studenten worden niet geprikkeld om een vakgebied van verschillende gezichtspunten te bekijken en docenten worden niet gestimuleerd hun eigen vakgebied in brede context te zetten. Vrij veel studenten studeren af bij een docent die zij in het eerste semester hadden, van veel van de overige docenten hebben zij überhaupt geen college gehad. Dit levert ook een beperking op van de mogelijke afstudeerrichtingen, formeel kan je dan in alle richtingen afstuderen, in de praktijk maar in de helft van de richtingen.

De middelbare school

In Duitsland (zoals vrijwel overal) moet je om middelbare schooleraar te worden een universitaire opleiding volgen. De lerarenopleiding wiskunde is een uitgekleden wiskundeopleiding. De studenten van de lerarenopleiding volgen tegelijkertijd een opleiding tot docent in een ander vak. Dit tweede vak is vaak ongerelateerd aan het eerste, de combinatie wiskunde en natuurkunde komt voor, maar ook de combinatie wiskunde en sport is geen uitzondering. Daarnaast moet er nog ruimte in het programma zijn voor de didactiekvakken. In de eerste twee jaar volgen de gewone wiskundestudenten en de studenten van de lerarenopleiding veel vakken gezamenlijk.

Het gevoel van veel docenten hierbij is dat geen van de studenten aan hun trekken komen bij vakken die verplicht zijn bij zowel de lerarenopleiding als de gewone studie wiskunde: het niveau bij zo'n vak ligt te hoog voor de studenten van de lerarenopleiding wiskunde en sport, en te laag voor de echte wiskundestudenten.



Jan Draisma

Afdeling Wiskunde en Informatica

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

j.draisma@tue.nl

Boekbespreking

Leonhard Euler

Ein Mann, mit dem man rechnen kann

Leonhard Euler werd driehonderd jaar geleden in Basel geboren en dat is in Zwitserland op allerlei manieren gevierd. De uitgave van dit stripboek is er daar een van. Google 'Euler 2007' en u vindt een lijst van allerlei activiteiten. Ook in St.-Petersburg is Euler trouwens herdacht, met een congres in de zomer.

Dit stripboek gaat niet over Eulers wiskunde, al geeft het wel een goede indruk van Eulers

ongelooflijke productiviteit in heel uiteenlopende delen van de wiskunde en de natuurkunde: van integraalrekening tot scheepsbouw, van muziektheorie tot optica. Want dat is wel de kern van het boek: we zien hoe Euler onder steeds wisselende, vaak moeilijke, omstandigheden, opgroeit en gestaag werkt aan allerlei problemen—zowel problemen die hij zichzelf stelt als ook heel praktische vraagstukken waar zijn werkgevers (met name koning Frederik de Grote van Pruisen) hem voor consulteren. Daarbij lijkt hij het nooit hoog in de bol te krijgen. Sterker nog: terwijl allerlei staatshoofden en andere tijdgenoten van Euler in het stripboek stevig worden neergezet, haast als karikatuur, blijft Eulers personage een beetje plat—trots, dat wel, maar verder heel nederig en hardwerkend. Je vraagt je af of hij echt zo was.

Goed, het is dus een stripboek, en dat betekent dat je het alleen moet lezen als je van stripboeken houdt. De soort humor is typisch stripboek: Als Euler op zesjarige leeftijd naar Basel moet voor school, zegt vader Euler, dominee in Riehen vlakbij Basel: "Gott beschütze dich, mein Sohn, lerne fleissig." In

een denkwolkje ernaast verzucht hij: "endlich schluss mit der Fragerei."

Veel later, in 1727, als Euler tegen de wil van zijn vader en onder invloed van Johann Bernoulli zijn studie theologie met goed resultaat heeft ingeruild voor wiskunde, pleiten de zonen Daniel en Nikolaus Bernoulli er bij Catharina de eerste, tsarina van Rusland, voor om Euler aan te stellen in de St.-Petersburgse Academie. Daarmee stemt Catharina in, maar dan wel voor de leerstoel geneeskunde. En zo trekt Euler op twintigjarige leeftijd naar St.-Petersburg — om nooit meer naar Basel terug te keren. Op de boot onderweg zien we hem 'Anatomie für Dummies' lezen.

Het boek beschrijft Eulers leven in chro-



Leonhard Euler: Ein Mann, mit dem man rechnen kann. Tekst: Andreas K. Heyne en Alice K. Heyne, tekeningen: Elena S. Pini, Birkhäuser Verlag, 2007, ISBN 3-7643-7779-8, prijs € 19,90.



waarden. Euler wordt bijna volkomen blind (het zicht van één oog had hij al eerder verloren), maar dat houdt hem niet van het werk: de helft van al zijn gigantische oeuvre schrijft hij tussen 1766 en zijn dood in 1783.

Taal

Er is, naast deze eerste Duitse uitgave van het stripboek, ook een Engelstalige uitgave. Maar af en toe zijn er zinnen in dialect: Basels, bijvoorbeeld: "Jakob Hermann. Ych kumm au us Basel," of Oostenrijks (door Maria Theresia): "Jetzt hamma Schlesien an die verdammten Preissen verloarn, dann schappma uns halt Bayern, woas Franzl?" Dat zal wel moeilijk te vertalen zijn! En voor wiens Duits een beetje roestig is, helpen de plaatjes natuurlijk — kortom, ik raad de Duitse uitgave aan.

Conclusie

Maar aan wie? Nou ja, aan iedereen die van stripboeken houdt en het leuk vindt om in korte tijd een beeld van Eulers leven te krijgen. Lekker ongenueanceerd, zoals dat bij een stripboek hoort. Overigens wordt achterin het boek in vier bladzijden nog eens een heel beknopt overzicht gegeven van Eulers leven en tijdgenoten.

Is het een kinderboek? Ook, natuurlijk, vooropgesteld dat die kinderen aan de hand van plaatjes Duits kunnen begrijpen. Maar het is toch bovenal een geslaagde poging om Euler onder een breed publiek onder de aandacht te brengen — een aanrader dus, zowel voor uzelf als voor uw niet-wiskundige vrienden! 

nologische volgorde: Na Basel dus St.-Petersburg, waar hij in 1734 trouwt met Katharina Gsell, dochter van een Zwitser — die Zwitsers in St. Petersburg vormen een hechte klik! Daarna "beginnt für Euler eine fruchtbare Schaffensperiode". Beeld: Euler aan zijn bureau met een kind op zijn knie en een ander op een hobbelpaard ernaast. Chaos: overal boeken en speelgoed. De tsarina sterft kort voordat Euler in St.-Petersburg aankomt, haar zoon Peter II in 1790 (op vijftienjarige leeftijd), en daarna wordt het land door zijn tante Anna Iwanowna geregeerd. Maar als die overlijdt, heerst er onrust in het land, en als Euler een aanbod krijgt van Frederik de Grote, verhuist het gezin Euler naar Berlijn.

Frederik heeft het echter te druk met oorlogvoeren tegen Maria Theresia van Oostenrijk om zich serieus met zijn pas opgerichte academie bezig te houden. Later geeft hij

Euler allerlei praktische opdrachten, sommige serieus, maar ook bijvoorbeeld "Für meine nächste Party müsste jemand die Wasserspiele hier im Park installieren" — en op het volgende plaatje loopt Euler zuchtend langs een etalage vol met zijn bestsellers over maanbewegingen en differentiaalrekening. Het boert nooit echt tussen Frederik en Euler: Euler maakt weliswaar carrière — en is waanzinnig productief zoals altijd — tot hij praktisch de leider van de academie is, maar Frederik, die Euler te wereldvreemd vindt, wil hem niet officieel tot president van de academie benoemen.

In 1766 neemt Euler ontslag en gaat in op een aanbod van tsarina Catharina de Grote. Terug in St.-Petersburg worden Euler en zijn ondertussen achtienskoppige familie heel goed ontvangen (spandoeken met " $F+E=K+2$ ") — Catharina weet een genie te

Uitgaven

Leonhard Euler: Ein Mann, mit dem man rechnen kann, tekst: Andreas K. Heyne, Alice K. Heyne; tekeningen: Elena S. Pini, Birkhäuser Verlag, 2007, ISBN 3-7643-7779-8, prijs € 19.90.

Leonhard Euler: A Man to Be Reckoned with, tekst: Andreas K. Heyne, Alice K. Heyne, tekeningen: Elena S. Pini, Birkhäuser Verlag, 2007, ISBN: 978-3-7643-8332-9, prijs € 21.29.

Brieven

| Letters to the editor

Persoonlijke ervaringen met de Hirsch-index

In Wetenschap & Onderwijs, *NRC Handelsblad* van 27 augustus 2005, stond een artikel onder de kop 'Scoren voor professoren'. Daar werd een publicatie genoemd van Hirsch (2005), waarin de index h voor de wetenschappelijke *footprint* van auteurs geïntroduceerd wordt. Een wetenschapper heeft index h , als h van zijn N publicaties minstens h keer geciteerd worden, terwijl geen van de overige $N-h$ publicaties meer dan h keer geciteerd wordt. Ik zocht het artikel op en zag dat het er inderdaad letterlijk zo staat in het Engels. Het is niet moeilijk voorbeelden te bedenken waarbij deze 'definitie' niet zonder meer werkt. Bijvoorbeeld: een auteur heeft twee artikelen gepubliceerd, artikel A heeft één citatie, artikel B twee. Je moet nu B nummer 1 geven om aan de definitie te voldoen en uit te komen op $h = 1$. Ik liet Hirsch het probleempje per e-mail weten. Hij antwoordde dat hij de definitie zou aanpassen. Omdat A.F.J. van Raan van het Leidse *Center for Science and Technology Studies* in de referenties van Hirsch voorkwam, stuurde ik hem ook mijn echte definitie: "Een wetenschapper heeft index h als hij h publicaties heeft die allemaal minstens h keer geciteerd zijn, waarbij h zo groot mogelijk wordt gekozen". De definitie van Hirsch kan ook verbeterd worden door de artikelen eerst naar aflopend aantal citaties te ordenen. Onlangs vond ik mijn definitie terug op internet, in Van Raan (2006) "with a slight but important modification, . . . proposed by F. Steutel". In de literatuurlijst sta ik, ook met maar één voorletter, als F. Steutel (2005), *personal communication*. Inmiddels worden de kolommen van *Scientometrics* volgeschreven over de h -index. Hirsch ontkent overigens dat hij zijn index h heeft gedoopt omdat het de eerste letter van zijn naam is. De hoogste h -index die Hirsch heeft waargenomen, is 110, gescoord door de fysicus E. Witten; zijn index is inmiddels opgelopen tot minstens 137. Dat zijn voor wiskundigen absurd hoge getallen. De meeste wiskundigen publiceren gedurende hun hele leven minder dan 110 artikelen en boeken. Zelfs Erdős, die — tot nu toe, er komt er af en toe nog eentje bij — 1585 artikelen publiceerde, heeft bij lange na geen 110 artikelen die 110 keer of vaker geciteerd zijn. Web of Science, dat sinds kort naast aantallen citaties ook h -indices vermeldt, geeft Erdős — op grond van maar de helft van diens artikelen — een h -index van 33, bij een gemiddeld aantal citaties van 3,7. Ik werd natuurlijk nieuwsgierig naar mijn eigen h -index. De onvolledige gegevens van Web of Science leiden voor mij tot $h = 10$, maar misschien kan deze index bij gebruik van alle gegevens verhoogd worden tot 11 of 12. Leuk speelgoed, of is het meer?

Fred Steutel, TU-Eindhoven

Referenties

1. J.E. Hirsch, (2005). An index to quantify an individual's scientific output. ArXiv:physics/0508025.
2. A.F.J. van Raan (2006), Comparison of the Hirsch-index with standard bibliometric indicators and with peer judgment for 147 chemistry research groups, *Scientometrics* 67(3): 491-502.
3. Wikipedia, en.wikipedia.org/wiki/Hirsch.number

In deze rubriek reageren lezers op recent in dit blad verschenen artikelen. De redactie behoudt zich het recht voor ingezonden brieven in te korten of niet te plaatsen.

Arno van den Essen

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld

6525 ED Nijmegen

a.vandenessen@math.ru.nl

Onderzoek: het HSA-vierkant

De hype en zijn gevolgen

Vrijwel iedere Nederlander weet onderhand wat magische vierkanten zijn. Een van de drijvende krachten achter dit nieuwe enthousiasme is Arno van den Essen die er recent een boek over heeft geschreven. Toen hij op 13 maart 2007 de eerste versie van dit artikel schreef, dacht hij te weten waarom een magisch vierkant 'magisch' heet. Echter op 22 maart om twee uur 's middags met de trein in Parijs aangekomen om er een lezing te geven, begreep hij pas de echte betekenis van het woord: in Nederland was een mediahype uitgebroken rond een magisch vierkant dat drie maanden eerder door drie middelbare scholieren in zijn Masterclass 'Magische Vierkanten en Sudoku's' gevonden was. Onderstaand verhaal is een aangepaste versie van het op 13 maart geschreven artikel en gaat, behalve over het vierkant, ook in op de gevolgen van de hype.

De Masterclass

In de maanden oktober tot en met december 2006 namen zo'n dertig middelbare scholieren deel aan de Masterclass Magische Vierkanten die ik aan de Radboud Universiteit in Nijmegen gaf. Op zes donderdagmiddagen werd de leerlingen een drietal onderwerpen aangeboden, op grond waarvan ze een profielwerkstuk konden gaan maken: vormsudoku's, alfa-magische vierkanten en Franklin-magische vierkanten. Het laatste onderwerp sloot aan bij mijn recente oplossing van het Franklin-mysterie, dat in mijn boek [1] beschreven wordt.

Zo'n tweehonderdenvijftig jaar geleden construeerde Benjamin Franklin zo'n vijftal bijzonder magische vierkanten, waarvan het hieronder afgedrukt 8×8 vierkant het bekend-

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

ste is. Dit vierkant verscheen op 17 januari 2006 zelfs op een postzegel van US postage ter gelegenheid van Franklins driehonderdste geboortedag.

Het bijzondere aan dit vierkant is dat niet alleen de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom gelijk is aan 260, maar ook de som van alle getallen in iedere *halve* rij en iedere *halve* kolom (vanaf de rand gerekend) is gelijk aan 130. Bovendien is ook de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant gelijk aan 130. In tegenstelling tot een 'gewoon' magisch vierkant is de som der getallen op de diagonaal niet gelijk aan de magische som. In plaats daarvan is de som van alle getallen op ieder van de vier *gebogen* diagonalen zoals bijvoorbeeld 52, 3, 5, 54, 43, 28, 30, 45 of 45, 30, 28, 43, 23, 40, 34, 17 gelijk aan 260. Maar nog is niet alle magie beschreven. Ook alle parallelle gebogen diagonalen zoals bijvoorbeeld 61, 62, 12, 43, 23, 56, 2, 1 of 20, 51, 5, 6, 58, 57, 15, 48 hebben 260 als som, een bijzonder vierkant.

De uitdaging

Tijdens de Masterclass werd uiteengezet hoe zulke vierkanten gemaakt kunnen worden. Vervolgens werd een aantal mogelijke onderzoekopdrachten geformuleerd zoals: maak

je eigen 8×8 Franklin-magisch vierkant (dat wil zeggen een vierkant dat alle bovengenoemde eigenschappen van het Franklin-vierkant bezit), maar ook maak een 8×8 Franklin-magisch vierkant dat ook nog *panmagisch* is, met andere woorden zo dat ook nog de diagonalen en alle daaraan parallelle *gebroken* diagonalen als som 260 hebben, of, nog uitdagender, maak zo'n vierkant van orde 16. Echter de ultieme uitdaging was: maak een 12×12 Franklin-magisch vierkant, omdat zo'n vierkant tot op de dag van vandaag nog niet gevonden is.

Tijdens de Masterclass hadden Petra Alkema, Jesse Hoekstra en Willem Schilte al een 8×8 panmagisch Franklin-magisch vierkant gemaakt, denkende dat het een huiswerkopgave was. Ze besloten daarom hun energie te besteden aan het zoeken van een 12×12 Franklin-magisch vierkant.

Op 14 december vond de op een na laatste bijeenkomst van de Masterclass plaats. Aan het eind van de middag kwamen Petra, Jesse en Willem naar mij toe en vertelden me dat ze erin geslaagd waren het onderstaand 12×12 bijna-Franklin-magisch vierkant te maken.

Hoe bijzonder dit vierkant is zal ik hieronder laten zien: in mijn ogen is het *het meest magische vierkant dat ooit* in zo'n vijfduizend jaar magische vierkanten-geschiedenis gemaakt is. In onderstaande zal ik dit vierkant de naam HSA-vierkant geven (Hoekstra, Schilte, Alkema).

Het HSA-vierkant

Om te beginnen is onderstaand vierkant inderdaad bijna het gezochte 12×12 Franklin-magische vierkant: de som van alle getallen in iedere rij en iedere kolom is 870, de som van alle getallen op iedere gebogen diago-

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Het HSA-vierkant. Het vierkant is ook $\frac{1}{3}$ -Franklin-magisch. Zo is bijvoorbeeld $2 + 119 + 122 + 47 = 290$. Ook hebben alle cirkels bestaande uit twaalf getallen de magische som van 870, zoals bijvoorbeeld de cirkels gevormd door de getallen 60, 70, 38, 105, 80, 91, 54, 65, 40, 107, 75 en 85 of die gevormd door de getallen 75, 95, 93, 53, 54, 68, 101, 127, 32, 112, 14, 46.

naal en iedere parallelle gebogen diagonaal is 870 en de som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant is gelijk aan 290. De enige eigenschap die nog ontbreekt om Franklin magisch te zijn is de *halve kolom-eigenschap* en de *halve rij-eigenschap*: de som van alle getallen in iedere halve rij is gelijk aan 434 of 436, in plaats van 435 en de som van alle getallen in iedere halve kolom is gelijk aan 423 of 447.

Het ontbreken van deze eigenschap wordt echter meer dan gecompenseerd door een scala aan andere magische eigenschappen.

Zo is het vierkant $1/3$ -de Franklin-magisch. Dat wil zeggen dat de som van alle getallen in iedere 'eenderde rij' en iedere 'eenderde kolom' (vanaf de rand gerekend) gelijk is aan 290, het derde deel van de magische som. Bijvoorbeeld $11 + 110 + 131 + 38 = 290$ maar ook $108 + 39 + 98 + 45 = 290$ en ook $80 + 53 + 92 + 65 = 290$. Verder is het vierkant *panmagisch*, wat zoals eerder opgemerkt betekent dat alle diagonalen en alle parallelle gebroken diagonalen, zoals bijvoorbeeld 121, 27, 11, 9, 32, 127, 101, 78, 96, 94, 74, 100 als som 870 hebben. Deze eigenschap ontbrak bij het eerder genoemde 8×8 vierkant van Franklin.

Ook hebben alle cirkels bestaande uit twaalf getallen de magische som van 870, zoals bijvoorbeeld de cirkels gevormd door de getallen 60, 70, 38, 105, 80, 91, 54, 65, 40, 107, 75 en 85 of die gevormd door de getallen 75, 95, 93, 53, 54, 68, 101, 127, 32, 112, 14, 46. Deze eigenschap, die zover ik weet niet eerder werd opgemerkt, volgt onmiddellijk uit het feit dat de som van de getallen in ieder 2×2 deelvierkant gelijk is aan 290.

Maar het HSA-vierkant heeft nog heel wat meer verrassingen in petto: zij L de horizontale lijn die het vierkant in twee gelijke delen

verdeelt, dan is de som van ieder tweetal getallen dat spiegelsymmetrisch ligt ten opzichte van deze lijn, zoals bijvoorbeeld 37 en 108, gelijk aan 145. Een gevolg daarvan is dat ieder figuur, bestaande uit twaalf getallen, dat symmetrisch is ten opzichte van de lijn L als som 870 heeft.

Gebruik makend van deze symmetrie, de 2×2 deelvierkanten eigenschap en de eenderde Franklin eigenschap is het vervolgens mogelijk de meeste letters van het alfabet te maken en evenzo de meeste cijfers, natuurlijk allen met de magische som van 870. In het bijzonder kun je de letters HSA als volgt maken. H: 73, 60, 85, 72, 87, 58, 50, 95, 64, 93, 52, 81, S: 41, 80, 53, 104, 103, 91, 54, 42, 44, 89, 68, 101 en tenslotte A: 106, 47, 84, 49, 96, 61, 51, 86, 69, 88, 57, 76.

De hype en zijn betekenis

Wat er zich op 22 maart allemaal heeft afgespeeld ben ik (vanwege mijn verblijf in Parijs) pas later te weten gekomen. Voordat ik op de positieve gevolgen (van de hype) voor de wiskunde zal ingaan, wil ik eerst reageren op een aantal in de media verschenen uitspraken.

Zo zou ik gezegd hebben dat het vierkant 'wereldwijd een sensatie in de wiskunde is'. Ik heb slechts gezegd en geschreven (in het artikel van 13 maart, dat op het internet te lezen is) dat het om een "sensatie in de wereld der magische vierkanten" ging. Zoals in het NRC te lezen was vond een woordvoerster van het ANP dat 'te subtiel'. Ik had het artikel echter voor het Wiskundig Genootschap geschreven, waardoor ik toch mocht aannemen dat dit 'subtiel verschil' wel begrepen zou worden. Voor dit soort misverstanden kan ik desalniettemin alle begrip opbrengen.

Voor de geciteerde reacties van mijn collega's (waarbij ik in het midden laat of ze

wel juist geciteerd zijn, en dat is niet vanzelfsprekend) is dat duidelijk minder het geval. Bijvoorbeeld de uitspraak "... het gaat om het invullen van getalnetjes, het is recreatieve wiskunde." Dat de in 1776 door Euler ingevoerde Latijnse vierkanten inderdaad als recreatieve wiskunde bedacht zijn om magische vierkanten te maken en dat juist deze Latijnse vierkanten, door hun grote verscheidenheid aan toepassingen, uit onze hedendaagse wereld niet meer zijn weg te denken en dat ook het Fermat-probleem als recreatieve wiskunde is begonnen, is de maker van bovenstaande opmerking blijkbaar ontgaan.

Ook de opmerking "het is net niet gelukt. Maar net niet telt niet in de wiskunde", hierbij doelend op het feit dat in het HSA-vierkant een Franklin eigenschap ontbreekt, is toch wel een heel negatieve benadering van het verkregen resultaat, waar in mijn ogen niemand mee gediend is: was het niet zo dat Alexander Fleming een bacteriekolonie aan het bestuderen was en zijn kolonie door een stukje vuil verpest zag, wat hem uiteindelijk tot iets veel mooiers leidde, de ontdekking van de penicilline. Ook hier blijkt het gevonden vierkant veel buiten gewonere magische eigenschappen te hebben dan het vierkant dat net niet gevonden werd.

Tot slot wil ik nog vermelden dat ook de voorlichters van de Radboud Universiteit met de plotselinge trendbreuk in berichtgeving over het vierkant meewaaiden, door op 22 maart nog een nieuwsbericht uit te brengen met als titel *Magisch vierkant iets minder magisch*, natuurlijk zonder enige uitleg. Volkomen onzinnig: het vierkant was niet minder magisch geworden.

Op 5 april werd het resultaat bekroond met de van Melsenprijs (voor het beste bèta-profielwerkstuk) tezamen met een ander drietal scholieren, te weten Bruno van Albeda, Valentijn Karemaker en Brigitte Sprenger, die onder andere de schuifpuzzel en de kubus van Rubik bestudeerden. Ook op het *International Conference for Young Scientists* in St. Petersburg behaalden beide groepen opnieuw de hoogste klassering: een zilveren medaille (goud werd niet toegekend).

Maar laat ik nu op de positieve kanten van de hype ingaan. Na terugkeer uit Parijs bleek mijn mailbox te zijn overladen met emails van allemaal enthousiaste mensen die, veel niet-gevraagde, magische vierkanten gemaakt hadden. Ook vernam ik dat een jaar eerder door Donald Morris een vierkant, nagenoeg hetzelfde als het HSA-vierkant, gemaakt was, een verschijnsel dat regelmatig bij

wetenschappelijke ontdekkingen voorkomt. Verder was het opvallend te zien hoeveel jonge kinderen (10-12 jaar) bijzonder magische vierkanten gemaakt hadden en probeerden het nog niet gevonden 12×12 Franklinvierkant te vinden. Was het niet Andrew Wiles die als tienjarige geboeid raakte door een onopgelost probleem en was het niet Jean-François Champollion die ook op tienjarige leeftijd in de ban kwam van de Rosetta steen en het mysterie van de hiërogliefen? Ik ben ervan overtuigd dat de jonge onderzoekers van nu de wiskundigen van morgen zijn.

Ook op middelbare scholen werd er in de wiskundelessen aandacht besteed aan magische vierkanten: is er een betere publiciteit voor wiskunde mogelijk? Bovendien kreeg de wiskunde in de gedaante van Petra, Jesse en Willem drie jonge ambassadeurs.

Maar het sprookje van het HSA-vierkant kreeg begin mei een onverwacht snel happy end. Het was Cor Hurkens, wiskundige aan de TUE, die mij een voorlopige versie [2] van zijn zoektocht naar het gezochte Franklinvierkant stuurde. Zijn artikel begint met een schitterende reductie, die het mogelijk maakt de zoektocht vervolgens met een computer 'berekenbaar' te maken. Na zo'n 160 uur computertijd, waarbij 50 computers gebruikt werden, bleek het gezochte 12×12 Franklinvierkant niet te bestaan. Het HSA-vierkant blijft dus nog steeds het meest magische Franklinvierkant.

Maar de mediahype heeft nog meer tastbare resultaten opgeleverd. Tot nu toe was het alleen bekend dat er voor ordes die een achtvoud zijn een Franklin-magisch vierkant bestaat (het is eenvoudig in te zien dat de orde van een Franklinvierkant een viervoud is). Echter voor de achtvouden plus vier was nog niets bekend, totdat, zoals gezegd Cor Hurkens bewees dat het eerste geval, dat van orde twaalf niet bestaat.

Terwijl Cor Hurkens het 12×12 geval oplosste was in Malden bij Nijmegen een amateur-wiskundige, de elektrotechnisch ingenieur Huub Reijnders, bezig Franklinvierkanten van grotere orde te bestuderen. Hij toonde aan dat voor alle ordes groter dan twaalf die een achtvoud plus vier zijn, er wel degelijk zuiver Franklin-magische vierkanten bestaan. Onmiddellijk na de bekendmaking van Reijnders' resultaat (in *De Telegraaf*) slaagde ook Cor Hurkens erin met zijn methode deze vierkanten te maken.

De hype heeft er dus voor gezorgd dat we nu precies weten voor welke ordes een Franklinvierkant bestaat. Dit roept onmiddellijk weer een nieuwe vraag op: is er een verband

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

De letters van HSA als volgt: H: 73, 60, 85, 72, 87, 58, 50, 95, 64, 93, 52, 81, S: 41, 80, 53, 104, 103, 91, 54, 42, 44, 89, 68, 101 en tenslotte A: 106, 47, 84, 49, 96, 61, 51, 86, 69, 88, 57, 76

tussen Franklinvierkanten van orde $2n$ en paren orthogonale Latijnse vierkanten van orde n , immers voor deze laatste vierkanten weten we dat ze bestaan voor alle ordes behalve 2 en 6, wat natuurlijk precies correspondeert met 4 en 12 waarvoor er juist geen Franklinvierkanten bestaan.

Het zou zeer interessant zijn deze vraag positief te kunnen beantwoorden omdat we dan via de constructie van Franklinvierkanten paren orthogonale Latijnse vierkanten kunnen vinden, wat gezien de grote toepasbaarheid van deze vierkanten een nuttige bijdrage aan de wiskunde zou opleveren.

heid van deze vierkanten een nuttige bijdrage aan de wiskunde zou opleveren.

Referenties

1. Arno van den Essen, *Magische Vierkanten, Van Lo-Shu tot sudoku*, Veen Magazines (2006), Diemen.
2. Cor Hurkens, 'Plenty of Franklin Magic Squares, but none of order 12', *preprint*, 7 mei 2007.

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidersgracht 24
1018 TV Amsterdam
craats@science.uva.nl

Boekbespreking

Als zuurstof

Het populariseren van wiskunde wordt al vele jaren op grote schaal toegepast; de beroepsgroep probeert zich met veel energie van een slecht imago te ontdoen. Toch is het niet aan iedereen gegeven om voor een groot publiek te schrijven en niet alle onderwerpen lenen zich er even goed voor. Er zijn weer drie uitgaven op de markt verschenen waar wiskunde aan de man wordt gebracht. Hoe aantrekkelijk zijn deze boeken voor het grote publiek?

We krijgen steeds maar te horen dat wiskunde zo belangrijk is voor veel vervolgopleidingen, maar op school wordt dat belang absoluut niet duidelijk gemaakt. Het is een veelgehoorde klacht van havo- en vwo-leerlingen. Wie de tegenwoordige schoolboeken en eindexamens opgaven bekijkt, kan dat ook wel begrijpen. Voor de verhaaltjessommen die daar als 'realistische wiskunde' gepresenteerd worden, loopt geen enkele weldenkende leerling warm. En als je echt wat van wiskunde weet, erger je je groen en geel: er wordt zo immers een volstrekt verkeerd beeld gegeven van de manier waarop echte wiskunde gebruikt wordt in het vervolgonderwijs, de beroepspraktijk of het wetenschappelijk onderzoek.

Het is natuurlijk ook niet gemakkelijk leerlingen een realistisch beeld te geven van toegepaste wiskunde. De meeste toepassingen maken immers gebruik van geavanceerde wiskundige technieken die ver uitstijgen boven de schoolstof. En kritische modelvorming, een wezenlijk onderdeel van elke wiskundige toepassing, vereist meestal een diepgaande

kennis van het toepassingsgebied. Gezond verstand en een beetje googlen zijn zelden voldoende: vakkennis en ervaring, daar gaat het om. Daar komt bij dat maar weinig leraren op de hoogte zijn van moderne ontwikkelingen en toepassingen van de wiskunde. Zo dreigt wiskunde voor scholieren een vak met een imago probleem te blijven: onbekend maakt onbemind.

Dat het toch mogelijk is een breed publiek, en daarmee zeker ook scholieren, een realistisch en enthousiasmerend beeld voor te schotelen van de moderne wiskunde, bewijst *Opgelost*, een boek van wetenschapsjournalist Bennie Mols. Deze uitgave, die mede tot stand kwam door een bijdrage van het Centrum voor Wiskunde en Informatica ter gelegenheid van zijn vijftigjarig jubileum, is een toonbeeld van goede wetenschapspopularisatie. De ondertitel luidt: *Toepassingen van wiskunde en informatica*. Op toepassingen ligt dan ook de nadruk, maar 'zuivere wiskunde' komt ook op veel plaatsen verrassend om de hoek kijken, bijvoorbeeld door de manier waarop bijna alle toepassers over de zuive-

re wiskunde als basisdiscipline en inspiratiebron spreken.

Wat maakt *Opgelost* tot een 'must' voor iedere schoolbibliotheek en iedere salontafel? Naast de inhoud zeker ook de verpakking. De lay-out is een lust voor het oog: mooi fotomateriaal in kleuren, een overzichtelijke indeling, korte, leesbare artikelen over de meest uiteenlopende onderwerpen, pakkende interviews en aandacht voor spectaculaire toepassingen en onverwachte vergezichten. De laatste twee bladzijden van het boek geven in vogelvlucht een historisch overzicht dat loopt van 35.000 voor Christus tot het bewijs van het Vermoeden van Poincaré in 2006 door *Gri-gori Perelman*. Maar vooral is het de vakbekwaamheid van Bennie Mols die de hoge kwaliteit van het boek bepaalt. Mols weet hoe je voor een groot publiek moet schrijven, hoe je de aandacht van de lezer vangt en vasthoudt, wat je in je hoofdtekst zet, wat je in aparte kaders plaatst en waar je de mooiste illustraties vandaan haalt.

Opgelost telt veertien hoofdstukken, elk van tien bladzijden. Allemaal hebben ze dezelfde opbouw: een hoofdartikel, een doe-het-zelfsectie, een becommentarieerde grote foto, een interview met een deskundige (vier van die interviews zijn gemaakt door wetenschapsjournaliste Anouck Vrouwe) en een sectie met een (on)opgelost probleem. De

hoofdstukken hebben als titels Geheimtaal, Opsporingstechnieken, Optimalisering, Denkende machines, Lichaam en geest, Ruimte en tijd, Rampen en andere chaos, Politiek en economie, Muziek, Sport, Games, Beelden-de kunst, Industrie en Wiskunde om de wiskunde. Onder de geïnterviewde deskundigen vinden we Ronald Cramer, Ingrid Daubechies, Lex Schrijver, Bert Kappen, Robbert Dijkgraaf, John Einmahl, Manjul Bhargava, Mark Overmars, Gerard Sierksma, Hendrik Lenstra, Mark Peletier en Henk Barendregt. In een apart kader krijgen ze allemaal de kans hun favoriete formule te presenteren, maar verder bevat het boek geen formele wiskunde. In plaats daarvan beschrijft de tekst de kracht van de wiskunde en de informatica als universele gereedschapskist om problemen aan te pakken die gekwantificeerd en gestructureerd kunnen worden. Wie meer details wil weten, wordt verwezen naar de uitgebreide literatuurlijst achterin en naar interessante websites.

Lex Schrijver, expert op het gebied van de combinatorische optimalisering en als zodanig onder andere betrokken bij de wiskunde achter de nieuwe dienstregeling van de Nederlandse Spoorwegen, beschrijft zijn aanpak: "We hebben het probleem vertaald in een graafprobleem met zo'n vijfduizend lijnen. Iedere lijn stelt een keuze voor; bijvoorbeeld in welke volgorde treinen over een tra-

ject rijden. Voor het eerst in ruim dertig jaar is de dienstregeling vanaf de fundamenteën opnieuw ontworpen." Het interview met Schrijver eindigt met woorden die eigenlijk voor veel toegepast-wiskundigen gelden: "Ik hou van wiskundige problemen die je gemakkelijk kunt formuleren, maar die je juist heel moeilijk op kunt lossen. En bovendien moeten ze voor mij dicht tegen de praktijk aanliggen. Wiskunde is als zuurstof. Als het er is, merk je het niet. Als het er niet zou zijn, merk je dat je niet zonder kan. Dat zie je op zoveel terreinen: bij het voorspellen van het weer en het klimaat, in de telecommunicatie, in de geneeskunde, in de industrie, enzovoort. Het aantal toepassingen is eindeloos."

Opgelost is een prachtboek. Met veel moeite heb ik toch nog drie minpuntjes kunnen vinden. Ten eerste: de vormgeving van de formules is verre van fraai. Dat moet veel beter kunnen. Het oog wil ook wat, juist op dit punt! Ten tweede: de kleuring van de kaart van Europa op bladzijde 64/65 als illustratie van het vierkleurenprobleem is niet met vier, maar met vijf kleuren: de zee telt immers ook mee. Een leuke opgave voor de lezer: doe het met vier kleuren. En ten slotte: de beschrijving van de laatste stelling van Fermat op bladzijde 167 draagt als bandtekst 'onopgelost'. Maar de tekst is een hommage aan Andrew Wiles, die het probleem in 1995 oploste. Van een heel andere categorie zijn de twee andere boe-

ken in deze bespreking. Terwijl *Opgelost* zonder enige moeite door iedereen met een vwo-opleiding gelezen kan worden, maken de andere twee boeken hun pretentie om een breed publiek aan te spreken veel minder waar. Beide gaan ze, misschien onbedoeld, uit van een lezer met veel belangstelling voor wiskunde en ook wel een zekere wiskundige scholing.

Dat geldt in hoge mate voor het boek *In de ban van wiskunde* van de Vlaming Rik Verhulst. De ondertitel luidt *Het cultuurverschijnsel mathematica in beschaving, kunst, natuur en leven*. Titel en ondertitel worden zeker waargemaakt: het boek bevat een grote verscheidenheid aan prachtig geïllustreerd wiskundig materiaal op terreinen als kansrekening, grafentheorie, logica, grondslagen, chaos, getallenstelsels, hemelmechanica, niet-euclidische meetkunde, periodiek vlakvullingen, architectuur, beeldende kunst, muziek, literatuur. Die (nog lang niet volledige) opsomming legt ook de zwakte van het boek bloot. Het is allemaal te veel, te fragmentarisch, maar tegelijkertijd ook te specialistisch om een groot publiek aan te spreken. De niet-wiskundig onderlegde lezer loopt vast in de vele technische uiteenzettingen, bijvoorbeeld gelijk al in Hoofdstuk 1, waarin zaken als verzamelingenleer, propositielogica, de structuur van de reële getallen, kardinaalgetallen en Gödels onvolledigheidsstellingen de revue passeren.



Bennie Mols, *Opgelost – Toepassingen van wiskunde en informatica*, Uitgeverij Veen Magazines, Diemen, 2006, ISBN 13 9789085710288



Rik Verhulst, *In de ban van wiskunde*, Uitgeverij Veen Magazines, Diemen, 2006, ISBN 13 9789044119893



Machiel Keestra (redactie), *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*, Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam, 2006, ISBN 13 9789057121364

Ook de verdere hoofdstukken bevatten veel technisch-wiskundige uiteenzettingen die heel wat doorzettingsvermogen vragen van de niet wiskundig geschoolde lezer. Maar wie die voorkennis wél bezit (minstens de 'ouderwetse' wwo-wiskunde B, liefst ook nog een of twee jaar wiskundestudie) zal veel plezier aan het boek kunnen beleven.

Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde is de neerslag van een lezingenreeks in het Studium Generale aan de Universiteit van Amsterdam. Zeven auteurs behandelen elk een tijdperk uit de geschiedenis van de wiskunde. Redacteur Machiel Keestra, geen wiskundige maar filosoof, schreef een inleidend hoofdstuk. Zoals te verwachten bij een dergelijke opzet, is het geheel weinig homogeen: elke auteur heeft zijn eigen aanpak. De titel: *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*, is dan ook misleidend. Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde was beter geweest. Bovendien worden sommige tijdperken erg eenzijdig belicht. Een centrale visie ontbreekt.

Dat neemt niet weg dat er veel interessants in dit boek te vinden is. Het mooiste hoofdstuk vond ik dat van Jan Hogendijk over Indiase en Arabische wiskunde. Dit stuk is naast de inleiding van Keestra het enige dat speciaal voor deze bundel geschreven is. Het bevat een schat aan informatie over de geschiedenis van de wiskunde en de sterrenkunde die bij het grote publiek, en zelfs bij veel professionele wiskundigen onbekend is. De dierenriem, de indeling van de cirkel in 360 graden, het Babylonische zestigtallige getalstelsel, de geschiedenis van het getal nul, de oorsprong van het woord sinus, de Indiase erfenis, de Veda's, de oorsprong van ons tientallige positiestelsel, de erfenis van de Arabieren en hun rol in de ontstaansgeschiedenis van de algebra, het komt allemaal voorbij. Hogendijks kennis van zaken en zijn liefde voor het vak maken dat dit hoofdstuk op zichzelf al de aanschaf van de gehele bundel waard is.

Zeer inspirerend zijn ook de bijdragen van Henk Bos en Jan van Maanen over respectie-

velijk de zeventiende en de achttiende eeuw. Bos beschrijft in een fraai essay de ontstaansgeschiedenis van de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening. Dat zijn de centrale, revolutionaire wiskundige ideeën die de moderne natuurwetenschappen en de techniek mogelijk hebben gemaakt. Jan van Maanen kiest er in zijn bijdrage voor niet de belangrijkste wiskundige uit de achttiende eeuw, Leonhard Euler, centraal te stellen, maar diens vriend en collega Daniel Bernoulli. Het levert een boeiend verhaal op waarin natuurlijk ook weer de calculus de hoofdrol speelt. Naast Bernoulli maakt ook een mindere god als Johannes Morgenster in dit hoofdstuk zijn opwachting met een meetkundig probleempje: leuk om ook eens in de klas te doen.

Danny Beckers behandelt de negentiende eeuw, maar zijn bijdrage bevat eigenlijk nauwelijks echte wiskunde. Het is meer een sociologisch essay, onder andere over het Europese wiskundeonderwijs uit die tijd. Groten als Gauss en Riemann komen er maar bekaaid vanaf. Over Gauss lezen we alleen dat hij vier verschillende bewijzen leverde van de hoofdstelling van de algebra, en van Riemann wordt alleen de Riemann-integraal genoemd, een onderwerp dat in het ontzagwekkende oeuvre van deze wiskundige gigant niet meer dan een voetnoot verdient.

Teun Koetsier, die de eerste helft van de twintigste eeuw voor zijn rekening neemt, maakt wat goed van de tekorten in het stuk van Beckers door de helft van zijn bijdrage in feite te wijden aan de negentiende eeuw, en daarin Gauss en Riemann de eer te geven die ze toekomt. Hij presenteert ze als de wegbe-reiders van de moderne meetkunde en, mede daardoor, van Einsteins relativiteitstheorie. Daarnaast besteedt hij ook aandacht aan de grondslagencrisis en de controverses tussen Brouwer en Hilbert.

Tom Koorwinder behandelt de tweede helft van de twintigste eeuw, en ziet zich daardoor voor een vrijwel onmogelijke opgave ge-

plaatst. Hoe dit tijdperk van steeds verdergaande abstractie te presenteren aan een lekenpubliek? Het lijkt een onderneming die bij voorbaat tot mislukken gedoemd is, en het resultaat is dan ook niet in alle opzichten geslaagd. Toch had hij door een aantal simpele ingrepen de leesbaarheid van zijn bijdrage aanzienlijk kunnen verhogen. Om te beginnen de indeling. De gemakkelijkst leesbare delen: een aantal moderne 'wiskundige iconen' zoals fractals, pi, cryptografie, de laatste stelling van Fermat, spectaculaire toepassingen zoals beeldcompressie en zoekmachines, aansprekende onderwerpen als wiskunde en cultuur, ze staan allemaal te ver naar achteren. Daar had hij beter mee kunnen beginnen. Het begin is nu gewijd aan een beschrijving van de exponentiële groei van het aantal wiskundige deelgebieden en de wiskundige vakliteratuur sinds de Tweede Wereldoorlog. Maar dat is voor niet-wiskundigen nauwelijks interessant, en bovendien geldt een dergelijk verschijnsel voor bijna alle andere wetenschappen net zo goed. En het technische stuk over Liegroepen had beter geïsoleerd in een apart kader gekund: daarvoor is namelijk veel wiskundige voorkennis nodig die de doorsnee-lezer niet bezit.

Voor de liefhebbers van de oude Griekse, op meetkundige leest geschoeide wiskunde bevat de bundel nog een fraai overzichtsartikel van Albert Grootendorst. Het is het eerste wiskundestuk in de bundel, maar het laatste dat deze erudiete en inspirerende kenner van de Griekse oudheid aan het papier toevertrouwde. Toen Grootendorst in december 2004 overleed, had hij de epiloog van zijn bijdrage nog niet af. Met veel respect en deskundigheid heeft Jan van Maanen de taak op zich genomen het artikel te voltooien.

Alles bij elkaar is *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*, ondanks zijn misleidende titel, een boek dat de aanschaf zeker waard is!



Henk Broer*Instituut voor Wiskunde en Informatica**Rijksuniversiteit Groningen**Postbus 800**9700 AV Groningen**broer@math.rug.nl*

Computergebruik en demathematisering

Hoewel wiskunde een centrale rol heeft in de maatschappij, verdwijnt haar zichtbaarheid steeds verder onder de remote control. Veel resultaten van onderzoek zijn reeds ondergebracht binnen software pakketten en vervolgens vergeten. Dit geldt ook voor veel expliciete wiskunde in het onderwijs. Wat dat laatste betreft lijkt het er inmiddels op alsof we met het badwater ook het kind weggooien. Deze problematiek wordt hieronder belicht met een uitgebreid voorbeeld over het verantwoord inzetten van ICT bij de behandeling van het wiskundig modelleren.

De huidige maatschappelijke positie van wiskunde staat onder een merkwaardige spanning. Enerzijds is het min of meer evident dat de wiskunde overal om ons heen aanwezig is. Om te beginnen wordt in veel wetenschapsgebieden, zoals mathematische fysica (denk aan, bijvoorbeeld, snaartheorie, nanoscience of statistische mechanica), maar ook in de levenswetenschappen (populatiedynamica, et cetera) en in de meteorologie (onder meer klimaatmodellen) geavanceerde wiskunde toegepast. Dit geldt evenzeer voor een gebied als elektrotechniek, met toepassingen in de ICT (uw notebook en mobieltje, uw pinpassen, uw cd's, uw nieuwe auto, et cetera) maar ook in het vliegverkeer (zowel het vliegen zelf als de logistiek eromheen) en in de medische technologie (uw pacemaker

en uw MRI-scan). In alle gevallen stimuleren deze toepassingen de ontwikkeling van de wiskunde als zelfstandige discipline.

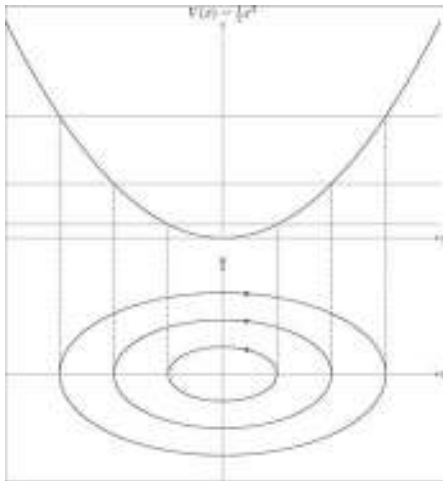
Anderzijds is veel van dit alles tamelijk onzichtbaar, behalve voor kenners. De wiskunde zit namelijk vaak achter knoppen en schakelaars of verloopt zelfs volautomatisch. Verder wordt op veel instituten en bedrijven onderzoek verricht, waarbij allerlei 'expliciete' aspecten van wiskunde in softwarepakketten zijn ondergebracht. Enkele voorbeelden van dergelijke instituten zijn TNO, de KPN, de universiteiten, het Europees Galileoproject, en zo meer.

Deze tendens van *demathematisering* vindt haar weerslag in het onderwijs. Dit geldt met name voor het beroepsonderwijs (onder meer het hbo — helaas inclusief de lerarenop-

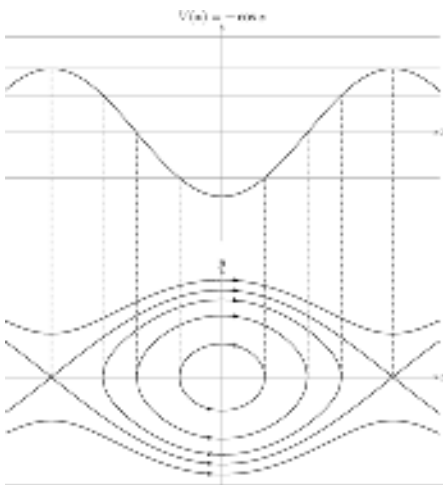
leiding wiskunde), maar inmiddels ook voor delen van het havo en het vwo. Zo is een groot deel van het natuurkundeonderwijs momenteel gedemathemiseerd. Aan de andere kant is inmiddels ook duidelijk geworden dat het vervolgonderwijs zeer ontevreden is over de kwaliteit van de instroom aan studenten. Deze klacht klinkt universeel over een grote breedte van het afnemend veld. Het gaat dan om reken- en formulevaardigheid, maar tegelijkertijd om zaken als inzicht en redeneren. Gelukkig wordt dit probleem op veel plaatsen ernstig genomen, zie onder meer het visiedocument natuurkunde [11], waar men pleit voor terugkeer van de wiskunde.

Opzet

In het algemeen zij gesteld dat de ICT-toepassingen zoals internet, Google, powerpoint, et cetera als zegeningen mogen worden aangemerkt bij vrijwel alle vormen van onderwijs. De wiskunde heeft bovendien een hechte band met ICT via numeriek en symbolisch rekenen en via de vele grafische mogelijkheden. Verder bestaan softwarepakket-



Figuur 1 Faseportret veer



Figuur 2 Faseportret slinger

ten als Mathematica, Maple, SPSS (voor statistiek) en zo meer, die bij wiskundig getint onderzoek en bij het onderwijs ingezet kunnen worden. Ook in het havo en vwo gebruikt men (grafische) rekenmachines en softwarepakketten.

Hieronder beschouwen we kort de algemene situatie rond wiskunde en ICT. Uitgangspunt is het feit dat klakkeloos gebruik van ICT, op een 'learn to use' basis, bij leerlingen en studenten inzicht en formulevaardigheid belemmert en daarmee een der oorzaken vormt voor de zojuist geformuleerde universele klacht.

Dit is ook de analyse in het visiedocument wiskunde [10], waarin daarom juist gepleit wordt voor een aanpak gericht op 'use to learn'. In het bijzonder sta ik stil bij enige modellen: in een uitgewerkt voorbeeld, betreffende oscillaties, wordt een scenario geschetst hoe wiskunde en ICT op bevredigende wijze met elkaar te verenigen zijn. Dit leidt, bijna en passant, tot de numerieke detectie van chaos in de vorm van een Hénon-achtige

vreemde aantrekker in een model voor de schommel (zie figuur 3 boven).

Wiskunde en ICT

We bespreken eerst de verhouding tussen expliciete wiskunde en ICT en daarna een mogelijke rol van ICT bij modellen.

Expliciete wiskunde

Expliciete wiskunde wordt vaak 'ouderwets' genoemd, met als bijmaak 'saai'. Meestal hebben de bijbehorende onderwerpen een lange schoolse traditie, ze zijn vaak algoritmisch van aard lenen zich dus goed voor ICT-implementatie. Het gaat dan om al het (hoofd-)rekenen met getallen en met letters, om breuken optellen, ontbinden in factoren, haakjes verdrijven, enzovoort, aangevuld met de calculus (algebra). Dat laatste omvat functies, grafieken, goniöformules, differentiëren en integreren. Hiertegenover staat een 'moderner' gebruik van wiskunde, dat zich meer richt op interdisciplinaire zaken aangaande levenswetenschappen, mathematische fysica of klimaatvariabiliteit. Dit geheel heeft de bijmaak 'interessant'. Vergelijk de onderwerpen zoals die bij het nieuwe bètavak Natuur, Leven en Technologie genoemd worden [16].

Door veel bèta's, econometristen en dergelijke wordt expliciete wiskunde vrijwel dagelijks beoefend, waarbij de intensiteit nogal varieert en er deels ondersteuning met ICT plaatsvindt. Overigens is opvallend dat mensen, die gemakkelijk een Mathematica-sessie openen, meestal ook goed 'met de hand' kunnen rekenen. Hun symbol sense helpt hun om scherp te kunnen beoordelen hoe de ICT effectief in te zetten en om ICT-fouten sneller te ontdekken.

Een tegenhanger van het bovengenoemde uitgangspunt is de stelling dat zonder een gezonde dosis expliciete wiskunde interessante interdisciplinaire onderwerpen niet goed toegankelijk zijn en niet met voldoende diepgang en begrip te behandelen zijn. Positiever geformuleerd zegt deze bewering dat een goede beheersing van expliciete wiskunde maakt dat je op een plezierige manier met meer ingewikkelde vraagstukken bezig kunt zijn.

Dit gezegd zijnde is het uiteraard bij elk schoolprogramma een afweging hoeveel expliciete wiskunde aangeboden moet worden.

Modelleren

Modelleren is een van de activiteiten die zich goed leent voor gebruikmaking van ICT. Zowel buiten als binnen de universiteiten rust deze activiteit zwaar op computertools, we noemden hiervan reeds voorbeelden. Het ligt dus voor de hand dat ook scholen zulke tools

gaan gebruiken. Op dit moment zijn voorbeelden van zulke grafische modelleeromgevingen systeemodynamische packages als *power-sim* en *coach 6*.

Hierbij mag het volgende aangetekend worden. Modelleren is buitengewoon moeilijk, zeker wanneer het om 'realistische' situaties gaat. Men denke hierbij aan vragen aangaande klimaatvariabiliteit (Wordt Europa op een termijn van honderd jaar warmer of kouder? En op een termijn van tienduizend jaar? Hoe kan de Golfstroom van richting omkeren?) of aan de verspreiding van vogelgriep over het aardoppervlak, het vliegen van een Boeing 747 (laat staan van een levende vogel) en zo kunnen we nog wel even doorgaan. Het is om te beginnen niet eenvoudig te weten welke variabelen een rol (moeten) spelen in zulke processen en om relevante wiskundige modelveronderstellingen te formuleren. Daarna is er nog het probleem van de numerieke tools waarmee we het model doorrekenen, waarbij de resultaten dan op een grafische manier worden getoond. Hier zitten dus twee vertaalslagen in: van de realiteit naar het model en van het model naar numerieke uitvoer, die beide een rol spelen bij de evaluatie van het geheel.

Bij gebruik van een modelleertool als een black box kan hier het overzicht zoekraken. Bij velen leeft de vrees dat de invoering van zulke tools bovengeschetste problematiek in negatieve zin zal versterken. Dit geeft dan nog eens extra aanleiding tot de reeds genoemde klacht over het gebrek aan wiskundig vermogen. Deze kwestie speelt bij het modelleren des te meer, omdat de achterliggende wiskunde zeer veel verder reikt dan die van het voortgezet onderwijs.

Als je wilt leren modelleren, dan moet je zijn bij mensen die er ervaring mee hebben. Jarenlange ervaring heeft geleerd dat je bij voorkeur zou moeten beginnen met een 'schoolse' aanpak, gebaseerd op 'first principles', zoals die uit de natuurkunde, scheikunde, economie, en dergelijke, bekend zijn. Een model kan dan bijvoorbeeld bestaan uit een kracht- of ladingsevenwicht, waarbij wetten van Newton, Hooke, Ohm, Kirchhoff, enzovoort, worden toegepast. De bijbehorende contexten kunnen dan meer of minder eenvoudige mechanische of elektrische systemen zijn. Gedachte is dat leraar en leerling, gewapend met een flink arsenaal aan expliciete wiskunde, met dit soort 'first principles' modellen ervaring en intuïtie opdoen. Hierbij kan de inzet van ICT zeer wenselijk zijn, maar het liefst niet te vroeg, en zeker niet 'in plaats van'. In het algemeen zouden in het be-

gin black box situaties zoveel mogelijk vermeden moeten worden. Bij de inzet van numerieke tools zou gedemonstreerd kunnen worden hoe zeer bepaalde keuzen (bijvoorbeeld stap-grootten) effect kunnen hebben op de uiteindelijke uitvoer.

Verdere gedachte is dat de leerling op deze manier rijp wordt gemaakt om complexere situaties te modelleren, waarbij deze een kritische houding heeft ontwikkeld ten aanzien van modelkeuzen en een zeker respect voor de onderliggende wiskunde.

Oscillaties, een schoolvoorbeeld

Hieronder volgt een voorbeeld van een wat uitgebreidere, uit de natuurkunde zeer bekende context, bedoeld om bovenstaande gedachtegang nader toe te lichten. Er wordt eerst schools over modellen gesproken volgens 'first principles' met gebruikmaking van de nodige calculus, waarna ICT op passende wijze wordt ingezet. Hierbij wordt met betrekkelijk geringe moeite toegang verschaft tot een hedendaags begrip als *chaos*.

'First principles' modellen

Om de gedachten te bepalen beschouwen we de trillingen van een veer of slingerbewegingen. Een overkoepelende naam is *oscillaties*, waarbij meteen ook gedacht kan worden aan verschijningsvormen zoals die in andere wetenschapsgebieden voorkomen. We komen hier nog even kort op terug.

Laat x een (1-dimensionale) variabele zijn, die de positie van het bewegende massapunt (met massa m) aangeeft als functie van de tijd t . Voor de oscillatie is een terugdrijvende kracht nodig, die we in eerste instantie alleen van de positie x laten afhangen. De beweging wordt bepaald door Newtons (tweede) wet

$$F = m a,$$

die leidt tot de differentiaalvergelijking:

$$F(x) = m x'' \quad (1)$$

waarin

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (\text{snelheid})$$

$$x''(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (\text{versnelling}).$$

Het is nu zaak verstandige, vaak kwalitatieve, dingen te zeggen over de onbekende functies $x = x(t)$.

Veer en slinger

Voor de veer wordt het model verder gespecificeerd door de terugdrijvende kracht bij een uitwijking x vast te leggen als

$$F(x) = -kx,$$

waarbij k de zogenaamde veerconstante is. Deze keus staat bekend als de wet van Hooke. Ingevuld in (1) leidt dit tot de lineaire differentiaalvergelijking

$$x'' = -\omega^2 x, \quad (2)$$

waar we schrijven $\omega^2 = k/m$.

Stelling 1 (Algemene Oplossing (2)): *De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking (2) wordt gegeven door $x(t) = R \cos(\omega t + \phi)$, waarbij de integratieconstanten R en ϕ als volgt samenhangen met de beginwaarden: $x(0) = R \cos \phi$ en $x'(0) = -\omega R \sin \phi$.*

Een bewijs van stelling 1 volgt later.

Opmerking: De bewegingsvergelijking (2), waarbij ω niet verder gespecificeerd is, blijkt in vele omstandigheden een goed model te zijn. Te denken valt aan een U-buis met vloeistof, of aan een elektrisch LC-netwerk. Ook wordt dit model vaak gebruikt bij benaderingen. Bij de contextvrije vorm $x'' = -\omega^2 x$ spreekt men wel van de *harmonische oscillator*. Hiervoor geldt onze analyse onverkort.

Bij de slinger met lengte ℓ is de uitwijking x de hoek met de verticaal en wordt de terugdrijvende kracht gegeven door de zwaartekracht (versnelling g). Dat geeft

$$F(x) = -mg \sin x.$$

Als x in radialen gemeten wordt is $a = \ell x''$, hetgeen leidt tot de differentiaalvergelijking

$$x'' = -\omega^2 \sin x, \quad (3)$$

waarbij nu $\omega^2 = g/\ell$. Bij de veer is de periode $2\pi/\omega$ onafhankelijk van de amplitude R . Deze eigenschap heet wel *isochronie*, een eigenschap die bij de slinger niet blijkt te gelden. Dit fenomeen heeft Huygens aangezet tot zijn *Horologium Oscillatorium* (1673), vergelijk onder meer [4, 7].

Voor kleine waarden van x bestaat de benadering $\sin x \approx x$: die voor kleine waarden van (x, x') aanleiding geeft tot zogenaamde *kleine* oscillaties van de slinger. In tegenstelling tot wat Galileo dacht, is ook hier de slinger niet isochroon.

Een expliciete oplossingsprogramma in termen van elementaire functies is voor de slinger niet uitvoerbaar vanwege het optreden van elliptische integralen. We maken daarom een omweg langs het *fasevlak*.

Lijnelementen

Het fasevlak heeft coördinaten (x, y) , waarbij $y = x'$. Een algemene oscillator

$$x'' = F(x) \quad (4)$$

als boven omschreven (gemakshalve schaal-den we tot $m = 1$), geeft dan aanleiding tot

het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= F(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Uit de theorie [2, 12] is bekend dat een stelsel als (5) *deterministisch* is: gegeven de huidige toestand $(x(0), y(0))$, ligt de hele toekomst $(x(t), y(t))$ met $t > 0$ vast als integraalkromme in het (x, y) -fasevlak.

Uit (5) kan de tijd t geëlimineerd door overwegingen als

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx},$$

hetgeen aanleiding geeft tot het *lijnelementenveld*

$$y dy - F(x) dx = 0. \quad (6)$$

De integraalkrommen van dit lijnelementenveld zijn precies de oplossingen van (5) waarbij de tijdsparametrisering is 'vergeten'.

Energiebehoud en faseportretten

We willen nu een kwalitatieve beschrijving geven van de integraalkrommen van het lijnelementenveld (6). Hiertoe kan gebruik gemaakt worden van de *energiefunctie*

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{2} y^2 + V(x), \\ \text{waarin } \frac{dV}{dx}(x) &= -F(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Men denke hierbij aan het format 'kinetische' plus 'potentiële' energie.

Stelling 2 (Behoud van Energie): *In bovenstaande zijn de niveaукrommen $H(x, y) = E$ de integraalkrommen van het lijnelementenveld (6).*

Een algemeen bewijs van Stelling 2 is te geven door de verandering $H'(t) = \frac{d}{dt} H(x(t), y(t))$ te beschouwen langs een oplossing $(x(t), y(t))$ van (5). Met de kettingregel blijkt dat

$$H' = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' = 0.$$

Een ander bewijs krijg je door $H(x, y) = E$ om te schrijven tot de vergelijking

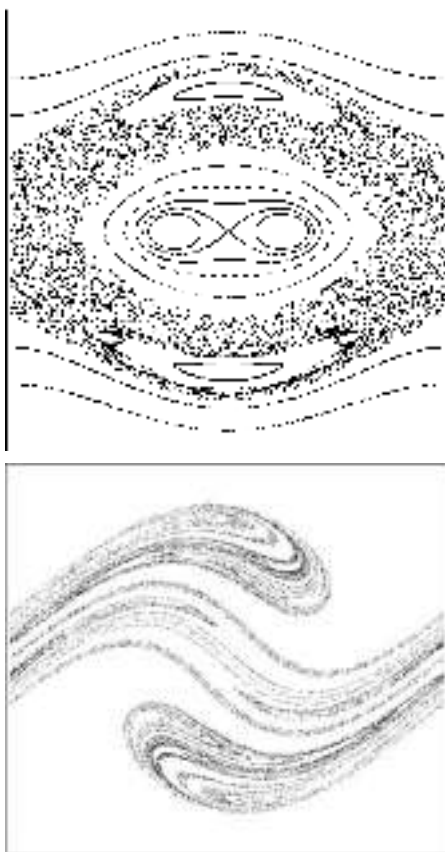
$$y = \pm \sqrt{2(E - V(x))},$$

en deze in (6) te substitueren.

Met behulp van Stelling 2 kunnen we de integraalkrommen in het geval van veer en slinger vrij gemakkelijk beschrijven.

Veer

Voor de veer geldt in deze beschrijving $F(x) = -\omega^2 x$ en we kiezen $V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$ hetgeen leidt tot de energie $H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2$



Figuur 3 Chaos. Boven: $c = 0$; onder $c > 0$

Voor $E > 0$ krijgen we zo volgens Stelling 2 integraalkrommen met vergelijking

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = E. \quad (8)$$

Dit is voor elke $E > 0$ een ellips. De halve horizontale as van de ellips is juist de amplitude R , die via de formule $E = \frac{1}{2}\omega^2 R^2$ samenhangt met de waarde E van de energie. De waarde $E = 0$ correspondeert met het evenwicht $(x, y) = (0, 0)$ waarbij de veer in ruste is. Een schematische weergave van de functie V met enkele van de integraalkrommen (8) is weergegeven in Figuur 1, een zogenaamd faseportret.

Bewijs stelling 1: Nu is het ook eenvoudig een bewijs van Stelling 1 te geven. Door een schaling van de tijd $t \rightarrow \omega t$ kan de differentiaalvergelijking (2) gereduceerd worden tot het speciale geval

$$x'' = -x, \quad (9)$$

waartoe we ons even mogen beperken zonder schade aan de algemeenheid. De vergelijking (8) gaat dan over in $x^2 + y^2 = R^2$, die nu een cirkel voorstelt. We kunnen hieruit de tijdsparametrisering van de oplossing reconstrueren. Immers, schrijven we

$$x(t) = R \cos \varphi(t), \quad y(t) = R \sin \varphi(t),$$

dan volgt uit het feit dat $y(t) = x'(t)$, alweer met de kettingregel, dat ook

$$y(t) = -R\varphi'(t) \sin \varphi(t)$$

en dus dat $\varphi'(t) \equiv -1$. Hieruit volgt dat de algemene oplossing van (9) de gedaante $x(t) = R \cos(t + \phi)$ heeft, waaruit het gestelde volgt.

Slinger.

Voor de slinger is $F(x) = -\omega^2 \sin x$ en nemen we $V(x) = -\omega^2 \cos x$, hetgeen via stelling 2 leidt tot integraalkrommen

$$\frac{1}{2}y^2 - \omega^2 \cos x = E, \quad (10)$$

waarbij $E \geq -\omega^2$. De functie V en verschillende integraalkrommen zijn weergegeven in het faseportret van figuur 2. We zien hier verschillende typen krommen. Om te beginnen correspondeert opnieuw het punt $(x, y) = (0, 0)$ met een evenwicht, namelijk dat waarbij de slinger verticaal naar beneden hangt. Voor $(x, y) = (\pm\pi, 0)$ treedt het evenwicht op waarbij de slinger verticaal omhoog staat (de slinger massa zit vast aan een massaloos staafje). Voor $-\omega^2 < E < \omega^2$ treden de bekende slingerbewegingen (oscillaties) op rondom het evenwicht $(x, y) = (0, 0)$. Voor $E > \omega^2$ zien we bewegingen waarbij de slinger over de kop slaat.

Opmerking: In bovenstaande analyse van faseportretten kan men experimenteren met de potentiaal functie V , bijvoorbeeld in gevallen als de Duffing-vergelijking $x'' = x - x^3$, vergelijk met [2, 12]. Hierbij kan naar believen reeds enige ICT worden ingezet.

ICT-inzet

Tot zover hebben we in principe geen ICT hoeven gebruiken. (De figuren maakten we voor de aardigheid met een computer.)

Damping Dit is een goed moment om te gaan experimenteren met wrijving of damping. Zo kan de bewegingsvergelijking (4) veranderd worden tot

$$x'' = F(x) - cx',$$

voor een positieve dampingscoëfficiënt c . Dit leidt tot het systeem

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= F(x) - cy. \end{aligned}$$

Hiervan zijn langs numerieke weg faseportretten te produceren. De wrijving is hier gekozen als recht evenredig met de snelheid $y = x'$, maar ook allerlei andere keuzen zijn mogelijk. Een aardig voorbeeld is de zogenaamde Coulombse of droge wrijving, vergelijk onder meer [7]. Hier ligt inzet van numerieke middelen voor de hand.

Dit laatste geldt eens te meer wanneer

het gaat over ingewikkelder oscillatoren zoals die in de elektronica voorkomen (denk aan de Van der Pol-oscillator) of in de populatiedynamica, meteorologie, chemie en economie. In zulke gevallen kan ook de inzet van modelleer-tools tot de goede mogelijkheid behoren.

Chaos Iets anders wat nu in het numerieke bereik ligt is *chaos*. Als voorbeeld nemen we de bewegingsvergelijking

$$x'' = -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t) \sin x - cx', \quad (11)$$

voor positieve constanten c en ε , op te vatten als model voor de beweging van een slinger waarvan de lengte periodiek gevarieerd wordt. Ook denkt men (met een beetje goede wil) vaak aan een slinger waarvan het ophangpunt een verticale harmonische oscillatie ondergaat of aan een *schommel*. (Dergelijke modellen worden ook veel gebruikt in de natuurkunde van supergeleiding, lasers, enzovoort, [8].) Om ook in dit geval een *deterministisch* systeem te krijgen moeten we een extra variabele z toevoegen, evenredig met de tijd t . De faseruimte is dus driedimensionaal, met variabelen (x, y, z) , waarop we de systeemvorm

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -\omega^2(1 + \varepsilon \cos z) \sin x - cy \\ z' &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

krijgen. Zo'n driedimensionaal vectorveld is niet erg overzichtelijk, maar we kunnen er vat op krijgen door over te gaan op een tweedimensionale afbeelding die eruit bestaat dat we de integraalkrommen van (12) volgen tussen de secties $z = 0$ en $z = 2\pi$, die vanwege de derde vergelijking in (12), dwars op de integraalkrommen staat.

Om meer precies te zijn, de zogenaamde *Poincaré*-afbeelding van (12) is als volgt gedefinieerd. Neem een integraalkromme $(x(t), y(t), z(t))$, met $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, 0)$ en lees die af op het tijdstip $t = 2\pi$, daarbij opmerkend dat $z(2\pi) = 2\pi$. Dit geeft aanleiding tot een punt met coördinaten $(x_1, y_1, 2\pi)$ en we krijgen zo een (gladde) afbeelding

$$\Phi : (x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1),$$

de Poincaré-afbeelding geheten en wegens periodiciteit in de z -richting ook wel terugkeerafbeelding genoemd [5, 9, 12].

Lezen we de genoemde integraalkromme $(x(t), y(t), z(t))$ verder af op de tijdstippen $t = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, daarbij opmerkend dat $z(2\pi k) = 2\pi k$, dan krijgen we op soortgelijke manier een reeks punten

$(x_k, y_k) = (x(2\pi k), y(2\pi k)), k = 0, 1, 2, \dots$
in het (x, y) -vlak. Er geldt nu voor elke gehele k dat

$$\Phi^k(x_0, y_0) = (x_k, y_k),$$

de punten krijg je door iteratie van de afbeelding Φ , vergelijk ook [5, 9, 12]. Fysici noemen daarom Φ ook wel eens de stroboscopische afbeelding van (12). In Figuur 3 zijn banen van deze afbeelding geplot, boven voor $c = 0$, het wrijvingsloze geval, en onder het geval $c > 0$, dus juist met wrijving. Onder een baan verstaan we een rij iteraties $\{\Phi^k(x_0, y_0)\}_{k \geq 0}$.

Wat valt er uit deze numerieke plots te leren? Wellicht teveel om hier allemaal op te noemen. Een aardigheidje is dat zich in de twee ogen van de linkerfiguur een periodiek punt van Φ bevindt van periode 2, dat hoort bij een 4π periodieke oplossing van (12) (zie [5] voor een relatie met het slingerende wie-

rookvak in Santiago de Compostela). Hierbij is belangrijk dat $\omega \approx \frac{1}{2}$, hetgeen betekent dat er resonantie optreedt. Wat ons nu interesseert is dat in het linker plaatje ($c = 0$) een grote puntenwolk voorkomt, die bestaat uit één baan van Φ , dus uit één rij geïtereerden. De rechter figuur ($c > 0$) bestaat zelfs geheel uit één baan. Deze twee banen zijn gerelateerd aan chaos, dat te maken heeft met een grillig verlopende toekomst. In het rechter geval zien we een *vremde* aantrekker, die veel overeenkomsten vertoont met de beroemde Hénonattractor [1, 3, 9, 14]. Voor achtergrond zie ook [6, 13, 15, 17]. Opgemerkt mag worden, dat in beide gevallen de achterliggende wiskunde nog veel vragen bevat.

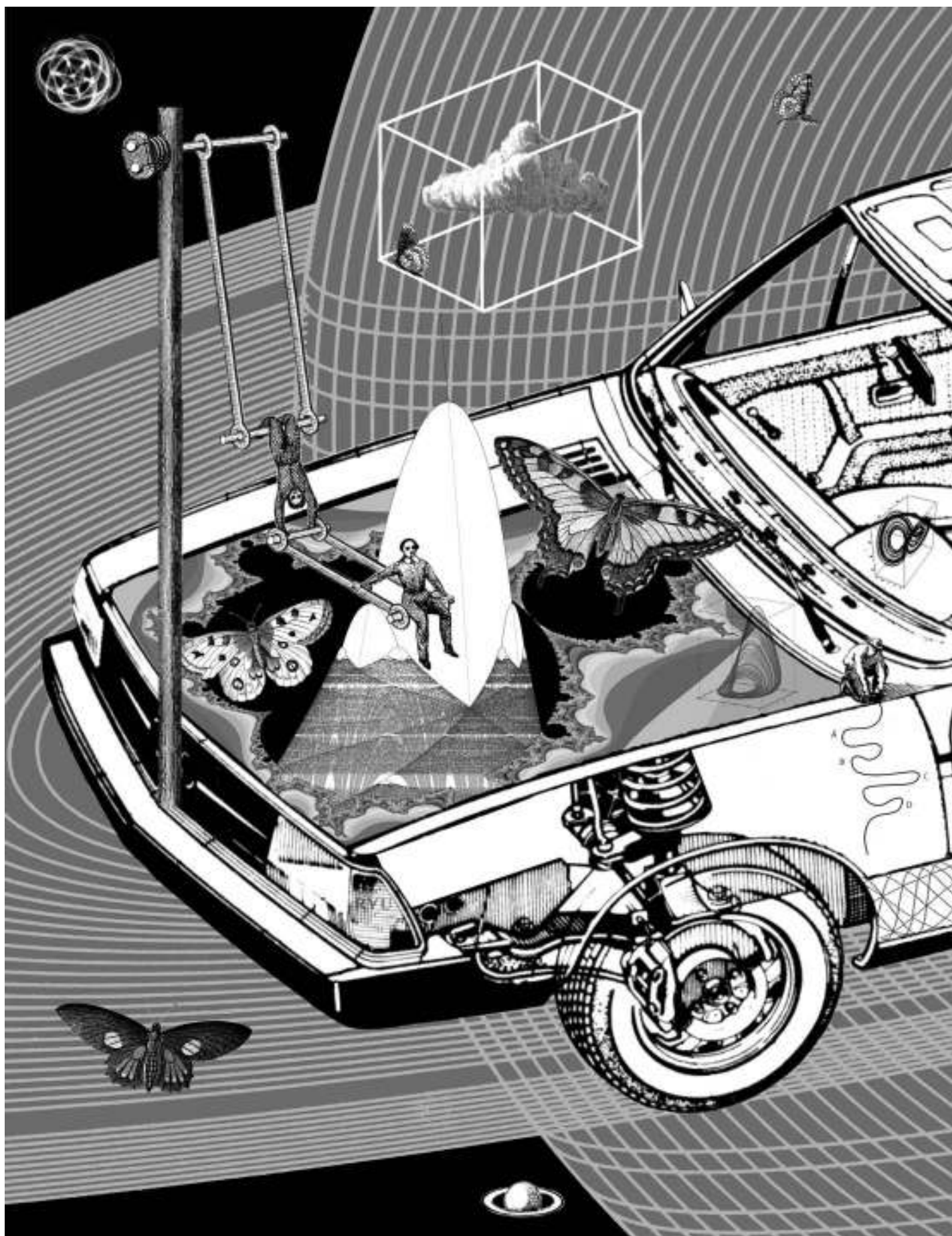
Alleen als het echt iets toevoegt

Klakkeloos gebruik van ICT draagt bij aan de demathematisering van het voortgezet onder-

wijs, hetgeen een groot probleem vormt bij formulevaardigheid van de instroom in het hoger onderwijs en andere delen van het afnemend veld. De vrees bestaat dat dit probleem alleen maar verergerd zal worden bij de inzet van modelleertools. In een voorbeeld betreffende 'oscillaties' zien we, hoe je aan modellen kunt werken waarbij ICT alleen gebruikt wordt als het echt nodig is. Er wordt bovendien geïllustreerd hoe met expliciete wiskunde kan worden geoefend en hoe daarbij geredeneerd kan worden. Hierbij wordt nu en dan een verwijzing naar de literatuur gegeven. Dergelijke voorbeelden kunnen hopelijk docenten en tekstschrijvers inspireren bij het ontwikkelen van materiaal, deels cursorisch en deels voor werkstukken en modulen. ←

Referenties

- 1 M. Benedicks en L. Carleson, 'The dynamics of the Hénon map', *Ann. Math.* **133** (1991) 73–169.
- 2 P. Blanchard, R.L. Devaney en G.R. Hall, *Differential Equations* 3rd Ed., Thomson Higher Education, 2006
- 3 H.W. Broer, 'The how and what of chaos', *Nieuw Arch. Wisk. 5th series* **1**(1) (2000) 34–43.
- 4 H.W. Broer, 'Huygens' isochrone slinger', *Euclides* **70**(4) (1995) 110–117.
- 5 H.W. Broer, 'De chaotische schommel', *Pythagoras* **35**(5) (1997) 11–15.
- 6 H.W. Broer, J. vd Craats en F. Verhulst, *Het einde van de voorspelbaarheid? Chaostheorie, ideeën en toepassingen*. (Aramith Uitgevers & Epsilon Uitgaven **35** 1995.
- 7 H.W. Broer, J. Epema en M. Kuipers, *Oscillaties: Trillingen en Slingerbewegingen vanu-*
- 8 *it Wiskundig Oogpunt*, Rijksuniversiteit Groningen, Februari 1987.
- 9 H.W. Broer en B. Krauskopf, 'Chaos in periodically driven systems'. In: B. Krauskopf and D. Lenstra (eds.), *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics*, American Institute of Physics Conference Proceedings **548** (2000) 31–53.
- 10 H.W. Broer en F. Takens, *Dynamical Systems and Chaos*, te verschijnen bij Epsilon Uitgaven 2008.
- 11 Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs, *Rijk aan betekenis*, Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs, Utrecht, Maart 2007.
- 12 Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo, *Natuurkunde leeft*, Visie op het vak natuurkunde in havo en vwo, Nederlands Natuurkundige Vereniging, Mei 2006.
- 12 J.J. Duistermaat en W. Eckhaus, *Analyse van Gewone Differentiaalvergelijkingen*. Epsilon Uitgaven **33** 1995.
- 13 E.N. Lorenz, *The Essence of Chaos*. University of Washington / University College London Press 1993.
- 14 H.-O. Peitgen, H. Jürgens en D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer-Verlag 1992.
- 15 D. Ruelle, *De Wetten van Toeval en Chaos*. Aramith Uitgevers 1991.
- 16 Stuurgroep Natuur, Leven en Technologie. *Contouren van een nieuw bètavak. Visie op een interdisciplinair vak: Natuur, Leven en Technologie*. April 2007
- 17 F. Verhulst, *Chaos en Orde*. Zebra-reeks **16**, 2003.



Elwin Savelsbergh

*Freudenthal Instituut voor Didactiek
van Wiskunde en Natuurwetenschappen
Universiteit Utrecht
e.r.savelsbergh@phys.uu.nl*

Onderwijs Dynamisch modelleren

Aanzet tot een curriculum

Bij het wiskundig modelleren komen wiskunde en andere wetenschappelijke disciplines samen. In de toekomstplannen voor de natuurprofielen van het havo en het vwo heeft het modelleren van dynamische systemen een prominente plaats; bij de nieuw geplande vakken wiskunde-D en Natuur, Leven en Technologie (NLT) wordt er zelfs een heel cursusonderdeel aan gewijd. Elwin Savelsbergh is als natuurkundige in de onderwijskunde gepromoveerd en werkt mee aan de ontwikkeling van NLT. Vanuit de opvatting dat wiskundig en natuurwetenschappelijk modelleren nauw met elkaar verbonden zijn, schetst hij een aanzet tot een 'modelleercurriculum' voor het voortgezet onderwijs. Het leren herkennen van situaties waar dynamische modellen een rol spelen, het leren opstellen van modellen en het interpreteren van modeluitkomsten in het licht van het gestelde probleem zijn daarin belangrijker dan het analytisch leren oplossen van geselecteerde typen differentiaalvergelijkingen. Hierin onderscheidt zijn opvatting zich van die van het ontwerpvoorstel voor wiskunde D van Swier Garst en Mark Peletier, zoals besproken aan het eind van dit artikel.

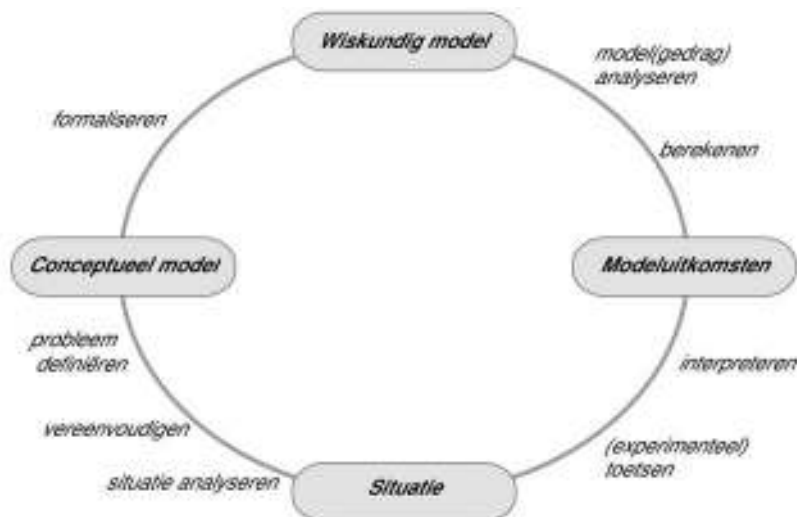
In sommige deelgebieden van de wiskunde lijkt de tastbare werkelijkheid ver weg. Dat geldt niet voor het modelleren van dynamische systemen, een tak van de wiskunde die in de loop van de twintigste eeuw tot grote bloei gekomen is in samenhang met de voortgaande kwantificering van de empirische wetenschappen en de opkomst van numerieke technieken.

Deze ontwikkeling heeft het aanzien van wetenschap en techniek sterk veranderd. De voorspelbaarheid van allerlei fysische, chemische en biologische processen is sterk toegenomen. Zeker in de biologie heeft de modelmatige benadering bijgedragen aan een voortgezette mechanisering van het wereldbeeld. Dat wil echter niet zeggen dat alles

voorspelbaar wordt: ook in veel deterministische modellen blijkt de voorspelbaarheid van het gedrag fundamenteel beperkt te zijn. Dit soort inzichten heeft ook buiten de wetenschap zijn weerslag, bijvoorbeeld in politieke en maatschappelijke discussies over economie, klimaat of natuurbeheer. Het gaat dan vaak om modellen van dynamische systemen, die gebruikt worden om toekomstige ontwikkelingen te voorspellen of om de effecten van voorgestelde ingrepen te onderzoeken. Zowel vanuit een beroepskeuzeperspectief als vanuit een burgerschapsperspectief, is het daarom van belang dat bèta-leerlingen in het voortgezet onderwijs enig zicht krijgen op de mogelijkheden en de beperkingen van het modelleren van dynamische systemen.

Modelleren in het voortgezet onderwijs

In de curriculumvernieuwingplannen voor wiskunde, natuurkunde en biologie valt regelmatig de term 'modelleren'. In het visiedocument van de Commissie Toekomst Wiskundeonderwijs (CTWO) maar liefst 15 keer, en dat is vaker dan bekende begrippen als bewijzen, redeneren, of abstraheren. Ook in de nieuwe 'profiel-verdiepende keuzevakken' Wiskunde D en Natuur, Leven en Technologie (NLT) wordt ruim aandacht besteed aan modelleren. Wiskunde D wordt een verdiepend wiskundevak, waarbij in de vwo-variant 80 tot 120 studielast-uur beschikbaar is voor het domein 'dynamische modellen'. NLT wordt een 'geïntegreerd bètavak, over onderwerpen op de grensvlakken van de disciplines biologie, natuurkunde, fysische geografie, scheikunde en wiskunde', dat door docenten uit de genoemde disciplines in onderlinge samenwerking onderwezen wordt. Scholen hebben een grote keuzevrijheid bij de invulling van NLT, maar onder verantwoordelijkheid van de stuurgroep NLT wordt zowel voor het havo voor het vwo tenminste één module van 40 uur over 'dynamisch modelleren' ontwikkeld. Binnen het programma is ruimte voor verdere modulen over dit onderwerp. In de scheikundeplannen ontbreekt modelleren opvallend genoeg, afgezien van een enkele verwijzing naar 'molecular modelling'. Bij het schrijven



Figuur 1 Modelleren als iteratief proces

van dit artikel heb ik als praktisch richtsnoer een interdisciplinaire module van ongeveer 40 studielasturen in de tweede helft van 5 vwo in gedachten. Verschillende onderdelen uit dit verhaal zouden echter ook een plaats kunnen krijgen binnen de mono-vakken of in een ander leerjaar.

Liaison van wiskunde en natuurwetenschap

Blijkbaar wordt modelleren belangrijk gevonden. De vraag is dan wat daar onder verstaan wordt. Het CTWO-visiedocument zegt daarover:

“Modelleren is een praktisch en creatief proces waarbij realistische problemen in wiskundige vorm worden vertaald. Leerlingen worden voor een probleemsituatie geplaatst met als doel deze met wiskundige middelen op te lossen. Dit omvat het doorgronden en analyseren van het probleem, het kiezen van variabelen, het opstellen van verbanden, het bepalen van een strategie en het inzetten van wiskundige middelen. Visualiseren, schematiseren en representeren maken hiervan in belangrijke mate deel uit. Een ander essentieel onderdeel van modelleren is het algebraïseren: het mathematiseren van een realistische of wiskundige situatie door een formule of vergelijking op te stellen. Door de noodzaak om zelf variabelen te benoemen en verbanden wiskundig te formuleren worden algebraïseren en ‘symbol sense’ ontwikkeld.” (p. 25)

De beschrijving laat nog in het midden welke problemen opgelost gaan worden, maar het is wel duidelijk dat dit gebeurt met wiskundige middelen. In de visie van de commissie Nieuwe Natuurkunde wordt het anders geformuleerd:

“Een belangrijke taak van het natuurkundeonderwijs is leerlingen het inzicht te verschaffen dat de natuurkunde werkt met een model als hanteerbare representatie van de werkelijkheid. De taal van de wiskunde dient om het model te beschrijven. De toetssteen voor het model is het experiment; een goed bedacht en uitgevoerd experiment bepaalt of het model voldoet” (Zie [8], pp. 33–34)

Hoewel er dus verschillende accenten gelegd worden, sluiten beide visies elkaar niet uit. Ze zijn veeleer complementair, en voor een goed begrip van de rol die modellen spelen in wetenschap, techniek en maatschappij zijn elementen uit beide nodig.

In de CTWO-visie worden wel problemen geanalyseerd en opgelost met wiskundige modellen, maar die problemen zullen ergens betrekking op moeten hebben. Wat in de CTWO-visie impliciet blijft is de verwijzing naar de werkelijkheid. Vanuit natuurwetenschappelijk perspectief begint modelleren bij het stellen van een vraag over de werkelijkheid. Zo’n vraag wordt afgebakend en gespecificeerd tot een probleem dat de verdere modelontwikkeling stuurt, en daarvoor is domeinkennis nodig. In een later stadium vereist de evaluatie van het model toetsing aan de werkelijkheid, en tenslotte levert het model nieuwe kennis op over het onderzochte fenomeen. Deze nieuwe kennis kan aanleiding geven tot vervolgvragen en betere modellen; en zodoende tot een voortgaand proces van modelverbetering en kennisontwikkeling, zoals weergegeven in figuur 1.

De wiskunde speelt overal in dit proces een rol, maar vooral de bovenste helft van de cyclus zou aangeduid kunnen worden met de term ‘wiskundig modelleren’. Zoals het

plaatje illustreert, vindt dat wiskundige model zijn voedingsbodem in een werkelijke situatie. Het wiskundig modelleren kan weliswaar het oorspronkelijke (natuurwetenschappelijke) probleem tijdelijk ontstijgen, maar wil het model toetsbaar zijn, dan moeten de modeluitkomsten uiteindelijk terug verwijzen naar een werkelijkheid. Zonder die verwijzing is er in de natuurwetenschappelijke betekenis van het woord geen sprake van een model.

De verwijzing naar de werkelijkheid kan op concreet niveau nog heel verschillend ingevuld worden. Voor een biologisch probleem ziet deze er vaak anders uit dan voor een fysisch probleem. De mechanica biedt een prototypisch voorbeeld van fysisch modelleren: alle relevante wetten zijn bekend; die wetten kunnen we gebruiken om bottom-up het gedrag van steeds complexere systemen te onderzoeken en daar nauwkeurige, experimenteel toetsbare, voorspellingen over te doen, bijvoorbeeld over de vlucht van een (water)raket. Daartegenover biedt de ecologie een typerend voorbeeld van de situatie in de biologie: niet alle relevante gegevens zijn bekend en de dekking van het model met de werkelijkheid is een voortdurend discussiepunt. De interesse gaat dan ook vaak niet zozeer uit naar kwantitatieve modeluitkomsten, maar vooral naar kwalitatief gedrag. De modelvoorspellingen zijn vaak niet — op korte termijn — experimenteel toetsbaar.

Om in het onderwijs een valide beeld te geven van het gebied van dynamische modellen moeten in de behandelde contexten de verschillende typen modelleerproblemen herkenbaar zijn. Daarnaast zijn bij de keuze voor contexten ook didactische eisen van belang: de behandelde contexten moeten voldoende complex zijn om aanleiding te geven tot een proces van voortgaande modelontwikkeling, maar anderzijds voldoende aansluiten bij de voorkennis van leerlingen om hen in staat te stellen zelf bij te dragen aan het modelleerproces.

Modelvorming en modelanalyse

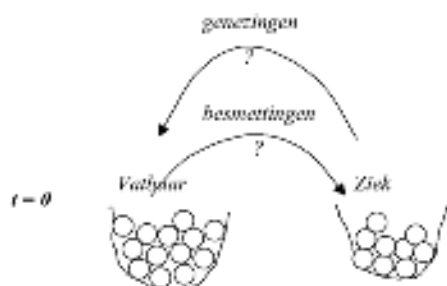
Al in de onderbouw hebben leerlingen geleerd dat een model een vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid is. Deze gedachte is nog niet uitgewerkt tot een bruikbaar modelbegrip: bij doorvragen denken leerlingen aan schaalmodellen waarin onbelangrijke details weggelaten zijn. Bij het voorspellen van weer of klimaat denken leerlingen aan het door trekken van een lijn door de historische gegevens. Het onderwijs over dynamisch modelleren zou moeten leiden tot een meer wetenschappelijk modelbegrip, waarin op grond

van een verondersteld werkingsmechanisme modelregels worden geformuleerd, waaruit vervolgens toetsbare verwachtingen worden afgeleid. Om dit te bereiken is het nodig expliciet aandacht te besteden aan het formuleren van zo'n werkingsmechanisme, de vertaling naar modelregels en het toetsen van de modeluitkomsten aan de werkelijkheid. Om daarvoor de toon te zetten moeten we, juist in het aanvankelijk onderwijs, verschijnselen behandelen waarbij leerlingen voldoende beeld hebben van het werkingsmechanisme om dit te kunnen formuleren en voldoende beeld hebben van het fenomeen om de modeluitkomsten kritisch te beoordelen.

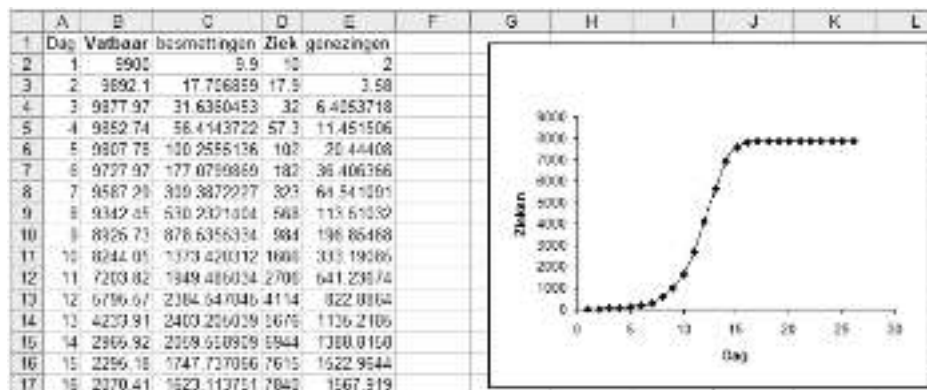
Een goed voorbeeld biedt het verloop van een griep-epidemie: de meest opvallende toestanden zijn direct duidelijk, evenals de belangrijkste veranderingsprocessen (besmetting, genezing). Leerlingen hebben voldoende kennis van het verschijnsel om te zien dat dit een onvolledige weergave is en ze zijn in staat zinvolle schattingen te maken voor de benodigde parameters. Een eerste model zou kunnen luiden:

- er zijn twee groepen mensen: zieke en gezonde;
- een zieke herstelt na gemiddeld vijf dagen;
- als een zieke een gezonde ontmoet dan bedraagt de kans dat deze de volgende dag ziek is 0.2;
- een ziek persoon ontmoet gemiddeld 5 mensen per dag.

Hoewel voor de meeste leerlingen niet direct inzichtelijk is hoe dit model zich zal gedragen, kunnen ze dit met enige ondersteuning wel beredeneren. De voorgaande beschrijving benadrukt de lotgevallen van individuen en het vraagt een vertaalslag om van daar uit te komen tot het aantal genezingen of besmettingen per tijdseenheid. De weergave in figuur 2 vestigt de aandacht op de relevante toestandsgrootheden (vatbaar en ziek) en laat direct zien welke veranderingsprocessen van belang zijn zijn en waar dus rekenregels moeten worden ingevuld.



Figuur 2 Een eenvoudig griepmodel: toestandsvariabelen en veranderingsprocessen



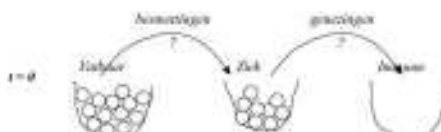
Figuur 3 Numerieke oplossing van het eenvoudige griepmodel

Deze weergave maakt duidelijk dat alle vatbaren, net als alle zieken, op een hoop gegooid worden, zonder rekening te houden met individuele kenmerken zoals plaats of voorgeschiedenis. Alleen onder die voorwaarde is de regel 'Een zieke herstelt na gemiddeld vijf dagen' equivalent met 'per dag geneest 0.2 x het aantal zieken'. Na het kwalitatief beredeneren van het gedrag ligt het voor de hand dit ook kwantitatief na te rekenen. Analytische oplossingen vallen buiten het bereik van de leerlingen, maar een computersimulatie, bijvoorbeeld met een spreadsheet is wel haalbaar (figuur 3).

Het eerste model levert duidelijk geen realistisch gedrag. Dit kan aanleiding zijn om een verbeterd model te ontwikkelen:

- er zijn drie groepen mensen: vatbare, zieke en immune;
- een zieke herstelt na gemiddeld vijf dagen, en is daarna immuun;
- als een zieke een vatbare ontmoet dan bedraagt de kans dat deze de volgende dag ziek is 0.2;
- een ziek persoon ontmoet gemiddeld 5 mensen per dag.

In beeld:



Figuur 4 Een verbeterd griepmodel: toestandsvariabelen en veranderingsprocessen

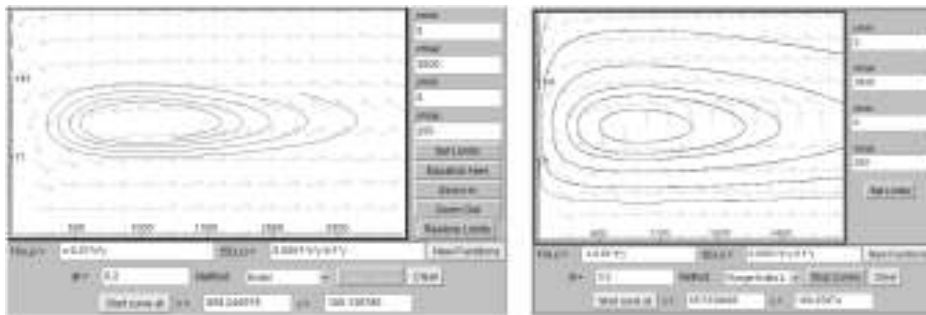
Het doorrekenen van dit model levert een herkenbare (griep)golf, al wordt bij vergelijking met echte metingen snel duidelijk dat het kwantitatieve verloop niet realistisch is; nog afgezien van het optreden van niet-geheelgetallige aantallen patiënten. Het is duidelijk dat voor een bruikbare kwantitatieve voorspelling het model uitgebreid moet

worden bijvoorbeeld met een incubatietijd, met mensen die wel besmet raken maar niet ziek worden, met het onderscheid tussen mensen met veel en weinig contacten etcetera. Toch levert nader wiskundig onderzoek aan dit model toetsbare nieuwe voorspellingen: hoe hoger de piek, hoe korter de epidemie duurt, en onder bepaalde omstandigheden kan groepsimmuniteit optreden.

De vorm van een recursieve betrekking, zoals in het beschreven voorbeeld, is nieuw voor leerlingen, die gewend zijn dat je in een gegeven formule de onbekenden invult en dan de bijbehorende uitkomst vindt. Vanuit natuurwetenschappelijk oogpunt wordt hiervoor het eerst zichtbaar dat een begintoestand in combinatie met een aantal veranderingswetten als functie van de toestand de volledige ontwikkeling van een (fysisch, chemisch of biologisch) systeem kan vastleggen. Als de leerlingen tegen het eind van het onderwijs de draagwijdte van dit idee beginnen in te zien, is er iets wezenlijks bereikt.

Discreet versus continu

Van oudsher worden discrete en continue dynamische modellen gescheiden behandeld. In het huidige programma behoren discrete dynamische modellen tot de stof voor wiskunde A, terwijl continue modellen tot voor kort bij wiskunde B behandeld werden. Bij wiskunde A wordt de computer gebruikt om betrekkingen van de vorm $X_t = aX_{t-1} + b$ door te rekenen. Daarbij wordt als vanzelfsprekend met stapgrootte één gerekend. Het begrip stapgrootte speelt in de eindtermen dan ook geen rol. Ook bij wiskunde B speelde stapgrootte nauwelijks een rol: hier is volgens de eindtermen alleen sprake van differentiaalvergelijkingen. In de praktijk van het numeriek modelleren worden steeds discrete modellen gebruikt om continue systemen te beschrijven: de legitimatie daarvoor volgt uit het gedrag van het model in de limiet voor



Figuur 5 Een richtingveld-plot voor het Lotka-Volterramodel. De doorgetrokken lijnen geven het populatieverloop, links voor een enkele begintoestand met Euler-integratie en rechts voor een reeks begintoestanden met Runge-Kutta.

kleine tijdstap.

Hoewel de verspreiding van de griep op een continue tijd-as verloopt, werd in het eerdergenoemde model als vanzelfsprekend een discrete tijdstap van één dag gebruikt. Andere continue processen geven meer aanleiding om de keuze voor een geschikte tijdstap te thematiseren. Neem het proces van radioactief verval. De stralingsactiviteit van een radioactieve bron is recht evenredig met de aanwezige hoeveelheid materiaal. Bij kortlevende isotopen is rechtstreeks te meten dat de waargenomen stralingsactiviteit, en dus ook de hoeveelheid radioactief materiaal, telkens na een vast tijdsinterval met de helft afgenomen is. De lengte van dit tijdsinterval is karakteristiek voor het isotoop waar je naar kijkt. Bij (zeer)langlevende isotopen ligt het moeilijker: de stralingsintensiteit verandert niet merkbaar over de duur van een mensenleven. De vraag is dan hoe je toch de halfwaardetijd van zo'n stof kunt bepalen op basis van een bekende beginhoeveelheid en een bijbehorende gemeten activiteit. Een eerste veronderstelling zou kunnen zijn dat de activiteit constant blijft totdat alle deeltjes op zijn. Leerlingen zien al snel dat dit een te korte halfwaardetijd oplevert, want als de hoeveelheid materiaal iets is afgenomen zal ook de activiteit en dus de verdere afnamesnelheid, iets gedaald zijn. Je moet dus een tussenberekening maken. Neem het volgende model:

- een atoom van de radioactieve stof X kan onder uitzending van een α -deeltje vervallen tot een atoom van de stabiele stof Y ;
- de stralingsactiviteit A (aantal deeltjes per seconde) is recht evenredig met de aanwezige hoeveelheid N van stof X (aantal atomen);
- op $t = 0$ is er een bekende hoeveelheid N van stof X ;
- op $t = 0$ wordt een zekere stralingsactiviteit A (aantal deeltjes per seconde) gemeten.

Dit is voldoende om het benodigde rekenmo-

del op te stellen. Het is in het gekozen voorbeeld onbegonnen werk om voor iedere volgende seconde een tussenberekening te maken. Anderzijds, als je de tijdstap te groot kiest wordt de uitkomst onnauwkeurig en kunnen zelfs artefacten zoals negatieve hoeveelheden ontstaan. De vraag dringt zich op wat dan wel een goede stapgrootte is om een nauwkeurig antwoord te vinden. Deze context vraagt dus om een expliciete behandeling van het begrip 'tijdstap' in relatie tot de karakteristieke tijd van het proces.

Ook de vraag naar het limietgedrag voor $\Delta t \rightarrow 0$ volgt hier vanzelfsprekend uit het oorspronkelijke probleem. Het inzicht (en eventueel bewijs) dat de oplossingen in de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$ convergeren is met het zicht op het vervolg belangrijker dan het vinden van de bijbehorende analytische oplossing.

Hogere orde en niet-lineair

Als er alleen lineaire eerste-orde modellen zouden bestaan zou de draagwijdte van het dynamisch modelleren betrekkelijk gering zijn. Het gedrag van lineaire eerste-orde modellen biedt al snel geen verrassingen meer, en geeft weinig aanleiding tot kwalitatieve analyse. Bij het opstellen en numeriek doorrekenen van een model is er echter geen dwingende reden om je te beperken tot lineaire of eerste orde relaties. Hoewel er eindeloos veel variaties in modelgedrag mogelijk zijn, is het verhelderend te ervaren dat het gedrag van verreweg de meeste dynamische systemen te interpreteren is in termen van slechts enkele hoofdcategorieën, of combinaties daarvan:

- groei/krimp: eenparig; versneld; vertraagd; logistisch;
- traagheid: periodieke oscillatie; gedempte oscillatie;
- aandrijving (forcing): resonantie; chaotisch gedrag.

Waar het gaat om de voorspellende kracht van modellen, en de grenzen daaraan, is het van belang dat leerlingen kennismaken met deze

verschillende typen modelgedrag.

Vanuit fysisch oogpunt biedt de mechanica daarvoor een vanzelfsprekende inspiratiebron. Helaas is de Newtonmechanica voor leerlingen een voortdurende bron van begripsproblemen [1–3]. Mechanica ligt daarmee minder voor de hand als invoeringscontext. Biologische, en dan met name ecologische verschijnselen bieden een beter startpunt, met veranderingsregels die voor de leerlingen concreet voorstelbaar zijn.

Neem bijvoorbeeld de groei van een rupsenpopulatie, die bepaald wordt door voedselaanbod en predatie [5]. Bij lage dichtheden zal de groei evenredig zijn met de populatieomvang, bij hogere dichtheden neemt de groei af door voedselgebrek. Naarmate er meer rupsen komen worden ze zichtbaarder, en gaan de aanwezige vogels actief jacht op ze maken. Een vogel eet echter niet ongelimiteerd, dus de predatiekans nadert bij toenemende dichtheid tot een maximumwaarde. Dit model kan bijvoorbeeld als volgt geformaliseerd worden:

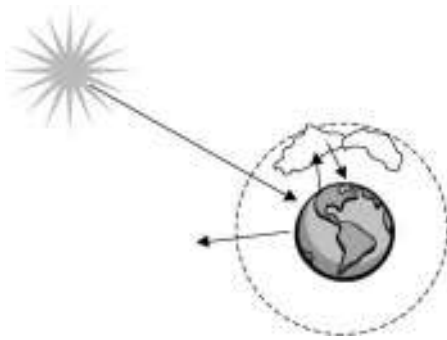
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha \frac{N^2}{1 + \beta N^2}$$

De eerste term aan de rechterkant representeert de groei van de rupsenpopulatie, met N het aantal rupsen, r een groeisnelheidsparameter, en K de maximale rupsenpopulatie die het gebied kan herbergen (draagkracht). De tweede term beschrijft de rupsensterfte door predatie, met α het maximum opeettempo bij hoge dichtheden en β een parameter die dichtheidsafhankelijkheid beschrijft.

De vraag is wat er gebeurt als het model op zeker moment start met een bepaalde waarde van N : wanneer gaat N groeien? wanneer neemt N af? etcetera Het is niet moeilijk dit model voor gegeven parameterwaarden met de computer door te rekenen, maar dat levert alleen één mogelijke modeluitkomst. Als je een aantal verschillende startwaarden voor N probeert vind je verschillende modeluitkom-



Figuur 6 De groei van de rupsenpopulatie als functie van de populatieomvang voor $r = 1.2$, $K = 100$, $\alpha = 0.4$ en $\beta = 0.02$



Figuur 7 Leerling-ideeën over elementen die de temperatuur op aarde bepalen

sten. Dit biedt een goede aanleiding tot kwalitatieve analyse, bijvoorbeeld door de nulpunten te zoeken in de grafiek van dN/dt als functie van N (figuur 6).

Anders dan de bekende modellen van Lotka-Volterra of van Verhulst, kent dit systeem bij de gegeven parameterwaarden vier evenwichten. Naast het, biologisch triviale, evenwicht bij $N = 0$, vinden we twee stabiele toestanden. Uit de biologische praktijk zijn meerdere voorbeelden van dit verschijnsel bekend, bijvoorbeeld de konijnenpopulatie in de Nederlandse duinen, die zich niet herstelt van de laatste VHS-epidemie; en de kabeljauwpopulatie in de Noordzee, die zich niet herstelt van overbevissing.

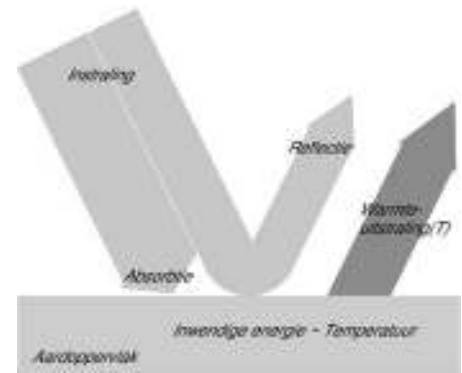
Ook oscillerende modellen worden in de biologie vanzelfsprekend geïntroduceerd, bijvoorbeeld in de vorm van het Lotka-Volterra model. Ook hier geldt het voordeel dat de toestandsgrootheden (prooi en predator) en de processen aanschouwelijk gedefinieerd zijn, en dat er geen grondig begrip van 2^e-orde afgeleide voorondersteld wordt. Om het gedrag van dergelijke systemen (gekoppelde en hogere-orde differentiaalvergelijkingen) kwalitatief te onderzoeken is een enkelvoudige grafiek zoals in figuur 6 niet voldoende. Hier zou een richtingveld een waardevol gereedschap kunnen zijn. Er zijn diverse applets beschikbaar waarmee leerlingen eventueel ook zelf zo'n richtingveld kunnen construeren [7].

Bij het doorrekenen van een Lotka-Volterra model met Euler-integratie valt op dat de oplossing na verloop van tijd altijd opblaast. Het is voor leerlingen niet direct inzichtelijk dat dit gedrag niet besloten ligt in de modelregels, maar dat het voortkomt uit het integratieformalisme. De ecologische kennis van leerlingen schiet ook tekort om sterke verwachtingen te ontwikkelen over het gedrag dat wel zou moeten optreden. Hier ligt een overgang naar de mechanica voor de hand: het gedrag van een mechanische slinger is welbekend en biedt een goede aanleiding om de beperkin-

gen van Euler-integratie te behandelen en om, zonder daar diep op in te gaan, een pragmatische oplossing te presenteren in de vorm van Runge-Kutta-integratie. Vervolgens kunnen de effecten van damping en eventueel aandrijving onderzocht worden.

Om niet de suggestie te wekken dat dynamische verschijnselen met vlijtig doormodeleren altijd volledig te voorspellen zijn mag tenslotte een kennismaking met chaotisch en irreversibel gedrag niet ontbreken. Dat betekent niet een grondige behandeling van de chaostheorie, maar wel een eerste kennismaking met een eenvoudig systeem dat chaotisch gedrag produceert. Omdat leerlingen geen directe ervaring hebben met dit soort verschijnselen zou het wenselijk zijn naast het chaotisch modelgedrag ook een 'werkelijke' demonstratie te zien. De Lorentzvlinder is dus minder geschikt omdat niet duidelijk is naar welke werkelijkheid het model verwijst. De chaotische slinger biedt wel een geschikt voorbeeld dat in de klas gedemonstreerd kan worden. Het zelf opstellen van een model hiervoor voert voor de meeste leerlingen te ver, maar leerlingen kunnen wel een gegeven model van dit systeem onderzoeken. In een module van 40 uur zal de beschikbare tijd hiermee gevuld zijn. De wiskundige opbrengst tot hier toe: de leerling heeft geleerd dat het gedrag van een dynamisch systeem vastligt als je de verandering kunt uitdrukken als functie van de toestand; hoe je de benodigde modelregels in formules kunt uitdrukken; hoe je, onder voorwaarden, het modelgedrag kunt vinden door numeriek te integreren; hoe betrekkelijk eenvoudige veranderingsfuncties kunnen leiden tot een scala aan modelgedragingen; en tenslotte dat het niet moeilijk is een model te maken dat woeste uitslagen vertoont, maar dat het vervolgens wel moeilijk kan zijn dit gedrag te interpreteren in termen van gebruikte modelregels en parameters.

Als er meer tijd beschikbaar is, zoals bij wiskunde D, dan biedt de hier geschetste module aanleiding om wiskundige vragen op te werpen die in een vervolgmodule diepgaander behandeld kunnen worden. De numerieke modeluitkomsten bij radioactief verval en de mechanische slinger doen sterk denken aan bekende functies (respectievelijk e -macht en sinus), zouden deze modellen misschien analytisch oplosbaar zijn? Het verwarrende gedrag van chaotische modellen zou aanleiding kunnen zijn voor een wiskundige reflectie op het belang van vereenvoudiging en linearisatie. Het artikel van Henk Broer elders in dit nummer biedt een prachtige aanzet tot een uitwerking in deze richting.



Figuur 8 De energiestromen van en naar het aardoppervlak. De breedte van de pijlen geeft de grootte van de energiestromen aan.

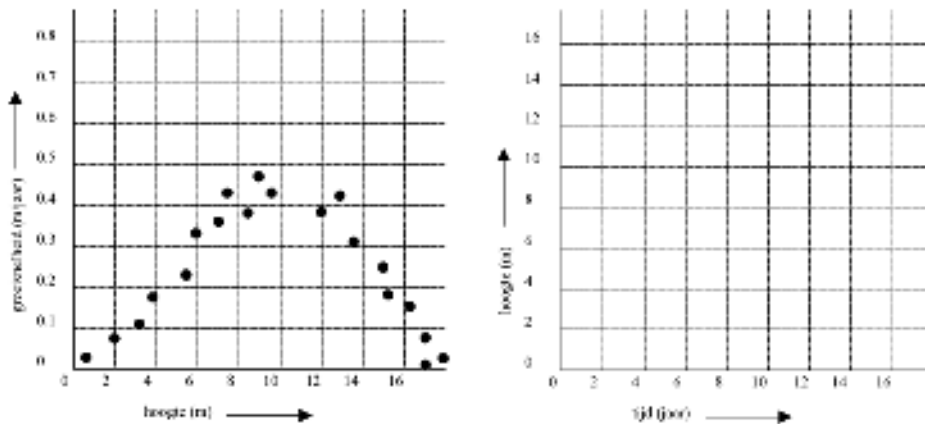
Een kwestie van representaties

Het oplossen van een modelleerprobleem vereist allereerst identificatie van het relevante systeem. Als een docent in een klassengesprek inventariseert welke elementen van belang zijn voor de temperatuur op aarde verschijnt er typisch een tekening als in figuur 7 op het bord.

Zo'n plaatje biedt nog nauwelijks ondersteuning voor het redeneren over de dynamiek van het systeem of voor de ontwikkeling van een wiskundig model. Het diagram in figuur 8 legt meer nadruk op de relevante grootheden. Bovendien komt in dit beeld beter tot uitdrukking dat de aarde opwarmt als de instraling groter is dan de uitstraling. Naarmate het oppervlak warmer wordt zal de warmte-uitstraling toenemen. Het idee dat een evenwichtstemperatuur bereikt wordt ligt hier voor de hand.

Bij het ontwikkelen van een model maken we gebruik van een reeks representaties die steeds verschillende aspecten benadrukken. De betekenis van zo'n representatie wordt echter bepaald door conventies en wie de conventies niet kent ziet de betekenis niet. Het kost tijd om nieuwe conventies te leren gebruiken en het introduceren van nieuwe tools en representaties vraagt dus steeds een kosten-batenanalyse.

Dat geldt ook voor de uiteindelijke wiskundige modelbeschrijving. Voor een wiskundige geeft een (stelsel van) differentiaalvergelijking(en) een heldere en eenduidige beschrijving van een dynamisch model. Een leerling daarentegen ziet in een stelsel differentiaalvergelijkingen niet automatisch een dynamisch systeem. Er zijn dan ook allerlei aanvullende en alternatieve representaties ontwikkeld die bepaalde aspecten moeten verhelderen. Neem bijvoorbeeld de grafieken in figuur 9. In de linkergrafiek is de groeisnelheid van een boom uitgezet tegen de hoogte. De opdracht zou kunnen luiden om in de rech-



Figuur 9 Links: de groeisnelheid van een boom als functie van de hoogte. Rechts: de leerling wordt gevraagd om het groeiverloop van een boom tegen de tijd uit te zetten

tergrafiek het groeiverloop van een boom met een starthoogte van 50 cm te construeren.

Ook de diverse computertools die gebruikt worden om modellen door te rekenen zullen in hun modelweergave bepaalde aspecten benadrukken of juist verhullen. Het idee van de herhaalde bewerking wordt goed zichtbaar in een spreadsheet waar een iteratieslag wordt toegevoegd door de onderste regel te kopiëren. De modelstructuur en de gebruikte rekenregels zijn echter niet direct zichtbaar. In een 'tekstgebaseerd' computermodelleertool wordt het model beschreven door een serie (differentie)vergelijkingen. Figuur 12 toont het griepvoorbeeld in de syntax van het in het onderwijs veel gebruikte programma *Coach 5*.

De beginwaarden en constanten staan rechts; de berekeningen links worden herhaald uitgevoerd. Het idee van rekenen volgens vast recept springt hier op de voorgrond, maar de 'toestand' krijgt niet veel nadruk. Bovendien is het hier, zeker bij een wat groter

model, in de reeks rekenregels lastig de conceptuele structuur te herkennen. Er zijn daarom verschillende modelleertools ontwikkeld waarbij de wiskundige formules verpakt worden in een grafische 'shell' die de conceptuele structuur moet verhelderen. In de NLT-module wordt geëxperimenteerd met een 'systeem-dynamisch' modelleertool. De daar gebruikte weergave bouwt voort op het plaatje uit figuur 4. De grafische modelweergave van het griepmodel komt er dan uit te zien als in figuur 10.

De toestandsgrootheden en de veranderingsprocessen zijn duidelijk te herkennen, en bij iedere grootheid is aangegeven waar deze van afhankelijk is. Voordat het model aan rekenen moeten overal waar vraagtekens staan de rekenregels ingevuld worden: door dubbelklikken op bijvoorbeeld de variabele genezing verschijnt een dialoogvenster als onder in de figuur, waarin met behulp van de gelinkte variabelen *ziek* en *ziekteduur* de benodigde formule opgesteld kan worden. Als alle vraagtekens verdwenen zijn kan het model met een zelf te kiezen tijdstap doorgerekend worden (figuur 11).

Het aardige van een dergelijke modelweergave is dat het ontwerp op hoofdlijnen plenair besproken kan worden en dat leerlingen vervolgens een structuur hebben waarbinnen ze de rekenregels kunnen invullen. In de praktijk blijkt dat leerlingen met een dergelijk tool al snel eenvoudige modellen kunnen bouwen. Aan de andere kant geldt hier, net als bij de andere genoemde representaties, dat de leerling er niet altijd de betekenis in ziet die de ervaren gebruiker zou verwachten.

In de hier geschetste visie wordt intensief gebruik gemaakt van computermodelleertools en simulatieprogramma's. Dit is natuurlijk alleen wenselijk als dit bijdraagt tot de begripvorming. In de woorden van de commissie CTWO: wel 'use to learn' en niet 'learn to use'. In de huidige context vind ik die

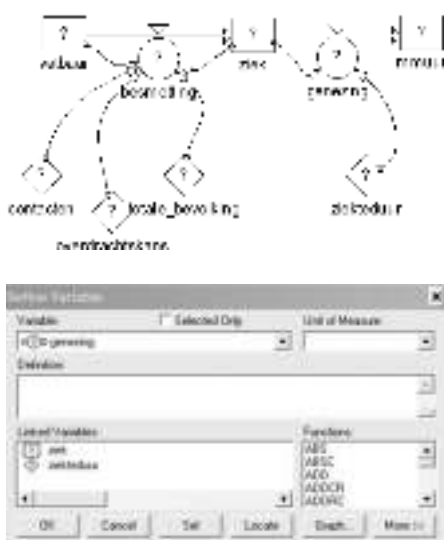
tegenstelling niet altijd zo helder als ze lijkt: use to learn en learn to use staan niet altijd tegenover elkaar: het leren gebruiken van numerieke technieken behoort tot de leerdoelen, en het leren werken met de computer maakt daarvan onderdeel uit. In ieder geval is het computergebruik geen doel op zich, en in die zin is ook hier sprake van 'use to learn'.

Toetsing van leerresultaten

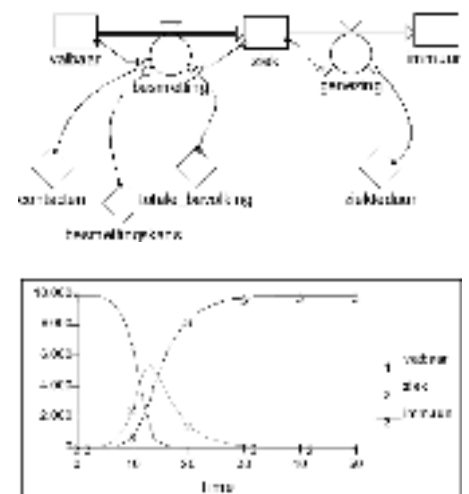
Toetsing speelt een sturende rol in het curriculum. Wat getoetst wordt krijgt meer gewicht, en bovendien stuurt de manier waarop een onderwerp getoetst wordt ook de manier van onderwijzen. Een valide examinering is dan ook een voorwaarde voor een succesvolle implementatie. Aan de andere kant is toetsing niet alleen maatgevend, en kunnen ook leerdoelen die niet hard getoetst kunnen worden bestaansrecht hebben.

Bij biologie en natuurkunde maakt computerondersteund modelleren sinds enkele jaren deel uit van de experimentele computerondersteunde examens (*complex*). De geplande algemene invoering van het *complex* in 2007 heeft ertoe geleid dat veel leraren zich actief in het onderwerp zijn gaan verdiepen en op zoek zijn gegaan naar nascholing. De invulling van 'modelleren' in deze examens is echter noodzakelijkerwijze beperkt: er worden gegeven modellen geëxploreerd en er worden kleine veranderingen aangebracht.

Een modelleerproces zoals bedoeld in dit artikel omvat een veel breder scala aan activiteiten. Dat proces vraagt creativiteit, reflectie, overleg en een behoorlijke hoeveelheid tijd. Ook een goede modelleerder kan in een impasse belanden en er moet gelegenheid zijn om daar productief mee om te gaan. Modelleervaardigheden lenen zich daarom vooral



Figuur 10 Een systeemdynamische modelweergave van het griepmodel (links) en het dialoogvenster voor de modelvariabele genezing (rechts)



Figuur 11 Het voltooide griepmodel met uitkomsten

voor toetsing in een open setting, zoals in een praktische opdracht of een profielwerkstuk. In het schoolexamen dus. Daar liggen ook mogelijkheden om de koppeling met experimenteel werk vorm te geven.

Conclusie en vooruitblik

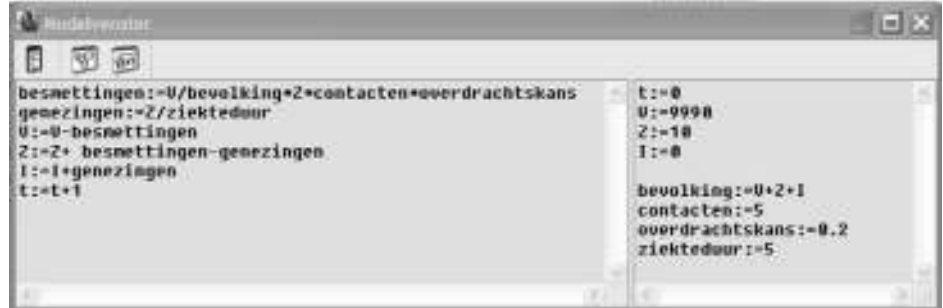
In het voorgaande heb ik een visie geschetst op het onderwijzen van dynamisch modelleren. Die visie heb ik uitgewerkt in een schets voor een inleidende module van 40 uur. Samenvattend zie ik tenminste de volgende nastrevenswaardige leerdoelen:

- de leerling verwerft een basisvaardigheid in het modelleren van dynamische systemen (modelontwerp, modelanalyse, simulatie en evaluatie);
- de leerling verwerft inzicht in de mogelijke gedragingen van dynamische systemen, en de (beperkte) voorspelbaarheid daarvan (mechanica, ecologie, klimaat et cetera);
- de leerling verwerft inzicht in modelleren als voortgaand proces van kennisontwikkeling.

Dat zijn ambitieuze doelen en niet iedereen zal overtuigd zijn van de haalbaarheid. De CTWO schrijft in haar visiedocument:

“In echte wiskundige probleemsituaties is modelleren een zeer complexe en moeilijke activiteit; het is didactisch geen eenvoudige opgave om leerlingen in het voortgezet onderwijs iets van dit proces te laten ervaren zonder in kunstmatige overgesimplificeerde situaties te vervallen.”

Dat is zeker waar, maar het is toch de moeite waard te proberen zo ver mogelijk te komen. Op dit moment wordt een module NLT ontwikkeld die gedeeltelijk uitwerking geeft aan deze ideeën. Eerder hebben we in diverse ontwikkelprojecten en onderzoeken onderdelen van deze visie geïmplementeerd en geëvalueerd [4]. Steeds weer blijkt het daarbij onvermijdelijk om keuzes te maken en elementen te schrappen om tot een samenhangend en werkbaar geheel te komen. Het meest



Figuur 12 Het tweede griepmodel geïmplementeerd in Coach

opvallend in de hier voorgestane aanpak is wellicht een ruime aandacht voor numerieke oplossingen ten koste van de aandacht voor analytische oplossingen. Er zijn echter ook andere onderdelen gesneuveld zoals bijvoorbeeld stochastische modellen (random walk, monte-carlo). Gedeeltelijk zouden deze onderwerpen alsnog aan de orde kunnen komen in een vervolgmodule, of in een vervolg bij de mono-vakken.

Aankankelijk was het de bedoeling dat er één gezamenlijke module modelleren zou komen voor Wiskunde D en NLT. Na verloop van tijd bleken de visies op modelleren toch te zeer verschillend en heeft wiskunde D een eigen ontwikkeltraject gestart. Het is illustratief om het ontwerpvoorstel van Garst en Peletier voor ‘dynamische modellen’ in wiskunde D te lezen naast dit artikel [6]:

“De commissie ziet een belangrijk onderscheid tussen enerzijds fysisch modelleren en anderzijds getalsmatig en geometrisch modelleren. Het fysisch modelleren, het opstellen van modellen op basis van fysische beginselen zoals de wetten van Newton, is een intrinsiek lastiger activiteit en is daarom geen onderdeel van de eindtermen. Merk op dat het hier alleen gaat over de eindtermen: een leerling zal niet gevraagd worden om fysische wetten toe te passen om een model op te stellen. Dit laat onverlet dat de fysische wereld ons een overdaad aan voorbeeldproblemen levert. Anders is de situatie voor getalsmatig en geometrisch modelleren. Hieronder volgen twee voorbeeldsommen om deze twee klassen te illustreren.

Geef een recurrente betrekking voor een bolstapeling met vierkant grondpatroon (antwoord $B_n = B_{n-1} + n^2$ met $B(0) = 0$) en bepaal het aantal bollen in een dergelijke piramide met hoogte 5. [volgt een tweede, vergelijkbaar, voorbeeld].”

Hier wordt duidelijk voor één leidend perspectief gekozen. Dat heeft voor- en nadelen. Het ontwikkelteam voor NLT streeft er, ondanks de evidente moeilijkheden, naar een module te ontwikkelen waarin zowel wiskundige als natuurwetenschappelijke vakperspectieven tot hun recht komen. Dat is geen sinecure: steeds weer blijkt dat de bijzaken uit het ene vakgebied in het andere vakgebied hoofdzaken kunnen zijn en dat wat in het ene vakgebied een vanzelfsprekende aannahme is, in het andere vakgebied veel uitleg behoeft. Deze opzet heeft dan ook alleen kans van slagen als belanghebbenden uit verschillende vakgebieden kennisnemen van elkaars perspectieven en zoeken naar een gedeelde interesse. Met dit artikel heb ik geprobeerd daartoe een bijdrage te leveren.

Verantwoording

Dit artikel kwam tot stand op basis van een voordracht die de auteur gehouden heeft op het Wintersymposium van het KWG. De auteur is als ontwikkelaar betrokken bij de vwo-module Dynamische Modellen voor het nieuwe vak Natuur, Leven en Technologie en is voorzitter van de adviescommissie ‘Modelleren’ van de gezamenlijke bèta-vernieuwingscommissies. Ik dank Joke Daemen, Jenneke Kruger, Ad Moeldijk, Bart Ormel, en Vincent Simons voor hun kritische reacties op eerdere versies van dit artikel, dat overigens op persoonlijke titel geschreven is. De voorbeelden in dit artikel zijn gedeeltelijk ontleend aan een NLT-module in voorbereiding en aan pilot-projecten die de afgelopen jaren op verschillende scholen beproefd zijn.

Referenties

- 1 I.A. Halloun, D. Hestenes, ‘The initial knowledge state of college physics students’, *American Journal of Physics* **53** (1985), pp. 1043–1055.
- 2 L. Viennot, ‘Spontaneous reasoning in elementary dynamics’, *European Journal of Science Education* **1** (1979), pp. 205–211.
- 3 D.M. Watts, ‘A study of schoolchildren’s alternative frameworks of the concept of force’, *European Journal of Science Education* **5** (1983), pp. 217–230.
- 4 Voor een overzicht van beschikbare materialen zie www.cdbeta.uu.nl/vo/modelleren
- 5 Ontleend aan De Roos, A. en Heesterbeek, H., ‘Opkomst en ondergang: rupsen in de klem tussen bomen en vogels’, in: H. Heesterbeek, O. Diekman en H. Metz (red.), *De wiskundige kat, de biologische muis en de jacht op inzicht*, (2004), Utrecht, Epsilon, pp. 139–152.
- 6 S. Garst, M. Peletier, *Gedetailleerd programma van de module Dynamische Modellen van VWO-Wiskunde D 2007–2011 (voorstel)* (25 januari 2007), gedownload op 21 april 2007, van www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/Materiaal-DomeinenWiskundeD/DynamischeModellenVwo/docs/ETDMv4.pdf
- 7 Bijvoorbeeld www.math.uu.nl/people/beukers/phase/newphase.html of math.hws.edu/java-math/config/applets/IntegralCurves.html
- 8 *Natuurkunde leeft*, Commissie Vernieuwing Natuurkundeonderwijs havo/vwo (mei 2006), www.nieuwenatuurkunde.nl/NiNa/DATA/Downloads/Visiedocumenten, pp. 33–34

Esther Bod*Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht
Postbus 80010, 33508 TA Utrecht
e.bod@students.uu.nl*

Onderwijs

De opgaven van de LIMO

Op 25 mei heeft de Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO) voor de derde keer plaatsgevonden. De LIMO is een jaarlijkse wedstrijd voor teams van wiskundestudenten uit heel Nederland. Afgaande op de uitslag ervoeren de kandidaten de opgaven ook dit jaar weer als lastig. Hoe zagen de opgaven er uit?

Dit jaar was de LIMO in Utrecht. Er was een grote belangstelling vanuit het hele land: nadat vorige jaren respectievelijk zestien en zeventien teams hadden meegedaan, deden er nu drieëntwintig teams mee. In totaal waren er 92 deelnemers van zes verschillende universiteiten.

De eerste deelnemers arriveerden om 10.00 uur. Toen iedereen er om 10.30 was, hield Gunther Cornelissen een lezing over het tiende probleem van Hilbert. Hij liet zien hoe er in de geschiedenis is geprobeerd een algoritme te vinden dat van een willekeurige diophantische vergelijking kan bepalen of deze een oplossing in de gehele getallen heeft. Hierbij kwam zelfs Hilbert zelf aan het woord. Verder vertelde hij over het actuele onderzoek naar de

vraag of bepaald kan worden of een vergelijking rationale oplossingen heeft. Op deze vraag is tot op heden nog geen antwoord gevonden.

Na de lezing moesten de deelnemers nog wachten tot het einde van de lunch totdat de wedstrijd daadwerkelijk begon. Drie uur lang kregen de teams in drieëntwintig verschillende zaaltjes de tijd om elf verschillende opgaven op te lossen. Alle opgaven, op één na, waren opgesteld door medewerkers van verschillende Nederlandse universiteiten. De laatste opgave was door een Belgische student bedacht. Na drie uur druk bezig te zijn geweest, gewapend met pen, papier en een opgavenboekje, moesten de teams hun pogingen tot antwoorden inleveren.

Toen de wedstrijd afgelopen was konden de deelnemers uitrusten en napraten tijdens de borrel. Ook konden ze hun antwoorden vergelijken met de uitwerkingen zoals die door de opgavenmakers waren opgesteld. Daarnaast was de borrel een goede gelegenheid om studenten van andere universiteiten, waaronder oude bekenden, te ontmoeten. Terwijl voor de deelnemers het be-





langrijkste deel achter de rug was, begon voor de nakijkers het werk pas: de ingeleverde antwoorden moesten nagekeken worden. Veel opgavenmakers keken hun eigen opgave na, maar een aantal opgaven werd nagekeken door daarvoor gestrikte vervangende nakijkers. Eén opgave is zelfs door een team van vier man nagekeken.

Nadat de deelnemers twee uur in spanning hadden moeten wachten, werden de winnaars tijdens de prijsuitreiking bekendgemaakt. De prijsuitreiking werd verzorgd door Erik van den Ban, die de spanning opbouwde door eerst een aantal statistieken te laten zien. Met een gemiddelde van 29 van de 110 punten, bleken de opgaven ook dit jaar weer erg uitdagend te zijn geweest. De best gemaakte opgave was de opgave van Klaas Landsman over Eulers benadering van π . Hiervoor werden in totaal 160 punten gehaald. Anderzijds, voor de getaltheoretische opgave van Arne Smeets haalden maar drie teams punten, in totaal 20 punten.

Op een gedeelte derde plaats eindigden de teams *Kasanova* en de *Hutspot Hooligans* van de Universiteit Utrecht en V_4 van de Universiteit Leiden. Vermeldenswaardig is dat V_4 bestond uit vier eerstejaars studenten. Beide teams hebben 45 punten gehaald. Als tweede is het team *Naamloos* van de Universiteit van Amsterdam geëindigd met 51 punten. De winnaar van de derde LIMO is $\aleph_4$, wederom van de Universiteit Leiden. Dit team, bestaande uit Joris Weimar, Birgit van Dalen, Joost Michielsen en Michiel Kusters, heeft de mooie score van 56 punten behaald. Hiermee hebben ze twee boeken over het werk van Euler en de wisselbeker gewonnen. De prijzen zijn beschikbaar gesteld door Hewitt.

De dag werd afgesloten met een diner in een Italiaans restaurant aan de Oudegracht, het centrum van het centrum van Utrecht. Al met al kan teruggekeken worden op een geslaagde dag en we hopen dan ook dat volgend jaar in Leiden weer veel deelnemers mee zullen doen.

De organisatie van de LIMO 2007 was in handen van Elke Ballemans, Esther Bod, Johan Konter, Sander Kupers en Johannes Steenstra.

De opgaven

Hieronder volgen de opgaven: de oplossingen zijn te vinden op de internetpagina van LIMO 2007 (limo.a-eskwadraat.nl).

Opgave 1: Grafen en matrices

G.L.M. Cornelissen, Universiteit Utrecht

Stel dat X een eindige samenhangende graaf is met hoekpunten H en zijden Z . (Dus H is een eindige verzameling en Z een



familie ongeordende paren hoekpunten. ‘Samenhangend’ betekent dat er voor elke twee hoekpunten $x, y \in H$ een reeks zijden $\{\{x_i, y_i\} \in Z\}_{i=0}^n$ bestaat met $x_0 = x, y_{i-1} = x_i$ ($i = 1, \dots, n$) en $y_n = y$.) In deze graaf kunnen meervoudige zijden voorkomen, dat wil zeggen dat er meer dan één zijde tussen twee hoekpunten kan liggen. In de oorspronkelijke graaf zijn de zijden niet geïoriënteerd. Beschouw een nieuwe graaf X^+ die dezelfde hoekpuntenverzameling heeft als X , maar waarin elke (niet geïoriënteerde) zijde uit X vervangen wordt door twee (in elke mogelijke richting) geïoriënteerde zijden in X^+ (zie figuur 1 voor een voorbeeld). Als $e = (x, y)$ zo’n geïoriënteerde zijde is, noteer de corresponderende omgekeerde zijde als $\bar{e} = (y, x)$.



Figuur 1 Een graaf X (links) en de bijbehorende geïoriënteerde graaf X^+ (rechts)

Stel dat de oorspronkelijke graaf m (niet-geïoriënteerde) zijden heeft. We maken een $2m$ -dimensionale reële vectorruimte V met als basis de geïoriënteerde zijden van X^+ , en bekijken daarop een lineaire operator $T : V \rightarrow V$ die op deze basis gegeven is door

$$T(e) := \sum e'$$

waarbij de som loopt over alle geïoriënteerde zijden e' van X^+ zodat het eindpunt van e het beginpunt van e' is, maar $e' \neq \bar{e}$. (Je mag de zijden van X^+ nummeren als $e_1, \dots, e_{2m}$ en deze beschouwen als de standaard basisvectoren in $\mathbb{R}^{2m}$.) Het gaat ons om het bepalen van $K_X := \ker(I - T)$, waarbij I de identiteitsafbeelding is.

a) Bepaal $\dim K_X$ als X een graaf is met precies één hoekpunt dat met zichzelf verbonden is door $g > 0$ enkelvoudige lussen (zie figuur 2), als functie van g .



Figuur 2 Een graaf met één hoekpunt en g lussen

Stel nu dat c een gesloten lus is in een willekeurige eindige samenhangende graaf X . Dit betekent dat c gegeven is door een

reeks geörienteerde zijden $(z_1 = (x_1, y_1), \dots, z_n = (x_n, y_n))$ met $y_i = x_{i+1}$ voor $i = 1, \dots, n-1$ en $y_n = x_1$. Stel

$$\varphi(c) := \sum_{i=1}^n z_i - \sum_{i=1}^n \bar{z}_i.$$

b) Toon aan dat $\varphi(c) \in K_X$.

Opgave 2: Roosters kleuren

F.J. van de Bult, Universiteit van Amsterdam

Als we de punten van een een-dimensionaal rooster (de punten op een getallenlijn, d.w.z. $\mathbb{Z}$), kleuren met $2^1 = 2$ kleuren zodat de randpunten van elk lijnstukje tussen twee opvolgende punten verschillend gekleurd zijn, dan zien we dat we de punten om en om dezelfde kleur moeten geven; de even punten maken we bijvoorbeeld blauw en de oneven rood. Als we de kleuring dan over een afstand 2 verschuiven blijft hij hetzelfde; de kleuring is dus invariant onder een translatie.

a) Bekijk nu de kleuringen van de roosterpunten in het vlak (dus $\mathbb{Z}^2$) met $2^2 = 4$ kleuren zodanig dat de hoekpunten van elk eenheidsvierkantje verschillend gekleurd zijn. Bewijs dat deze kleuringen ook een (niet-triviale) translatiesymmetrie hebben.

b) Laat nu $n \geq 3$. Heeft iedere kleuring van $\mathbb{Z}^n$ met 2^n kleuren, zodanig dat de hoekpunten van iedere eenheidskubus verschillend gekleurd zijn, een niet-triviale translatiesymmetrie?

Vraag om thuis nog over na te denken: Bestaat er een translatiesymmetrie als we in het vlak niet een vierkant rooster nemen, maar een zeshoekig rooster (honingraat), dat we met 6 kleuren zodanig kleuren dat de hoekpunten van elke zeshoek steeds allemaal anders gekleurd zijn?

Opgave 3: Een eigenschap van Gram matrices

J.H. Brandts, Universiteit van Amsterdam

Voor een gegeven symmetrische reële $k \times k$ matrix N , schrijf

- $\alpha(N)$ voor het aantal negatieve entrees strikt boven de hoofd-diagonaal van N ,
- $\beta(N)$ voor het aantal positieve kolomsommen van N .

Voorbeeld. Voor onderstaande matrix N ,

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

geldt dat $\alpha(N) = 3$ en $\beta(N) = 1$.

Laat nu n en k gehele getallen zijn met $1 \leq k \leq n$, en Q een $n \times k$ matrix met k lineair onafhankelijke kolommen $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{R}^n$. Voor $N = Q^*Q$ gaan we in het vervolg aantonen dat

$$\alpha(N) + \beta(N) \geq k.$$

Voor $k = 1$ is de bewering triviaal: $N = q_1^*q_1 = \|q_1\|^2$ is een 1×1 matrix met positieve entrees, want $q_1 \neq 0$, en dus met positieve kolomsom $\beta(N) = 1$. Ter verdere illustratie bekijken we nu het geval $2 = k \leq n$.

a) Bewijs dat de som van de vier entrees van N positief is en toon hiermee aan dat $\beta(N) \geq 1$.

b) Bewijs met behulp van het resultaat van (a) dat $\alpha(N) + \beta(N) \geq 2$.

Laat nu $2 \leq k \leq n$.

c) Bewijs dat de som van alle entrees van N positief is en toon hiermee aan dat $\beta(N) \geq 1$.

d) Bewijs met behulp van (a), (b) en (c) dat $\alpha(N) + \beta(N) \geq k$.

Opgave 4: Inverteren door interpoleren?

H.W. Lenstra, Universiteit Leiden

Bestaat er voor elke eindige verzameling V van positieve gehele getallen een polynoom f met gehele coëfficiënten zodanig dat $f(1/n) = n$ voor elke $n \in V$? Bewijs de correctheid van het gegeven antwoord.

Opgave 5: Wandelen langs gekleurde grafen

R. Tijdeman, Universiteit Leiden

We beschouwen m punten waarbij elk paar punten verbonden is door een rode of een blauwe boog (een volledige graaf op m punten waarbij elke kant de kleur rood of blauw heeft). Een cykel van lengte k is een stel van k verschillende punten $A_1, \dots, A_k$ met bijbehorende bogen $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$; notatie $(A_1, \dots, A_k)$. Laat $m(k)$ het kleinste getal m noteren waarvoor geldt dat we voor m punten zeker zijn van het bestaan van een cykel van lengte $\geq k$ waarvan alle bogen dezelfde kleur hebben, welke kleuring ook gekozen wordt.

a) Bewijs dat $m(4) > 5$.

b) Bewijs dat $m(4) \leq 6$.

c) Bewijs dat $m(k+2) \leq m(k) + 2k + 2$ voor $k \geq 4$.

d) Bewijs dat $m(2k) < 2k^2$ voor $k \geq 2$.

Opgave 6: Flip It

J. Top, Rijksuniversiteit Groningen

Op diverse mobiele telefoons en internet sites kan je een spelletje vinden met de naam *FlipIt*. Een wiskundige beschrijving ervan gaat als volgt. Een netwerk is een paar (S, T) waarbij S een niet-lege, eindige verzameling is, en T een verzameling ongeordende paren $\{s_1, s_2\}$ met $s_1, s_2 \in S$ en $s_1 \neq s_2$. Voor een $s \in S$ heten de $t \in S$ met $\{s, t\} \in T$ de burens van s .

Bij *FlipIt* hebben we zo'n netwerk (S, T) , waarbij bovendien alle elementen van S een kleur (wit of zwart) hebben. Bij het begin van het spel hebben alle elementen de kleur zwart, en het is de bedoeling dat aan het eind van het spel alle elementen de kleur wit hebben. Daartoe doet de speler 'zetten': een zet bestaat uit het aanwijzen van een element $s \in S$. Door dit aanwijzen verandert s , en ook alle burens van s , van kleur.

Bewijs, dat voor ieder netwerk (S, T) dit spel een oplossing heeft.

Opgave 7: Voor de hand liggend, maar niet gemakkelijk

R.W.J. Meester, Vrije Universiteit

Laat X een stochastische grootte zijn met een binomiale verdeling met parameters k en p , dat wil zeggen

$$P(X = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i},$$

voor $i = 0, 1, \dots, k$. De stochastische grootte Y is ook binomiaal verdeeld, met parameters k en q , dat wil zeggen

$$P(Y = j) = \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j},$$

voor $j = 0, 1, \dots, k$. Laat zien dat wanneer $p \leq q$, voor alle $m \leq n \leq k$ geldt dat

$$P(X \geq n | X \geq m) \leq P(Y \geq n | Y \geq m).$$

Opgave 8: Unicité van de LU decompositie

C. Vuik, Technische Universiteit Delft

We nemen aan dat $n \in \mathbb{N}$.

Definitie. De verzameling $\mathbb{L}$ wordt gegeven door:

$$\mathbb{L} = \{L \in \mathbb{R}^{n \times n} | L_{i,i} = 1 \text{ voor } 1 \leq i \leq n \text{ en } L_{i,j} = 0 \text{ voor } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Definitie. De verzameling $\mathbb{U}$ wordt gegeven door:

$$\mathbb{U} = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} | U_{i,j} = 0 \text{ voor } 1 \leq j < i \leq n\}.$$

Gegeven is de niet-singuliere matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Een matrix heet singulier dan en slechts dan als deze niet inverteerbaar is. Verder bestaat er een $L \in \mathbb{L}$ en een $U \in \mathbb{U}$ zodat

$$A = LU.$$

Toon aan dat L en U uniek zijn.

Opgave 9: Eulers benadering van π

N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Leonhard Euler (1707–1783) werd dit jaar driehonderd jaar geleden geboren. Daarom is 2007 tot 'Euler-jaar' uitgeroepen. In deze opgave, waarin we navolgen hoe Euler π benaderde, zien we hem op een typerende manier aan het werk. Alle deelopgaven kunnen gemaakt worden zonder de vorige opgelost te hebben.

Euler kende de door James Gregory (1638–1675) ontdekte reeksontwikkeling

$$\arctan x \equiv \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (1)$$

a) Leid deze reeks af als een Taylorreeks rond 0.

In eerste instantie vulde Euler de waarde $x = 1$ in (1) in. Hij herontdekte zo de benadering van Leibniz (1646–1716) voor π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Deze reeks convergeert echter slecht: de eerste decimaal is pas goed na 300 termen. Euler loste dit probleem als volgt op.

b) Laat zien dat (voor alle a en b waarvoor de uitdrukkingen eindig zijn)

$$a - b = \arctan \left(\frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \right).$$

Leid hieruit af dat (voor alle w, x, y, z waarvoor de uitdrukkingen eindig zijn)

$$\arctan \left(\frac{x}{y} \right) = \arctan \left(\frac{z}{w} \right) + \arctan \left(\frac{xw - yz}{yw + xz} \right).$$

c) Leid hier vervolgens door slimme keuzes van w, x, y, z uit af

dat:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + \arctan \left(\frac{1}{3} \right); \\ \arctan \left(\frac{1}{2} \right) &= \arctan \left(\frac{1}{7} \right) + \arctan \left(\frac{1}{3} \right); \\ \arctan \left(\frac{1}{3} \right) &= \arctan \left(\frac{1}{7} \right) + \arctan \left(\frac{2}{11} \right); \\ \arctan \left(\frac{2}{11} \right) &= \arctan \left(\frac{1}{7} \right) + \arctan \left(\frac{3}{79} \right). \end{aligned}$$

d) Leid hieruit Eulers opmerkelijke formule voor π af:

$$\pi = 20 \arctan \left(\frac{1}{7} \right) + 8 \arctan \left(\frac{3}{79} \right). \quad (2)$$

e) Vul nu zes termen van de reeksontwikkeling (1) in (2) in (er komen dan dus in totaal twaalf termen) en benader op die manier π numeriek. Hoeveel decimalen komen zo goed uit? Let op: het gebruik van een rekenmachine is toegestaan.

N.B. Euler vond naar eigen zeggen de eerste 20 decimalen van π in een uurtje rekenen, zonder rekenmachine!

Opgave 10: Stelsel met een singuliere matrix oplossen

M.A. Botchev, Universiteit Twente

Gegeven is een lineair stelsel vergelijkingen

$$Ax = b, \quad A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

waar A een gegeven reële symmetrische matrix is, b een gegeven rechterlid vector is en x een te bepalen vector is. De matrix A is singulier en het is bekend dat

$$Av = 0 \Leftrightarrow v = \alpha c, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}^n,$$

waar c een bekende vector is.

a) Geef een vergelijking voor A , b en c , zonder variabelen zoals x , waaraan A , b en c voldoen dan en slechts dan als stelsel (3) oplossingen heeft.

b) Stel dat (3) oplossingen heeft. Geef een stelsel

$$\tilde{A}x = \tilde{b}, \quad \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n,$$

zodat de matrix $\tilde{A}$ niet-singulier is en de vector $x = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$ een oplossing van (3) is.

Opgave 11: Het ene verschil is het andere niet

A. Smeets, Universiteit Leuven

Zij n een natuurlijk getal, zij p een priemgetal en zij d een deler van het getal $(n+1)^p - n^p$. Bewijs dat $d-1$ deelbaar is door p .

Subsidiënten

LIMO 2007 werd mede mogelijk gemaakt door Hewitt, Zanders, Deloitte, Optiver, Thales, Universiteit Twente, Universiteit Utrecht, NWO, KWG, KNAW, MRI en het Stieltjes instituut.

Bennie Mols*Kijkduinstraat 121-2
1055 XW Amsterdam
bmols@wanadoo.nl***Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006**

Op zoek naar luchtdicht verpakkingsfolie

Dun plastic verpakkingsfolie wordt veel in de levensmiddelenindustrie gebruikt, bijvoorbeeld om vleeswaren te beschermen tegen bederf. Toch laat het altijd wel een beetje lucht door. Een nieuw idee is om in het folie een soort druppeltjes te stoppen die reageren met de langzaam doordringende lucht. Zo wordt het vlees nog beter afgeschermd tegen de bedervende buitenlucht.

Wie in de supermarkt een stuk kipfilet of een biefstukje koopt, kijkt eerst goed naar het vlees. Ziet het er wel goed uit? Een dun stukje plastic folie beschermt het vlees tegen de buitenlucht, die het vlees kan bederven. Het is een volledig doorzichtig, rekbaar plastic folie, vaak niet meer dan vijfhonderdste millimeter dik. Chemieconcern DSM zoekt naar een manier om dit soort plastic verpakkingsmateriaal nog luchtdichter te maken.

Omdat de consument het vlees wil zien, moet het verpakkingsmateriaal volledig doorzichtig zijn. Helaas blijken dunne, doorzichtige verpakkingen in de praktijk ook sneller het zuurstof uit de lucht door te laten. Hoe meer zuurstof het verpakte product bereikt, hoe sneller het product bederft. Daar is niet eens zo veel zuurstof voor nodig. Voor veel producten is de toelaatbare zuurstofconcentratie niet groter dan tien deeltjes op een miljoen.

Het idee van DSM is nu om in het dunne

verpakkingsfolie kleine, niet-zichtbare druppeltjes aan te brengen die reageren met het zuurstof. De druppeltjes — met afmetingen van tien nanometer of kleiner, en gemaakt van een polymeer — dienen zo als een afvangmateriaal. Zo moet er minder zuurstof het product bereiken dan zonder de druppeltjes. Bij een reactie van het afvangmateriaal met het zuurstof, verdwijnen zowel het zuurstof als het afvangmateriaal. Het is dus duidelijk dat het afvangmateriaal een keer op raakt. Gebeurt dat, dan heeft de buitenlucht vrij spel en kan het er makkelijk doorheen. Maar het afvangmateriaal kan het proces wel lang vertragen. De houdbaarheidsdatum van het product wordt zo verlengd.

Grote vraag is nu welke verdeling van druppeltjes het beste werkt om het zuurstof af te vangen. Is het beter om overal in het folie evenveel afvangmateriaal te hebben? Of is het beter om meer afvangmateriaal aan de buitenkant te hebben, of juist aan de binnen-

kant, dicht tegen het product aan? En welke vorm moeten de druppeltjes hebben voor het optimaal afvangen?

Druppels dicht bij product

DSM had zelf al een model opgesteld bestaande uit twee wiskundige vergelijkingen die aan elkaar gekoppeld zijn: eentje voor de concentratie zuurstof in het folie en eentje voor de concentratie afvangmateriaal. Beide concentraties hangen af van de plaats in het folie en van de tijd. Het oplossen van deze twee vergelijkingen bleek echter buitengewoon lastig. Voor de wiskundigen van de Studiegroep was het daarom de uitdaging om met eenvoudigere benaderingen toch nieuwe inzichten te krijgen over hoe DSM de luchtdichtheid van het folie kan verbeteren.

Wiskundige Simon van Mourik van de Universiteit Twente: "In een eendimensionale analyse hebben we laten zien dat de tijd die het zuurstof nodig heeft om door het folie heen te dringen kwadratisch toeneemt met de diameter van de afvangdruppeltjes. Een twee maal zo breed druppeltje leidt dus tot een vier maal zo lange doordringingstijd van het zuurstof. Verder hangt die tijd lineair af van de hoeveelheid afvangdruppeltjes. Twee maal zo-

veel afvangmateriaal leidt tot een twee maal zo lange doordringingstijd.”

De doordringingstijd hangt ook lineair af van de afstand tussen de buitenkant van het folie en de druppeltjes. Ofwel: het is effectiever de druppeltjes zoveel mogelijk aan de kant van het product te plaatsen. Dat laat zowel de analytische benadering als de computersimulatie zien. De concentratie zuurstof in het folie neemt af als je van de buitenkant naar de productkant gaat. Idealiter zou er geen zuurstof bij het product komen, maar in de praktijk komt er altijd wel iets bij het product. Omdat aan de productkant van het folie altijd minder zuurstof zit dan aan de buitenkant van het folie, gaat het afvangmateriaal langer mee en is het effectiever in het tegenhouden van de zuurstof. Als je juist meer afvangmateriaal aan de buitenkant van het folie plaatst, dan reageert het sneller weg en kan de zuurstof sneller door het folie heendringen.

Deze resultaten kan DSM gebruiken om de optimale druppelgrootte, de optimale hoeveelheid en de optimale verdeling te bepalen. In principe werkt de druppelgrootte dus veel meer door in de doordringingstijd dan de hoeveelheid druppels en de plaats van de druppels. Druppelgrootte en druppelhoeveelheid kan DSM makkelijk tijdens het productieproces van het folie beïnvloeden. Waar de druppeltjes precies in het folie terecht komen, valt in het standaard productieproces echter niet te veranderen. Dat kan betekenen dat het handiger kan zijn om twee op meer lagen folie op elkaar te leggen, waarbij de folielaag aan de productkant veel meer afvangmateriaal bevat dan de folielaag aan de buitenkant.

Maar hoe het werkelijke productieproces er het beste uit kan zien, zal ook afhangen van de productiekosten van het maken van grotere druppels, van het plaatsen van meer druppels en van het plaatsen van meer druppels aan de productkant van het folie.

Pannenkoeken beter dan sigaren

“We hebben ook tweedimensionale simulaties gedaan”, vertelt Van Mourik. “Tweedimensionale simulaties zijn zeer geschikt om te onderzoeken wat het effect is van de vorm van de druppeltjes. Is een ronde vorm beter, of juist een afgeplatte vorm? Kleine, langwerpige druppeltjes — een soort sigaarvorm — zijn effectiever in het afvangen dan ronde druppeltjes. Maar op hun beurt werken pannenkoekvormige druppeltjes, die met de platte kant parallel aan het folie liggen, weer effectiever dan sigaarvormige druppeltjes.”

Hoe kan dat? Een tot een pannenkoek ge-

vormd druppeltje vormt door zijn grotere oppervlak een grotere barrière voor de zuurstof dan een rond druppeltje, dat een kleiner ‘vangoppervlak’ heeft. Het pannenkoekvormige druppeltje maakt zich als het ware breder dan het ronde druppeltje zodat er minder zuurstof langs kan.

Wanneer het folie wordt gemaakt, hebben de druppeltjes automatisch een ronde vorm. Maar tijdens de fabricage kan het folie worden uitgerekt. Uitrekken in één richting leidt tot sigaarvormige druppeltjes. Uitrekken in twee richtingen geeft pannenkoekvormige druppeltjes. Zo kan DSM de vorm van de afvangdruppeltjes beïnvloeden.

Multilaags-folie

Han Slot van DSM is enthousiast over de diversiteit van de aanpakken die de wiskundigen al in één week hebben verkend. “We waren zelf wel al bezig met modelleer- en experimenteerwerk, maar de resultaten van de studiegroep hebben ons een frisse nieuwe kijk gegeven. Ze helpen ons bij het interpreteren van de experimenten die we al hebben gedaan, en bij het opzetten van nieuwe experimenten. We weten nu beter wat we wel en wat we niet moeten doen.”

De minimale tijd dat een folie moet beschermen, zal sterk gaan afhangen van de toepassing, denkt Slot. Want DSM denkt aan een reeks van toepassingen. “Flexibele displays bijvoorbeeld, hebben ook vaak een bescherming tegen zuurstof in de lucht nodig. Dan heb je een bescherming van jaren nodig. Gaat het om verpakking van voedsel, dan praat je over een minimale beschermingstijd van dagen tot maanden. Wil je voedsel nog langer verpakken, dan kies je voor blik en niet langer voor een folie.”

DSM had zelf al geëxperimenteerd met een multilaags-folie, waarbij aan de productkant het meeste afvangmateriaal zit. Slot: “De resultaten van de studiegroep hebben de voordelen van die aanpak bevestigd. Veel folies die heden ten dage al worden gebruikt, werken trouwens ook al met meerdere lagen. Soms zelfs vijf tot zeven verschillende lagen. De concentratie afvangmateriaal binnen een folie laten afhangen van de plaats, is in de praktijk geen optie. Maar het maken van meerdere lagen dunne folie op elkaar, kan nu al makkelijk.”

Om heel concreet te helpen bij het ontwikkelen van een nieuw productieproces, moeten de modellen wel nog kwantitatiever worden, vertelt Slot. Ze moeten dichter bij de praktijk gaan aansluiten. “Maar dat kun je niet in een week voor elkaar krijgen. Dat is de

reden dat we een promovendus verder naar de modellering van het probleem willen laten kijken. Er zijn nog veel vragen te beantwoorden. Uiteindelijk willen we de modellen echt kunnen valideren met onze experimenten.”

Slot verwacht dat het nog wel enige tijd zal duren eer dit soort actieve folies echt op de markt gaat verschijnen. “Het is een nieuwe ontwikkeling. Pas sinds kort is het in Europa toegestaan om met actieve kunststoffen als verpakkingsmaterialen te werken. In de VS mag dat al wat langer. Daar bestaan al kunststof bierflesjes waarin een afvangmateriaal is verwerkt.”



Yves van Gennip

Faculteit Wiskunde & Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB EINDHOVEN
y.v.gennip@tue.nl

Samenleving Lowlandsfestival

Droste-effecten en multiversa

Het Lowlandsfestival 2007 had voor het eerst twee wiskundigen onder zijn artiesten: Robbert Dijkgraaf en Hendrik Lenstra. Nieuwsredacteur Yves van Gennip ging erheen, om zelf de wiskundige groove te ondergaan.

De kwantummechanica is het gedoogbeleid van het universum. Alles mag, zolang je het maar doet voordat het waargenomen wordt. Met uitspraken van deze strekking wist theoretisch fysicus Robbert Dijkgraaf de handen van zo'n 1250 Lowlandsfestivalgangers op elkaar te krijgen de dag nadat wiskundige Hendrik Lenstra een eveneens niet onaanzienlijk publiek had ingewijd in de geheimen van Escher, het *Droste*-meisje en *La vache qui rit*.

Het cultureel festival *Lowlands*, wiens vijftiende editie met 55000 verkochte kaarten dit jaar uitverkocht was, staat vooral bekend als een muziekfestival. Toch is muziek niet het enige dat het te bieden heeft. Naast bands, cabaret, films en literair en politiek getinte lezingen, kon het publiek dat zich in het weekend van 17, 18 en 19 augustus een weg had weten te verschaffen tot het Lowlandsterrein in Biddinghuizen ook de betawetenschappen induiken.

Aan het begin van de zaterdagmiddag, klokslag half twee, nam, naar eigen zeggen, de popster carrière van Hendrik Lenstra zijn aanvang. Voor een voor hem compleet nieuw publiek van klappende, bierdrinkende en soms juichende, slaapdronken festivalgangers stak Lenstra een boeiend en toegankelijk verhaal af over hoe hij en zijn medewerkers erin geslaagd waren de witte vlek

in het midden van Eschers werk *Prententoonstelling* in te vullen door de wiskundige structuur achter deze prent te ontrafelen. Hierbij werd dankbaar gebruik gemaakt van de grote schermen die tevens de kathedervormden van waarachter Lenstra het Droste-effect uitlegde aan de hand van vele mooie plaatjes van de bekende cacaoblikken, maar ook van het kaasje *La vache qui rit* dat getooid gaat met een koe die niet alleen lacht, maar ook nog eens een geroteerde afbeelding van hetzelfde kaasje in haar oor draagt, en van een cruiseschip dat een schaalmodel van zichzelf in zijn zwembad heeft dobberen. Na afloop kreeg het publiek nog 'huiswerk' mee, dat ingeleverd kon worden en waar onder andere een thuistap mee gewonnen kon worden. Een gepast cadeau voor de festivalgangers.

Op de zondagmiddag stond het hele wachtvak bij de *Juliet*-tent vol met mensen die de lezing van Robbert Dijkgraaf wilden bijwonen. Het was zelfs zo druk dat sommigen teleurgesteld moesten worden: alle 1250 plaatsen waren gevuld. Geen vreemde in het metier van wetenschapspopularisatie wist fysicus Dijkgraaf het publiek te boeien met zijn verhaal over Einstein, Planck, de relativiteitstheorie, kwantummechanica, snarentheorie, extra dimensies en het multiversum. Wat u

ook moge denken van de vaak aan science fiction grenzende speculaties over de 'ondraaglijke lichtheid van de zwaartekracht', aantrekkingskracht hebben ze wel.

Voor degenen die best nog wel een concertje wilden overslaan om nog wat meer wiskunde tot zich te nemen, bevond zich het hele weekend ook nog een tent op het terrein met het veelzeggende opschrift "Everything you always wanted to know about math (but were afraid to ask)". Helaas stond deze tent nogal in een uithoek van het terrein. In de tent waren steeds diverse wiskundestudenten die bij al mijn bezoeken druk in gesprek waren met festivalpubliek. Helaas heb ik niet kunnen achterhalen wat precies de insteek van deze tent was, want behalve deze studenten waren er slechts enkele wiskundeboeken en een apparaat met muziek in diverse file-formaten te zien: in ieder geval was er interesse voor. Ook de mensen die bij mijn tweede bezoek voor de tent aan een tafel zaten lollies uit te delen, wisten mij niet meer te melden dan dat ze lekker in het zonnetje zaten. Een gemiste kans of de moeheidsverschijnselen die intreden na drie dagen Lowlands?

Op een evenement dat zich cultureel noemt, mogen de bètawetenschappen in het algemeen en de wiskunde in het bijzonder niet ontbreken. Chapeau voor de mensen die dat onderkend hebben en die er hopelijk ook de komende jaren weer voor zorgen dat het muziekminnende festivalpubliek de tel niet kwijt raakt.





Boven: Hendrik Lenstra op een gigantisch spreekgestoelte: de illustraties bij zijn lezing werden op de zijanten geprojecteerd. Onder: de wiskundetent, waar wiskundestudenten de festivalgangers konden bijstaan in hun wiskundige noden.

Wim Berkelmans

Vrije Universiteit Amsterdam

Faculteit der Exacte Wetenschappen, afdeling Wiskunde

De Boelelaan 1081a

1081 HV Amsterdam

berkelm@few.vu.nl

Onderwijs

2011: IMO in Nederland

Het is groot nieuws dat de Internationale Wiskunde Olympiade (IMO) naar Nederland komt. Zowel de internationale aandacht als de impact die deze gebeurtenis kan hebben op leerlingen van ons middelbaar onderwijs en op het onderwijs zelf moet niet worden onderschat. Het is daarom van het grootste belang dat een dergelijk evenement vlekkeloos verloopt. Dat dit heel wat voeten in aarde zal hebben, kunnen we concluderen uit het verslag van Wim Berkelmans, die de IMO van dit jaar in Vietnam bezocht. Hij is directeur van de stichting Vierkant voor Wiskunde en is verder aan de Vrije Universiteit verbonden als wiskundeontwikkelaar voor de onderbouw. Hij is lid van het organisatiecomité voor de IMO 2011. Zijn zoon was deelnemer aan de competitie in Vietnam.

De Stichting Nederlandse Wiskunde Olympiade (SNWO) gaat de Internationale Wiskunde Olympiade (*International Mathematical Olympiad*, IMO) in 2011 in Nederland organiseren. Een belangrijke aanleiding hiervoor is het feit dat de SNWO in 2011 vijftig jaar bestaat. Het bestuur van de SNWO heeft mij gevraagd om mee te doen met de initiatiefnemers van dit plan en mee te gaan naar Vietnam, waar de IMO in juli plaats vond, om een gedetailleerd beeld te vormen van de organisatie van de IMO.

De IMO is niet zomaar een wedstrijd voor scholieren. Het is het hoogtepunt van alle competities die wereldwijd gehouden worden in het oplossen van wiskundeproblemen door scholieren. Daarnaast is het een grote internationale conferentie, waar zo'n honderd landen aan deelnemen. In veel landen staat de IMO in hoog aanzien en de wiskundegemeenschap kijkt jaarlijks met veel belangstelling naar wat er op de IMO gebeurt.

Ook in Vietnam was dit het geval. De IMO 2007 werd dan ook afgesloten door de president van de Republiek Vietnam en de voorzitter van het organisatiecomité was de staatssecretaris van Onderwijs. Voor veel landen staat er heel wat op het spel, reden waarom er veel energie gestoken wordt in de voorbereiding en de begeleiding van hun team.

Het Nederlandse team

De IMO is een wedstrijd waaraan per land maximaal zes deelnemers meedoen. Ook Ne-

derland zendt jaarlijks een team van zes scholieren naar de IMO. Dit jaar waren dat Wouter Berkelmans, Raymond van Bommel, Milan Lopuhaä, Kyndylan Nienhuis, Tim Reijnders en Wouter Zomervrucht (zie de website www.wiskundeolympiade.nl). Teamleider was Quintijn Puite (de bondscoach van Jong Oranje in de wiskunde) en *deputy leader* Birgit van Dalen. Verder ging ik dit jaar mee om de organisatie van de IMO te bestuderen en Floris van Doorn mocht mee als zevende scholier. Voor hem is het een leuke en leerzame ervaring, die hij kan gebruiken als hij zich volgend jaar in het Nederlandse team weet te plaatsen.

Dit jaar kon Nederland zijn team extra voorbereiden dankzij subsidie uit het bedrijfsleven (Saen Options). De voorbereiding bestond dit jaar uit:

- Een weekend training in november direct na de prijsuitreiking van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade;
- Een aantal vrijdagen training in Eindhoven;
- Wekelijkse inleveropgaven per e-mail;
- Direct na de eindexamens een week training in Valkenswaard. Deze week werd afgesloten met een test. Op basis van de resultaten van de test en de wekelijkse inleveropgaven is het team van zes deelnemers geselecteerd;
- Voor de IMO een week training in Hanoi.

De voorbereiding van de IMO

De wedstrijd bestaat uit zes opgaven die in twee opeenvolgende dagen gemaakt worden.

Hiervoor krijgen de deelnemers per dag vier en half uur de tijd. De selectie van deze zes opgaven komt tot stand na een wekenlange selectieperiode. Tijdens de laatste fase van dit proces is een belangrijke rol weggelegd voor de teamleiders van de deelnemende landen, die op dat moment volledig geïsoleerd van hun teams op een aparte locatie verblijven.

1. De deelnemende landen kunnen tot eind maart kandidaat-IMO-opgaven indienen. Dit jaar stuurde Nederland zes opgaven in (vijf van de hand van Gerhard Woeginger van de TU Eindhoven en één van oud-deelnemer en -trainer Fokko van de Bult). In totaal zijn er 113 opgaven ingestuurd.

Vervolgens gaat het *Problem Selection Committee* (PSC) enkele weken aan de slag om deze longlist te reduceren tot een shortlist van zo'n dertig opgaven, gerubriceerd naar categorie (algebra, combinatoriek, meetkunde en getaltheorie) en moeilijkheidsgraad. Het PSC bestaat uit een vijftal leden. Zij moeten beoordelen of de opgaven nog niet bekend zijn, interessant genoeg zijn, niet te moeilijk of te makkelijk zijn en kunnen worden opgelost door scholieren op basis van elementaire kennis van wiskunde. Bovendien moeten van elk van de vier categorieën ongeveer evenveel opgaven op de shortlist komen. Per categorie moeten er een paar relatief gemakkelijke, enkele moeilijke en een aantal gemiddelde opgaven zijn. Omdat hiervoor zeer deskundige mensen nodig zijn, nodigt het organiserende land altijd een paar buitenlandse experts uit om zitting te nemen in het PSC. De shortlist is uiterst geheim en komt pas beschikbaar voor de teamleiders op de eerste dag van de IMO, enkele dagen voor de wedstrijd begint.

Het is een hele eer als je opgave deze shortlist haalt. Van de Nederlandse inzendingen zijn er dit jaar maar liefst drie op-



De Internationale Jury, bestaande uit de teamleiders van de 93 deelnemende landen, in stemming

gaven van Gerhard op de shortlist gezet.

2. De selectie van de zes opgaven uit de shortlist wordt uitgevoerd door de Internationale Jury, bestaande uit de circa honderd teamleiders van de deelnemende landen, waarbij de meerderheid van stemmen doorslaggevend is. Dit is een zware klus die in drie dagen wordt uitgevoerd. Vanaf het moment dat de Jury over de shortlist beschikt, is communicatie met de buitenwereld verboden. De Jury kiest uit de shortlist de zes meest geschikte opgaven. Eerst wordt nogmaals gekeken of er bekende opgaven bij zitten. Deze worden direct uit de shortlist verwijderd. Daarna worden kandidaten voor de twee relatief gemakkelijke, de twee moeilijke en de twee gemiddelde opgaven gekozen. Daarna vallen er door stemmen telkens opgaven af. Uiteindelijk blijven er zes opgaven over, die voldoende variëren over de verschillende categorieën en moeilijkheidsgraden.
3. Zodra de zes opgaven bekend zijn, buigt de Jury zich over de exacte formuleringen in het Engels, waarbij er zowel wiskundige als taalkundige aanpassingen worden gedaan.
4. Vervolgens worden ze vertaald in het Russisch, Duits, Frans en Spaans.
5. Ten slotte vindt door de verschillende teamleiders de vertaling plaats in een vijftigtal talen.
6. De wedstrijd kan beginnen!

In Vietnam was op vrijdag 20 juli de eerste Jury Meeting, op maandag 23 juli kwamen de deelnemers aan, op dinsdag 24 juli was de opening en woensdag 25 en donderdag 26 juli waren de wedstrijddagen. Zoals gezegd, het is een hele eer als je opgave op de short-

list komt, maar het is natuurlijk nog een veel grotere eer als je opgave een van de zes geselecteerde opgaven is. En dat overkwam Gerhard dit jaar. Een van zijn drie opgaven uit de shortlist werd geselecteerd voor de IMO. Maar niet alleen dat; de Jury vond deze opgave de mooiste en meest interessante opgave (van de moeilijke) van de IMO 2007. Zie kader voor deze opgave (IMO 2007-6).

De zes opgaven die jaarlijks worden geselecteerd zijn van hoog niveau, zowel wat schoonheid als wat moeilijkheidsgraad betreft. Menig professioneel wiskundige zal moeite hebben om deze opgaven op te lossen binnen de beperkte tijd.

De eigenlijke wedstrijd

De wedstrijd begon beide dagen om 9 uur. De 520 deelnemers uit 93 landen waren verdeeld over twee grote zalen van het National Conference Centre in Hanoi. Ze hadden elke dag vier en half uur de tijd. Dat lijkt lang, maar de opgaven zijn erg pittig en die tijd hebben ze hard nodig, temeer omdat ze hun oplossingen netjes moeten opschrijven. Tientallen surveillanten (invigilators) zien toe op een ordelijk verloop van de wedstrijd. Als een deelnemer bijvoorbeeld naar de toilet wil, steekt hij een daarvoor bestemde kaart op. Een invigilator komt hem dan ophalen en begeleidt hem naar de toiletten.

De Jury heeft ook nog even bemoeienis met de wedstrijd. Het eerste half uur van elke wedstrijddag hebben de deelnemers de gelegenheid om via een fax vragen te stellen aan de Jury. Meestal gaat het om nadere uitleg van de (vertaalde) tekst. Soms moeten begrippen uitgelegd worden. Dit kunnen begrippen als "omgeschreven cirkel" zijn, die niet bij alle deelnemers bekend zijn.

De correctie van de uitwerkingen

Alle uitwerkingen van de opgaven, inclusief het kladpapier, worden verzameld om naar de teamleiders (dit jaar in Ha Long Bay) te worden gebracht, waarbij eerst alles wordt gescand. Op deze manier gaat niets verloren en zijn latere aantekeningen op de uitwerkingen te onderscheiden. De uitwerkingen worden zowel door de eigen teamleiders en deputies nagekeken als door een team van zogenaamde 'coördinatoren'. Dit is een team van tientallen, in dit geval Vietnamese, wiskundigen die als een tweede corrector optreden. Het probleem voor de coördinatoren is natuurlijk dat de uitwerkingen in de taal van de deelnemer zijn geschreven. Sommige coördinatoren hebben kennis van deze taal, bijvoorbeeld omdat zij promotie-onderzoek doen in het betreffende land. Maar vaak zijn ze de taal niet machtig. Toch blijken ze in staat te zijn om een redelijk oordeel te vormen over de kwaliteit van de uitwerking, voornamelijk dankzij de wiskunde die (op enkele uitzonderingen na)

Programma Vietnam

19 juli	aankomst teamleiders
20-23 juli	Jury Meeting
23 juli	aankomst teams en deputy leaders
24 juli	opening
25-26 juli	wedstrijd
27-28 juli	nakijken, teams hebben excursies
29 juli	excursies
30 juli	afsluiting
31 juli	vertrek

Resultaten IMO 2007

Wouter Zomervrucht (18 jaar)	16 punten	bronzen medaille
Wouter Berkelmans (16 jaar)	12 punten	eervolle vermelding
Milan Lopuhaä (17 jaar)	12 punten	eervolle vermelding
Tim Reijnders (18 jaar)	10 punten	eervolle vermelding
Raymond van Bommel (15 jaar)	10 punten	
Kyndylan Nienhuis (18 jaar)	5 punten	

IMO 2007, Opgave 6

Laat n een geheel getal zijn, $n > 0$. Beschouw

$$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

als een verzameling van $(n+1)^3 - 1$ punten in de driedimensionale ruimte.

Bepaal het kleinst mogelijke aantal vlakken zodanig dat deze vlakken samen wel alle punten van S bevatten, maar niet het punt $(0, 0, 0)$.

taalonafhankelijk is. De wiskundige formules zijn zelfs in het Chinees bijna identiek aan die in een Engelse tekst. Nadat de coördinatoren en de teamleiders de uitwerkingen hadden bestudeerd, werd in onderling overleg tussen teamleider en deputy enerzijds en twee coördinatoren anderzijds het aantal behaalde punten vastgesteld.

Terwijl de teamleiders het werk nakeken, hadden de deelnemers enkele dagen excursies. Elk team had een eigen lokale gids, die de deelnemers (doorgaans in het Engels, Russisch of Spaans) hielp en begeleidde. In Vietnam waren dit studenten met een goede beheersing van een vreemde taal. Zij hadden bovendien als voorbereiding training gehad in kennis van de geschiedenis en cultuur van hun eigen land en wisten ook van alles over het land van hun gasten.

De IMO is een individuele wedstrijd, maar de scores van de deelnemers per land worden

altijd opgeteld om te zien welk land het het beste heeft gedaan. De laatste jaren is China de onbetwiste kampioen. Nederland eindigde in 2006 van de 90 landen op de 62ste plaats. Dit jaar hebben we het beter gedaan met een 56ste plaats. De individuele resultaten staan in het kader linksboven.

IMO 2011 in Nederland

Elk jaar vindt de IMO in een ander land plaats. In 2008 zal dat in Madrid in Spanje zijn en in 2009 in het Duitse Bremen. We hoopten dat de IMO in 2010 niet ook in Europa zou plaatsvinden. Gelukkig stelde Kazachstan zich kandidaat voor dat jaar, zodat de kandidatuur van Nederland in 2011 niet het bezwaar had van "weer in Europa".

Ter ondersteuning van ons voorstel om de IMO in 2011 in Nederland te organiseren hebben we in Vietnam een presentatie gehouden aan de Advisory Board van de IMO. Doorgaans

wil men vier jaar van tevoren vaststellen welk land over vier jaar gastheer van de IMO zal zijn. Dus dit jaar werd het gastland voor 2011 gekozen. Er waren geen andere kandidaten voor 2011, wat niet wil zeggen dat het een gelopen race was. De Advisory Board moet er wel vertrouwen in hebben dat het kandidaatland in staat is een goede IMO te organiseren. Het gaat dan om zowel organisatorisch kwaliteiten als financiën. Het organiseren van een IMO is namelijk niet goedkoop. Dit komt voornamelijk omdat het gastland alle kosten, behalve de kosten voor de heen- en terugreis, van de gasten voor zijn rekening neemt.

Op basis van onze presentatie heeft de Advisory Board unaniem besloten om de Jury Meeting te adviseren Nederland de IMO 2011 te gunnen. Tijdens de laatste Jury Meeting is dit advies met grote meerderheid door de teamleiders opgevolgd.

Dus in 2011 is de IMO in Nederland. Maar voor het zover is moet er nog heel wat gebeuren. We moeten bepalen waar in Nederland de IMO plaats vindt en we hebben heel veel sponsorgeld nodig. Verder zijn er heel veel mensen nodig voor de voorbereiding van de Olympiade en tijdens de IMO. In Vietnam hadden ze een adresboekje gemaakt met namen en telefoonnummers van alle medewerkers. Dat waren er meer dan duizend! Wij hopen het met wat minder mensen te kunnen doen, maar enkele honderden mensen zijn zeker nodig. Denk alleen maar eens aan het aantal gidsen: per land één, dus dat zijn al bijna honderd gidsen.

Referenties

1. Tom Verhoeff, 'The 43rd International Mathematical Olympiad: A Reflective Report on IMO 2002', www.win.tue.nl/~wstomv/publications/imo2002report.pdf

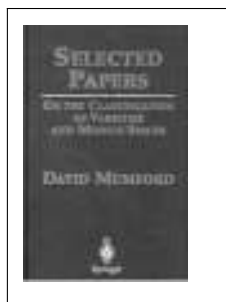


Links: Birgit en Quintijn overtuigen de twee Vietnamese coördinatoren van een goede oplossing door een van onze teamleden. Rechts: Het Nederlandse team + Floris, v.l.n.r. Raymond, Tim, Milan, Wouter Z. (met medaille), Wouter B., Floris en Kyndylan.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



David Mumford
Selected papers.
On the classification of varieties and moduli spaces

New York: Springer Verlag, 2004

796 p., prijs €99,95

ISBN 0-387-21092-6

This book contains a selection of the papers of David Mumford (born in 1937) in algebraic geometry. Even today, his papers are a rich source of information, of truly new ideas, and of inspiration. A complete edition of all of his papers in algebraic geometry would be most welcome. The present volume, 'selected papers', alas, brings together just over half of his papers published in the period 1959–1982. Three commentaries by David Gieseker, Georg Kempf and Herbert Lange, and Eckart Viehweg, respectively, complete the collection. These describe aspects of Mumford's work and of developments in algebraic geometry.

Meeting Mumford and attending lectures by him always meant an encounter with sparkling new ideas. The same holds true for his papers. Each of the ten books and fifty papers Mumford wrote in the years 1959–1982, when he was active in algebraic geometry, carries fundamentally new insights, such as:

- revival of old ideas and techniques, long forgotten, and reactivated by Mumford in a totally new spirit,
- unexpected insight, questions, and directions in mathematics, and
- a deep understanding of the studied material, developing a sure and precise grip on the essence of topics.

The above is illustrated by a conversation I had with Alexander Grothendieck on a beautiful morning in January 1961 on our way to attend a course by Serre. Grothendieck spoke excitedly about a young American mathematician named Mumford developing a theory that was very different from ideas current in Paris in those days. Grothendieck recognized the depth and the impact of those ideas. Let us recall the question and the issue.

In algebraic geometry (from Riemann on), we have tried to understand moduli ('parameters on which a geometric structure depends'), especially in the case of algebraic curves. It was fashionable in Paris in those days to describe constructions by first defining a functor, and then showing that the functor is representable, a beautiful and successful method, of which Grothendieck was one of the great initiators. However, not everyone followed this method; see the talk of Samuel in Séminaire Bourbaki (Exp. 228 in 1961/62), where we find a description of Igusa's construction of the moduli space of curves of genus two in all characteristics (*Ann. Math.* **72** (1960), 621–649). Samuel starts by saying that Igusa's construction does not follow from representing a functor. At that time we did not understand well what to do, and it was Mumford who showed us the way. (*Existence of the moduli scheme for curves of any genus*, PhD-thesis Harvard University 1961). His work not only (again) laid the foundations for 'geometric invariant theory', it also gave us back that beautiful geometric feeling that was getting more and more lost in the algebraization and the functorialization of geometry.

In 1962 Mumford showed us a different aspect of his way of thinking and feeling. This time he did not present a breathtaking

new theory, but considered a question ('completeness of families'), which had remained unsolved in the Italian geometry of the first half of the twentieth century. The question was to see whether a universal family (a moduli scheme) of certain space curves is reduced at its generic point. Modern terminology helped in phrasing the problem in this way, but the theory of schemes did not answer the question. In his 'Further pathologies in algebraic geometry' (*Amer. Journ. Math.* **84** (1962), 642–648) Mumford performed a startling computation. He showed that a maximal family of space curves of degree 14 and genus 24 has dimension at most 56, while the tangent space at the generic point to the moduli scheme of such curves has dimension at least 57. This four-page computation shows the virtuoso abilities of a daring young geometer. It is almost unbelievable that someone could come up with such an idea, and then also have the courage to perform this complicated computation to a final conclusion.

Certainly, Mumford was 'standing on the shoulders' of another great man. I witnessed Zariski saying at lunch at the Harvard Faculty Club: "you young mathematicians prove such wonderful theorems". Not only the stimulating admiration of Zariski, also his insight and teaching in algebraic geometry laid the foundations of a school of algebraic geometry that would produce many excellent mathematicians, amongst whom several Fields Medalists.

In the preface of the present volume Mumford writes: "So often, new ideas come out of a casual conversation . . .". Certainly that is true for many of us when Mumford was the other person in the conversation. He was very generous with his ideas, although it was not always easy to keep pace with the speed and depth of his insight.

This is also present in his writing. His style is unique and fascinating. In a period of time when writing mathematics was more and more done in a way where every symbol had many indices, where trees of definitions and concepts were difficult to climb, Mumford found a mathematical language that is clear, and leads you straight to the central idea, without losing precision. In reading Mumford you'd better have a piece of paper and pencil at hand, because many arguments have to be worked out in greater detail by the reader himself, only to discover at the end that the author is correct, that he must have thought through all details of the situation that is being considered. This alone already makes reading Mumford's papers fascinating. In addition, next to all the new theory we find remarks that can be used as a starting point for new research.

Let me give just one more or less randomly chosen example. In 'An algebraic surface with K ample...' (*Amer. Journ. Math.* **101** (1979), 233–244) Mumford constructs the first example of a 'fake projective plane' (A fake projective plane is a non-singular complex surface that is not the complex projective plane but has the same Betti numbers as the complex projective plane.) Mumford writes in the introduction of that paper: "But it seems a difficult matter to find some way of enumerating all such surfaces." Indeed difficult, but after many more examples were found (Ishida, Kato, Keum), more than 25 years later, a complete classification is available (Gopal Prasad, Sai-Kee Yeung, 'Fake projective planes', *math.AG/0512115*). This is just one little example of the impact of Mumford's ideas.

A complete survey of developments resulting from ideas by Mumford would not only be vast, but also produce a wonderful

vista. His pioneering work on many aspects of algebraic geometry, his theories, his examples, his deep insight, led to many new developments. And the possibilities of further research based on his ideas are still not exhausted.

The scientific career of David Mumford up to now can be divided into the period 1959–1982, research in algebraic geometry, and 1983–present, research in vision. On the verge of his transition from the first to the second period, I was fortunate enough to attend two talks that he gave at the University of Warwick. The first was a masterpiece, a survey of classes on moduli spaces of curves, a topic in which he contributed so many new ideas. The audience, specialized algebraic geometers, were dazzled by the broad new ideas, the insight, but when we looked somewhat puzzled David said something along the lines of: "this was perhaps not all yet well documented, but in any case this is what and how it should be, one should have some hope, have no fear, and say what should be true" (certainly his words were better chosen). This, for me, was a once in a lifetime experience. A few days later Mumford gave a talk on vision. The room was packed. Certainly the talk was a beautiful survey of a large field. But was this the same person talking? This time we listened to a researcher on the verge of a period of new ideas.

But let us get back to the volume under review. Material in this volume is brought together in three parts, each with commentaries: *Geometric invariant theory and moduli of curves*, 9 papers and a commentary by David Gieseker; *Theta functions and the moduli of algebraic varieties*, 12 papers and a commentary by George Kempf and Herbert Lange; *The classification of surfaces and other varieties*, 9 papers and a commentary by Eckart Viehweg.

It seems artificial to split up a connected field in this way. The result is that papers describing the same method for different objects appear in different sections. It is not clear why *all* papers by Mumford from his algebraic geometry period should not be published. A chronological order would have been much better. Important papers are missing, such as the influential paper by Deligne and Mumford from 1969. Also missing are papers where hidden ideas cry out for further study; it would have been wise to incorporate such papers, to put the focus on ideas that could lead to new developments.

The volume contains five different lists of references. No two agree. There are painful mistakes such as page numbers that are omitted or wrong; names that are misspelled; references that are unsystematically abbreviated, even within the same list; papers from the volume itself that are referred to by a different title. It would have been a simple and very useful service to scholars to check all biographical details and to make the lists in the volume correct and uniform. As it is, the present volume is of little use for checking biographical data. It would also have been easy and very useful to start every reproduced paper with the exact biographical data.

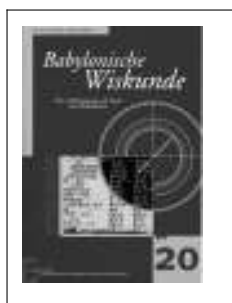
From the present volume it is hard to find out which questions asked by Mumford have been answered and which have led to new developments.

The lead could have been taken from what David Gieseker, in his commentary, writes on page 9: "Mumford's ideas have been greatly influential in algebraic geometry. [...] Many algebraic geometers have been strongly influenced by Mumford's papers. Yet the ideas in these papers are far from exhausted. Young algebraic geometers would do well to study these papers. They contain a

wealth of ideas waiting to be developed."

it could also have been taken from the concluding words of Mumford at the end of his introduction to this volume: "When I was a student in the 1950s, I doubt there were more than a dozen or so active researchers in the field. Now it is a river in full flood. I am sure there are marvelous things waiting to be uncovered. To everyone in the field, good luck in this exciting enterprise."

Frans Oort



M. Kindt, A. van der Roest
**Babylonische Wiskunde
een verkenning aan de hand van
kleitabletten**

Reeks: Zebra-reeks, 20

Utrecht: Epsilon, 2005

56 p., prijs €9,00

ISBN 90-5041-090

In dit boek brengen de auteurs de wiskunde onder de aandacht die in de laatste 3000 jaar voor onze jaartelling in Mesopotamië, het huidige Irak, bedreven werd. Dit boek, evenals de overige delen van de Zebra-reeks, is in eerste instantie geschreven voor de hoogste leerjaren van het vwo en is bedoeld om door deze groep leerlingen zelfstandig doorgewerkt te worden. De vele opgaven, die soms iets te veel van het goede zijn en die af en toe iets te ver van het onderwerp afdwalen, getuigen hiervan.

De wiskunde van de Babyloniërs wordt in het boek behandeld aan de hand van de vele bewaard gebleven kleitabletten waarop berekeningen in spijkerschrift worden aangetroffen. Naast een spijkerschrift maakten de Babyloniërs ook nog gebruik van een zestigtalig stelsel om getallen uit te drukken. In drie hoofdstukken wordt de lezer bijgebracht hoe de Babyloniërs in dit talstelsel getallen en breuken noteerden en hoe ze allerlei rekenkundige operaties uitvoerden, hoofdstukken die na het weglaten van een aantal pittige opgaven en bij voldoende begeleiding ook zeer geschikt zijn voor lagere leerjaren van het havo en het vwo. In de hoofdstukken die hierop volgen is meer wiskundige bagage, met name op het gebied van algebra, vereist. Zo wordt er in het vierde hoofdstuk stilgestaan bij het algoritme dat de Babyloniërs vermoedelijk gebruikten om irrationale getallen te benaderden. Uit het vijfde hoofdstuk blijkt dat de Babyloniërs ook zeer bedreven waren in het oplossen van stelsels vergelijkingen. Hierbij spelen, evenals bij het vermenigvuldigen van getallen, kwadraten van getallen een belangrijke rol. De Babyloniërs waren ook thuis in de meetkunde: ze beschikten over de stelling die later naar Pythagoras is vernoemd en waren ook in staat om oppervlakten van trapezia te berekenen. Het voorgaande komt aan bod in het zesde hoofdstuk, dat daarnaast nog diverse opgaven bevat die gemaakt kunnen worden door leerlingen van lagere leerjaren.

In het laatste hoofdstuk wordt er uitgebreid stilgestaan bij de Plimpton 322, de bekendste kleitablet. Uit deze kleitablet blijkt dat de Babyloniërs in staat waren om grote tabellen met pythagoreïsche drietallen te maken.

Kort samengevat acht ik het boek zeer geschikt om, wel na het maken van een selectie van hoofdstukken en opgaven, voor diverse doeleinden ingezet te worden in de dagelijkse onderwijspraktijk van zowel het voortgezet als het hoger onderwijs. Daarnaast

is het ook een prachtig boek voor een ieder die geïnteresseerd is in de wiskunde, met name de geschiedenis van de wiskunde.

P.J.G. van Loon



R.A. Bailey

**Association schemes
Designed experiments, Algebra and
Combinatorics**

Series: Cambridge Studies in Advanced Mathematics (No. 84)

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

387 p., prijs £50,00

ISBN 0-521-82446-X

Dit boek gaat over de rol van associatieschema's bij statistische proefopzetten. Het probeert een brug te slaan tussen de algebraïsche kant van associatieschema's en de statistische kant van proefopzetten. Ongeveer vijftig jaar geleden introduceerde R.C. Bose met zijn co-auteurs associatieschema's om de wiskundige kant van proefopzetten te onderbouwen en ontwikkelen. Sindsdien zijn associatieschema's van dienst gebleken op compleet andere terreinen zoals coderingstheorie, meetkunde en groepentheorie en is de theorie een eigen leven gaan leiden. Slechts weinigen van diegenen die bekend zijn met associatieschema's zullen het fijne – of zelfs maar iets – weten van de verbanden met de statistiek van proefopzetten waar het uiteindelijk allemaal mee is begonnen. Anderzijds is, althans volgens de auteur, onder proefopzetters weinig bekend over associatieschema's, terwijl deze van essentieel belang zijn voor de statistische eigenschappen van proefopzetten. Onbekendheid met, danwel angst voor de algebra lijkt hier een rol te spelen. Het volgende citaat uit het boek (over stelling 5.2 dat een cruciaal verband geeft tussen variantie en relatief klasse) geeft een goed beeld van de bestaande kloof:

"Theorem 5.2 shows why partially balanced incomplete-block designs were invented. To a combinatorialist the pattern of concurrences which defines partial balance is interesting. To a statistician, the pattern of variances demonstrated by Theorem 5.2 is important, far more important than combinatorial patterns. Some statisticians are puzzled that in general incomplete-block designs the pattern of variances of simple contrasts does not match the pattern of concurrences. The technical condition about p_{ij}^k in the definition of association scheme is there precisely to give Theorem 5.2. The irony is that some statisticians who are interested in the pattern of variances reject the p_{ij}^k condition as "of no importance".

Het boek, dat goed leesbaar is, geen hoog ingangsniveau vereist en ook opgaven bevat, is als volgt opgebouwd. In de eerste twee hoofdstukken worden associatieschema's en de Bose-Mesner algebra geïntroduceerd. In hoofdstuk 3 worden constructiemethodes van associatieschema's gegeven. Vele van de hier geconstrueerde schema's zijn imprimitief, en deze laat men normaliter links liggen. Het zijn echter vaak deze schema's waarop praktische proefopzetten zijn gebouwd. In hoofdstuk 4 worden block designs en de bijbehorende statistiek behandeld. Hoofdstuk 5 geeft de verbanden tussen block designs en associatieschema's, en hoofdstuk 6 gaat over partities. De auteur beschouwt deze eerste zes hoofdstukken als het hart van het boek. Hoofdstuk 7 behandelt meer gecompliceerde proefopzetten, terwijl in hoofdstuk 8 cyclische designs worden veralgemeend met behulp van groepen.

Opgemerkt zij dat eerder geen groepentheorie gebruikt is, om de statistici over de brug te krijgen. Hoofdstuk 9 gaat over posets en bijbehorende blokstructuren. Kennelijk gebruikten de statistici deze al geruime tijd, voordat ze aangegrepen werden om nieuwe associatieschema's te maken. Hoofdstuk 10 behandelt deelschema's, quotiëntschema's, en duale schema's, terwijl hoofdstuk 11 handelt over de partiële ordening van associatieschema's op een vaste verzameling. De laatste twee hoofdstukken bevatten enerzijds een blik op mogelijk toekomstig werk in dit gebied, en anderzijds een historisch overzicht.

Al met al is het een nobel streven van de auteur om de algebraïsche kant van associatieschema's en de statistische kant van proefopzetten bij elkaar te laten komen. Het boek is ook zeker geslaagd om een brug te slaan. Het is echter de vraag hoevelen deze brug over zullen gaan om een kijkje aan de andere kant te nemen. Enerzijds zal de statistische kant voor vele geïnteresseerden in associatieschema's nog altijd niet (en misschien nooit) aantrekkelijk worden. Als men echter geïnteresseerd is in waar combinatorische designs nu praktisch bruikbaar zijn, dan biedt dit boek de nodige waardevolle achtergrondinformatie. Andersom lijkt het mij onwaarschijnlijk dat vele statistici de brug over zullen gaan, want de algebra (al is het relatief eenvoudige) blijft ook in dit boek een grote rol spelen. Maar dit doet niets af aan het feit dat de auteur er in geslaagd is een goede gelegenheid te bieden die er voordien nauwelijks of niet was.

E. van Dam



L. Schneps (ed.)
Galois Groups and Fundamental Groups

Mathematical Sciences Research Institute Publications 41

Cambridge: Cambridge University Press, 2003
467 p., prijs £50,00
ISBN 0-521-80831-6

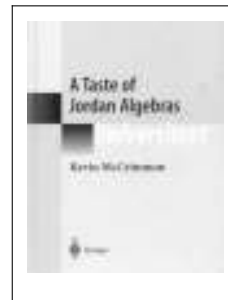
Voor diegenen die geïnteresseerd zijn in fundamenteelgroepen en overdekkingen van algebraïsche krommen, is er de laatste jaren veel interessante literatuur verschenen. Zo leverde Bas Seinhorens SGA-project een prachtige nieuwe uitgave op van SGA 1, verscheen er bij Birkhäuser een mooie band over semi-stabiele krommen en fundamenteelgroepen, en bracht de AMS in de serie *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* in 2002 nog een deel uit over dit onderwerp. Nu is er nog deze band onder redactie van Leila Schneps.

Grothendieck gaf ons het inzicht dat Galoistheorie en de theorie van fundamenteelgroepen twee kanten zijn van dezelfde medaille. Bij dat inzicht is het niet gebleven. Tegenwoordig hebben we kindertekeningen, Grothendieck-Teichmüller theorie, anabelse meetkunde, Tannakaanse fundamenteelgroepen en differentiaal Galoistheorie, om maar een paar thema's te noemen. Een veelheid aan onderwerpen, waartussen interessante relaties en parallellen bestaan.

De hier besproken band is voortgekomen uit een speciaal semester dat in 1999 gehouden werd aan het MSRI. Een inleiding en tien artikelen, waarvan de meeste proberen een opening te maken naar een specialistisch gebied. Zeker Mochizuki, die zelf op een enorm hoog technisch niveau opereert, toont zich opti-

mistisch als hij schrijft: "The result given below (...) is interesting in that it allows one to express the fundamental phenomenon involved using elementary language that can, in principle, be understood even by high school students...". (Cursivering Mochizuki.) Een moedig standpunt, aangezien het hier gaat over het Tate vermoeden, en hoe dit zich verhoudt tot Grothendiecks anabelse vermoedens. Diezelfde moed om moeilijke theorie toegankelijker te proberen te maken vinden we onder andere terug in artikelen van Hain en Matsumoto (over Deligne-Goncharov vermoedens), van Harbater (over *patching* in verschillende contexten) en van Matzat en Van der Put (over differentiaal Galoistheorie). Daarnaast zijn er een aantal artikelen die meer exclusief gericht zijn op de experts. Al met al een rijk boek, waarin veel thema's en ideeën aan bod komen. Voor veel wiskundigen is het misschien te specialistisch om het zelf aan te schaffen, maar ik hoop zeker dat een aantal bibliotheken het in hun collectie zullen opnemen.

B. Moonen



Kevin McCrimmon
A Taste of Jordan Algebras

Series: Universitext

New York: Springer Verlag, 2004

566 p., prijs €59,95

ISBN 0-387-95447-9

Jordan algebra's werden in 1933 ingevoerd door de Duitse fysicus Pascual Jordan, met de bedoeling een nieuw formalisme in te voeren voor de kwantummechanica. De 'gewone' associatieve vermenigvuldiging had in die context geen fysische betekenis, maar het *Jordan product*, $a \bullet b := (ab + ba)/2$, had dit wel. Het resultaat is een algebra die steeds commutatief is, maar in het algemeen niet langer associatief. In plaats daarvan voldoet de algebra aan de *Jordan identiteit*, $((x \bullet x) \bullet y) \bullet x = (x \bullet x) \bullet (y \bullet x)$. Het was dan ook zeer natuurlijk om deze identiteit, samen met de commutativiteit van het product, voorop te stellen als *axioma's* voor een nieuwe klasse van algebra's, die dan later (door A.A. Albert in 1946) de naam *Jordan algebra's* kregen.

De toepassingen van Jordan algebra's hebben ondertussen de fysica ver overstegen, en vindt men bijvoorbeeld in Lie algebra's, differentiaalmeetkunde en incidentiemeetkunde. Sterker nog, in de kwantummechanica was men ontgoocheld over het feit dat er geen oneindige rij exceptionele Jordan algebra's bestaat — de enige exceptionele algebra's zijn de zogenaamde Albert algebra's, die 27-dimensionaal zijn.

Het is voor het eerst dat een boek over Jordan algebra's werd geschreven dat ook de historische evolutie van de hele theorie nauwkeurig behandelt, en Kevin McCrimmon schrijft het hele boek in een uitzonderlijk aangename stijl die ongewoon is voor wiskundeliteratuur (hetgeen misschien al blijkt uit de titel van dit boek!).

Voor de beginner die nog niet echt weet wat Jordan algebra's zijn, komt dit historisch hoofdstuk wellicht verwarrend over, en is het aan te raden om te starten bij het tweede deel, waarin de theorie heel gestructureerd wordt opgebouwd vanaf het begin. Ook hier mag de lezer zich niet laten afschrikken door de categorietaal waarin alles wordt opgebouwd, die alles er in het begin wat

moeilijker laat uitzien dan het in feite is.

In het laatste deel wordt het beroemde resultaat van Efim Zel'manov in zijn volle glorie stap voor stap bewezen — namelijk dat elke i -exceptionele priem Jordan algebra een Albert algebra is. Vanzelfsprekend vertelt dit deel veel meer dan enkel het bewijs van deze stelling; het is een mooie illustratie van het moderne denken in de theorie van de Jordan algebra's.

Het mag duidelijk zijn dat dit boek een schat aan informatie bevat over Jordan algebra's, waarvan een groot deel niet eerder op een gestructureerde wijze in de literatuur terug te vinden was. Dit boek mag dan ook niet ontbreken op de boekenplank van iedereen die rechtstreeks of indirect te maken heeft met Jordan algebra's.

Tom De Medts



O.A. Laudal en R. Piene (eds.)
The Legacy of Niels Henrik Abel
The Abel Bicentennial, Oslo, 2002

Berlijn: Springer Verlag, 2004

784 p., prijs €106,95

ISBN 3-540-43826-7

Het onderhavige boek is uitgegeven naar aanleiding van een conferentie die in juni 2002 in Oslo werd gehouden ter ere van twee eeuwen Niels Henrik Abel. Het is geen Proceedings-band, maar eerder een bonte collectie van artikelen die iets (of niets) met Abel te maken hebben en dat alles onder de licht pretentieuze titel De erfenis van Niels Henrik Abel. Het wordt gecomplementeerd met een CD-ROM met aanvullend (beeld)materiaal. Dat de twee redacteurs van de band (Laudal en Piene) algebraïsch meetkundigen zijn verklaart wellicht dat het merendeel van de artikelen van algebraïsch meetkundige aard zijn. Hoe dan ook, dat de erfenis van Abel in dat vakgebied groot is, daarover bestaat geen twijfel. De begrippen divisor, lineaire equivalentie en de Jacobiaan vinden hun oorsprong in de artikelen van Abel en in het bijzonder in de stelling die naar hem vernoemd is. Wat is de stelling van Abel? Kleiman laat in zijn bijdrage zien dat er in feite vier verschillen de nauw verwante stellingen zijn die de naam Stelling van Abel dragen: een verhelderende bijdrage. Dat veel moderne ontwikkelingen direct voorborden op deze stelling van Abel (over Abelse integralen op krommen) wordt duidelijk in een overzichtsartikel van Griffiths, maar ook in artikelen van Green en Griffiths, en van Clemens die rationale equivalentie van cycles op variëteiten tot thema hebben.

Het is moeilijk in kort bestek recht te doen aan het bonte geheel dat deze band biedt. Sommige artikelen hebben een zeer directe band met Abel; er zijn bijvoorbeeld artikelen van historische aard over het werk van Abel en sommige artikelen geven een moderne interpretatie van werk van Abel of behandelen onderwerpen die als voortzetting van Abels werk gezien kunnen worden. Bij een aantal artikelen ontbreekt een duidelijke band met Abel, is niet-Abelsheid de enige connectie met Abel, of ontbreekt zelfs iedere vermelding van Abel.

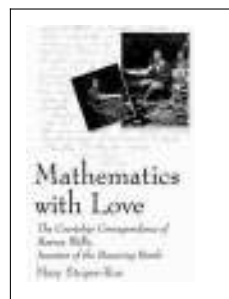
Het eerste van de artikelen met een historische inhoud is een levensschets van Abel door Arild Stubhaug, die een biografie van Abel op zijn naam heeft staan; daarop volgt een artikel van Hou-

zel van ruim 150 pagina's dat een overzicht van het werk van Abel geeft. Dat gebeurt door een gedetailleerd doornemen van de inhoud van de artikelen van Abel. Een blik op de bladspiegel verraaft al dat de auteur dicht bij Abel wil blijven in zijn analyse van de artikelen. Het al genoemde artikel van Griffiths over Abel's stelling (over Abelse integralen op krommen) is van een totaal verschillende aard en plaatst de stelling in modern (en verhelderend) perspectief.

Onder de andere historische bijdragen aan deze band vallen te noemen een artikel van Petri en Schappacher over Kronecker's verwerking van de erfenis van Abel, en een artikel van Brigaglia, Ciliberto en Pedrini over de verwerking van de erfenis van Abel in de Italiaanse School van de algebraïsche meetkunde, dat ik met plezier gelezen heb.

Maar daarnaast bevat deze band veel ander interessant werk, zoals een artikel van Manin, 'ein Alterstraum', over een niet-commutatieve versie van Kronecker's Jugendtraum, een artikel van Graber, Harris en Mazur over rationaal samenhangende variëteiten, enzovoorts. Teveel om op te noemen. Tot slot is er een bijdrage van Catanese, waarvan ik graag de laatste zin van de inleiding citeer: "In any case, in our formerly bourgeois world, idle questions with provocative answers to be defended at tea time at home or in a Café, have often motivated interesting discussions, and it is my hope to be able to do the same thing here." Wellicht heeft u het in Uw stamcafé al gemerkt.

Gerard van der Geer



Mary Stopes-Roe
Mathematics with love.
The courtship correspondence of
Barnes Wallis, inventor of the bounc-
ing bomb

New York: Macmillan, 2005

384 p., prijs £ 19.99

ISBN 1-4039-4498-6

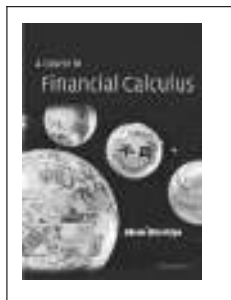
Imagine, you are a man, 35 years old, and an airship engineer. Just before you leave for Switzerland, where you are going to teach boys in a boarding school, you become acquainted with a girl of 17, who is about to start her studies at University College London. Nowadays this would lead to an increase of two mobile phone bills, but in 1922, when the story starts, writing letters was the answer, of course after having asked and received permission from the girl's father. The scene was set for an enjoyable correspondence, which led to a marriage in April 1925. The partners in writing, Barnes Wallis and his cousin Molly Bloxham, later had three children. One of them, Mary, studied the considerable collection (250 letters plus 152 pages of mathematics lessons) and through transcribing, selecting, and commenting, prepared it for publication.

The result is a gentle book, which gives an insight in the development of a relationship, and which, for mathematicians, is especially interesting because it contains a course in mathematics given by a technical practitioner to a science student who, in secondary school, had not done any physics, and whose repertoire included quadratic equations but not much more. At any rate, Molly wrote in one of her first letters (p. 10): "The only thing I didn't understand was about differentiating. How can you say

that $ds/dt = u + at$, and why for acceleration do you say d^2s/dt^2 instead of squaring both d 's or s and t ? I've never heard the expression 'differentiate' before, and I don't know what it means."

Reading the letters and the lectures, in calculus and trigonometry, is a pleasant experience. It shows that the idea of teaching mathematics in context is not an invention of the last few decades. The chain rule, for example, is illustrated by a story of Molly's three sisters, who walk at speeds which have a fixed rate to one another; and the study of velocity is prompted by the story of Jack and the amazingly growing beanstalk. But the book is interesting in many more respects. It gives a picture of England between the two World Wars, of student life at UCL and the position of women in it ("We had an awfully interesting debate at Coll. yesterday. The motion was that 'Women should not continue their professional careers after marriage'. I was for it. There were some awfully good speakers on both sides, and it was only carried by a very small majority. ..."), of the economic and military state of the country and the reconstruction of the military industry, of the language of the young (often, things are 'awfully nice' and receiving a letter or a visit is either 'topping' or 'ripping', and admiration for intelligence is mutually expressed by calling the other 'brainy'. What more shall I say? Let me quote Molly (14 Nov. 1923): "It is bed time and I must stop, though there is heaps more to say."

Jan van Maanen



A. Etheridge

A Course in Financial Calculus

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

196 p., prijs £24,99

ISBN 0-521-89077-2

Laat ik beginnen met het meest droge onderdeel van mijn boekbespreking van Etheridge's boek, en wel een korte opsomming van de hoofdstukken: 1. Single period models; 2. Binomial trees and discrete parameters martingales; 3. Brownian motion; 4. Stochastic calculus; 5. The Black-Scholes model; 6. Different pay offs; 7. Bigger models.

In het eerste hoofdstuk wordt het 'no-arbitrage' begrip al geïntroduceerd en er wordt met behulp van de scheidingsstelling van Hahn-Banach een karakterisering van dit begrip gegeven. De lezers maken in dit hoofdstuk ook kennis met equivalente kansmaten en met de notie 'risico-neutrale kansmaat'. In het tweede hoofdstuk worden veel belangrijke begrippen in een discrete tijdscontext geïntroduceerd. Zelfs het begrip 'conditionele verwachting met betrekking tot een s -algebra' wordt geïntroduceerd, en dat redelijk precies. De binomiale boom dient om ook dit begrip intuïtief te verhelderen. De lezers maken in dit hoofdstuk ook al kort kennis met de waardering van Amerikaanse opties, en in deze context wordt ook het begrip stoptijd ingevoerd. Het tweede hoofdstuk eindigt met een ouverture tot modellen in continue tijd. In het derde hoofdstuk wordt onder andere Lévy's constructie van de Brownse beweging gegeven, het reflectie principe wordt kort aangestipt en de gezamenlijke verdeling van de Brownse beweging en z 'n maximum wordt afgeleid. De 'optional

stopping' stelling wordt geformuleerd, niet bewezen. In het vierde hoofdstuk wordt een korte inleiding gegeven tot stochastische integratie en Itocalculus. Alleraardigst vind ik, dat in dit deel duidelijk wordt gemaakt dat continue aandelenprijzen met eindige p -variantie voor $p < 2$ over het algemeen arbitrage mogelijk maken! En dus wordt aannemelijk gemaakt dat het Black-Scholesmodel zo gek nog niet is. In dit hoofdstuk wordt de 'Brownian Martingale Representation Theorem' geformuleerd en schetsmatig bewezen. Natuurlijk ontbreekt ook de Feynman-Kacrepresentatie niet en zelfs wordt er kort aandacht besteed aan de achterwaartse en voorwaartse Kolmogorov partiële differentiaalvergelijking. In hoofdstuk vijf wordt het beroemde Black-Scholesmodel behandeld. In dit hoofdstuk wordt de 'financial sophistication' opgevoerd en op een uiterst zinnige manier wordt in de context van een 'foreign exchange' model over het begrip 'tradable' gesproken. Er wordt ook de nodige aandacht aan de behandeling van dividenden gegeven binnen de context van het Black-Scholesmodel. In hoofdstuk zes worden ingewikkelder opties behandeld, zoals 'lookbacks' en 'barriers', Amerikaanse opties en Aziatische opties. In hoofdstuk zeven worden modellen behandeld met meerdere aandelen, waarbij de aandelenprijsprocessen worden aangedreven door meerdere Brownse bewegingen. Er wordt kort iets gezegd over modellen met sprongen. Het onderdeel 'model error' zegt iets over 'implied volatility' en, heel belangrijk, iets over de fout die je maakt als je 'hedged' met het eenvoudige Black-Scholesmodel, terwijl het ware model veel ingewikkelder is. In inleidende leerboeken wordt zelden duidelijk gemaakt waarom het Black-Scholesmodel zo robuust is, maar dat gebeurt hier wel. Als een inleiding tot 'financial engineering' is dit boek geschikt voor studenten wiskunde en econometrie aan het begin van hun Masteropleiding. Naar mijn idee komen de 'financial engineering' aspecten niet te kort, en zeker niet als de vraagstukken uit dit boek serieus worden genomen. Zij vormen een integrerend bestanddeel van de tekst. Het boek is naar mijn idee niet erg geschikt voor zelfstudie, tenzij de lezer beschikt over een goede wiskundige rijpheid of een goede inleiding tot stochastische processen. In de handen van de juiste docenten komt dit boek echt tot leven en op deze manier maken studenten dan kennis met een schitterend stukje toegepaste wiskunde.

J.W. Nieuwenhuis



E. Peyre, Y. Tschinkel (eds.)

Rational Points on Algebraic Varieties

Progress in Mathematics, Vol. 199

Basel: Birkhäuser, 2001

462 p., prijs €104,86

ISBN 3-7643-6612-4

Dit is een bundel onderzoeksartikelen rond het thema van gehele en rationale punten op algebraïsche variëteiten. Over het algemeen gaat het hier om variëteiten van dimensie groter dan 1 die niet van algemeen type zijn, bijvoorbeeld kubische oppervlakken. Dat wil zeggen dat er in het algemeen 'veel' rationale punten te verwachten zijn.

Bijna de helft van de bundel is gewijd aan Manins vermoeden over het asymptotisch gedrag van het aantal punten van begren-

de hoogte op dit soort variëteiten. Ook zijn er verschillende artikelen over kubische oppervlakken. Daarnaast komen onder andere nog generalisaties van het Hasse principe (lokaal-globaal principe) en de Hardy-Littlewood cirkelmethode aan bod.

Dit boek is voortgekomen uit een bijeenkomst in Luminy, en hoewel het niet gepresenteerd wordt als de handelingen van dit congres, heeft het wel degelijk een dergelijk karakter: het is een verzameling losstaande, behoorlijk specialistische artikelen. De kwaliteit ligt over het algemeen hoog, en de artikelen bevatten veel fundamentele technieken en resultaten, dus voor onderzoekers in dit veld valt er veel uit te halen, maar de lezer moet geen uitgebreid overzicht van of inleiding tot de verschillende (deel)thema's verwachten.

Joost van Hamel



F. Lemmermeyer en P. Roquette
**Helmut Hasse und Emmy Noether
Die Korrespondenz 1925-1935**

Göttingen: Universitätsverlag Göttingen, 2006

301 p., prijs €32,00

ISBN 3-9386-1635-0

gratis download: <http://www.univerlag.uni-goettingen.de/hasse-noether/>

De Duitse wiskunde op het eind van de negentiende eeuw en in de jaren tot zo 1940 is bepalend geweest voor de ontwikkeling van de algebra in velerlei opzichten. Grote namen zijn hier bijvoorbeeld Frobenius, Schur, Hilbert, Noether, Hasse, zonder anderen te kort te willen doen. In onze dagen verdient Peter Roquette, een leerling van Hasse, het om voor het voetlicht gehaald te worden vanwege een grote hoeveelheid artikelen die hij schreef en nog steeds schrijft over de geschiedenis van de Duitse algebra, met name dan de algebra tot ongeveer 1940. De briefwisseling tussen Noether en Hasse is veel te belangrijk om te laten rusten en om te laten verstoffen in het Universiteitsarchief van Göttingen. Daarom was het vorig jaar voor uw recensent een volledige verrassing dat hij opeens de uitwerking van die correspondentie kreeg toegestuurd door Roquette, en wel in boekvorm! Wel, superlatieven schieten te kort. Het is fantastisch wat erin staat! Dat ligt natuurlijk niet aan de publicatie van de correspondentie op zichzelf genomen. Nee, het boek biedt buitengewoon veel meer. Wat erin staat?

Het boek begint met een in het Engels geschreven inleiding waarin Lemmermeyer en Roquette volledig, maar toch kort, het belang uiteenzetten van de correspondentie voor de ontwikkeling van de axiomatische algebra, de klassenlichamentheorie, de algebra's en hun 'arithmetics', en de functielichamen. Dan volgt een overzicht (verbatim) van een bijdrage van Van der Waerden over Emmy Noether zoals afgedrukt in *Mathematische Annalen*, Band 111 (1935) en van Leopoldt over Hasse zoals afgedrukt in *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 262/263 (1973). De correspondentie volgt daarna, het zijn 79 brieven en briefkaarten van Noether aan Hasse, en slechts drie van Hasse aan Noether. (In de richting van Hasse aan Noether is veel onvindbaar of verloren gebleken; niettemin valt uit de berichten van Noether aan Hasse op te maken, waaruit veel van de berichten van Hasse aan Noether hebben bestaan.) Alle 82 berichten staan vol met wiskunde, soms persoonlijke berichten, en met zaken die Emmy Noether

'Phantasien' noemt. Dat wil zeggen, zij poneert ideeën die later tot onderzoek hebben geleid. Het is de verdienste van Lemmermeyer en Roquette dat elk van die 82 bijdragen door hen is voorzien van uitvoerig commentaar, zowel geschiedkundig, als wiskundig, dit laatste wat betreft de ontwikkeling in de vorige eeuw maar ook die tot nu toe. Als zodanig een rijke bron van informatie. Vervolgens vindt men in het boek nog 14 brieven en briefkaarten, gezonden door Weyl, Fritz Noether (een broer van Emmy), Brauer, aan Hasse, en van Hasse aan Weyl en Fritz Noether, daar waar het te maken heeft met het overlijden van Emmy Noether in 1935. (Voor de volledigheid, Emmy Noether leefde van 1882 tot 1935, Hasse van 1898 tot 1979.) Hoe volledig, menselijk, wiskundig, en soms ook dramatisch, het commentaar is bij de bijdragen door de schrijvers, moge geïllustreerd zijn met onderstaand commentaar behorend bij de allerlaatste brief uit het boek: "Acht Monate später, am 22. November 1937, wurde Fritz Noether von den sowjetischen Behörden verhaftet und schliesslich unter dem Vorwand, er sei ein deutscher Spion, zu 25 Jahren Gefängnis verurteilt. Im Jahre 1941 wurde er zum Tode verurteilt und sofort hingerichtet. Über das tragische Schicksal Fritz Noethers siehe ... (volgt referentie)". Maar het boek is dan nog niet afgelopen. Zoals het hoort, volgt een volledig namenoverzicht, een volledig trefwoordenoverzicht, een literatuuroverzicht van 19 bladzijden, om tenslotte te eindigen met, heel verrassend na alles wat al aan bod is geweest, een lijst beknopte levensloopberichten van wiskundigen, die voor het behandelde in het boek van belang zijn; dit laatste beslaat 35 bladzijden.

Samenvattend, iedereen die te maken heeft met getaltheorie, algebra's of groepentheorie hoort dit boek in zijn boekenkast te hebben. Als u de inhoud van dit boek niet tot u neemt, om welke reden dan ook, dan denkt u misschien dat u iets weet van de ontwikkelingen van het bewuste vakgebied, maar neemt u van mij aan dat u zichzelf dan ernstig te kort doet. Het is duidelijk: dit is een buitengewoon goed geslaagde bijdrage om heel precies het ontstaan van algebraïsche beginselen te volgen. *R.W. van der Waall*

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone. For each problem the most elegant correct solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The judges reserve the right to withdraw the prize if none of the solutions is deemed worthy. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

Occasionally there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro. Both suggestions for problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarchief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this edition is December 1, 2007.

The solutions of the previous edition will be published in the December issue.

The prizes for the Problem Section are sponsored by *Optiver Derivatives Trading*.



Problem A (Folklore)

Let a be an integer. Let $(x_n)_n$ be the sequence determined by $x_1 = a$ and $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$. Show that n and x_n are coprime for all n .

Problem B (Folklore)

Let G be a group with n elements and $S \subset G$ a non-empty subset. Show that the set $S^n := \{s_1 s_2 \cdots s_n \mid s_i \in S\}$ is a subgroup of G .

Problem C (Folklore)

(a) Given 2007 points in the plane such that no pair has distance strictly less than one, show that one can find a subset of 288 points in which no pair has distance strictly less than $\sqrt{3}$.

(b)* Supposedly the number 288 in problem C is not optimal. Find upper and lower bounds for the optimal value.

Problem 2006/3-C Consider a triangle ABC inscribed in an ellipse. For given A the other vertices can be adjusted to maximize the perimeter. Prove or disprove that this maximum perimeter is independent to the position of A on the ellipse.

Solution We received two submissions to this problem, one incorrect. The problem was solved by Jaap Spies, who remarked that it is a classical result, based on the Poncelet theorem, to be found in Darboux [1] Livre III, Chapitre III, part 176.

The statement of the problem follows from the Theorem of Chasles, which is given below. For a modern proof of this theorem, we refer to Berger [2], page 243.

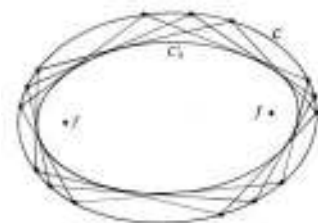
THEOREM Let C be an ellipse and $n \geq 3$ an integer. Among the convex polygons with n distinct vertices inscribed in C , there exist infinitely many with maximal perimeter. In fact, one vertex of such a maximal perimeter polygone (MPP) can be chosen arbitrary on C . Furthermore, the sides of all n -vertex MPP's are tangent to the same ellipse C'_n , homofocal with C .

Jaap Spies remarks that for a treatment independent of Poncelet's Theorem see Lion [3].

[1] G. Darboux, *Principes de Géométrie analytique*, 1917 Gauthier-Villars, Paris. Available in facsimile: <http://gallica.bnf.fr>

[2] M. Berger, *Geometry II*, 1987, Springer Verlag, Berlin.

[3] George Lion, 'Variational Aspects of Poncelet's Theorem', *Geometricae Dedicata* **52**, 105–118, 1994.



Eindredactie:

Lenny Taelman, Johan Bosman, Derk Pik

Redactieadres:

Problemenrubriek NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

uwc@nieuwarchief.nl