

Inhoud | Contents

- 74 Colofon
- 75 Redactioneel *Jaap Molenaar*
- 76 Agenda
- 78 Nieuws

Oraties | Lectures

- 82 Fijne functietheorie *Jan Wiegerinck*
- 119 Summa cogitatio *Piet Groeneboom*

Onderzoek | Research

- 90 Verdeel de software en verover de markt *Bennie Mols*
- 100 Air parcels and air particles: Hamiltonian dynamics *Onno Bokhove, Peter Lynch*
- 107 Van nanokristal tot topdiantant *Kees Joost Batenburg*
- 126 Zoeken naar een naald in een prostaat *Bennie Mols*
- 137 Foolproof *Brian Hayes*

Geschiedenis | History

- 92 De stelling van Van der Waerden *Klaas Pieter Hart*

Samenleving | Society

- 98 Math and Corr! *Krzysztof Apt*
- 112 Lemniscaten en kranen *Rainer Kaenders*
- 128 De overval bij het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu *Jaap Top, Jaap Molenaar*

Onderwijs | Education

- 132 Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen *Jan van de Craats*

Boeken | Books

- 143 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 89 De favoriet van Diaconis *Jeanine Daems, Ionica Smeets*
- 150 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (Jaap.Molenaar@wur.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (G.Alberts@uva.nl)
Yves van Gennip (y.v.gennip@tue.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)

Bureau redactie

Wendy Ellens, Harm de Vries

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.), Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Klaas Landsman (RU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEX)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105. Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Gert Vegter (RUG, ondervoorzitter), Rob van der Mei (CWI en VU, secretaris), Fieke Dekkers (RIVM, penningmeester), Wieb Bosma (RU), Iris van Gulik - Gulikers (SLO), Klaas Pieter Hart (TUD), Arjen Sevenster, Herman te Riele (CWI)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	20-09-2007	–
4	08-12-2007	30-07-2007
1	08-03-2008	30-10-2007
2	08-06-2008	30-04-2008

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Het rekenen op de basisschool heeft de laatste decennia grote veranderingen doorgemaakt. Hoe wordt het rekenen op de pabo onderwezen? Lees verder op pagina 132.

Er zit muziek in wiskundigen

Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* (NAW) in zijn huidige vorm — de vijfde serie — is al weer aan z'n achtste jaargang toe. Wat betreft de opmaak heeft dit vlaggeschip van het KWG altijd een aparte sfeer uitgedamd. Vanaf het prilleste begin was het een blad met allure. De aanzet daartoe is gegeven door de eerste hoofdredacteur Chris Zaal en sinds 2001 is de stuwende kracht eindredacteur Derk Pik. Laten op het recente Nederlands Mathematisch Congres die twee namen nu verbonden worden door de uitreiking van de Zaalbokaal 2007. Deze prijs, voor de best leesbare bijdrage aan de jaargang 2006, werd namelijk uitgereikt aan Derk Pik. Een onafhankelijke jury, bestaande uit beroepsjournalisten Bruno van Wayenburg, Dirk van Delft en Jos van den Broek, koos unaniem voor zijn artikel *Stochastiek in de vroege muziek van Xenakis*. Genoemd artikel is tekenend voor zijn veelzijdigheid. Met hem heeft de redactie van het NAW al jaren een ideale mix van capaciteiten in huis: professioneel musicus, gepromoveerd wiskundige, en, naar nu is gebleken, een kundig publicist. Met grote betrokkenheid heeft hij zijn artistieke gaven aangewend voor het NAW.

“Muziek is de taal die alle volkeren verstaan.” Deze wat gezwollen tekst stond vroeger op de gevel van een muziekhandel in Den Haag waar ik regelmatig langsfietste. Ik vond dat toentertijd een diepzinnige spreuk en bedacht, voorzichtig langs de geparkeerde auto's in de nauwe straat manoeuvrerend, dat je voor ‘muziek’ ook wel ‘wiskunde’ zou kunnen invullen. Iedere keer viel mij deze diepe gedachte weer opnieuw in, maar nooit kwam ik verder met dit thema. Al filosoferend over de meest recente toekenning van de Zaalbokaal, valt me op dat het aantal dwarsverbanden tussen muziek en wiskunde werkelijk legio is. Beide zitten op dezelfde of op zijn minst naburige genen. Vanuit het Wageningse spreekt me dat erg aan. Opmerkelijk veel wiskundigen zijn actief op het gebied van muziek en vice versa; Nederland kent enkele tientallen professionele wiskundigen die ook professionele musici zijn. Een andere frappante overeenkomst: zowel wiskunde als muziek hebben hun eigen schrift. En nog een: muziek en wiskunde tellen beide nogal wat dialecten.

Dit laatste gegeven dempt de euforie helaas weer wat, want dat betekent wel dat de universele verstaanbaarheid van beide nogal tegenvalt. Iemand die getraind is in de Europese muziektraditie heeft grote moeite met de klankwereld van bijvoorbeeld de Indiase muziek, en andersom. Evenzo blijkt de communicatie tussen wiskundigen met verschillende specialisaties verbijsterend lastig te zijn. Zet er twee samen aan de bar en na korte tijd komt er weinig meer uit; hoogstens gaat er nog wat in. Overigens, voor het NAW claimen we universele leesbaarheid voor de hele

wiskundegemeenschap. Als dat niet klopt, stuurt u dan gerust eens een boze brief aan de redactie.

Terwijl de amateurmuziek in Nederland groeit en bloeit, hebben de professionele musici — hoewel van erkend hoog niveau — het niet gemakkelijk. De analogie met de wiskundewereld is alweer groot. Voor wiskundige puzzels en spelletjes is best veel belangstelling, maar de opleiding en financiering van professionele wiskundigen vormt een probleem. De waarde van langetermijninvesteringen in wiskundig onderzoek is de buitenwacht vrijwel niet duidelijk te maken. Dat lukt alleen met toepassingen waarvan het maatschappelijk nut direct aanspreekt. Bijvoorbeeld, wiskunde losgelaten op financiële vragen, oftewel poenwiskunde; wiskunde toegepast op biologische vragen, oftewel levenswiskunde; wiskunde toegepast op onze NS-dienstregeling, oftewel spoorwegwiskunde: zulke dingen liggen een stuk beter in de markt.

Vorig jaar schreef ik in mijn redactioneel: “Momenteel is de operatie *Smart Mix* gaande. Er worden wetenschappelijk Nederland grote financiële worsten voorgehouden, maar alleen consortia van giga-omvang met een ‘man-op-de-maan’-thema maken een kans. Wiskundig Nederland zal hier niet wel bij varen. Wij moeten het hebben van kleinschalig, hoogwaardig onderzoek en in de soepketels van deze consortia kunnen we hoogstens zorgen voor het snufje zout.” Ik heb deze gedachten zelden mooier uitgewerkt gezien dan in de afscheidsrede van Piet Groeneboom, die u in dit nummer aantreft. Lees en geniet, en denk hierbij ook eens aan onze adverteerders.

Ten slotte: zelfs in onze somberste bespiegelingen moeten we ruimte bieden aan stochastische decorwisselingen. Na mijn redactioneel vorig jaar is er een nieuw kabinet aangetreden. Een verbetering in het algemeen, denk ik. Maar ook in het bijzonder. Wat wordt er namelijk in de wandelgangen gefluisterd? Dat Plasterk, onze kersverse minister van onderwijs, altijd heeft verkondigd dat megaconcentraties van onderzoek leiden tot nivellering en ten koste gaan van hoogwaardig onderzoek. En dat hij zou spelen met de gedachte ze weer af te schaffen. Mooi toch, zo'n vriendendienst waarbij een bioloog de wiskunde wellicht gaat helpen?!

Maar ik moet nu stoppen: verder schrijven aan een *Smart Mix*-voorstel ...

Jaap Molenaar
hoofdredacteur *Nieuw Archief voor Wiskunde*

Technische Universiteit Eindhoven

Wageningen Universiteit en Researchcentrum

jaap.molenaar@wur.nl

Agenda

Upcoming Events

juni 2007

10 – 17 juni

Mathematical Tools for Complex Systems in Science and Technology

Cursus gegeven door het *Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics*

plaats Technical University of Denmark, Lyngby

info www.dcammm.dk

11 – 15 juni

Nonlinear Collective Behaviour: Networks, Swarming and Reaction Diffusion Dynamics

Workshop over interdisciplinair onderzoek op het gebied van niet-lineair coöperatief gedrag in complexe systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

13 – 15 juni

Spatial Data Quality 2007

Vijfde internationale symposium over ruimtelijke datakwaliteit

plaats ITC, Enschede

info www.itc.nl/issdq2007

18 – 22 juni

Random Polymers

Workshop over modellering van polymeren en het wiskundig onderzoek van deze modellen, voor onderzoekers in kansrekening, combinatoriek en statistische fysica

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

21 juni

Modelling for the Life Sciences

Symposium over modelleren in de *Life Sciences* met aansluitend de oratie van Jaap Molenaar, *De kracht van wiskundig modelleren*

plaats Universiteit Wageningen

info www.biometris.wur.nl

25 – 29 juni

Algebraic Statistics

Vijfdaagse Eidma en Diamant minicursus over het gebruik van algebraïsche meetkunde, commutatieve algebra en combinatoriek in statistiek. Docent: Seth Sullivant

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/wsk/eidma/courses

25 juni – 1 juli

Innovations in Mathematical Finance

Workshop over nieuwe wiskundige ideeën en methoden in het *mathematical finance* onderzoek

plaats Loen, Noorwegen

info www.cma.uio.no/conferences/2007/amamef-workshop.html

25 juni – 6 juli

Higher-Dimensional Geometry over Finite Fields

Zomerschool over algebraïsche meetkunde over eindige lichamen

plaats Göttinger

info www.uni-math.gwdg.de/GEOFIE

26 – 29 juni

Adults Learning Mathematics

Conferentie over wiskundeonderwijs voor volwassene. Thema: *The changing face of adults mathematics education; learning from the past: planning for the future*

plaats Limerick, Ierland

info www.alm-online.org

juli 2007

2 – 6 juli

XXVth Journées Arithmétiques

Bijeenkomst georganiseerd door de School of Mathematics van de *University of Edinburgh* en *The International Centre for Mathematical Sciences* in Edinburgh

plaats Edinburgh, Schotland

info www.icms.org.uk/meetings/2007/jarith

6 – 13 juli

ICME 11

Elfde editie van het *International Congress on Mathematical Education*

plaats Monterrey, Mexico

info www.icme11.org.mx

8 – 17 juli

Summer School in Complexity Science

Zomerschool over *Emergent phenomena via separation of scales in time and space*

plaats Wye College, Kent, Engeland

info www.nd.edu/~networks/News/SumSchool-London-Jul07.pdf

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

9 – 11 juli

Applied Probability INFORMS Conference

Conferentie over toepassingen van kansrekening op stochastische systemen, georganiseerd door het *Institute for Operations Research and the Management Sciences*

plaats EURANDOM, Eindhoven

info appliedprob.society.informs.org

16 – 20 juli

ICIAM 07

6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics voor wiskundigen, wetenschappers, mensen uit de industrie en andere geïnteresseerden

plaats Zürich, Zwitserland

info www.iciam07.ch

19 – 24 juli

ESU 5

De vijfde editie van de *European Summer University* over de geschiedenis en epistemologie in wiskundeonderwijs

plaats Charles University, Praag

info web.pedf.cuni.cz/kmdm/esu5

22 – 27 juli

Topics in Nonlinear PDEs

Zomerschool over niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen

plaats Coimbra, Portugal

info www.cim.pt/pdes07

23 – 27 juli

Computational Complexity of Quantum Hamiltonian Systems

Workshop voor onderzoekers in de kwantuminformatietheorie, mathematische fysica en veeldeeltjesnatuurkunde

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

23 – 27 juli

SIGIR'07

Dertigste jaarlijkse internationale ACM SIGIR conferentie over *information retrieval*

plaats Amsterdam

info www.sigir2007.org

29 juli – 2 augustus

ISCB 28

28ste editie van het jaarlijkse congres van de *International Society for Clinical Biostatistics*

plaats Alexandroupolis, Griekenland

info www.iscb2007.gr

augustus 2007

5 – 9 augustus

Workshop Logic, Rationality and Interaction

Workshop over informatie-uitwisseling voor onderzoekers uit de logica, filosofie, informatica en speltheorie

plaats Beijing, China

info www.illc.uva.nl/LORI

6 – 17 augustus

19th European Summer School in Logic, Language and Information

Onderwerp: taal, logica en berekening

plaats Dublin, Ierland

info www.illc.uva.nl

24 – 25 augustus

Vakantiecursus Wiskunde

Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden, toont mogelijke invullingen van het nieuwe schoolvak wiskunde D

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.cwi.nl/events/2007/VC2007

31 augustus – 1 september

Vakantiecursus Wiskunde

Vakantiecursus Wiskunde voor leraren in de exacte vakken in VWO, HAVO en HBO en andere belangstellenden, toont mogelijke invullingen van het nieuwe schoolvak wiskunde D

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events/2007/VC2007

september-oktober 2007

7 – 12 september

Mathematics Education In A Global Community

Negende internationale conferentie van *The Mathematics Education into the 21st Century Project*

plaats University of North Carolina, Charlotte, VS

info math.unipa.it/~grim/convegna.htm

10 – 13 september

Sandpile models and related fields

Zandhoopmodellen in kansrekening, natuurkunde, combinatoriek en algebra

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

14 september

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info olympiads.win.tue.nl/nwo

17 – 21 september

Galois Theory and Explicit Methods

Eerste jaarlijkse bijeenkomst van het *Marie Curie Research Training Network Galois Theory and Explicit Methods*

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

28 september

Ph.D. Days 2007

Voordrachten van wetenschappers en gepromoveerde wiskundigen werkzaam in het bedrijfsleven. Thema: veiligheid en bescherming

plaats Utrecht

info www.math.vu.nl/~mbijvank/phdday

3 – 5 oktober

Thirty-second Woudschoten Conference

Conferentie voor numerici. Thema's: gekoppelde heterogene problemen en numerieke optimalisatie technieken

plaats Woudschoten Conference Centre, Zeist

info www.cwi.nl/projects/wnw/conf2007

8 – 12 oktober

Cryptography

Eidma en Diamant minicursus over cryptografie. sprekers: Ueli Maurer en Renato Renner

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/wsk/eidma/courses

17 – 24 oktober

Topje van de ijsberg

De 22ste editie van de WetenWeek staat in het teken van de klimaatverandering.

plaats Door heel Nederland

info www.wetenweek.nl

Nieuws

| News

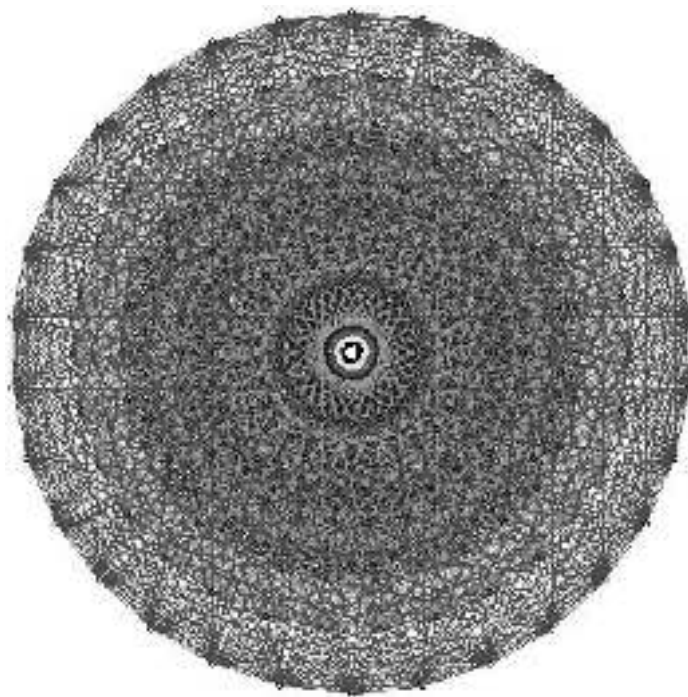
Lang gedacht over E8

Een groep van achttien wiskundigen, waaronder de Nederlanders Marc van Leeuwen en Fokko du Cloux, hebben de inwendige structuur van de exceptionele Liegroep E8 in beeld kunnen brengen. De meest complexe van de enkelvoudige Liegroepen gaf zijn geheimen niet zonder slag of stoot prijs. Niet alleen vergde het van de wiskundigen van het *Atlas of Lie Groups and Representations*-project enkele jaren om de achterliggende wiskunde in hanteerbare software te verwerken, het kostte supercomputer *Sage* nog eens 77 uur rekenen om de belangrijke data over de structuur van E8 aan de wereld te openbaren. Een simpele '42' volstond niet, de karaktertabel van E8 wordt gegeven door een matrix met 453060^2 elementen.

Volgens projectlid Jeffrey Adams zijn er twee belangrijke doelen bereikt. Allereerst is er een algoritme gevonden om representatietheorie van reële Liegroepen om te zetten in combinatoriek die door een computer berekend kan worden. Ten tweede is dit algoritme gebruikt om uit beperkte input Cartan subgroepen, Weyl groepen en andere structuurdata van algebraïsche groepen te berekenen, alsook bepaalde representaties van deze groepen.

Het overkoepelende doel van het *Atlas of Lie Groups and Representations*-project, waarvan dit onderzoek deel uitmaakt, is het berekenen van de unitaire duale van reële reductieve Liegroepen.

Bron: aimath.org/E8



copyright: American Institute of Mathematics

Het E8-wortelsysteem bestaat uit 240 vectoren in een achtdimensionale ruimte.

Afscheid in de kerk

Op vrijdag 9 maart heeft een legioen wis- en natuurkundigen zich verzameld in de Keizersgrachtkerk te Amsterdam voor het slotsymposium *Mathematische Fysica*, dat de afsluiting heeft gevormd van het gelijknamige, door FOM en NWO gefinancierde project. Vijftien jaren geïstitutionaliseerde samenwerking tussen de Nederlandse wiskunde en fysica zijn zo in stijl besloten met een gevarieerd programma.

Robbert Dijkgraaf beet het spits af met een kort openingswoord, waarin hij de Nederlandse natuur- en wiskundigen opriep om dit toch

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

vooral niet het einde van de samenwerking te laten zijn. De recent gestarte NWO-clusters Nonlinear Dynamics in Natural Systems en Geometry and Quantum Theory bieden houvast voor de toekomst, al sprak Dijkgraaf de hoop uit dat er ook weer geld voor aio's in postdocs beschikbaar zou komen, zoals in het Mathematische Fysica project.

De eerste van de vier sprekers op deze dag was Sir Michael Atiyah (University of Edinburgh), onder andere bekend van zijn indexstellingen en K-theorie. Hij gaf een overzicht van hoe dualiteiten een rol hebben gespeeld in de wiskunde, de natuurkunde en de wisselwerking tussen beide. Een heel scala aan voorbeelden passeerde de revue, van de punt-lijn-, lijn-punt dualiteit tot het verband tussen representaties van oneindige groepen en supersymmetrische quantumveldentheorieën.

Sir Atiyah werd gevolgd door Jean-Christophe Yoccoz (Collège de France, Paris), die aan de hand van de *interval exchange map* verhaalde over quasi-periodieke stromingen op tori en oppervlakken met hogere genus.

Na de lunch werd de draad opgepakt door Wendelin Werner (Université Paris-Sud) die over stochastische systemen sprak. Systemen die op microscopische schaal willekeurig gedrag vertonen, zijn op macroscopische schaal vaak deterministisch te beschrijven, als bijvoorbeeld overgegaan wordt op een beschrijving in termen van de verwachtingswaarde van de stochastische variabele. In zijn voordracht concentreerde Werner zich echter op die systemen, die zelfs op macroscopische schaal zich willekeurig gedragen. Hierbij is niet alleen het systeem van belang, maar ook welk gedrag wordt onderzocht en welke vraag er wordt gesteld. Als voorbeelden werden percolatiemodellen en tessellatieproblemen gepresenteerd.

De laatste lezing van de dag werd verzocht door Sir Robert Penrose (Oxford), die, zoals in zijn aankondiging gezegd werd, bij iedereen bekend is, omdat zijn boeken op elk vliegveld te koop zijn. Hoewel zijn populair-wetenschappelijke boeken inderdaad verkrijgbaar zijn in menige boekhandel, heeft hij ook op wetenschappelijk gebied de nodige noten op zijn zang. Zo bleek ook tijdens deze voordracht, waarin hij aan de hand van conforme veldentheorie een kosmologisch model presenteerde dat, in zijn poging om de tweede hoofdwet van de thermodynamica te verenigen met de big bang-hypothese, leidde tot de conclusie dat 'ons heelal' voorafgegaan werd en opgevolgd zal worden door andere universa. Een belangrijke rol speelde de positiviteit van de kosmologische constante.

Als dit symposium en de over vele leeftijdsgroepen verdeelde schare van bezoekers, iets aantoonde, is het wel dat het vakgebied van de mathematische fysica springlevend is en het stopzetten van het FOM/NWO-programma misschien een klein obstakel, maar zeker geen onoverkomelijke belemmering hoeft te zijn voor het Nederlandse onderzoek in deze richting.

Yves van Gennip

De B. blijft beroeren

De zaak Lucia de B. blijft de aandacht van zowel de pers als de wiskundige gemeenschap vasthouden. De verpleegster werd in 2004 veroordeeld voor onder meer op grond van kansrekening zeven moorden en drie pogingen daartoe. Voor de rechtbank werd berekend dat de kans dat een gewone verpleegster bij zoveel sterfgevallen aanwezig is, 1 op 325 miljoen is.

Deze berekening is meteen van vele kanten sterk bekritiseerd, en nu opnieuw in de uitzending van *EénVandaag* van dinsdag 27 maart 2007. Hierin is onder meer Richard Gill te zien, die vertelt dat er zoveel fouten in de berekening gemaakt zijn, dat de werkelijke waarde van de kans eerder 1 op 48 of misschien zelfs 1 op 5 is.

De uitzending van *EénVandaag* is terug te vinden op internet: www.eenvandaag.nl/index.php?module=PX_Story&func=view&cid=2&sid=31880.

Bron: www.eenvandaag.nl

Hendrik Lenstra wordt universiteitshoogleraar

De Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (KNAW) heeft in maart vijf nieuwe universiteitshoogleraren benoemd, waaronder wiskundige Hendrik Lenstra van de Universiteit Leiden. Hij wordt vrijgesteld van bestuurstaken zodat hij de komende vijf jaar aan onderzoek kan besteden. De KNAW betaalt zijn salaris gedurende deze periode, zodat de universiteit geld vrij heeft om een nieuwe hoogleraar aan te stellen.

Bron: www.volkskrant.nl



foto: Henry Segerman, Paul-Olivier Dehay, www.segerman.org

Nieuwe KNAW hoogleraar Hendrik Lenstra

Rollo Davidson prijs

Remco van der Hofstad van de Technische Universiteit Eindhoven heeft dit jaar de *Rollo Davidsonprijs* gekregen wegens zijn werk in de kansrekening en statistische mechanica.

Bron: www.statslab.cam.ac.uk/Rollo

Wiskundig weblog wint

Het weblog Wiskundemeisjes van Ionica Smeets en Jeanine Daems heeft in maart twee *Dutch Bloggies* in de wacht gesleept, de jaarlijks uitgereikte Nederlandse awards voor weblogs. Een jury, bestaande uit mensen uit medialand, riep Wiskundemeisjes uit tot *beste themalog* en *best geschreven weblog*. Ook de publieksprijs voor best geschreven weblog viel aan Wiskundemeisjes ten deel.

In de eerste categorie schreef de jury "Ionica Smeets & Jeanine Daems zijn De Wiskundemeisjes en zij doen alles wat wiskundemeisjes moeten doen. Op hun log keren zij hun formele wetenschap binnenste buiten, gooien het in de lucht en vangen het weer op, maken het persoonlijk, kleden het aan en uit. Ze spelen, schrijven, linken, informeren en amuseren. Zij lappen alle dorre vooroordelen aan hun

wiskundelaarsjes.”

In de categorie best geschreven weblog was de lof ook niet van de lucht. “De manier waarop ze de wereld bekijken en beschrijven is origineel. Ze schrijven direct, pakkend en zonder clichés. Hier is de site voor de ongecijferden van Nederland. Zoals de dichter Ingmar Heytze, die dacht dat priemgetallen zo uniek waren en op z’n donder kreeg van Wiskundemeisjes”

Ook voor *Beste weblog* was Wiskundemeisjes een goede kanshebber, maar zij werd verslagen door Geenstijl. Bron: www.dutchbloggies.nl

Wiskunde geen cent waard?

Afgelopen maart ontstond in Groot-Brittannië ophef naar aanleiding van een belspelletje op de zender ITV. Ook wiskundigen werden erbij betrokken om licht in de duisternis van dit nachtelijke vertier te brengen. Aanstichter van alle commotie was het spelletje *Make your Play* dat aan nachtbrakend Engeland onder de titel *Add the pence* de volgende vraag voorschotelde. Op het televisiescherm verscheen de lijst “Two pounds, 25p, £1.47, 16p, Fifty pence”. Bij elkaar opgeteld is dit 438p, maar ITV meldde na 3 uren dat het juiste antwoord 506 was en dat niemand het had geraden. Uitleg werd er niet gegeven.

Omdat gevreesd werd voor oplichterij ging *The Times* op onderzoek uit en vroeg wiskundigen, mensaleden en crypto-analysten, waaronder hoogleraar wiskunde Marcus du Sautoy van Oxford University, om zich over de vraag te buigen. Slechts crypto-analyst Frank Carter wist, met behulp van een decoderingsalgoritme het antwoord 506 te reproduceren. Zijn aanpak was echter niet de juiste volgens ITV.

Uiteindelijk voelde ITV zich gedwongen om het antwoord toch prijs te geven, iets wat ze in eerste instantie niet wilden doen om het spel niet te verpesten. De clou is om alle instanties van ‘pence’ mee te tellen. Het bizarre ‘juiste antwoord’ was: Two pounds = 200p + 2p + 1p = 203p, 25p = 25p + 5p + 1p = 31p, 16p = 16p + 6p + 1p = 23p en Fifty pence = 50p + 50p + 1p + 1p = 102p. Dit samen met £1.47 geeft 506p. Bron: www.timesonline.co.uk

Rijk aan betekenis

De *commissie Toekomst WiskundeOnderwijs* (cTWO) is enige tijd geleden door het ministerie in het leven geroepen om voorstellen te doen voor de nieuwe examenprogramma’s wiskunde voor havo en vwo die per 2010 ingaan. Tevens adviseert zij over doorlopende leerlijnen wiskunde van primair naar voortgezet en hoger onderwijs en over didactische ontwikkelingen. Nu heeft zij haar visiedocument “Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs” uitgebracht, waarin haar standpunten uiteengezet zijn. Er wordt onder meer ingegaan op de rol die de commissie contexten en ict in het onderwijs toedicht. Bron: www.ctwo.nl

Vreemd verhaal

Een nogal vreemd verhaal sierde op woensdag 14 maart pagina 21 van *Dagblad De Pers*. Wim Helsen schreef over Japanner Ono Takitaki van de universiteit van Fukuoka, specialist in zogenaamde vlindereffecten. Een vlindereffect is een populaire benaming voor de invloed die een schijnbaar onbeduidende actie kan hebben in complexe situaties.

Takitaki probeerde ooit een voetbalwedstrijd tussen Racing Fukuoka en FC Tokio te beïnvloeden door een steentje te laten vallen op het moment dat de stand 1–0 was. De wedstrijd eindigde uiteindelijk

in 2–0 en niemand had enige aandacht aan het steentje van Takitaki geschonken. Toen Takitaki enige maanden later echter een artikel publiceerde over zijn experiment, diende FC Tokio een klacht in wegens wedstrijdvervalsing. Tokio kreeg gelijk van de nationale voetbalbond, won de wedstrijd met terugwerkende kracht met 0–5, waardoor Racing Fukuoka degradeerde, Takitaki een levenslang stadionverbod bij Fukuoka kreeg en veel bekendheid verwierf in Japan.

Overal waar Takitaki verschijnt vragen de mensen zich af wat hij probeert te beïnvloeden en op welke manier. Zijn aanwezigheid alleen schijnt al voldoende geweest te zijn voor enkele paniekuitbraken en zelfs zelfmoorden.

Sterk verhaal of het bewijs hoe chaostheorie altijd weer een gewild slachtoffer is van misinterpretatie? Hoe het ook zij, de radiozender die het alleenrecht heeft op live verslagen van Takitaki’s acties vaart er wel bij. Er wordt grif betaald om te mogen adverteren rondom de vlinder-verslagen van deze georganiseerde chaoot. Bron: www.depers.nl

Abelprijs voor Srinivasa S.R. Varadhan

De Abelprijs is dit jaar gewonnen door Srinivasa S.R. Varadhan, werkzaam aan het *Courant Institute of Mathematical Sciences* van *New York University*. De *Norwegian Academy of Science and Letters* heeft deze prijs uitgereikt aan de Indiër wegens zijn fundamentele bijdragen aan de waarschijnlijkheidsrekening en in het bijzonder vanwege het creëren van een geünificeerde theorie van grote afwijkingen.

De in Madras (Chennai) geboren kansrekenaar is zijn hele academische carrière werkzaam geweest aan het Courant Institute waar hij zijn theorie over grote afwijkingen uitwerkte. Deze breed toepasbare theorie behandelt een verdieping van de vraag hoe snel de kans op zeldzame gebeurtenissen naar nul convergeert, zoals voorspeld door de wet van de grote getallen. Varadhans methode heeft toepassingen in vele complexe stochastische systemen, variërend van quantum veldentheorie, statistische fysica, bevolkingsdynamica, econometrie en verkeersstudies. Ook zijn zeldzame gebeurtenissen erdoor binnen het bereik van computeranalyse gekomen.

Na in 1980 collega Peter Lax opgevolgd te hebben als directeur van het Courant Institute, volgt Varadhan nu ook in zijn voetsporen als Abel laureaat. Bron: www.abelprijsen.no



Abelprijswinnaar 2007

Heel soms aandacht

Het kan u bijna niet ontgaan zijn: wiskunde was onlangs weer even nationaal nieuws. Op donderdag 22 maart berichtten de media dat een drietal middelbare scholieren een wiskundige sensatie heeft veroorzaakt. Jesse Hoekstra (17), Willem Schilte (17) en Petra Alkema (15)

hebben het ‘meest magische vierkant ooit’ gemaakt.

Gelukkig maakte het strooien met superlatieven plaats voor inhoudelijke informatie over deze zeer knappe prestatie van het tienertrio. Naar aanleiding van een masterclass over (onder andere) magische vierkanten van Arno van den Essen eind 2006 besloten de drie scholieren op zoek te gaan naar een zogenaamd Franklinvierkant: een getallenvierkant waarin niet alleen de som van de getallen in elke rij en elke kolom hetzelfde is, maar dat nog enkele extra bijzondere eigenschappen bezit. De eigenlijke onderzoeksvraag van de masterclass, het vinden van een acht bij acht Franklinvierkant, bleken Hoekstra, Schilte en Alkema al snel opgelost te hebben, waarna zij zich stortten op het vinden van een twaalf bij twaalf Franklinvierkant, iets dat niemand nog gelukt is.

Het gevonden ‘meest magische vierkant ooit’ komt zeer dicht bij de oplossing. De som in elke rij en kolom is 870 en ook aan de meeste andere Franklin-eigenschappen is voldaan. Slechts aan het criterium dat elke halve rij tot 435 optelt wordt niet voldaan. Deze tellen op tot 434 of 436. Echter het HSA-vierkant (Hoekstra-Schilte-Alkema) zoals het al genoemd wordt, heeft nog vele andere bijzondere eigenschappen die de net-niet-Franklin kwestie in de schaduw stellen. Er blijken vele lijnen en figuren in het vierkant verborgen te zitten waarvan de getallen allemaal optellen tot dezelfde som. HSA is dan ook al omgedoopt tot afkorting voor ‘heel speciale attractie’.

Helaas was de media-aandacht voor wiskunde weer even snel verdwenen als hij opgekomen was, maar zolang scholieren als Alkema, Schilte en Hoekstra vierkant achter de wiskunde blijven staan, mogen we in de toekomst nog veel magie verwachten.

Bron: www.bernrode.nl/downloads/algemeen/HSA.pdf

1	142	11	134	8	133	5	128	12	132	3	147
120	27	110	32	115	37	116	20	100	24	119	25
121	22	141	17	125	15	125	19	142	11	122	21
48	01	29	106	41	101	44	102	27	100	47	100
78	7	78	64	90	67	77	67	92	65	72	60
10	87	70	94	78	97	76	90	40	94	79	85
55	52	55	52	52	54	50	50	56	51	50	57
72	71	72	87	66	71	68	75	61	82	71	70
17	47	107	4	104	42	101	45	105	39	78	40
24	123	14	129	17	127	20	120	13	126	23	124
26	112	26	112	32	114	29	113	36	111	26	117
144	5	144	9	147	7	140	6	145	12	142	4

Het HSA-vierkant

Het NMC 2007, Leiden, 12 en 13 april

Een beetje filosofisch word je er wel van, zo'n Nederlands Mathematisch Congres. Een plotseling opduikende staart van een file drukte mijn neus al iets te nadrukkelijk op de eindigheid van mijn eigen bestaan op weg naar de eerste dag van de 43ste editie, in Leiden, op 12 april. Een snelle reactie en goede remmen voorkwamen dat ik de openingsvoordracht, en het leukste praatje van de twee dagen, miste. Mike Bennett sprak over het verband tussen het oplossen van Diophantische vergelijkingen en het genereren van geld uit Het Echte Leven, en kwam onbekommerd tot een conclusie die wij ons in politiek-correcte verering van valorisatie niet meer durven te veroorloven. Met de formalisatie door Frek Wiedijk van een ‘Bewijs uit het ongedichte’ van Marjolein Kool en een mini-symposium over quantum computing, waarbij in de apotheose het antwoord-bit op de vraag of die echte quantumcomputer nu binnenkort gebouwd zal worden of niet, op karakteristieke wijze

ongeëvalueerd bleef, kon mijn dag niet meer stuk. Maar er volgden méér hoogtepunten: na teleportatie van het hele gezelschap naar de binnenstad, kregen Ben Green en Terence Tao de Ostrowskiprijs uitgereikt in de prachtige ambiance van de Lorentzsaal van het Kamerlingh Onnesgebouw. Eerstgenoemde deed uit de doeken hoe zij er, na veel gestrande pogingen van anderen, wél in slaagden het bestaan van willekeurige lange arithmetische progressies van louter priemgetallen aan te tonen. De dag eindigde in het stadhuis van Leiden, waar iedereen werd opgewacht door de loco-burgemeester, die tot zijn chagrijn als enige van het stadsbestuur ter stede had moeten blijven vanwege het verblijf van beruchte criminelen. Even leek het er op dat wiskundige Lodewijk K. ons bij dat gezelschap wenste te voegen, door in zijn Leidse Ontzettingsdrang het ontstane vacuüm voor een greep naar de macht te benutten, maar gelukkig was de rector van de Universiteit (onlangs weggekocht uit Amsterdam) weer ter plekke om rampen te voorkomen. Hij had zich 's ochtends al geliefd gemaakt door op gepast eerbiedige wijze de officiële opening te verrichten, benadrukkend dat het in zijn vak (rechten) ondenkbaar is dat je voor je dertigste hoogleraar wordt.

Op vrijdagochtend sprak op mijn autoradio verpleeghuisarts cum filosoof (Wittgensteinduider) Bert Keizer memorabele woorden over de toekomst van het leven-en-dooddebat over euthanasie in Nederland: “Dat gaat nog wel even door, want het is nou eenmaal geen wiskunde.” Daarover nadenkend miste ik de voordracht over Delftse vliegtuigvleugels en daarom wilde ik de kans van Thomas Bruss te leren hoe beter opeenvolgende beslissingen in het leven te nemen, niet laten lopen. Helaas bevond ik me kennelijk in een singulariteit van het door stem en versterker gecreëerde akoestische veld, en in de hopeloze strijd het betoog te volgen, ontging mij zowel de lol als de essentie — in tegenstelling tot de ervaring van vele anderen, vernam ik. Toen was de strijd om de Philipsprijs voor de beste promovendusvoordracht al gestreden, maar de jury kon nog inspiratie opdoen hoe de knoop het beste door te hakken. Door het simultaan volgen van een andere sessie heb ik niet veel meer opgepikt dan de diversiteit van onderwerpen en stijlen. Zodat wat mij betreft de winnaar, Johan Bosman, net zo goed op grond van zijn presentatie over het omkeerprobleem van de Galoistheorie geselecteerd zou kunnen zijn, als op grond van zijn initialen, die overeenkomen met die van de winnaar van de eerste editie in Delft vorig jaar, én die van de maakster van de wisseltrofee, Joke Bontenbal. Tijdens de jaarvergadering van het Wiskundig Genootschap werd de prijs uitgereikt, evenals de Zaalbokaal, voor het beste Nieuw Archief artikel, aan Derk Pik. Bovendien werden Van de Craats, Verhulst en Van Dalen er tot erelid benoemd. Na dat feest was er nog net gelegenheid om Murre een voordracht over zijn promotor Kloosterman te horen geven, in de geschiedenisessie. Zonder iemand direct Connie Palmen als biograaf toe te wensen, drongen alternatieve presentaties zich wel onontkoombaar op in de fantasie van het gehoor.

De slotvoordracht werd gegeven door de 32-jarige winnaar van de Fieldsmedaille, Terence Tao, die aio's in de zaal deed verzuchten dat ze zich wel heel oud begonnen te voelen. De voordracht, over het snel reconstrueren van ijle signalen, met belangrijke medische toepassingen, voldeed niet voor iedereen aan de hoge verwachtingen — maar: subtropische voorjaarsdagen in Leiden, lunch in de buitenlucht, de kans beide wiskundemeisjes analoog tegen het lijf te lopen, en bij vlagen prachtige voordrachten, wat kan een NMC-ganger zich meer wensen? Zo kunnen we welgemoed wederom een jaar licht autistisch toeleven naar een nieuw hoogtepunt, wanneer in juli 2008 het NMC onderdeel van het Europees Mathematisch Congres in Amsterdam zal uitmaken. Want de Franse filosoof wist het reeds: Het Echte Leven, dat zijn de anderen.

Wieb Bosma

Jan Wiegerinck

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergracht 24

1018 TV Amsterdam

janwieg@science.uva.nl

Inaugurele rede

Fijne functie

Complexe functietheorie heeft binnen de wiskundige analyse al honderdvijftig jaar een centrale plaats. Ze heeft ook talrijke toepassingen: vele resultaten bijvoorbeeld op het gebied van de getallentheorie zijn ondenkbaar zonder geavanceerde functietheorie, maar ook is de theorie van bepalend belang geweest voor de aerodynamica. Jan Wiegerinck, op 1 januari 2006 benoemd tot hoogleraar analyse aan de Universiteit van Amsterdam, laat iets zien van twee richtingen in de functietheorie en de mensen daarachter en betoogt dat wiskunde niet slechts als handige hulpwetenschap beschouwd moet worden, maar dat zij ook een veel fundamenteeler doel dient.

Voor een zuiver wiskundige is het geven van een voordracht voor een zo gevarieerd gezelschap als hier vandaag aanwezig is, geen eenvoudige opgave. Tenminste als hij de ambitie heeft op zo'n manier over zijn vak te spreken, dat na afloop de toehoorders de zaal verlaten met het idee iets te hebben opgestoken. De oplossing die ik gekozen heb, is om niet alleen over mijn vak maar ook over de mensen er achter te spreken. Ik zal iets vertellen over functietheorie van meer complexe veranderlijken, dat is het gebied waarop ik al jaren met veel plezier werkzaam ben, en over een vrij onbekende stroming binnen de functietheorie van één complexe veranderlijke. Voor mijzelf was het een verrassing dat deze twee nu, honderd jaar na hun ontstaan, in mijn huidige onderzoek samenkomen. Daaromheen zal ik iets zeggen over de zeer verschillende levens van Fritz Hartogs en Emile Borel, de twee protagonisten van deze richtingen. Ik ga het wagen daar conclusies uit te trekken voor

mijn vak, het onderwijs, de samenleving en mijzelf.

Hartogs' leven

Welnu, het afgelopen jaar was het eeuwfeest van de functietheorie van meer complexe veranderlijken. Friedrich Moritz (Fritz) Hartogs zette ons vakgebied in 1906 op de kaart door in de *Mathematische Annalen* zijn Habilitationsschrift te publiceren. De indrukwekkende titel was: 'Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer veränderlichen fortschreiten' [1]. Daarmee legde hij de grondslag voor tot nu toe honderd jaar onderzoek op mijn vakgebied.

Hartogs [2] werd op 20 mei 1874 geboren te Brussel. Zijn vader was een Duits-Joodse koopman. In Frankfurt am Main bracht hij zijn jeugd door en doorliep het Gymnasium. Hij studeerde in Hannover, Berlijn en München

en promoveerde daar in 1903 bij Pringsheim op een proefschrift over functies van twee complexe veranderlijken. Hij was al in 1900 in Hamburg getrouwd met Therese Gerull; het echtpaar kreeg vier kinderen.

Hartogs begon een mooie carrière als wetenschapper. In München werd hij na zijn promotie privatdocent; vervolgens in 1910 buitengewoon hoogleraar en in 1927 gewoon hoogleraar op persoonlijke titel. Van Hartogs wordt gezegd dat hij een voorzichtige, stille, enigszins angstige natuur had, en "dat hij de gave zich op te dringen ten enen male ontbeerde". Hij wees bijvoorbeeld een aanbod af om aan de universiteit van Frankfurt hoogleraar te worden, met het argument dat hij de financiële positie van deze universiteit te onzeker vond met het oog op de zorg voor zijn gezin. Dit is bijzonder opmerkelijk, want dit professoraat was wetenschappelijk, financieel en sociaal heel aantrekkelijk, omdat deze universiteit een liberale nieuwe privé-universiteit was, gefinancierd door Joodse bankiers. We kunnen ons bij dit verhaal allemaal de wat wereldvreemde wiskundige voor de geest halen, die in het gewone leven even precies en zorgvuldig probeert te zijn als in zijn wiskunde.

Met het aan de macht komen van de Nazi's in 1933 neemt het leven van Hartogs, zoals van zoveel Joodse mensen, een trieste wen-



Jan Wiegerinck

theorie

ding. In 1935 dwongen de Nazi's alle Joodse ambtenaren met pensioen te gaan. In 1938, na de Kristallnacht, werd Hartogs voor enige weken in Dachau geïnterneerd. In 1939 wordt hij uit de *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* gezet.

Hartogs was een voorzichtig mens en niet dom. Al in 1933 had hij zijn huis op naam van zijn niet-Joodse vrouw laten zetten. Zo dacht hij de confiscatie van hun bezit door het Nazi-regime te voorkomen. Joden zonder vaste woon- of verblijfplaats konden namelijk zonder omhaal gedeporteerd worden, en het vinden van andere woonruimte was voor hen bijkans onmogelijk. In 1941 bleek deze constructie niet meer voldoende. Het echtpaar kwam tot de conclusie dat alleen een echtscheiding, of in ieder geval een aanvraag daartoe, in beslagname van hun huis kon voorkomen. In goede harmonie besloten ze dat Therese echtscheiding zou aanvragen en Fritz zich zou verzetten. Zo rekten ze de zaak een tijdje, maar in januari 1943 werd de scheiding uitgesproken. Het gevolg was dat Hartogs vanaf dat moment illegaal in zijn huis verbleef. Het vinden van andere woonruimte was uitgesloten, dus dreigde voor Hartogs ieder moment deportatie. Zijn omstandigheden verslechterden voortdurend; hij was al geïsoleerd geraakt van zijn wiskundige vrienden en werd meer en meer depressief. Hij kon

de situatie niet lang het hoofd bieden. Op 18 augustus 1943 pleegde hij met slaapmiddelen zelfmoord.

Hartogs heeft het allemaal vrij vroeg zien aankomen. Toch heeft hij nooit naar het buitenland proberen te vluchten. Waarom is niet duidelijk. Zorg voor zijn familie kan een rol hebben gespeeld, maar misschien paste zo'n grote stap gewoon niet bij zijn natuur.

Functietheorie rond 1900

Omdat Hartogs' werk grote verschillen laat zien tussen functietheorie in één en in meer veranderlijken, wil ik eerst iets over functietheorie in één veranderlijke zeggen. In de functietheorie bestuderen we de betrekkelijk kleine, maar zeer belangrijke klasse van analytische functies en hun aanverwanten. Tot ver in de 19de eeuw waren deze functies, die complexe getallen als argument hebben, de enige die serieus bestudeerd werden. Vandaar de naam van mijn vakgebied.

Ik zal u niet vermoeien met een formele definitie van complexe getallen en analytische functies. Het is voldoende aan complexe getallen te denken als punten van een plat vlak, waarmee we kunnen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen als met gewone getallen. We spreken wel van het complexe vlak, waarbij we de reële getallen op een lijn, de x-as terug vinden. Functies die de meesten

van ons al op de middelbare school zijn tegengekomen, zoals veeltermen, exponentiële functies, logaritmen, sinussen en cosinussen kregen een zinvolle definitie op de complexe getallen en werden zo voorbeelden van analytische functies. Een functie als de absolute waarde is echter niet analytisch.

Functietheorie gaat terug tot Leonhard Euler (1707-1783). Hij was de eerste die succesvol met functies manipuleerde door hun definitiegebied van de reële getallen uit te breiden naar het complexe vlak en bereikte daarmee verbijsterende resultaten van grote schoonheid, zoals de oplossing van het Baselse probleem [3]:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

De theorie werd verder ontwikkeld en geformaliseerd door August L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) en Bernhard Riemann (1826-1866). Toen Hartogs in 1906 zijn baanbrekende ontdekkingen deed, had functietheorie net een fantastisch hoogtepunt bereikt. Riemann had geformuleerd wat heden ten dage het beroemdste vermoeden in de wiskunde [4] is: de zeta-functie

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$$

heeft buiten zijn reële nulpunten slechts nulpunten op de “kritieke lijn” $x = \frac{1}{2}$.

En, voortbouwend op de geniale inzichten van Euler en Riemann, hadden de Belgische markies Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin [5] (1866-1962) en de Fransman Jacques Hadamard [6] (1865-1963) in 1896 onsterfelijkheid bereikt: onafhankelijk van elkaar bewezen zij de Priemgetalstelling [8].

Euclides wist al dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Priemgetallen zijn alleen deelbaar door 1 en zichzelf, dus 2, 3, 5, 7, 11, 13 zijn priem. Maar, hoeveel zijn er kleiner dan een gegeven getal n ? De priemgetalstelling spreekt uit dat dit er ongeveer $n/\log n$ zijn. Er zijn dus ongeveer $4 \cdot 10^{97}$ priemgetallen kleiner dan 10^{100} .

Vooruitgang in de wiskunde

Honderd jaar na het eerste bewijs van de priemgetalstelling heeft mijn leermeester, Jaap Korevaar, in een populair artikel een ‘eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling’ gegeven [9]. Dit laat zien hoe hard de wiskunde vooruitgaat, en hoeveel beter we begrijpen wat vroeger als ongelooflijk moeilijk gezien werd. Tegenwoordig kunnen onze Bachelor studenten deze wiskunde aan, en zij geven er mooie voordrachten over!

Sterker nog, slimme scholieren uit het VWO zijn in staat om de oplossing van het Baselse probleem te doorgronden, en inzicht te krijgen in de problematiek rond priemgetalverdeling en de Riemann zeta-functie. Dit doen ze onder de inspirerende begeleiding van Jan van de Craats en Roland van der Veen in “webklassen”, die door ons instituut worden georganiseerd. Dat zijn intensieve cursussen via internet voor vwo-ers uit klas vijf en zes, waar jaarlijks tientallen middelbare scholieren aan mee doen.

Hartogs’ werk

Waar Euler mee begon, het uitbreiden van het

definitiegebied van analytische functies, en wel zo dat de uitgebreide functie nog steeds analytisch is, heet *analytische voortzetting*. De klasse van analytische functies is zo groot dat analytische voortzetting betrekkelijk vaak mogelijk is, maar zo klein dat als analytische voortzetting mogelijk is, dit in wezen maar op één manier gaat. Men kan de functie gedefinieerd door $f = 1$, ($x < 0$) op allerlei manieren voortzetten tot de complexe getallen, maar alleen de voortzetting $f = 1$ voor alle complexe getallen is een analytische voortzetting.

Analytische voortzetting was in 1900 goed begrepen: men wist dat er bij ieder gebied functies te vinden zijn die niet analytisch voortzetbaar zijn buiten dat gebied. U moet maar van mij aannemen dat dit een heel natuurlijk resultaat is.

Hartogs’ grote ontdekking was nu dat dit voor analytische functies van twee of meer veranderlijken niet opgaat. Hij toonde in 1906 aan dat de meeste gebieden in de meerdimensionale complexe ruimte de eigenschap hebben dat iedere analytische functie op zo’n gebied voortzetbaar is tot een groter gebied! Deze ontdekking en alle complicaties en verfijningen van het verschijnsel houden de *meer-complexeveranderlijken-gemeenschap* tot op de dag van vandaag bezig.

Maar Hartogs deed meer. Hij bewees ook dat functies van meer veranderlijken al analytisch zijn als aan een milde conditie is voldaan: ze moeten analytisch zijn als functie van één veranderlijke, wanneer we de andere veranderlijken constant houden.

Voor iedere tweedejaars wiskundestudent, die geleerd heeft dat deze uitspraak niet geldig is wanneer we analytisch door continu of differentieerbaar vervangen, komt dit resultaat als zeer verrassend. Maar verrassender is nog het bewijs dat Hartogs gaf, vooruitlopend op de theorie van plurisubharmonische functies. Deze werden pas in 1942 door Long ingevoerd [10]. Op plurisubharmonische functies kom ik nog terug.

Potentiaaltheorie

Mogelijk heeft u nu enig idee bij het woord functietheorie, hopelijk heeft u een beeld van de geschiedenis van dit vakgebied en misschien begrijpt u dat het fijn kan zijn om dit vakgebied te beoefenen, maar het fijne ervan weet u nog niet, en daar wil ik in het vervolg van mijn oratie op in gaan. Daarvoor moeten we het even over potentiaaltheorie hebben.

Euler, Riemann en hun tijdgenoten beoefenden functietheorie niet alleen omdat het zo’n mooi vak is. Functietheorie is een belangrijk hulpmiddel voor klassieke potentiaaltheorie en stromingsleer in het vlak. Ook al is onze ervaringswereld driedimensionaal, veel problemen kunnen door een vorm van symmetrie worden teruggebracht tot een tweedimensionaal probleem, dat met functietheorie eenvoudig kan worden opgelost. Vloeistofstroming om objecten en, tot op zekere hoogte, ook de stroming van gassen kunnen in de tweedimensionale ruimte met functietheorie worden berekend. In het begin van de vorige eeuw rekende Joukowski [11] op die manier aan de opwaartse druk die op een vliegtuigvleugel door de langsstromende lucht wordt uitgeoefend. Hij kon zo een eerste benadering voor het ideale vleugelprofiel geven.

Bij potentiaaltheorie gaat het om potentiaalvelden die ontstaan ten gevolge van een ladingsverdeling of massaverdeling. In zo’n veld bevindt een deeltje (geladen of met massa) zich op een energieniveau afhankelijk van de plaats, en ondervindt daardoor een kracht. Als je het veld kent, kun je de kracht die wordt uitgeoefend uitrekenen, en daarmee in principe ook de baan die het deeltje zal volgen. Ook de werking van de kooi van Faraday of van een bliksemafleider kun je door potentiaaltheorie goed begrijpen. Als natuurkundig model is klassieke potentiaaltheorie in het begin van de twintigste eeuw ingehaald door de quantummechanica, maar het belangrijkste fundamenteel-wiskundige probleem van de potentiaaltheorie werd pas in de jaren dertig door Frostman [12] opgelost.



Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin (1866–1962), Friedrich Moritz Hartogs (1874–1943) en Emile Borel (1871–1956)

Er zitten leuke wiskundige kanten aan potentiaaltheorie die voor een natuurkundige nauwelijks relevant zijn. Ik noem er twee. Een potentiaalveld, wij noemen dat een subharmonische functie, zal in de praktijk continu van de plaats afhangen, maar in de theorie hoeft een subharmonische functie niet continu te zijn. Daarnaast zullen geleiders in de natuur nooit capaciteit nul hebben (dat zou betekenen dat iedere ladingsverdeling op zo'n geleider een onbegrensde potentiaal voortbrengt, en dat betekent dat de geleider heel erg klein is), maar in de potentiaaltheorie zijn zulke geleiders juist interessant.

Fijne functietheorie

Wiskundigen noemen een functie f continu als het zo is dat $f(x)$ willekeurig dicht bij $f(y)$ komt te liggen als x maar dicht genoeg bij y ligt. Zo is de functie $f(x) = x^2$ continu, maar de functie $f(x) = 0$ als $x < 0$, $f(x) = 1$ als $x \geq 0$, is niet continu. De definitie staat of valt met het begrip 'dicht bij' en daar is door wiskundigen veel over nagedacht. Het staat ons min of meer vrij om 'dicht bij' zo te definiëren als het ons uitkomt. We denken ons de afstand tussen 0 en positieve getallen minstens een half, en de functie f wordt continu! Dat lijkt misschien raar, maar in het dagelijks leven zijn we daar meer aan gewend dan u denkt.

Ik geef een voorbeeld. Inwoners van Amsterdam weten dat de Grimborgwal twee minuten lopen van de Staalstraat is: de Grimborgwal ligt dicht bij de Staalstraat, maar met de auto doe je er tien minuten over! Je kunt zeggen dat de functie 'rijtijd met de auto' niet continu van de plaats afhangt. Maar je kunt ook je afstandsbegrip aanpassen: definieer de afstand tussen A en B als de tijd die je nodig hebt om met de auto van A naar B te gaan. Met dit afstandsbegrip is onze functie wel continu, maar gaat de topologie, bij wijze van spreken de kaart van het gebied, er heel anders uitzien.

Een aanpassing van de topologie die meer functies continu maakt, heet een *verfijning* van de topologie. In potentiaaltheorie komt dit als volgt uit de verf. De *fijne topologie* is de topologie die alle subharmonische functies continu maakt. Het is een zeer gecompliceerde topologie, maar dit wordt meer dan goedgemaakt door de voordelen van de nieuwverworven continuïteit. Een typische open verzameling ziet er uit als een stukje vlak waaruit oneindig veel, steeds kleinere gaatjes geponst zijn. Het resultaat is een soort gatenkaas, met zoveel gaten dat er geen stukje kaas zonder gat meer uit gesneden kan worden.

Hoe diep je ook inzoomt, je blijft gaatjes zien.

Fijne functietheorie is nu functietheorie in de context van de fijne topologie. Deze vorm van functietheorie is veel lastiger dan de gewone. Want de fijne topologie is zo groot dat alleen de eindige verzamelingen compact zijn en daardoor werken de gebruikelijke redeneringen niet meer. Pas in de jaren zestig en zeventig ontwikkelde de Deen Bent Fuglede [13] de theorie van fijne analytische functies van één veranderlijke, maar een robuuste theorie voor meer veranderlijken is er nog steeds niet.

Emile Borel (1871-1956) was de eerste die zich realiseerde dat veel resultaten uit de functietheorie doorgang vinden voor analytisch-achtige functies op fijn-open verzamelingen. Hij promoveerde bij Darboux in 1894 op een proefschrift getiteld *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. In hedendaagse termen geformuleerd: hij toonde aan dat fijne analytische voortzetting een zinvol begrip is. Daarmee weerlegde hij een vermoeden van Poincaré [15]. Hij breidde zijn resultaten verder uit en publiceerde er in 1917 [16] een boekje over: *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*.

Borel werd al in zijn tijd als een groot wiskundige beschouwd vanwege zijn werk in de maattheorie, stochastiek en functietheorie. Zijn *fonctions monogènes* werden in eerste instantie enthousiast onthaald en gezien als een technisch hoogstandje. In de loop der jaren veranderde het perspectief echter en bekeek men de *fonctions monogènes* steeds meer als een vrij excentriek uitstapje. Ik moet eerlijk bekennen dat ik tot voor kort dezelfde mening was toegedaan.

Eigen onderzoek

Aan de theorie van functies van meer complexe veranderlijken gingen de ontwikkeling van fijne functietheorie geruisloos voorbij. Naar nu blijkt is dat ten onrechte. Collega's uit Uppsala [17] en Krakow [18] en mijn assistent Said El Marzguioui en ik [19] hebben laten zien dat fijne analyticiteit te voorschijn komt als natuurlijk verklaring voor verschijnselen waarmee we in ons vakgebied geconfronteerd worden. Je ziet in de functietheorie van meer veranderlijken wel vaker dat een perifeer één-veranderlijke resultaat helpt bij het beantwoorden van een centrale vraag in meer veranderlijken.

Wij bestuderen de potentiaaltheorie voor meer complexe veranderlijken. De technische term is *pluripotentialtheorie*, en het gaat daarbij om de deelklasse van sub-

harmonische functies die onder complexe coördinatentransformaties behouden blijven. Deze zogenaamde plurisubharmonische functies kom je op veel plaatsen in de wiskunde tegen.

Meer nog dan in de klassieke theorie zijn verzamelingen van capaciteit nul, wij spreken van pluripolaire verzamelingen, de moeite van het bestuderen waard, en dat is precies wat ik nu in mijn onderzoek doe. Hartogs-achtige voortzettingsstellingen treden ook voor deze verzamelingen op. Natuurlijk hebben pluripolaire verzamelingen er geen boodschap aan dat wij fijne functietheorie lastiger vinden dan de gewone. Fijne analytische variëteiten, wat deze ook mogen zijn, blijken even goed capaciteit 0 te hebben als gewone variëteiten. Wij moeten ons daar maar aan aanpassen, en eigenlijk vinden we dat wel leuk. Fijne functietheorie vanuit een meer veranderlijkenstandpunt levert ons nog jaren stof tot nadenken!

Borel's leven

We keren nu terug naar Borel [20]. Emile Borel is geboren in 1871 in Frankrijk, in het dorpje Saint-Affrique, district Aveyron in de Midi Pyreneeën, waar zijn vader dominee was. Emile werd in zijn dorp een wonderkind genoemd. Maar op achttienjarige leeftijd deed hij in heel Frankrijk van zich spreken door als eerste te eindigen in zowel het concours voor de Ecole Polytechnique als in het concours voor de Ecole Normale Supérieure. Nog voor zijn promotie werd hij in 1893 docent in Lille, in 1897 docent aan de Ecole Normale Supérieure en in 1904 hoogleraar aan de Sorbonne. In 1910 werd hij directeur van de ENS. Vervolgens werd hij in 1921 lid van de Académie Française. Hij organiseerde nationale en internationale wetenschappelijke samenwerkingsverbanden, en hij was doorslaggevend in de oprichting van het Institut Henri Poincaré en het Centre National de la Recherche Scientifique.

Opmerkelijk is dat Borel, en met hem veel Franse wiskundigen aan het eind van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw, zeer politiek betrokken waren. Dit is in tegenstelling tot Hartogs, en eigenlijk ook in tegenstelling tot de meeste wiskundigen van alle tijden. Hoe kwam dat? Borel behoorde tot de Franse school in functietheorie waartoe rond 1900 naast de eerder genoemde Jacques Hadamard ook Paul Painlevé en Paul Appell behoorden. Hadamard en Painlevé waren studiegenoten, Borel had gestudeerd bij Painlevé en was getrouwd met een dochter van Appell, Marguerite, die onder het pseudo-



Alfred Dreyfus, Petit Journal en L'Aurore

niem Camille Marbo bekendheid als schrijver verwierf. Painlevé had weer les gehad van Appell en hij had Borel bij de familie Appell geïntroduceerd. De grote maatschappelijke en politieke betrokkenheid van juist deze wiskundigen is eigenlijk afkomstig van de toevalligheid dat Hadamard de achteroom was van de vrouw van ene Alfred Dreyfus.

De Dreyfusaffaire [21] was nog ingewikkelder dan de relaties binnen de Franse wiskundige wereld. Alfred Dreyfus was in 1895 de enige Joodse officier werkzaam voor de Franse inlichtingendienst. Hij werd in 1895 van spionage voor Duitsland beschuldigd en tot levenslang op Duivelseiland veroordeeld. Ook nadat er overduidelijk bewijs was gevonden dat Dreyfus onschuldig was en dat hij geen eerlijk proces had gekregen, weigerde de Franse legerleiding de zaak te herzien. Integendeel, groeperingen binnen de legerleiding vervalsten documenten en getuigenissen, en stopten deze in geheime dossiers die gebruikt werden om het vonnis kracht bij te zetten. Het nieuwbenoemde hoofd van de inlichtingendienst, kolonel Picquard, die de werkelijke toedracht achterhaalde, werd zelfs voor schending van ambtsgeheim veroordeeld! Picquard nu, was, nog een toevalligheid, een huisvriend van de Appells.

Er zat een zwaar antisemitisch luchtje aan de zaak. De Franse schrijver Emile Zola schreef een beroemd geworden open brief, gericht aan de president van de Republiek, waarin hij de zaak aan de kaak stelde: *J'accuse* vulde in januari 1898 de voorpagina van het dagblad L'Aurore. De affaire verdeelde Frankrijk tot op het bot in een rechts-conservatief anti-Dreyfus blok en een links, progressief-intellectueel pro-Dreyfus blok. En nog steeds zijn de Fransen niet over de affaire uitgepraat [22]. Uiteindelijk, na drie herzieningsprocessen en één keer gratie, werden Dreyfus en Picquard in 1906 volledig in ere hersteld.

Hadamard, die Dreyfus overigens maar een keer ontmoet had, was in 1897 al overtuigd van diens onschuld. Maar hij kon zijn vriend Paul Painlevé [23] er niet van overtuigen. Deze kon zich eenvoudigweg niet voorstellen dat er zulke verdorvenheid heerste binnen het Franse leger. Pas toen hij er op attent werd gemaakt dat ook zijn gesprekken met Hadamard verdraaid in het dossier terechtkwamen, om achteraf als bewijs voor de schuld van Dreyfus te dienen, realiseerde hij zich dat hij blind was geweest. Daarna was hij helemaal om. Hij sluit zich aan bij de *Ligue des droits de l'Homme*, een club die het werk voor de rechten van Dreyfus generaliseerde naar de rechten van Franse burgers,

en stort zich in de politiek. Hij werd in 1910 gedeputeerde voor zijn district en in 1917 minister van Defensie. Dat bleef hij met enige tussenpozen tot 1932. In 1917 en 1925 was hij minister-president [24].

Borel was een goede vriend van Painlevé geworden en hij had dezelfde belangstelling voor politiek en techniek ontwikkeld. Vanaf het begin pro-Dreyfus, behoorde ook hij tot de *Ligue des droits de l'Homme*. In de Eerste Wereldoorlog diende Borel als officier bij de artillerie. Painlevé haalde hem in 1917 van het front om leiding te geven aan de *Services des Inventions intéressant la Défense Nationale*, (de dienst voor uitvindingen van nut voor de nationale verdediging).

Borel was al rond 1900 politiek actief geworden en als gevolg van zijn ervaringen in de oorlog werd hij een uitgesproken voorstander van Europese en internationale samenwerking en politiek activist. In 1924 werd hij gedeputeerde van l'Aveyron. In 1925 was hij, radicaal socialist, zelfs even minister van Marine. Hij is van 1927 tot 1947 burgemeester van zijn geboortedorp Saint-Affrique geweest. Na de Eerste Wereldoorlog was Borel een van de drijvende krachten achter de *Association Française pour la Société des Nations* en de *Union internationale des associations pour la Société des Nations*. Deze organisaties worden als voorlopers van de Europese Unie en de Verenigde Naties beschouwd.

In de zomer van 1955 nam Borel nog deel aan een grote statistiekconferentie in Brazilië. Tijdens de overtocht terug is hij ernstig gevallen en aan de gevolgen van die val is hij op 3 februari 1956 overleden.

Conclusies

Wanneer ik Hartogs en Borel naast elkaar zet, is mijn eerste gedachte dat de meeste wiskundigen, en misschien wel de meeste wetenschappers, meer op Hartogs lijken dan op Borel, en vervolgens dat Hartogs wel erg in zijn Ivoren Toren zat en er goed aan had gedaan zijn lot meer in eigen hand te nemen. Nee, dan als Borel in de wereld te staan!

Maar zo eenvoudig ligt dat niet. Het engagement van Borel en zijn Franse tijdgenoten kwam door enkele 'life events' tot stand die hem en zijn collega's bijzonder raakten. Het is maar de vraag of dat zonder Dreyfus en de eerste wereldoorlog ook gebeurd zou zijn. En zo expliciet als Borel, en meer nog Painlevé, zijn er niet veel in het publieke domein getreden. Zij hadden bijzondere kwaliteiten! Als Jood in Nazi-Duitsland had Hartogs zeker geen mogelijkheden het lot te beïnvloeden zoals Borel. Op zijn best had hij kunnen ontsnappen.

Laten we nu eens om ons heen kijken. Is er nu aanleiding voor wiskundigen om uit hun instituten te komen?

Universiteit van Amsterdam

Om de hoek zien we de Universiteit van Amsterdam met al zijn problemen. Dit is een feestelijke gelegenheid, maar velen van u zijn maar al te bekend met de problematiek. Twee titels spreken boekdelen. Louise Fresco sprak op 8 januari de Diesrede uit. De titel van haar rede was *Het einde van de universiteit*. In Folia stond een paar weken daarvoor een artikel van de psycholoog Denny Borsboom getiteld *Kafka aan het Spui*. Het aardige van mijn huidige functie van instituutsdirecteur is nu dat je ziet dat zij, en alle klagers, helemaal gelijk hebben en zelfs dat zij zich lang niet van alles wat misgaat bewust zijn. En, je hoort ook nog eens wat: bijvoorbeeld van Arne Brentjes, hoofd *Audit en control* van onze universiteit: 'chaos is een management instrument' [25].

Ik zie echter ook dat de mensen in de organisatie over het algemeen werkelijk hun best doen, en het beste met de universiteit voor hebben. De organisatorische en administratieve problemen van onze universiteit zijn zeker ernstig, maar over vijf jaar zullen ze opgelost zijn, en vast weer vervangen door andere. Ik zal doen wat ik kan om ons instituut en onze faculteit er goed doorheen te helpen.

Gelukkig zijn die problemen maar van secundair belang. Want, eerlijk is eerlijk, waar het werkelijk om draait is onderwijs en onderzoek. Dat is over het algemeen goed aan de UvA. Binnen de faculteit waar ik met enig gezag over spreken kan, zelfs erg goed. We staan hoog in de universitaire hitparade. Hetzelfde geldt, denk ik, ook voor de kwaliteit van onze studenten. Binnen onze opleiding zijn de studenten zeker zo begaafd als aan buitenlandse topinstellingen; een van de problemen waar we tegen aanlopen bij het verhogen van de studenteninstroom wiskunde, is dat het instapniveau van de masteropleiding mathematics bij voortduring te hoog blijkt voor buitenlandse studenten, ook als zij van goede Amerikaanse colleges afkomstig zijn.

Ik kan het toch niet laten een paar algemene aanbevelingen te doen voor het beleid aan de UvA. Omdat we vaak met Amerikaanse topuniversiteiten vergeleken worden, baseer ik die op de Amerikaanse situatie.

U zult gemerkt hebben dat ik het alleen over onze wiskundestudenten had. Aan studenten van andere faculteiten geven wij niet of nauwelijks les. In de VS staat het bestuur van ieder college dat een beetje wil meetellen erop dat alle studenten wiskundeonder-

wijs krijgen en dat het door het Maths Department gegeven wordt. Mijn Amerikaanse collega's denken hier gemengd over. Dit onderwijs aan studenten met weinig belangstelling voor wiskunde wordt over het algemeen als minder leuk ervaren dan het geven van 'fijne functietheorie' om maar wat te noemen. Amerikaanse universiteiten doen dit ook niet omdat ze de wiskundigen zo aardig vinden en van werk willen voorzien. Zij hebben het idee dat zij hun studenten moeten vormen, opvoeden zo u wilt. En bij een goede opvoeding hoort wiskunde, gedoceerd door wiskundigen (en Engelse literatuur gedoceerd door Engelse-literatuurwetenschappers enzo voorts). Het zou goed zijn als het college van bestuur dit beleid zou overnemen!

Het verbaast mij, en ik vind het onverstandig, dat de UvA vorming van fondsen niet stimuleert. Dit zou kunnen door inkomsten uit derde geldstroom of anderszins vast te zetten. In de nota *Herziening allocatie eerste geldstroommiddelen* [26] staat expliciet "De UvA is evenwel geen bank, en hoeft dus geen geld op te potten". Princeton, Harvard en Yale doen dat juist wel! Leuke dingen als speciale leerstoelen, dure apparatuur en goede faciliteiten kunnen worden betaald uit de rente-inkomsten van het *endowment*, dat miljarden kan bedragen. Maar belangrijker is nog dat gegarandeerde eigen inkomsten beschermen tegen de willekeur van de overheid.

Een derde aanbeveling is dat de ondersteunende structuren binnen de UvA zich de Amerikaanse mentaliteit jegens het primaire proces tot missie moeten maken. Als eenvoudige postdoc in Princeton hoorde ik daar al van de centrale diensten: "Wij zijn er om jullie je werk beter te laten doen." Bij ons leeft dat misschien wel bij het individu, maar vreemd genoeg is de organisatie niet zo ingericht.

Mijn vierde en laatste aanbeveling is: als het CvB besluit dat grootschalige organisatorische en administratieve wijzigingen noodzakelijk zijn — en om de zoveel jaar zijn ze onvermijdelijk — betrek dan de medewerkers daarbij. Niet alleen als gebruiker, maar ook als expert! Durf gebruik te maken van de kwaliteit die de universiteit in huis heeft! De UvA gaat ons ter harte en voorbeelden als Borel en Painlevé laten zien dat wetenschappers en juist wiskundigen, zeer goed in staat zijn een algemeen belang te dienen als het hun ter harte gaat!

Nederland kenniseconomie

Wat verder weg zien we onderwijs in Nederland. De Nederlandse overheid hecht er groot belang aan om van Nederland een kennis-

economie te maken. Maar we lezen in de krant [27] dat eerstejaars studenten niet kunnen spellen en niet kunnen rekenen. Waarom gaat het zo mis? Ik ben bang dat de overheid ideeën over onderwijsvernieuwing, goed of slecht, vooral omarmt om bezuinigingen op onderwijs van een ideologisch tintje te voorzien. Protesten van docenten mogen dan niet baten, die kunnen makkelijk als 'ouderwets en conservatief' worden weggezet. In Nederland is zo het basis- en middelbaar onderwijs in de exacte vakken de afgelopen twintig jaar op een verpletterende manier te pakken genomen.

De laatste onderwijsvernieuwing is het 'nieuwe leren', dat probeert in te spelen op de ontwikkeling van computer, internet en grafische rekenmachine. Het gaat om competenties, harde kennis zou snel verouderen en hoeft daarom niet in het hoofd te worden opgeslagen; er zijn ook geen 'geleerde' docenten voor nodig. Dit 'nieuwe leren' is volkomen onzin [28]. Computers, internet en grafische rekenmachine breiden onze harde kennis met een zacht wolkje uit [29]. Veel kennis, groot wolkje, geen kennis, geen wolkje. Wat het nieuwe leren propageert, komt er op neer harde kennis te vervangen door zachte wolkjes, en dan houd je aan het eind niets over.

Hier zou je willen dat een Nederlandse Borel zou opstaan. Ik zeg dit met enige schroom, want met de eerste Nederlandse wiskundige die zich in de politiek waagde, liep het slecht af. U weet natuurlijk dat Johan de Witt in 1672 is gelyncht. Maar toch, onze jongens van Jan de Witt [30] komen uit hun instituten en in het geweer! Ik doel op diegenen die vanuit de universiteiten proberen om de kwaliteit van het basis- en middelbaar onderwijs weer op hoog niveau te brengen. Vier hoogleraren die aan het Korteweg-de Vries Instituut verbonden zijn of waren, horen bij deze club: Jan van de Craats, Robbert Dijkgraaf, Klaas Landsman en Lex Schrijver. Als directeur van het Korteweg-de Vries Instituut ben ik daar trots op en ik wil hun werk van harte steunen.

Waarom wiskunde?

Dit is het goede moment om over de zin en het nut van de wiskunde te spreken. Uit wat ik eerder zei heeft U wellicht kunnen opmaken dat wiskunde een nuttige hulpwetenschap is voor andere disciplines. Dit is volkomen juist. Onze hele moderne maatschappij bestaat bij gratie van de toepassingen van de wiskunde, en al te vaak is dit onderbelicht. Maar als onderzoeker interesseren de toepassingen mij persoonlijk minder. Het zijn de vragen die de wiskunde zelf stelt en de prachtige

antwoorden, die mij motiveren en fascineren. De woorden van Hilbert [31] “Wir müssen wissen. Wir werden wissen” zijn mij op het lijf geschreven.

Maar mag dat van uw belastinggeld? Ik geloof van wel. Want het is niet alleen zo dat wiskunde wel een handig hulpmiddel is voor toepassingen. Nee, alleen bij de gratie van ons ingebouwd wiskundig vermogen kunnen wij mensen disciplines en beroepen beoefenen waar wiskunde als hulpwetenschap een

belangrijk onderdeel van is. En dat worden er steeds meer! Abstractievermogen, ruimtelijk inzicht, analytisch denken, kortom het vermogen tot het doen van wiskunde, is fundamenteel in onze maatschappij. De ontwikkeling van wetenschap en techniek en daarmee onze hele samenleving, wordt vooral door onze wiskundige kant voortgestuwd.

Ik trek twee conclusies. Ten eerste, mensen hebben steeds meer de noodzaak, maar ook het recht, om hun wiskundige kant te ont-

wikkelen — let wel, ik zeg daarmee niet dat iedereen goed in wiskunde moet worden of het maar moet gaan studeren. Ten tweede, verdere ontwikkeling van de wiskunde is noodzakelijk voor onze vooruitgang. Er is geen keus anders dan wiskunde goed te onderwijzen en verder te ontwikkelen. En dat is nu precies hetgeen ik als onderzoeker, docent en instituutsdirecteur probeer te doen. 

Referenties

- Hartogs, Friedrich M., ‘Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer veränderlichen fortschreiten’, *Math. Ann.* 62, (1906), 1-88.
- Zie bijvoorbeeld Bauer, F.L., ‘Friedrich Hartogs, das Schicksal eines jüdischen Mathematikers in München’, *Aviso, Zeitschrift für Wissenschaft und Kunst in Bayern*, (2004), 34-41. www.stmwfk.bayern.de/downloads/aviso/2004.1.aviso_34-41.pdf
- Euler leerde dit “Baselse probleem” kennen door zijn leermeester Johann Bernoulli (1667-1748), die in Bazel hoogleraar wiskunde was. Bernoulli had het probleem waarschijnlijk weer van de Italiaans wiskundige Pietro Mengoli (1626-1686).
- Riemann formuleerde het probleem terloops in zijn artikel: ‘Ueber die Anzahl Primzahlen unter einer gegebenen Grösse’, *Monatsberichte der Berliner Akademie*, November 1859, 1-10. www.wolfram.com/products/publicon/samples/riemann/Riemann.pdf. Het Riemann vermoeden is een van de Clay-Millennium problemen: de Clay foundation loofde in 2000 een miljoen uit voor diegenen die zo’n probleem oplossen. Zie <http://www.clay.org>.
- De la Vallée Poussin, Charles Jean Gustave Nicolas, ‘Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers’, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 1897.
- Hadamard, Jacques, ‘Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques’, [*J*] *S. M. F. Bull.* 24, (1896), 199-220
- Inderdaad, beiden bereikten bijna de honderd.
- Het bewijs van de priemgetalstelling gebruikt alleen dat de zeta-functie geen nulpunten heeft op de lijn $x = 1$.
- Korevaar, Jaap, ‘Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling’, *Nieuw Arch. wiskd.* (5) 5 (2004) no. 4, 284-291.
- zie Lelong, Pierre, ‘Définition des fonctions plurisousharmoniques’, *C.R. Acad. Sci.* 215, (1942). 398-400.
- Joukowski, Nikolai, E. ‘Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger’, *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, (1910), 281; and (1912), 81.
- Frostman, Otto, *Potentiel d’équilibre et Capacité des Ensembles*, Thèse, Lund, 1935.
- Fuglede, Bent, ‘Sur les fonctions finement holomorphes’, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 31 (1981), no. 4, vii, 57-88.
- Het proefschrift verscheen als artikel, Emile Borel, ‘Sur quelques points de la théorie des fonctions’, *Ann. de l’Éc. Normale* 12 (1895), 2-55.
- Poincaré had uitgesproken dat analytische voortzetting over een contour die bestaat uit verdichtingspunten van singulariteiten niet zinvol gedefinieerd kan worden, zie: Poincaré, Henri, ‘Sur les fonctions à espaces lacunaires’, *Amer. J. Math.* 14 (1892) no 3, 201-221.
- Emile Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d’une variable complexe*, rédigées par Gaston Julia, Paris, Gauthier-Villars, 1917.
- Edlund, Tomas; Jöricke, Burglind, ‘The pluripolar hull of a graph and fine analytic continuation’, *Ark. for Mat.* 44 (2006), 39-60.
- Edigarian, Armen; Siciak, Józef; Zwonek, Włodzimierz, ‘Bounded holomorphic functions with multiple sheeted pluripolar hulls’, *Studia Math.* 175 (2006) no 3, 233-247.
- El Marzguioui, Said; Wiegerinck, Jan, ‘The plurifine topology is locally connected’, *Potential Anal.* 25, (2006) no 3, 283-288.
- Zie bijvoorbeeld: J.M.Guieu, ‘Emile Borel et la coopération européenne’, *Bulletin de l’institut Pierre Renouvin*, 1998. ipr.univ-paris1.fr/spip.php?page=imprimer&id_article=33.
- Zie bijvoorbeeld: fr.wikipedia.org/wiki/Affaire_Dreyfus of www.answers.com/topic/dreyfus-affair.
- Vrij recent nog voerde Jean Doise (1917-2006) argumenten aan dat er überhaupt geen sprake was van spionage, maar dat een contraspionage-afdeling van het franse leger heeft geprobeerd onjuiste informatie te planten. Dit zou door een andere afdeling als “verraad” ontdekt zijn. Duidelijk is wel dat Dreyfus er niets mee te maken had. Zie: Jean Doise, *Un secret bien gardé: histoire militaire de l’affaire Dreyfus*, Éditions du Seuil, collection XXème siècle, 1994.
- Zie: Anne-Laure Anizan, Paul Painlevé (1863-1933) *Un scientifique en politique*, Thèse de doctorat, Institut d’Études Politiques de Paris, Centre d’Histoire Politique, Paris, 2006. ecole-doctorale.sciences-po.fr/theses/theses.en.ligne/anizan.hist.2006/anizan.hist.2006.pdf.
- Om precies te zijn, er waren drie kabinetten Painlevé: van 13-09-1917 tot 13-11-1917, van 14-04-1925 tot 27-10-1925 en van 29-10-1925 tot 22-11-1925. Zie ook: perso.orange.fr/savoir-plaisir/histoire/Republique.3.htm.
- Arno Brendtjes, “Personal communication”, oktober 2006.
- Herziening allocatie eerste geldstroommiddelen - bestuurlijk voorstel versie 2.3 - Universiteit van Amsterdam, 1 november 2005.
- Vergelijk bijvoorbeeld Doekle Terpstra, voorzitter HBO-raad: “het niveau bij veel eerstejaars bachelors is dramatisch” in *De Volkskrant*, 17 januari 2007. In dezelfde krant een scherpzinnige brief van Thomas von der Dunk over de onzin van “het nieuwe leren”. Veel eerder al was er de actie “Lieve Maria” van Nederlandse studentenorganisaties, www.lievemaria.nl.
- Von der Dunk, loc.cit.
- Bijvoorbeeld: Als ik niet had geweten dat Johan de Witt wiskundige was en de uitdrukking “jongens van Jan de Witt” niet kende, had ik ook niet op internet gevonden dat de uitdrukking “jongens van Jan de Wit(t)” waarschijnlijk terugslaat op de door De Witt opgerichte voorloper van het Corps Mariniers, (en dat het ook een verwijzing zou kunnen zijn naar de troepen van ene Johan de Wert).
- Johan de Witt: Leider en dienaar van de republiek, Vormer harer machtigste vloten, Verdediger der vrije zee, Verzorger van ’s lands gelden, Wiskundige (opschrift op de achterkant van de sokkel van het standbeeld van Johan de Witt op De Plaats, in Den Haag).
- Hilbert sprak deze aansporing uit in zijn beroemde Königsberger rede, 1930. De uitspraak staat ook op zijn grafsteen.

Jeanine Daems

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
jdaems@math.leidenuniv.nl

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
smeets@math.leidenuniv.nl



Persi Diaconis



Doron Zeilberger

De favoriet van Persi Diaconis

Doron Zeilberger

Elke maand vragen Jeanine Daems en Ionica Smeets op hun weblog www.wiskundemeisjes.nl aan een bekende wiskundige wie zijn favoriete nog levende wiskundige is. Hiermee willen ze bijzondere wiskundigen van deze tijd eens in het zonnetje zetten. Vanaf nu staat in elke Nieuw Archief voor Wiskunde een bladzijde over zo'n favoriet en zijn werk. Deze keer vragen ze aan Persi Diaconis wie hij bewondert.

Als Persi Diaconis in Nederland is, trekken we hem tijdens een kaas-wijn-borrel aan zijn mouw om te vragen wie zijn favoriete, nog levende wiskundige is. Diaconis is professor in de statistiek aan Stanford en één van de beste goochelaars ter wereld. Hij twijfelt even, maar kiest dan Doron Zeilberger.

Zeilberger werd in 1950 geboren in Israël en werkt inmiddels al jaren aan de Amerikaanse Rutgers Universiteit. Hij bewees verschillende mooie resultaten in de combinatoriek en staat bekend om zijn excentrieke gedrag. Begin dit jaar besloot hij bijvoorbeeld om zijn artikelen niet meer naar tijdschriften te sturen, omdat hij het helemaal gehad heeft met referees die het artikel niet begrijpen en dan afwijzen [1].

Een van Zeilbergers belangrijkste resultaten is het bewijs van de alternating sign matrix conjecture [2]. Dit vermoeden gaat over matrices die als elementen alleen -1 , 0 en 1 hebben, waarin de elementen in een rij of kolom steeds tot 1 optellen en waarin de niet-nul elementen in elke rij en kolom steeds afwisselende tekens hebben. Een extra eis is dat het eerste en laatste niet-nul element in elke rij en kolom een 1 moet zijn.

Voorbeeld:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De vraag is hoeveel van deze matrices er bestaan. Uit de jaren

'80 stamt vermoeden dat het aantal $n \times n$ matrices van deze vorm gelijk is aan:

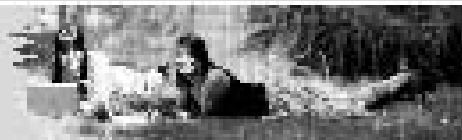
$$\frac{1! 4! 7! \dots (3n-2)!}{n! (n+1)! \dots (2n-1)!}.$$

In 1995 was Zeilberger de eerste die dit resultaat bewees. Later dat jaar verschenen twee kortere, elegantere bewijzen, waarvan een van Zeilberger zelf. Met het eerste bewijs deed Zeilberger iets heel uitzonderlijks. Het bestaat uit een hele lading sublemma's en hij vroeg meer dan tachtig wiskundigen om elk een deel van het bewijs na te kijken door een of meer van die sublemma's te controleren. Tussen de co-auteurs staan grootheden als Donald Knuth naast de scholiere Tamar Zeilberger en computer Shalosh B. Ekhad.

Persi Diaconis herinnert zich een prachtige voordracht van Zeilberger uit die tijd. Toen hij net de alternating sign matrix conjecture had bewezen, werd Zeilberger uitgenodigd om te spreken op een heel kleine universiteit in Amerika. Deze universiteit was zo klein, dat de wiskundefaculteit uit maar vijf medewerkers bestond. Op Zeilbergers voordracht waren meer dan honderd mensen afgekomen. Zeilberger begon zijn voordracht als volgt: "U verwacht natuurlijk dat ik zal spreken over mijn bewijs. In plaats daarvan ga ik iets anders doen. We zijn hier te gast bij deze vijf wiskundigen en ik durf te wedden dat niemand van u weet, wat deze mensen doen. Dát ga ik u vandaag vertellen." Vervolgens ging hij de vijf medewerkers van de universiteit één voor één af en vertelde over hun stellingen, bewijzen en artikelen. We hopen dat Doron Zeilberger snel wordt uitgenodigd om op ons instituut een voordracht te geven! 

Referenties

1. www.math.rutgers.edu/~zeilberg/Opinion77.html
2. www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamirim/mamirimhtml/asm.html



Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

bmols@wanadoo.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006

Verdeel de software en verover de markt

Apparaten die computerchips fabriceren, draaien op een kolossaal softwareprogramma. Drie tot vier maal per jaar verschijnt er een nieuwe versie. Is het niet handiger het programma in stukken te hakken? Elk stuk kan dan nog sneller als nieuwe versie op de markt verschijnen. De grote vraag is: wat is dan het optimale aantal stukken?

Het Veldhovense bedrijf ASML is een van de grootste producenten ter wereld van lithografiemachines: machines die computerchips produceren. Deze machines schrijven met licht van verschillende (kleine) golflengten structuren op een siliciumschijf, de *wafer*. Hoe kleiner de golflengte van het licht, hoe kleiner de structuren. Eén enkele wafer bestaat uit een aaneengesloten patroon van dezelfde computerchips. Grote chipfabrikanten zoals Intel en Motorola maken gebruik van de asml-machines. De chipindustrie is zeer dynamisch. Al enkele decennia verdubbelt het aantal transistors op een computerchip elke twee jaar. De chipfabrikanten willen snel inspelen op nieuwe ontwikkelingen. Bij de lithografiemachines levert asml een softwarepakket voor de aansturing. Om te voldoen aan de steeds veranderende eisen van de markt (nieuwe machines en nieuwe functies), vernieuwt het bedrijf dat softwarepakket drie tot vier maal per jaar. De tijd tussen het begin van de ontwikkeling van een nieuw pakket en het moment dat het op de markt verschijnt, is ongeveer negen maanden. Het installeren van de nieuwe software op een lithografiemachine is kostbaar. Elk uur dat de machine stil staat, kost de chipfabrikant duizenden euro's. Om die reden willen niet alle afnemers van de

machines elke nieuwe versie installeren. Dat betekent voor asml dat er wereldwijd verschillende oudere versies circuleren van hun software. En het bedrijf wil die allemaal blijven ondersteunen. Bovendien hebben afnemers vaak helemaal geen behoefte aan een nieuwe versie van de complete software, maar zijn ze vaak alleen geïnteresseerd in een nieuwe versie van een deel van de software.

Twintig miljoen regels code

“Ons huidige softwarearchief bestaat uit ruwweg twintig miljoen regels code”, vertelt Joost Smits van asml. In de loop van de ruim twintig jaar dat het bedrijf bestaat is die code telkens weer aangepast en verbeterd. Het bedrijf heeft momenteel vijfhonderd man in dienst alleen voor het softwaregedeelte van de machines. “Elke machine bestaat uit subsystemen die met elkaar moeten kunnen praten”, legt Smits uit. “Bijvoorbeeld de lens, de laser en de tafel met de wafer waarop de chipstructuren worden geschreven. Maar in de software zit nu alles aan alles vast. We zouden op dit moment niet eens in staat zijn om van elk subsysteem een nieuwe softwareversie op de markt te brengen. De komende twee jaar willen we daarom het softwarearchief in onafhankelijke stukken hakken.” Daarom wil asml

uitzoeken of het loont om het softwarearchief op te delen in modules, die het bedrijf ieder afzonderlijk in vernieuwde versie op de markt kan brengen. Het idee is dat een vernieuwde module sneller op de markt kan worden gebracht dan een vernieuwd compleet pakket, simpelweg omdat de module kleiner is. De voordelen van dit idee lijken echter groter dan ze zijn. De ontwikkelingstijd neemt inderdaad af met afnemende grootte van een module. Maar voor de testtijd van een module geldt iets gecompliceerdere. Voor een deel van de tests die asml uitvoert, neemt de testtijd af met afnemende modulegrootte. Dat is logisch. Maar er zijn ook tests die een standaardlengte hebben, onafhankelijk van de modulegrootte. Voor dat testdeel neemt de tijd razendsnel toe als er meer modules komen. Omdat het bedrijf ook alle oude versies ondersteunt, moet elke nieuwe module ook getest worden in een omgeving van alle oude versies van alle andere modules. De ontwikkelingstijd plus de testtijd samen bepalen de marktintroductietijd: hoe snel na het ontwikkelingsbegin een module op de markt verschijnt. De opgave is nu om uit te zoeken wat het optimale aantal modules is, waarbij die marktintroductietijd minimaal is. Dat blijkt een gecompliceerd wiskundig probleem te zijn.

Drie modules optimaal

“Het grote probleem is dat het optimale aantal modules zo sterk afhangt van welke aan-

names je doet”, vertelt wiskundige Jacques Resing van de TU Eindhoven. “Het hangt af van de grootte van de modules. Hebben alle modules gelijke grootte, of verschillen die? Ga je uit van gelijkblijvende mankracht om de modules te testen, of neem je meer mankracht in dienst. Ook hangt het af van hoe populair een bepaalde module is. Afhankelijk van de precieze aannames die we doen, vinden we andere oplossingen. Daarom zijn we voorzichtig met het trekken van harde conclusies.” Om het probleem te vereenvoudigen, namen de wiskundigen aan dat alle modules dezelfde grootte hebben, dat de beschikbare capaciteit gelijk blijft, en dat bekend is hoeveel vraag er naar een bepaalde module is. Zo namen ze als voorbeeld aan dat de populairste module twee maal zo populair is dan de op een-na-populairste, en drie maal zo populair als de op twee-na-populairste, enzovoort. “Dat is een soort wetmatigheid die je in de praktijk wel vaker vindt”, zegt Resing. “Bijvoorbeeld bij de populariteit van webpagina’s of bij het vóórkomen van veelgebruikte woorden in teksten.” Onder deze aannames is de voornaamste conclusie dat de marktintroductietijd minimaal is voor drie modules. “We hebben gerekend aan een paar voorbeelden”, legt Resing uit. “Dan zien we dat als je van 1 naar 2 naar 3 modules gaat, de marktintroductietijd bij elke stap afneemt. Maar hak je de software in meer dan drie stukken, dan begint de marktintroductietijd juist snel toe te nemen. Dat komt omdat je elke nieuwe module steeds moet testen tegen alle oude versies van alle andere modules. Dan weegt de kortere ontwikkeltijd voor een kleinere module niet langer op tegen de steeds langer wordende testtijd.” Wat betekent het in drie stukken hakken voor het aantal nieuwe versies dat dan per jaar op de markt kan verschijnen? Resing: “Een populaire module kan zo’n vijf tot zes keer per jaar uitkomen. De klant gaat er dus op vooruit, omdat hij sneller nieuwe eigenschappen in de software heeft dan in de oude situatie. Voor een minder populaire module is een of twee maal per jaar genoeg.” Het optimale aantal modules blijkt sterk af te hangen van hoe populair diverse modules zijn. Het kan ook zijn dat er een groot verschil is tussen hoeveel vraag er is naar de populairste module en naar de minst populaire module. En wel een veel groter verschil dan in de wetmatigheid die ook voor de populariteit van webpagina’s blijkt te gelden. In dat geval kan het optimale aantal modules zelfs toenemen tot vijf. De minst populaire module hoeft dan maar eens in de drie jaar te worden vernieuwd, de op-een-na minst populaire eens

in de twee jaar, de volgende eens per jaar, en ten slotte kunnen de twee meest populaire modules maar liefst elke maand worden vernieuwd. “Wij bevelen asml aan om eerst heel goed te inventariseren hoe sterk de vraag is naar de verschillende modules, voordat ze het optimale aantal modules bepalen”, aldus Resing.

Paarsgewijs testen

Omdat de testtijd zo snel blijkt toe te nemen bij meer modules, hebben de wiskundigen nagedacht over een slimme manier om die testtijd te beperken. Een handige truc blijkt het zogeheten paarsgewijs testen. Het is bekend dat de meeste softwareconflicten ontstaan door twee modules die na vernieuwing niet langer meer goed met elkaar kunnen samenwerken. Veel minder vaak komt het voor dat er softwareproblemen ontstaan doordat drie modules samen niet meer goed blijken te kunnen functioneren. Met die informatie valt het aantal tests flink terug te brengen. Resing: “Dat betekent dat je niet langer elke nieuwe module tegen alle versies van alle andere modules hoeft te testen, maar dat je alleen nog maar naar paren van modules hoeft te kijken. Bijvoorbeeld alleen module 1 en 2, module 2 en 3, module 3 en 4, enzovoort. De test van bijvoorbeeld 1,2,3 of van 2,3,4, enzovoort, kun je allemaal weglaten. De kans dat het daar misgaat is immers klein in de praktijk.” Stel dat drie modules elk drie versies hebben die in de afgelopen tijd op de markt zijn gekomen. Het testen van elke versie van een module van elke andere versie van elke andere module, levert dan 27 tests. Bij paarsgewijs testen blijven er maar negen test over. Bij vijf modules met elk vier versies brengt paarsgewijs testen het aantal tests zelfs terug van 1024 naar 23. De winst van slim testen is dus groot.

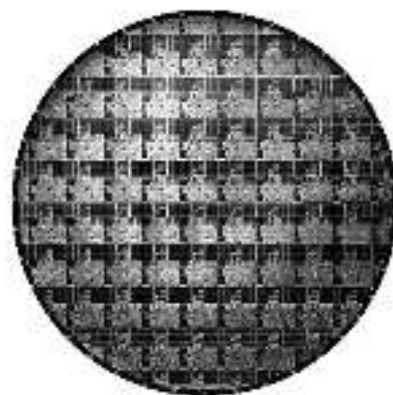
“Voor ons was het heel goed dat een groep wiskundigen met een heel andere blik tegen ons probleem aankijkt”, vertelt Joost Smits van asml. Zuiver en alleen door op technische gronden naar de software te kijken, had asml het vermoeden dat ze het hele pakket in drie stukken konden hakken, die elk afzonderlijk als module op de markt zouden kunnen verschijnen. Smits: “Dat is hetzelfde aantal als het resultaat van de studiegroep. Maar wij hadden daar totaal geen wiskundige onderbouwing voor. Het is mooi om te zien dat twee verschillende manieren van kijken hetzelfde resultaat opleveren. Op basis van de wiskundige resultaten weten we nu ook dat het belangrijk is om meer gegevens te verzamelen over hoe vaak onze klanten een nieuwe versie willen hebben van een bepaalde module.

Het eerste wat we gaan doen is om onze code, waarin alles met alles samenhangt, uiteen te rafelen in onafhankelijke stukken. Daarna kunnen we dan bekijken hoeveel modules we echt op de markt willen brengen.”

Meer informatie
www.asml.com



Figuur 1 Een asml Twinscan lithografiemachine. Duidelijk zichtbaar is het lichtpad door de enorme lens met al zijn elementen. Onderin zijn de twee waferposities te zien (vandaar de term Twin in de naam). In de eerste positie worden de wafers opgemeten en in de tweede worden ze belicht. (foto: asml)



Figuur 2 Een siliciumwafer met computerchips. Een asml lithografiemachine brengt met licht de structuren aan op zo’n siliciumwafer. (foto: www.intel.com)

Microprocessor	Year of introduction	Transistors
8004	1971	2.300
8008	1972	6.000
8080	1974	29.000
8086	1982	290.000
Intel 286	1985	1.200.000
Intel 386	1985	2.750.000
Intel 486	1989	1.200.000
Intel Pentium	1993	3.100.000
Intel Pentium II	1997	7.500.000
Intel Pentium III	1999	9.500.000
Intel Pentium 4	2000	42.000.000
Intel Xeon	2001	29.000.000
Intel Itanium 2	2002	220.000.000
Intel Itanium 2 processor (EM64T-enabled)	2004	292.000.000

Figuur 3 Het exponentieel toegenomen aantal transistors op een computerchip in de loop van de tijd (bron: www.intel.com)

Klaas Pieter Hart

Faculteit EWI
TU Delft
Postbus 5031
2600 GA Delft
k.p.hart@tudelft.nl

Geschiedenis

De stelling van Van der Waerden

Tachtig jaar geleden verscheen in het Nieuw Archief voor Wiskunde een artikel van de hand van B. L. van der Waerden. Achter de onschuldige titel ‘Beweis einer Baudetschen Vermutung’ ging een stelling schuil die nog steeds zijn invloed in de wiskunde doet gelden. Klaas Pieter Hart, universitair hoofddocent aan de Technische Universiteit Delft en onderzoeker op het gebied van de algemene topologie en verzamelingenleer bespreekt de betekenis van deze stelling voor uiteenlopende gebieden van de wiskunde.

Wie in MathSciNet naar ‘Van der Waerden’s theorem’ zoekt vindt zo’n honderddertig recensies. Op een paar na gaan de artikelen over de stelling die Van der Waerden in 1927 in het Nieuw Archief voor Wiskunde publiceerde [18]. Die stelling luidt:

Behauptung (I,k). Es existiert eine Zahl $n = n(l, k)$ mit der folgenden Eigenschaft: ist die endliche Zahlenfolge $1, 2, \dots, n$ in k fremde Klassen eingeteilt, so liegt in einer dieser Klassen eine arithmetische Progression von l Zahlen.

De stelling kwam voort uit pogingen een door Baudet uitgesproken vermoeden te bewijzen: *als l een natuurlijk getal is en de verzameling der natuurlijke getallen wordt in twee klassen verdeeld dan bevat één van die verzamelingen een rekenkundig rijtje van lengte l .* In [19] beschreef Van der Waerden hoe hij (“na de lunch”) samen met Artin en Schreier aan het probleem ging werken. Het geval $l = 2$ is flauw: men hoeft slechts naar de verzameling $\{1, 2, 3\}$ te kijken om te zien dat bij een tweedeling één klasse zeker twee elementen heeft. Na wat proberen bleek dat bij elke tweedeling van $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ één van de klassen zeker een rekenkundig rijtje van lengte 3 bevat (de verdeling $\{\{1, 3, 6, 8\}, \{2, 4, 5, 7\}\}$

laat zien dat 9 minimaal is). Schreier opperde toen dat zoiets wellicht altijd mogelijk was: bij elke l bestaat een getal $W(l)$ zó dat bij elke tweedeling van $\{1, \dots, W(l)\}$ één van de klassen een rekenkundig rijtje van lengte l bevat.

Duidelijk is dat het bestaan van $W(l)$ voor alle l het vermoeden van Baudet impliceert; het omgekeerde is ook waar, dit volgt uit de compactheid van het topologische product $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Immers, zij $l \in \mathbb{N}$ en neem aan dat er voor elke N een opdeling $\{A_N, B_N\}$ van $\{1, 2, \dots, N\}$ is zó dat in beide klassen geen rekenkundige rij ter lengte l bestaat. Men verkrijgt zo een rij punten $(x_N)_N$ in $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, waarbij $x_N(n) = 0$ als $n \in A_n$ of $n > N$ en $x_N(n) = 1$ als $n \in B_N$. Deze rij heeft een convergente deelrij met limiet x en in de door x bepaalde verdeling van $\mathbb{N}$ bevat geen der klassen een rekenkundige rij ter lengte l , hetgeen strijdt met Baudet’s vermoeden. Een argument als dit, waarbij een eindige versie van een bewering uit een oneindige versie wordt afgeleid (of omgekeerd) heet, om voor de hand liggende redenen, een *compactheidsargument*.

Met de waarden $W(2) = 3$ en $W(3) = 9$ in de hand ging men op zoek naar $W(4)$ en, algemeen, naar een methode om $W(l)$ uit $W(l-1)$ te maken, of beter: uit het bestaan van $W(l-1)$ het bestaan van $W(l)$ af te leiden — zoals later zal blijken geven de gangbare bewijzen grove overschattingen van de optimale waarden van de $W(l)$. Artin bedacht toen dat als het bestaan van $W(l)$ voor alle l zou zijn aangetoond men ook het bestaan van $W(l, k)$ kan aantonen, waarbij $W(l, k)$ als $W(l)$ gedefinieerd is, maar dan voor verdelingen in k klassen, dus $W(l) = W(l, 2)$. Immers, zij $N = W(W(l))$ en verdeel $\{1, \dots, N\}$ in vier klassen: A_1, A_2, A_3 en A_4 . Er is een rekenkundige rij ter lengte $W(l)$ binnen $A_1 \cup A_2$ of



Figuur 1 Van links naar rechts: Petersson, Furch, Artin, Herglotz, Reidemeister, Brauner, Haack, Hoheisel, Slotnik, Reinhardt, Schreier, Blaschke, Behnke, Kloosterman, van der Waerden

binnen $A_3 \cup A_4$ en binnen die rij is er een van lengte l die in slechts één van de vier klassen ligt. Conclusie: $W(l, 4) \leq W(W(l))$. Op deze manier vind men bovengrenzen voor $W(l, 2^k)$ voor alle k en l en daarmee ook voor $W(l, k)$ voor alle waarden van k en l .

Met deze extra parameter in de stelling richtte de aandacht zich weer op l ; de strategie werd om met inductie naar l te bewijzen dat $W(l, k)$ bestaat voor *alle* k . Het voordeel hiervan is dat de inductieaanname veel sterker geworden is dan in het oorspronkelijke probleem. Merk ook op dat $W(2, k)$ eenvoudig te bepalen is: $W(2, k) = k + 1$.

Van der Waerden schreef zijn artikel in termen van klassen en equivalente getallen ($a \sim b$ als a en b in dezelfde klasse zitten); ik zal het veelal over kleuren hebben en een rekenkundige rij waarin alle termen dezelfde kleur hebben *monochroom* noemen. Dit sluit meer aan bij het algemene spraakgebruik in de wereld van de Ramsey-achtige stellingen.

Artin kwam op het idee om naar blokken opeenvolgende natuurlijke getallen te kijken. Een kleuring van de natuurlijke getallen met twee kleuren genereert namelijk andere kleuringen: voor elke n wordt $\{n, n+1, \dots, n+i-1\}$ in twee klassen verdeeld en dat kan op 2^i mogelijke manieren; op deze wijze krijgen we een kleuring van $\mathbb{N}$ met 2^i veel kleuren. Als men de verzameling $\{1, \dots, W(l-1, 2^i) + i\}$ met twee kleuren kleurt krijgt men een rekenkundige rij A van lengte $l-1$ die slechts één van de 2^i afgeleide kleuren aanneemt; dat wil zeggen dat alle blokken $\{a, a+1, \dots, a+i-1\}$ op één en dezelfde wijze gekleurd zijn. Daarmee is elke rekenkundige rij $\{a+j : a \in A\}$ monochroom geworden; men kan op deze manier dus grote hoeveelheden monochrome rekenkundige rijen genereren, van lengte $l-1$ welis-

waar, maar toch...

Van der Waerden wist hier goed gebruik van te maken bij het uiteindelijke bewijs. We laten zien hoe men een bovengrens voor $W(3, 2)$ kan vinden. Net als in vele bewijzen uit de Ramseytheorie speelt ook hier het idee van een pre-monochrome verzameling een rol. We noemen een rekenkundige rij van lengte l *pre-monochroom* als het beginstuk van lengte $l-1$ monochroom is — het idee zal zijn dat door voldoende veel pre-monochrome rekenkundige rijen een monochroom diagonaal te trekken moet zijn.

We hebben de natuurlijke getallen met twee kleuren gekleurd, zeg rood en blauw. In elk drietal (opeenvolgende) getallen zijn er twee die dezelfde kleur hebben; dat impliceert dat in elk blok van vijf, $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4\}$, een pre-monochroom rekenkundig rijtje ter lengte 3 zit: onder $n, n+1, n+2$ zijn er twee met dezelfde kleur en die zijn met $n+2$ of $n+3$ of $n+4$ tot een (zeker pre-monochroom) drietal uit te breiden. We nemen daarom hierboven $i = 5$ en vinden onder de getallen 1 tot en met $W(2, 2^5) = 33$ twee getallen a en b zó dat $\{a, a+1, a+2, a+3, a+4\}$ en $\{b, b+1, b+2, b+3, b+4\}$ exact dezelfde kleuring vertonen. Binnen die twee blokken kunnen we dan pre-monochrome rekenkundige rijtjes ter lengte 3 vinden en wel op dezelfde relatieve posities, om de gedachten te bepalen op posities 1, 2 en 3. Neem verder $c = b + (b - a)$, dan is $\{a, b, c\}$ een rekenkundige rij. Aangenomen dat $\{a+1, a+2, a+3\}$ niet al monochroom is kunnen we als volgt een monochroom 3-terms rekenkundig rijtje maken: bekijk $\{a+1, b+2, c+3\}$ en $\{a+3, b+3, c+3\}$, dit zijn rekenkundige rijtjes en allebei pre-monochroom: $a+1$ en $b+2$ zijn gelijk gekleurd, zeg rood, en $a+3$ en $b+3$ ook, dus blauw. Dan is of $\{a+1, b+2, c+3\}$ monochroom rood of $\{a+3, b+3, c+3\}$

monochroom blauw.

Met een scherp oog is hier het begin van een afschatting van $W(l, 2)$ te ontwaren: de blokken moeten allereerst $W(l - 1, 2)$ lang zijn, om monochrome rijtjes ter lengte $l - 1$ te kunnen maken. Verder willen we nog één term toevoegen; het verschil tussen twee opeenvolgende termen in zo'n rij is niet groter dan $(W(l - 1, 2) - 1)/(l - 2)$, dus blokken ter lengte

$$M = W(l - 1, 2) + (W(l - 1, 2) - 1)/(l - 2)$$

bevatten zeker pre-monochrome rijen ter lengte l . Daarna moeten we tot $W(l - 1, 2^M) + (M - 1)$ gaan om een rekenkundige rij ter lengte $l - 1$ van blokken met dezelfde kleuring te kunnen vinden; daar moet nog $(W(l - 1, 2^M) - 1)/(l - 2)$ bij om een extra blok toe te kunnen voegen. Voor $W(3, 2)$ komt men op deze manier uit op $33 + 4 + 32 = 69$ als bovengrens; dat is een stuk groter dan de optimale waarde van 9 maar dat is het probleem met een algemeen geldige redenering: die geeft zelden scherpe grenzen.

Het bovenstaande is een vereenvoudiging van de uitleg uit het artikel [19], dat zeer lezenswaardig is en waarin ook een geval met drie kleuren wordt uitgelegd. Dat laatste laat zien dat men bij k kleuren kan verwachten $k - 1$ diagonaliseerstappen te moeten doen en dit heeft weer grote gevolgen voor de afschattingen van $W(l, k)$, we komen daar later nog op terug. Het oorspronkelijke artikel [18] uit 1927 is ook nog steeds de moeite waard, met pen en papier bij de hand leest het makkelijk weg.

Grote verzamelingen

In 1917 had Schur [14] een stelling bewezen die erg op die van Van der Waerden lijkt:

Stelling 1. Bij elke k bestaat een getal $S(k)$ met de eigenschap dat indien $\{1, \dots, S(k)\}$ in k klassen wordt verdeeld (ten minste) 1 van die klassen een oplossing van $x + y = z$ bevat.

Er is echter een verschil. Van der Waerden's stelling is, gezegd, translatie-invariant: als A willekeurig lange rekenkundige rijtjes bevat dan doet $A + 1$ dat ook. De stelling van Schur is niet translatie-invariant: de even getallen bevatten wel een oplossing van $x + y = z$, de oneven getallen niet. De invariantie van de stelling van Van der Waerden bracht Erdős en Turán er toe te vragen of er een notie van 'grote verzameling' bestaat zó dat elke 'grote' verzameling willekeurig lange rekenkundige rijtjes bevat en, natuurlijk, dat bij een eindige opdeling van de natuurlijke getallen ten minste één klasse 'groot' is. Een mogelijke kandidaat was 'positieve bovendichtheid' (positive upper density). Voor een deelverzameling A van $\mathbb{N}$ definieert men deze grootheid als volgt:

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \dots, n\}|}{n}$$

Het door Erdős en Turán uitgesproken vermoeden was: als $\bar{d}(A) > 0$ dan bevat A willekeurig lange rekenkundige rijen.

In 1952 bewees Roth [12–13] dat zulke verzamelingen rekenkundige rijen van lengte 3 bevatten. In 1969 verbeterde Szemerédi [16] dit tot lengte 4 en in 1975 bewees hij, tenslotte, het algemene geval [17]. Ik zal me niet aan een samenvatting van de bewijzen wagen; de lengte van het tweede artikel van Szemerédi zou een indicatie moeten zijn van de moeite die het bewijs gekost heeft.

Dynamische systemen

In 1981 verscheen het boek [5] waarin Furstenberg een algemene

aanpak van combinatorische stellingen door middel van dynamische systemen uiteenzette.

Het basisidee is dat van *herhaling* of *recurrentie*. Een dynamisch systeem bestaat uit een verzameling X en één of meer zelfafbeeldingen van X . Om over recurrentie te kunnen spreken moet X wel van een structuur voorzien zijn; meestal is X voorzien van een metriek of van een maat en zijn de zelfafbeeldingen respectievelijk continu of meetbaar. De stelling van Van der Waerden volgt uit de Meervoudige-Recurrentiestelling van Birkhoff die, ironisch genoeg, vrijwel gelijktijdig bewezen is.

Stelling 2 (Birkhoff's Meervoudige-Recurrentiestelling). Zij X een compacte metrische ruimte en laat $T_1, T_2, \dots, T_l$ een (eindig) aantal continue zelfafbeeldingen van X zijn die onderling commuteren. Dan bestaat er een meervoudig-recurrent punt voor deze afbeeldingen, dat wil zeggen een punt x_0 met daarbij een (stijgende) rij $\langle n_k \rangle_k$ natuurlijke getallen zó dat $\lim_k T_i^{n_k} x_0 = x_0$ voor elke i .

Laat nu $\mathbb{N}$ gekleurd zijn met de kleuren 1 tot en met k . In plaats van te bewijzen dat er willekeurig lange rekenkundige rijtjes van één bepaalde kleur bestaan laten we zien dat er willekeurig lange monochrome rekenkundige rijen bestaan; dit is natuurlijk een equivalente bewering.

De ruimte waar we mee werken is $X = \{1, 2, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$, voorzien van de standaardmetriek d , gegeven door $d(x, y) = 2^{-n(x, y)}$, waarbij $n(x, y) = \min\{n : x(n) \neq y(n)\}$ als $x \neq y$; en $d(x, x) = 0$ voor alle x . Het is welbekend dat (X, d) compact is. We gebruiken alleen de opschuifafbeelding $T : X \rightarrow X$, gedefinieerd door $(Tx)(n) = x(n + 1)$ — elk punt wordt naar links geschoven en de eerste coördinaat wordt vergeten. Elke kleuring van $\mathbb{N}$ met k kleuren bepaalt een punt in X en omgekeerd bepaalt elk punt een kleuring. De stelling van Van der Waerden krijgt daarmee de volgende formulering: voor elk punt x en elke l bestaan a en d in $\mathbb{N}$ zó dat $x(a) = x(a + d) = \dots = x(a + ld)$. Merk op dat $x(a) = (T^a x)(0)$, $x(a + d) = (T^d T^a x)(0)$, $\dots$, en $x(a + ld) = (T^{ld} T^a x)(0)$ en dat, in het algemeen, $u(0) = v(0)$ gelijkwaardig is met $d(u, v) < 1$; we zoeken dus een a en een d zó dat de punten $T^a x, T^{a+d} x, \dots, T^{a+ld} x$ onderling dichter dan 1 bij elkaar liggen.

We passen de stelling van Birkhoff toe op de afsluiting Y van de baan van x , dus $Y = \text{cl}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$, met de eerste l machten van T als de familie afbeeldingen. Die machten commuteren onderling en hun beperkingen tot Y zijn zelfafbeeldingen van Y . We krijgen dus een punt $y_0 \in Y$ en een rij $\langle n_k \rangle_k$ natuurlijke getallen zó dat $T^{n_k} y_0 \rightarrow y_0$ voor elke i . Kies een k zo groot dat, met $d = n_k$, de punten $T^{id} y_0$ ($i \leq l$) allemaal dichter dan $\frac{1}{4}$ bij y_0 liggen; hun onderlinge afstand is dan kleiner dan $\frac{1}{2}$. Omdat T continu en l eindig is kunnen we een $\delta > 0$ vinden met de eigenschap dat voor elke $y \in X$ met $d(y, y_0) < \delta$ alle afstanden $d(T^{id} y, T^{id} y_0)$ kleiner dan $\frac{1}{4}$ zijn. Kies nu een a zó dat $d(T^a x, y_0) < \delta$, dan geldt $d(T^{a+id} x, y_0) < \frac{1}{2}$ voor alle i ; al die punten hebben dus allemaal onderlinge afstand kleiner dan 1, hetgeen we wilden bewerkstelligen.

De stelling van Szemerédi volgt op gelijksoortige wijze uit een maattheoretische versie van de meervoudige-recurrentiestelling.

Stelling 3. Zij (X, B, μ) een maatruimte en laat $T_1, T_2, \dots, T_l$ een (eindig) aantal maatbewarende zelfafbeeldingen van X zijn die onderling commuteren. Dan bestaat voor elke $A \in B$ van positieve maat een $n \in \mathbb{N}$ zó dat $\mu(A \cap T_1^{-n}[A] \cap \dots \cap T_l^{-n}[A]) > 0$.

Deze stelling wordt toegepast in het product $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, voorzien van de producttopologie, met dezelfde schuifafbeelding als boven. We nemen als X de afsluiting van de baan van χ_S , waar S de gegeven verzameling van positieve bovendichtheid is. Op X is een (Borel-)maat μ te definiëren die invariant is onder T en die bovendien de verzameling $A = \{x \in X : x(0) = 1\}$ positieve maat geeft (dit is zeker niet triviaal en gebruikt dat de bovendichtheid van S niet nul is). We gebruiken weer de eerste l machten van T en vinden een d en een punt x in A met de eigenschap dat $T^{id}x \in A$ voor alle i . Dat betekent dat $x(0) = x(d) = x(2d) = \dots = x(ld) = 1$. Er is dan een punt in de baan van χ_S , zeg $T^a\chi_S$, dat op de coördinaten $0, d, \dots, ld$ met x overeenkomt. Maar dat betekent dat $\{a, a+d, \dots, a+ld\} \subseteq S$.

Ultrafilters, halfgroepen en idempotenten

Er is geen 'oneindige' versie van de stelling van Van der Waerden in de zin dat er een kleuring van $\mathbb{N}$ is met twee kleuren zonder *oneindig lange* monochrome rekenkundige rijen. Het bewijs is niet zo moeilijk. Er zijn namelijk maar aftelbaar veel van deze rijen, voor elk tweetal natuurlijke getallen één: bij (a, d) hoort $\{a + id : i \in \mathbb{N}\}$ en omgekeerd, als A een rekenkundige rij is, nemen we de eerste twee termen a en b , dan hoort A bij $(a, b-a)$.

Neem één of andere aftelling $\{(a_k, d_k) : k \in \mathbb{N}\}$ en kleur $\mathbb{N}$ als volgt, recursief, met twee kleuren rood en blauw. Begin met (a_0, d_0) , schrijf $N_0 = a_0 + d_0$ en kleur het interval $[0, N_0]$ zodanig dat a_0 rood wordt en $a_0 + d_0$ blauw. Bij de stap van $k-1$ naar k bekijken we (a_k, d_k) en kiezen we een i_k zó dat $N_{k-1} < a_k + i_k d_k$. We zetten $N_k = a_k + (i_k + 1)d_k$ en kleuren het interval $(N_{k-1}, N_k]$ zodanig dat $a_k + i_k d_k$ rood wordt en $a_k + (i_k + 1)d_k$ blauw. Op deze manier raakt geen enkele *oneindige* rekenkundige rij monochroom. Het is een nuttige oefening eens na te gaan waarom het compactheidsprincipe wel bij het vermoeden van Baudet werkte maar niet bij het maken van oneindig lange monochrome rekenkundige rijen.

In het boek [8] wordt een stelling besproken die, net als de stelling van Van der Waerden, het bestaan van willekeurig grote monochrome verzamelingen van een speciale soort garandeert. Om deze aan Folkman toegeschreven stelling te kunnen formuleren hebben we wat notatie nodig. Als S een deelverzameling van $\mathbb{N}$ is dan noteren we met $\Sigma(S)$ de verzameling van alle sommen van eindige deelverzamelingen van S , dus $\Sigma(\{2^n : n \geq 0\}) = \mathbb{N}$ en $\Sigma(\{10^n : n \geq 0\}) = \{1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, \dots\}$.

Stelling 4. Als $\mathbb{N}$ met eindig veel kleuren gekleurd wordt dan zijn er willekeurig grote *eindige* verzamelingen S waarvoor $\Sigma(S)$ monochroom is.

Het bewijs in [8] maakt direct gebruik van de getallen $W(l, k)$ om een grens aan te geven waaronder de gewenste verzameling reeds te vinden is. Dat bewijs is waarschijnlijk niet sterk genoeg om een oneindige verzameling S op te leveren waarvoor $\Sigma(S)$ monochroom is. Dat zo'n verzameling toch te vinden is werd in [10] door Hindman bewezen.

Stelling 5. Als $\mathbb{N}$ met eindig veel kleuren gekleurd wordt dan is er een oneindige verzameling S waarvoor $\Sigma(S)$ monochroom is.

Kort na het verschijnen van Hindman's artikel gaf Glazer een bewijs dat zeer invloedrijk is geweest. Het maakte gebruik van

rekenkundige eigenschappen van de Čech-Stonecompactificatie, $\beta\mathbb{N}$, van de (discrete) topologische ruimte $\mathbb{N}$.

De punten van de ruimte $\beta\mathbb{N}$ zijn de *ultrafilters* op $\mathbb{N}$. Een ultrafilter is een maximaal filter en een *filter* op $\mathbb{N}$ is een niet-lege familie deelverzamelingen F met de volgende eigenschappen: 1) $\emptyset \notin F$; 2) als $F, G \in F$ dan $F \cap G \in F$ en 3) als $F \in F$ en $G \supseteq F$ dan $G \in F$. De familie van alle filters is partieel geordend door inclusie en ultrafilters zijn maximaal ten opzichte van die ordening. Een belangrijke karakteristiek van ultrafilters is de volgende: (*) als $F \cup G \in F$ dan $F \in F$ of $G \in F$.

Voor elk punt n in $\mathbb{N}$ is $\hat{n} = \{F : n \in F\}$ een ultrafilter en elk ultrafilter met een niet-lege doorsnede is van deze vorm. Wie andere, *vrije*, ultrafilters wil maken moet het Lemma van Zorn toepassen op de familie van alle filters die groter zijn dan het *co-eindige filter* $\text{COF} = \{F : \mathbb{N} \setminus F \text{ is eindig}\}$. Dat iets Keuzeaxiomaachtig nodig zal zijn wordt geïllustreerd door de volgende observatie van Sierpiński: uit een vrij ultrafilter U is als volgt een niet-Lebesgue-meetbare verzameling te maken: definieer een afbeelding φ van $P(\mathbb{N})$ naar $[0, 1]$ door $\varphi(A) = \sum_{n \in A} 2^{-n}$. Het beeld $\varphi[U]$ is dan niet Lebesgue-meetbaar.

In het vervolg van deze paragraaf staan de letters u, v en w voor ultrafilters op $\mathbb{N}$, de punten van $\beta\mathbb{N}$ dus. Het idee van het bewijs van Glazer is om een optelling van ultrafilters definiëren. Dat gaat als volgt. Eerst spreken we af dat $X - n$ een afkorting is voor $\{m : m + n \in X\}$, voor $X \subseteq \mathbb{N}$ en $n \in \mathbb{N}$. Vervolgens definiëren we de *som* $u + v$ van twee ultrafilters u en v door:

$$X \in u + v \Leftrightarrow \{n : X - n \in v\} \in u.$$

Men gaat gemakkelijk na dat dit voor elementen van $\mathbb{N}$ niets nieuws oplevert: $m + n = \hat{m} + \hat{n}$. Ook geldt $\hat{n} + u = u + \hat{n}$ voor alle $u \in \beta\mathbb{N}$ en alle $n \in \mathbb{N}$. In het algemeen geldt $u + v = v + u$ *niet*, maar met enig puzzelen kan men wel aantonen dat de associatieve wet *wel* geldt: $(u + v) + w = u + (v + w)$. Op deze manier is van $\beta\mathbb{N}$ dus een halfgroep gemaakt.

De cruciale opmerking in het bewijs van Glazer is nu de volgende: als u een vrij ultrafilter is dat voldoet aan $u + u = u$ (een *idempotent*) dan bestaat voor elke $U \in u$ een oneindige verzameling S met $\Sigma(S) \subseteq U$. Zodra men zo'n ultrafilter heeft is het bewijs van de stelling van Hindman rond: het ultrafilter bevat, dankzij eigenschap (*), een monochroom element en daar hoort meteen een S als gevraagd bij.

Voor we het bestaan van een idempotent ultrafilter aantonen laten we eerst zien dat het de beweerde eigenschap heeft. Voor elk verzameling X noteren we $X^u = \{n : X - n \in u\}$; dankzij $u + u = u$ volgt dat $X^u \in u$ als $X \in u$. Neem nu $U_0 \in u$ en kies $s_1 \in U_0 \cap U_0^u$; definieer dan $U_1 = U_0 \cap (U_0 - s_1) \setminus \{s_1\}$, dan zijn U_1 en $U_1 - s_1$ deelverzameling van U_0 en $U_1 \in u$ natuurlijk. We gaan zo verder: als U_i gevonden is kiezen we $s_{i+1} \in U_i \cap U_i^u$ en stellen we $U_{i+1} = U_i \cap (U_i - s_{i+1}) \setminus \{s_{i+1}\}$. De verzameling $S = \{s_i : i \in \mathbb{N}\}$ is als gewenst: men bewijst eenvoudig dat een eindige som met s_{i+1} als term van laagste index in U_i zit.

Om te bewijzen dat er inderdaad een idempotent ultrafilter is definiëren we een topologie op $\beta\mathbb{N}$: voor elke deelverzameling X van $\mathbb{N}$ schrijven we $\bar{X} = \{u \in \beta\mathbb{N} : X \in u\}$. De familie $\{\bar{X} : X \subseteq \mathbb{N}\}$ is een basis voor een topologie die van $\beta\mathbb{N}$ een compacte Hausdorff ruimte maakt waarin $\{\hat{n} : n \in \mathbb{N}\}$ een (aftelbare) dichte deelverzameling is.

We werken in de verzameling $\mathbb{N}^*$ van alle vrije ultrafilters. De-

ze verzameling is gesloten, dus compact, en ook gesloten onder de optelling. Het is dus een compacte halfgroep waarin voor elke v de afbeelding $u \mapsto u + v$ continu is. Dit nu is genoeg om het bestaan van een idempotent aan te tonen. Aanwijzing: pas het Lemma van Zorn toe op de familie van alle niet-lege gesloten verzamelingen F die voldoen aan $F + F \subseteq F$; een *minimaal* element van deze familie bestaat uit één punt.

Wat heeft dit alles met de stelling van Van der Waerden te maken? Welnu, die kan ook met dit soort methoden bewezen worden, ook al is er geen oneindige versie van. In [2] wordt bewezen dat elk element van een *minimale* idempotent willekeurig lange rekenkundige rijen bevat. De minimaliteit is ten opzichte van de partiële ordening $\leq$, gedefinieerd door: $u \leq v$ dan en slechts dan als $v = u + v = v + u$. Natuurlijk moet vastgesteld worden dat minimale idempotenten bestaan; dat bewijs vergt een diepere studie van de verrassend rijke algebraïsche structuur van de halfgroep $\beta\mathbb{N}$. Het boek [11] biedt hierin een goede inleiding.

Interessant is dat hier de dynamische aanpak en die via ultrafilters bij elkaar komen in de notie van ‘centrale verzameling’ (‘central set’). Een centrale verzameling bevat zowel willekeurig lange rekenkundige rijen als $\Sigma(S)$ voor een oneindige verzameling S . De definitie van centrale verzameling, volgens Furstenberg [5], is als volgt: $C \subseteq \mathbb{N}$ is centraal als er een dynamisch systeem (X, T) bestaat met daarin een punt x , een uniform recurrent punt y nabij x en een omgeving U van y zó dat $C = \{n : T^n x \in U\}$. Een punt y is *uniform recurrent* als voor elke omgeving U de verzameling $A = \{n : T^n \in U\}$ *syndetisch* is, wat betekent dat $\mathbb{N} = \bigcup_{n \leq N} (A - n)$ voor zekere N . Twee punten x en y zijn nabij (‘proximal’) als $\liminf_n d(T^n x, T^n y) = 0$. Een centrale verzameling kan met behulp van ultrafilters als volgt gekarakteriseerd worden: een verzameling is centraal dan en slechts dan als deze tot een minimale idempotent behoort.

Een meer algebraïsch bewijs is te vinden in [1]. Het maakt gebruik van de ideaalstructuur van compacte halfgroepen. Een *linksideaal* in een halfgroep S is een deelverzameling L die voldoet aan $S + L \subseteq L$; rechts- en tweezijdige idealen worden analoog gedefinieerd. De halfgroep $\beta\mathbb{N}$ is compact en heeft de eigenschap dat elke afbeelding $\rho_v : u \mapsto u + v$ continu is. In dat geval kan men bewijzen dat *minimale* linksidealien bestaan en dat voor elk minimaal linksideaal L en elk tweezijdig ideaal T de inclusie $L \subseteq T$ geldt. Dit wordt toegepast in eindige machten van $\beta\mathbb{N}$. Kies een l en definieer in $(\beta\mathbb{N})^l$ de verzamelingen $E = \text{cl}\{(a + d, \dots, a + ld) : a \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ en $I = \text{cl}\{(a + d, \dots, a + ld) : a, d \in \mathbb{N}\}$. Dan is E een compacte halfgroep en I is een tweezijdig ideaal in E . Als nu u tot een minimaal linksideaal van $\beta\mathbb{N}$ zelf behoort dan zit het punt $(u, \dots, u)$ in E en zelfs in I , dus elk element van u bevat rekenkundige rijen ter lengte l . Dit argument is onafhankelijk van l en dus volgt dat elk element van u willekeurig lange rekenkundige rijen bevat.

Grenzen voor $W(l, k)$

Zodra het bestaan van een getal als $W(l, k)$ is bewezen wil men natuurlijk een idee krijgen van zijn optimale waarde. De bewijzen van de stelling van Van der Waerden die we tot nu toe gezien hebben geven niet echt veel informatie over de getallen $W(l, k)$. Met enig puzzelwerk kan men uit het bewijs van Van der Waerden zelf bovengrenzen voor de $W(l, k)$ distilleren maar door de impliciete dubbele inductie waarin grote machten van k een rol spelen komt men op zeer grove afschattingen, zoals reeds te zien

is aan de uit het bewijs verkregen ongelijkheid $W(3, 2) \leq 69$.

Hier is nog een verschil tussen Schur en Van der Waerden te zien: Schur gaf expliciet een eenvoudige bovengrens voor zijn $S(k)$, de oorspronkelijke formulering van zijn stelling was namelijk als volgt.

Stelling 6. Verteilt man die Zahlen $1, 2, \dots, N$ irgendwie auf m Zeilen, so müssen, sobald $N > m!e$ wird, in mindestens einer Zeile zwei Zahlen vorkommen, deren Differens in der selben Zeile enthalten ist.

Met andere woorden: $S(m) \leq m!e$. In het bewijs in [14] leidt de aanname dat N een ‘slechte’ kleurings toelaat onverbiddeijk naar de ongelijkheid $N < m!e$.

In 1988 publiceerde Shelah een artikel, [15], met een veelzeggende titel waarin hij een nieuw combinatorisch bewijs van de stelling van Van der Waerden gaf. Dat bewijs is met inductie naar l , waarbij k vastgehouden wordt. Het levert bovengrenzen voor de getallen $W(l, k)$ die spectaculair kleiner waren dan de tot dan toe bekende.

In het boek [8] wordt $W(l, k)$ tweemaal naar boven afgeschat; eerst door het oorspronkelijke bewijs van Van der Waerden te analyseren en daarna door dat van Shelah na te lopen. Om aan te geven wat de verschillen zijn definiëren we een hiërarchie van functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Om te beginnen definiëren we $f_1(x) = 2x$; daarna definiëren we, recursief, functies f_m als volgt: $f_{m+1}(1) = 1$ en $f_{m+1}(n+1) = f_m(f_m(n))$. In woorden: $f_{m+1}(n)$ ontstaat door f_m herhaaldelijk, n maal, op 1 toe te passen. Dus $f_2(n) = 2^n$ (herhaaldelijk verdubbelen) voor alle n en

$$f_3(n) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \}^n$$

(herhaaldelijk machtverheffen). Voor de functie f_4 schiet conventionele notatie te kort. Desalniettemin zijn de functies f_n nog ‘klein’; ze behoren tot de klasse van zogeheten *primitief recursieve functies*. De definitie van deze notie, die uit afkomstig is uit de recursietheorie en de theorie van berekenbaarheid, kan men in vrijwel elk boek over logica terugvinden maar, gelukkig, voor onze doeleinden hebben we aan de functies f_n genoeg: een functie f is primitief recursief dan en slechts dan als er een m is zó dat $f = O(f_m)$. Dit betekent dat de functie f_ω , gedefinieerd door $f_\omega(n) = f_n(n)$, niet primitief recursief is.

Het bewijs van Van der Waerden zelf leidt tot een bovengrens voor $W(l, 2)$ die *niet* primitief recursief is; de grens ligt tussen $f_\omega(l-2)$ en $f_\omega(l)$. Het bewijs van Shelah laat zien dat $W(\cdot, 2) = O(f_4)$, voorwaarde een stevige verbetering maar nog steeds ontzagwekkend groot.

Analytische technieken

We hebben gezien dat de stelling van Van der Waerden op diverse manieren bewezen is: combinatorisch, dynamisch, verzameling-theoretisch en ook analytisch: het bewijs van Roth gaat uit van een zo lang mogelijke rij $u_1 < u_2 < \dots < u_k$ in een interval $\{1, 2, \dots, N\}$ zonder rekenkundig rijtje ter lengte 3. Een analyse van de functie

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^k e^{2\pi i \alpha u_i}$$

leidt tot een bewijs dat $k = o(N)$ en daarmee tot het geval $l = 3$

van de stelling van Szemerédi. De argumenten van Szemerédi, voor $l = 4$ en later voor alle l waren weer combinatorisch van aard. In [6] en [7] gaf Gowers analytische bewijzen van de stelling van Szemerédi. Met gebruikmaking van discrete Fouriertransformaties van functies op de groep $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ wist hij de grenzen van Shelah voor $W(l, 2)$ terug te brengen tot

$$2^{2^{2^{2^{l+9}}}}$$

(dat zijn vijf tweeën). Hier gaapt overigens nog een vrij groot gat: in [8] worden ondergrenzen voor $W(l, 2)$ gegeven die ‘slechts’ van exponentiële orde zijn.

Priemgetallen

Positieve bovendichtheid is niet de enige manier om ‘grote’ van ‘kleine’ verzamelingen te onderscheiden. Een andere, veelgebruikte, manier is met behulp van de harmonische reeks. Laten we een verzameling A *harmonisch groot* noemen als $\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$ divergeert en *harmonisch klein* als die reeks convergeert. Een nog openstaand probleem is: bevat elke harmonisch grote verzameling willekeurig lange rekenkundige rijen? Een positief antwoord zou onder meer impliceren dat de verzameling P van de priemgetallen willekeurig lange rekenkundige rijen bevat. Dat laatste nu is voorzover ik weet het nieuwste resultaat over de stelling van Van der Waerden: Green en Tao [9] hebben bewezen dat binnen P inderdaad willekeurig lange rekenkundige rijen te vinden zijn.

Merk op dat $\bar{d}(P) = 0$, dit volgt uit de priemgetallenstelling.

Als we, zoals gebruikelijk, $|P \cap \{1, 2, \dots, n\}|$ afkorten met $\pi(n)$ dan geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1$$

en dus geldt $\bar{d}(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Merkwaardig genoeg berust het bewijs van Green en Tao toch op de stelling van Szemerédi. Uit de samenvatting van [9] halen we de volgende korte beschrijving. De stelling van Szemerédi kan overgebracht worden naar een klasse van verzamelingen die voldoende willekeurig zijn: als een verzameling A voldoende ‘willekeurig’ is en $B \subseteq A$ heeft positieve bovendichtheid *ten opzichte van* A dan bevat B willekeurig lange rekenkundige rijen. Vervolgens kan men P zien als deelverzameling van zo’n ‘willekeurige’ verzameling en wel van positieve relatieve bovendichtheid. De technische details, en met name de definitie van ‘willekeurig’, vindt men in [9].

Tot slot

In [3] schreef De Bruijn een informatief commentaar op [18] (aanbevolen) waarin met gepaste trots gewag gemaakt werd van het feit dat in het blad van onze vereniging toch maar mooi “one of the most elegant pieces of mathematics ever produced” verschenen is. De daarop volgende zin is, zoals dit artikel heeft laten zien, zeer profetisch geweest: “The influence of this little paper, now 50 years old, has not yet come to an end.” Ik denk dat we die ‘50’ nu gerust door ‘80’ kunnen vervangen. 

Referenties

- 1 Vitaly Bergelson, Hillel Furstenberg, Neil Hindman en Yitzhak Katznelson, ‘An algebraic proof of Van der Waerden’s Theorem’, *L’Enseignement mathématique* **35** (1989), pp. 209–215
- 2 Vitaly Bergelson en Neil Hindman, ‘Non-metrizable topological dynamics and Ramsey theory’, *Transactions of the American Mathematical Society* **320** (1990), pp. 293–320
- 3 N. G. de Bruijn, ‘B. L. van der Waerden on arithmetic progressions in sets of integers. Commentary’, in E. M. J. Bertin, H. J. M. Bos en A. W. Grootendorst (eds) *Two decades of mathematics in the Netherlands*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1978), pp. 110–124.
- 4 P. Erdős en P. Turán, ‘On some sequences of integers’, *Journal of the London Mathematical Society* **11** (1936), pp. 261–264
- 5 H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. M. B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981
- 6 W. T. Gowers, ‘A new proof of Szemerédi’s theorem for arithmetic progressions of length four’, *Geometric and Functional Analysis* **8** (1998), pp. 529–551
- 7 W. T. Gowers, ‘A new proof of Szemerédi’s theorem’, *Geometric and Functional Analysis* **11** (2001), pp. 465–588
- 8 Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild and Joel H. Spencer, *Ramsey Theory* (second edition), John Wiley & Sons Inc., New York, 1990
- 9 Ben Green en Terence Tao, ‘The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions’, arXiv:math.NT/0404188
- 10 N. Hindman, ‘Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$ ’, *Journal of Combinatorial Theory. Series A* **17** (1974), pp. 1–11
- 11 Neil Hindman en Dona Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification*, de Gruyter Expositions in Mathematics 27, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998
- 12 Klaus Roth, ‘Sur quelques ensembles d’entiers’, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** (1952), pp. 388–390
- 13 Klaus Roth, ‘On certain sets of integers’, *Journal of the London Mathematical Society* **28** (1953), pp. 104–109
- 14 I. Schur, ‘Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$ ’, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verein* **25** (1917), pp. 114–117
- 15 Saharon Shelah, ‘Primitive recursive bounds for Van der Waerden numbers’, *Journal of the American Mathematical Society* **1** (1988), pp. 683–697
- 16 E. Szemerédi, ‘On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression’, *Acta Mathematicae Academiae Scientiarum Hungaricae* **20** (1969), pp. 89–114
- 17 E. Szemerédi, ‘On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression’, *Acta Arithmetica* **27** (1975), pp. 199–245
- 18 Bartel L. van der Waerden, ‘Beweis einer Baudetschen Vermutung’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **15** (1927), pp. 212–216.
- 19 Bartel L. van der Waerden, ‘How the proof of Baudet’s conjecture was found’, *Studies in Pure Mathematics* (1971), ed. L. Mirsky. Academic Press, New York, pp. 251–260.

Krzysztof Apt

CWI

Kruislaan 413

1098 SJ Amsterdam

k.r.apt@cwi.nl

Society Post your articles in ArXiv

Math and CoRR!

On a business level, the concept of printed scientific journals is becoming outdated. The often small circulation numbers forces publishers to increase the prices to unreasonable levels, while almost all of the work on the content, from writing and editing articles, reviewing them, to looking after publicity, is done for free by the scientific staff of universities or other institutes. Moreover, articles in journals are often written years before their publication. For these reasons it seems natural, certainly in high-tech environments such as a scientific department, that authors embrace electronic publication. The preprint server www.arxiv.org already exists some sixteen years. In this short article, Krzysztof Apt reacts enthusiastically to the call from Tom Koornwinder to use this archive more often.

In [3] Ton Koornwinder convincingly addressed several prejudices researchers use in order not to post their preprints in the e-Print archive www.arxiv.org. By means of this short note I would like to provide a different perspective on the matter by providing a number of reasons for posting there one's preprints.

The e-Print archive www.arxiv.org started in 1991 as Los Alamos National Laboratory e-Print archive (LANL) by the physicist Paul Ginsparg. At present ArXiv contains more than 402,000 e-prints in Physics, Mathematics (Math) Computer Science (CoRR), Nonlinear Sciences and Quantitative Biology. It is a fully automated electronic archive and distribution server for research papers.

The Math archive, www.arxiv.org/archive/math, started in 1991, while the Computing Research Repository CoRR, www.arxiv.org

/corr, in 1998. CoRR is sponsored by a number of organizations including two main computer science organizations, the Association for Computing Machinery (ACM) and the American Association for Artificial Intelligence (AAAI).

Many mathematicians and computer scientists in the Netherlands do post their articles in ArXiv:Math and CoRR. I hope that this note will encourage others to do it, as well.

Why ArXiv?

Now we will give six good reasons to post your articles in ArXiv.

You can get famous.

Grisha Perelman, who received last year the Fields medal in Mathematics for solving the Poincaré conjecture published his three arti-

cles on this subject only in arxiv.org, see e.g., www.arxiv.org/abs/math.DG/0211159. After the award was announced the ArXiv came under such a heavy load that it asked people to use its mirror sites instead.

By subscribing to the corresponding section of ArXiv you get automatically in your mailbox the articles you want

In contrast, you can't keep track of new articles of your colleagues. You may ask them to email them to you but with more of such requests they surely will forget. And nobody browses peoples' homepages regularly.

By posting your articles in ArXiv you can get in touch with people who work on similar topics
A short story on this that spans a period of fifty years below.

You can also publish electronic proceedings in ArXiv

We all get these announcements of call for papers for various workshops but where to look afterwards for the proceedings? We can do better. Here are for example the Proceedings of the 6th Annual Workshop of the ERCIM Working Group on Constraints that we organized in 2001 and published in CoRR:

www.arxiv.org/abs/cs.PL/0110012.

You can easily search in the ArXiv

For example, last year 132 articles were posted in CoRR that contain the word ‘constraint’ in the abstract.

You can also publish journals laid over ArXiv

The first such journal (called an overlay journal) was the *Advances in Theoretical and Mathematical Physics (ATMP)*, founded in 1997 by the 1982 Fields medal winner S.T. Yau. In the meantime it moved to the International Press but remained an open access journal. One of the most recent overlay journals is *Logical Methods in Computer Science*, www.lmcs-online.org. Its articles are just entries in CoRR. Reader interested in other, often impressive, initiatives in open access publishing in Mathematics is encouraged to consult our earlier articles [1] and [2].

If the publisher does not mind, one can also create a mirror image of a journal with the entries in CoRR. This is what we did with the *Theory and Practice of Logic Programming (TPLP)* journal published by the Cambridge University Press for the Association for Logic Programming, see www.cs.kuleuven.ac.be/~dtai/projects/ALP/TPLP. The advantage is of course that the information about these articles automatically lands in the mailboxes of the subscribers to the relevant section of CoRR and that these articles are covered by the search through CoRR.

But nowadays you can find everything on the Internet

Well, is it really true? For example, I looked during the 2005 Xmas recess for a paper of Helmut Simonis, titled *Sudoku as a constraint problem*, that was presented during a workshop at a conference in 2005. But Helmut just changed jobs, his home page was not reachable anymore and his email address became obsolete. It took me more than two weeks to get in touch with him and get the paper.

Further, many authors forget to put their articles on their homepages or the repositories of their institutions and these articles can then be found only behind the iron wall of paid electronic access to commercial journals.

And occasionally people suddenly pass away. My ex-postdoc Kees Vermeulen passed untimely in 2004 at the age of 39. His most recent papers can be found in CoRR and will remain there for a long time. In contrast, Gilles Kahn, while being the Chairman of INRIA’s Board of Directors, passed away in February last year. It is not easy to find his papers.

Finally, we keep moving and so do our homepages, especially if we are young. If you post the papers in ArXiv and link to them from your homepage, you can move the homepage at a really minor cost.

Conclusion: start by subscribing to the section of ArXiv you are interested in, for example www.arxiv.org/corr/subscribehelp for CoRR. It requires one trivial email. You can judge then for yourself if you also want others to receive the announcements with your articles.

The Three Gap Theorem

Here is the story I promised you. A friend of mine, Stas Swierczkowski, a prominent mathematician aged 74 proved in his thesis in 1956 a beautiful result called the Three Gap Theorem. Soon after I learned about it from his autobiography, I got in September 2006 a posting of the article, www.arxiv.org/abs/cs.LO/0609124, devoted to a mechanical proof of this theorem in the Coq system. I alerted Stas who, fifty years after he proved this result, started to exchange emails with the author about a possible generalization of this result. Here is how Stas describes this result.

“Still as a graduate student I was fortunate to solve one of his [Hugo Steinhaus] problems. Let me describe it. Imagine somebody walking along a path which has the shape of

a circle, leaving clear footprints. Idealizing the situation, let us view footprints as points (as if the person were walking on very pointed stilts). So now by a footprint we mean a point marked on the circle precisely at the place where the tip of the stilt was placed during the walk. We assume that all steps of this person have exactly the same length. After a while the person gets tired, and stops walking. Let us now cut up the circle, using each footprint (which in our idealized version is a point) as a cutting place. We get lots of curved bits, each of these being an arc of the original circle. Some of these are longer, some shorter. Let us measure the lengths of these arcs quite precisely. How many possible results could we get? Oh, well — the reader might say — who can tell? The circle might have been very big or rather small, the steps might have been very long or very short and the person might have walked a hundred million times around the circle or not even once. Unless he was stepping into his own footprints (which is not that likely, as these are merely points) — the arcs obtained from cutting up the circle could be of very many different lengths. Given the size of the circle, the lengths of the steps and the amount of footprints, an engineer could calculate all the possible sizes of the small arcs into which the circle falls apart, after it is cut at the footprint points. But calculating these from some given numerical data (size of circle, etc.) was not the problem. The problem was: how many different results would such calculation provide? The Steinhaus conjecture was: at most three. Surprised? Yes, we all were, but it is true! The reader may take a compass, draw a circle and then, setting the compass to any width smaller than the diameter of the circle, start “walking” around the circle, marking each step. It will be seen that then there are at most three sizes of arcs joining consecutive “footsteps”! Needless to say, I was delighted when I found a general proof of this fact.”

Referenties

- 1 K.R. Apt, ‘One more revolution to make: free scientific publishing’, *Communications of the ACM* **44**(5) (2001), pp.25–28.
- 2 K.R. Apt, ‘Towards free access to scientific literature’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **5**(2) (2001), pp.251–255.
- 3 T.H. Koornwinder, ‘Hou uw preprints openbaar en up-to-date, bijv. op ArXiv:math.’, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **5**(6) (2005), pp.324–325.

Onno Bokhove

Department of Applied Mathematics
University of Twente
P.O. Box 217
Enschede, The Netherlands
o.bokhove@math.utwente.nl

Peter Lynch

Meteorology and Climate Centre
School of Mathematical Sciences
University College Dublin
Dublin, Ireland
peter.lynn@ucd.ie

Research

Air parcels and air particles: Hamiltonian dynamics

Dust particles travel a long way through the atmosphere. The modelling of such movement is traditionally done by setting up a system of coupled partial differential equations. In this article Onno Bokhove, researcher in numerical analysis and computational mechanics, and Peter Lynch, researcher at the Meteorology and Climate Centre at the School of Mathematical Sciences in Dublin, advocate a more direct approach, involving only ordinary differential equations coupled by integral equations.

A *parcel of air* is a coherent piece of air carried along by the wind. It is large enough to contain many molecules, but small enough that we may assume bulk fluid properties uniform throughout it. The concept of an air parcel was introduced by Richardson (1922) in his discussion of radiation in the atmosphere, and has become part of the everyday language of meteorologists, especially in the context of the stability of vertical motions. We can visualize air parcel flow by following the motion of a *tracer*. For example, on a sunny day, air parcel movement becomes visible through the swirling motion of dust particles in the air. Similarly, smoke particles from a cigarette or smoke stack depict the approximate air parcel motion.

Neither the dust nor the smoke particles are infinitesimal and thus do not correspond precisely to an air parcel, but they serve as good approximations for flow scales much larger than the particle size. Note that a *particle* is a discrete entity, whereas a *parcel* is a continuum entity. We will later discuss a numerical discretization of air parcels in which parcels are discretized by particles.

We could also visualize air parcel flow by marking a parcel with a coloured dye. Were each parcel to have a unique colour, the parcels would be individually tagged or *labelled*. We denote the continuum labels of air parcels by $\mathbf{a}$. For flow in three dimensions, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ is a three-dimensional (3D) column vector in Cartesian label coordinates, where $(\cdot)^T$ denotes the transpose.

There are two fundamentally different frameworks for the study of fluid flow. In the Lagrangian framework, we focus on individual parcels of fluid, identified by labels as described above. To study the dynamics, we follow the evolution of the individual parcels as they are carried along by the flow.

The position of a particular parcel is denoted by $\chi(\mathbf{a}, t)$, a time-varying vector in three-dimensional space. Fluid properties are then functions of $\mathbf{a}$ and time t . In the Eulerian framework, we use a reference frame fixed in space and watch the evolution of the flow as it passes a fixed location. We denote this position by $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$, a vector fixed in three-dimensional space. Fluid properties are then functions of $\mathbf{x}$ and of time t . The map $\mathbf{a} \mapsto \chi(\mathbf{a}, t)$ relates the label coordinates $\mathbf{a}$ to the position coordinates $\mathbf{x}$ expressing that the parcel with label coordinate $\mathbf{a}$ resides at the location $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{a}, t)$ at time t .

The local thermodynamic state at parcel location $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{a}, t)$ is determined by two of the following four variables: density $\rho(\mathbf{x}, t)$, potential temperature $\theta(\mathbf{x}, t)$ (a standard quantity in meteorology and a monotonic and invertible function of the entropy), pressure $p(\mathbf{x}, t)$ and temperature $T(\mathbf{x}, t)$. The remaining two variables follow from the relationships valid for an ideal gas (see frame Ideal

gas law).

Classically, air motion is governed by the compressible Navier-Stokes equations including a continuity equation (expressing mass conservation) and an equation of state such as the ideal gas law. The full Navier-Stokes equations include the effect of fluid viscosity or friction, and forcing. For large scale applications in meteorology, it is common to consider inviscid (frictionless) dynamics of air motion, but to retain all the complicated and essential nonlinearities. Furthermore, in numerical weather and climate prediction, a closure problem arises due to the discretization: unresolved gravity-wave motion, quasi-2D turbulence, and 3D turbulence (in decreasing order of importance) require an accurate representation of their effect on the larger, resolved scales of motion. Scales associated with these physical processes are still much larger than the viscous, molecular scales. We therefore consider below the unforced, inviscid Navier-Stokes equations, that is, the compressible Euler equations for an ideal gas.

The position of an air parcel in 3D space is a vector $\chi(\mathbf{a}, t)$ depending on the label $\mathbf{a}$ and the time t as the air parcel moves through space over time. An air parcel with position $\chi(\mathbf{a}, t)$ has a (Lagrangian) velocity

$$\dot{\chi}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{a}, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\chi(\mathbf{a}, t), t). \quad (1)$$

The partial derivative $\partial/\partial t$ here implies a variation of t while keeping the parcel label $\mathbf{a}$ fixed, and $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ is the (Eulerian) velocity at a fixed location $\mathbf{x}$ in space. The term *Lagrangian* implies that we are moving with the flow and the independent coordinates are time t and label coordinates $\mathbf{a}$ when we consider air as a continuum of air parcels. Similarly, the term *Eulerian* implies that the independent coordinates are the fixed spatial coordinates $\mathbf{x}$ and the time t .

The compressible Euler equations are usually expressed as partial differential equations (PDE's) and an algebraic equation of state. In the Eulerian framework, the partial derivatives are taken with respect to $\mathbf{x}$ and t , and the observer remains at a fixed point in space. In the Lagrangian framework, the partial derivatives are taken with respect to labels $\mathbf{a}$ and time t , and the observer moves with the fluid flow.

The PDE's can be derived succinctly from Hamiltonian formulations involving (generalized) Poisson brackets for an arbitrary functional and a Hamiltonian or energy functional. These functionals are either integrals over the Lagrangian 3D label space $\mathbf{a}$, or over the fixed Eulerian space $\mathbf{x}$. They depend on either the fields $\chi(\mathbf{a}, t)$ and $\dot{\chi}(\mathbf{a}, t)$ (Lagrangian viewpoint), or the velocity $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, density $\rho(\mathbf{x}, t)$ and potential temperature $\theta(\mathbf{x}, t)$ (Eulerian viewpoint). This Hamiltonian structure of the Euler equations is of interest because it relates immediately to various constants of motion and associated flux conservation laws. Unfortunately, this structure involves PDE's and functionals, and is *much* more complicated than the standard Hamiltonian theory, which involves ordinary differential equations (ODE's).

The novel Hamiltonian treatment of the parcel dynamics of the Euler equations that we will present below involves only ODE's and integral equations. It turns out to be much simpler than the usual treatment, and can be transformed to the usual Hamiltonian description of the dynamics in terms of PDE's in the most straightforward way we know. For simplicity of presentation, we confine attention to one spatial dimension. However, the approach is

easily generalized. A key notion in what follows is the realization that the dynamics of a distinguished fluid parcel, singled out, is governed by a single ODE, a non-autonomous Hamiltonian finite-dimensional system. Consider now a specific or distinguished air parcel, labelled with (vector) label $\mathbf{A}$, amongst the continuum of air parcels $\mathbf{a}$. Thus, we write the position of the distinguished air parcel $\mathbf{A}$ in particular by $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = \chi(\mathbf{A}, t)$. It is a function of time, not a function of $\mathbf{A}$, although we could indicate its parametric dependence on $\mathbf{A}$ by writing $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t; \mathbf{A})$. The velocity of the distinguished air parcel $\mathbf{A}$ is denoted by $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t; \mathbf{A}) = \mathbf{u}(\chi(\mathbf{A}, t), t)$; cf. (1).

Hamiltonian parcel dynamics

Recently, developments in Hamiltonian numerical particle methods for atmospheric dynamics have led to a novel Hamiltonian description of the compressible Euler equations for air (Bokhove and Oliver 2006). This consists of Hamiltonian ODE's, one for each distinguished air parcel with Hamiltonian $H = H(t)$ in isolation, and an integral equation binding the continuum of air parcels together. As stated above, we consider the case of one space dimension, z the vertical coordinate, normal to the Earth's surface at a certain latitude and longitude. Let $Z(t)$ be the vertical position of a distinguished parcel $\mathbf{A}$, and $W(t)$ its velocity in the vertical direction. The dynamics of the parcel will be described in a canonical Hamiltonian formalism as if it were an isolated particle.

We start therefore with the Hamiltonian dynamics of a particle, or of one specific air parcel, in a potential $V(z, t)$; it is given by

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial H_v}{\partial W} = W \quad (2a)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial H_v}{\partial Z} = -\frac{\partial V}{\partial Z} \quad (2b)$$

Ideal gas law

The ideal gas law states that the pressure p is proportional to the product of density ρ and temperature T , i.e.

$$p = R \rho T \quad (A)$$

with gas constant R . Using the first law of thermodynamics

$$T ds = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp, \quad (B)$$

with entropy s and c_p (c_v) the constant specific heat at constant pressure (volume), in combination with the ideal gas law allows us to rewrite temperature in terms of potential temperature θ and pressure as follows

$$T = \theta (p/p_r)^\kappa. \quad (C)$$

Here we have introduced a constant reference pressure p_r , $\kappa = R/c_p$ and potential temperature

$$\theta = T_r e^{(s-s_r)/c_p}, \quad (D)$$

with T_r and s_r integration constants arising in solving (B). From (D) we note that potential temperature θ , commonly used in meteorology, and entropy s are closely related. For air $R = c_p - c_v = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c_p = 1004 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\kappa = 2/7$ and $p_r = 1000 \text{ mb}$. We refer to Stanley (1971) for more thermodynamics.

Eulerian equations arising from Hamiltonian dynamics

Functional derivatives are defined by

$$\delta\mathcal{H}[w, \rho, \theta] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}[w + \epsilon\delta w, \rho + \epsilon\delta\rho, \theta + \epsilon\delta\theta] - \mathcal{H}[w, \rho, \theta]}{\epsilon}. \quad (E)$$

Together with the definition of the first deviation of the Hamiltonian

$$\delta\mathcal{H} \equiv \int_0^h \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta w} \delta w + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\rho} \delta\rho + \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\theta} \delta\theta \, dz \quad (F)$$

we can find the functional derivatives $\delta\mathcal{H}/\delta w$ and so forth. Here we use the expressions in frame Ideal gas law to express the (derivatives of the) internal energy $U_i = c_v T$ in the Hamiltonian (24) in terms of θ and ρ . In addition, the following trick

$$w(z, t) = \int_0^h w(z', t) \delta(z - z') \, dz' \quad (G)$$

is used again to write the function $w(z, t)$ as a functional, thus we can take $\mathcal{F} = w(z, t)$, and likewise for the other variables. It is a rewarding exercise to derive the Euler equations of motion (20) from (22)–(24).

(see, e.g., Arrowsmith and Place 1992). The Hamiltonian H_v comprises the sum of the kinetic and potential energy

$$H_v = H_v(Z, W, t) = \frac{1}{2} W^2 + V(Z, t), \quad (3)$$

where the potential must have the same physical dimensions as $W^2/2$. For a time-independent potential $V = V(Z)$ the Hamiltonian is a constant of motion:

$$\frac{dH_v}{dt} = \frac{\partial H_v}{\partial Z} \frac{dZ}{dt} + \frac{\partial H_v}{\partial W} \frac{dW}{dt} = 0. \quad (4)$$

If $V(Z, t)$ depends explicitly on time, then the energy is no longer constant: $dH_v/dt = \partial V/\partial t \neq 0$.

For what choice of the potential $V(Z, t)$ do we obtain the compressible Euler equations of motion for the atmosphere? It turns out (by inspection, see Bokhove and Oliver 2006) that the appropriate choice is to take V equal to the Montgomery potential

$$M = M(p(Z, t), Z) = \Theta \Pi_e + gZ \\ = c_p \Theta (p(Z, t)/p_r)^\kappa + gZ, \quad (5)$$

where $\Theta = \Theta(t)$ is the potential temperature and $\Pi_e = \Pi_e(Z, t)$ is Exner's function defined by $\Pi_e = c_p (p(Z, t)/p_r)^\kappa$ with the Eulerian pressure $p = p(z, t)$ evaluated at the parcel's position $z = Z(t)$. The reference pressure $p_r \approx 1000\text{mb}$, specific heat $c_p \approx 1004\text{J}/(\text{kg K})$ at fixed pressure, $\kappa = R/c_p$ and acceleration of gravity g are all constant (see frame Ideal gas law). Potential temperature $\Theta = \Theta(t)$ is a thermodynamic variable and a constant of motion, independent of Z , following the air parcel A , such that $d\Theta/dt = 0$, under the assumed adiabatic and inviscid conditions. We note from the units given that Montgomery potential M has the same physical dimension as $W^2/2$.

Catch-22: where is the continuum?

Substitution of the Montgomery potential M in (5) for the potential V in (2), made explicit by denoting H_v by H_c , yields the La-

a particular air parcel:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial H_c}{\partial W} = W, \quad (6a)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial H_c}{\partial Z} = -\Theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial Z} - g, \quad (6b)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0 \quad (6c)$$

grangian form of the compressible Euler equations of motion for with Hamiltonian

$$H_c(Z, W, \Theta, t) = \frac{1}{2} W^2 + \Theta \Pi_e(p(Z, t)) + gZ \\ = \frac{1}{2} W^2 + c_p \Theta (p(Z, t)/p_r)^\kappa + gZ. \quad (7)$$

(It's useful to verify the expressions in the dynamics (6) by using the Hamiltonian (7).)

However, there seems to be a Catch-22 in the dynamics (6)–(7) for the continuum of labels! First, when initial conditions $Z(0) = Z(0; A)$ and $W(0) = W(0; A)$ are provided for all labels A , the continuum motion of all air parcels can be calculated from the ordinary differential equations (6)–(7). A natural choice is $Z(0; A) = A$. Additionally, in the momentum equation (6b), the Eulerian pressure $p(z, t)$ must be evaluated at the parcel position $z = Z(t)$, yet the pressure in turn depends on the continuum of air parcels as well. In other words, the system is not closed unless we specify or calculate the pressure $p(z, t)$. We write the pressure $p(z, t)$ as an Eulerian function of fixed vertical coordinate z and time t yet we will evaluate it at the position $Z(t) = Z(t; A)$ of the distinguished parcel A .

The pressure can be specified or calculated in several ways; we will consider three different possibilities. *First*, we can take an exact (steady state) solution of the Euler equations, written as a system of PDE's, to investigate the associated parcel motion. The problem then merely shifts to the question: how do we find an exact solution of the equations? Nevertheless, when we have an exact expression for $p(z, t)$ we can explore the associated parcel motion. *Second*, observations of pressure at discrete points in space-time can be used to reconstruct $p(z, t)$. *Third*, we can close the Hamiltonian system (6)–(7) by calculating the pressure explicitly.

The first two options are akin to kinematic studies of fluid motion, in which the motion of particles is studied given a wind field $u(z, t)$ in 3D, to be evaluated for a finite number of parcel positions X_i with $i = 1, \dots, N$ and N the number of particles used. Such kinematic studies are important in forecasts of pollutant spreading. They lead to the spaghetti diagrams in Figure 1, where passive pollutant particles or tracers are released over Europe and their trajectories traced backwards in time using the wind field. Their spread is subsequently monitored. Instead of a (vector) wind field, our Hamiltonian formalism needs only a (scalar) pressure field to compute the movement of a discrete number of particles in a numerical study. In more than one dimension, less information is thus required and the strategy is more dynamic, although the pressure requires specification, and frictional and forcing effects have been excluded. In Figure 2 we show a collection of Lagrangian trajectories for air parcels originating at different times and levels. The convoluted nature of the trajectories illustrates the complexity of nonlinear atmospheric flow. It would be interesting to compare these two strategies

to calculate particle motion in this meteorological context, to assess the relevance of the extra dynamic structure provided in the parcel Hamiltonian approach. (We proposed this as a bachelor project in Twente.) Spurious agglomeration of particles can then be avoided since the flow is symplectic, and thus volume preserving. Furthermore, these properties can be preserved with symplectic numerical techniques.

For the third option, closure of the Hamiltonian system (6)–(7) by calculation of the pressure, we require Eulerian expressions for the density $\rho(z, t)$ and Eulerian potential temperature $\theta(z, t)$, because

$$p(z, t) = p(\rho(z, t), \theta(z, t)) = \left(\frac{p_r^\kappa}{R \rho(z, t) \theta(z, t)} \right)^{\frac{1}{(\kappa-1)}} \quad (8)$$

with constants p_r, κ and R ; see frame Ideal gas law.

The map $a \mapsto \chi(a, t)$ relates the label coordinates a to the vertical coordinate z such that $z = \chi(a, t)$. The density $\rho(z, t)$ and the mass-weighted potential temperature $\rho(z, t) \theta(z, t)$ required in (8) are determined by linking them to the Jacobian between label space a and Eulerian space z . In addition, the potential temperature satisfies

$$\Theta(t) = \Theta(t; A) = \theta(Z(t; A), t), \quad (9)$$

and on a distinguished parcel A it is constant $\Theta(t; A) = \Theta_0(A)$ as we saw earlier that $d\Theta/dt = 0$. An element of mass dm is by definition density times volume, and we therefore find

$$dm = \rho(z, t) \Delta x \Delta y \Delta z = \rho_0(a) \Delta b \Delta c \, da, \quad (10)$$

where $\Delta x, \Delta y, \Delta b$ and Δc are unity, so that the density ρ retains its usual interpretation as mass/volume in this one-dimensional case. Here b and c are the labels in the x and y directions. Furthermore, the mass dm is conserved for labels between a and $a + da$ with a label-weighted density $\rho_0(a)$. With the ‘natural’ choice, where the labels initially coincide with the coordinate values, such that $z = \chi(a, 0) = a$, we thus find $\rho(z, 0) = \rho_0(a)$ initially. The consequence of (10) is that

$$\frac{\rho_0}{\rho(\chi(a, t), t)} = \frac{\partial \chi(a, t)}{\partial a} \quad (11)$$

is the Jacobian between the label space with label a and Eulerian space with coordinate $z = \chi(a, t)$. The trick now is to rewrite the density-weighted potential temperature $\rho(z, t) \theta(z, t)$ as an integral over label space by using the delta function $\delta(z - z')$ with dummy coordinate z' and the Jacobian (11). By using (9) and (11) with $z' = \chi(a, t)$, we obtain the following

$$\begin{aligned} \rho(z, t) \theta(z, t) &= \int_0^h \rho(z', t) \theta(z', t) \delta(z - z') dz' \\ &= \int_0^{A_h} \rho(\chi(a, t), t) \Theta_0(a) \delta(z - \chi(a, t)) \frac{\partial \chi(a, t)}{\partial a} da \\ &= \int_0^{A_h} \rho_0(A) \Theta_0(A) \delta(z - Z(t; A)) dA, \end{aligned} \quad (12)$$

where $\Theta(t; A) = \Theta(0; A) = \Theta_0(A)$ is conserved following an air parcel and $h = z(A_h, t)$ in a domain $z = [0, h]$ in which A_h is the air parcel label at the top of our one-dimensional atmosphere. The label coordinates a and A in the last two integrals of (12) are dummies in the integration. We have therefore passed without problems from the general label coordinates a to the distinguished la-

bels A , with the corresponding change $\chi(A, t) = Z(t; A) = Z(t)$. We assume there is a solid boundary at $z = 0$ such that the parcel initially at the boundary never leaves $z = 0$ as its vertical velocity remains zero. Likewise, the density satisfies

$$\begin{aligned} \rho(z, t) &= \int_0^h \rho(z', t) \delta(z - z') dz' \\ &= \int_0^{A_h} \rho_0(A) \delta(z - Z(t; A)) dA. \end{aligned} \quad (13)$$

The usual equation expressing conservation of mass

$$\partial_t \rho + \partial_z(\rho w) = 0, \quad (14)$$

with $\rho(z, t)$ and $w(z, t)$, is obtained by taking the time derivative of (13) while using (6a). Likewise, conservation of density-weighted potential temperature

$$\partial_t(\rho \theta) + \partial_z(\rho \theta w) = 0, \quad (15)$$

with also $\theta(z, t)$, is obtained with the use of (6a) and (6c). Partial derivatives $\partial_t = \partial/\partial t$ and $\partial_z = \partial/\partial z$ are used here with z and t constant, respectively, and with dependent variables $w(z, t), \rho(z, t)$ and $\theta(z, t)$. Note that the Eulerian velocity $w(z, t)$ is used, and recall that its relation with the Lagrangian velocity $W(t)$ for the special parcel A at position $z = Z(t)$ is $W(t; A) = w(Z(t; A), t)$.

In summary, the compressible Euler equations of motion for air modelled as an ideal gas are governed by the parcel Hamiltonian system (6)–(7) with a continuum infinity of initial conditions, one for each distinguished air parcel, the pressure $p(z, t)$ defined by (8) in terms of the product of density and potential temperature, which is, in turn, provided by the integral (12) over all labels. Density can be recovered separately via (13).

Bound together the dynamics of air is then governed by the following closed system of equations: $\forall A$ in $Z = Z(t; A), W = W(t; A)$ and $\Theta = \Theta(t; A)$ the dynamics is

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial H_c}{\partial W} = W, \quad (16a)$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial H_c}{\partial Z} = -c_p \Theta \frac{\partial (p(Z, t)/p_r)^\kappa}{\partial Z} - g, \quad (16b)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = 0, \quad (16c)$$

$$H_c(Z, W, \Theta, t) = \frac{1}{2} W^2 + c_p \Theta (p(Z, t)/p_r)^\kappa + g Z \quad (16d)$$

with initial conditions $\Theta(0; A) = \Theta_0(A), Z(0; A) = A, W(0; A) = W_0(A)$ and $\rho_0(A) = \rho(Z(0; A) = A, 0)$; and, furthermore

$$p(Z, t) = \left(\frac{p_r^\kappa}{R \rho(Z, t) \theta(Z, t)} \right)^{1/(\kappa-1)} \quad (17a)$$

$$\rho(Z, t) \theta(Z, t) = \int_0^{A_h} \rho_0(\tilde{A}) \Theta_0(\tilde{A}) \delta(Z - Z'(t; \tilde{A})) d\tilde{A}. \quad (17b)$$

Note the dummy integration label $\tilde{A}$ in (17b) as opposed to the distinguished label A in $Z = Z(t; A)$.

Generalized Poisson brackets

We summarize the Hamiltonian parcel formulation (16)–(17) succinctly as

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H_c\} \text{ with } \{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial G}{\partial W} - \frac{\partial F}{\partial W} \frac{\partial G}{\partial Z} \quad (18)$$

for Hamiltonian (16d) and arbitrary functions $F = F(Z, W, \theta, t)$

and $G = G(Z, W, \theta, t)$, valid for all fluid labels by specifying the (distinct) initial conditions for each label.

Remark: If we take $F \in \{Z, W, \Theta\}$ in (18), together with (16d), then we obtain the parcel equations of motion in (16).

To close the system, we additionally determine the pressure $p(z, t)$ in Hamiltonian (16d) through (17). The formulation is Hamiltonian because it satisfies the following properties: the (generalized) Poisson bracket $\{F, G\}$ in (18) is anti-symmetric: $\{F, G\} = -\{G, F\}$, and it satisfies the Jacobi identity

$$\{F, \{G, K\}\} + \{G, \{K, F\}\} + \{K, \{F, G\}\} = 0 \quad (19)$$

for arbitrary functions F, G and K . These properties are readily proven by inspection and direct manipulation. In three dimensions and for air in our Earthly rotating frame of reference, the generalized Poisson bracket is not canonical as in (18), but it is still Hamiltonian, because the bracket is anti-symmetric and satisfies the Jacobi identity.

The Euler equations in Eulerian form

$$\partial_t \rho + \partial_z(\rho w) = 0, \quad (20a)$$

$$\partial_t w + w \partial_z w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial z} - g, \quad (20b)$$

$$\partial_t \theta + w \partial_z \theta = 0, \quad (20c)$$

are partial differential equations. These equations and their Hamiltonian formulation are readily derived from the parcel Hamiltonian formulation (18) and (16d), with (12) and (13), following the appendix in Bokhove and Oliver (2007), and Bokhove and Oliver (2006) for the 3D case. A cursory comparison between (16) and (20) indicates that $W(t) \rightarrow w(z, t)$ and $\Theta(t) \rightarrow \theta(z, t)$, and that $d(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + w(z, t)\partial(\cdot)/\partial z$ is the total or material time derivative following an air parcel. Also note that

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\theta \kappa c_p p^{\kappa-1}}{p_r^\kappa} \frac{\partial p}{\partial z} = \theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial z} \quad (21)$$

with $\Pi_e = c_p (p/p_r)^\kappa$ and $\kappa = R/c_p$, by using expressions (A) and (D) (in frame Ideal gas law).

Attractions of the Hamiltonian framework

The reasons for our fascination with the parcel Hamiltonian formulation are manifold. The formulation is simpler than the classical formulation, as it is comprised of ODE's and (two) integral relations instead of a system of PDE's. We consider four aspects of this formulation now.

First, the derivation of the Hamiltonian formulation of the PDE's involves the transformation of standard function derivatives (involving functions $F = F(Z, W, \Theta, t)$) in the parcel framework into functional derivatives (involving functionals $\mathcal{F} = \mathcal{F}(w, \rho, \theta)$, that is, integrals including the fields $w(z, t)$, $\rho(z, t)$ and $\theta(z, t)$) in the Eulerian framework.

The Hamiltonian expression of (20) is formally similar to (18),

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}, \quad (22)$$

but with functionals $\mathcal{F}$ and $\mathcal{H}$ instead of functions F and H . The generalized Poisson bracket is given by

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} = \int_0^h \left[\left(\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta w} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta w} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \rho} \right) + \right.$$

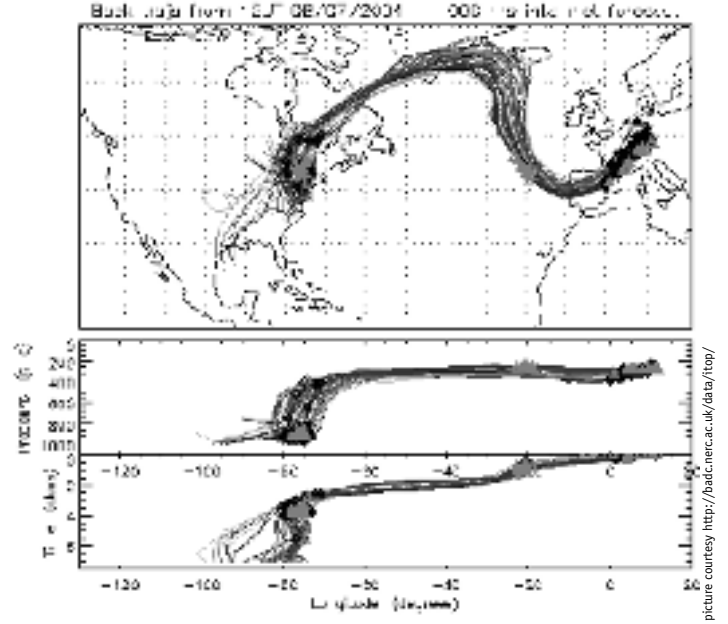


Figure 1 Particles are released in Europe and the backwards trajectories are calculated using the wind velocity backwards in time (Intercontinental Transport of Ozone and Precursors (ITOP) project).

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta w} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \theta} - \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta w} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] dz, \quad (23)$$

and the Hamiltonian energy functional is

$$\mathcal{H} = \int_0^h \left(\frac{1}{2} \rho w^2 + \rho U_i(\rho, \theta) + \rho g z \right) dz, \quad (24)$$

with internal energy $U_i(\rho, \theta) = c_v T$ for an ideal gas; see Bokhove and Oliver (2006). To derive the equations of motion from (22)–(24) see frame Eulerian equations arising from Hamiltonian dynamics.

By inspection, $\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}$ is seen to be anti-symmetric, but the Jacobi identity

$$\{\mathcal{F}, \{\mathcal{G}, \mathcal{K}\}\} + \{\mathcal{G}, \{\mathcal{K}, \mathcal{F}\}\} + \{\mathcal{K}, \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}\} = 0, \quad (25)$$

for arbitrary functionals $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ and $\mathcal{K}$, is (in 3D) much more complicated to prove. However, by using the same transformation relations between the parcel functions and functionals that were used in finding (23), we can deduce that

$$\{\mathcal{F}, \{\mathcal{G}, \mathcal{K}\}\} = \int \{F, \{G, K\}\} dz, \quad (26)$$

where the functions F, G, K are associated with the functionals $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{K}$ respectively. Since by (19) the Jacobi identity holds for the functions F, G, K , the Jacobi identity (25) for functionals follows immediately from (26). The above is the most straightforward derivation of the Hamiltonian formulation for the PDE system (corresponding to the parcel ODE system) known to us.

Second, a discretization preserving the Hamiltonian parcel formulation is available (Frank, Gottwald and Reich 2002). Consequently, the conservation laws in the continuum framework have discrete analogs, an important achievement. In fact, this discretization was discovered before the continuum parcel formulation (Bokhove and Oliver 2006) was recognized and linked to other Hamiltonian formulations. A discretization is obtained simply by putting indices k on (6) and approximating Π_e , thus following N particles each with a fixed mass, to obtain

$$\frac{dZ_k}{dt} = \frac{\partial H_c}{\partial W_k} = W_k, \quad (27a)$$

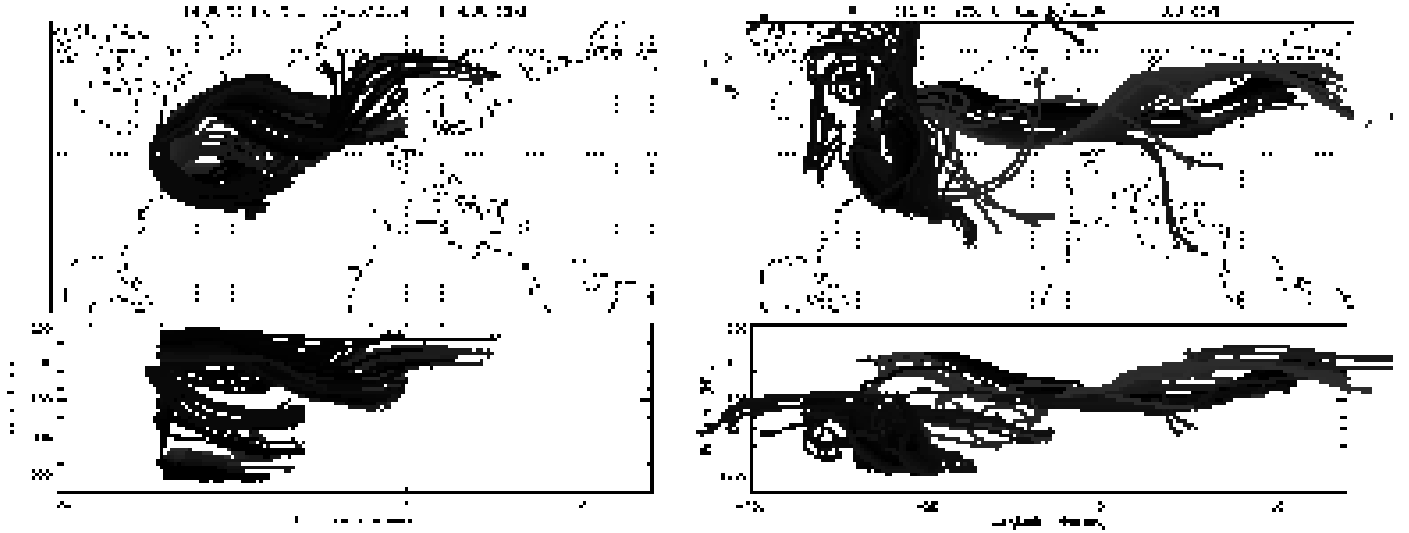


Figure 2 Trajectories of air parcels released at several levels over a period of hours. The evolution of two sets of trajectories is shown in latitude-longitude and pressure-longitude plots. The points of release are shown with crosses. The goal of the ITOP programme is to study intercontinental transport of pollutants (see <http://badc.nerc.ac.uk/data/itop/>). The motivation is that Eulerian, point measurements of photochemical processes are less accurate than measurements along Lagrangian (5-day) trajectories. Thanks to John Methven (University of Reading) for images [8].

$$\frac{dW_k}{dt} = -\frac{\partial H_c}{\partial Z} \Big|_{Z=Z_k} = -\Theta_k \frac{\partial \Pi_h}{\partial Z} \Big|_{Z=Z_k} - g, \quad (27b)$$

$$\frac{d\Theta_k}{dt} = 0 \quad (27c)$$

with Hamiltonian

$$H_c(Z, W_k, \Theta_k, t) = \frac{1}{2} W_k^2 + \Theta_k \Pi_h(Z) + g Z. \quad (28)$$

A particle-mesh or particle-finite-element method is obtained because an approximate Exner's function $\Pi_h(z, t)$ is reconstructed throughout space either by approximating the density-weighted potential temperature integral (12) on a finite difference grid followed by an interpolation step (cf. Frank, Gottwald and Reich 2002), or by using a finite element method, yielding the value of density-weighted potential temperature everywhere in space (see [5]). Density can be approximated likewise by discretization of (13).

Third, certain asymptotic approximations remain entirely within the framework of the ODE's for an individual parcel, which is often more straightforward than performing asymptotics on the PDE's.

Fourth, certain (classical) fluid parcel instabilities in meteorology and fluid dynamics are more readily obtained from the ODE's for a distinguished fluid parcel than from the associated partial differential equations. We consider the static stability of an air parcel next. It is a classical example of a parcel stability in meteorology (see, e.g., Salmon 1998).

Static (in)stability of the atmosphere

When there is no flow then $W = 0$ and the momentum equation (6b) is in hydrostatic balance

$$\theta_g(Z) \frac{\partial \Pi_e(Z)}{\partial Z} + g = 0. \quad (29)$$

Parcel oscillations are analyzed in a static atmosphere for a given parcel energy of the form $H_c = \frac{1}{2} W^2 + \theta \Pi_e(Z) + g Z$. The Ex-

ner function $\Pi_e(Z) = c_p (p(Z)/p_r)^\kappa$ is now chosen with a potential temperature $\Theta(0; A) = \theta_g(Z)$ such that it satisfies (29). We choose an initial condition such that $Z(0) = Z_r$ and $\Theta(0) = \theta_g(Z_r)$. We linearize the vertical momentum equation (6b) with respect to Z around a reference vertical level Z_r such that $Z = Z_r + Z'$. To obtain an expression linear in Z' , we use (29) and

$$\frac{d^2 \Pi_e}{dZ^2} = \frac{g}{\theta_g^2} \frac{d\theta_g}{dZ}$$

as function of Z_r , in a Taylor expansion of the right-hand-side of the vertical moment equation (6b)

$$\Theta \frac{\partial \Pi_e}{\partial Z} + g = \theta_g(Z_r) \left(\frac{d\Pi_e}{dZ}(Z_r) + \frac{d^2 \Pi_e}{dZ^2}(Z_r) Z' \right) + g + O(Z'^2) = N^2 Z' + O(Z'^2),$$

in which the symbol $O(Z'^2)$ denotes terms of second or higher order. Hence, the linearized vertical momentum equation becomes

$$\frac{d^2 Z'}{dt^2} = -N^2 Z', \quad (30)$$

where

$$N^2 = N^2(Z_r) = (g/\theta_g) (d\theta_g/dZ)|_{Z=Z_r} \quad (31)$$

is the square of the Brunt-Väisälä frequency. Note that N has the dimension of frequency, since g has dimension length over time squared and Z has length as dimension. From (30), we see that the linear stability of the flow depends on the sign of N^2 , for

$$N^2 \begin{cases} > 0 & \text{the atmosphere is statically stable,} \\ = 0 & \text{statically neutral, and} \\ < 0 & \text{statically unstable.} \end{cases} \quad (32)$$

Hence, (30) results in stable harmonic oscillations of an air parcel around the reference level Z_r when $N^2 > 0$, a neutrally stable situation for $N^2 = 0$, and an unstable (exponentially growing) solution when $N^2 < 0$.

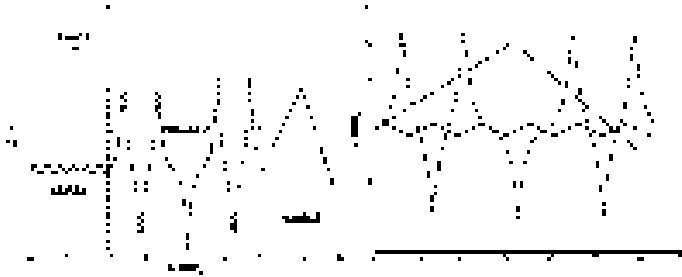


Figure 3 Stable and unstable fluid particle trajectories are shown for statically stable oscillatory flow (solid thick line), unstable flow (dashed thick line), and neutral flow (dashed-dotted thick line). These are numerical solutions of (6) using static Hamiltonian (33). Particle trajectories are shown (a) in a vertical cross section, and (b) as function of vertical position and time.

This linear behaviour explains the three idealized nonlinear numerical simulations depicted in Figure 3 for a given (hydrostatic) Hamiltonian

$$H_c = U^2/2 + W^2/2 + \Theta \Pi_e(Z) + gZ. \quad (33)$$

This Hamiltonian is called hydrostatic because we specify its potentials to satisfy (29) rather than determine the pressure from the (discrete collection of) air parcels. Also, the x -direction has been included for display purposes but the potential is X -independent such that $dX/dt = U$ and $dU/dt = 0$. The X - Z -plane is divided in four parts (thin dashed lines in Figure 3a). We choose $Z(0)$ and calculate $\Theta(0) = \theta_g(Z(0))$. In the stratosphere, above 10km, the basic atmosphere is stably stratified, $N^2 > 0$. In the troposphere, below 10km, we assume that the potential temperature of the basic atmosphere varies linearly with height. For $X < -10$ km (and $Z < 10$ km), it is stably stratified, with $\theta_g = \theta_0 + \alpha Z$, since then $N^2 = g\alpha/(\theta_0 + \alpha Z) > 0$ using (31). For $-10\text{km} < X < 10$ km, it is unstably stratified with $\theta_g = \theta_0 - \alpha Z$, since then $N^2 = -g\alpha/(\theta_0 - \alpha Z) < 0$. And for $X > 10$ km, it is neutral, $\theta_g = \theta_0$ and $N^2 = 0$.

When $W(0) = 0$, no vertical movement occurs as hydrostatic balance holds in the vertical momentum equation. Instead, we specify $W(0) \neq 0$, and also $U(0) > 0$. In our set-up the parcel's horizontal velocity remains constant. The initial position of a particle is denoted on the left of each trajectory with a 'x'-symbol, at

$Z = 5\text{km}$ and $X = -20, -10, 10$ km, respectively. Hence, we see in Figure 3 that a (weakly nonlinear) particle trajectory (thick solid lines) in the stable troposphere displays approximately harmonic oscillations with a period of $2\pi/N = 10.6\text{min}$ (see Figure 3b). The potential temperature remains constant: $\Theta(t) = \theta_g(Z(0))$.

Once a particle is displaced to a vertical level, the particle would only remain in hydrostatic balance when it has a potential temperature $\theta_g(Z)$ in accordance with the Exner function $\Pi_e(Z)$ at that level. Since $\Theta(t)$ is conserved and thus constant, the particle motion adjusts itself in the stable case to oscillatory motion. In the unstable case, the trajectory departs to the stably-stratified stratosphere where its velocity diminishes and the trajectory reverses smoothly (thick dashed lines). At the Earth's surface, the particle is reflected. In the neutral case, a particle maintains its initial upward velocity until it reaches the stratosphere (thick dashed-dotted lines).

Final remarks

The Hamiltonian particle-mesh or particle-finite-element method outlined will be tested further in idealized climate simulations with weak forcing and dissipation. The equations of motion used in atmospheric climate simulations are Hamiltonian in the absence of forcing and dissipation. In that limit, the essential and complicated nonlinearities are maintained. The question under investigation is whether the discrete preservation of the Hamiltonian formulation with its associated conservation properties remains important when (weak) forcing and dissipation are added. This investigation is motivated by preliminary results in low-dimensional models suggesting that this preservation of the Hamiltonian structure on the discrete level is important even in the presence of forcing and dissipation (Hairer *et al.* 2006). $\leftarrow$

Acknowledgements Jason Frank's (CWI, Amsterdam) and Bob Peeter's (Twente) constructive criticism has been much appreciated. O.B. acknowledges a fellowship (2001–2006) from The Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences (KNAW) during the course of this work. O.B. and P.L. are grateful for support from the Lorentz Center, Leiden.

References

- 1 Richard A. Brualdi, Herbert J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- 2 D.K. Arrowsmith, and C.M. Place, *Dynamical systems*, Chapman & Hall, 330 pp, 1992.
- 3 O. Bokhove and M. Oliver, Parcel Eulerian-Lagrangian fluid dynamics of rotating atmospheric flows, *Proc. R. Soc. A*, **462**, 2575–2592, 2006.
- 4 O. Bokhove and M. Oliver, Isentropic two-layer model for atmospheric dynamics, *Q. J. Royal Meteorological Society*, submitted, 2007.
- 5 O. Bokhove and P. Lynch, *Parcels and particles in meteorology with Hamiltonian particle mesh method*, Article with additional appendix, eprints.eemcs.utwente.nl, 2007. Posted online upon acceptance of the manuscript.
- 6 J. Frank, G. Gottwald and S. Reich, A Hamiltonian particle-mesh method for the rotating shallow-water equations, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, **26**, 131–142, 2002.
- 7 E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geometric numerical integration*, Springer, 644 pp., 2006.
- 8 J. Methven, *et al.*, Establishing Lagrangian connections between observations within air masses crossing the Atlantic during the ICARTT experiment, *J. Geophys. Res.*, **111**, D23S62, 2006.
- 9 L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge University Press, 236 pp. 1922. Reprinted with a new Introduction, 2006.
- 10 R. Salmon, *Lectures on geophysical fluid dynamics*, Oxford University Press, 192 pp., 1998.
- 11 H.E. Stanley, *Introduction to phase transitions and critical phenomena*, Oxford University Press, 308 pp. 1971.

Kees Joost Batenburg

Visielab

Universiteit Antwerpen

Universiteitsplein 1

B-2610 Wilrijk, België

joost.batenburg@ua.ac.be

Onderzoek Discrete Tomografie

Van nanokristal tot topdiamant

Tomografie is een methode om een driedimensionaal beeld te krijgen van de binnenkant van een object. Met deze techniek zijn reeds vele successen behaald, in het bijzonder met de CT-scan in de geneeskunde. De discrete tomografie is een nieuw en veelbelovend vakgebied binnen de tomografie dat zich richt op de reconstructie van beelden uit slechts zeer weinig projecties. Joost Batenburg, die in september 2006 op dit onderwerp promoveerde, legt uit hoe met weinig projecties toch nauwkeurige beelden kunnen worden gemaakt.

Tomografie is een techniek voor het maken van een driedimensionaal beeld van een object op een niet-invasieve manier. Door een aantal tweedimensionale projectiebeelden op te nemen en de gegevens uit deze beelden te combineren kan het object worden gereconstrueerd. De *discrete* tomografie richt zich op het reconstrueren van objecten waarvan van tevoren bekend is dat ze uit slechts een paar materialen bestaan. Door deze voorkennis te gebruiken in het reconstructie-algoritme kan het aantal benodigde projectiebeelden vaak aanzienlijk worden gereduceerd. In dit artikel gaan we, na een inleiding over tomografie, in op de basisideeën van discrete tomografie en de toepassingen daarvan.

Tomografie

In 1979 ontvingen Cormack en Hounsfield de Nobelprijs voor de geneeskunde, voor hun baanbrekende werk in Computer Tomogra-

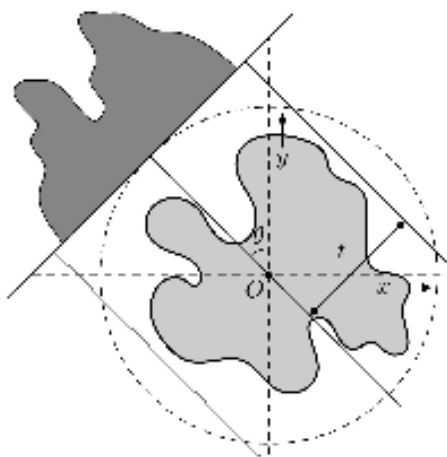
fie (CT), een scantechniek die het mogelijk maakt de inwendige organen van een patiënt driedimensionaal in beeld te brengen. Al sinds het begin van de twintigste eeuw konden artsen röntgenfoto's maken om diagnoses te stellen. Het gebruik van individuele röntgenbeelden heeft echter een belangrijk nadeel: de röntgenfoto's zijn *projectiebeelden*, waarin de driedimensionale structuren niet zichtbaar zijn. Als twee organen elkaar overlappen op een röntgenfoto is het niet duidelijk wel orgaan voor ligt en welk orgaan achter. CT ondervangt dit probleem door een groot aantal projectiebeelden op te nemen vanuit verschillende hoeken. Door de gegevens uit al deze beelden te combineren kan met behulp van computerberekeningen een driedimensionaal beeld van de patiënt worden gereconstrueerd [10–11]. In figuur 1 zien we een schematische weergave van het projectie-proces in de scanner. We beperken ons hier tot eendimensionale projectiebeel-

den van een tweedimensionaal object. Met een parallelle bundel röntgenstraling schijnt men door het object. Hierbij wordt een deel van de straling geabsorbeerd. De mate waarin de straling geabsorbeerd wordt is afhankelijk van de materialen (of weefsels) in het object en van de lengte van de doorsnede van de bundel met het object. Zowel de stralingsbron als de detector waarop de beelden worden opgenomen draait rond het object, zodat beelden uit verschillende hoeken kunnen worden opgenomen. Bij CT wordt het onbekende object doorgaans gerepresenteerd als een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met begrensde support. De afbeelding

$$P_f(\theta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy$$

noemen we de *Radontransformatie* van f , waarbij $\delta(\cdot)$ de deltafunctie van Dirac voorstelt. De waarde $P_f(\theta, t)$ komt overeen met de gemeten projectie voor de hoek θ op afstand $|t|$ van de oorsprong.

Naast de medische radiologie komen we tomografie ook tegen in diverse andere vakgebieden. Zo worden in de houtindustrie gekapte bomen gescand om te bepalen hoe ze



Figuur 1 Schematische weergave van een CT-scanner. Een projectiebeeld wordt gemaakt door met een stralingsbundel door het object heen te schijnen en te meten hoeveel van de straling door het object is geabsorbeerd.

het best tot planken gezaagd kunnen worden en wordt tomografie op ruwe diamanten uitgevoerd om te berekenen hoe deze het best geslepen kunnen worden. Naast het gebruik van röntgenstraling worden ook andere technieken gebruikt om de projectiebeelden op te nemen. In de microbiologie en de materiaalwetenschappen gebruikt men bijvoorbeeld een elektronenmicroscop om projectiebeelden te maken van een preparaat dat telkens een klein beetje gedraaid wordt.

Het probleem om het onbekende object te reconstrueren uit een aantal metingen van de projecties is een *invers probleem*. Het is gemakkelijk om, gegeven een object, de projecties van dit object te berekenen. De berekening van het object uit de projecties is doorgaans echter een stuk moeilijker.

De reconstructie die door de computer wordt berekend, heeft slechts een beperkte nauwkeurigheid en wordt meestal gerepresenteerd op een (pixel)rooster. Als een tweedimensionaal beeld wordt gereconstrueerd noemen we de elementen van het beeld *pixels*. De waarde van een pixel noemen we de *grijswaarde*. In dit artikel zullen we ons hoofdzakelijk beperken tot tweedimensionale beelden, die gereconstrueerd worden uit eendimensionale projecties. De concepten kunnen worden gegeneraliseerd naar driedimensionale reconstructie uit tweedimensionale projectiebeelden.

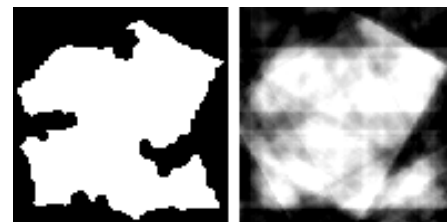
In de jaren zeventig zijn diverse reconstructiealgoritmen ontwikkeld voor tomografie. In de praktijk wordt Filtered Backprojection (FBP) zeer veel gebruikt. Dit algoritme is zeer snel en ook de implementatie is relatief eenvoudig. De werking van FBP berust op de *Fourier Slice Theorem*, die stelt dat de (ééndimensionale) Fouriertransformatie van elk van de projecties gelijk is aan de tweedimensio-

nale Fouriertransformatie van het onbekende beeld, langs een lijn door de oorsprong die afhangt van de projectie-hoek θ . Deze correspondentie maakt het mogelijk om bij benadering de Fouriertransformatie van het onbekende beeld te vinden, waarmee dit beeld vervolgens kan worden gereconstrueerd. Een andere veelgebruikte methode is de *Algebraic Reconstruction Technique* (ART). Bij dit algoritme wordt het reconstructieprobleem gemodelleerd als een stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$. De vector x bevat de waarde van elk van de pixels in het beeld. Elke rij i van de matrix A komt met een lijn door het onbekende object. Een aantal pixels leveren een positieve bijdrage aan de projectie langs die lijn en vormen, samen met de gemeten projectiewaarde b_i een lineaire vergelijking. Omdat de beelden in de praktijk heel groot zijn is het niet mogelijk om de matrix A expliciet te inverteren. Daarom worden iteratieve methodes uit de numerieke wiskunde gebruikt om het stelsel op te lossen. Zowel FBP als ART zijn voorbeelden van algoritmen voor *continue tomografie*. De term *continu* heeft in dit geval betrekking op de pixels in het te reconstrueren beeld, die alle waarden mogen aannemen uit een continue verzameling, meestal $\mathbb{R}$ of $[0, \infty)$.

Discrete tomografie

Een belangrijk nadeel van algoritmen voor continue tomografie is dat ze doorgaans veel projectiebeelden nodig hebben om tot een goede reconstructie te komen. Voor ART is dit eenvoudig in te zien: stel dat we een tweedimensionaal beeld willen reconstrueren dat bestaat uit $n \times n$ pixels en dat elke 1-dimensionale projectie van dit beeld uit n meetwaarden bestaat. Om tot een stelsel vergelijkingen te komen dat volledig is bepaald hebben we dan dus tenminste n projectiebeelden nodig. figuur 2 toont een testbeeld (ook wel *fantom* genoemd) en de ART reconstructie van dit beeld uit zes projecties. In de praktijk worden doorgaans honderden projectiebeelden gebruikt om de reconstructie te berekenen.

De *discrete tomografie* richt zich op het reconstrueren van beelden uit een klein aantal projecties, meestal minder dan 10. Door extra voorkennis te gebruiken over het object dat wordt gereconstrueerd kan worden volstaan met een veel kleiner aantal projecties dan bij continue tomografie [7–8]. De voorkennis die wordt gebruikt heeft betrekking op de verzameling grijswaarden in de reconstructie. Bij discrete tomografie veronderstellen we dat de reconstructie uit slechts enkele grijswaarden



Figuur 2 a) Testbeeld waarvan door simulatie de projecties werden berekend voor zes regelmatig verdeelde hoeken tussen 0 en 180 graden. b) ART reconstructie uit zes projecties

1	1	0	0	3	0	0	0	0	3
0	1	1	1	4	0	0	0	0	4
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	2	0	0	0	0	2
0	0	1	0	2	0	0	0	0	2
1	4	4	1	2	1	4	4	1	2

Figuur 3 a) Binair beeld met de bijbehorende horizontale en verticale projecties. b) Het bijbehorende reconstructieprobleem

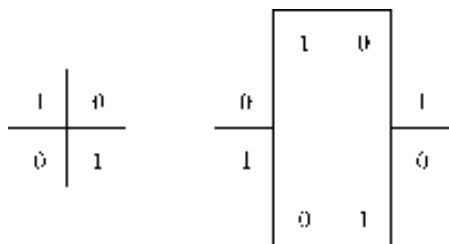
bestaat en dat we deze waarden vooraf kennen.

In het meest eenvoudige geval hebben we te maken met slechts twee grijswaarden, 0 en 1. Je kunt daarbij denken aan een object dat slechts uit één materiaal bestaat (1) en omringd wordt door lucht (0). Het object mag ook gaten bevatten, die wederom gevuld zijn met lucht. Vaak neemt men aan dat het te reconstrueren beeld is gedefinieerd op een rechtehoek van $m \times n$ pixels. In dat geval kunnen we elk beeld representeren als een 0-1 matrix. Al in de jaren vijftig bestudeerde de combinatoricus Herbert Ryser het probleem om een 0-1 matrix te construeren met voorgeschreven rij- en kolomsommen [12], zie figuur 3. Toen was dat nog niet in de context van tomografie, maar vanwege de interessante combinatorische structuur van het probleem. Ryser ontwikkelde een efficiënt algoritme om een oplossing te vinden, maar toonde tevens aan dat de oplossing doorgaans verre van uniek is.

Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 4. Beide beelden hebben dezelfde horizontale en verticale projecties, maar toch verschillen de beelden aanzienlijk. Dit hangt samen met het bestaan van zogenaamde *switching components*. Een switching component

0	1	1	0	1	3	1	1	1	0	0	3
0	1	1	1	1	4	0	1	1	1	0	4
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	2	0	1	1	0	0	2
1	1	0	0	0	2	0	0	1	0	0	2
1	4	4	1	2	1	4	4	1	2		

Figuur 4 a) Twee binaire beelden met dezelfde horizontale en verticale projecties kunnen aanzienlijk van elkaar verschillen.



Figuur 5 Switching component voor twee projectierichtingen: horizontaal en verticaal. b) Switching component voor vier projectierichtingen: horizontaal, verticaal, diagonaal en anti-diagonaal

is een binair beeld waarvoor geldt dat als we de 0-en en 1-en verwisselen het nieuwe beeld dezelfde projecties heeft als het oorspronkelijke beeld. Figuur 5a toont een voorbeeld van een switching component voor het geval dat alleen horizontale en verticale projecties worden gebruikt.

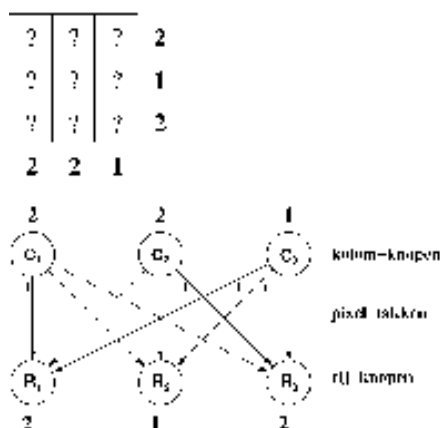
Een voor de hand liggende manier om het aantal oplossingen te verkleinen is het vergroten van het aantal projectierichtingen, dus om bijvoorbeeld ook de diagonale en anti-diagonale projecties te gebruiken. Helaas is het vergroten van het aantal richtingen op zichzelf niet voldoende. In figuur 5b zien we een voorbeeld van een switching component voor het geval dat we vier projecties gebruiken. Voor elke eindige verzameling van projectierichtingen is het mogelijk om een switching component te construeren [6].

Dat er beelden bestaan die niet uniek bepaald worden door hun projecties hoeft natuurlijk niet te betekenen dat we geen enkel beeld uniek kunnen reconstrueren. Het berekenen van de reconstructie blijkt echter veel moeilijker te zijn als meer dan twee projecties worden gebruikt dan in het geval van slechts twee projecties. Gardner et al. bewezen in [5] dat het reconstructieprobleem *NP-hard* is voor elke verzameling van meer dan twee projectierichtingen. Daar staat tegenover dat het reconstructieprobleem voor een willekeurig tweetal projectierichtingen wél efficiënt kan worden opgelost. Eén van de manieren om dit te doen berust op een overeenkomst tussen het tomografieprobleem en een transportprobleem uit de besliskunde.

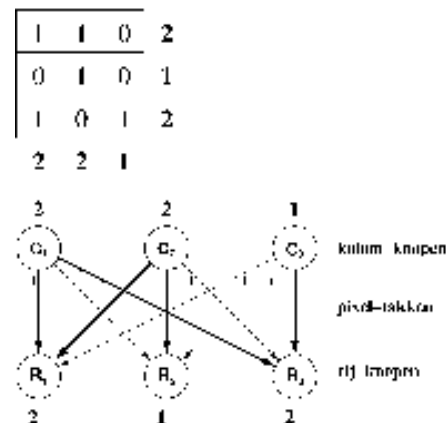
In figuur 6a) zien we een klein reconstructieprobleem, met gegeven horizontale en verticale projecties. De graaf in figuur 6b) noemen we de *geassocieerde graaf* van dit probleem. Deze bestaat uit twee lagen van knopen. De knopen in de bovenste laag komen overeen met de kolommen van het te reconstrueren beeld (kolomknopen). De knopen in de onderste laag komen overeen met de rijen (rijknopen). Er is een tak van elke kolomknoop naar elke rijknoop, die overeenkomt met het element

in de corresponderende kolom en rij van het beeld. Elke tak heeft een bijbehorende *capaciteit*, die gelijk is aan 1. Als we deze graaf bekijken in de context van het *transportprobleem* uit de besliskunde, dienen de kolomknopen als *aanbodknopen* en de rijknopen als *vraagknopen*. Het aanbod, respectievelijk de vraag bij elke knoop is gelijk aan de corresponderende lijnsom van het tomografieprobleem. Het transportprobleem bestaat nu uit het toekennen van een waarde tussen 0 en 1 aan elk van de takken van de geassocieerde graaf, zodat de som van de functiewaarden in alle takken vanuit een knoop gelijk is aan de vraag (of het aanbod) in die knoop. Bij het *geheeltallige transportprobleem* eisen we bovendien dat aan elke tak exact de waarde 0 of 1 wordt toegekend. Dit geheel-tallige transportprobleem kan zeer efficiënt worden opgelost met algoritmen uit de theorie van netwerkstromen [1]. In figuur 7 zien we een oplossing van het transportprobleem. Het is eenvoudig in te zien dat een oplossing van het transportprobleem ook een oplossing geeft van het tomografieprobleem, waarbij elke pixel in de reconstructie dezelfde waarde krijgt als de corresponderende tak in de geassocieerde graaf.

Een belangrijk voordeel van het modelleren als transportprobleem is dat we eenvoudig bepaalde vormen van extra voorkennis kunnen gebruiken, door kosten toe te kennen aan elk van de takken en een oplossing van het transportprobleem met minimale totale kosten te berekenen. Ook voor dit probleem zijn reeds tientallen jaren efficiënte algoritmen bekend. Als we bijvoorbeeld beschikken over een ontwerptekening van het gescande object, en we verwachten dat het object daar redelijk voor op lijkt, kunnen we met het transportmodel de oplossing vinden die in zoveel mogelijk pixels gelijk is aan het ontwerp.



Figuur 6 a) Een 3×3 tomografieprobleem. b) Het bijbehorende transportprobleem



Figuur 7 a) Een 3×3 tomografieprobleem met een oplossing die de gegeven projecties heeft. b) Oplossing van het bijbehorende geheel-tallige transportprobleem

Wanneer de projectiedata afkomstig is uit een scanner zal deze vrijwel altijd ruis of andere meetfouten bevatten. Het transportprobleem kan worden uitgebreid tot een algemeen netwerkstroom-model, waarmee een reconstructie gevonden kan worden waarvoor de ℓ_1 -norm van het verschil tussen de projecties van de reconstructie en de gemeten projecties minimaal is [3].

Als projecties beschikbaar zijn voor meer dan twee richtingen kunnen we het transportprobleem in de geassocieerde graaf gebruiken als bouwsteen voor een iteratief algoritme. In elke iteratie wordt een tweetal richtingen gekozen en wordt een beeld berekend dat voor die twee richtingen de juiste projecties heeft. Als er meerdere beelden zijn met de juiste projecties, kiezen we het beeld dat zoveel mogelijk lijkt op het beeld van de vorige iteratie, dat was berekend met een ander paar projecties.

In het algemeen leidt dit algoritme niet tot een oplossing van het totale reconstructieprobleem. Het blijkt echter, dat als we ons richten op bepaalde klassen van beelden, er veel betere resultaten mogelijk zijn dan in het algemene geval [2–3]. We kunnen dan in het algoritme een voorkeur verwerken voor beelden uit de betreffende klasse. Een voorbeeld van een soort beelden die goed kunnen worden gereconstrueerd uit een klein aantal projecties zijn beelden die erg ‘glad’ zijn, wat wil zeggen dat ze uit relatief grote gebieden van 0-en en 1-en bestaan. Een voorkeur voor deze beelden kan worden verwerkt in het iteratieve algoritme door bij het bepalen van de kosten van een pixel niet alleen rekening te houden met de waarde van dezelfde pixel in de vorige iteratie, maar ook met de waarden van naburige pixels. Een witte pixel in een zwart gebied is immers minder wenselijk dan een witte pixel die omringd wordt door andere witte



Figuur 8 Twee testbeelden die perfect kunnen worden gereconstrueerd door in een iteratief proces telkens deelproblemen voor twee projectierichtingen op te lossen. Voor het eerste beeld zijn vier projectierichtingen nodig, voor het tweede beeld acht.

te pixels.

Als we deze voorkeur voor gladde beelden gebruiken in het iteratieve reconstructie-algoritme, kunnen de twee beelden in figuur 8 beide perfect worden gereconstrueerd uit slechts vier, respectievelijk acht projecties, een spectaculaire verbetering t.o.v. continue tomografie (zie ter vergelijking figuur 2). Bovendien is dit algoritme snel genoeg om ook in de praktijk te worden gebruikt. Het reconstrueren van een beeld van 256×256 pixels duurt op een moderne PC minder dan een minuut.

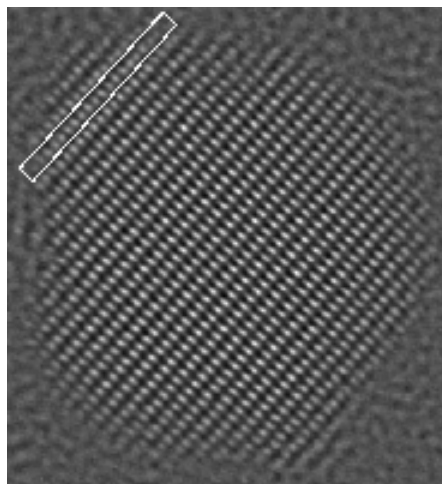
Het aantal projecties dat nodig is voor een goede reconstructie hangt af van de eigenschappen van het beeld. Een belangrijke en grotendeels nog open vraag is hoe deze afhankelijkheid theoretisch kan worden beschreven. Discrete tomografie is een zeer jong vakgebied dat is ontstaan in de jaren '90 en nog zeer veel open onderzoeksvragen kent. Andere vragen die centraal staan zijn bijvoorbeeld: hoe kunnen de projectierichtingen het best gekozen worden, wanneer het aantal richtingen vastligt? Is het mogelijk de verzameling grijswaarden in het beeld af te leiden uit de projectiedata, wanneer wel bekend is hoeveel grijswaarden het beeld bevat, maar niet welke grijswaarden dat zijn?

Toepassingen van discrete tomografie

In veel toepassingsgebieden is het wenselijk om het aantal benodigde projectiebeelden zo klein mogelijk te maken. In de medische tomografie bijvoorbeeld, leidt een reductie van het aantal kijkrichtingen tot een kortere meettijd en dus een lagere stralingsbelasting voor de patiënt. In de elektronentomografie komt het vaak voor dat het preparaat beschadigd wordt door de elektronenbundel. Als men dus te lang nodig heeft om de beelden op te nemen is het object dat te zien is in het laatste projectiebeeld niet hetzelfde als het object dat in het eerste beeld te zien is.

Een toepassing die een belangrijke rol gespeeld heeft in de ontwikkeling van discrete tomografie is het reconstrueren van nanokristallen met atomaire resolutie, uit projectie-

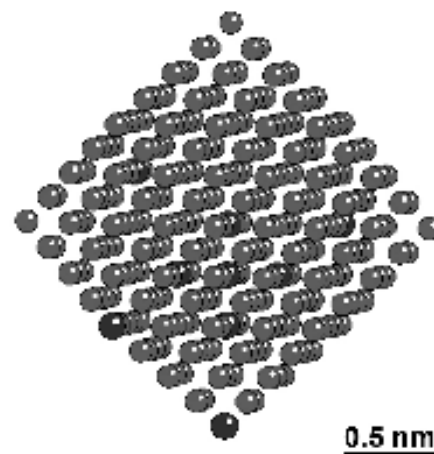
beelden die worden gemaakt met behulp van elektronenmicroscopie. De kwaliteit van elektronenmicroscopen is in de afgelopen tien jaar sterk verbeterd. Inmiddels is het mogelijk om projectiebeelden te maken van kristallen in richtingen die evenwijdig lopen met de hoofdrichtingen van het kristalrooster, waarin de geprojecteerde atoomkolommen duidelijk kunnen worden onderscheiden. Met behulp van nieuwe theorieën over het beeldvormingsproces in de elektronenmicroscopie kan uit deze projectiebeelden het aantal atomen in elke geprojecteerde kolom worden geteld [9]. Het aantal projectiebeelden dat kan worden opgenomen is echter zeer beperkt, minder dan tien beelden. Een voorbeeld van zo'n beeld is te zien in figuur 9. Het betreft hier een projectiebeeld van een goudnanokristal.



Figuur 9 High Resolution Transmission Electron Microscopy (HRTEM) beeld van een nanokristal, opgebouwd uit goudatomen. De geprojecteerde atoomkolommen zijn duidelijk te onderscheiden. Dit beeld is opgenomen door C. Kisielowski van het Lawrence Berkeley Lab.

Een variant op het iteratieve reconstructie algoritme dat we in de voorgaande sectie beschreven kan worden gebruikt voor het reconstrueren van nanokristallen. In figuur 10 zien we een model van zo'n kristal, waarin op een aantal posities atomen ontbreken in de kristalstructuur. Uit drie projecties, met als richtingen de vectoren $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ en $(1, -1, 0)$ kan zowel de vorm van het kristal als de positie van de ontbrekende atomen worden gereconstrueerd.

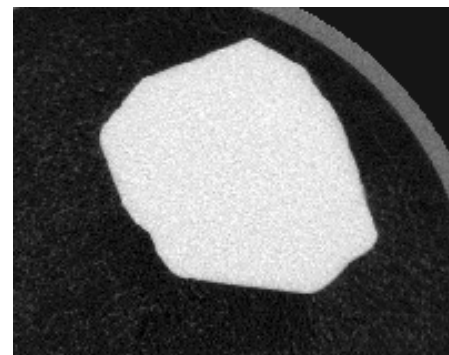
Het maken van driedimensionale beelden met atomaire resolutie is één van de belangrijkste en meest ambitieuze doelen in de materiaalwetenschap van dit moment. Dergelijke beelden kunnen meer inzicht geven in de eigenschappen van diverse materialen. Ook voor grotere objecten kan het gebruik van discrete tomografie veel voordelen hebben. Een voorbeeld hiervan is het scannen van ru-



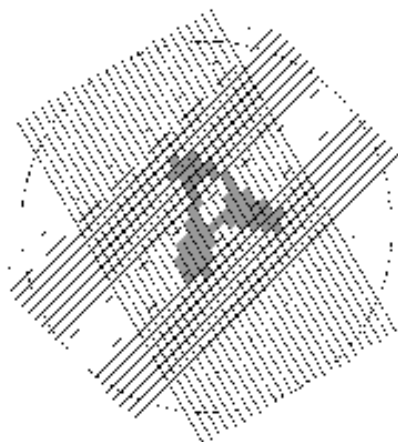
Figuur 10 Model van een nanokristal dat is opgebouwd uit driehonderd atomen. De roosterposities met een donkere kleur representeren 'gaten' in het kristal, de zogenaamde vacancies. Dit kristal kan perfect worden gereconstrueerd uit drie projecties door iteratief een aantal problemen voor twee richtingen op te lossen.

we diamanten door middel van CT. Een diamant die geen onzuiverheden bevat heeft een vaste kristalstructuur. In een CT reconstructie uit zeer veel projecties (zie figuur 11) zien we dat het inwendige van de diamant een nageen constant grijswaarde heeft.

Een reconstructie van een diamant kan worden gebruikt om te bepalen hoe de diamant het best geslepen kan worden, om de waarde van het resultaat te maximaliseren. Door de voorkennis te gebruiken dat de diamant een homogeen object is kan het aantal benodigde projectiebeelden met een factor tien worden gereduceerd. Wiskundig gezien verschilt het reconstructieprobleem voor diamanten van het reconstrueren van nanokristallen. Bij een nanokristal is er sprake van een natuurlijke roosterstructuur in het kristal. Elk roosterpunt bevat óf wel, óf geen atoom, waardoor telkens een geheel aantal atomen wordt geteld in het projectiebeeld. Wanneer een diamant wordt gescand, meet de scanner



Figuur 11 CT reconstructie van een plakje ruwe diamant uit 500 projectie beelden. De diamant, de donkere achtergrond en de omringende cilinder hebben elk een specifieke grijswaarde. Deze diamant is gescand door DiamScan, Antwerpen.



Figuur 12 Bij tomografie van solide objecten kan een reconstructie uit twee projecties efficiënt worden gevonden als deze wordt berekend op een rooster waarvan de hoofdasen evenwijdig lopen met de projectierichtingen.

langs een groot aantal lijnen de lengte van de doorsnede van de röntgenbundel met de diamant, een reëel getal. In dat geval is er dus geen natuurlijke roosterstructuur.

De reconstructie, die uit pixels is opgebouwd, wordt doorgaans gerepresenteerd op een rooster met vierkante pixels, evenwijdig aan de horizontale en verticale as. Met deze representatie kan het reconstructieprobleem

voor twee richtingen niet worden gemodelleerd als geheel-tallig transportprobleem. Als we echter kiezen voor het rooster uit figuur 12 kunnen we het reconstructieprobleem wel weer als transportprobleem beschrijven. Bij het iteratieve algoritme voor meer dan twee richtingen moeten we dus telkens werken op een ander rooster, afhankelijk van het tweetal richtingen dat in een iteratie wordt gebruikt. Ook deze methode leidt tot nauwkeurige reconstructies, waarbij veel minder projecties nodig zijn dan voor continue tomografie [4]. Discrete tomografie kan worden gebruikt voor alle objecten die uit slechts enkele materialen bestaan. Met name in de industrie komen dit soort objecten vaak voor.

Uitdagingen voor de toekomst

Discrete tomografie is een jong vakgebied, waarin in de laatste jaren veel vooruitgang is geboekt. Door gebruik te maken van methoden uit de besliskunde en combinatorische optimalisering kunnen beelden worden gereconstrueerd uit veel minder projecties dan met continue tomografie. Een aantal wiskundige resultaten laat zien dat het niet mogelijk is om met een klein aantal projecties alle mogelijke beelden te reconstrueren. Anderzijds

zijn er de bemoedigende experimentele resultaten die laten zien dat voor veel praktisch relevante beelden dit wel degelijk mogelijk is. Het ontrafelen van de eigenschappen van deze beelden die nauwkeurige reconstructies mogelijk maken vormt een grote uitdaging.

Door een aantal toonaangevende onderzoekers in de materiaalwetenschappen wordt discrete tomografie gezien als één van de meest belovende methoden om driedimensionale beelden te maken met atomaire resolutie. Of deze aanpak werkelijk kan worden gebruikt voor een verscheidenheid aan kristalstructuren hangt niet alleen af van de wiskundige eigenschappen van het probleem, maar natuurlijk ook van de nauwkeurigheid waarmee de fysieke metingen kunnen worden verricht. Toch kunnen we ervan uitgaan dat ook op dat gebied de technieken steeds beter zullen worden. Het is een zeldzaamheid dat we in de natuurwetenschappen een dergelijk discreet probleem aantreffen, maar juist het discreet karakter zou in dit geval wel eens het verschil kunnen maken tussen een reconstructie van een kristal als een wazige grijze wolk of als een glashelder beeld.

Referenties

- 1 R.K. Ahuja, T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network flows: theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, 1993.
- 2 K. J. Batenburg, 'A Network Flow Algorithm for Reconstructing Binary Images from Discrete X-rays', *J. Math. Imaging and Vision* (2007), reeds online verschenen; DOI: 10.1007/s10851-006-9798-2.
- 3 K. J. Batenburg, *Network Flow Algorithms for Discrete Tomography*, Ph.D. thesis, Universiteit Leiden, 2006, <http://hdl.handle.net/1887/4564>.
- 4 K. J. Batenburg, 'A Network Flow Algorithm for Binary Image Reconstruction from Few Projections', *Lecture Notes Comp. Sci.* **4245** (2006), pp. 86–97.
- 5 R. J. Gardner, P. Gritzmann and D. Prangenberg, 'On the Computational Complexity of Reconstructing Lattice Sets from their X-rays', *Discrete Math.* **202** (1999), pp. 45–71.
- 6 L. Hajdu and R. Tijdeman, 'Algebraic Aspects of Discrete Tomography' *J. Reine Angew. Math.* **534** (2001), pp. 119–128.
- 7 G. T. Herman and A. Kuba, eds., *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- 8 G. T. Herman and A. Kuba, eds., *Advances in Discrete Tomography and its Applications*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- 9 J. R. Jinschek, H. A. Calderon, K. J. Batenburg, V. Radmilovic and C. Kisielowski, 'Discrete Tomography of Ga and InGa Particles from HREM Image Simulation and Exit Wave Reconstruction', *MRS Proceedings* **839** (2004), 4.5.1–4.5.6.
- 10 A. C. Kak and M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, SIAM, 2001.
- 11 F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, 2001.
- 12 H. J. Ryser, 'Combinatorial Properties of Matrices of Zeros and Ones', *Can. J. Math.* **9** (1957), pp. 371–377.



RYU

Illustratie: Ryou Tajiri

Rainer Kaenders

Instituut voor Leraar en School
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 38250, 6503 AG Nijmegen
r.kaenders@ils.ru.nl

Toepassingen

Lemniscaten en kranen

In het september 2006 nummer van het Nieuw Archief heeft Gijs Nieuwenhuis een artikel over lemniscaatkranen [10] geschreven, waarin wordt ingegaan op hun werktuigbouwkundige aspecten. In dit artikel zal worden ingegaan op de wiskundige ideeën die ten grondslag liggen aan deze kranen. Eerst stippen we nog even aan waarom het ontwerpen van kranen kan leiden tot het gebruik van fraaie meetkunde en daarna concentreren we ons op die meetkunde zelf. We komen dan terecht bij intrigerende zaken als het verband tussen een stangenvierhoek met vaste basisstang en allerlei wiskundige krommen. Een van de elegante ingrediënten is de afbeelding van Darboux, die aan een stangenvierhoek een derdegraadskromme in het complexe projectieve vlak toekent. De eigenschappen van deze kromme representeren de eigenschappen van de bijbehorende stangenvierhoek.

Reeds in 1911 heeft het Haarlemse bedrijf FIGEE ([19]) (zie ook [13]) voor een pakhuis in Rotterdam wipkranen gebouwd. Over het algemeen zijn *wipkranen* hijskranen waar de kraanboom of kraanarm rond een vast punt scharniert. Zij vormen een grote klasse van hijskranen waarvan wij enkele speciale constructies zullen bekijken. De wipkraan in figuur 2 geeft een voorbeeld van een wipkraan die recht doet aan zijn naam.

In [13] vat ir. De Vries een aantal criteria samen waarmee bij het ontwerp van wipkranen rekening moet worden gehouden.

“Ter vermindering van de energie voor het wippen, wordt er naar gestreefd: 1e. de lastweg horizontaal te maken; 2e. de mas-krachten binnen matige grenzen te houden; 3e. de wrijvings-verliezen tot een minimum te beperken en 4e. het aandrijfmecha-nisme zoodanig uit te voeren, dat de massa’s langzaam versneld worden, terwijl de snelheid tegen het einde weer afneemt. Het is vanzelfsprekend, dat de bewegende ijzerconstructie gebalanceerd wordt en dat de resultante der krachten, die op den laadboom werken, door het draaipunt gaat of er dichtbij valt.”

De introductie van de lemniscaat bij het bouwen van kranen is vooral geïnspireerd door de eis van een min of meer horizon-

tale lastweg. Dit houdt in dat de last eerst verticaal wordt opge-takeld, dan horizontaal verplaatst en vervolgens weer verticaal wordt neergelaten. Bij het kraanontwerp heeft dit vele voordelen. Dat neemt niet weg dat ook andere aspecten in de praktijk van groot belang zijn:

“Veelal wordt geëischt een zoveel mogelijk horizontale last-weg, wat echter alleen te prefereren is, wanneer dit zonder com-plicaties te bereiken is. In den regel is de weg niet mathematisch zuiver recht, doch een goede praktische benadering. Meer hoeft men niet te eischen, vooral als dit met een eenvoudige constructie bereikt wordt”, schrijft ir. De Vries in [13] (blz. 418).

De boeken [13] en [3] geven een prachtig overzicht van kraan-constructies die in de jaren twintig in Nederland en Duitsland zijn ontwikkeld. Het lijkt erop dat er in die tijd een bloei in de constructie van nieuwe hijskranen heeft plaatsgevonden. Speciaal voor kraanconstructies met horizontale lastweg zijn (nog) meer voorbeelden te vinden in [9], [11] of [12].

Toren- en portaalkranen

Er zijn veel verschillende strategieën om een horizontale lastweg te bereiken. Bij portaal- en torenkranen is de baan van de *loopkat*, de rol die langs de kraanarm schuift, door de constructie al horizontaal. De horizontale verplaatsing van de last wordt dan bereikt door een kleine maar vernuftige truc. De kabel loopt niet alleen vanaf een vast beginpunt op de kraanarm over de loopkat naar de last maar ook via een rol terug van de last langs de loopkat naar het andere einde van de kraanarm. Op die manier hangt de last aan een lus die altijd even lang blijft zolang men niet de kabel verlengt of inkort.

Er bestaan ook constructies waar de last pas een horizontale baan beschrijft als de kabelrol langs een kromme beweegt die juist de kromme van de last vereffent zoals rechts in figuur 2 te zien is.

Verder zijn er ook intrekdraaikranen met een zogenaamde el-lipssturing (ellipskranen, figuur 2) die een exact horizontale last-weg hebben en vele andere constructies meer (zie [3], [6], [11–13]).



Figuur 1 Een lemniscaat-, een balans- en een 'floating level-luffing' kraan

Hijskranen met lemniscaatsturing

De hijskranen met lemniscaatsturing berusten allemaal op het *Doppellenkerwipprinzip*: een scharnierende stangenvierhoek met een vaste basisstang, waarbij de *koppelstang*, dat is de stang tegenover de vaste stang, tot kraanarm is verlengd. Dit mechanisme werd reeds in de jaren dertig door de ARDELT Werke in Eberswalde (tegenwoordig KE Kranbau Eberswalde) ingezet (zie [20]). We zullen nu proberen om de bewegingspatronen van dergelijke hijskranen met lemniscaatsturing te begrijpen. We dienen daarvoor de bewegingspatronen van stangenvierhoeken te onderzoeken en we zullen zien dat ook de klassieke lemniscaat van Bernoulli als lastkromme ontstaat.

Stangenvierhoeken

Drie wederzijds aan elkaar verbonden stangen bewegen niet. De eerste scharnierende stangenveelhoek die voor beweeglijke mechanische constructies in aanmerking komt, wordt gevormd door vier stangen. Stangenvierhoeken zijn in alle mogelijke mechanismen terug te vinden, zoals in gazonsproeiers, busdeuren, vorkheftrucks en vele andere apparaten en toestellen (zie bijvoorbeeld [4]).

Eigenschappen van stangenvierhoeken

We zullen de notatie van de lengtes van een stangenvierhoek steeds zo kiezen dat voor de paren van tegenover elkaar liggende zijden en hun lengtes (a, b) en (c, d) geldt:



$$a + b \geq c + d \quad \text{en} \quad a \geq b \quad \text{en} \quad c \geq d.$$

Stangenvierhoeken zijn op een natuurlijke manier in klassen op te delen (zie bijvoorbeeld [4]):

- Een stangenvierhoek behoort tot klasse I als de kortste stang een volle draaiing rond een van zijn uiteinden kan maken, terwijl dit voor de andere drie stangen niet geldt. Voor deze klasse geldt dat $a - b < c - d$.
- Een stangenvierhoek behoort tot klasse II als geen enkele stang

een volle draaiing kan maken rond een van zijn uiteinden. Voor deze klasse geldt dat $a - b > c - d$.

Bij de grensgevallen met $a - b = c - d$, dat wil zeggen alle stangenvierhoeken die niet passen in klasse I of II, is de som van twee van de zijden gelijk aan de som van de twee overige zijden of een zijde is even lang als de andere drie bij elkaar. Een zulke stangenvierhoek die niet behoort bij klasse I of II noemen we een *doorslaande stangenvierhoek*.

Een aardige eigenschap die snel te bewijzen valt is dat voor de diagonalen van stangenvierhoeken het volgende geldt:

Stelling 1. *Het inproduct van de diagonaalvectoren van een stangenvierhoek is constant.*

Bewijs. Als notatie geven we de vier stangen aan met vier vectoren v_1, v_2, v_3 , en v_4 waarlangs men de vierhoek in deze volgorde kan doorlopen. Er geldt dan

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0. \quad (1)$$

Wij willen bewijzen dat

$$(v_1 + v_2) \circ (v_3 + v_4) = (v_1 \circ v_3) + (v_1 \circ v_4) + (v_2 \circ v_3) + |v_2|^2$$

constant is en doen dat door op te merken dat uit (1) volgt:

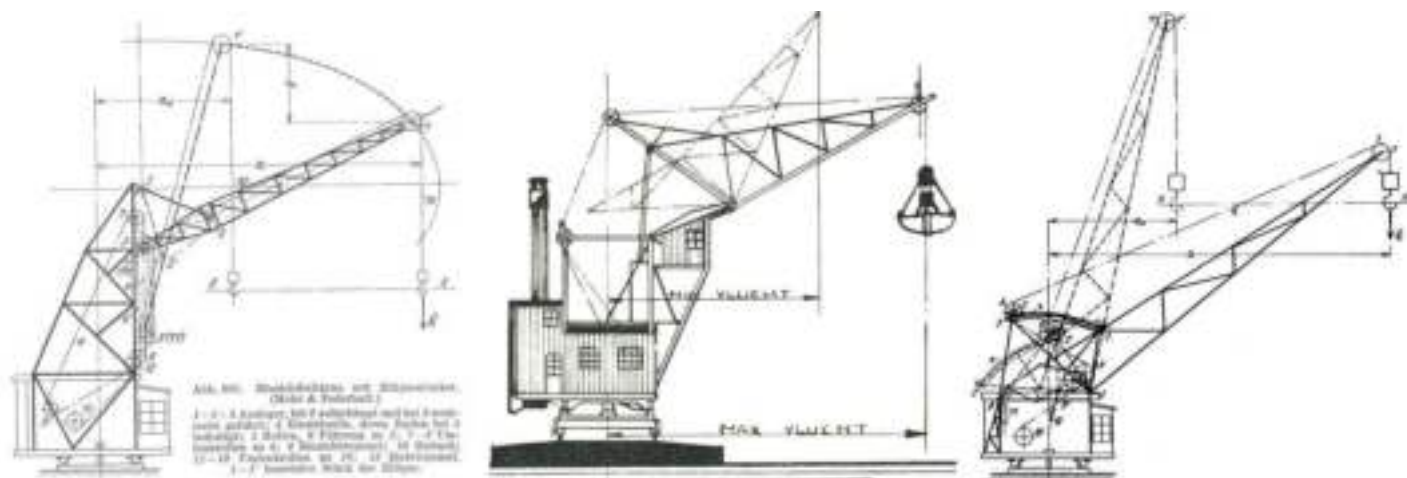
$$|v_4|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2((v_1 \circ v_2) + (v_1 \circ v_3) + (v_2 \circ v_3)).$$

□

Een interessant gevolg van deze stelling is: als bij één positie van de stangenvierhoek de diagonalen loodrecht op elkaar staan, dan is dat voor elke positie het geval. Verder volgt eruit dat als het inproduct positief (negatief) is, tegenoverliggende scharnierpunten niet bij elkaar kunnen komen en de diagonalen in elke positie een scherpe (stompe) hoek met elkaar blijven vormen.

Lemniscaten

De lemniscaat is het symbool voor oneindig. Afbeeldingen van draken in een achthoek die zichzelf verslinden, staan van ouds-



Figuur 2 Links: intrekdraaikraan met ellipssturing (tekening uit [3]); midden: wipkraan uit [13] en rechts: intrekdraaikraan met krommenbaan uit [3]

her voor het eeuwig terugkerende en zetten zich daarmee af tegen de christelijke symbolen A en Ω , die representeren dat de geschiedenis een begin en een einde kent.

De lemniscaatvorm als symbool oefende altijd al een grote fascinatie uit op mensen. Naast de bovengenoemde associatie bestaan er nog veel meer. Wij beperken ons hier tot de wiskunde van de lemniscaat.

De lemniscaat van Jacob Bernoulli

Hoewel de lemniscaat als kromme reeds door John Wallis (1616-1703) in zijn boek *Arithmetica Infinitorum* werd ingevoerd, wordt zij meestal verbonden met de naam Jacob Bernoulli (1654-1705), die er in het jaar 1694 een vergelijking voor heeft afgeleid.

De lemniscaat is gedefinieerd als de verzameling punten waarvan het product van de afstanden tot twee gegeven punten constant is. In formule: gegeven twee punten F_1 en F_2 in het vlak met afstand $2a$, dan is de *lemniscaat* de meetkundige plaats van alle punten P in het vlak waarvoor geldt

$$|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2.$$

Als we poolcoördinaten (r, φ) in het vlak kiezen zodanig dat de oorsprong midden tussen F_1 en F_2 ligt, dan luidt de lemniscaatvergelijking:

$$r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi).$$

Ten opzichte van cartesische coördinaten waarin F_1 en F_2 de coördinaten hebben: $(-a, 0)$ en $(a, 0)$ hebben, wordt de lemniscaat beschreven door:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

terwijl in het complexe vlak de lemniscaat de representatie

$$z^2 \bar{z}^2 = a^2(z^2 + \bar{z}^2).$$

heeft.

Koppelkrommen

De stang tegenover de vaste basisstang van een stangenvierhoek

wordt *koppelstang* genoemd. Een punt in het vlak met een vaste positie ten opzichte van de koppelstang (een punt op de koppelstang is ook toegestaan), beschrijft een zogenoemde *koppelkromme* als de koppelstang gaat bewegen. Anders gezegd, dit punt en de koppelstang vormen op elk moment van de beweging een vaste driehoek waarbij het hoekpunt tegenover de koppelstang de koppelkromme beschrijft. Er zijn legio voorbeelden van mechanische constructies waar koppelkrommen een belangrijke rol spelen zoals bijvoorbeeld de voor de constructie van stoommachines door James Watt verzonden *Wattkrommen* en constructies voor het tekenen van (redelijk) rechte lijnen (zie de klassieker [8]). Zoals reeds eerder is opgemerkt: ze worden ook gebruikt voor het bereiken van een horizontale lastweg in hijskranen.

De verscheidenheid aan koppelkrommen is enorm. In de jaren vijftig vervaardigden Hrones en Nelson [5] een indrukwekkende atlas met ongeveer 10.000 koppelkrommen: een waar monnikenwerk.

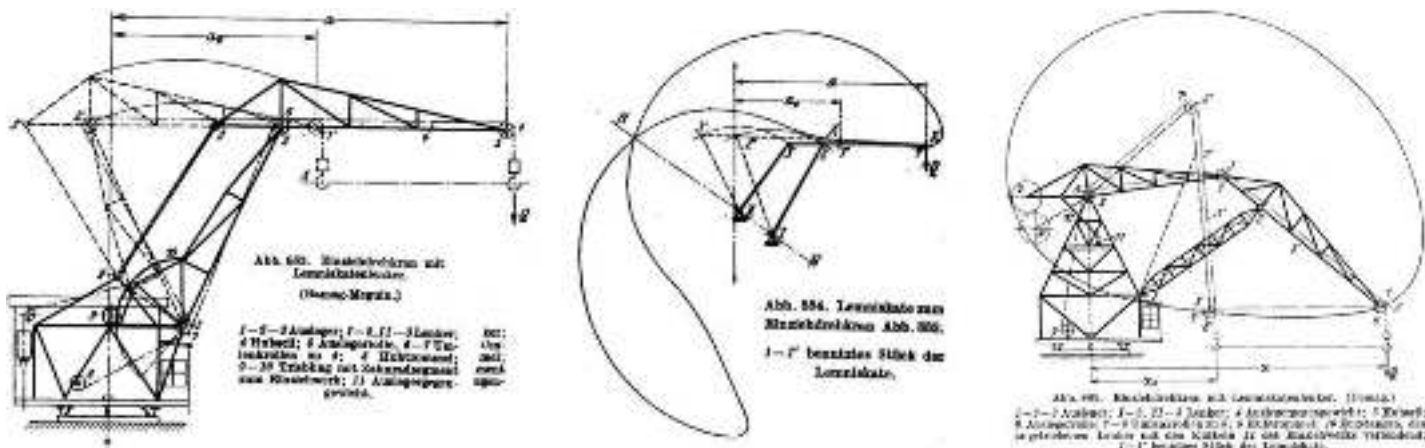
De wiskunde van koppelkrommen is verrassend rijk. Zie bijvoorbeeld [4] en [1]. Ter illustratie geven wij hier een eenvoudig resultaat dat ons inzicht geeft over welke koppelkrommen een dubbelpunt hebben, waar dit ligt, en welke niet. We volgen grotendeels [4], maar bewijzen een iets sterkere stelling.

Gegeven een koppelmechanisme met notatie zoals is afgebeeld in figuur 5, waarbij A , B en C niet op een lijn liggen. De *pivotsirkel* van dit koppelmechanisme is dan de cirkel door de punten M , Q en O waarbij O zo is gekozen dat $\triangle MQO$ gelijkvormig is met $\triangle ABC$ (zie figuur 5). Als A , B en C wel op een lijn liggen noemen we deze lijn de *pivotlijn*. (Het Franse woord 'pivot' betekent zoiets als draaipunt. In een koppelmechanisme zoals in figuur 5 worden er de punten M en Q mee bedoeld.)

Met behulp van deze definitie kunnen wij de volgende stelling bewijzen (zie figuur 5).

Stelling 2. Gegeven een koppelmechanisme met pivotsirkel. De dubbelpunten van de bijbehorende koppelkromme die met twee verschillende posities van de koppelstang kunnen worden bereikt zijn precies de punten waar de kromme de pivotsirkel snijdt.

Bewijs. Stel dat er een dubbelpunt op de pivotsirkel ligt. Dan zijn er twee posities van de driehoek aan de koppelstang: $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ waarbij $C = C'$. Het vaste punt M moet nu ergens op



Figuur 3 Links: intrekdraaikraan met lemniscatsturing uit [3]; rechts: intrekdraaikraan met krommenbaan uit [3]

de deellijn liggen van $\angle ACA'$. Evenzo moet Q op de deellijn liggen van $\angle BCB'$. Hieruit volgt dat $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement $180^\circ - \angle ACB$. Als wij nu bij gegeven M en Q kijken naar de meetkundige plaats van alle punten S waarvoor $\angle MCQ$ óf gelijk is aan $\angle ACB$ óf aan het supplement van $\angle ACB$, dan vinden wij de pivotcirkel. Deze constructie kan moeiteloos worden omgedraaid om te bewijzen dat bij een punt van de koppelkromme op de pivotcirkel twee verschillende driehoeken en daarmee een dubbelpunt behoort. $\square$

De Bernouillemniscat als koppelkromme

De klassieke lemniscat van Bernoulli kan op twee verschillende manieren ontstaan als koppelkromme. In figuur 6 schetsen wij deze constructies. De horizontale gestippelde lijnen zijn bij beide constructies vast en de andere drie lijnen zijn beweeglijke stangen. Tegenoverliggende zijden zijn even lang. De korte hebben lengte a en de lange, waarvan er één vast is, hebben lengte $\sqrt{2}a$. Links wordt de lemniscat beschreven als meetkundige plaats van het middelpunt van de bewegende lange zijde. In de rechter constructie is de bovenste stang verlengd met een factor 2 en de lemniscat is nu de meetkundige plaats van het losse eindpunt van deze stang.

Stelling 3. *Bij beide boven beschreven constructies is de koppelkromme gelijk aan de klassieke lemniscat van Bernoulli.*

Wij bewijzen dat de constructie links de lemniscat als koppelkromme levert. De constructie rechts laten we over aan de lezer.

Bewijs. Als wij de notatie uit figuur 5 overnemen, dan is te bewijzen dat geldt: $r_1 r_2 = \frac{1}{2}$. Voor het gemak zetten wij hier $a = 1$. Eerst merken wij op dat geldt: $\triangle F_1 AS \cong \triangle BAF_1$ want de verhoudingen $\frac{|F_1 A|}{|AB|}$ en $\frac{|AS|}{|F_1 A|}$ zijn gelijk. Om een zelfde reden is driehoek $\triangle ABF_2$ gelijkvormig met driehoek $\triangle SBF_2$ en daarom:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{r_1}{1} \quad \text{en} \quad \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{r_2}{1}.$$

Bovendien volgt uit $\triangle F_1 AS \cong \triangle BAF_1$ ook dat $\angle ABF_1 = \angle BF_1 F_2$ gelijk is aan $\angle AF_1 S$. Zodoende vinden wij dat $\angle F_2 F_1 A = \angle BF_1 S$. Hieruit volgt $\triangle AF_2 F_1 \cong \triangle SBF_1$ en daarmee $\frac{x}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{y}$. Samen-gevat vinden we $r_1 r_2 = xy/2 = 1/2$. $\square$

De afbeelding van Darboux

De Franse wiskundige Gaston Darboux [1–2] publiceerde in het jaar 1879 een methode om aan een stangenvierhoek een projectieve derdegraadskromme over de complexe getallen te verbinden. De eigenschappen van deze kromme weerspiegelen de eigenschappen van de bijbehorende stangenvierhoek. Wij lichten hieronder zijn ingenieuze en verrassend eenvoudige constructie toe. Darboux gebruikte de toen nog jonge theorie over elliptische functies van Jacobi om er enkele meetkundige observaties over stangenvierhoeken uit af te leiden.

Wij representeren de stangen van een stangenvierhoek door vier vectoren in $\mathbb{R}^2$ met lengtes a, b, c, d die wij opvatten als vier complexe getallen $az_1, bz_2, cz_3, dz_4 \in \mathbb{C}$ waarbij $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ en $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en positief. Het feit dat een stangenvierhoek gesloten is, vertaalt zich naar de eis $az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 = 0$. Door complex te conjugereren verkrijgen we de twee vergelijkingen:

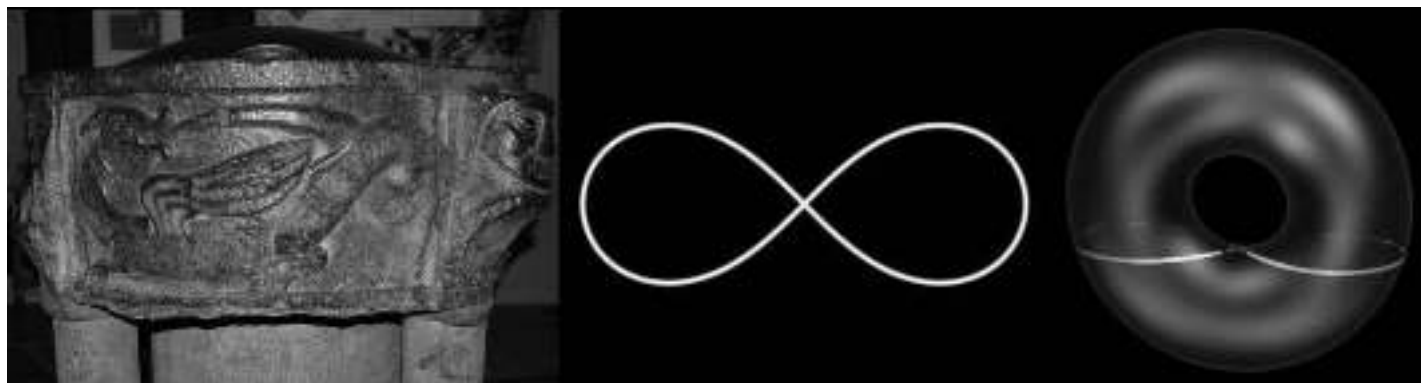
$$az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4 = 0 \quad \text{en} \quad \frac{a}{z_1} + \frac{b}{z_2} + \frac{c}{z_3} + \frac{d}{z_4} = 0. \quad (2)$$

We gebruiken hier dat voor een complex getal $z \in \mathbb{C}$ met $|z| = 1$ geldt: $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Als men de tweede vergelijking vermenigvuldigt met $z_1 z_2 z_3 z_4$ verkrijgen we een homogene derdegraads vergelijking in vier variabelen. Als je wilt kun je de eerste vergelijking gebruiken om een variabele te elimineren en dan blijft er één homogene derdegraadsvergelijking over de complexe getallen in drie variabelen over. Kortom, de twee vergelijkingen beschrijven een complexe vlakke projectieve kromme. Wij noemen deze kromme de *Darbouxkromme* $D = D_{a,b,c,d}$ behorend bij de stangenvierhoek met lengtes a, b, c, d .

De posities van de stangenvierhoek komen nu dus overeen met projectieve punten van de vorm $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) \in \mathbb{P}^3$ die voldoen aan de vergelijkingen (2) en aan de eis:

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1.$$

De rol van de vier variabelen is dezelfde. Deze kromme hoort bij alle stangenvierhoeken met zijden van lengte a, b, c, d , ongeacht de volgorde. Er zijn zes mogelijke volgordes van lengtes bij een stangenvierhoek. In [2] bespreekt Darboux de ambiguïteiten die hierdoor kunnen ontstaan. Dit komt neer op het onderscheid tussen de bij 'eigenschappen van stangenvierhoeken' behandel-



Figuur 4 Links: heidense afbeelding van een draak die zichzelf in de staart bijt uit het begin van de 13e eeuw: de vorm van een lemniscaat (in het dorpje Niel, Niederrhein). Rechts zien we dat de lemniscaat ook optreedt als doorsnijing met de torus waarbij de grote straal twee keer zo groot is als de kleine.

de klassen I en II van stangenvierhoeken. Opgemerkt zij dat er in het algemeen drie verschillende stangenvierhoeken zijn waarbij de verzameling van de lengtes gelijk is aan $\{a, b, c, d\}$.

Er zijn verschillende interessante eigenschappen van deze derdegraadskrommen die uiteraard corresponderen met eigenschappen van de bijbehorende stangenvierhoeken. Wij noemen:

Stelling 4. Gegeven een stangenvierhoek S met lengtes a, b, c, d en Darbouxkromme D . Dan is S doorslaand dan en slechts dan als D een singulariteit heeft.

Opmerking. Een vlakke complex-projectieve kubische kromme met een singulariteit bezit ofwel een rationale parametrisering (dat wil zeggen dat hij het beeld is van een algebraïsche afbeelding vanuit een projectieve lijn naar het projectieve vlak), ofwel valt uiteen in een gladde kegelsnede en een lijn, ofwel bestaat uit drie lijnen.

Bewijs. Eerst onderzoeken wij met een Lagrange multiplier wat het voor de vergelijkingen (2) betekent als D in een punt $Q := (w_1 : w_2 : w_3 : w_4)$ een singulariteit bezit. Hiervoor definiëren wij de rationale functies:

$$L(z_1, z_2, z_3, z_4) := az_1 + bz_2 + cz_3 + dz_4$$

en

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{a}{z_1} + \frac{b}{z_2} + \frac{c}{z_3} + \frac{d}{z_4}.$$

Als wij F beperken tot de nulpuntsverzameling van L , dan is de afgeleide van F gelijk aan nul, precies daar waar de gradiënten van F en L een veelvoud van elkaar zijn. Dus er zal een complex getal λ bestaan met:

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(Q) = \lambda \frac{\partial L}{\partial z_i}(Q) \text{ voor } i = 1, 2, 3, 4.$$

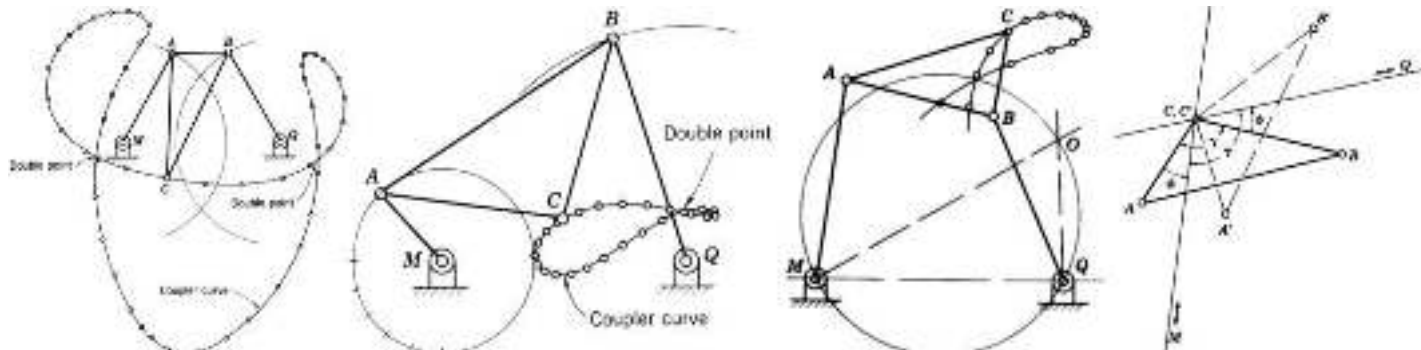
Als wij de afgeleides berekenen vinden wij de volgende vergelijkingen:

$$-\frac{a}{w_1^2} = \lambda a, \quad -\frac{b}{w_2^2} = \lambda b, \quad -\frac{c}{w_3^2} = \lambda c, \quad -\frac{d}{w_4^2} = \lambda d.$$

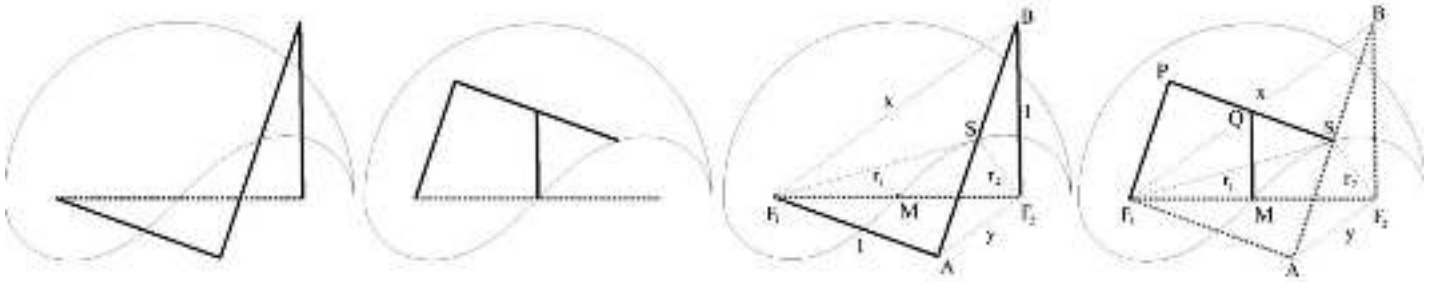
Hieruit volgt $w_1^2 = w_2^2 = w_3^2 = w_4^2$. Daarnaast geldt $L(Q) = 0$ en wij zien dat geldt $a \pm b \pm c \pm d = 0$ waarbij we de '+' en '-' tekens naar believen kunnen kiezen. Uit de eigenschappen voor klassen I en II genoemd in de paragraaf *Toren- en portaalkranen* kunnen we concluderen dat we hier niet te maken hebben met een stangenvierhoek uit één van beide klassen maar met een doorslaande stangenvierhoek. Verder blijkt dat het singuliere punt in $\mathbb{P}^4$ de gedaante $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$ moet hebben.

Het omgekeerde geldt ook: een relatie van de vorm $a \pm b \pm c \pm d = 0$ impliceert dat D een singulariteit in het bijbehorende punt $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$ heeft. $\square$

Opmerking. Het bewijs laat zien dat de enige mogelijke punten waar D een singulariteit kan hebben van de vorm $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1 : \pm 1) \in \mathbb{P}^4$ zijn.



Figuur 5 Van links naar rechts: twee voorbeelden van koppelkrommen, definitie van een pivotcirkel en bewijsschets bij Stelling 2 (alle uit [4])



Figuur 6 Links: twee constructies van de lemniscaat als koppelkromme. Slechts de helft van de koppelkromme is hier te zien: een halve lemniscaat en een halve cirkel. Rechts: notatie bij de constructies van de lemniscaat als koppelkromme

De beschrijving van stangenvierhoeken door middel van de Darbouxafbeelding geeft ook inzichten voor ingewikkeldere stangenconstructies. Zo wordt bijvoorbeeld in [6] met behulp van de Darbouxafbeelding bewezen:

Gegeven een stangenvierhoek met een vijfde stang die twee punten van de stangenvierhoek verbindt. Dan is deze stangenconstructie beweegbaar dan en slechts dan als de stangenconstructie een stangenparallellogram is waarbij de vijfde stang evenwijdig loopt aan twee van de vier stangen.

Dezelfde technieken kunnen ook worden toegepast om te bewijzen dat een koppelkromme nooit op een lijn kan lopen. Dit is geen vanzelfsprekendheid want bijvoorbeeld de beroemde stangenconstructie van Peaucellier (zie [8]) tekent inderdaad een kromme die op een lijn verloopt.

Hijskraanwiskunde als context

Tegenwoordig vindt er in Nederland in alle bèta-vakken een vernieuwing plaats van de leerinhouden voor het onderwijs op het havo/vwo. De vijf hiertoe ingerichte commissies hebben de slogan *context-concept* als gemeenschappelijke leidraad gekozen.

De voor vele mensen aansprekende context van hijskranen biedt een uitstekende omgeving om interessante wiskunde en natuurkunde (die hier achterwege is gebleven) in te bedrijven. Dit is bijvoorbeeld in verschillende onderwijsexperimenten en ook uit de diverse publicaties van de Meccano Gilde Nederland over dit onderwerp (zie bijvoorbeeld [14]) gebleken. Bij toren- en ellipskranen en andere constructies dienen zich vele voor leerlingen goed te doorgronden vragen aan ([16], [17], [18] en [7]).

Het blijkt echter ook dat men voor een zinvolle omgang met deze vragen reeds over behoorlijk veel wiskundige kennis en vaardigheid moet beschikken. Dit illustreert een problematisch aspect voor de inzet van deze context en relevante contexten in het algemeen. Een ander problematisch aspect is de eerlijkheid waarmee contexten worden gepresenteerd. Dergelijke wiskundige beschouwingen over hijskranen zijn niet altijd even relevant voor de werkelijke praktijk van kraanbouwers (zie [10]). Daar worden problemen anders geformuleerd en veel pragmatischer opgelost. Deze beschouwingen dienen eerder het intellectuele plezier van wiskundigen en geven aanleiding tot meetkundige vragen die volgens mij *an sich* al de moeite waard zijn.

Referenties

- 1 W. Blaschke, H.R. Müller 'Ebene Kinematik', Verlag von R. Oldenbourg, München, 1956.
- 2 M.G. Darboux, 'De l'emploi des fonctions hyperelliptiques dans la théorie de quadrilatère plan', /em Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Gauthiers-Villars (1879), Paris, pp. 109–128.
- 3 R.Hänchen, 'Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion', Verlag Julius Springer (1932), Berlin.
- 4 A.S. Hall, 'Kinematics and Linkage Design', Prentice-Hall, Inc. (1961), Englewood Cliffs, N.J.
- 5 J.A.Hrones, G.L. Nelson, 'Analysis of the Four-Bar Linkage, I and II', The Technology Press of M.I.T. and John Wiley & Sons 3 (1951), pp. 31–59.
- 6 R.H. Kaenders, 'Kranen en Lemniscaten', De schijf van vijf, Syllabus CWI vakantiecursus, 2005.
- 7 R.H. Kaenders, Kräne und Lemniscaten, Beiträge zum Mathematikunterricht, GDM Tagung, Osnabrück, 2006.
- 8 A.B. Kempe How to draw a straight line, National Council of Teachers in Mathematics, Classics in mathematics education (6), 1977.
- 9 G. Niemann, Über Wippkrane mit waagrechtem Lastweg, Dissertation Technische Hochschule Berlin, 1928.
- 10 G. Nieuwenhuis, 'De lemniscaatkraan', Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie 7(3) (2006).
- 11 K. Rüdiger, 'Einziehkrane mit waagerechter Lastbahn', Fördertechnik und Frachtverkehr XXIII(9) (1930), pp. 169–172.
- 12 Selter, 'Wippauslegerkrane mit horizontal bewegter Last', Fördertechnische Rundschau 2 (1927), pp. 28–31.(2005)
- 13 J.E. de Vries, Hijswerktuigen, Firma Ruijgrok & Co., Haarlem, 1929.
- 14 B. Vrugt, 'Van wagenkraan tot lemniscaat, deel I en II' Meccano Nieuws 16.1 en 16.2 (1998).
- 15 F. Westendorp, Handboek voor werktuigkundigen, Zevende druk van Bernoulli's vademecum, Van Holkema & Warendorf's Uitg. Mij., Amsterdam, 1927.
- 16 D. van Gemert, T. Wijnen, 'De Ellipskraan', vwo-profielwerkstuk, Pleincollege Eckart, Eindhoven, Cursus Wiskundig denken, Ratio, RU Nijmegen, 2003.
- 17 M. Hercules, J. van der Velde, Hijskranen met een horizontale belastingsweg, havo-profielwerkstuk, Canisius College Nijmegen.
- 18 J. Hoek, R. Balsem, Lemniscaat, vwo-profielwerkstuk, Canisius College Nijmegen, 2004.
- 19 FIGEE crane building, Haarlem, www.figee.com.
- 20 KE Kranbau Eberswalde, www.kranbau-eberswalde.de.
- 21 Ratio Instituut en Internetmethode, lesmateriaal (14.4), www.ratio.ru.nl, Radboud Universiteit Nijmegen.
- 22 Wiskunde-B-dag, Dansende Stangen, www.fi.uu.nl/wisbdag, Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2004.

Piet Groeneboom

Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica

Technische Universiteit Delft

Postbus 5031, 2600 GA Delft

p.groeneboom@ewi.tudelft.nl



Piet Groeneboom

Afscheidsrede

Summa cogitatio

Wat zouden belangrijke onderwerpen van onderzoek moeten zijn? De politiek, de wetenschappelijke beleidsmakers en de wetenschappers zelf houden er zeer verschillende meningen op na. Voor werk aan de grote wiskundige problemen wordt in Nederland maar weinig geld beschikbaar gesteld. Waar zou dit toch van komen? Piet Groeneboom, emeritus hoogleraar Statistiek aan de Technische Universiteit Delft en de Vrije Universiteit Amsterdam, zoekt een antwoord op deze vraag in zijn afscheidsrede, gehouden op 8 september 2006.

Ik sta in het keukentje van mijn tijdelijk verblijf in Seattle en lees daar de tekst die op het afwasmiddel Seventh generation staat. Misschien is dit iets waar een excellent wetenschapper geen tijd voor zou mogen hebben. Misschien laat dit zelfs wel zien dat ik mij niet tot dit illuster gezelschap mag rekenen. Maar goed... ik lees: "In our every deliberation, we must consider the impact of our decisions on the next seven generations." From the great law of the Iroquois confederacy. En... u zult het misschien niet geloven, maar ik voel mij plotseling ontroerd. Om verschillende redenen. In de eerste plaats om de inhoud van de tekst en de mooie manier waarop het is geformuleerd. In de tweede plaats vanwege het feit dat dit zo maar op een afwasmiddel staat. Ik vraag mij af of het mogelijk is dat ik

in Nederland in mijn keuken sta en een vergelijkbare tekst op mijn afwasmiddel zie staan. En ik weet: "Nee, het is niet mogelijk." En ten derde ben ik ontroerd vanwege het idee om terug te grijpen op een manifest van een aantal indianen in de omgeving van New York.

Dit moment van ontroering komt op dezelfde dag dat ik via de e-mail een aansporing heb gekregen om een voorstel te schrijven voor een initiatief van het ministerie, getiteld *Smart Mix*, waaruit ik nu ook wat zal laten zien (uit: Staatscourant 27 maart 2006, nr. 61, pag. 11).

"Het Smart Mix-programma is een strategische inzet van honderd miljoen euro uit de extra middelen voor de kenniseconomie. Deze middelen worden als breekijzer ingezet om in samenhang en balans twee knelpunten in

de Nederlandse kenniseconomie aan te pakken: het versterken van focus en massa in het **excellent** wetenschappelijke onderzoek en de kennisparadox. De kennisparadox wordt aangepakt door het vitaliseren van samenwerking tussen bedrijfsleven en kennisinfrastructuur op voor Nederland cruciale terreinen in combinatie met het versterken van **excellent** onderzoeksgroepen. Het Smart Mix-programma onderscheidt zich van bestaande instrumenten door de beoogde focus en massa in **excellent** onderzoek in combinatie met de wisselwerking en samenspel in een breed deel van de kennisketen. Op basis van de vraag van bedrijfsleven en/of maatschappelijke organisaties in ons land, wordt in dynamische netwerken **excellent** wetenschappelijk en/of technologisch onderzoek uitgevoerd." En:

"Het Smart Mix-programma heeft twee gerelateerde doelen, het creëren van maatschappelijke en economische waarde (valorisatie) in de brede betekenis van het begrip en het versterken van focus en massa in wetenschappelijk **excellent** onderzoek."



Misschien zal een aantal onder u (hoewel ik wat dat betreft zo langzamerhand van niets meer zeker ben) begrijpen dat ik na het lezen van de ministeriële taal in het Smart Mix-manifest me niet zo zeer geroerd als wel beroerd voelde. Het gaat hier om iets dat belangrijker is dan je misschien oppervlakkig geneigd zou zijn te denken. Ik word geconfronteerd met een voorstel dat de titel *Smart Mix* heeft. Ik weet dan meteen dat het om iets gruwelijks gaat, alleen al vanwege de titel van het voorstel. Maar misschien is de wetenschappelijke wereld in Nederland al zo vaak door ministeries gebombardeerd met idiote voorstellen met navenante titels dat niemand er meer aanstoort aan neemt. Er is een zekere berusting ingetreden, net als bij reizigers die gebruikmaken van de Nederlandse Spoorwegen. In ieder geval kon ik in de discussie over Smart Mix niets van mijn eigen weerzin ten aanzien van naam en voorstel terugvinden. Het is misschien de macht van de rinkelende geldbuidel die de arme wetenschappers wordt voorgehouden, zodat al gauw een sfeer ontstaat van: ja, we moeten zorgen de boot niet te missen.

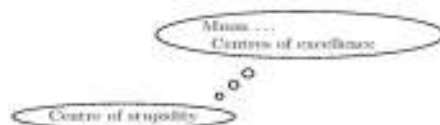
Ik wijs er nu even op dat alleen al in de eerste alinea vier keer het woord 'excellent' voorkomt. Dit soort taalgebruik zou ik willen aanduiden met *topdenken*, oftewel *summa cogitatio*.

Het is misschien interessant om te filosoferen over de vraag of de tekst in de Smart Mix subsidieregeling door een computer gegenereerd zou kunnen worden. We zouden bijvoorbeeld kunnen denken aan een computerprogramma dat per alinea minstens vier keer het woord 'excellent' genereert en mis-

schien ook nog een aantal keren 'kennis-economie', 'kennisparadox', 'valorisatie', 'dynamisch', 'focus', 'massa', enz.

Maar dit te denken is in feite een belediging van de computer. Voor mensen zoals ik, die in een soort symbiose met de computer leven, is de computer een intelligente gesprekspartner. Want wij weten dat de computer vaak met iets aan komt zetten dat we niet hadden verwacht. Dit is niet zo zeer de 'kennisparadox' waar de ministeriële nota over spreekt als wel de paradox dat we zelf van alles in de computer hebben gestopt waarna de computer ons informatie teruggeeft die we niet hadden verwacht. De 'buzzwords' in de nota van het ministerie zijn van een geheel andere aard. Die stammen uit de sfeer van de *windhandel*, om de titel van een van Marten Toonders meesterwerken te citeren.

Ik zal u nu een zogenaamde flow chart van de situatie in de randstad laten zien. Zoals u weet, is de flow chart een populair 'tool' van managers. Linksonder in mijn flow chart is een centrum dat ik helaas niet anders kan benoemen dan 'centre of stupidity', hoe graag ik ook anders zou willen. Vanuit dit centrum borrelen met regelmatige tussenpozen bepaalde dingen op. Zoals:



Of: laten we eens de volgende borden ophangen naast de snelweg.

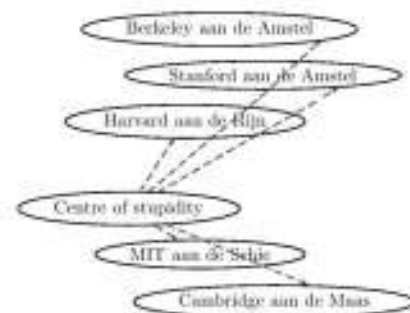
I ♥ afstand houden

Als ik alleen al denk aan het geld dat het ophangen en vervolgens weer verwijderen van deze borden heeft gekost en aan al het wetenschappelijk onderzoek dat voor dit geld gefinancierd had kunnen worden, dan krimpt mijn hart ineen.

Of er borrelt de gedachte op: laten we die wetenschappers in hun ivoren toren eens dwingen de markt op te gaan en te werken voor onze industrie en overheid. Laten we dit voorstel de eigentijdse titel *Smart Mix* geven!:



Uit de door het topdenkvirus aangetaste kringen van universitaire bestuurders zien we de volgende gedachten opborrelen: kom... laten we eens roepen dat Delft het MIT aan de Schie moet worden! Rijmt ook nog. Of: kom... laten we roepen dat Leiden Harvard aan de Rijn moet worden. Of: kom... laten we roepen dat Rotterdam Cambridge aan de Maas moet worden!. Ik heb zelf ook nog een suggestie voor de twee universiteiten in onze landelijke hoofdstad.



Wat denken bestuurders van universiteiten met kreten als 'Leiden moet Harvard aan de Rijn worden' te bereiken? Ik heb zelf aan een van die Amerikaanse 'topinstituten' op mijn flow chart lesgegeven en ik heb helemaal niet het gevoel dat Nederland zich per se in alle opzichten moet spiegelen aan wat daar gebeurt. Waarom probeert Nederland zich niet gewoon tot doel te stellen goed onderwijs te geven op alle niveaus, te beginnen met de basisschool?

We weten eigenlijk allemaal wel dat het heel slecht gaat met het onderwijs in Nederland. In de bijlage van de NRC van de afgelopen week zegt Margaretha van der Werf van de Rijksuniversiteit van Groningen: ik heb maar één boodschap: stop de daling van het onderwijsniveau. Deze week dinsdag las ik in dezelfde krant het alleszins geloofwaardige artikel *Scholen willen geen academici* van Ton

van Haperen, die leraar en leraaropleider is.

Waardoor zou deze daling in het onderwijsniveau kunnen worden tegengehouden? Het antwoord is heel voor de hand liggend. Er moeten geen onbevoegden meer voor de klas staan, het niveau moet bewaakt worden, leraren moeten niet gedwongen worden les te geven in vakken waarin ze niet zijn opgeleid en hun salarissen moeten omhoog. Maatregelen zonder 'glamour' voor de politici, maar wel heel noodzakelijke maatregelen. De leraarsalarissen zijn, zoals bekend, heel laag, zeker in verhouding tot de salarissen in het bedrijfsleven. Dit maakt het leraarschap niet tot een aantrekkelijk beroep. Maar in plaats van de aandacht op de zo juist genoemde zaken te richten, entameert de regering prestigeprojecten.

In het hoger onderwijs is de situatie al niet beter. Bij het aantrekken van een hoogleraar moet natuurlijk het eerste criterium zijn hoe goed hij is in zijn vak en niet hoe goed hij is in het aantrekken van geld 'van buiten' of in het 'managen'. Ik gebruik nu de woorden 'hij' en 'zijn', maar het geldt natuurlijk op dezelfde manier voor 'zij' en 'haar'. Als de hoogleraar op latere leeftijd geen goede ideeën meer heeft of wat uitgeblust raakt, kan hij zich altijd nog wat meer in het bestuurlijk circuit profileren en zich met het aantrekken van geld bezighouden. Om van de creatieve wetenschapsbeoefenaars te eisen dat zij zich voortdurend met het aantrekken van 'geld van buiten' en management bezighouden is een gigantische verspilling van talent en een universiteit onwaardig.

Niettemin is deze mentaliteit, die aansluit bij de initiatieven van het centrum links onder op mijn flow chart van de randstad, er in Nederland stilletjes ingeslopen. Als genoemd centrum vindt dat het bedrijfsleven of de overheidsinstellingen in Nederland te weinig aansluiten bij de voorlopers in kennis op de universiteiten, moet het er voor zorgen dat het bedrijfsleven en de overheidsinstellingen buiten de universiteit zich wenden tot de universiteiten. Ons centrum moet niet proberen onderzoekers op de universiteiten van het werk te houden door ze te dwingen 'de markt op te gaan' onder het motto 'anders krijgen jullie geen geld'. Een universiteit moet als eerste doel hebben onafhankelijk onderzoek te doen en goed onderwijs te geven en niet om om een bedrijf te worden dat gericht is op het aantrekken van 'geld van buiten'.

Op dit punt aangeland, voel ik mij gedwongen een kreet te slaken die weer geïnspireerd is op een titel van een van Marten Toonders meesterwerken, namelijk: *Hoe vreselijk is dit*

alles!. Laat ik mij van deze deprimerende zaken afwenden en mij wenden tot het gebied dat mij in mijn loopbaan als hoogleraar zo veel vreugde heeft verschaft: de wiskunde.

In het volgende diagram ziet u de natuurlijke getallen tot en met 117. Ik laat daar nu de priemgetallen donker uit oplichten, op dezelfde manier als waarop ik het woord excellent uit de subsidieregeling Smart Mix van het ministerie donker heb laten oplichten. Een priemgetal is een natuurlijk getal ≥ 2 dat alleen deelbaar is door zichzelf en door 1.

1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, 12, **13**, 14,
15, 16, **17**, 18, **19**, 20, 21, 22, **23**, 24, 25,
26, 27, 28, **29**, 30, **31**, 32, 33, 34, 35, 36,
37, 38, 39, 40, **41**, 42, **43**, 44, 45, 46, **47**,
48, 49, 50, 51, 52, **53**, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, **61**, 62, 63, 64, 65, 66, **67**, 68, 69,
70, **71**, 72, **73**, 74, 75, 76, 77, 78, **79**, 80,
81, 82, **83**, 84, 85, 86, 87, 88, **89**, 90, 91,
92, 93, 94, 95, 96, **97**, 98, 99, 100, **101**,
102, **103**, 104, 105, 106, **107**, 108, **109**,
110, 111, 112, **113**, 114, 115, 116, 117

Vervolgens omcirkel ik in deze verzameling de zogenaamde priemtweelingen; dit zijn pa-

ren priemgetallen die een afstand gelijk aan 2 hebben.

1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, 12, **13**, 14,
15, 16, **17**, 18, **19**, 20, 21, 22, **23**, 24, 25,
26, 27, 28, **29**, 30, **31**, 32, 33, 34, 35, 36,
37, 38, 39, 40, **41**, 42, **43**, 44, 45, 46, **47**,
48, 49, 50, 51, 52, **53**, 54, 55, 56, 57, 58,
59, 60, **61**, 62, 63, 64, 65, 66, **67**, 68, 69,
70, **71**, 72, **73**, 74, 75, 76, 77, 78, **79**, 80,
81, 82, **83**, 84, 85, 86, 87, 88, **89**, 90, 91,
92, 93, 94, 95, 96, **97**, 98, 99, 100, **101**,
102, **103**, 104, 105, 106, **107**, 108, **109**,
110, 111, 112, **113**, 114, 115, 116, 117

Met betrekking tot de priemgetallen heeft de Hongaarse wiskundige Paul Erdős de volgende wijze woorden gesproken: "God dobbelt misschien niet met het heelal, maar er is iets vreemds aan de hand met de priemgetallen." En met betrekking tot wiskundepraatjes heeft de Nederlandse wiskundige Hendrik Lenstra jr. de wijze woorden gesproken: "Een wiskundepraatje zonder bewijs is als een film zonder liefdesscène."

Ik zal mij daarom voor deze gelegenheid

Ook zo genoeg van de kennisparadox?

Wacht niet langer!

Er is nu

Smart Mix pakt de kennisparadox aan!
Excellent onderzoek in dynamische netwerken!
Smart Mix schept maatschappelijke en economische waarde!
Smart Mix versterkt focus en massa van excellent onderzoek!

Een produkt van NWO

Smart Mix voor beter onderzoek

wijden aan het bewijs van Euclides dat er oneindig veel priemgetallen zijn. Aangezien ik goed op de hoogte ben van de situatie in het onderwijs op de Nederlandse basis- en middelbare scholen, ben ik er zeker van dat velen van u dit bewijs nooit hebben gezien. Bovendien is dit bewijs het eerste bewijs in *Proofs from THE BOOK* (Aigner, Ziegler en Hofmann (2004)), opgedragen aan Erdős.

Euclides leefde, naar wordt aangenomen, rond driehonderd jaar voor Christus, en zijn werken, in de Engelse vertaling getiteld *The elements*, zijn nog steeds in paperback te krijgen. In feite heb ik voor deze speciale gelegenheid de drie deeltjes in een Engelse paperbackeditie aangeschaft. De stelling dat er oneindig veel priemgetallen zijn is hier te vinden als Propositie 20 uit boek IX.

Toen ik op de middelbare school zat leerden wij nog om bewijzen op te schrijven. Dit ging in een schema van drie stappen: *gegeven, te bewijzen, bewijs*. Ouderen onder u zullen een golf van jeugdsentiment voelen bij het zien van de afkortingen geg., te bew. en bew. . We krijgen dus:

geg.: er zijn priemgetallen.

Merk hierbij op dat we eigenlijk niet kunnen zeggen: geg.: de priemgetallen, omdat als ze echt gegeven waren, we meteen zouden weten of het er wel of niet oneindig veel zijn!

Vervolgens krijgen we:

te bew.: er zijn oneindig veel priemgetallen.

We beginnen nu met het bewijs van Euclides in moderne notatie.

bew.: we laten zien dat er een priemgetal groter dan 5 bestaat.

Hier zitten we meteen met een moeilijkheid. Stel we trachten een politicus het bewijs van Euclides uit te leggen en we beginnen met het bovenstaande te zeggen. Onze politicus zou misschien de wenkbrauwen fronsen en iets zeggen in de volgende trant:

“Ik vind . . . je moet in die dingen *reëel* zijn. We zagen net al die priemgetallen groter dan 5 passeren. Dus we weten al dat er priemgetallen groter dan 5 zijn. Ik zeg altijd: we moeten natuurlijk wel een beetje reëel blijven!”

Wij zouden dan kunnen antwoorden: “Ho, ho, mijnheer de politicus: in plaats van 5 kunnen we een willekeurig groot priemgetal nemen, het maakt voor de redenering niet uit.”

Na deze korte toelichting zetten we ons bewijs voort

Bekijk het getal $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, het kleinste gemene veelvoud van 2, 3 en 5. Weet u het nog, het KGV en de GGD? Dit kleinste gemene veelvoud is het product van de priemgetallen

t/m 5. Tel hier het getal 1 bij op. We krijgen dan:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 30 + 1 = 31.$$

Dit getal laat bij deling door 2, 3 of 5 rest 1 achter! Dus ofwel dit getal is zelf een priemgetal, ofwel het is geen priemgetal, maar wel deelbaar door een priemgetal groter dan 5. Dus er is een priemgetal groter dan 5!

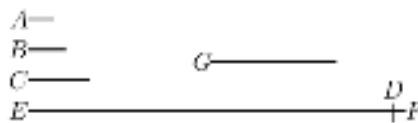
Deze redenering kunnen we ook houden voor een willekeurige rij $2, 3, 5, \dots, p_k$ van k opvolgende priemgetallen, want

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$

laat bij deling door één van de priemgetallen t/m p_k ook rest 1 achter! $\square$

Het bewijs van Euclides zelf begint als volgt in mijn vertaling:

“Let A, B, C be assigned prime numbers. Let the least number measured by A, B, C be taken, and let it be DE . Let the unit DF be added to DE . Then EF is either prime or not . . .” en wordt geïllustreerd met de volgende tekening:



De lijnstukjes A, B en C representeren respectievelijk de getallen 2, 3 en 5, het lijnstukje ED het getal 30 en DF representeert het getal 1. Merk op dat Euclides met het lijnstukje G al waarschuwt voor een fout die 2300 jaar later nog vaak gemaakt zou worden, namelijk aan te nemen dat het product van de gekozen priemgetallen +1 weer een priemgetal is. Hoewel dit bij $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ wel het geval is, is dat bijvoorbeeld niet het geval bij:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509.$$

Euclides, bij wie het vermogen tot logisch redeneren goed ontwikkeld was, realiseerde zich dat niets in de redenering liet zien dat het gevormde product +1 weer een priemgetal was. Wel liet de redenering zien dat *als* het gevormde product +1 deelbaar was door een priemgetal kleiner dan het gevormde product +1, dit priemgetal in ieder geval groter moest zijn dan het grootste getal in het product.

Dit basisfeit met betrekking tot ons getallenstelsel, dat al meer dan tweeduizend jaar geleden bekend was aan Euclides, is, voorzover ik weet, nog steeds niet in ons voortgezet onderwijs terecht gekomen. Het is mijzelf niet verteld op de middelbare school en het is mijzelf ook niet verteld. Geen wonder dat er

in Nederland zo weinig scholieren wiskunde gaan studeren! Voor mensen die hier gevoelig voor zijn, en dat zijn er misschien meer dan je zou denken, geeft dit bewijs van Euclides een schoonheidsbeleving. Dat is van een geheel andere orde dan in een wiskundeboekje voor middelbare scholieren het wortel trekken ‘toe te lichten’ met een cartoon over een tandarts-behandeling!

Er is ook een overdreven nadruk op waar het allemaal goed voor zou moeten zijn. Ik herinner me televisie-uitzendingen waar scholieren met hun leraar zwoegend buiten in de weer waren in het kader van het ‘dichter bij de mens brengen’ van de wiskunde. Die tijd hadden ze beter kunnen besteden aan het bestuderen van het zo juist gegeven bewijs van Euclides!

Als je beseft dat ongeveer driehonderd jaar voor Christus Euclides met alle gebrekkige hulpmiddelen uit die tijd, zonder de notatie die we tegenwoordig hebben, in staat was om een bewijs te geven dat er oneindig veel priemgetallen zijn en dat binnenkort, als wiskunde ook nog facultatief zou worden op de middelbare school, dit basisfeit van ons getallenstelsel geheel buiten het bereik van een groot aantal scholieren zal raken, dan kun je alleen maar concluderen tot een toenemende domheid van de mensheid, en van de Nederlanders in het bijzonder.

Euclides kwam uit de school van Plato. Het komt mij enigszins onwaarschijnlijk voor dat Plato en Euclides hun werk hebben gedaan, gemotiveerd door de zogenaamde gesel van de markt, om de woorden van een minister uit een eerder kabinet te gebruiken. Niettemin benadert de ‘impact’ van Euclides de ‘impact’ van de bijbel. En hoewel we dus kunnen constateren dat de ‘impact factor’ van Euclides ongeveer 2300 jaar later bijzonder groot is gebleken te zijn, betwijfel ik ook of die ‘impact factor’ al heel erg groot was ten tijde van Euclides zelf.

Politici en bestuurders zouden zich meer moeten realiseren dat “In our every deliberation, we must consider the impact of our decisions on the next seven generations”. Een wiskundige die een stelling bewijst die iets voorstelt doet mogelijk iets met “positive impact on the next seven generations”. Waaraan ik moet toevoegen dat ‘impact’ iets heel anders is dan wat tegenwoordig onder ‘impact factor’ wordt verstaan. Laatstgenoemde ‘impact factor’ heeft meer te maken met de waan van de dag.

Ik wil nu aandacht besteden aan een aantal vermoedens met betrekking tot de priemgetallen, waarvan het oudste door Euclides is

geopperd (volgens Tao (2006); ik heb dit niet zelf kunnen verifiëren).

- *Priemtwelingvermoeden* (Euclides, ongeveer driehonderd jaar voor Christus?): Er zijn oneindig veel paren $(p, p + 2)$ van priemgetallen die afstand 2 tot elkaar hebben: $(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), \dots$
- Het *oneven Goldbachvermoeden* (Goldbach, 1742): Elk oneven getal ≥ 7 is de som van drie priemgetallen: $7 = 2 + 2 + 3$, $9 = 3 + 3 + 3$, $11 = 3 + 3 + 5$, enz.
- Het *even Goldbachvermoeden* (Euler, 1742): elk even getal ≥ 4 is de som van twee priemgetallen: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, enz.
- *Rekenkundige rijenvermoeden*: de priemgetallen bevatten oneindig veel rekenkundige rijen van willekeurige (maar wel eindige) lengte ≥ 3 .
Rekenkundige rijen van lengte 3 zijn: $(3, 5, 7), (5, 11, 17), (11, 17, 23)$, een rekenkundige rij van lengte 4 is: $(5, 11, 17, 23)$, enz.
- Het laatste vermoeden is een speciaal geval van het *Erdős-Turánvermoeden* (1936): elke deelverzameling $\{n_1, n_2, \dots\}$ van de natuurlijke getallen waarvoor geldt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \infty$$

heeft willekeurig lange rekenkundige rijen. Dit vermoeden is 'totaal open', zoals dat heet. Het is zelfs niet bekend of zo'n deelverzameling rekenkundige rijen van lengte 3 bevat.

- Er is ook een \$1,000,000 vermoeden: *Riemannhypothese* (Riemann, 1859): De niet-triviale nulpunten van de ζ -functie liggen op een verticale lijn door $(1/2, 0)$ in het complexe vlak.

Het belang dat wiskundigen aan dit vermoeden hechten wordt geïllustreerd door de volgende uitspraak van Hilbert: "Als ik na vijfhonderd jaar geslapen te hebben wakker word, zal mijn eerste vraag zijn: is de Riemannhypothese bewezen?". De Riemannhypothese is probleem 8 in Hilberts lijst van 23 problemen (Hilbert, 1900). Kort voordat Hilbert zijn lijst van 23 problemen heeft gepresenteerd hadden Hadamard en De la Vallée Poussin bewezen dat de reële delen van de niet-triviale nulpunten tussen 0 en 1 liggen (Hadamard en De la Vallée Poussin (1896)). Dat het vandaar nog een grote stap is naar de Riemannhypothese blijkt uit het feit dat de Riemannhypothese nog steeds niet is bewezen (of weerlegd, maar er is in feite weinig twijfel aan de juistheid van deze hypothese).

Het Clay Mathematics Institute (CMI) werd

opgericht in september 1998 door Landon T. Clay, een zakenman uit Boston, en zijn vrouw, Lavinia D. Clay. Hun doel was: "to increase and disseminate mathematical knowledge." Kom daar eens om in Nederland! De Riemannhypothese is een van de zeven "Millennium prize problems"; het vermoeden van Poincaré (1904) is een ander. Men denkt op het moment dat Grigori Perelman dit laatste vermoeden heeft bewezen en in aanmerking komt voor de \$1,000,000. Hij heeft al meegedeeld dat het Clay Mathematics Institute eerst de prijs maar eens aan hem toe moet kennen en dan zal hij nog wel zien of hij hem zal accepteren.

Het is grappig om te bedenken dat zowel Andrew Wiles, die aan het eind van de vorige eeuw het vermoeden van Fermat heeft bewezen, als Grigori Perelman uit de Nederlandse onderzoeksscholen gezet zouden zijn vanwege hun gering aantal publicaties. Zij voldoen allebei geenszins aan het criterium van gemiddeld minstens twee papertjes per jaar. Denk alleen al aan de precedentwerking van het toelaten van twee van die onderzoekers met zo'n lage productie in een van onze onderzoeksscholen!

We citeren hier uit de beschrijving van de Millennium Prize Problems van het Clay Mathematics Institute:

"The Millennium Prize Problems were selected by the founding Scientific Advisory Board of CMI Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles, and Edward Witten after consultation with other leading mathematicians. Their aim was somewhat different than that of Hilbert: not to define new challenges, but to record some of the most difficult issues with which mathematicians were struggling at the turn of the second millennium; to recognize achievement in mathematics of historical dimension; to elevate in the consciousness of the general public the fact that in mathematics the frontier is still open and abounds in important unsolved problems; and to emphasize the importance of working toward a solution of the deepest, most difficult problems."

Louis De Branges de Bourcia heeft geclaimd dat hij de Riemannhypothese bewezen heeft in een 124 pagina's tellend manuscript, maar er is grote scepsis in de wiskundige wereld met betrekking tot deze claim. Hij heeft tevens aangekondigd bij het ontvangen van de prijs zijn voorvaderlijk kasteel in Frankrijk te zullen restaureren van het ontvangen geld.

Ik weet zeker dat ik aan de meesten van u met geen mogelijkheid zal kunnen uitleg-

gen wat de Riemannhypothese inhoudt. En hoe komt dat? Door ons schoolonderwijs in de wiskunde. Aangezien velen van u wiskunde-onderwijs op de middelbare school genoten zullen hebben dat geen aandacht aan wortels uit negatieve getallen zal hebben besteed, is het onmogelijk om aan u uit te leggen wat de Riemannhypothese inhoudt en ik zal dat dan ook niet proberen.

Er is inmiddels met betrekking tot de vermoedens veel vooruitgang geboekt. Hieronder volgt een (onvolledig) overzicht. Daarbij heb ik de begrippen 'verdwijnde' en 'niet verdwijnde' dichtheid nodig.

Een verzameling natuurlijke getallen B heeft een *niet verdwijnde* dichtheid in een (oneindige) verzameling natuurlijke getallen A als geldt:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|B \cap [1, n]|}{|A \cap [1, n]|} > 0. \quad (1)$$

Hierbij duidt $|C|$ het aantal getallen in de verzameling C aan en $[1, n]$ de verzameling natuurlijke getallen $\{1, \dots, n\}$. Als (1) niet geldt, zeggen we dat B een *verdwijnde* dichtheid in de verzameling A heeft.

- Vinogradov (1937): ieder voldoende groot oneven getal n is de som van drie priemgetallen. Huidige stand: 'voldoend groot': $n > 10^{1346}$. Dus het oneven Goldbachvermoeden is waar voor $n > 10^{1346}$. Het is ook waar voor $n < 10^{20}$.

Nu nog het gebied tussen 10^{20} en 10^{1346} .

- Van der Corput (1939): Er zijn oneindig veel rekenkundige rijen van lengte 3 in de priemgetallen.
- Szemerédi (1975): Elke verzameling van niet verdwijnde dichtheid in de natuurlijke getallen heeft (oneindig veel) willekeurig lange rekenkundige rijen (de stelling van Szemerédi geldt in feite ook voor de gehele getallen, maar deze is in het volgende niet nodig).
- N.B. Er zijn inmiddels (minstens) vier totaal verschillende bewijzen voor de stelling van Szemerédi, via combinatoriek, Fourieranalyse, ergodentheorie, en (hyper)grafentheorie. Studenten vragen mij vaak, als ik een tweede bewijs geef voor een stelling waarom ik dat doe. Misschien vinden zij één bewijs eigenlijk al te veel. De reden voor het geven van meer bewijzen is natuurlijk dat elk bewijs nieuw inzicht geeft in het resultaat waar het om gaat.
- [9]: De priemgetallen bevatten (oneindig veel) willekeurig lange rekenkundige rijen.

Ik wil nu in de rest van mijn rede vooral ingaan op het laatste resultaat en op de methoden die leidden tot dit resultaat. En passant zal ik

Eruit gegooide priemveelvouden	Verwacht aantal rekenkundige rijen van lengte 3 in de priemgetallen $\leq n$	n	Aantal priemtwelingen $\leq n$	$1.32032 \int_1^n \frac{dx}{\log x)^2}$
Niets eruit	$(1/4)n^2/(\log n)^3$	10^6	8168	8246
Veelvouden van 2 eruit	$(1/2)n^2/(\log n)^3$	10^8	440312	440366
Veelvouden van 2 en 3 eruit	$\frac{3}{8}n^2/(\log n)^3$	10^{10}	27412679	27411418
Veelvouden van 2, 3 en 5 eruit	$0.3516 n^2/(\log n)^3$	10^{12}	1.87059×10^9	1.870560×10^9
...	...			
Veel priemveelvouden eruit ...	$0.3300 n^2/(\log n)^3$			

Tabel 1 Links: het verwachte aantal rekenkundige rijen van lengte 3 in de priemgetallen $\leq n$ wanneer veelvouden van kleine priemgetallen worden weggelaten. Rechts: een vergelijkende tabel met in de tweede kolom uit Tao (2006) het aantal priemtwelingen en in de derde het aantal priemtwelingen dat het vermoeden geeft

nog iets zeggen over het priemtweling vermoeden. De twee volgende voorbeelden illustreren de begrippen ‘verdwijnde’ en ‘niet verdwijnde’ dichtheid.

- De verzameling van positieve even getallen B heeft een *niet verdwijnde* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A . B heeft rekenkundige rijen van willekeurige lengte, in overeenstemming met de stelling van Szemerédi (1975). B heeft zelfs oneindige rekenkundige rijen (dit laatste geldt niet voor de priemgetallen).
- De verzameling van priemgetallen B heeft een *verdwijnde* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A . “Larger primes are thinner on the ground than small ones” (Gowers, 2002, p. 119). We kunnen dus de stelling van Szemerédi niet (meteen) toepassen.

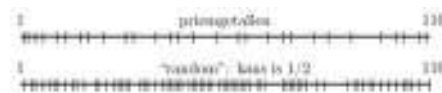
Voor random verzamelingen natuurlijke getallen geldt het volgende.

- Kleur de natuurlijke getallen rood met een vaste positieve kans, onafhankelijk voor elk getal. De zo ontstane verzameling rode getallen B heeft met kans 1 een *niet verdwijnde* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A . B heeft dus volgens de stelling van Szemerédi met kans 1 (oneindig veel) rekenkundige rijen van willekeurige lengte.
- Kleur het natuurlijke getal $n \geq 3$ rood met kans $1/\log n$, onafhankelijk voor elke n . De zo ontstane verzameling B heeft met kans 1 een *verdwijnde* dichtheid in de verzameling natuurlijke getallen A . Ook voor zo’n verzameling kan (heel gemakkelijk) bewezen worden dat hij met kans 1 (oneindig veel) rekenkundige rijen van willekeurige lengte bevat, ondanks het feit dat we de stelling van Szemerédi niet (meteen) kunnen toepassen!

Hoe random zijn de priemgetallen? Is er een ‘conspiracy of the primes’ of kunnen we ze min of meer als een random verzameling getallen behandelen? Vanwege de priemgetalstelling van Hadamard en de la Vallée Pous-

sin (1896) weten we dat de dichtheid van de priemgetallen ‘verdwijnt’ met een snelheid $1/\log n$. Dus als ze zich ‘voldoende random’ gedragen, moeten er (oneindig veel) rekenkundige rijen van willekeurige lengte zijn. Ik druk me hier enigszins heuristisch uit, een mentaliteit die misschien wat meer zou moeten worden aangemoedigd in het wiskunde-onderwijs!

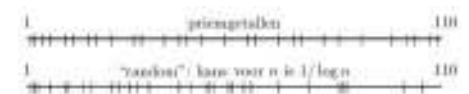
Stel ... in het kader van het Smart Mix gebeuren word ik gevraagd om met een goedkoper probabilistisch model voor de priemgetallen te komen. Mijn partners in Smart Mix zeggen bijvoorbeeld: “U begrijpt: de gesel van de markt dwingt ons om niet steeds die dure priemgetallen te gebruiken voor de beveiliging van ons kostbare systeem”. Dan zeg ik: “Uitstekend, hier heb ik een portfolio van modellen voor de priemgetallen”. Trendgevoelig als ik ben, weet ik namelijk dat ik het inmiddels niet meer over een portefeuille maar over een portfolio moet hebben. En ik laat als eerste bladzijde van mijn portfolio het volgende plaatje zien:



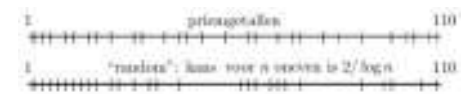
Op het eerste lijnstuk staan de priemgetallen t/m 109 en op het tweede lijnstuk staan getallen die werden gegenereerd door bij elk natuurlijk getal een zuivere munt te gooien en een streepje te zetten als kruis bovenkomt. Dat wil zeggen: ik heb een C-programmaatje geschreven om dit te doen, waarbij ik gebruik maak van een random number generator. Ik bied de getallen op het tweede lijnstuk aan als model. Maar mijn partners van overheid of bedrijfsleven in het Smart Mix project voelen zich misschien niet geheel overtuigd dat de tweede serie getallen een goed model is voor de priemgetallen.

Dan laat ik de volgende bladzijde van mijn portfolio zien, waarbij ik naar rechts loop door de natuurlijke getallen en in plaats van met een zuivere munt met een steeds onzuiverder munt gooi, die bij het getal n kans $1/\log n$

heeft om boven te komen met kruis.



Misschien zullen mijn Smart Mix partners nu zoiets zeggen als: “Ja, het begint er al wat meer op te lijken. Maar we zien nog steeds die klonterende groepjes, met binnen de groep de afstanden 1. En we weten toch dat na de priemgetallen 2 en 3 de afstanden minstens 2 bedragen”. Dit slaat mij echter helemaal niet uit het veld en ik laat nu een volgende bladzijde zien, waarop ik mijn streepjes heb gegenereerd door de even getallen na het getal 2 over te slaan en alleen met mijn munt te gooien als ik een oneven getal aantref.



Als mijn partners in het Smart Mix project nu nog steeds niet overtuigd zijn, werp ik het volgende argument in de strijd. Ik kan steeds dichter bij de priemgetallen komen door veelvouden van kleine priemgetallen eruit te gooien. Voor de rekenkundige rijen van lengte 3 geeft dit bijvoorbeeld Tabel 1, links.

Eigenlijk is dit een toepassing van de zogenaamde zeef van Eratosthenes (± 240 jaar voor Christus).

Wat ik hier laat zien is in feite een speciaal geval van het Hardy-Littlewood vermoeden voor rekenkundige rijen van lengte k (1923):

- (Hardy-Littlewood (1923)) Het aantal rekenkundige rijen van k priemgetallen in de getallen $1, 2, \dots, n$ is van de orde

$$\frac{\gamma_k}{2(k-1)} n^2/(\log n)^k,$$

waarbij γ_k een (berekenbare) positieve constante is.

Voor de priemtwelingen leidt dit tot het volgende vermoeden:

- Het aantal priemtwelingen in de getallen $1, 2, \dots, n$ is van de orde

$$y_3 \int_3^{n-2} \frac{dx}{(\log x) \log(x+2)} dx \\ \sim y_3 \int_3^n \frac{dx}{(\log x)^2} \sim 1.32032 n/(\log n)^2.$$

Voor dit laatste vermoeden heb ik een vergelijkende tabel, zie Tabel 1 rechts (de tweede kolom is uit Tao (2006), de derde is berekend met Mathematica).

Ik weet zeker dat als mijn Smart Mix partners deze tabel zien ze geheel overtuigd zullen zijn en tegen mij zullen zeggen: “Mijnheer Groeneboom, wij kunnen uw model wel in beeld vertalen!” Bovendien:

- Als bewezen is dat het aantal priemtweelingen kleiner of gelijk aan n van de orde

$$c \int_3^n \frac{dx}{(\log x)^2}$$

is, voor een positieve constante c , dan is ook het vermoeden bewezen dat er oneindig veel priemtweelingen zijn. Maar ...

Deze zo overtuigend ogende tabel bewijst helemaal niets! Het priemtweeling vermoeden is nog steeds niet bewezen! Een recent fout bewijs (mei 2004) werd gegeven door Richard Arenstorf (winnaar van de NASA exceptional achievement medal). De fout werd gevonden door Michel Balazard (juni 2004). Michel Balazard heeft Erdős getal 2 (wat be-

tekent dat hij een artikel schreef met iemand die een artikel met Erdős geschreven heeft).

Een positief resultaat is het al eerder genoemde resultaat van Green en Tao, dat meer precies geformuleerd de volgende inhoud heeft.

- Green en Tao (2006): voor elke $k \geq 3$ is er een constante $y'_k > 0$ zodat het aantal rekenkundige rijen van lengte k in de priemgetallen $\leq n$ groter is dan $y'_k n^2/(\log n)^k$ voor alle voldoende grote n .

Gevolg: voor elke $k \geq 3$ bevatten de priemgetallen oneindig veel rekenkundige rijen van lengte k .

Het bewijs van dit resultaat is (ruwweg) gebaseerd op het idee om een verzameling A te construeren waarin de priemgetallen een niet verdwijnende dichtheid hebben, terwijl de verzameling A voor elke k oneindig veel rekenkundige rijen van lengte k bevat. In deze constructie spelen “pseudo-random” verzamelingen, die een correlatiestructuur vertonen die analoog is aan de correlatiestructuur van de boven geïntroduceerde random verzamelingen getallen, een belangrijke rol. Vervolgens kan een analogon van de stelling van Szemerédi worden toegepast op de verzameling A . Het gevolg is dat bijvoorbeeld ook deelverzamelingen van de priemgetallen die weer in de totale verzameling priemgetallen

een niet verdwijnende dichtheid hebben voor elke k oneindig veel rekenkundige rijen van lengte k zullen bevatten.

De volgende feiten zijn te beschouwen als positieve ontwikkelingen.

- Terence Tao, Andrei Okounkov en Wendelin Werner kregen een Fields medals op 22 augustus 2006. Alle drie deden belangrijk werk op het gebied van combinatoriek en kansrekening. Ben Green en Terence Tao zullen op 12 april 2007 in het stadhuis van Leiden de Ostrowski prijs ontvangen.
- Kiyoshi Ito kreeg, ook op 22 augustus 2006, de Gauss prijs, die dit jaar voor het eerst werd uitgereikt. Hij werd op 7 september 2006 91 jaar. Zijn werk ligt geheel op het gebied van de kansrekening. De zogenaamde Ito calculus heeft belangrijke toepassingen in de financiële wiskunde.
- De Franse statisticus Lucien Birgé kreeg verleden jaar de Brouwer prijs (de belangrijkste Nederlandse prijs voor de wiskunde).

Het is duidelijk dat momenteel combinatoriek, kansrekening en statistiek een centrale plaats in de wiskunde (koningin der wetenschappen) innemen. Bovendien: er zijn nog veel vermoedens te bewijzen of te weerleggen!

Referenties

- 1 M. Aigner, G.M. Ziegler en K.H. Hofmann, *Proofs from THE BOOK* 3e editie, Springer, Berlijn, 2004.
- 2 L.J. Brinkhorst en M.J.A. van der Hoeven, ‘Subdieregeling Smart Mix’, Staatscourant 27 maart 2006 (61)
- 3 C.J. de la Vallée Poussin, ‘Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers’, Ann. Soc. scient. Bruxelles **20** (1896), pp. 183–256.
- 4 P. Erdős en P. Turán, ‘On some sequences of integers’, J. London Math. Soc. **11** (1936), pp. 261–264.
- 5 Euclides (± 300 jaar voor Christus), *The thirteen books of the elements*, vertaald, met inleiding en commentaar, door Sir Thomas L. Heath, tweede editie, Dover Publications, New York, 1956.
- 6 L. Euler, Brief aan Goldbach, 16 december, 1742.
- 7 T. Goldbach, Brief aan Euler, 7 juni, 1742.
- 8 T. Gowers, *Mathematics. A very short introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- 9 T. Green en T. Tao, ‘The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions’, arXiv:math.NT/0404188, version 5 (9-2-2006)
- 10 J. Hadamard, ‘Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques.’, Bull. Soc. math. France **24** (1896), pp. 199–220.
- 11 G.H. Hardy en J.E. Littlewood, ‘Some problems of “partitio numerorum”’, III: On the expression of a number as a sum of primes’, Acta Math. **44** (1923), pp. 1–70.
- 12 D. Hilbert, Drieëntwintig problemen, gepresenteerd op het tweede internationale congres van wiskundigen in Parijs, 1900.
- 13 H. Poincaré, ‘Cinquième complément à l’analyse situs’, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **18** (1904), pp. 45–110.
- 14 B. Riemann, ‘Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.’ Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859, pp. 671–680.
- 15 E. Szemerédi, ‘On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression’, Acta Arith. **27** (1975), pp. 299–345.
- 16 T. Tao, ‘Long arithmetic sequences in the primes’, Erdős memorial lecture, March 24 2006, University of Memphis, USA.
- 17 M. Toonder, *De windhandel*, De Bezige Bij, Amsterdam, 1959.
- 18 M. Toonder, *Hoe vreselijk is dit alles*, De Bezige Bij, Amsterdam, 1977.
- 19 J.G. van der Corput, ‘Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten’, Math. Ann. **116** (1939), pp. 1–50.
- 20 I.M. Vinogradov, ‘Representation of an odd number as the sum of three primes’, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **15** (1937), pp. 291–294. Vertaling in: L.D. Fadeev en R.V. Gamkrelidze, *Ivan Matveevič Vinogradov, Selected works*, pp. 129–132, Springer Verlag, Berlijn, 1984.
- 21 I.M. Vinogradov, ‘Representation of an odd number as the sum of three primes’, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **15** (1937), pp. 291–294. Vertaling in: L.D. Fadeev en R.V. Gamkrelidze, *Ivan Matveevič Vinogradov, Selected works*, pp. 129–132, Springer Verlag, Berlijn, 1984.

Bennie Mols*Kijkduinstraat 121-2**1055 XW Amsterdam**bmols@wanadoo.nl***Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006**

Zoeken naar een naald in een prostaat

Voor een optimale behandeling van prostaatkanker moet een arts precies weten op welke plekken hij de naalden met radioactieve bronnen in de prostaat aanbrengt. Het ultrageluidbeeld dat hij daarvoor gebruikt, is vaak te vaag. Hoe kan dit vage beeld opgepoetst worden, zodat de plaats van de naalden beter te herkennen is?

Prostaatkanker wordt jaarlijks in Nederland bij zo'n zesduizend mannen vastgesteld. Tweederde van hen is ouder dan zeventig. De prostaat is een klier met de vorm en grootte van een flinke walnoot. Hij ligt om de plasbuis heen, onder de blaasuitgang. Het prostaatvocht vervoert de zaadcellen van de man, en is dus belangrijk voor zijn vruchtbaarheid. Bij de traditionele behandeling van prostaatkanker wordt de prostaat van buitenaf bestraald. Sinds vijf jaar bestaat er een nieuwe aanpak waarbij de prostaat juist van binnenuit wordt bestraald: *brachytherapie* (brachys is Grieks voor 'kort'; vanwege de korte afstand tussen de straler en de tumor). Met twaalf tot dertig dunne, holle naalden brengt een arts kleine radioactieve korreltjes in de prostaat aan. De korrels zijn gemaakt van jodium of palladium, waarvan de radioactiviteit na ongeveer een half jaar voorbij is. Met elke naald brengt de arts twee tot zes korrels in de prostaat aan. Tussen de korrels in zitten stukjes bioafbreekbaar materiaal. Het houdt de korrels op de ideale afstanden uit elkaar. Eenmaal in de prostaat aangebracht, kan dit materiaal geen kwaad en breekt het op natuurlijke wijze langzaam af. Brachytherapie heeft vooral de voorkeur boven bestraling van buitenaf, wanneer de tumor nog niet is uitgezaaid en alleen nog in de prostaat zit.

Door de korte afstand tussen de radioactieve bron en het tumorweefsel kan de radioactieve dosis kleiner zijn dan in de conventionele prostaatkankerbestraling. Dat levert aanmerkelijk minder beschadiging aan het

omliggende, gezonde weefsel op dat ook altijd straling ontvangt. Een groot voordeel. Bovendien moet een patiënt bij de bestraling van buitenaf terugkomen voor nieuwe bestralingen, soms tientallen keren. Bij bestraling van binnenuit is maar /'e/' en keer nodig.

De arts brengt de korrels niet op willekeurige plekken in de prostaat aan. De prostaat zelf moet liefst overal met een gelijke dosis worden bestraald, maar de plasbuis, die midden door de prostaat loopt, moet juist zoveel mogelijk worden gespaard. Hetzelfde geldt voor het rectum, dat tegen de prostaat aan ligt. Om dat allemaal tegelijk voor elkaar te krijgen, worden van tevoren de optimale plekken berekend waar de naalden in de prostaat moeten uitkomen.

Echolocatie

De praktijk van de operatie is echter weerbarstiger. De naalden zijn flexibel en zodra de arts ze in de prostaat steekt, kunnen ze gemakkelijk een beetje buigen. Daardoor volgen ze zelden het vooraf berekende, ideale pad in de prostaat. Met het aanbrengen van de eerste naald verandert zelfs de plek en de vorm van de prostaat een heel klein beetje. Daar heeft een volgende naald dan weer last van, want zijn ideale pad klopt dan al niet meer. De vooraf berekende optimale positie van de radioactieve korrels valt in duigen.

De oplossing is dat de arts, telkens als hij een naald gaat inbrengen, kan kijken naar waar precies de eerder ingebrachte naalden zitten. Op basis daarvan berekent een com-

puterprogramma een nieuwe optimale verdeling van de korrels, en op welke positie de arts de nieuwe naald moet inbrengen. Dat kijken gebeurt met ultrageluid. Het Nederlandse bedrijf Nucletron levert aan binnen- en buitenlandse ziekenhuizen een ultrageluidsteststelsel dat uit tweedimensionale beeldplakjes van de prostaat een driedimensionaal beeld creëert. Zo kan een arts de prostaat helemaal zien. Nucletron was als eerste in de wereld in staat om zo'n driedimensionaal beeld met ultrageluid te maken. Het Nucletronstelsel bestaat uit 96 miniaturzenders/ontvangers die hoogfrequent geluid uitzenden op de prostaat. De echo wordt opgevangen en gebruikt om te bepalen waar precies de naalden zitten. Op dezelfde manier gebruikt een onderzeeboot ultrageluid, terwijl in de natuur dolfijnen en vleermuizen zijn uitgerust met echolocatie.

Het echobeeld laat een vlak zien loodrecht op de in de prostaat gestoken naalden, die parallel aan elkaar liggen. Jeroen Schuurman van Nucletron: "De rand van de prostaat is goed zichtbaar, maar de positie van de naalden is vaag. Achter elke naald hangt een soort schaduw met een golfpatroon erin. Soms zijn die schaduwen zo hinderlijk dat de arts de naalden niet meer uit elkaar kan houden. Wij zoeken daarom naar een manier om het beeld zodanig op te schonen dat de positie van elke afzonderlijke naald goed zichtbaar is. Dat probleem hebben we aan de Studiegroep voorgelegd."

Om het beeld op te schonen, is het goed eerst te weten waardoor de schaduwpatronen achter de naalden ontstaan. Is het een fysisch effect? Of is het een gevolg van de beeldverwerking? "Wij hebben enkele mogelijke fysische redenen onderzocht", vertelt wiskunde Frits van Beckum van de Universi-

teit Twente. “Bijvoorbeeld een geluidsreflectie aan omliggende sensoren of het trillen van de naald. Maar die effecten bleken verwaarloosbaar klein. Waarschijnlijk ontstaat de beeldvertoebeling dus op een of andere manier in het proces van de beeldverwerking. Daarop zijn we ons vervolgens gaan richten.”

Opschoontrucs

Dat de hinderlijke schaduwen achter de naalden een golfpatroon vertonen, laat zien dat de verstoring periodiek is. Er zit een zich herhalend patroon in. Periodieke signalen laten zich handiger analyseren in de wereld van frequenties, in plaats van in de ‘gewone’ wereld van plaats en tijd. Om een signaal uit de ‘gewone’ wereld om te zetten in de frequentiewereld, kan Fouriertransformatie worden gebruikt. Dit is een heel handige methode om het echte signaal te onderscheiden van de verstoring. De verstoring heeft namelijk een veel hogere frequentie dan het echte signaal. Van Beckum: “De verwachting is nu dat we in het Fouriergetransformeerde beeld die opmerkelijke frequenties van de schaduwpatronen makkelijk zullen herkennen en vervolgens uit het totale signaal kunnen verwijderen. Opschonen in de frequentiewereld werkt voor deze golvende schaduwen makkelijker dan in de gewone wereld.” Voor het opschonen kan beginnen, maken de wiskundigen eerst nog even een nieuw beeld. In dit nieuwe beeld lopen de schaduwen van de naalden niet langer als de spaken in een wiel van binnen naar buiten, maar worden ze rechtop gezet. Dat rekent namelijk makkelijker bij de Fouriertransformatie, die dan nog maar in één richting hoeft te worden gedaan, in plaats van in twee. Het is eenzelfde soort truc als het afbeelden van het bolvormige aardoppervlak op een platte kaart. Het ene coördinatenstelsel wordt omgezet in een ander coördinatenstelsel. Verschillende ruimtelijke werelden hebben elk hun eigen handigste manier om punten in die wereld te beschrijven. In het platte vlak van dit stuk papier kunnen we punten van een rechthoekige afbeelding het gemakkelijkste beschrijven met twee coördinaatassen die loodrecht op elkaar staan: een x-as en een y-as. Maar stel dat we de spaken van een fietswiel in het platte vlak willen beschrijven, dan kunnen we dat beter niet doen in de (x,y)-wereld. Veel handiger is het dan als we de afstand vanaf de as gebruiken, en de hoek die de spaak maakt met de horizontaal. “Na de opschoning transformeren we het beeld in de frequentiewereld weer terug naar de gewone wereld”, legt Van Beckum uit. “Om de naalden in het

nieuwe beeld makkelijk zichtbaar te maken, hebben we een andere truc gebruikt. Het gewone beeld bestaat uit pixels met allemaal verschillende grijsintinten. Dat beeld hebben we omgezet in een zwart-witbeeld. We geven één drempelwaarde aan, ofwel één grijsintint. Alles wat donkerder is, wordt zwart, alles wat lichter is, wordt wit. De overgebleven witte vlekken van het zwart-witbeeld geven precies aan waar de naalden zitten.” Alle trucs bij elkaar maken het makkelijker om de positie van de naalden te bepalen. “Toch is dit nog niet de ideale oplossing”, vindt Van Beckum. “Het succes van de laatste stap hangt erg af van welke drempelwaarde je aanlegt. Maak je het te zwart, dan verdonkermaan je al snel een of meer naalden. Hou je het te licht, dan heb je misschien meer witte vlekken dan er naalden zijn. We hadden zelf betere resultaten verwacht dan de trukendoos uiteindelijk opleverde.”

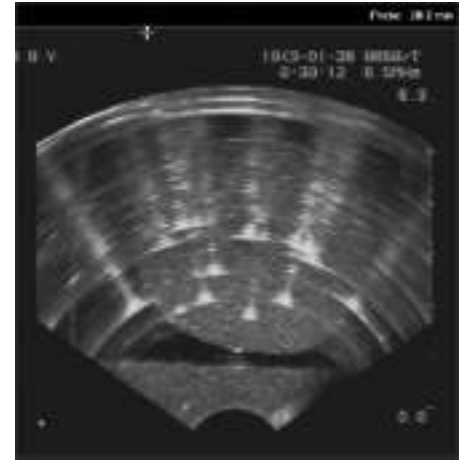
Automatische naaldherkenning

Nucletron is wel degelijk tevreden met de resultaten, vertelt Jeroen Schuurman van het bedrijf. “Het is een heel stuk beter dan wat we nu hebben. Maar het is inderdaad wel zo dat in moeilijke situaties, als naalden bijvoorbeeld dicht tegen elkaar aan zitten, het opschonen nog steeds niet goed genoeg werkt. Toch zijn we van plan om de huidige software op basis van de aanbevelingen van de Studiegroep uit te breiden. Voor ons is het automatisch vinden van de positie van de naalden het belangrijkste. Als dat in een stuk software gebeurt, dan scheelt dat veel tijd. Dan kunnen we sneller een nieuwe dosisberekening maken en duurt de hele ingreep voor de patiënt korter. Het verbeteren van het beeld zelf, vinden we iets minder belangrijk. Die methode werkt nog niet goed genoeg.”

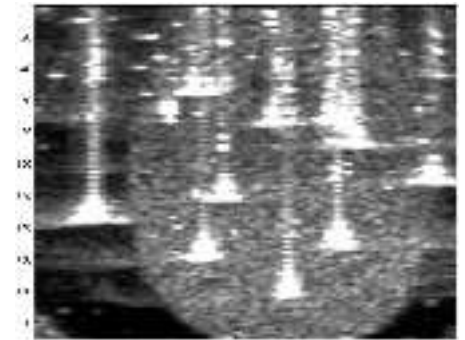
Of de hinderlijke schaduwen op het beeld achter de naalden een natuurkundig effect zijn of iets dat alleen in de beeldverwerking zit, blijft voor Schuurman echter nog een open vraag. “Daar is eigenlijk nog steeds geen afdoende antwoord op gegeven. Maar om onze imagingsoftware te verbeteren hoeven we daar ook niet perse een antwoord op. We zijn al blij met de huidige resultaten.”

Meer informatie

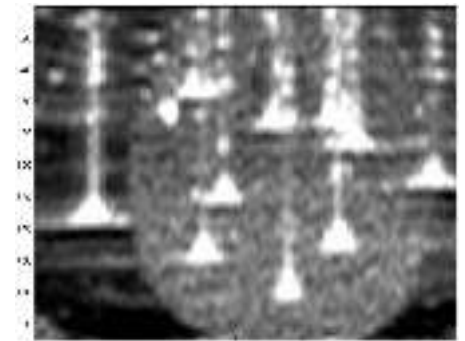
www.nucletron.nl
www.brachytherapie.nl
www.prostaat.nl/content/prostaat/tum.inleiding.asp
www.kennislink.nl/web/show?id=90541
 Ultrageluid voor het maken van afbeeldingen: echografie



Figuur 1 Ultrageluidbeeld van de dwarsdoorsnede van de prostaat, met daarin dertien naalden. Zelfs voor een expert is het lastig om ze alle dertien te vinden.



Figuur 2 Ultrageluidbeeld in het nieuwe coördinatenstelsel



Figuur 3 Het opgeschoonde ultrageluidbeeld na Fouriertransformatie



Figuur 4 Het opgeschoonde beeld van de naalden in de prostaat na alle wiskundige bewerkingen

Jaap Top

*Instituut voor wiskunde en informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen
j.top@math.rug.nl*

Jaap Molenaar

*Biometris
Wageningen Universiteit en Researchcentrum
Postbus 100
6700 AC Wageningen
jaap.molenaar@wur.nl*

De Overval Bij het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu

Centraal of decentraal

Er staan indrukwekkend veel gebouwen op het uitgestrekte terrein van het Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu (RIVM) in Bilthoven. Hier zijn ruim 1500 personen beleidsondersteunend bezig voor onze rijksoverheid. Ze onderzoeken, meten en rekenen beleidsopties en scenario's door. Hoe staat het met de onafhankelijkheid van deze overheidscontroleur? Hoe kritisch mag deze organisatie zijn tegenover zijn opdrachtgever? Jaap Top en Jaap Molenaar beluisterden de overweldigende stilte.

Bij de receptie blijken ons rijbewijs en een e-mail van de afdeling Communicatie van het RIVM voldoende voor het verkrijgen van een bezoekerspas. We passeren een gebouwtje waar zowel boven als naast de deur wordt gewezen op mogelijk stralingsgevaar. Later op die middag passeren we het Laboratorium voor Stralingsonderzoek (LSO) waar het RIVM urine van Nederlandse gasten van het Londen-se Millennium Mayfair hotel op Polonium-210 onderzoekt. Dit in verband met een geruchtmakende moordzaak op een Russische diplomaat. We lopen er voor alle zekerheid met een boogje omheen.

Wiskundigen bij elkaar of in diaspora

We troffen bij het RIVM een bijzondere situatie aan: zojuist was er een aparte wiskundedeafdeling opgericht. Om het bijzondere hiervan duidelijk te maken is het nodig om de historie in te duiken. Na de tweede Wereldoorlog kregen de meeste bedrijven en grote technologische instituten (GTI's) zelfstandige afdelingen voor wiskundigen. Of je nu

bij Philips, Shell, Fokker, Unilever, Hoogovens kwam of bij GTI's als TNO, NLR en het Dr. Neher-laboratorium (PTT), overal functioneerden de specialisten als wiskundigen, natuurkundigen en chemici in eigen, aparte afdelingen. Ze vormden een belangrijke vraagbaak voor de ontwikkel- en productieafdelingen, maar werkten ook actief mee aan of initieerden zelfs het lange-termijnonderzoek. Toegepast wiskundigen waren, vond men, bij uitstek geschikt om nieuwe ontwikkelingen mede gestalte te geven. En men zag er de meerwaarde van in ze fysiek en organisatorisch bij elkaar te zetten. Rond de tachtiger jaren van de vorige eeuw is daar een geweldige ommekeer in gekomen. De zelfstandige wiskundeafdelingen werden een voor een opgeheven en als de wiskundigen mochten blijven werden ze verspreid over het bedrijf of instituut en toegevoegd aan niet-wiskundige afdelingen. Ze werden gedecentraliseerd. Het eigen gezicht van de wiskundige discipline verdween daarmee. Dit decentralisatieproces had zijn wortels in een cultuuromslag binnen

de bedrijven en instituten. Binnen de bedrijven ging de korte-termijnvisie het winnen van de lange. Philips bijvoorbeeld heeft een tijd lang in zwaar weer verkeerd en onderging sanering op sanering. 'Operatie Centurion' staat nog in de geheugens gegrift. Dan is het moeilijk te verkopen dat het zinvol is een afdeling in stand te houden die niet in een directe zin bijdraagt aan de omzet. Bij de GTI's was de tendens dat de gegarandeerde financiering vanuit de overheid werd verminderd en dat ze gedwongen werden een gedeelte van hun omzet te verdienen op de vrije markt via consultatieopdrachten. Een ander argument voor de decentralisatie is wellicht ook dat de wiskundigen het er een beetje naar maakten. Ze deden vaak niet genoeg moeite om hun waarde voor bedrijf of GTI duidelijk te maken door dat uit te leggen in een taal die niet-wiskundigen konden volgen.

Van Meetkunde naar Stralingsonderzoek

Fieke Dekkers is een voorbeeld van een wiskundige die decentraal werkt. Ze is werkzaam als wiskundige bij het Laboratorium voor Stralingsonderzoek, waar in totaal ongeveer vijftien mensen werken. "Bij onze eenheid werken veertien mensen, hoofdzakelijk fysici en geofysici. Wij modelleren het effect van straling op bijvoorbeeld kanker." Fieke promoveerde in 2003 bij Alexander Grigoryan aan

het Imperial College in Londen. “Dat ging over gedegenereerde parabolische vergelijkingen op Riemannse variëteiten. Echt zuivere wiskunde. Ik heb daarna een poosje in Rome gewerkt aan het IAC (Istituto per le Applicazioni del Calcolo) en drie jaar als postdoc in Utrecht. Allemaal heel fundamenteel onderzoek. Toen ik daarna bij het RIVM solliciteerde keken ze me wat bevreemd aan en vroegen ze of ik wel zeker was van mijn zaak. Dat was ik, en achteraf gezien komt mijn wiskundeopleiding die ik gehad heb hier prima van pas. Het is erg handig bij ons dat ik wiskundige ben en niet alleen fysicus. En hier zijn er een heleboel collega's met wie ik kan praten over mijn huidige onderzoek. Bij mijn werk aan differentiaalvergelijkingen waren dat er soms niet meer dan vier of vijf. Ik ben hier ook zeker niet de enige die als wiskundige tussen andere wetenschappers zit. Bij het Centrum voor Infectieziektebestrijding zitten er bijvoorbeeld ook een paar. De overgang van universiteit naar hier verliep voor mij heel gemakkelijk. We kwamen met vijf personen tegelijk hier binnen. Het lezen en begrijpen van de ideeën achter diverse modellen lukt voor een wiskundige gemakkelijk. En een nieuw model of een analyse van een model verschijnt vervolgens gewoon weer in de gebruikelijke wiskundige literatuur. Voor mijn gevoel is de universiteit trouwens zeker niet dynamischer dan een instelling als deze. De gemiddelde leeftijd ligt hier lager. Al veranderen dingen hier nou ook weer niet te snel.”

Begint in Bilthoven de victorie?

Hendrik Boshuizen is hoofd van Statistiek en Modelling, zoals de nieuwe centrale wiskundeafdeling heet. “Onze afdeling bestaat nog maar sinds augustus. Vroeger had je hier het Centrum voor Wiskundige Methoden. Dat stond te ver van de mensen af: ze deden teveel hun eigen dingen, daar hebben we niet zoveel aan. Het idee van de nieuwe afdeling is, dat we dicht bij de inhoud zitten en dat

er veel interactie plaatsvindt met inhoudelijke mensen.

Het begon een beetje vanuit de epidemiologie binnen de sector Volksgezondheid & Zorg, waar een aantal statistische mensen (waaronder ik) bij elkaar werden gezet. Dat breidde zich uit toen de sector zich opsplijste: een deel van de mensen ging naar andere sectoren, maar ze kwamen voor statistisch advies nog altijd naar ons toe. Zo gingen we voor een steeds groter deel van het instituut de statistische ondersteuning doen. Op een gegeven moment was er een projectevaluatie waar kritiek op kwam. Toen is gezegd dat RIVM misschien de statistische ondersteuning breder moest organiseren.”

Statistiek en Modelling is een onderafdeling van het Expertisecentrum van Methoden en Informatica. Dat centrum heeft nog twee andere onderafdelingen: ‘Systeemontwikkeling’, voor webontwikkeling en softwareontwikkeling, en ‘Beheer’, voor beheer van software en databases. “Een centrale afdeling Statistiek en Modelling biedt je de mogelijkheid even te sparren met een vakgenoot. Zit je als eenling in een grotere inhoudelijke afdeling, dan is er vaak niemand die met jou meedenkt op je vakgebied. Bovendien moet iedereen zijn eigen geld voor de afdeling verdienen. Afdelingen die een beroep op ons doen hebben niet in een jaar precies één fte wiskundige nodig. Het ene jaar kom je misschien maar aan zeshonderd uur, het andere aan ruim anderhalve fte. Het kan nuttig zijn, tijd die een decentraal geplaatste wiskundige overheeft, in te zetten voor inhoudelijke taken. Maar dan gebruik je zijn specifieke expertise niet erg efficiënt. Bij grotere groepen zoals Infectieziektenmodellering is de behoefte om te centraliseren er niet. Zij zijn zelf groot genoeg, en blijven dus bij de afdeling Infectieziekten.” Bij Statistiek en Modelling werken dertien tot vijftien personen, “Het hangt er vanaf wie je wel of niet meetelt”. De helft zijn statistici, de andere helft model-

leurs. Het opstarten van deze nieuwe afdeling was volgens Boshuizen soms lastig: “Dit had bijvoorbeeld te maken met het ontbreken van gemeenschappelijke huisvesting. De statistici, vanuit de periode bij de sector Volksgezondheid & Zorg, zitten bij elkaar. De modelleurs niet, die zijn verspreid over diverse laboratoria. Dat moet in elk geval allemaal samen. Voorlopig leren we elkaar kennen door tweewekelijkse gezamenlijke vergaderingen, door lunchbijeenkomsten waar iemand van ons over zijn eigen onderzoek spreekt, en door intervisiebijeenkomsten met de biostatistici van de universiteit Utrecht (de groep van Ingeborg van der Tweel).”

Inhoud

Rudolf Hoogenveen is een van de modelleurs binnen Statistiek en Modelling. “Op mijn kaartje heb ik laten zetten dat ik toegepast wiskundige ben, maar intern zegt iedereen modelleur.” Hoogenveen studeerde in Twente bij onder andere C. Hoede, Operations Research en Systeemtheorie. “Ik ben kort na mijn afstuderen, in 1987, bij RIVM begonnen. Ik ben vooral bezig met modellen op het gebied van volksgezondheid. De huidige ontwikkeling naar meer centraal vind ik goed. Decentraal werken heeft als nadeel dat er gauw teveel focus is op de context waarbinnen gewerkt wordt. Dat zorgt voor minder efficiëntie.” Rudolf vindt dat de modellen die hij in zijn werk tegenkomt, weinig veranderen. “De essentie is en blijft in mijn geval een Markovmodel. De relevante populatie wordt in klassen ingedeeld en de overgangswaarschijnlijkheden tussen de klassen worden bepaald. Wel ontwikkelt de manier waarop we ermee omgaan. Vroeger lag het accent op het analyseren van gegevens uit je model. Nu is er veel meer bureauwerk. We verzamelen beschikbare gegevens en trekken conclusies, of we rekenen beleidsopties door. Er is veel meer erkenning voor het modelleren. Ik ben de laatste tijd bezig met continue varianten



van wat ik tot nu toe in discrete modellen deed. In de discrete aanpak laat je de bezetting van de verschillende klassen in elkaar overgaan. In de continue aanpak modelleer je deze dynamica als een stroming. Grappig, dan krijg je dezelfde vergelijkingen die ik nog kende uit de stromingsleer: Navier-Stokes.”

Hendrik Boshuizen is geen wiskundige. Ze studeerde biologie in Utrecht met als specialisatie natuurkundige biologie. Daarna promoveerde ze op het gebied van de epidemiologie bij de faculteit Geneeskunde aan de universiteit van Amsterdam. Ze kwam als epidemioloog binnen bij TNO, en ging daar steeds meer in de richting statistiek: “Epidemiologie is al voor een groot deel het doen van statistische berekeningen”. Vervolgens begon haar werk als statisticus bij RIVM. “Ik kom meer vanuit de inhoud, de wiskundigen hier vanuit de wiskunde. Het werk speelt zich meestal af op het grensvlak daartussen. Je moet beide aspecten kennen.” Wat de ‘inhoud’ precies is, verschilt per sector en per vraag. “Bijvoorbeeld vanuit het Nationaal Actieplan Bewegen komt de vraag: als we bepaalde dingen gaan doen, een campagne of zo met posters en spotjes, wat levert dat dan op aan besparing in de gezondheidszorg en aan verbetering van de gezondheid. Er is dan literatuuronderzoek naar de effectiviteit van zulke campagnes, en we hebben zelf chronische ziekten-modellen waarmee we dat kwantitatief maken”.

Kwantitatieve kwaliteit

Het heeft in dit werk zeker een meerwaarde als iemand echt als statisticus is opgeleid. Hendrik: “Aan alleen maar een wiskundige heb je voor de statistiek niet veel. Maar ik zou toch liever een wiskundige dan een bioloog binnen mijn afdeling halen, mits deze

wel over zijn werk kan communiceren. Vergis je niet hoe weinig kwantitatief sommige bèta's zijn. Ik ben wel eens een bèta tegengekomen die niet eens met percentages kon rekenen. Goede modelleers, en goede statistici vinden is moeilijk. De markt voor wiskundigen, mits ze de vertaalslag naar de inhoud kunnen maken, is uiterst goed! Voor moeilijke statistische vragen hebben we hier de hoogleraar Hans van Houwelingen (universiteit Leiden) een dag per week”. Ook Fieke Dekkers herkent de kansen die RIVM aan wiskundigen biedt: “Heel wat invalshoeken kunnen we hier trouwens goed gebruiken, naast wiskunde ook zeker biologie en natuurkunde. Maar wat je bij die eigen achtergrond beslist nodig hebt, is een kwantitatieve instelling.” Het werk in het LSO gaat altijd over straling. Fieke Dekkers: “We meten, of we voorzien onze opdrachtgever van informatie door die uit metingen of uit literatuur te verzamelen. Ook modelleren we bijvoorbeeld risico's. We onderzoeken effecten van ioniserende straling; de metingen van radonconcentraties in nieuwbouwhuizen die we gedaan hebben, vielen hieronder. Daar ging het om het feit dat met het verbeteren van de isolatie van nieuwbouwwoningen, ook de radonconcentratie toeneemt. En dat kan een negatief effect hebben op het aantal gevallen van longkanker. Een vraag is dan, of er op het gebied van isolatie in die woningbouw wetgeving nodig is of niet. Op die manier zijn we beleidsondersteunend bezig. Uit dit onderzoek bleek, dat die verhoogde radonconcentratie jaarlijks leidt tot zo'n achthonderd extra gevallen van longkanker, met een foutmarge van plus of min zeshonderd. Met zulke cijfers kan je aan de haal gaan (het gaan om slechts 800 min 600 is 200 gevallen, of juist om veel meer dan 800), en als wiskundige begrijp je toch iets

beter wat zo'n cijfer met een foutmarge betekent. Dit voorbeeld is trouwens nog bij de VARA als nieuwsitem aan de orde geweest. Daar werd gesteld dat wij overdreven, omdat het misschien om maar tweehonderd gevallen gaat.

Er is binnen het RIVM ruimte voor onderzoek dat niet direct met een beleidsvraag samenhangt. We hebben hier het S.O.R., dat staat voor strategisch onderzoek RIVM. We doen intern aanvragen voor zulke onderzoeksruimte, dat gaat in happen van vier jaar. We zijn net succesvol geweest in onze aanvraag voor de periode 2007 tot 2010. Daarmee kunnen we een extra persoon in onze afdeling aanstellen. S.O.R.-onderzoek wordt deels met EU-financiering en deels door het RIVM betaald. De output ervan bestaat, net als bij onderzoek aan de universiteit, uit peer reviewed artikelen.”

Interne advisering

Een afdeling als Statistiek en Modelling moet zichzelf terugverdienen binnen RIVM. “Wij verkopen onszelf binnen het instituut toch vooral door de persoonlijke contacten. Bijvoorbeeld Maarten Schippers, die hier nu ongeveer een jaar werkt, gaat een dag per week bij de afdeling Chronische Ziekten zitten. Praten met mensen, gewoon bij de koffie of tijdens de lunch, levert ons werk. Vroeger deed Nico Nagelkerk dit: hij ging langs bij allerlei labs. We krijgen ook onderzoekers bij ons die hier cursussen komen volgen. Soms komt zo iemand dan terug met vragen. We hebben een statistisch loket, daar kan men terecht met kleinere dingen. Daarvoor hoeven we geen uren te schrijven.” Voor Jan van de Kasstele is het advieswerk een van de aantrekkelijke kanten van de afdeling. Jan deed de studierichting ‘Bodem, water en at-



Figuur 1 Links: Hendrike Boshuizen; rechts: de oude poort van het RIVM

mosfeer' met als specialisatie meteorologie in Wageningen. Daarna werd hem een promotieplaats aangeboden bij de wiskunde- en statistiekgroep Biometris, bij de hoogleraar Alfred Stein. Het onderwerp betrof het interpoleren van metingen aan concentraties stikstof, ozon, verontreinigingen en dergelijke in de lucht. Dat gebeurt met de *Krigingmethode*. Er zijn veel van die interpolatiemethoden, bijvoorbeeld splines, maar Kriging levert de 'best linear unbiased' schattingen op en geeft bovendien een schatting voor de onzekerheid in de interpolatie. Die onzekerheden in uitkomsten vormen een belangrijk issue binnen RIVM sinds de affaire De Kwaadste niet in 1999. "Tijdens het aio-schap had ik ook een werkplek bij het Milieu en Natuurplanbureau (MNP), een voormalig onderdeel van het RIVM. Na mijn promotie in 2006 ben ik statistisch adviseur geworden bij Statistiek en Modelling. Gek genoeg doe ik niets meer met die meteorologie. Mijn grote drijfveer is advieswerk. Ik vind het heerlijk om met mensen te praten en ze te helpen. Ik geniet als ze naar me toe komen en vragen: "Jan, ik snap het niet. Leg dat eens uit". Tijdens mijn promotieperiode heb ik ook les gegeven. Toen heb ik leren uitleggen, bijvoorbeeld wat het onderscheidend vermogen van een toets is. Daar heb ik nu geweldig plezier van. Ik koos voor het RIVM boven een technisch adviesbureau omdat je hier nog de ruimte krijgt om dingen goed uit te zoeken. Er is hier wel werkdruk, maar er is, denk ik, wel duidelijk verschil

met het bedrijfsleven. Hier valt beter over de deadlines te praten. Ik adviseer binnen RIVM zelf bij projecten voor klanten. Dat je aan veel verschillende dingen ruikt vind ik heerlijk. Ik moet wel een netwerk opbouwen van interne klanten. De anderen helpen daar overigens bij." Als voorbeeld van een adviesklus noemt Jan 'kattekrab'. "Je kunt door zo'n krab een bacteriële ziekte oplopen. Er blijkt een leeftijdsafhankelijkheid in de besmettingskans te zitten. Dat leeftijdseffect moest in het model gebracht worden. Dat epidemiologische model geeft de risicokans als je gekrabbd wordt. Daarvoor heb ik wel een cursus epidemiologie in Rolduc moeten volgen om mee te kunnen praten. We hebben er een artikel over geschreven. Daar krijgen we wel tijd voor. We passen vooral standaardmethoden toe, er is weinig tijd om nieuwe methodes te ontwikkelen. Momenteel ben ik bezig met een 'ringonderzoek'. Het betreft het aantonen van salmonella in poepmonsters. Een aantal laboratoria in Europa krijgen dezelfde monsters te onderzoeken. In de uitkomsten blijken flinke spreidingen te zitten. Ik analyseer momenteel de data die ze aangeleverd hebben."

De breedte in?

Rudolf Hoogenveen: "Er wordt zeker nagedacht over eventueel bijstellen van de doelgroep van RIVM. Wat heeft de samenleving aan ons, of wat kan de samenleving aan ons hebben. Er bestaan ideeën om onze modellen breder beschikbaar te stellen. Die dis-

cussie gaat voort. Een probleem is soms de validatie van sommige modellen, dat kan voor een gebruiker lastig zijn. Sommigen zijn om deze reden terughoudend bij het beschikbaar stellen." Hendrik Boshuizen: "Statistiek en Modelling krijgt genoeg werk vanuit RIVM. We mogen in principe wel naar buiten, maar doen dat weinig. Commerciële opdrachten mogen voor ons als overheidsinstelling niet, dat geeft belangenverstrengeling, alles moet non-profit."

Onafhankelijke adviezen?

Hoe zit het met het spanningsveld tussen onafhankelijk onderzoek enerzijds, en tegelijkertijd alleen maar voor de overheid die opdrachtgever is en tevens RIVM financiert, beleidsondersteunend bezig te zijn? Fieke Dekkers: "Dit spanningsveld is er wel, maar we zijn beslist onafhankelijk. Al staan er soms flinke belangen op het spel, denk maar aan stralingsonderzoek bij UMTS-masten. Daar is de overheid inderdaad niet belangeloos." Hendrik Boshuizen: "Natuurlijk geeft dit een band met de overheid. Maar zij dicteren de vragen, niet de antwoorden of de resultaten. Met ons als overheidsinstelling is de afspraak, dat we jaarlijks met niet meer dan 5 procent gekort kunnen worden op onze opdrachten. Dus we zouden het nog wel even volhouden. Wiskundig gezien kun je het heel lang uitzingen met een procentuele achteruitgang." ←



Figuur 2 Links: Jan van de Kassteele; midden: het beeld 'Monument voor de aap' (1993, Teeuwisse). Het beeldhouwwerk stelt als proefdieren gebruikte apen voor. Apen werden gebruikt bij vele experimenten van het RIVM. Rechts: Rudolf Hoogenveen en Fieke Dekkers bij een gedeelte van het kunstwerk: 'Vijf geiten' (1998) van Joseph Semah

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
craats@science.uva.nl

Onderwijs Mythen in de rekendidactiek

Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen

Naast het wiskundeonderwijs heeft ook het rekenen op de basisschool de laatste decennia grote veranderingen doorgemaakt. Universele algoritmes hebben plaatsgemaakt voor methodes die directer appelleren aan het vermogen om getallen en andere rekenkundige begrippen direct voor te stellen en op grootte te kunnen schatten. Ook is er veel moeite gedaan om de sommen in te bedden in toegepaste situaties, dichtbij de beleavingswereld van het kind. Wat betekenen deze veranderingen voor de rekenvaardigheid van scholieren? Jan van de Craats maakt zich grote zorgen.

Een steeds weer terugkerend thema in de media is het gebrek aan rekenvaardigheid bij scholieren en studenten. Klagen over het onderwijspeil is een verschijnsel van alle tijden, maar de recente klachten over rekenen en over taal zijn veel ernstiger dan ze vroeger waren. Tal van oorzaken worden genoemd, met het studiehuis en het nieuwe leren als favoriete boosdoeners. Ongetwijfeld terecht, maar bij rekenen is er meer aan de hand.

Wie namelijk de moeite neemt het lesmateriaal voor de basisschool en de pabo door te kijken, moet al snel vaststellen dat het geen wonder is dat Daan en Sanne (en hun meesters en juffen) niet kunnen rekenen. Naast prachtige plaatjes, leuke rekencontexten, mooie voorbeelden en uitdagende puzzeltjes, vertoont dat materiaal namelijk ook een aantal ernstige didactische manco's. Vooral bij middelmatige en zwakke leerlingen moeten die wel tot grote problemen leiden.

Didactische gebreken

Kort samengevat luiden die manco's als volgt: er is een groot gebrek aan systematisch op-

gebouwd oefenmateriaal, en leerlingen worden in verwarring gebracht doordat er bij elk type rekenbewerking allerlei methodes door en naast elkaar worden gepresenteerd. Soms zijn dat alleen maar oefjes waarmee je af en toe bepaalde berekeningen kunt verkorten, maar die geen algemene geldigheid hebben. Ze worden in het moderne jargon 'handig rekenen' genoemd. Voorbeeld: 24×125 reken je uit door 12×250 te nemen of 6×500 , en dat kun je uit je hoofd. Leuk en slim, maar bij 26×127 of 29×123 werkt het niet meer. Het is niet moeilijk te bedenken dat een overvloed aan zulke handigheidjes zwakke leerlingen juist in verwarring brengt: iedere som wordt zo immers een totaal nieuw probleem waarvoor in gedachten een heel repertoire aan trucjes afgelopen moet worden. En natuurlijk kiezen leerlingen daarbij vaak niet de handigste, maar eerder een onhandige methode. Of ze bedenken zelf een variant, die dan helaas niet zelden ook nog fout is. Zie voor meer voorbeelden van 'handig rekenen' figuur 1 (linksboven), ontleend aan een didactiekhandleiding voor de pabo. Je kunt je overi-

gens ook nog afvragen welke naarling beginnende leerlingen van groep 4 en groep 5 zulke sommen uit het hoofd laat uitrekenen en welk doel daarmee wordt gediend.

Andere rekenmethodes in de moderne boekjes werken wél altijd, maar ze zijn dermate onhandig en omslachtig, dat rekenfouten daarbij haast onvermijdelijk zijn. Dat geldt met name voor het zogenaamde kolomsgewijs rekenen — ik zal later uitleggen wat daarmee wordt bedoeld. Nu al zeg ik dat ik het een schandaal vind dat dit soort rekenen in het lesmateriaal terecht is gekomen. Naar mijn mening is 'kolomsgewijs rekenen', naast de overige didactische missers die ik eerst zal behandelen, een van de hoofdoorzaken van het gebrek aan rekenvaardigheid bij de jeugd.

Hardnekkige mythen

Veel van de narigheid is terug te voeren op drie hardnekkige mythen in de rekendidactiek. Je vindt ze in allerlei vormen terug in het rekenmateriaal en in de moderne rekendidactische vakliteratuur. Ik behandel ze stuk voor stuk.

Mythe 1: Eerst begrijpen, dan oefenen.

Deze mythe kent ook allerlei andere formuleringen. Bijvoorbeeld: *het inoefenen van een vaardigheid kan pas met vrucht gebeuren nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen*. Of: *let op: leer geen onbegrepen regels uit je hoofd!*. Of: *oefenen zonder inzicht geeft*

kennis zonder uitzicht. Het klinkt allemaal heel aannemelijk, vooral als het op rijm gesteld is, maar het is kletskoek. Leren rekenen gaat namelijk heel anders. Het is eerder het omgekeerde: juist tijdens het oefenen ontstaat geleidelijk steeds meer begrip. Eigenlijk is het de oude wijsheid *oefening baart kunst*, waarbij kunst hier niet alleen rekenvaardigheid, maar ook begrip omvat. Zeker wanneer het oefenen systematisch opgezet is en wordt ingebed in verdiepingsronden zoals hieronder wordt beschreven.

Succesvolle leerprocessen

Succesvolle leerprocessen in het rekenonderwijs doorlopen de volgende fasen:

1. Oriëntering (context, voorbeelden)
2. Oefenen, eerst makkelijk, dan iets moeilijker. Geen contexten!
3. Verdieping met contexten en voorbeelden
4. Meer oefeningen, zonder contexten
5. Verdere verdieping, voorbeelden, contexten, ...

waarbij de stappen 4 en 5 naar behoefte herhaald kunnen worden. In stap 1 wordt aangehaakt bij datgene wat de leerling al weet en kent. Daarbij hoort een uitleg van de nieuwe methode in de allereenvoudigste gevallen, net genoeg om aan de eerste serie gemakkelijke oefenopgaven te kunnen beginnen. Voor bijles of bijspijkeronderwijs kan fase 1 kort gehouden worden of zelfs achterwege blijven; op school moet aan die fase daarentegen juist veel aandacht worden besteed met allerlei voorbeelden uit de dagelijkse rekenpraktijk. En het moet gezegd worden: juist op dit gebied bevatten de moderne methodes een schat aan aantrekkelijk en effectief materiaal.

Het oefenen in fase 2 zal daarna echter meestal met 'uitgeklede' rekenopgaven gebeuren omdat contexten in dat stadium de aandacht alleen maar afleiden van de essentie. Belangrijk is wel dat die oefenopgaven zeer eenvoudig beginnen en heel geleidelijk moeilijker worden. Zo blijven ook de zwakste leerlingen bij de les, en zo bouwen ook die leerlingen zelfvertrouwen en rekenvaardigheden op.

In fase 3, de eerste verdiepingsfase, kunnen de praktijkvoorbeelden en de contexten weer terugkeren. Je kijkt daarbij terug op wat je geleerd hebt en de docent legt opnieuw uit hoe en waarom de methode werkt. Dat valt dan in vruchtbare aarde, en zo neemt bij de leerlingen geleidelijk het begrip toe. Met de fasen 4 en 5 wordt de methode telkens verder uitgediept.

Als docent moet je niet verbaasd zijn als er tijdens de oefeningen in de fasen 2 en 4 tel-

kens andere leerlingen steeds weer dezelfde vraag stellen, vaak over iets dat je nog geen twee minuten eerder aan de hele klas hebt uitgelegd. Maar toen ging het blijkbaar over de hoofden heen; pas doordat leerlingen zelf sommen hebben geprobeerd, valt het kwartje. Elke goede docent kent zulke ervaringen.

Rijtjes sommen

De tweede mythe gaat over de bekende, en in sommige kringen beruchte rijtjes oefenopgaven.

Mythe 2: Leerlingen vinden rijtjes sommen vreselijk.

Ook deze mythe is wijdverbreid. De werkelijkheid is echter dat leerlingen graag rijtjes sommen maken, mits die goed en systematisch zijn opgebouwd zodat ze het idee krijgen dat ze echt iets leren. Helaas wordt die mythe ook gevoed door veel van het moderne lesmateriaal. Daarin staan namelijk ook wel rijtjes sommen, maar dan rijtjes waarbij elke opgave weer een nieuwe moeilijkheid of truc bevat. Rijtjes *gelijksortige* sommen waarbij je een vaardigheid door systematisch oefenen onder de knie krijgt, zijn helaas zeldzaam. Geen wonder dat leerlingen dan een hekel krijgen aan rekenen als ze de kans niet krijgen door oefenen zelfvertrouwen op te bouwen. Laat ze rustig tien sommen maken van hetzelfde type. Het zal steeds vlotter gaan, en als ze na afloop aan de hand van de antwoordenlijst constateren dat ze ze goed hebben, zijn ze buitengewoon tevreden — en terecht. Ze hebben weer wat geleerd!

Mythe 1 en mythe 2 hebben ertoe geleid dat systematisch oefenen de laatste tijd in het verdomhoekje terecht is gekomen. Er is zelfs een aparte, kleinerende didactische vakterm voorbedacht: *cijferen*. Bij cijferen gaat het volgens de bedenkers van die term alleen maar om het mechanisch uitvoeren van recepten, waarbij je niet met getallen, maar alleen maar zonder begrip met losse cijfers werkt, als een soort rekenmachine van vlees en bloed. De achterliggende gedachte is vaak ook dat dit een minderwaardige activiteit is ('zo traint men aapjes'), en in elk geval niet nodig wanneer je maar goed begrijpt wat getallen en getallenrelaties 'eigenlijk' zijn. Dat leerlingen op die manier aantoonbaar niet leren rekenen, wordt achteloos terzijde geschoven. Ook is het betreurenswaardig dat leerlingen door de aparte term 'cijferen' ten onrechte de indruk krijgen dat er een tegenstelling zou bestaan tussen rekenen en cijferen. Als ik het voor het zeggen had, zou de term cijferen onmiddellijk

uit het rekenonderwijs verdwijnen. Ook het vreselijke woord 'gecijferdheid' wordt alleen maar door rekendidactici gebruikt. Waarom niet gewoon spreken over rekenvaardigheid, want daar gaat het toch om?

Verschillende oplossingsstrategieën

De derde mythe is zonder twijfel de meest schadelijke. Ze luidt:

Mythe 3: Het is goed als leerlingen meerdere oplossingsstrategieën leren hanteren en zelf kunnen kiezen welke methode ze bij een concrete opgave willen gebruiken.

Tientallen bladzijden in het moderne rekenlesmateriaal worden gevuld met handigheidjes, oefjes, trucs en hap-snapmethodes die alleen in heel speciale gevallen vlot werken. Voor de beginner en voor de gevorderde matige of zwakke leerling is dit 'handige rekenen' rampzalig.

In feite is er voor elk type rekenbewerking één beproefd, eenvoudig en altijd werkend rekenrecept. Alle aandacht moet gericht zijn op het stap-voor-stap aanleren van die standaardrecepten. Het zijn er precies twaalf, namelijk voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van achtereenvolgens natuurlijke getallen, kommagetallen (zo heten decimale breuken op school) en breuken. De recepten voor kommagetallen zijn daarbij in wezen gelijk aan de recepten voor natuurlijke getallen, dus eigenlijk gaat het maar om acht verschillende recepten. Al het verdere rekenonderwijs kan aan deze kapstok worden opgehangen.

Het is treurig dat leerlingen van de basisschool komen zonder dat zij deze twaalf (of eigenlijk dus maar acht) recepten door en door beheersen. Overigens, ook het middelbaar onderwijs treft blaam, want daar worden deze vaardigheden vaak niet bijgehouden of bijgespijkerd. Liever wordt ongestraft toegelaten dat leerlingen naar de rekenmachine grijpen om bijvoorbeeld 7×8 uit te rekenen (zie ook figuur 1, rechtsboven).

Ik haast me er bij te zeggen dat er gelukkig ook steeds meer scholen in het voortgezet onderwijs zijn waarbij de wiskundesectie wel aandacht aan rekenen is gaan besteden. Daar wordt met kale rijtjes oefensommen gerepareerd wat er op de basisschool verwaarloosd is, net zoals op hbo en universiteit via extra wiskundecursussen ontbrekende havo- en vwo-stof bijgespijkerd wordt. Betreurenswaardig, maar helaas nog steeds noodzakelijk.

Getalgevoel: flexibel structureren

Weet je nog?

= verkleinfect

ontbouwen

met een rond getal

splitten

$$\begin{array}{l} 2 \times 10 \\ 4 \times 10 \\ 8 \times 10 \end{array}$$

$$16 \times 15 = 240$$

$$18 \times 35$$

$$18 \times 35 = 630$$

$$19 \times 17$$

$$19 \times 17 = 323$$

$$12 \times 24$$

$$12 \times 24 = 288$$

Reken uit op jouw manier:

$$16 \times 13 =$$

$$18 \times 35 =$$

$$19 \times 17 =$$

$$12 \times 24 =$$

$$14 \times 25 =$$

$$12 \times 13 =$$

$$16 \times 31 =$$

$$11 \times 16 =$$

$$8 \times 22 =$$

$$16 \times 21 =$$

$$12 \times 45 =$$

$$15 \times 19 =$$

Uit: Rekenrijk, deel 5b, blz. 104

Hier worden vier verschillende aanpakken van vermenigvuldigopgaven getoond in de denkwolkjes. Elk van de opgaven vraagt in feite om een eigen aanpak. Maak alle opgaven en kies bewust voor een aanpak. Weet je zeker dat je de handigste manier hebt gekozen?

Hier zie je vier verschillende rekenaanpakken die je bij het hoofdrekenen goede diensten kunnen bewijzen. Maar je moet ook handig kiezen voor de meest geschikte aanpak in een gegeven situatie.

16×13 . Vier keer verdubbelen: (13) , $(2 \times) 26$, $(4 \times) 52$, $(8 \times) 104$, $(16 \times) 208$.

14×25 (ombouwen) = $7 \times 50 = 350$

8×22 (splitten) = $160 + 16 = 176$ (of drie keer verdubbelen)

$18 \times 35 = 9 \times 70 = 630$

$12 \times 13 = 130 + 26 = 156$

$19 \times 17 = 20 \times 17 - 17 = 323$

$16 \times 31 = (62, 124, 248), 496$ (of $30 \times 16 + 1 \times 16$)

$12 \times 45 = 6 \times 90 = 540$

$12 \times 24 = 2 \times (12 \times 12) = 288$ (of $240 + 48$)

$11 \times 16 = 160 + 16 = 176$

$15 \times 19 = 300 - 15 = 285$.

Delen door herhaald aftrekken

$$431 : 12$$

$$120$$

$$311$$

$$120$$

$$191$$

$$120$$

$$71$$

$$60$$

$$11$$

$$10 \times 12$$

$$10 \times 12$$

$$10 \times 12$$

$$5 \times 12$$

$$35 \times 12, \text{ rest } 11$$

$$431 : 12$$

$$360$$

$$71$$

$$60$$

$$11$$

$$30 \times 12$$

$$5 \times 12$$

$$35 \times 12, \text{ rest }$$

Bij het **kolomsgewijs optellen en aftrekken** werk je van *links naar rechts* en kijk je steeds naar de betekenis van de cijfers in de kolommen. Je laat de getallen in hun waarde.

Voor het aftrekken werk je met **tekorten** in de kolommen, als dat nodig is.

Voorbeeld 1

Kolomsgewijs optellen

$$\begin{array}{r} 386 \\ 673 \\ 900 \\ 150 \\ 9 \\ 1059 \end{array} \quad \begin{array}{l} (= 300 + 600) \\ (= 80 + 70) \\ (= 6 + 3) \end{array}$$

Kolomsgewijs aftrekken

$$\begin{array}{r} 803 \\ 261 \\ 600 \\ -60 \\ 2 \\ 542 \end{array} \quad \begin{array}{l} (= 800 - 200) \\ (0 - 60 = 60 \text{ tekort}) \\ (= 3 - 1) \end{array}$$

Voor het **kolomsgewijze vermenigvuldigen** ga je uit van de vier deelproducten van $(30 + 7) \times (30 + 8)$, beginnend met de grootste waarde (van links af). Daarna tel je weer op. Dit kan ook van rechts naar links.

Van links naar rechts

$$\begin{array}{r} 38 \\ 37 \times \\ 900 \quad (30 \times 30) \\ 240 \quad (30 \times 8) \\ 210 \quad (7 \times 30) \\ 56 \quad (7 \times 8) \\ 1406 \end{array}$$

Van rechts naar links

$$\begin{array}{r} 38 \\ 37 \times \\ 56 \quad (7 \times 8) \\ 210 \quad (7 \times 30) \\ 240 \quad (30 \times 8) \\ 900 \quad (30 \times 30) \\ 1406 \end{array}$$

$$78,12$$

$$13,34$$

$$142,57$$

$$92,63$$

$$104,89$$

$$200,00$$

$$210,00$$

$$19,00$$

$$2,30$$

$$0,25$$

$$400,00$$

$$20,00$$

$$11,00$$

$$0,50$$

$$0,05$$

$$431,55$$

$$413,92$$

$$376,75$$

$$100,00$$

$$60,00$$

$$3,00$$

$$0,20$$

$$0,03$$

$$40,00$$

$$3,00$$

$$0,20$$

$$0,03$$

$$37,20$$

$$0,03$$

$$37,17$$

$$345$$

$$729$$

$$210000$$

$$28000$$

$$3500$$

$$6000$$

$$800$$

$$100$$

$$2700$$

$$360$$

$$45$$

$$200000$$

$$30000$$

$$19000$$

$$2400$$

$$100$$

$$5$$

$$251505$$

Rekenen van opa

Ik heb het hierboven al gehad over 'kolomsgewijs rekenen', een moderne didactiek-term waarmee een aantal 'nieuwe' methodes voor optellen, aftrekken en vermenigvuldigen wordt aangeduid. Dat de onhandigheden van die methodes in de rekenboekjes niet eens zo evident worden, komt doordat kolomsgewijs rekenen daar alleen maar uitgelegd wordt voor getallen van twee of hoogstens drie cijfers.

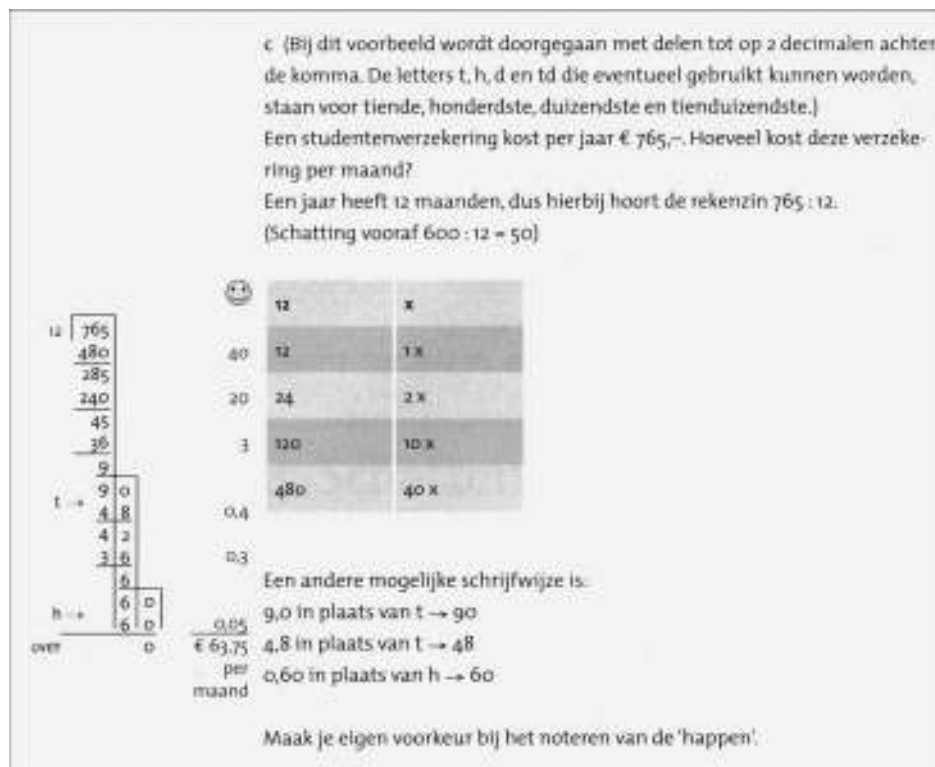
Wanneer je laat zien hoe omslachtig zulke methodes worden bij grotere getallen, zeggen de verdedigers ervan dat de leerlingen dan maar op het 'traditionele' rekenen moeten overstappen. Of een rekenmachine moeten nemen. Maar dat staat lang niet altijd in de boekjes: daar wordt kolomsgewijs rekenen vaak als een volwaardige methode gepresenteerd. Vaak zelfs als beter ('inzichtelijker') dan de traditionele methode, die dan als het 'rekenen van opa' wordt afgedaan. Maar ook als het wel gepresenteerd wordt als opstapje naar 'cijferend rekenen', krijgt kolomsgewijs rekenen het volle licht van de schijnwerpers terwijl de traditionele methodes haast nergens meer fatsoenlijk worden uitgelegd. We lezen bijvoorbeeld in [1]: 'Omdat het cijferend rekenen binnen het basisschoolprogramma een minder grote aandacht zal krijgen en meer het *kolomsgewijs rekenen* centraal gaat staan, zal eerst dit onderdeel geoefend worden' (blz. 23). Vervolgens wordt het 'rekenen van opa' gemakshalve maar helemaal niet meer behandeld.

kolomsgewijs optellen en aftrekken

Bij het kolomsgewijs optellen en aftrekken werk je van links naar rechts. Zie figuur 1 (rechtsmidden), ontleend aan [4], een recent boek dat toekomstige pabo-studenten moet voorbereiden op de rekentoets. Bij het optellen van getallen van drie cijfers tel je dus eerst de honderdtallen, dan de tientallen en dan de eenheden op. Natuurlijk is dat niet fout, maar het is wel ontzettend onhandig bij grotere aantallen en grotere getallen (zie figuur 1, linksonder).

Werkelijk van de zotte is kolomsgewijs aftrekken (figuur 1, rechtsmidden), want daar moet je dan eigenlijk al met negatieve getal-

Figuur 1 Linksboven: Handig rekenen ([3], blz. 73 en blz. 197). Boven de opgaven, onder de uitwerkingen. Rechtsboven: Hoe diep kun je zinken? (NRC Handelsblad, 17 januari 2007). Linksmidden: De 'hapmethode' voor delen ([4], blz. 76). Linksonder: kolomsgewijs optellen, aftrekken en vermenigvuldigen met iets grotere getallen. Bij het optellen en aftrekken kun je bijvoorbeeld aan geldbedragen denken. Rechtsmidden: kolomsgewijs optellen en aftrekken ([4], blz. 72). Rechtsonder: kolomsgewijs vermenigvuldigen ([4], blz. 74)



Figuur 2 Nog een voorbeeld van de 'hapmethode' voor delen ([1], blz. 29)

len gaan rekenen ('tekort'). Let wel, dit wordt thans op de basisscholen gedaan met kinderen die nog helemaal nooit eerder met aftrek-sommen te maken hebben gehad! Ook daar toont een simpel voorbeeld met iets grotere getallen de absurditeit van de 'methode' afdoende aan (figuur 1, linksonder).

kolomsgewijs vermenigvuldigen

Maar het kan nog erger: kolomsgewijs vermenigvuldigen (zie figuur 1, rechtsonder). In het gegeven voorbeeld wordt de optelling gemakshalve maar even 'op de manier van opa' gedaan. Hoe het gaat als je het wél kolomsgewijs doet, laat figuur 1 (linksonder, rechterkolom) zien; ik moet eerlijk bekennen dat ook ik daarbij de beker niet tot de bodem geleegd heb. Eigenlijk hadden er aan het eind nog een paar 'kolomsgewijze tussenstappen' gezet moeten worden.

En dan te bedenken dat het hele idee van 'rekenen van links naar rechts' als een 'inzichtelijke' en 'natuurlijke' rekenwijze eigenlijk op een historisch misverstand berust. We hebben onze decimale notatiewijze te danken aan de Arabieren (die het weer van de Indiërs hebben geleerd), en het Arabische schrift loopt van rechts naar links. Je moet 584 dus niet lezen als $5 \times 100 + 8 \times 10 + 4$ maar als $4 + 8 \times 10 + 5 \times 100$. Eerst de eenheden, dan de tientallen, dan de honderdtallen, enzovoort. Zouden we de decimale getallen net als ons eigen schrift van links naar rechts hebben ge-

noteerd, dan was niemand waarschijnlijk op het onzalige idee van het 'kolomsgewijs rekenen' gekomen.

Delen

Het is al vaak in de media gezegd: de kinderen weten niet meer wat een staartdeling is. Inderdaad krijgt die op school tegenwoordig maar weinig, of zelfs helemaal geen aandacht. In plaats daarvan wordt de 'hapmethode' gepropageerd. Die komt er eigenlijk op neer dat de leerling maar wat doet: telkens happen nemen van het deeltal totdat er een rest overblijft die kleiner is dan de deler. Figuur 1 (linksmidden) en figuur 2 laten er voorbeelden van zien. Gelukkig worden daar de tussenresultaten niet met 'kolomsgewijs aftrekken' berekend. Je moet er niet aan denken dat dit wel zou gebeuren.

Ook bij de hapmethode is het argument weer dat leerlingen dan zouden begrijpen wat ze doen, terwijl dat bij de staartdeling niet het geval zou zijn. Of dat werkelijk waar is, is echter nooit onderzocht. Erger is natuurlijk dat de hapmethode weer uitnodigt tot onhandig en omslachtig rekenen, juist omdat het geen systematische methode is. En is de staartdeling niet gewoon de meest efficiënte hapmethode? Waarom zouden we die dan niet aan de leerlingen leren? In [2], op de bladzijden 42 en 43, kun je aan de hand van een erfenisverdeling zien waarom de staartdeling werkt, en hoe die werkt. Er is niets raadselachtigs of onna-



tuurlijks aan. Maar ook hier geldt weer: je leert en begrijpt het recept pas volledig als je er veel mee hebt geoefend. Juist omdat staartdelen ongetwijfeld het lastigste rekenrecept is, moet er heel veel mee geoefend worden, wil je het onder de knie krijgen. Leerlingen zijn dus gebaat bij een voorzichtige, didactisch verantwoorde, stapsgewijze opbouw. Niet bij een alternatief waarbij ze aangemoedigd worden maar wat aan te rommelen ('Maak je eigen voorkeur bij het noteren van de happen.')

Breuken

Ook over de manier waarop in de tegenwoordige rekenboekjes het rekenen met breuken wordt behandeld, is nog veel te zeggen. Ook daar weer veel verwarring en een overvloed aan onhandigheden, vooral bij het vermenigvuldigen en delen van breuken. De lezer kan er zelf bijvoorbeeld [4] op naslaan (blz. 52–62) of [1] (blz. 89–155) of [3] (blz. 124). Wel veel verhalen over chocoladerepen, schaal-tjes en maatbekers, maar opa's rekenregel *delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk* zul je er tevergeefs zoeken. Ik laat het hier verder maar rusten; in [2] kun je zien hoe het volgens mij wél moet (het gedeelte over breuken daaruit staat ook integraal op mijn homepage www.science.uva.nl/~craats).

Hoe leren Sanne en Daan weer rekenen?

Intussen zal wel duidelijk zijn wat er moet gebeuren om ervoor te zorgen dat Sanne en Daan (en hun meesters en juffen) weer leren rekenen:

- Herstel *systematisch oefenen* in ere.
- Eén methode per bewerking (de methode van opa)!
- Doe 'handig rekenen' de deur uit.
- Verbied 'kolomsgewijs rekenen'!
- ... en noem cijferen weer gewoon rekenen.



Dit is de uitgewerkte tekst van een voordracht die Jan van de Craats gehouden heeft op 18 januari 2007 tijdens de 25ste Panama-conferentie te Noordwijkerhout (*Panama* staat voor Pedagogische Academie Nascholing Mathematische Activiteiten).

Referenties

- 1 Jos van den Bergh, Petra van den Brom-Snijders, Marijke Creusen, Jan Haarsma, *Rekenwijzer*, ThiemeMeulenhof, Utrecht/Zutphen, 2005
- 2 Jan van de Craats en Rob Bosch, *Basisboek rekenen*, Pearson Education, Amsterdam, 2007
- 3 Fred Goffree en Wil Oonk, *Reken Vaardig – Op weg naar basale en professionele gecijferdheid*, Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten, 2004
- 4 Ed de Moor, Willem Uittenbogaard, Sieb Kemme (eindredactie), *Basisvaardigheden rekenen voor*

de pabo, Wolters-Noordhoff, Groningen/Houten, 2006

Brian Hayes

211 Dacian Avenue
Durham NC 27701
Verenigde Staten
bhayes@amsci.org

Research

Foolproof

Wat voor betekenis heeft een bewijs als het door een computer is gegenereerd? Hoe belangrijk is de mening van het publiek eigenlijk en over welk publiek hebben we het eigenlijk, als het gaat om het accepteren van een wiskundig bewijs? En omgekeerd, wat moeten we met een bewijs, dat alleen door een computer kan worden begrepen? Brian Hayes, wiskundige en tientallen jaren publicist en redacteur van onder andere de *Scientific American* probeert u te verleiden met allerlei foute bewijzen. Dit artikel verscheen eerder in de 'American Scientist' volume 95. De vertaling is van Reinie Ern  en Jaap Molenaar.

In mijn tienerjaren was ik een trisecteur. Mijn eerste baan direct na de middelbare school bestond uit het dag in dag uit in drieën delen van hoeken, voor 1,75 dollar per uur. Mijn werkgever maakte voltmeters, ampèremeters en allerlei andere elektrische instrumenten. Dit was nog in het analoge tijdperk, toen een meter bestond uit een dun wijzertje dat in een boog langs een schaal bewoog. Mijn werk bestond uit het tekenen van die schaal. Een technicus ijkte de meter, en stelde de hoek vast voor een aantal belangrijke intervallen, zeg 3, 6, 9, 12 en 15 volt. Ik maakte vervolgens de schaal door met passer, liniaal en een fijn pennetje de tussenliggende waarden in te tekenen door middel van interpolatie. Daar had ik de trisectie van hoeken voor nodig. Ik moest ook weleens hoeken in vijven delen en andere onmogelijke taken uitvoeren.

Ik maakte hier grapjes over met mijn collega en directe baas Dmytro, die al een aantal jaar schalen tekende. We zouden meer betaald moeten worden, zei ik, voor het oplossen van één van de beroemdste onoplosba-

re problemen uit de Oudheid. Maar Dmytro was een scepticus en daagde mij uit om te bewijzen dat trisectie niet kan. Dat kon ik niet. Na een column van Martin Gardner over het onderwerp herlezen te hebben, deed ik mijn best om een bewijs te schetsen, maar ik beheerste de onderliggende wiskunde te weinig, mijn argumenten waren onsamenhangend, en mijn gehoor bleef onovertuigd.

Aan de andere kant liet Dmytro zelf snel zien dat onze methode van trisectie, een koord over de hoek spannen en die in drie gelijke stukken delen, niet werkt voor grote hoeken. Vanaf dat moment letten we er op alleen nog maar kleine hoeken in drieën te delen. En we waren het erover eens dat onze werkgever hier niets van af hoefde te weten. Onze omzichtige stilte leek enigszins op de Pythagoreïsche samenzwering om de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ geheim te houden.

Als ik terugkijk op die periode krijg ik vage twijfels over de rol van bewijzen in wiskundige verhandelingen, en in het alledaagse leven. Ik geef toe, het feit dat ik Dmytro niet kon over-

tuigen lag geheel aan mij, en niet aan het bewijs. Maar toch, als een bewijs een toverstok is die alleen werkt in de handen van tovenaars, wat heeft de rest van ons er dan aan?

Euclides achterstevoren lezen

De volgende anecdote in *Brief Lives* van John Aubrey over de 17e eeuwse filosoof Thomas Hobbes illustreert wat het effect van een bewijs behoort te zijn:

"He was forty years old before he looked on geometry; which happened accidentally. Being in a gentleman's library in ..., Euclid's Elements lay open, and 'twas the 47 *El. libri* I. He read the proposition.

'By G—,' sayd he (he would now and then swear, by way of emphasis), 'this is impossible!' So he reads the demonstration of it, which referred him back to such a proposition; which proposition he read. That referred him back to another, which he also read. *Et sic Deinceps*, that at last he was demonstratively convinced of that truth. This made him in love with geometry."

Wat hierin het meeste opvalt, of het nu waar is of niet, is hoe Hobbes zich tegen zijn wil toch laat overtuigen. Hij begint ongelovig, maar kan de overtuigingskracht van de deductieve logica niet weerstaan. Vanuit propositie 47, toevallig de stelling van Pythagoras, werd hij gedwongen terug te bladeren in het boek,



Brian Hayes

van de conclusies naar de daarbij gebruikte vooronderstellingen en uiteindelijk terug naar de axioma's. Al zoekt hij naar een fout, iedere stap van de redenering dwingt instemming af. Dit is de kracht van zuiver redeneren.

Voor velen onders ons verliep de eerste kennismaking met wiskundig bewijzen — hoogstwaarschijnlijk tijdens een meetkundeles — nogal anders dan die van Hobbes op middelbare leeftijd. De werkelijkheid lijkt meer op een ander veelgelezen verhaal, uit de dialoog *Meno* van Plato. Terwijl Socrates figuren tekende in het zand, probeerde hij een ongeschoolde jonge slaaf te onderwijzen door hem te helpen een bepaald geval van de stelling van Pythagoras te bewijzen. Ik parafraseer heel losjes:

Socrates: Hier is een vierkant met zijde 2 en oppervlakte 4. Als we de oppervlakte verdubbelen, naar 8 eenheden, hoe lang is de zijde dan?

Jongen: Uh, 4?

Socrates: Is $4 \times 4 = 8$?

Jongen: Goed, misschien is het dan 3.

Socrates: Is $3 \times 3 = 8$?

Jongen: Ik geef het op.

Socrates: Kijk eens naar deze lijn van hoek naar hoek, die de geleerden een diagonaal noemen. Als wij hierop een vierkant plaatsen, dan is de helft van het oorspronkelijke vierkant een kwart van het nieuwe vierkant, dus moet de oppervlakte van het nieuwe vierkant tweemaal dat van het oorspronkelijke vierkant zijn. De lengte van de diagonaal is dus precies wat wij zoeken, niet waar?

Jongen: Zal wel.

Op dit punt aangekomen neem ik aan dat we allemaal de kant van de jongen kiezen. Ik zou natuurlijk graag kunnen vertellen dat de jongen vervolgens het initiatief neemt en iets zegt als 'Jij je zin, ouwe, maar wat is dan de lengte van die geleerde diagonaal van jou? Het is niet 4 en het is niet 3, dus wat is het nou precies?' Jammer genoeg vermeldt Plato geen dergelijke provocerende reactie van de kant van de jonge slaaf.

Het probleem met het *Meno* bewijs is precies het omgekeerde van wat ik meemaakte als ongeschoolde loonslaaf. Terwijl ik te onbekwaam en intellectueel te slecht uitgerust was om een bewijs te leveren dat mijn collega overtuigde (of op zijn minst mijzelf), had Socrates zo'n krachtige autoriteit dat de arme jongen vast alles zou accepteren dat de meester zei. Hij zou waarschijnlijk niet eens tegenstribbelen als Socrates zou bewijzen dat $2 = 1$. Zo'n jongen zal ongetwijfeld niet zelf stellingen gaan bewijzen.

Jammer genoeg profiteerde Hobbes niet veel meer van zijn eigen meetkundeles. Hij werd een beruchte wiskundige zonderling, die beweerde alle beroemde problemen uit de klassieke meetkunde opgelost te hebben, inclusief de trisectie van een hoek, de kwadratuur van de cirkel, en de verdubbeling van de kubus. Deze beweringen waren in de 17e eeuw iets minder dwaas dan nu, aangezien de onmogelijkheid ervan toen nog niet streng bewezen was. Desalniettemin hadden de tijdgenoten van Hobbes weinig moeite met het vinden van de blunders in zijn bewijzen.

Grootse stellingen, onhanteerbare bewijzen

De laatste tijd is bewijzen een verbazend controversieel onderwerp geworden. Een eerste bron van onbehagen was het bewijs in 1976 van het vierkleurenprobleem dat Kenneth Appel, Wolfgang Haken en John Koch van de University of Illinois at Urbana-Champaign gaven. Zij lieten zien dat je om een landkaart zo te kleuren dat twee aanliggende landen steeds verschillende kleuren hebben maar vier kleurpotloden nodig hebt. Het bewijs maakte gebruik van computerprogramma's die duizenden kaartconfiguraties controleerden. Dit binnendringen van computers in het domein van de zuivere wiskunde werd met veel argwaan en zelfs afkeer begroet. Haken en Appel maakten gewag van een opmerking van een vriend: "God zou nooit toelaten dat het beste bewijs van zo'n fraaie stelling zo lelijk is". Naast zulke emotionele en esthetische reacties was er ook de slepende vraag naar verificatie: hoe kunnen wij er ooit zeker van zijn dat de computer geen fout gemaakt heeft?

Een aantal van deze vragen zijn teruggekomen bij het bewijs van het vermoeden van Kepler door Thomas C. Hales van de University of Pittsburgh (met medewerking van zijn leerling Samuel P. Ferguson). Het vermoeden van Kepler — of is het nu de stelling van Hales-Ferguson? — zegt dat de piramide sinaasappels zoals te vinden bij de groentenboer zo dicht mogelijk gestapeld is. Weer spelen computerberekeningen een belangrijke rol in het bewijs. Al riep de afhankelijkheid van de computer minder weerstand op dan dertig jaar eerder, toch zijn de zorgen over de correctheid van het bewijs gebleven.

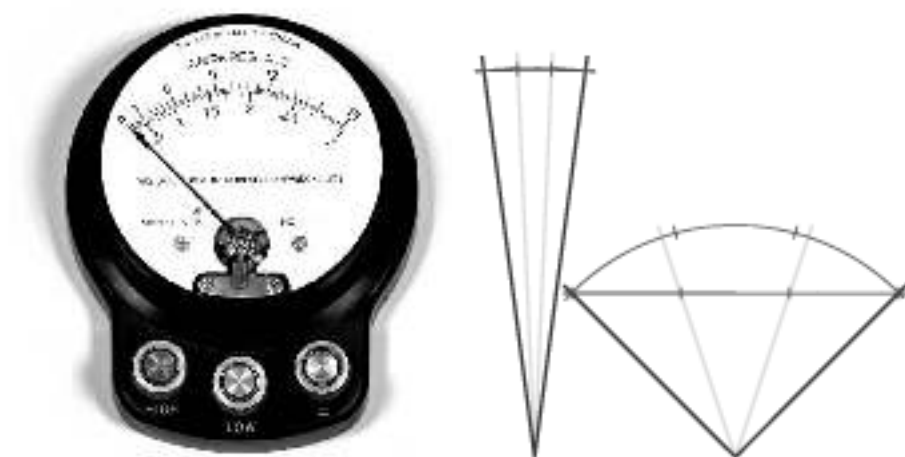
Hales kondigde zijn bewijs aan in 1998 en diende zes artikelen in bij de *Annals of Mathematics*. Dit tijdschrift vroeg niet minder dan 12 referees om de artikelen en onderliggende computerprogramma's te controleren, maar het lukte ze niet. Zij vonden geen fout, maar de berekeningen waren zo lang en structuurloos dat alles nagaan onpraktisch was, waar-

door de referees niet wilden verklaren dat het bewijs zonder fouten was. Dit was een storende impasse. Uiteindelijk publiceerde de *Annals* het 'menselijke gedeelte van het bewijs' en liet een deel van het computerwerk achterwege. Het volledige bewijs verscheen in de zomer van 2006 in *Discrete and Computational Geometry*. Het is interessant dat Hales vanaf toen zijn aandacht is gaan richten op het controleren van bewijzen met behulp van de computer.

In het geval van een ander bewijs dat berucht is om zijn omstrengheid hebben computers er niets mee te maken. In de jaren vijftig begon men te proberen alle mathematische objecten bekend als eindige enkelvoudige groepen te classificeren; de classificatie berust op een bewijs dat groepen in vijf bekende categorieën zijn in te delen. Aan het begin van de tachtiger jaren dachten de organisatoren van het project dat het bewijs nagenoeg af was, maar het stond verspreid in zo'n 500 publicaties van in totaal minstens 10.000 pagina's. Drie hoofdauteurs namen het herzien en vereenvoudigen van het bewijs op zich, met als doel de hoofdlijnen in een serie artikelen samen te brengen. Deze onderneming, die nog niet af is, loopt aan tegen de grenzen van wat mensen aankunnen — en tegen de menselijke levensduur (een van de drie leiders van het project is in 1992 overleden).

Terwijl sommige bewijzen te lang zijn om te bevatten, zijn andere weer te beknopt en cryptisch. Vier jaar geleden kondigde de Russische wiskundige Grigory Perelman een bewijs van het Poincarévermoeden aan. Dit vermoeden zegt — ik parafraseer nu Christina Sormani van Lehman College — dat als een klodder slijm zich uit iedere lasso die je eromheen gooit weet te wurmen, dan is die klodder niets anders dan een vervormde bol, zonder gaten of handvaten. In het dagelijks leven komen wij dit vaak tegen bij twee-dimensionale objecten ingebed in de drie-dimensionale ruimte, en het vermoeden was al enige tijd geleden bewezen voor oppervlakken (of variëteiten) van dimensie vier of meer. Het moeilijke geval was dimensie drie, en Perelman heeft het opgelost door het algemenere vermoeden van Thurston te bewijzen.

Het bewijs van Perelman leest niet gemakkelijk. Zoals Sormani het uitlegt, bestaat zijn strategie uit "de klodder opwarmen, hem laten zingen, hem uitrekken als gesmolten kaas, en daarna in een miljoen stukjes hakken". De levendigheid van deze omschrijving stelde ik zeer op prijs, maar toch helpt hij mij niet bij het volgen van Perelmans logica. Gezien



Figuur 1 Voor het tekenen van schalen op meetinstrumenten zoals ampèremeters is soms trisectie van hoeken nodig om te interpoleren tussen grote waarden. De trisectiemethode van de auteur bestond uit het spannen van een koord over de hoek en die in drie gelijke stukken delen. Het resultaat is een benadering die goed is voor kleine hoeken maar duidelijk slecht voor grotere hoeken. In het plaatje rechts is het resultaat grijs, terwijl de correcte hoeken met kleine streepjes op de boog aangegeven zijn. De meter links is uit de tijd dat de auteur zijn trisecties uitvoerde, maar is niet door de auteur gedaan. Het vertoont tekenen van een meer geavanceerd algoritme.

de moeilijkheid van Perelmans bewijs hebben anderen er veel langere versies van gepubliceerd, waarin het wordt uitgelegd en aangevuld. Dit zijn geen popularisaties voor een groot publiek; ze zijn bedoeld om de wiskunde uit te leggen aan wiskundigen. Dit leidde tot een controverse. Willen deze andere mensen delen in de roem? *Verdiene* ze een aandeel? In augustus 2006 werd de Fields Medaille, de grootste prijs in de wiskunde,

toegekend aan Perelman. Mogelijk heeft dit een eind gemaakt aan de controverse. (Perelman heeft, zoals bekend, de prijs geweigerd.)

Crisis

Deze en soortgelijke gebeurtenissen hebben ertoe geleid dat men is gaan spreken van een crisis in de wiskunde, en tot de vrees dat wij niet meer op bewijzen kunnen vertrouwen om eeuwige en ontwijfelbare waarheid te verkrijgen. Al in 1972 schreef Philip J. Davis van Brown University:

The authenticity of a mathematical proof is not absolute but only probabilistic ... Proofs cannot be too long, else their probabilities go down, and they baffle the checking process. To put it another way: all really deep theorems are false (or at best unproved or unprovable). All true theorems are trivial.

Een paar jaar later stelde Morris Kline in *Mathematics: The Loss of Certainty* wiskunde voor als een wankelende megakolos met ondeugdelijke balken en een afbrokkelend fundament; doorgaand op deze bouwkundige vergelijking, betoogde hij dat "bewijzen eerder de voorgevel dan de ondersteunende zuilen van de wiskundige structuur zijn".

Davis en Kline schreven als wiskundig ingewijden — als leden van de club, zij het wel beeldenstormers. Daarentegen liet Johan Horgan zich kennen als een uitdagende buitenstaander toen hij in 1993 een verhandeling schreef in de *Scientific American* met de titel 'The Death of Proof'. "De twijfels die het moderne denken doen schudden hebben uiteindelijk ook de wiskunde besmet," zei hij. "Moge-

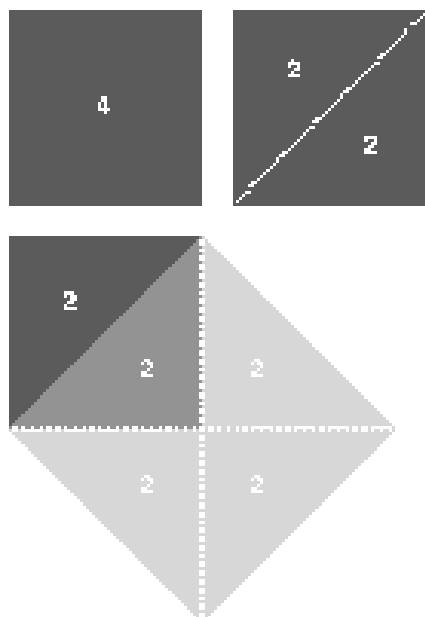
lijk zullen wiskundigen eindelijk ook gedwongen worden om te aanvaarden wat vele wetenschappers en filosofen al erkend hebben: hun beweringen zijn slechts voorwaardelijk waar, waar totdat bewezen wordt dat ze fout zijn."

Mijn eigen positie als waarnemer van deze gebeurtenissen zit ergens tussen deze twee in. Ik ben zeker geen wiskundige, maar ik loop als journalist al zolang mee in de wiskundige gemeenschap dat ik niet kan beweren onverschillig of onpartijdig te zijn. Ik rapporteer vanuit het niemandsland tussen de fronten.

Ik geloof dat er inderdaad een crisis aan de gang is, maar alleen omdat de hele geschiedenis van de wiskunde bestaat uit de ene crisis na de andere. De fundamentele zijn altijd al aan het afbrokkelen, en de barbaren staan altijd al voor de poort. Toen Haken en Appel hun met hulp van een computer verkregen bewijs publiceerden was het echt niet de eerste keer dat een technische vernieuwing een controverse veroorzaakte. In de 17e eeuw, toen algebraïsche methoden voor het eerst gebruikt werden in de meetkunde, spraken de erfgenamen van de Euclidische traditie er schande van. (Hobbes was er één van.) En toen David Hilbert aan het einde van de 19e eeuw voor het eerst niet-constructieve bewijzen gebruikte, en in feite zei "Ik weet dat x bestaat, maar ik kan je niet vertellen waar je hem kunt vinden", was er weer een opstand. Volgens een criticus: "Dit is geen wiskunde. Dit is godgeleerdheid."

Vergelijkenderwijze lijkt de huidige crisis nogal mild vergeleken met die van een eeuw geleden, toen paradoxen in de verzamelingenleer Gottlob Frege deden verzuchten "Helaas, de arithmetiek wankelt". Als antwoord op die crisis besloot een groep ambitieuze wiskundigen onder leiding van Hilbert een reddingsactie op te zetten en de wiskunde opnieuw op te bouwen op een stevig fundament. Het plan van Hilbert was om het proces van bewijzen toe te passen op het bewijzen zelf en te laten zien dat de axioma's en stellingen in de wiskunde nooit tot een tegenspraak kunnen leiden — dat men niet zowel ' x ' als 'niet x ' kan bewijzen. Het gevolg is bekend: Kurt Gödel bewees in plaats hiervan dat als je consequent wilt blijven, er beweringen zijn die waar zijn maar niet bewezen kunnen worden. Je zou verwachten dat zo'n Toren van Babel-achtige ramp de verschillende stammen van wiskundigen voor generaties terneer zou slaan, maar de wiskundigen gingen gewoon door met hun werk.

Het lijkt mij volstrekt niet vreemd dat een aantal recente bewijzen aan de grenzen van de wiskunde ingewikkeld zijn en gebruik ma-



Figuur 2 Verdubbeling van het vierkant. Het verdubbelen van het vierkant is een bewijs dat aan een jonge slaaf wordt geleerd in de *Meno* van Plato. Een vereenvoudigde versie begint met een vierkant met zijden 2 en oppervlakte 4, deelt deze langs de diagonaal, en maakt weer een nieuw vierkant op die diagonaal. De gelijkbenige driehoek die de helft van de oppervlakte van het kleinere vierkant voorstelt is ook een kwart van het oppervlakte van het grotere vierkant, dus de oppervlakte is verdubbeld.

ken van nieuw gereedschap. *Natuurlijk* zijn deze bewijzen moeilijk te doorgronden; ze waren ook moeilijk te bedenken. Het zijn oplossingen voor problemen waar briljante geesten zich al tientallen of honderden jaren op kapot bijten. Als ik niet in staat blijf het bewijs van Perelman te doorgronden is dit een teleurstelling maar geen verrassing. (Ik kan Olympische marathonlopers ook niet bijhouden.) Als ik mij zorgen maak over de wiskunde op dit moment is het niet de onnavolgbaarheid van de diepste denkers. Het is eerder over mijn eigen onhandigheid als ik alledaagse problemen aanpak, die ver af liggen van de grenzen van wetenschap.

Hoe zit het nu?

Donald E. Knuth schreef ooit een opmerking bij een computer programma: "Pas op voor bugs in dit computerprogramma; ik heb slechts bewezen dat het werkt, maar het niet uitgetoetst." Als Knuth dit schrijft weet je dat de waarschuwing een grapje is, maar als ik het zou zeggen, kun je het beter wel serieus nemen.

Laten wij even teruggaan naar Socrates en zijn jonge slaaf voor een beetje kansrekening. Zij hebben het over sport: wat is in een best-of-seven reeks (zoals de World Series bij honkbal), de kans dat de zaak beslist wordt doordat een team vier wedstrijden achter el-

kaar wint? We nemen aan dat de teams even sterk zijn, zodat ieder team kans $1/2$ heeft om iedere wedstrijd te winnen.

Socrates: Op hoeveel manieren kan een team vier wedstrijden achter elkaar winnen in een best-of-seven reeks?

Jongen: Maar op één manier. Je moet vier keer achter elkaar winnen, zonder verlies.

Socrates: En op hoeveel manieren kunnen wij een reeks van vijf wedstrijden krijgen met vier keer winnen en één keer verliezen?

Jongen: Nou, je kunt de eerste, tweede, derde of vierde wedstrijd verliezen en de rest winnen.

Socrates: Waarom kun je de laatste wedstrijd dan niet verliezen?

Jongen: Als je de eerste vier wint behoeft je geen vijfde wedstrijd meer te spelen.

Socrates: Dus om een reeks van vijf te maken nemen wij een reeks van vier en voegen wij een verloren wedstrijd toe op iedere plaats behalve de laatste, is dat het?

Jongen: Zoiets.

Socrates: Dus kunnen we een reeks van zes maken door met eentje van vijf te beginnen en een verloren wedstrijd toe te voegen op ieder van de vijf posities. Dan zijn er dus 4×5 , ofwel 20, reeksen van zes wedstrijden.

Jongen: Als jij het zegt.

Socrates: Die 20 reeksen van zes kunnen we op zes verschillende manieren uitbreiden tot

een reeks van zeven, dus er zijn 120 variaties van zeven uitkomsten mogelijk. Als we alles optellen krijg we $1 + 4 + 20 + 120$ gevallen, totaal dus 145. Precies eentje hiervan is het geval dat wij zoeken, dus de kans is $1/145$.

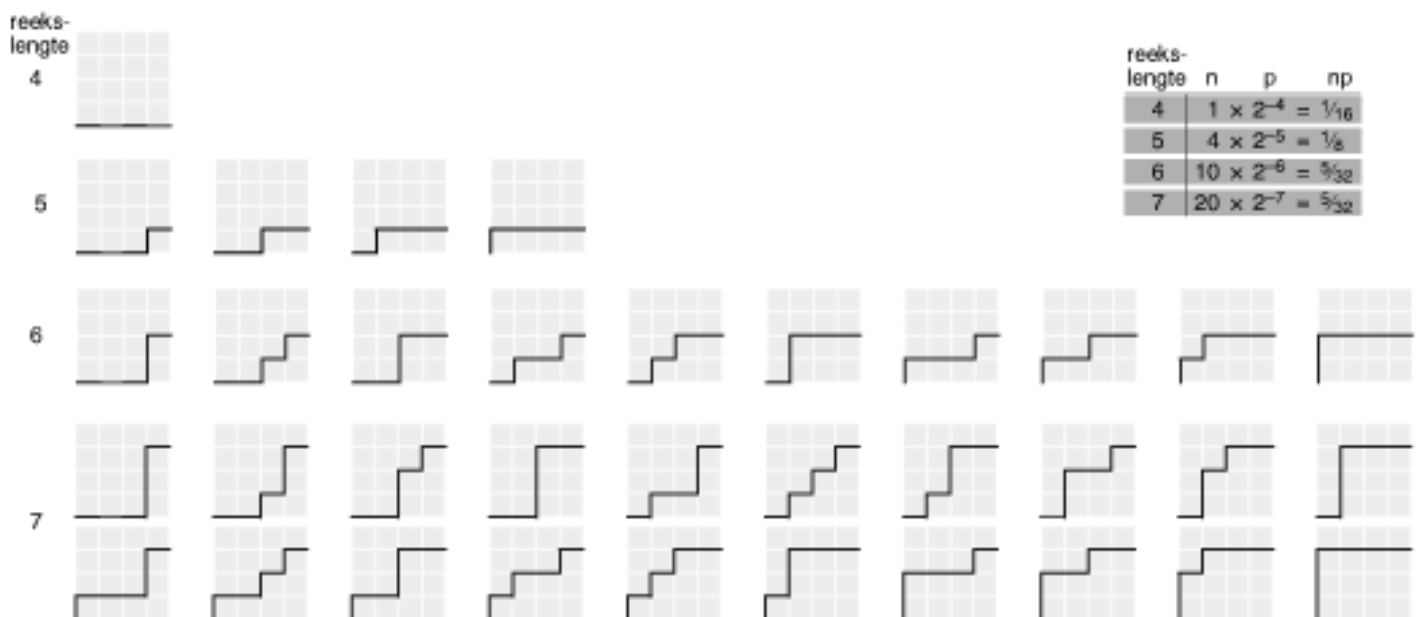
Hier aangekomen zegt de jongen, die enig verstand heeft van honkbal, dat van de 98 best-of-seven World Series er 19 gewonnen zijn met vier keer winnen achter elkaar, wat suggereert dat de empirische kans eerder $1/5$ is dan $1/145$. Socrates raakt niet van zijn stuk door dat feit.

Socrates: Laat je niet afleiden door de schijn; wij bestuderen hier het *ideale* honkbal. Laat ik het nog eens uitleggen, op een andere manier.

Jongen: Kom maar op.

Socrates: Neem eens even aan dat de teams altijd alle zeven wedstrijden uitspelen. Aangezien iedere wedstrijd twee mogelijke uitkomsten heeft zijn er 2^7 , oftewel 128 mogelijke uitkomsten. Haal nu uit die 128 uitkomsten diegene waar het spelen doorgaat nadat een team al vier keer gewonnen heeft. Dan zijn er nog zeventig verschillende patronen over. In twee van deze gevallen heeft een team vier wedstrijden achter elkaar gewonnen, een keer voor ieder team. De kans is dus $1/35$.

Jongen: U komt in de buurt. Probeer dit eens: De kans om vier wedstrijden achter elkaar



Figuur 3 Mogelijke uitkomsten bij de World Series. De honkbal World Series leidt tot een probleem dat het beste via wiskundige analyse begrepen kan worden, maar waarvoor deze weg niet de zekerste is naar een juist antwoord. De World Series is een best-of-seven serie, die eindigt zodra een van de teams vier wedstrijden gewonnen heeft. Uitgaande van even sterke teams, wat is de kans dat de serie vier, vijf, zes of zeven wedstrijden zal duren? Een serie kan voorgesteld worden als een pad over een vier-bij-vier rooster; we beginnen linksonder, een gewonnen wedstrijd voor een van de teams geeft een stap naar rechts, en een gewonnen wedstrijd voor het andere team geeft een stap omhoog. De 35 gevallen hierboven zijn alle gevallen waarin het 'rechts' team wint. Het is belangrijk om de gevallen goed te tellen en een gewicht te geven dat afhangt van de mogelijkheden. Bijvoorbeeld, aangezien het 'rechts' team iedere wedstrijd met kans $1/2$ wint is de kans op een bepaalde rij uitkomsten 2^{-5} , ofwel $1/32$; er zijn vier wedstrijden, dus de kans dat 'rechts' in vijf keer wint is $1/8$. De foute manieren van redenering in de tekst tellen verkeerd of nemen aan dat alle gevallen dezelfde kans hebben. Dit soort blunders vermijden is waarschijnlijk gemakkelijker met een computersimulatie, maar zo'n simulatie verklaart de uitkomsten niet. De getallen 1, 4, 10 en 20 zijn binomiaalcoëfficiënten. (Deze verschijnen natuurlijk bij toepassing van enige elementaire kansrekening, maar *daar* gaat het in dit artikel juist *niet* om. (red.))

te winnen is $1/2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2$, oftewel $1/16$. Aangezien ieder van de teams vier wedstrijden achter elkaar kan winnen is de kans $1/16 + 1/16 = 1/8$.

Deductieve logica heeft hier geleid tot drie verschillende antwoorden, waarvan er minstens twee fout moeten zijn. Al heb ik in deze 'comedy of errors' Socrates de rol van dwaas laat spelen, ik moet toegeven dat de fouten van mij zelf zijn. Een paar jaar geleden maakte ik deze berekening en kreeg ik een verkeerd antwoord. Hoe wist ik dat mijn antwoord fout was? Het klopte niet met een eenvoudig computerexperiment: een programma dat een miljoen World Series simuleerde en 124.711 keer uitkwam op een serie waarin een team vier keer achter elkaar won. (Dat is bijna precies $1/8$.)

Wat betekent het dat ik meer geloof in de uitkomst van een computerprogramma dan in mijn eigen redenering? Welnu, ik beweer niet dat computersimulaties superieur zijn aan bewijzen of betrouwbaarder zijn dan logica. Er is niets mis met klassieke wiskunde. Alledrie de manieren van aanpak in mijn pseudo-Socratische dialoog zullen de juiste uitkomst geven, mits ze zorgvuldig toegepast worden. Maar bewijs is een hulpmiddel dat ook kan bewijzen dat je een dwaas bent.

Degenen die menen nooit zo'n fout te kunnen maken feliciteer ik, maar ik herinner ze ook aan de affaire met het beruchte drie-deuren-probleem. In 1990 schreef Marilyn vos Savant, een columniste van het tijdschrift *Parade*, een stuk over het drie-deuren-probleem. Stel, in een spelshow sta je voor drie gesloten deuren. Achter één van die deuren zit een prijs. Als de speler deur 1 kiest, opent de quizmaster deur 3, waar niets achter staat, en geeft hij de speler alsnog de kans om

deur 2 te kiezen in plaats van deur 1. Vos Savant beredeneerde (correct, onder bepaalde aannames) dat je door te veranderen je kans van $1/3$ vergroot naar $2/3$. Duizenden waren het hier niet mee eens, waaronder een behoorlijk aantal wiskundigen. Zelfs Paul Erdős, een grote kansrekenaar, had het fout. Uiteindelijk werd hij overtuigd door een computersimulatie.

Bewijs

In een rechtszaak wordt er een bewijs gezocht 'buiten gerede twijfel', maar wiskunde vraagt meer. In een traditie die teruggaat op Euclides, wordt een bewijs gezien als een garantie van onfeilbaarheid. Het is het vlammeende zwaard van een schildwacht die waakt over gepubliceerde wiskunde en die alle onwaarheden buitensluit. En de wiskundeliteratuur heeft *inderdaad* bewaking nodig. Als je wiskunde ziet als een formeel systeem van axioma's en stellingen, dan is de structuur gevaarlijk kwetsbaar. Laat ook maar één foute stelling toe, en je kunt iedere onzinnigheid bewijzen die je maar wilt.

De speciale status van wiskundige waarheid, waarin dit vak verschilt van andere kunsten en wetenschappen, wordt nog steeds door veel wiskundigen gekoesterd, maar het bewijzen speelt ook andere rollen. Het is niet alleen een zegel van goedkeuring. Het boek *Proofs and Confirmations* van David Bressoud geeft naar mijn mening de beste insider's kijk op wat het betekent om wiskunde te bedrijven. Bressoud benadrukt dat de belangrijkste functie van het bewijs niet is het bepalen of iets waar is (of niet), maar het duidelijk maken *waarom* iets waar is. "De zoektocht naar een bewijs is de eerste stap in de zoektocht naar begrip".

En natuurlijk, wiskunde is meer dan alleen stellingen en bewijzen. Een belangrijke tak die zich experimentele wiskunde noemt doet het erg goed op dit moment. Er zijn tijdschriften en congressen gewijd aan dit onderwerp, en een tweetal boeken van Jonathan Borwein en David Bailey fungeren als grondlegend op dat gebied. Niet dat experimentele wiskundigen bewijzen willen opgeven of afschaffen, maar ze willen andere activiteiten een belangrijkere rol laten spelen: spelen met voorbeelden, vermoedens uitspreken, berekeningen doen.

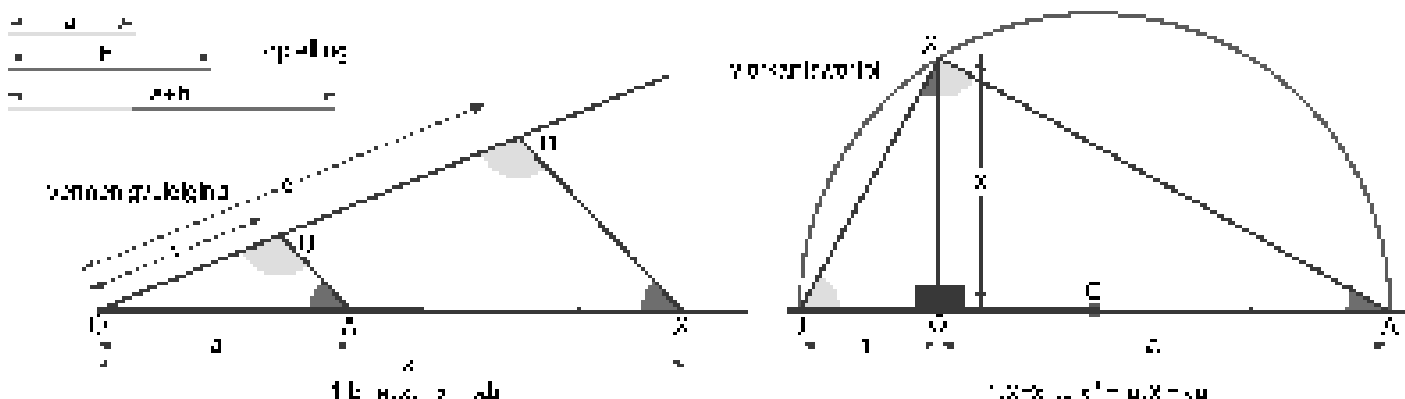
Toch zijn er ideeën waar niemand op gekomen zou zijn anders dan via het denkproces dat wij bewijzen noemen. En dat brengt me terug bij het in drieën delen van hoeken.

De stelling van Wantzel

Het feit dat trisectie onmogelijk is, is alom bekend, maar de reden waarom, de inhoud van het bewijs, is minder bekend. Veel auteurs noemen het, maar weinigen leggen het uit. Zelfs Underwood Dudley's schitterende verzameling wiskundige 'cranks', *A Budget of Trisectons*, geeft niet het bewijs stap voor stap.

De oorsprong en geschiedenis van het bewijs is ook nogal vaag. Dat is een les voor diegenen die onsterfelijk willen worden door een belangrijke stelling uit de wiskunde te bewijzen. Trisectie stond bijna tweeduizend jaar lang bovenaan de lijst van meestgezochte bewijzen, en toch heeft de auteur van het eerste gepubliceerde bewijs van de onmogelijkheid ervan geen plaats gekregen in de rij beroemde wiskundigen.

De auteur was de Franse wiskundige Pierre Laurent Wantzel (1814–1848), wiens naam zeer onbekend is, zelfs in wiskundige kringen. Zijn bewijs verscheen in 1837. Voor zover



Figuur 4 Constructies met passer en liniaal. Euclidische constructies met passer en liniaal leveren vijf arithmetische operaties: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken. Optellen is gewoon het achter elkaar leggen van lijnstukken, aftrekken is het omgekeerde. Vermenigvuldigen houdt in dat gelijkvormige driehoeken gemaakt worden waarvan de zijden de verhoudingen $1 : b = a : x$ voorstellen, dus x is het product van a en b . Delen is weer het omgekeerde. Voor worteltrekken worden gelijkvormige driehoeken in een cirkel ingeschreven, met zijden met verhoudingen $1 : x = x : a$, zodat $x^2 = a$, en de lengte van het lijnstuk x gelijk is aan de wortel van a . Alleen deze vijf operaties zijn mogelijk; het is onmogelijk om derdemachtswortels te trekken, wat van belang is bij het bewijzen dat trisectie onmogelijk is.

ik weet, is het nooit herdrukt en ook nooit in het Engels vertaald. (Ik heb zelf een poging tot een vertaling op de website van de *American Scientist* gezet). Veel citaties van het artikel geven een verkeerd volumenummer, wat de indruk wekt dat sommigen die ernaar verwijzen het zelf niet gelezen hebben. En om het nog erger te maken, het artikel zelf geeft een verkeerde spelling voor de naam van de auteur: Hij staat vermeld als 'M.L. Wantzel'.

Een van de redenen voor de onbekendheid van Wantzel kan zijn dat zijn bewijs bijna niet te begrijpen is voor de moderne lezer. Later werden er duidelijkere verklaringen geschreven. Felix Klein, L.E. Dickson en Robert C. Yates publiceerden allemaal hun eigen versie van het bewijs; dat deed Willard Van Orman Quine ook, als antwoord op een 100 dollar prijsvraag. Voor een uitgebreid en leesbaar bewijs raad ik het boek *Abstract Algebra and Famous Impossibilities* van Arthur Jones, Sidney A. Morris en Kenneth R. Pearson aan.

Als boetedoening voor mijn jeugdige carrière als trisecteur zal ik nu proberen in het kort het bewijs van de onmogelijkheid ervan te geven. De hoofdvraag is: wat kun je met passer en liniaal doen? Natuurlijk kun je ermee lijnen en cirkels tekenen, maar je kunt er ook mee rekenen. Als de lengte van een lijnstuk een getal voorstelt, kun je met passer en liniaal met zulke getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, en zelfs worteltrekken. Stel dat je begint met een lijnstuk van lengte 1, welke andere getallen kan je hieruit voortbrengen? De gehele getallen zijn gemakkelijk, breuken ook. Wortels leiden tot een aantal irrationale getallen; door her-

haaldelijk wortel te trekken kun je ook vierdemachtwortels, achtstemachtwortels trekken, enzovoorts. Maar *meer* kun je niet. Je kunt geen derdemachtwortels, vijfdemachtwortels, of welke wortel dan ook trekken die geen macht van twee is — wat het cruciale punt is bij trisectie.

De trisectiesprocedure zou gegeven een hoek θ een hoek $\theta/3$ dienen op te leveren. Aangezien de methode voor iedere hoek moet werken kun je de onmogelijkheid bewijzen met een enkel tegenvoorbeeld. Het standaardvoorbeeld is de hoek van 60 graden met hoekpunt in de oorsprong en een zijde langs de positieve x -as. Om deze hoek in drieën te delen zou je een lijn moeten trekken door de oorsprong die een hoek van 20 graden maakt met de x -as.

Om een lijn te tekenen heb je genoeg aan twee punten op die lijn. In dit geval heb je al een punt, de oorsprong. De hele trisectie komt dus neer op het vinden van een punt ergens op de gezochte lijn. Dat kan toch niet moeilijk zijn? Er liggen immers oneindig veel punten op die lijn, en wij hebben er maar eentje van nodig. Maar het bewijs laat zien dat het niet kan.

Om de oorsprong van het probleem te zien gebruiken wij goniometrie. Als we de sinus en cosinus van 20 graden kenden was het probleem opgelost; dan konden wij de punten $x = \cos 20$ en $y = \sin 20$ construeren. Wij hebben dan natuurlijk wel de exacte waarden nodig, benaderingen van een rekenmachine of tabel zijn niet goed genoeg. We kennen *wel* de sinus en cosinus van 60 graden: dat zijn $\sqrt{3}/2$ en $1/2$. Beide getallen kun je met passer

en liniaal construeren. We hebben ook formules die de sinus en cosinus van een willekeurige hoek θ geven als functie van de sinus en cosinus van $\theta/3$. Deze formules geven de volgende vergelijking, waar we $\cos \theta/3$ voor het gemak vervangen hebben door u :

$$\cos \theta = 4u^3 - 3u.$$

Voor de hoek van 60 graden, met $\cos \theta = 1/2$, wordt deze vergelijking $8u^3 - 6u = 1$. Dit is een derdegraadsvergelijking. En daar ligt de kern van het probleem: met optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken alleen kunnen wij deze vergelijking niet oplossen. (Het lastige deel van het bewijs, waar ik mij niet aan waag, toont aan dat de derdegraadsvergelijking niet herleid kan worden naar eentje van lagere graad.)

Dit bewijs, met zijn gebruik van goniometrie en algebra, zou wartaal zijn geweest voor Euclides, maar de conclusie kan eenvoudig naar meetkunde vertaald worden: Geen enkel punt op de lijn die een hoek van 20 graden met de x -as maakt (afgezien van de oorsprong) kan met passer en liniaal geconstrueerd worden uitgaande van de lijn die een hoek van 60 graden maakt. Dit resultaat is vreselijk tegenintuïtief. De twee lijnen liggen in hetzelfde vlak; ze snijden elkaar zelfs, en toch 'communiceren' ze niet met elkaar: je kunt niet van de één naar de ander komen. Net als Hobbes zou ik dit niet geloofd hebben, als niet het bewijs me ertoe zou dwingen. Ik vraag mij af of het mijn oude vriend Dmytro zou overtuigen. 

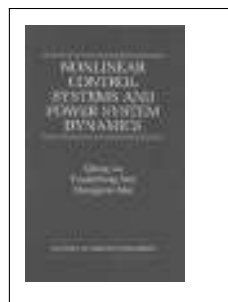
Referenties

- 1 K. Appel, W. Haken, 'The four color proof suffices' *The Mathematical Intelligencer* **8**(1) (1986), pp. 10–20.
- 2 J. Aubrey, 'Brief Lives, Chiefly of Contemporaries, Set Down by John Aubrey, between the years 1669 & 1696, edited by Andrew Clark, The Clarendon Press, Oxford, 1898.
- 3 J. Borwein, D. Bailey, *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, Natick, Mass.: A.K. Peters, 2004.
- 4 D.M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, 1999.
- 5 P.J. Davis, 'Fidelity in mathematical discourse: Is one and one really two?' *American Mathematical Monthly* **79**(3), pp. 252–263, 1972.
- 6 L.E. Dickson, 'Why it is impossible to trisect an angle or to construct a regular polygon of 7 or 9 sides by ruler and compasses' *Mathematics Teacher* (14) (1921), pp. 217–218.
- 7 U. Dudley, *A Budget of Trisections*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- 8 M. Gardner, 'Mathematical games: The persistence (and futility) of efforts to trisect the angle' *Scientific American* **214**(6) (1966), pp. 116–122.
- 9 T.C. Hales, 'A proof of the Kepler conjecture' *Annals of Mathematics* (162) (2005), pp. 1065–1185 en *Discrete & Computational Geometry* (36) (2005), pp. 1–265.
- 10 J. Horgan, 'The death of proof' *Scientific American* **269**(4) (1993), pp. 92–103.
- 11 D.M. Jesseph, *Squaring the Circle: The War Between Hobbes and Wallis*, University of Chicago Press, Chicago, 1999.
- 12 A. Jones, S.A. Morris and K.R. Pearson, *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- 13 F. Klein, *Famous Problems of Elementary Geometry: The Duplication of the Cube, the Trisection of an Angle; the Quadrature of the Circle*, Ginn, Boston, 1897.
- 14 M. Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York, 1980.
- 15 W.V. Quine, 'Elementary proof that some angles cannot be trisected by ruler and compass' *Mathematics Magazine* **63**(2) (1990), pp. 95–105.
- 16 C. Sormani, Hamilton, Perelman and the Poincaré conjecture comet.lehman.cuny.edu/sormani/others/perelman/introperelman.html
- 17 M.L. Wantzel, 'Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas' *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2) (1837), pp. 366–372.
- 18 R.C. Yates, *The Trisection Problem.*, Franklin Press, Baton Rouge, 1942.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



Qiang Lu, Yuanzhang Sun en Shengwei Mei

Nonlinear Control Systems and Power System Dynamics

Boston : Kluwer Academic Publishers, 2001

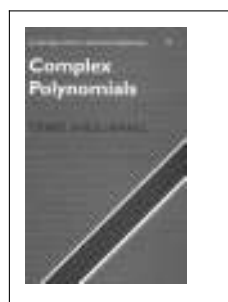
400 p., prijs €197,90

ISBN 0-7923-7312-4

This book gives a comprehensive description of nonlinear control of electric power systems using techniques from nonlinear control theory. In the first part of the book, basic concepts from differential geometry needed for nonlinear control theory are given. In the next part design principles for nonlinear control systems are outlined. Subsequently, basic mathematical models for electric power systems are described, and, finally, in the last part of the book, the principles from nonlinear control theory developed in the previous chapters are applied to various power system control designs.

The book is essentially self-contained and can be used as a text for senior undergraduate or graduate engineering students as well as control theory researchers who are interested in applications of modern nonlinear control theory to practical engineering control designs. Since the mathematics that is used is explained in the initial chapters, the book should be particularly useful for engineering students who might find other books in nonlinear control theory abstruse and devoid of practical applications. However, the authors could have taken better care in avoiding the various grammatical errors that have crept into the book. This is perhaps the only major shortcoming of the book. In addition, at several places the book is mathematically sloppy and the choice of mathematical notation could have been improved. However, the book is unique and is useful, since it is one of the few that attempt to bridge the gap between the abstract theorems and their engineering implementation.

Amol J. Sasane



T. Sheil-Small

Complex polynomials

Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 80

Cambridge : Cambridge University Press, 2002

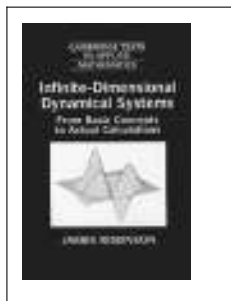
428 p., prijs £ 80.00

ISBN 0-521-40068-6

Dit boek gaat over veeltermen in een of twee variabelen met reële of complexe coëfficiënten, of zoals de analytisch georiënteerde auteur het uitdrukt, over 'veeltermen in het vlak met nadruk op de meetkundige theorie'. De auteur heeft gekozen voor het behandelen van de theorie der veeltermen met veelal complexe coëfficiënten in een variabele aan de hand van een aantal beroemde opgeloste of onopgeloste vermoedens. Naar mijn mening is hij daarin uitstekend geslaagd: de gekozen onderwerpen zijn boeiend, uitdagend en spreken tot de verbeelding. Bovendien is het boek toegankelijk voor een breed publiek. Na de behandeling van de nodige fundamentele zaken (waaronder een mini-cursus in to-

pologie van het vlak) wordt in het derde hoofdstuk begonnen met het eerste vermoeden, het Jacobi vermoeden in dimensie twee. De auteur bewijst een aantal (bekende) speciale gevallen met behulp van de in het eerste hoofdstuk beschreven theorie der asymptotische waarden. Ook gaat hij uitvoerig in op de meetkundige kant van het bekende tegenvoorbeeld van Pinchuk voor het reële Jacobi vermoeden. Na dit uitstapje wordt begonnen met het echte werk: de studie van convoluties en convolutie operatoren, een van de hoofdthema's van dit boek. Hoogtepunten in deze studie zijn het werk van Suffridge over polynomen waarvan de nulpunten op de eenheidscirkel liggen en gescheiden zijn door een gegeven minimale afstand, werk van de auteur dat leidde tot de oplossing van het beroemde Polya-Schoenberg vermoeden (dat zegt dat de convolutie van twee convex univalente afbeeldingen van de eenheidsschijf weer convex univalent is) en de stelling van Grace. Deze laatste is een opmerkelijke generalisatie van de bekende stelling van Gauss-Lucas die zegt dat de kritieke punten van een complex polynoom (in een veranderlijke) in het convexe omhulsel van de nulpunten van dat polynoom liggen. In dit kader wordt ook het veertig jaar oude nog onopgeloste vermoeden van Ilieff-Sendov besproken: zij P een veelterm wiens nulpunten in de gesloten eenheidsschijf rond nul liggen, dan ligt er bij ieder van deze nulpunten een kritiek punt van P op een afstand ten hoogste 1. Dit vermoeden werd in 1999 bewezen voor alle veeltermen met graad kleiner dan of gelijk aan 8. Andere vermoedens die onder meer besproken worden, zijn het door de auteur in 1988 opgeloste vermoeden van Wiman uit 1911 en een nog open vermoeden van Smale uit 1981. Zoals reeds opgemerkt, een aardig en helder geschreven boek met veel verrassende en technisch diepgaande resultaten, dat desondanks goed toegankelijk is voor een breed publiek.

A. van den Essen



J.C. Robinson

Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors

Cambridge Texts in Applied Mathematics, 28
Cambridge : Cambridge University Press, 2001

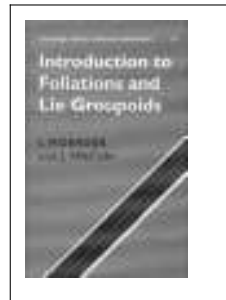
480 p., prijs £31.99, ISBN 0-521-63564-0

The main purpose of this book is to understand the solution of some special partial differential equations including reaction diffusion equations and the famous Navier-Stokes equation. Before treating those infinite dimensional dynamical systems, the author gives a nice and complete overview of functional analysis. The notions of Banach space and Lebesgue measure are introduced as well as ordinary differential equations. Many of the needed tools from analysis to treat partial differential equations are presented. Part I ends with Sobolev spaces and distributions.

After this first part, the book is less classical in the academic sense and becomes more advanced. The second part deals with existence and uniqueness criteria for some partial differential equations. A dynamical systems approach is given in the third part, which is devoted to the study of the topological structure of global attractors. In a similar vein, the link between partial differential equations and ordinary differential equations is present-

ed. Some particular solutions are stable in the Lyapounov sense. Therefore any nearby solution will accumulate to this special solution and the closure of this special orbit is called an attractor. For partial differential equations, such attractors are related with special sets called absorbing sets.

V. Naudot



K.C.H. Mackenzie

General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids

London Mathematical Society Lecture Note Series, 213

Cambridge : Cambridge University Press, 2005

501 p., prijs £50.00

ISBN 0-521-49928-3

I. Moerdijk en J. Mrčun,

Introduction to Foliations and Lie Groupoids,
Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 91

Cambridge : Cambridge University Press, 2003

173 p., prijs €35.00

ISBN 0-521-83197-0

"It is fashionable among mathematicians to despise groupoids and to consider that only groups have an authentic mathematical status, probably because of the pejorative suffix oid." Niettemin zijn het juist topwiskundigen die groepoiden tijdens de afgelopen decennia op de kaart hebben gezet. Alain Connes (van wie het bovenstaande citaat afkomstig is) gaf ze een centrale rol in zijn niet-commutatieve meetkunde als generalisaties van equivalentierelaties, Alexander Grothendieck gebruikte groepoiden al eerder op soortgelijke wijze in de algebraïsche meetkunde ("The idea of making systematic use of groupoids (...) however evident as it may look today, is to be seen as a significant conceptual advance, which has spread into the most manifold areas of mathematics. (...) In my own work in algebraic geometry, I have made extensive use of groupoids - the first one being the theory of the passage to quotient by a 'pre-equivalence relation' (which may be viewed as being no more, no less than a groupoid in the category one is working in, the category of schemes say)", en Alan Weinstein gaf door middel van het gebruik van groepoiden een geheel nieuwe draai aan de symplectische meetkunde. Ten slotte moet ook George Mackey hier genoemd worden, die herhaaldelijk wees op de rol van groepoiden in de representatietheorie.

Groepoiden generaliseren groepen, ruimten, groepswerkingen, en equivalentierelaties. De kortste definitie van een groepoïde is dat het een (kleine) categorie is waarin iedere pijl een inverse heeft, maar informeel gesproken duiken groepoiden overal op waar een zekere symmetrie herkenbaar is die niet door een groepsactie kan worden beschreven. Zo zegt Weinstein in mijn laatste citaat: "Mathematicians tend to think of the notion of symmetry as being virtually synonymous with the theory of groups and their actions. (...) In fact, though groups are indeed sufficient to characterize homogeneous structures, there are plenty of objects which exhibit what we clearly recognize as symmetry, but which admit few or no nontrivial automorphisms. It turns out that the symmetry, and hence much of the structure, of such ob-

jects can be characterized if we use groupoids and not just groups.

Toch was het tot voor kort moeilijk een goede introductie of standaardreferentie voor groepoïden aan te geven, met name één die speciaal inging op gladde (Lie) groepoïden; juist deze spelen een centrale rol in een aantal toepassingen (zoals die op de symplectische en de niet-commutatieve meetkunde). In deze lacune is nu op voortreffelijke wijze voorzien. Het boek van Kirill Mackenzie is zeer uitvoerig, bijna een levenswerk van de auteur (en heet dan ook *General theory*), terwijl de *Introduction* van Ieke Moerdijk en zijn voormalige promovendus Janez Mrčun juist kort en bondig is. Beide boeken zijn zo duidelijk en zorgvuldig geschreven dat de markt hiermee ook voorlopig verzadigd lijkt.

De nadruk ligt in beide boeken op de Lie theorie. Uit de groepentheorie kennen we de Lie functor, die een Lie groep overvoert in de bijbehorende Lie algebra. Een dergelijke functor is ook gedefinieerd in de wereld van Lie groepoïden en voert een Lie groepoïde G over in een zogenaamde Lie algebroïde $A(G)$. Dit is in eerste instantie een vector-bundel $A(G) \rightarrow M$ over dezelfde basisruimte (of objectruimte) M als de bijbehorende Lie groepoïde. Deze vector-bundel is echter verrijkt met een tweede afbeelding van $A(G)$ naar de raakbundel TM (het zogenaamde anker), alsmede door een Lie haakje op de ruimte van gladde sneden van $A(G)$. Het eenvoudigste voorbeeld is TM zelf, die in deze context dan wordt beschouwd als de Lie algebroïde behorend bij de zogenaamde paar-groepoïde $M \times M$ (die zelf weer de triviale equivalentierelatie op M is - dat wil zeggen ieder punt van M is equivalent met ieder ander punt -, waarbij M een gladde variëteit is).

Men kan ook beginnen met een Lie algebroïde A , en zich dan bijvoorbeeld afvragen of er een bijbehorende Lie groepoïde G bestaat zodanig dat $A \cong A(G)$. Dit integrabiliteitsprobleem blijkt, in tegenstelling tot het geval van Lie groepen (c.q. de derde stelling van Lie, bewezen door E. Cartan), niet altijd een oplossing te hebben. Mackenzie gaat zeer gedetailleerd in op het zogenaamde transitieve geval van dit probleem (waarbij het anker van de gegeven Lie algebroïde vezelgewijs surjectief is), dat voor een groot deel door hemzelf is opgelost in termen van een cohomologische obstructietheorie. Dit brengt ons tot het enige kritiekpunt op zijn boek, en wel dat de algemene oplossing van het integrabiliteitsprobleem door Crainic en Fernandes (*Ann. Math.*, 2003) slechts kort in een appendix wordt geschetst, waarbij zelfs het verband tussen deze algemene oplossing en die van het transitieve geval niet duidelijk wordt gemaakt.

Dit defect wordt echter ruimschoots goed gemaakt door het feit dat Mackenzie een uitputtende beschrijving geeft van het (door Weinstein ontdekte) verband tussen Lie groepoïden, Lie algebroïden, en symplectische meetkunde. Dit verband kan als volgt worden samengevat: de coraakbundel T^*P van een gegeven Poisson variëteit P heeft een natuurlijke Lie algebroïde structuur. Indien T^*P integreerbaar is als Lie algebroïde, dan is de integrerende Lie groepoïde $G(P)$ tevens een symplectische variëteit, waarbij alle structuren op natuurlijke wijze compatibel zijn; men zegt dat $G(P)$ een symplectische groepoïde is. Een speciaal geval hiervan is $P = A^*(G)$, de kanonieke Poisson-structuur op de duale bundel van de Lie algebroïde $A(G)$ van een gegeven Lie groepoïde G . Deze is altijd integreerbaar, met T^*G als bijbehorende symplectische groepoïde. De theorie van symplectische groepoïden is zeer fraai, en heeft bovendien nog een generalisatie tot een theorie van Poisson groepoïden, waarvan de bijbeho-

rende Lie algebroïden ook weer allerlei extra structuur erven die leidt tot het begrip Lie bialgebroïde. (Dit laatste is een generalisatie van een Lie bialgebra, die in de theorie van kwantumgroepen optreedt.) Ook dit onderwerp wordt door Mackenzie behandeld - maar dan is het boek ook uit.

Moerdijk en Mrčun hebben een andere focus, namelijk het verband tussen Lie groepoïden, Lie algebroïden, en foliaties. Ze beginnen zelfs met het laatste, om pas in hoofdstuk 5 (van zes) aan Lie groepoïden en algebroïden toe te komen. Een foliatie van een (gladde) variëteit M is het eenvoudigst te definiëren als een integreerbare subbundel E van de raakbundel TM (dat wil zeggen de commutator van twee sneden van E is opnieuw een snede van E), maar er zijn vele equivalente definities die ieder een zeker bestaansrecht hebben. Toepassing van de bekende stelling van Frobenius geeft bijvoorbeeld de integreerbaarheid van een foliatie in de zojuist gedefinieerde zin door bladen (deelruimten van M die gezamenlijk M vullen). Foliaties vormen een verrijking van de elementaire differentiaalmeetkunde en hebben ook toepassingen in de fysica, met name in de theorie van constraints zoals opgezet door P.A.M. Dirac. De auteurs gaan niet in op deze toepassing, maar concentreren zich op de zuivere wiskunde, waar dan ook genoeg te halen valt. Ondanks de compacte en elementaire behandeling van de theorie wordt op dat vlak een lovenswaardige diepgang bereikt.

Zo worden de stabiliteitsstellingen van Ehresmann en Reeb (waarmee de foliatietheorie in feite begon) en de verfijning daarvan door Thurston uitvoerig uitgelegd; dergelijke resultaten geven onder bepaalde aannamen een lokale of zelfs globale beschrijving van foliaties waarvan de bladen rond een gegeven blad er hetzelfde uitzien. Deze stellingen vormen de ideale context om begrippen als holonomie en stabiliteit uit te leggen, en geven de auteurs tevens aanleiding om de (quotiënt)ruimte van bladen van een foliatie te beschrijven in het speciale geval dat deze een zogenaamde orbifold is (in het algemeen is de bladenruimte nog aanzienlijk singulierder). Ook de klassieke stellingen van Haefliger en van Novikov komen aan bod; deze zeggen respectievelijk dat er geen analytische foliaties van S^3 zijn met codimensie 1 en dat onder milde aannamen een foliatie met codimensie 1 van een willekeurige compacte variëteit van dimensie 3 een compact blad heeft (dit lijkt misschien voor de hand te liggen, maar één dimensie lager is het zeer eenvoudig een foliatie van de torus op te schrijven waarin ieder blad isomorf is met $\mathbf{R}$).

Na een hoofdstuk over Riemannse foliaties (je kunt de structuur van een foliatie uiteraard combineren met de meeste bekende structuren uit de differentiaalmeetkunde) komt dan eindelijk het verband tussen Lie groepoïden, Lie algebroïden, en foliaties aan bod. Dit verband is in eenvoudigste vorm als volgt: de bovengenoemde subbundel E van TM is op de voor de hand liggende manier een Lie algebroïde over M , en kan worden geïntegreerd tot een Lie groepoïde. Deze integrerende groepoïde is (net als voor Lie groepen) niet uniek; belangwekkend zijn vooral de zogenaamde holonomie-groepoïde (die in het werk van Connes een grote rol speelt) en de monodromie-groepoïde. Deze objecten coderen globale kenmerken van de foliatie die niet zonder meer uit E af te lezen zijn, en vormen de basis voor de constructie van topologische invarianten van de foliatie. Tevens kunnen constructies rond de foliatie zelf vaak worden vertaald in elegantere constructies op het niveau van de bijbehorende Lie groepoïden; zo correspondeert de beschrijving van een foliatie in termen van een zo-

genaamde transversaal met het vervangen van (bijvoorbeeld) de holonomie-groepoïde door een eenvoudigere (vaak étale) groepoïde die daar in een geschikte zin equivalent mee is. De onderliggende theorie van (Morita) equivalentie van Lie groepoïde wordt uitvoerig uiteengezet; deze theorie heeft overigens vele andere toepassingen, bijvoorbeeld op het probleem van de functorialiteit van kwantisatie.

De voorkennis voor beide boeken bestaat uit standaard differentiaalmeetkunde, voor sommige stukken aangevuld met enige algebraïsche topologie. Daarmee gewapend kan men ze inderdaad van kft tot kft en met veel plezier en rendement lezen. Warm aanbevolen dus!

Klaas Landsman



J.S. Cramer
**Logit Models
From Economics to other Fields**

Cambridge: Cambridge University Press, 2003
184 p., prijs £ 39,99
ISBN 0-521-81588-6

Logistische modellen worden frequent gebruikt in statistische analyses in met name de economische wetenschappen en zijn beschikbaar in veel statistische softwarepakketten. Logistische modellen zijn complementair aan de bekende lineaire regressiemodellen en voegen hieraan de mogelijkheid van dichotome c.q. polytome variabelen toe, zoals die vaak gebruikt worden om toestanden te beschrijven. Beide soorten regressiemodellen analyseren causale modellen die de relatie tussen onafhankelijke variabelen en afhankelijke variabelen beschrijven. Dit boek beschrijft de aan deze logistische modellen ten grondslag liggende *logit*-analyse en geeft een uitvoerige beschrijving van deze schattings-techniek. Het boek is dan ook zeer geschikt voor wat meer gevorderde studenten en onderzoekers.

Het boek is geïllustreerd met diverse praktijkvoorbeelden die op een overzichtelijke wijze zijn uitgewerkt. Een grote dataset, afkomstig uit een databestand van autobezit in Nederland, is ook via het internet beschikbaar om de methoden en technieken te kunnen toepassen en oefenen. Hoewel het accent ligt op economische modellen, is er toch ook veel aandacht besteed aan de toepassing van deze theorie in andere vakgebieden zoals biologie en de medische wetenschappen. Voor deze vakgebieden zijn varianten van de logit-modellen ontwikkeld.

De auteur is gerenommeerd op het gebied van de probit- en logit-modellen en analyses. Dit boek is een geslaagde poging om de doelgroep van dit soort technieken te vergroten, maar ook om de toepassers van deze methoden inzicht te geven in toepassingen buiten hun eigen vakgebied. De opbouw van het boek is duidelijk: in de eerste hoofdstukken wordt de basis behandeld: het binaire model en de maximum likelihood schattingsmethode toegepast op het binaire logit-model. In de daarop volgende hoofdstukken wordt nader ingegaan op de kracht en mogelijkheden van de techniek, waarbij het eerder genoemde praktijkvoorbeeld tot in detail wordt uitgewerkt. Diverse varianten van het logit-model worden gepresenteerd. De auteur is erin geslaagd de schoonheid en kracht van het logit-model voor een geïnteresseerde lezer tot leven te brengen.

G.J.K. Regterschot

T. Mora

**Solving polynomial equation systems I
The Kronecker-Duval philosophy**

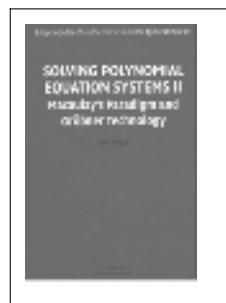
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, no. 88
Cambridge: Cambridge University Press, 2003
423 p., prijs £ 75.00
ISBN 0-521-81154-6

Dit boek gaat over veeltermen, algebraïsche getallen en lichaamsuitbreidingen vanuit algoritmisch standpunt. Naast de standaardonderwerpen uit de Galois theorie vindt men dan ook allerlei zaken die van belang zijn als men een en ander in een computer-algebrapakket wil realiseren. Bijvoorbeeld Sturm rijen die kunnen dienen om verschillende wortels van een polynoom in een reële inbedding te onderscheiden. Het gaat de auteur er niet om te laten zien wat de computer vermag. Liever legt hij principes uit, bijvoorbeeld aan de hand van de manier waarop Gauss de vergelijking $x^{19} - 1 = 0$ oplost. Hij praat graag over de klassieken, en alles gaat in de ik-vorm.

Voor een cursus staat er veel bruikbaar in het boek. Voor zelfstudie is het iets minder geschikt. Daarvoor heeft de auteur te weinig discipline. Hij begint al twee uitbreidingslichamen te snijden voordat we hebben gezien hoe ze in een gezamenlijke uitbreiding gestopt kunnen worden. Dat moet toch echt eerst gebeuren. Hij klaagt dat transfiniete inductie uit de mode is, maar neemt aan dat de lezer weet dat elke verzameling een wel-ordering heeft. Helemaal gek wordt het als we op pagina 191 lezen dat $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ twee lichaamsstructuren heeft, eentje met $\sqrt{2}$ positief, eentje met $\sqrt{2}$ negatief. Gezien de rest van het verhaal is evident dat hij dit zelf niet denkt, maar het staat er toch maar. Ook op pagina 170 heeft hij een black-out: elk perfect lichaam van positieve karakteristiek zou eindig zijn.

Voor een wiskundeboek bevat de tekst ongebruikelijk veel commentaar. Het wordt in ieder geval goed duidelijk waar de auteur heen wil. Het verhaal is interessant. Een aanwinst voor de eigen boekenplank.

Wilberd van der Kallen



T. Mora

**Solving Polynomial Equation Systems II
Macaulay's Paradigm and Gröbner Technology**

Encyclopedia of Mathematics and its Applications, No. 99, Cambridge: Cambridge University Press, 2005, 759 p., prijs £ 90,00
ISBN 0-521-81156-2

Dit is deel twee van een trilogie. Het is kennelijk mogelijk om meer dan 750 pagina's te vullen over Gröbnerbases en wat daarom heen zit. Het gaat dus om het rekenen met de computer aan stelsels van veeltermvergelijkingen en algemener het rekenen aan de bijbehorende idealen in veeltermringen. De auteur laat graag merken dat hij zijn literatuur kent. Ook Duitstalige, want hoe kom je anders aan rare woorden als subvectorspace en vector-subspace. De uitgever weet toch beter, maar vond het manuscript kennelijk ook te lang om er echt naar te kijken. Wellicht dat sommige specialisten in de computeralgebra bereid zijn het geheel door te ploegen, maar anderen zullen volstaan met wat grasdui-

nen. Het is natuurlijk wel aardig om eraan herinnerd te worden dat Noethernormalisatie bij vader Max hoort, niet bij Emmy. Ook de inhoudsopgave is wel nuttig. Maar om thuis te raken in het onderwerp zijn er veel betere boeken. Boeken die niet zo nodig een persoonlijk stempel willen drukken en die een index hebben die uitgebreid genoeg is dat je niet al het voorgaande hoeft te checken om te weten waar de schrijver het over heeft. Niet dat je er daarmee bent. Je moet ook nog flink vooruit lezen. Kortom, het is slecht georganiseerd, maar er staat natuurlijk wel iets in.

Wilberd van der Kallen

B. Bonnard, M. Chyba

Singular Trajectories and their Role in Control Theory

Mathématiques et Applications, Vol. 40

Berlijn : Springer Verlag, 2003

373 p., prijs €69,50

ISBN 3-540-00838-5

The contents and aims of this book are convincingly explained in its Preface. Given a (nonlinear) control system $\dot{x} = f(x, u)$, with the state x taking value in an n -dimensional manifold, and the control vector $u \in U \subset \mathbb{R}^m$. Consider the *end-point mappings* $E : u(\cdot) \mapsto x(T, x_0, u)$ where $x(T, x_0, u)$ denotes the state at some fixed time $T > 0$ resulting from applying the control function $u(\cdot)$ to the control system, starting from a fixed initial state x_0 at time 0. The singularities of this mapping are called the *singular trajectories* of the control system.

These singular trajectories crucially show up in at least three instances: (1) The singular trajectories are candidate minimizers for the *time-optimal control problem* of steering the system to a desired end-point in a minimal amount of time. The singular trajectories are parametrized by the Pontryagin Maximum Principle applied to the time optimal control problem. (2) The singular trajectories are the *abnormal extremals* of optimal control problems for the control system. Indeed, the optimal control problem can be seen as minimizing a cost functional over the set of all possible system trajectories, with the singular trajectories being the singular points of this set. A particular example of this case is provided by sub-Riemannian geometry. (3) The singular trajectories remain the same when applying a general state feedback to the control system. Hence they are invariants under the action of the *feedback group*. It turns out that the singular trajectories can be used to generate a *complete* set of invariants. In particular, with the aid of singular trajectories one may compute invariants for the classification of *distributions*.

The book brings together a wealth of results on the topic of singular trajectories and its applications, which for a large part was scattered up to now throughout the literature. Hence the book serves as a very valuable source of information for every researcher interested in these and related areas.

Generally speaking, the book is well-accessible. The goals of the individual chapters and sections are stated clearly. Also, the book contains a large number of useful exercises at the end of every chapter. On the other hand, the present reviewer feels that as a textbook the book exhibits some flaws. First, there is occasional sloppiness in the notation. For example, in Proposition 8 the time-invariant linear system is denoted as $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ and on p. 67 suddenly the alternative nota-

tion $[\vec{F}, \vec{G}] = \vec{G} \circ \vec{F} - \vec{F} \circ \vec{G}$ for the Lie bracket shows up. The English of the book sometimes would have benefited from a closer inspection (cf. "In 1963 was published given an example" on p. 82, "It has in some extend slopped the post-war research in this area" on p. 233). Also its mathematical contents, although generally of an admirable quality, could be improved at some points (e.g. the proof of Proposition 2 does not appear correct, while there are much better, — and more constructive —, proofs for Proposition 8 available in the literature).

Summarizing, the book is a very welcome and useful addition to the literature, especially as a research monograph and source of information and inspiration.

A.J. van der Schaft

P. Erdős, J. Surányi

Topics in the Theory of Numbers

Undergraduate Texts in Mathematics

Berlijn: Springer Verlag, 2003

305 p., prijs €56,66

ISBN 0-387-95320-5

De eerste editie van dit boek verscheen in 1959 in het Hongaars. Volgens het voorwoord was het boek gedurende vele jaren voor veel Hongaarse wiskundigen hun 'eerste wiskundige inspiratie', en met nauwelijks verholten trots vermelden de auteurs dat het boek uit veel bibliotheken verdween. In 1995 verscheen de tweede Hongaarse editie, uiteraard flink uitgebreid. De nu besproken uitgave is de Engelse vertaling van de tweede editie, in 2000 uitgegeven in de serie *Undergraduate Texts in Mathematics* van Springer.

Het boek geeft een inleiding tot de elementaire getaltheorie, en beoogt geschikt te zijn voor onderbouwstudenten met weinig voorkennis. Dat elementaire karakter van de inhoud van het boek zit hem deels in de keuze van de onderwerpen (deelbaarheid, congruenties, rationale getallen en benaderingen, meetkundige methoden, priemgetallen, getallenrijen, diophantische problemen en arithmetische functies, maar bijvoorbeeld geen analytische of algebraïsche getaltheorie). Maar ook de benadering van de stof is elementair: van vrijwel alle gepresenteerde resultaten wordt een volledig en elementair bewijs gegeven, dat zonder veel voorkennis te volgen is. 'Elementair' betekent in dit boek echter niet 'makkelijk'. Een bepaalde wiskundige rijpheid is hier en daar wel nodig om de redeneringen te volgen en triviaal geachte redeneerstappen zelf in te voegen. Voor Nederlandse onderbouwstudenten lijkt het me best een pittig boek. Er zijn veel opgaven, waarvan de moeilijkere met hints.

Veel boeken die een inleiding in de elementaire getaltheorie presenteren, lijken op een bepaalde manier op elkaar. Dit boek is wel apart. Het bevat een heleboel resultaten die in veel andere elementaire boeken niet staan (een willekeurig voorbeeld: overdekkende stelsels congruenties), en het verhaal bewandelt niet altijd de traditionele weg (bijvoorbeeld: diophantische approximatie wordt behandeld zonder kettingbreuken zelfs maar te noemen). Dat maakt het een verfrissend boek.

De auteurs hebben niet de bedoeling veel aan toepassingen te doen, en dat is natuurlijk legitiem. Wel noemen ze de meest in het oog springende moderne toepassing: het RSA-cryptosysteem. Jammer is dat ze daar wel wat laten liggen. De term 'RSA' en de naamgevers Rivest, Shamir en Adleman worden niet genoemd, waar de auteurs verder wel erg zorgvuldig zijn in het toeschrijven

van resultaten aan de juiste personen. Net zo jammer is het dat ze als factorisatiemethode alleen (varianten op) het proberen van alle mogelijke priemdelers lijken te kennen, terwijl de theorie van factorisatie sinds de eerste editie van dit boek bepaald niet heeft stilgestaan.

Ik heb het boek met veel plezier gelezen, en kan het iedereen die getaltheorie leuk vindt (of wil gaan vinden) aanraden. Ook kan ik het aanraden om het boek aan te raden aan studenten. En als u het uit de bibliotheek leent, niet vergeten terug te brengen...

Benne de Weger

J. Banks, V. Dragan, A. Jones

Chaos, a Mathematical Introduction

Australian Mathematical Society Lecture series 18

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

prijs £31,99, 294 pp., ISBN 0-521-53104-7

The dynamical systems discipline deals with time evolutions. It yields models for all kinds of evolution in physics (e.g., mechanics), ecology, economy, meteorology, etc., and also provides a background language. A few popular terms in this respect are: chaos, strange attractor, dimension, Lyapunov exponent. It is seductive to use this language quite heuristically. This is partly due to its direct geometrical nature and to the fact that many things can be easily illustrated on personal computers. Related to this is the fact that many physicists, biologists, etc., have taken part in the conversation. Historically, they have even often taken the lead. Here, I am referring to people like Edward Lorenz, Robert May, Michel Hénon, and David Ruelle, who all came from other disciplines during the 1960's and 70's.

It is somewhat paradoxical that the mathematics of dynamical systems is not at all within easy reach of, say, bachelor students. A few basic ingredients are invariant manifolds, tangent bundles, fractal dimensions, ergodicity, topologies on function spaces, etc., while for computer simulations numerical mathematics is required. Be that as it may, already in the 1980's and 90's Bob Devaney's textbook *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd ed., Addison-Wesley, 1989) was available, which focuses on low dimensional dynamics, also compared with Peitgen, Jürgens, and Saupe's *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science* (Springer-Verlag, 1992). The first part of Devaney's book deals with dynamical systems generated by iteration of maps of the interval, with an 'easy' interpretation in terms of population dynamics. The idea is to avoid the topological and measure theoretical difficulties mentioned before. A general disadvantage of such an approach is that the links with the other sciences are rather invisible.

The book under review is written especially for university students majoring in mathematics, in particular for strong second to average third year students in the Australian curriculum. The book is based on Devaney's. The first chapters only require one-variable calculus, but later chapters require more of an analysis background, as well as the ability to write simple proofs, understand properties of numbers, mathematical induction, composite functions, etc. The authors share the experience with many of us that students often lack the mathematical maturity to write or understand simple proofs. The book explicitly addresses these problems, especially when dealing with the Devaney definition of chaos, chaos on Cantor sets, etc.

The advantage of this set-up is that it is thorough and makes the connection with the rest of mathematics quite clear, both in method and in knowledge. In this way, although at a quite pedestrian pace, part I of Devaney's book is largely covered. Thus, I would recommend giving a course from this book, provided that a follow-up (master) course is available with a larger scope, reaching in the direction of, say, Stewart's *Does God play dice?* (Penguin Books, 1989).

H.W. Broer

J. Matousek

Using the Borsuk-Ulam Theorem

Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry

Universitext

Berlijn: Springer Verlag, 2003 196 p., prijs €42,75

ISBN 3-540-00362-2

Neem eens aan dat je op elk punt van de aarde de temperatuur en druk kan meten. Dan kun je altijd twee antipodale punten vinden (*here and down under*) waar zowel de temperatuur als de druk aan elkaar gelijk zijn. Dit is een direct gevolg van de stelling van Borsuk-Ulam: bij iedere continue afbeelding f van de sfeer S^n in de euclidische ruimte $\mathbf{R}^n$ is er een punt x in S^n zodat $f(x) = f(-x)$.

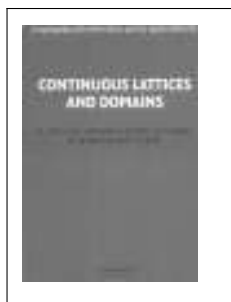
Zoals bij de dekpuntstelling van Brouwer zijn er vele uitspraken die equivalent zijn met de stelling van Borsuk-Ulam, en waarbij de equivalentie ook redelijk eenvoudig is te bewijzen. Bijvoorbeeld, noem f van S^n in $\mathbf{R}^n$ antipodenbewarend indien $f(-x) = -f(x)$ voor alle x in S^n . De stelling van Borsuk-Ulam is equivalent met de uitspraak: *er bestaat geen antipoden-bewarende afbeelding $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$* . Naast de topologisch getinte uitspraken is er ook een belangrijke combinatorische uitspraak die equivalent is met de stelling van Borsuk-Ulam, namelijk het nu volgende lemma van Tucker.

Zij T een triangulatie van de n -dimensionale volle bol B^n zodat de geïnduceerde verdeling op de rand ∂B^n symmetrisch is ten opzichte van O . Als nu λ een labeling van de hoekpunten van T is met de getallen $1, -1, \dots, n, -n$ zodat $\lambda(-v) = -\lambda(v)$ voor ieder hoekpunt van T dat in ∂B^n ligt, dan is er een 1-simplex in T met de eigenschap dat zijn hoekpunten gelabeld zijn met tegengestelde getallen.

Dit alles wordt op heldere en vlotte wijze uiteengezet in de hoofdstukken 1 en 2, waarbij recht wordt gedaan zowel aan de topologische als aan de combinatorische methode. Het benodigde materiaal uit topologie en combinatoriek wordt zorgvuldig verzameld. Dan volgt een hoofdstuk over toepassingen: van ham-kaas-sandwich-stelling tot stellingen van Lovász-Kneser, Dol'nikov en Schrijver. Na een topologisch intermezzo in hoofdstuk 4, volgt er een hoofdstuk over $\mathbf{Z}_2$ -afbeeldingen, de natuurlijke generalisatie van de antipoden-bewarende afbeeldingen. Deze theorie heeft onder andere toepassing bij het onderzoek naar de inbedbaarheid van polyhedra in euclidische ruimten (bijvoorbeeld de stelling van Van Kampen-Flores). In het laatste hoofdstuk wordt deze theorie uitgebreid tot G -ruimten, ruimten waarop een topologische transformatiegroep G werkt.

De opgaven in het boek zijn goed gekozen en instructief. Naast de literatuurlijst en uitbundige index zijn er een korte samenvatting van het boek en aanwijzingen voor enkele van de opgaven. Samenvattend, dit is een uiterst leerzaam, hoogst informatief, buitengewoon helder boek.

J.M. Aarts



G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel,
J.D. Lawson, M. Mislove, D.S. Scott
Continuous Lattices and Domains
Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 93
Cambridge: Cambridge University Press, 2003
591 p., prijs £ 90,00
ISBN 0-521-80338-1

In 1980, the same group of authors published *A Compendium of Continuous Lattices*. A few years later, the *Compendium* was out of print. Since then, many researchers in the fields of order theory, algebra, topology, topological algebras, analysis, and theoretical computer science have cited the *Compendium*, often owned only as a photocopy, as one of the most comprehensive references on continuous lattices.

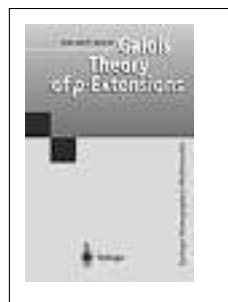
A continuous lattice is a partially ordered set such that every subset has a least upper bound (completeness) and every element can be approximated from below by other elements, in a suitable sense (continuity). For many applications in the area of computing, computability, and semantics of programming languages, the first of the above conditions was too strict, and has been generalized to directed completeness. Continuous directed completed partial orders are referred to as domains.

In this book, the authors succeed in presenting a new long-awaited edition of the *Compendium* containing the original information on continuous lattices reformulated and supplemented in the more general context of domains. Since the literature in this area has grown impressively over the last twenty years, the authors have given up their initial encyclopedic aspiration of the *Compendium*, and have dropped this word from the title of the new edition. The book comprises seven chapters and an introduction to order sets and lattices. The core chapters are Chapter II on the Scott topology, where the Hofmann-Mislove theorem is discussed as well as the Isabel topology for function spaces, and Chapter III on the Lawson topology, which is crucial in linking domains and continuous lattices to topological algebra (extensively treated in Chapters VI and VII). Domain equations for recursive data types, and powerdomains (including the probabilistic powerdomain construction) are discussed in Chapter IV. Almost unchanged with respect to the previous edition, but still excellent, is Chapter V, dealing with the spectral theory of lattices.

The book gives a rather complete picture of the mathematical foundations of the theory of continuous lattices from the concrete point of view of order theory, topology, and algebra, deliberately avoiding the abstraction of category theory. Applications of domains and continuous lattices in the areas of, e.g., logic, lambda-calculus, computational analysis, and semantics of programming languages are not treated in this book.

This excellent book is written with authority, is self-comprehensive, and comprises an extensive bibliography, including references to books, proceedings, articles, dissertations, and memos of the Seminar on Continuity in Semilattices. As with the *Compendium*, it will have considerable influence on all researchers in this area for many years to come. It may be useful for educational purposes, too, if it is complemented with a book with more exercises and more applications oriented to the course needs.

M.M. Bonsangue



H. Koch (vertaald door F. Lemmermeyer)
Galois Theory of p -Extensions
Springer Monographs in Mathematics
Berlijn: Springer-Verlag, 2002,
203 p., prijs €96,25, ISBN 3-540-43629-4

In 1969 schreef I.R. Shafarevich in het voorwoord van het boek *Galoissche Theorie der p -Erweiterungen* van Helmut Koch dat na 25 jaar ontwikkeling de tijd rijp was voor een systematische uiteenzetting van de algebraïsche theorie van p -uitbreidingen. Nu, een dikke dertig jaar later, lijkt de tijd rijp te zijn voor een Engelse vertaling. Franz Lemmermeyer, een bijzonder actieve getaltheoreticus, zorgde voor een prettig leesbare Engelse tekst. Samen met Koch stelde hij bovendien een 'Postscript' samen met een overzicht van relevante ontwikkelingen van na 1970.

Hoogtepunt van het boek is het bewijs van het bestaan van oneindige p -klassenlichamentoren. Onder heel eenvoudige voorwaarden blijkt een getallenlichaam normale onvertakte uitbreidingen te hebben van willekeurig hoge p -macht graad. Het bewijs is een fraai samenspel van de groepentheorie van pro- p -groepen en klassenlichamentheorie.

De eerste zeven hoofdstukken van het boek behandelen in een aangenaam tempo de pro- p -groepentheorie en bijbehorende cohomologie. Met name wordt een verscherping van het Golod-Shafarevichcriterium uit 1964 gegeven: een pro- p -groep met een minimaal aantal van d voortbrengers en r relaties is oneindig als aan de ongelijkheid $r \leq d^2/4$ voldaan is.

Vervolgens wordt de klassenlichamentheorie klaargezet, en toegepast op de Galoisgroep van de maximale normale pro- p -uitbreiding van een lokaal lichaam. Voor een uitbreiding van het lichaam van p -adische getallen van graad n die geen p -de eenheidswortel bevat, is deze pro- p -groep bijvoorbeeld vrij op $n+1$ voortbrengers. Hierna volgt het globale geval: voor een getallenlichaam gaat het om de Galoisgroep van de maximale normale pro- p -uitbreiding die onvertakt is buiten een eindige verzameling van priemenvan het grondlichaam. Het aantal voortbrengers van deze pro- p -groep wordt bepaald, en het aantal relaties begrensd. Onder bepaalde voorwaarden worden zelfs expliciete voortbrengers en relaties gegeven. De oneindige klassenlichamentoren vallen daarna als rijpe vruchten van de boom in hoofdstuk 12.

B. de Smit

Problemen

| Problem Section

This Problem Section is open to everyone. For each problem the most elegant correct solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The judges reserve the right to withdraw the prize if none of the solutions is deemed worthy. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

About once a year there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro.

Both suggestions for problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarchief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this edition is September 1, 2007.

The prizes for the Problem Section are sponsored by *Optiver Derivatives Trading*.



Problem A (Proposed by Vietnam for the International Mathematic Olympiad)

1. Find the largest number c such that all natural numbers n satisfy $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor \geq \frac{c}{n}$.
2. For this c , find all natural numbers n such that $n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor = \frac{c}{n}$.

Problem B (Proposer known to the editors of NAW)

Find polynomials $f(x)$ and $g(x)$ such that

$$\int_0^x \frac{6tdt}{\sqrt{t^4 + 4t^3 - 6t^2 + 4t + 1}} = \log \left(f(x) + g(x)\sqrt{x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1} \right).$$

Problem C (based on the IBM Research February 2007 Challenge)

Consider the following game with persons A and B. Player A receives a random number uniformly distributed between 0 and 1. Player B receives two random numbers uniformly distributed between 0 and 1, and chooses the highest one. Each player can then choose to discard his number and receive a new random number between 0 and 1, in order to get a higher number. This choice is made without knowing the other player's number or whether the other player chose to replace his number. The player with the highest number wins. What strategy should the players follow to ensure they will win the game? What is the probability that person B wins the game? See also http://domino.research.ibm.com/Comm/wwwr_ponder.nsf/challenges/February2007.html

Edition 2006/3

We received two submissions for Problem 2006/3-C. The solution can be found on the internet page www.nieuwarchief.nl/ps/problemen-jun07-2006-3-C.pdf and will be published in a later issue of the Problem Section.

Problem 2006/3-C Consider a triangle ABC inscribed in an ellipse. For given A the other vertices can be adjusted to maximize the perimeter. Prove or disprove that this maximum perimeter is independent to the position of A on the ellipse.

Solution Edition 2006/4

For Edition 2006/4 We received submissions from J. Buskes, Birgit van Dalen, Maarten Derickx, Ruud Jeurissen, Ronald Kortram, Floor van Lamoen, Louis Maassen, H.F.H.

Reuvers, Jaap Spies, Arjen Stolk, Rohith Varma, Hendrik Verhoek, Koen Vervloesem, Rob van der Waall.

Problem 2006/4-A Seventeen students play in a tournament featuring three sports: badminton, squash, and tennis. Any two students play against each other in exactly one of the three sports. Show that there is a group of at least three students who compete amongst themselves in one and the same sport.

Solution This problem was solved by Birgit van Dalen, Maarten Derickx, Ruud Jeurissen, Ronald Kortram, Louis Maassen, H.F.H. Reuvers, Arjen Stolk, Hendrik Verhoek, Koen Vervloesem. The solution below is based on that of Birgit van Dalen.

Lemma Suppose that for any group of n students playing k different sports there is always a subgroup of three students who compete amongst themselves in the same sport. We can show that in any group of $(n-1)(k+1)+2$ students playing $k+1$ different sports there always exist a subgroup of three students who compete amongst themselves in the same sport.

Proof To show this consider one of the $(n-1)(k+1)+2$ students. He plays against each of the $(n-1)(k+1)+1$ other students in one of the $k+1$ sports. Using the pigeonhole principle, there must be a sport he plays against at least n students. If two students in this subgroup of n students compete against each other in this same sport, we have found the triple we were looking for. Otherwise these n students play k different sports, and by assumption there is a subgroup of three students who compete amongst themselves in the same sport.

Any group of three students who compete in only one sport contains a subgroup of three students who compete amongst themselves in the same sport. Using the lemma, we derive that any group of $2 \cdot 2 + 2 = 6$ students who play two sports contains a subgroup of three students who compete amongst themselves in one sport. Applying the lemma once more, we find that a group of $5 \cdot 3 + 2 = 17$ students playing three sports contains a subgroup of three students who compete amongst themselves in the same sport. This problem establishes that the Ramsey number $R_2(3,3,3)$ is at most 17.

Problem 2006/4-B The sequence $\{a_n\}_{n \geq 1}$ is defined by

$$a_1 = 1; a_2 = 12; a_3 = 20; a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Prove that $4a_n a_{n+1} + 1$ is a square for all $n \in \mathbf{N}$.

Solution This problem was solved by J. Buskes, Birgit van Dalen, Maarten Derickx, Ronald Kortram, Floor van Lamoen, Louis Maassen, H.F.H. Reuvers, Jaap Spies, Arjen Stolk, Rohith Varma, Hendrik Verhoek. The solution below is based on that of Floor van Lamoen.

Let $b_n = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 - 2(a_n a_{n-1} + a_n a_{n-2} + a_{n-1} a_{n-2})$. By induction we will show that $b_n = 1$, or equivalently

$$\begin{aligned} 4a_n a_{n-1} + 1 &= 4a_n a_{n-1} + b_n = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + 2(a_n a_{n-1} - a_n a_{n-2} - a_{n-1} a_{n-2}) \\ &= (a_n + a_{n-1} - a_{n-2})^2, \end{aligned} \quad (1)$$

which is clearly true for $n = 2$. Suppose $b_m = 1$, so (1) holds for $n = m$ and $4a_m a_{m-1} + 1 = (a_m + a_{m-1} - a_{m-2})^2$. By the recurrence relation for $\{a_n\}$ we see that $a_m + a_{m-1} - a_{m-2} = a_{m+1} - a_m - a_{m-1}$ so we have

$$4a_m a_{m-1} + 1 = (a_{m+1} - a_m - a_{m-1})^2,$$

which is equivalent to $b_{m+1} = 1$.

Note that the recurrence for going downwards through the sequence is

$$a_{n-3} = 2a_{n-2} + 2a_{n-1} - a_n,$$

so that $b_n = 1$ and (1) hold for the sequence extended in both directions, i.e., for all integers n .

Problem 2006/4-C Let G be a finite group of order $p + 1$ with p an odd prime. Show that p divides the order of $\text{Aut}(G)$ if and only if p is a Mersenne prime, that is, of the form $2^n - 1$, and G is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Solution This problem was solved by Birgit van Dalen, Ruud Jeurissen, Ronald Kortram, Jaap Spies, Arjen Stolk, Rohith Varma, Hendrik Verhoek, Rob van der Waall. The solution below is based on that of Birgit van Dalen.

We suppose that p is odd, and therefore $|G|$ is even.

(1) If p divides the order of $\text{Aut}(G)$, then p is a Mersenne prime and G is isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Suppose that p divides the order of $\text{Aut}(G)$. Then by Sylow's Theorem $\text{Aut}(G)$ contains an element of order p , since p is prime. We may consider $\text{Aut}(G)$ as a subgroup of the permutation group S_{p+1} . The element of order p can then be considered as a cycle of length p . The identity element of G is mapped to itself by every element of $\text{Aut}(G)$. Consequently the cycle of length p contains all other elements of G . Therefore every element of G other than the identity can be mapped onto any of the other non-identity elements by an automorphism of G . This implies that all these elements of G must have the same order.

Since p is odd, the order of G is even. Hence there is an element in G of order 2. But then all elements of G have to be of order 2. The group G has to be Abelian, because $(xy)^2 = 1$, that is, $xyxy = 1$, hence $xy = yx$. Every finite Abelian group is isomorphic to a direct product of cyclic groups. In our case the order of any element is 2. Therefore the cyclic groups are $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ for some n . We find that the order of G is 2^n , hence $p = 2^n - 1$, which is a Mersenne prime.

(2) If p is a Mersenne prime and $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ then p divides the order of $\text{Aut}(G)$.

We consider G as a vector space over $\mathbb{F}_2$. Choose a basis for G . An automorphism of G maps the basis onto a set of n linearly independent elements of G . Each map onto a set of n linearly independent elements corresponds to one automorphism. We will construct all the automorphisms as follows: One by one, we map each element of the basis onto a vector that is linearly independent of the images of the prior elements. In particular, the first element is sent to a non-zero vector. We find that the order of $\text{Aut}(G)$ is

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

Therefore the order of $\text{Aut}(G)$ is divisible by $p = 2^n - 1$.

Birgit van Dalen, Rob van der Waall, and Arjen Stolk all remark that the problem was not entirely correct since G could be the cyclic group of three elements with $\text{Aut}(G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, whereas 2 is not a Mersenne prime.

