

Inhoud

| Contents

- 226 Colofon
- 227 Redactioneel *Derk Pik*
- 228 Agenda
- 230 Nieuws

Oraties | Lectures

- 234 Variatie doet weten *Mark Peletier*
- 242 Een Australische terugblik *Ruth Curtain*

Onderzoek | Research

- 250 Goede kansen *Onno Boxma*
- 254 Kogelwerende wiskunde *Bennie Mols*
- 264 Hoe ontstaan tsunami's? *Marjolein Dohmen-Janssen*
- 274 Roddelende branddetectoren *Bennie Mols*
- 283 Dancing School Problems *Jaap Spies*

Recreatieve wiskunde | Recreational Mathematics

- 258 Sudoku Puzzles and How to Solve Them *Andries Brouwer*

Onderwijs | Education

- 278 Voor de klas en boven de stof *Rob van Oord*
- 286 De opgaven van de LIMO *Jaap Top*

Boeken | Books

- 249 Van Lo Shu tot Sudoku *Ionica Smeets*
- 256 Basisboek Wiskunde *Agnes Verweij*
- 289 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 276 Mathematics in Malawi *Edward Schaefer*
- 294 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (Jaap.Molenaar@wur.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)
Yves van Gennip (y.v.gennip@tue.nl)

Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid, Wendy Ellens, Harm de Vries

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.), Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Klaas Landsman (RU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink, Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105. Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Jan van Mill (VU, ondervoorzitter), Herman te Riele (CWI, secretaris), Fieke Dekkers (RIVM, penningmeester), Wieb Bosma (RUN), Klaas Pieter Hart (TUD), Vivi Rottschäfer (UL), Iris van Gulik - Gulikers (VdCSG)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
1	08-03-2007	
2	08-06-2007	29-01-2007
3	20-09-2007	30-04-2007
4	08-12-2007	30-07-2007

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Als je hier in de natuur dieren ziet lopen, zijn het vaak herten of reeën. In Australië zijn het meestal kangoeroes. Er zijn nog meer verschillen: lees de afscheidsrede van Ruth Curtain op pagina 242.

Nederland en de strijd om het talent

In *The Economist* van 7 oktober wordt een uitgebreide analyse gegeven van de migratie van talent vanuit de hele wereld naar India en China. Het is verrassend dat juist in Amerika dit als een groot probleem wordt gezien, getuige bijvoorbeeld uitspraken van *Intel*-baas Craig Barret in hetzelfde tijdschrift. Tot voor kort waren het vooral gerenommeerde universiteiten in de Verenigde Staten die een enorme aantrekkingskracht uitoefenden op de Aziatische studenten. Is deze migratie dan tot een einde gekomen? Verre daarvan; de Amerikaanse universiteiten vertegenwoordigen nog steeds de top van de wereld. (Zie ook het artikel van Ruth Curtain op pagina 242 van dit nummer.) Het verschil met vroeger is, dat Aziatische studenten nu voor het eerst massaal naar huis terugkeren om thuis hun carrière op te bouwen. De strijd om het talent is globaal geworden.

In deze strijd zijn de hoofdrolspelers de Verenigde Staten, India en China. Het zijn alle drie landen met veel geld, veel mensen en veel mogelijkheden. De problemen waar deze landen mee kampen zijn echter zeer verschillend. Amerika heeft net als Europa te lijden van een *bèta brain drain*, die eigenlijk al begint op de *high school*, waar niet genoeg gekwalificeerde leraren zijn in de harde bètavakken, en ook te weinig studenten bereid zijn om bètavakken te studeren. In India en China zijn er genoeg armere middenklassekinderen die graag wis-, natuurkunde en informatica willen studeren. Net als hier in het begin van de twintigste eeuw is de bètacarrière bij uitstek de sociale route omhoog. Bekend zijn de verhalen van families waarvan één kind als programmeur meer verdient dan de rest van de hele familie bij elkaar. In China is het patentrecht rudimentair en is het eerder gewoon- te dan uitzondering dat intellectueel eigendom wordt gestolen. In het artikel 'De angst voor het weglekken van kennis' (*NRC Handelsblad*, 4-11-2006) beschrijft Hans Buddingh' dat kennisbescherming voor Westerse bedrijven een belangrijke reden is om de *Research and Development* niet naar China te verhuizen, ook al zijn de productielijnen er al wel naar toe verplaatst. India heeft vooral te lijden onder een in verval geraakte infrastructuur en een slecht en ongelijk onderwijssysteem. De grote technische instituten leveren een hoogopgeleide elite, terwijl de graduates van de doorsneeinstituten gewoon niet goed genoeg zijn om aan het werk te kunnen in hun bloeiende high-techindustrie: 17% van hen is werkloos. Welke rol speelt Europa in dit verhaal?

Het is niet verwonderlijk dat allerlei landen proberen aantrekkelijker te worden voor buitenlandse studenten. In Frankrijk is het overheidsbeleid geworden om het aantal buitenlandse studenten van 7% naar 20% te brengen. Singapore is hier al langer mee bezig, en heeft, dankzij zware subsidies, al een vijfde aan buitenlandse studenten verworven. Alleen Europese landen doen hun best om het aantrekkelijker en gemakkelijker te maken voor

hogeropgeleiden om naar hen toe te migreren. Ook Nederland heeft een zogenaamde kennismigrantenregeling; in 2005 zijn er 1393 verblijfsvergunningen verstrekt aan kennismigranten, waardoor zij versneld het land binnen kunnen komen en er vijf jaar kunnen blijven. Er geldt een inkomensdrempel: een migrant tot dertig jaar moet tenminste 30.000 euro per jaar verdienen na de dertig moet het 45.000 euro zijn.

De belangrijkste factor voor de komst van buitenlands talent is echter een goede economie, waar een student ook na zijn promotie mag blijven werken en zich verder kan ontwikkelen. Wat dat betreft zou Nederland wel wat minder zuinig met haar toelatingsbeleid kunnen zijn. Het zal niet lang meer duren en er zullen Europese studenten gaan promoveren aan Aziatische universiteiten. Niet omdat die universiteiten dan al tot de top van de wereld zijn gaan behoren, maar omdat het toegang verschaft tot een nieuwe wereld. Uit onderzoek van Henk Volberda (Erasmusuniversiteit) blijkt het verkrijgen tot die toegang ook precies de drijfveer van bedrijven om innovatie en productontwikkeling naar China en India te verplaatsen, en niet de lage lonen.

Op een aantal universiteiten bestaan er initiatieven tot uitwisseling. In Leiden was er in 2005 een uitwisselingsprogramma waar studenten een maand lang mee konden lopen aan de Universiteit van Shandong. (Ik heb er ook meteen een afstudeerder op afgestuurd; het bleek een verpletterende ervaring.) Dit soort uitwisselingen dragen echter een veel te incidenteel karakter.

Ondanks hun problemen hebben de Verenigde Staten een grote voorsprong met hun gerenommeerde universiteiten en onderzoeksgebieden. De universiteiten zijn vrij in het onderhandelen over hooglersalarissen, waardoor ze veel meer ruimte hebben om te krijgen wie ze willen. Door de particuliere financiering staan ze bovendien veel onafhankelijker ten opzichte van de grillen van de overheid. Ook is er geen land ter wereld waar zoveel geld beschikbaar is voor de uitwerking van nieuwe ideeën.

Dat alles is hier niet. Europa investeert 30% minder in onderzoek dan de Verenigde Staten. De universiteiten lopen aan de leiband van de overheid en kunnen bijvoorbeeld nauwelijks onderhandelen over salaris. Verder is het noodzakelijk om jonge onderzoekers krachtig te stimuleren om naar het buitenland te gaan. Het is duidelijk dat er veel geld bij moet, gewoon om met de research op hetzelfde niveau te komen als de concurrenten. Ik ben ervan overtuigd dat dergelijke inspanningen met rente worden terugbetaald.

Derk Pik
eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
drpik@math.leidenuniv.nl

Agenda

Upcoming Events

december 2006 – januari 2007

19 december

Wiskunde en Computers: zegen of zorg

Studiedag voor wiskundeleraren georganiseerd door het Onderwijsinstituut Wiskunde en Informatica van de Rijksuniversiteit Groningen

plaats Zerniketerrein, Groningen

info www.rug.nl

6 januari 2007

Wintersymposium van het KWG

Onderwerpen: forensisch onderzoek (Jurrien Bijhold), computerondersteunend modelleren in het onderwijs (Elwin Savelsbergh) en diagnostische beeldvorming (Ben ten Voorde)

plaats Universiteit Utrecht

info www.wiskgenoot.nl

8 – 12 januari 2007

Mathematics: Algorithms and Proofs

Seminar over formele bewijzen, constructieve wiskunde en computer algebra

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

16 – 18 januari 2007

32nd Conference on Mathematics of Operation Research

Organisatie: Lodewijk Kallenberg

plaats Lunteren

info www.math.leidenuniv.nl/~stieltjes/activities.html

17 januari 2007

Vijfde Reehorstconferentie wiskunde

Conferentie over trends en ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs in het vmbo en de onderbouw van havo en vwo

plaats Ede

info www.aps.nl

17 – 19 januari 2007

25ste Panama Conferentie

Conferentie over reken- en wiskundeonderwijs

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

19 januari 2007

Lerarencursus Continue kansrekening met integraalrekening

Cursus voor wiskunde D-onderwijs in het vwo

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info www.feweb.vu.nl/link.asp?itemnumber=5135

22 – 24 januari 2007

6th Winter school on Mathematical Finance

Winterschool met als speciale onderwerpen Monte Carlomethoden en portfoliokeuze

plaats Lunteren

info remote.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winterschool.html

26 januari 2007

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Eerste ronde van deze wedstrijd voor scholieren uit de bovenbouw van het voortgezet onderwijs

plaats Deelnemende scholen

info olympiads.win.tue.nl/nwo

29 januari – 2 februari 2007

Studiegroep Wiskunde met Industrie

Wiskundigen werken een week lang aan problemen voorgesteld door bedrijven

plaats Universiteit Utrecht

info www.math.uu.nl/swi2007

februari–maart 2007

2 februari 2007

Dubbeloratie Michel Mandjes, Jan Wiegerinck

Oratie van Michel Mandjes, hoogleraar toegepaste kansrekening en Jan Wiegerinck, hoogleraar analyse en directeur van het Korteweg-de Vries Instituut

plaats Universiteit van Amsterdam

info www.science.uva.nl

2 – 3 februari 2007

Nationale Wiskunde Dagen

Tweedaagse conferentie voor wiskundeleraren over uiteenlopende wiskundige onderwerpen

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: agenda@nieuwarchief.nl

5 – 7 februari 2007

❑ **New perspectives on Games and Interaction**

Vijftien voordrachten over *information flow and reasoning in interaction, complexity and computational of interaction* en *evolution of stability through interaction*

plaats Amsterdam

info www.illc.uva.nl/knaw-ac

21 – 24 februari 2007

❑ **Theory of Cryptography Conference 2007**

Paradigma's, aanpakken en technieken die gebruikt worden om cryptografische problemen te definiëren en op te lossen

plaats Trippenhuys, Amsterdam

info www.cwi.nl/projects/crypto/tcc07

16 maart 2007

❑ **Kangoeroe wiskundewedstrijd**

Europese wiskundewedstrijd voor leerlingen in het voortgezet onderwijs

plaats Deelnemende scholen

info www.math.ru.nl/kangoeroe

16 – 17 maart 2007

❑ **Finale Wiskunde A-lympiade**

Finale van de wiskunde A-lympiade tussen de Duitse, Deense, Antilliaanse en Nederlandse deelnemers

plaats Tulip Inn, Garderen

info www.fi.uu.nl

19 – 21 maart 2007

❑ **Mathematical Methodologies for Operational Risk**

EURANDOM workshop

plaats Eurandom, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

19 – 23 maart 2007

❑ **Two-dimensional Turbulence**

Workshop over turbulentie gericht op het samenbrengen van wetenschappers uit verschillende disciplines

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

20 – 23 maart 2007

❑ **Games, Networks, and Algorithms**

Vierdaagse Eidma en Diamant minicursus door Christos Papadimitriou over speltheorie, netwerken en algoritmes

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

22 – 23 maart 2007

❑ **Nationale Rekendagen**

Jaarlijkse conferentie voor leerkrachten in het basis- en speciaal (basis)onderwijs, georganiseerd door het Freudenthal Instituut

plaats Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen

april–mei 2007

12 – 13 april 2007

❑ **43ste Nederlands Mathematisch Congres**

De Universiteit Leiden en de Technische Universiteit Delft organiseren gezamenlijk het Nederlands Mathematisch Congres 2007

plaats Gorlaeuscomplex, Leiden

info www.wiskgenoot.nl

18 april 2007, 26 april 2007

❑ **De Grote Rekendag**

Twee dagen waarop basisschoolleerlingen op een andere manier dan gewoonlijk de wiskunde ontdekken

plaats Scholen in Nederland en België

info www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag

26 – 27 april 2007

❑ **Dynamics of Patterns symposium**

Symposium over niet-lineaire dynamica en patronen. Opvolger van het Symposium on Nonlinear Systems

plaats Universiteit van Twente

info www.cwi.nl/events/regular/DoP-Days

7 – 9 mei 2007

❑ **Spring Meeting Stochastics 2007**

Bijeenkomst voor kansrekenaars georganiseerd door Ronald Meester

plaats Hilversum

info www.stieltjes.org/activities.html

7 – 11 mei 2007

❑ **Solvability of Diophantine Equations**

Stieltjes en Diamant Onderwijsweek over Diophantische vergelijkingen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

29 – 31 mei 2007

❑ **Wiskunde en Kunst**

Tweede internationale symposium voor interdisciplinaire onderzoekers in wiskunde, de kunsten en wetenschappen

plaats University of Southern Denmark, Odense, Denemarken

info www.macas2.sdu.dk

juni–juli 2007

11 – 15 juni 2007

❑ **Nonlinear Collective Behaviour: Networks, Swarming and Reaction Diffusion Dynamics**

Workshop over interdisciplinair onderzoek op het gebied van niet-lineair coöperatief gedrag in complexe systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

18 – 22 juni 2007

❑ **Random Polymers**

Workshop over modellering van polymeren en het fundamenteel wiskundig onderzoek van deze modellen, voor onderzoekers in kansrekening, combinatoriek en statistische fysica

plaats EURANDOM, Eindhoven

info www.eurandom.tue.nl

25 – 29 juni 2007

❑ **Algebraic Statistics**

Vijfdaagse Eidma en Diamant minicursus over het gebruik van algebraïsche meetkunde, commutatieve algebra en combinatoriek in de statistiek door Seth Sullivant

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma

25 juni – 1 juli 2007

❑ **Innovations in Mathematical Finance**

Workshop over nieuwe wiskundige ideeën en methoden in de *mathematical finance*

plaats Loen, Noorwegen

info www.cma.uio.no/conferences/2007/amamef_workshop.html

2 – 6 juli 2007

❑ **XXVth Journées Arithmétiques**

Bijeenkomst georganiseerd door de School of Mathematics van de University of Edinburgh en The International Centre for Mathematical Sciences in Edinburgh

plaats Edinburgh, Schotland

info www.icms.org.uk/meetings/2007/jarithh

Nieuws

| News

Tweede Mersennepriem voor Cooper en Boone

Het succesverhaal van Curtis Cooper en Steven Boone duurt voort. Beide deelnemers aan de *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS) hebben op 4 september van dit jaar het 44ste Mersennepriemgetal gevonden, nadat ze op 15 december vorig jaar ook al het 43ste hadden ontdekt.

Een Mersennepriemgetal is een getal van de vorm $2^n - 1$ dat tevens priem is. Voor het 44ste Mersennepriemgetal is $n = 32582657$ en het bestaat uit maar liefst 9808358 cijfers, net niet genoeg voor de prijs van \$ 100.000 die de *Electronic Frontier Foundation* heeft beloofd aan de eerste persoon of personen die een priemgetal vind(en) van minimaal tien miljoen cijfers.

Het 44ste Mersennepriemgetal werpt interessante vragen op voor de zoektocht naar nieuwe Mersennegetallen. Het verwachte aantal van dit soort getallen met exponent n , waarbij n tussen twee opeenvolgende machten van 2 in ligt, is namelijk 1,78, met in het verleden een maximum van 3. Het 40ste tot en met 44ste getal hebben echter alle vijf een exponent n tussen 2^{24} en 2^{25} , wat erg opmerkelijk is.

Naast Cooper en Boone worden ook Woltman, Kurowski en anderen verantwoordelijk geacht voor deze nieuwste vondst.

Bron: www.mersenne.org

Willekeur in hogere dimensies op stapel

Hoe kun je een verzameling bollen zo dicht mogelijk in de ruimte plaatsen? Kepler speculeerde al dat in drie ruimtedimensies de configuratie die tegenwoordig *face-centered cubic packing* genoemd wordt, wel eens de optimale stapeling zou kunnen zijn. Via vele tussenresultaten van andere wiskundigen wist Thomas C. Hales in 1998 inderdaad het bewijs van dit vermoeden te completeren. Face-centered cubic gestapelde bollen zien er als volgt uit: de onderste laag bestaat uit rijen bollen die steeds een halve bol ten opzichte van elkaar verschoven zijn. De bollen in de volgende lagen worden in de gaten gelegd die tussen drie bollen in de laag eronder zijn ontstaan.

Maar hoe zit het nu als we in hogere dimensies gaan stapelen? Deze vraag blijkt nog complexer om te beantwoorden en tot nu toe kunnen er alleen grenzen gegeven worden waarbinnen het optimale stapelschema moet liggen. Salvatore Torquato en Frank Stillinger hebben onlangs deze grenzen flink aangescherpt en op basis van hun berekeningen hebben zij het vermoeden geuit dat in hogere dimensies een willekeurige stapeling de dichtste opvulling van de ruimte geeft.

Hun argument, dat gepubliceerd is in *Experimental Mathematics* is nog ver verwijderd van een bewijs, maar het geeft wel aan dat het onderzoek naar dit probleem vierhonderd jaar na Kepler nog altijd niet al zijn geheimen heeft prijsgegeven.

Bron: www.sciencenews.org

Maakt wiskunde ongelukkig?

Wiskunde maakt ongelukkig. Dat zou een eerste indruk kunnen zijn na het lezen van de studie *How Well Are American Students Learning?* van het Amerikaanse *Brookings Institution's Brown Center on Education Policy*.

In deze studie heeft Tom Loveless, directeur van dit instituut, onderzocht of er correlaties zijn tussen het presteren van leerlingen in de wiskunde en het gevoel van geluk en vertrouwen van die leerlingen. Hij heeft hierbij gebruik gemaakt van de studie *Trends in International Mathematics and Science* uit 2003 (zie: nces.ed.gov/timss/resultso3.asp), waarin wereldwijd aan scholieren

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar nieuws@nieuwarchief.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

van 9 tot 10 jaar en 13 tot 14 jaar werd gevraagd of ze wiskunde leuk vonden en of ze er goed in waren. Opvallend was dat de tien landen waar de scholieren het meest van wiskunde genoten, benedengemiddeld presteerden. De tien landen waar de scholieren wiskunde het minste konden waarderen, waaronder Nederland, behaalden daarentegen zeer goede resultaten op wiskundig vlak. Overigens is het wel zo dat, binnen een land, een scholier met meer vertrouwen beter presteerde dan zijn leeftijdsgenootje dat minder zeker in zijn schoenen stond.

Loveless geeft aan dat het zeker niet de bedoeling is om het wiskundeonderwijs zo in te richten dat scholieren er ongelukkig van worden, maar dat er misschien te ver is doorgeschoten in het 'leuk' maken van het wiskundeonderwijs. Zo staan Amerikaanse wiskundeboeken vol met foto's en verhaaltjes die de wiskunde moeten opleuken, terwijl de aandacht wellicht beter op de wiskunde gericht kan worden.

Bron: www.brookings.edu

GQT-cluster 10 oktober van start

Waar willen we heen met de Nederlandse wiskunde? Dat was de onderliggende vraag bij de officiële opening van het laatste NWO cluster *Geometry and Quantum Theory* (GQT). Na lezingen van gastsprekers Pierre Cartier (*Institut des Hautes Etudes Scientifiques*) en Alan Weinstein (*University of California, Berkeley*) volgden de visies van Robbert Dijkgraaf (*Universiteit van Amsterdam*), die nauw betrokken was bij de verwezenlijking van GQT, en minister Maria van der Hoeven.

Robbert Dijkgraaf belichtte de rol van de clusters aan de hand van de initialen OCW. In de 'Wetenschap', de *W* in OCW, moeten de clusters zorgen voor nieuwe leerstoelen en vaste aanstellingen, en buitenlandse onderzoekers aantrekken. Op het niveau van 'Onderwijs' vormen ze de basis voor het nationale masterprogramma in de wiskunde, en kunnen zij het middelbaar onderwijs stimuleren door modules te ontwikkelen en leraren te betrekken bij het onderzoek. Aan de 'Cultuur' kunnen de clusters bijdragen door de wiskunde in de maatschappij een gezicht te geven en burgers de onderzoeksthema's uit te leggen.

Minister Van der Hoeven sprak ook lovende woorden, maar er klonk een waarschuwende toon in door. Ze roemde de wiskunde om haar groeiende rol in het dagelijks leven, maar zag ook de dalende studentenaantallen. In de discussie kwam naar voren dat werkgevers hun onderzoeksafdelingen naar het buitenland verplaatsen omdat ze vacatures in Nederland niet vervuld krijgen. Clustervorming is voor het wiskundeonderzoek ook een overlevingsstrategie, een laatste kans. Met haar aandacht voor zachtere wetenschappen en toepassingen gaf ze aan dat daar, volgens haar, de nadruk moet liggen.

Betrokkenen zijn enthousiast over de nieuwe impuls die de clusters geven. Gezien de overvolle zalen bij de lezingen van de gastsprekers is de wil er wel om ermee aan de slag te gaan. Meer informatie is te vinden op www.gqt.nl.

Rogier Swierstra

Paul Halmos overleden

Op 2 oktober jongstleden is Paul Halmos overleden. Deze in 1916 in Hongarije geboren wiskundige was actief in een verscheidenheid aan wiskundige onderzoeksgebieden zoals kansrekening, statistiek, operatorentheorie, ergodentheorie, functionaalanalyse en logica. In dit laatste vakgebied is hij bekend vanwege zijn polyadische algebra's, een algebraïsche versie van eerste orde logica.

Halmos was zeer bekwaam in het op een boeiende wijze overdragen van wiskunde en won dan ook in 1983 de *Steele Prize* van de *American Mathematical Society* voor zijn vele *graduate texts* en artikelen over het

schrijven, voordragen en publiceren van wiskunde.

In 1985 verscheen een autobiografie, door Halmos zelf liever *autographography* genoemd, over zijn leven als wiskundige, getiteld *I Want to be a Mathematician*. Hierin maakt hij de algemeen geaccepteerde claim de eerste te zijn geweest die de zogenaamde *tombstone* notatie □ gebruikte om een bewijs af te sluiten.

Vanaf 1985 tot aan zijn dood was Halmos gelieerd aan *Santa Clara University*.

Bron: www.ams.org/ams/inmemory.html



Op de hoogte van tonen

In haar proefschrift *The Origin and Well-Formedness of Tonal Pitch Structures* heeft Aline Honingh enkele wiskundige aspecten van de muziek onderzocht. Een van de onderzochte onderwerpen is de gelijkzwevende stemming. Reine intervallen spelen in de muziek een grote rol. Dit zijn intervallen (samenklanken van twee tonen) waarvan de verhouding tussen de frequenties van twee grondtonen een rationaal getal is. Het octaaf, het meest fundamentele reine interval heeft een frequentieverhouding van 2:1. Een ander rein interval is de kwint, met verhouding 3:2. De zuiverst klinkende intervallen zijn de reine intervallen met een eenvoudige breuk als verhouding. Het was al bij de Pythagoreërs bekend dat een stapeling van twaalf kwinten ongeveer zeven octaven opleverde, in getallen: $(3/2)^{12} = 531441/4096$ is ongeveer $2^7 = 524288/4096$.

Met kwint- en octaafstapelingen alleen bereikte men vanzelfsprekend nooit intervallen met andere ratio's dan quotiënten van machten van 2 en 3. Dus een reine grote terts, $5/4$, was ook niet te maken, terwijl dit interval zeer zuiver klinkt. De behoefte ontstond om het octaaf in en gelijk aantal delen op te delen en er vormde zich een rijke wiskundige theorie over het aantal delen, waarin Galilei, Mersenne, Christiaan Huygens en Simon Stevin een belangrijke rol hebben gespeeld. In de praktijk stemde men tot in de negentiende eeuw (vaak zelf) de muziekinstrumenten zo dat ze speciaal geschikt waren voor één stuk, in één toonsoort.

In het proefschrift van Honingh worden verschillende criteria geformuleerd waarmee een goede toonladder, dit is een toonladder waarin vele consonante intervallen en akkoorden zijn te vormen, zich onderscheidt van een slechte. In het bijzonder de eigenschap van compactheid, dat wil zeggen de mate waarin tonen in een toonstructuur dicht bij elkaar liggen, wordt als mogelijke unificerende eigenschap aangedragen die verband legt tussen verschillende toonladders in verscheidene culturen over de hele wereld. De resultaten die Honingh heeft gevonden, past zij toe op de intonatie van akkoorden en de notatie van tonen.

Het proefschrift, waar Aline Honingh op 20 oktober op is gepromoveerd, is te vinden op haar website: staff.science.uva.nl/~ahoningh.

Derk Pik

Onderzoek met de ogen dicht

Het is altijd weer jammer als de enige foto van die bijzondere familie-gelegenheid of die uiterst interessante groep congresgangers verpest wordt doordat er mensen op staan met hun ogen dicht. Deze ergernis behoort nu tot het verleden.

Nic Svenson en Piers Barnes van de *Commonwealth Scientific and Industrial Research Organisation* hebben namelijk onderzocht hoeveel foto's er gemaakt moeten worden van een groep mensen zodat de kans op een foto waarop niemand zijn ogen dicht heeft 99% is.

Uitgaande van specifieke aannames over de frequentie waarmee mensen met hun ogen knipperen, de tijd die een keer knipperen in beslag neemt en de onafhankelijkheid van het knipperen door verschillende mensen, kwamen Barnes en Svenson tot de volgende stelregel: voor een groep van minder dan twintig mensen, kun je het benodigde aantal foto's berekenen door het aantal personen door drie te delen als er goed licht is, en door twee als het licht slecht is.

Dit onderzoek heeft Svenson en Barnes de *Ig Nobelprijs voor Wiskunde* bezorgd, de prijs die jaarlijks in verscheidene wetenschappelijke disciplines wordt uitgereikt door de *Annals of Improbable Research* voor onderzoek dat je eerst doet lachen en vervolgens doet nadenken.

Bron: www.csiro.au en www.kennislink.nl



foto: CSIRO Industrial Physics

Nic Svenson (links) en Piers Barnes tonen zelf het belang van hun onderzoek aan

Bovengrenzen aan het kussen

Bijna driehonderd jaar lang was het onduidelijk wie er gelijk had, Isaac Newton of David Gregory. Die laatste beweerde dat het kusgetal in drie dimensies, dat wil zeggen het maximaal aantal bollen van straal 1 dat de eenheidsbol kan raken zonder te overlappen, dertien was, terwijl Newton volhield dat het toch echt twaalf moest zijn. Pas in 1874 werd door Bender en Hoppe het eerste bewijs gevonden dat Newton gelijk had. In 1953 vonden Schutte en Van der Waerden een eleganter bewijs. Natuurlijk rees toen de vraag wat het kusgetal in andere dimensies is. Bekend was dat het kusgetal in twee dimensies zes is, maar voor uitsluitend over hogere dimensies dan 3 moesten we wachten tot 2003. Toen bewees Musin dat in vier, acht en 24 dimensies het kusgetal gelijk is aan respectievelijk 24, 240 en 196560. Voor andere dimensies kan er hoogstens een bovengrens berekend worden met de methode van Delsarte uit 1970.

Deze bovengrenzen zijn nu flink bijgeschaafd voor vijf, zes, zeven, negen en tien dimensies, via een methode ontwikkeld door Frank Vallentin en Christine Bachoc. Met behulp van representatietheorie en semidefiniet programmeren konden zij de bovengrenzen in deze dimensies omlaag halen. De methoden gaven in dimensies 1, 2, 3, 4, 8 en 24 zelfs de eerder gevonden precieze waarden. Bron: www.kennislink.nl

Turbulentie omtrent Navier-Stokes

In september verscheen er op *arXiv.org* een preprint van het artikel 'Immortal Smooth Solution of the Three Space Dimensional Navier-Stokes System' van Penny Smith, waarin zij claimt het Navier-Stokesprobleem opgelost te hebben. Dit zou betekenen dat opnieuw een van de zeven *Millennium Problems* van het *Clay Mathematics Institute* opgelost is, nadat eerder het vermoeden van Poincaré bewezen werd.

De vergelijkingen van Navier-Stokes beschrijven vloeistofstromingen en het probleem bestaat uit het aantonen van existentie en gladheid van oplossingen in drie dimensies of juist het geven van een tegenvoorbeeld daarvan. Het is bekend dat er in twee dimensies inderdaad gladde oplossingen bestaan, maar in drie dimensies is dit vooralsnog alleen aangetoond voor kleine begindata.

Smith's artikel geeft een bewijs van existentie en gladheid gebaseerd op resultaten die zij verkreeg tijdens haar werk aan het Cauchyprobleem van de Einsteinvergelijking, die een centrale rol speelt in de algemene relativiteitstheorie. Het artikel waarin zij deze resultaten optekende, 'Perron's Method for General Quasilinear Hyperbolic Systems and Immortal Viscosity Solutions of the Einstein Cauchy Problem', bleek echter een fout te bevatten, hoewel het al voor publicatie geaccepteerd was door het *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Wegens deze fout heeft Smith zowel dit artikel als het hierop gebaseerde artikel over de Navier-Stokesvergelijkingen moeten intrekken. Of Smith of anderen de fouten kunnen corrigeren en daarmee het Navier-Stokesprobleem echt kunnen oplossen zal de toekomst moeten uitwijzen.

Bron: comet.lehman.cuny.edu/sormani/others/SmithNavierStokes.html

Wereld der wiskundigen is geen 3-sfeer

In augustus van dit jaar verbaasde Grigori Perelman de wiskundige wereld door de *Fields Medal* te weigeren, die hem werd toegekend wegens zijn bewijs van het vermoeden van Poincaré dat zegt dat elke enkelvoudig samenhangende gesloten driedimensionale variëteit homeomorf is met een 3-sfeer. Het bewijzen van dit vermoeden was een van de zogenaamde *Millennium Problems*, voor het oplossen waarvan het *Clay Mathematics Institute* een miljoen dollar uitgelooft heeft.

Een prioriteitsstrijd over dit resultaat lijkt nu de samenhangendheid van de wiskundige gemeenschap aan te tasten. Eind augustus verscheen in *The New Yorker* een artikel van Sylvia Nasar (bekend als auteur van *A Beautiful Mind* over het leven van John Forbes Nash) en David Gruber over Perelman en de pogingen van Shing-Tung Yau om erkenning te krijgen voor de rol die het werk van twee van zijn studenten, Xi-Ping Zhu en Huai-Dong Cao, gespeeld zou hebben in het tot stand brengen van het bewijs van het beroemde ex-vermoeden van Poincaré. Oneens met de wijze waarop hij geportretteerd werd in dit artikel, heeft Yau inmiddels een rechtzaak tegen *The New Yorker* aangespannen.

Meer informatie is te vinden op www.scientium.com/diagon.alley/commentary/bowden_essays/others/yau.htm.

Bron: www.newyorker.com/printables/fact/o6o828fa.fact2

Onderscheiding voor Marius van der Put

Wiskundige Marius van der Put heeft 11 september uit handen van Jacques Wallage, burgemeester van Groningen, de onderscheiding *Officier in de Orde van Oranje-Nassau* mogen ontvangen.

Van der Put is hoogleraar Onderzoek en Onderwijs op het gebied van de Algebra en Meetkunde aan de Rijksuniversiteit Groningen, waar

hij sinds 1975 werkzaam is, na student, promovendus en onderzoeker-docent aan de Universiteit Utrecht te zijn geweest.

Zijn voornaamste onderzoeksgebieden zijn de rigide analytische meetkunde en differentiaal-Galoistheorie. Over dit laatste onderwerp schreef hij samen met Michael F. Singer de boeken *Galois Theory of Difference Equations* en *Differential Galois Theory*. Van der Put werkt veel samen met wiskundigen van de universiteiten in Lille, Bordeaux, Rennes en Toulouse. In deze laatste stad verwierf hij in 2000 een ere-doctoraat aan de *Université Paul Sabatier*.
Bron: www.rug.nl



Marius van der Put wordt door de burgemeester van Groningen Jacques Wallage onderscheiden tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau.

foto: Jaap Top

Statistiek in het wiskundeonderwijs

Al sinds vele jaren zet de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) studies op die betrekking hebben op aspecten van het onderwijs in de wiskunde. De resultaten van dergelijke studies worden grondig besproken in internationale studiebijeenkomsten, waarna publicatie volgt in de ICMI-studie-serie.

De studie is opgezet omdat de commissie zich zorgen maakt over de inhoud en kwaliteit van het onderwijs in statistiek op de middelbare school. Oorzaken voor het (wetenschappelijk aangetoonde) zwakke onderwijs zijn het gebrek aan training van de docenten. Zelfs veel universitair opgeleide leerkrachten volgden maar weinig statistisch onderwijs en vaak enkel theoretische vakken. Ook vinden de docenten weinig steun in de beschikbare leermethoden vanwege de lage kwaliteit.

De ICMI heeft nu een nieuw onderzoek gelanceerd dat betrekking heeft op de statistiek in het wiskundeonderwijs. De aankondiging van deze voorgenomen studie gaat vergezeld van een discussiedocument en een oproep voor het schrijven van artikelen. Dit document en de oproep zijn te vinden op: www.ugr.es/~icmi/iase.study Wim Kleijne

Alexander Schrijver opnieuw in de prijzen

Aan Alexander Schrijver, Martin Grötschel en László Lovász is op 6 november de *Von Neumann Theory Prize* uitgereikt door het Amerikaanse *Institute for Operations Research and the Management Sciences*. Zij kregen de prijs wegens hun belangrijke bijdragen aan de discrete optimalisering, in het bijzonder hun gezamenlijke werk aan de ellipsoïdemethode van Yudin, Nemirowski en Shor aan het begin van de tachtiger jaren, waarin zij problemen uit de discrete optimalisering met meetkunde wisten aan te pakken.

Alexander Schrijver, werkzaam aan de Universiteit van Amsterdam en het Centrum voor Wiskunde en Informatica, ontving vorig jaar al de Spinozapremie. Meer informatie over de *Von Neumann Theory Prize* is te vinden op www.informs.org.
Bron: www.science.uva.nl

Aantal eerstejaars studenten bedrijfswiskunde in hbo groeit door

In september zijn er 104 studenten aan een bedrijfswiskundeopleiding aan een hogeschool begonnen; vorig jaar waren dat er 95, een stijging van 9%. De groei van de afgelopen jaren zet dus door, al is de situatie bij de afzonderlijke opleidingen wat fluctuerend. De grootste opleiding is die aan de Hogeschool van Amsterdam met 43 eerstejaars studenten. Vorig jaar had deze instelling er 32. Bij Fontys in Tilburg en bij de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden steeg het aantal studenten, bij de Hogeschool Holland in Diemen en bij de Haagse Hogeschool (vestiging Rijswijk) daalde het.
Bron: Klaas-Jan Wieringa

Afrikaans concert rond prehistorisch rekenbeentje

“Dat ga ik morgen op school vertellen” was de spontane reactie van mijn zoontje, met wie ik het concert en de conference *Afrika + Wiskunde* in het Tropenmuseum te Amsterdam bezocht. De voorstelling werd geleid door de populair-wetenschappelijke Belgische wiskundige en publicist Dirk Huylebrouck. De Afrikaanse percussie werd uitgevoerd door de groep *Dakar Electric*.

Huylebrouck leerde de zaal allerlei Afrikaanse rekentrucs: bijvoorbeeld hoe te vermenigvuldigen met de handen of hoe men in Ethiopië snel grote vermenigvuldigingen maakt. Dit ging veelal met proefkonijnen die uit de zaal werden gevraagd. De instructies gingen behoorlijk snel en werden met veel humor gebracht. Na de pauze was het programma gewijd aan mogelijke verklaringen van de aantallen kerfjes in het prehistorisch Ishangobotje van 26.000 jaar oud, gevonden op de grens van Congo en Uganda. Dit wordt door vele archeologen gezien als het oudste wiskundige object. De presentatie en uitleg van dit indrukwekkende object ging gepaard met nogal wat mystificatie; wat mij betreft had een soberder aanpak ook wel gemogen.

De wiskunde van de Afrikaanse muziek betrof het hoorbaar maken van de kleinste gemene veelvoud door polyrythmiek. Ook hier mocht de zaal het zelf proberen. Het was en zeer geanimeerde, leerzame middag.
Derk Pik



Tijdens de voorstelling. Links: Dirk Huylebrouck, achter en rechts naast hem de musici van *Dakar Electric*

Lintjes

Vlak voor het ter perse gaan van dit nummer werd bij de redactie bekend dat, naast Marius van der Put, ook Henk van der Vorst (Universiteit Utrecht) en Piet Hemker (CWI, Universiteit van Amsterdam) koninklijk zijn onderscheiden. Hieraan wordt in het volgende nummer aandacht besteed.
Derk Pik

Mark Peletier

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

m.a.peletier@tue.nl

Inaugurele rede

Variatie doet

De variatierekening kent een reeds lange geschiedenis. Geworteld in de mechanica (principle of least action) en de optica (Fermats principe, het vinden van de kortste weg onder beperkende voorwaarden) heeft het vakgebied in het begin van de twintigste eeuw aan de wieg van de functionaalanalyse gestaan. In de variatierekening bestudeert men functies van functies, en in het bijzonder wordt er vaak naar minimaliserende functies gezocht. In de tweede helft van de twintigste eeuw is het vakgebied opgeschoven richting de differentiaalmeetkunde en nu zijn het vaak topologische problemen die een centrale rol vervullen. Tegelijkertijd heeft de theorie er vele toepassingen bijgekregen, bijvoorbeeld op het gebied van de optimale regeltechniek en de biofysica. Mark Peletier, op 1 augustus 2004 benoemd tot hoogleraar in de variatierekening aan de TU Eindhoven, zet zich in voor de dwarsverbanden tussen wiskunde en praktijk. Ook is hij een warm pleitbezorger voor de universitair geschoolde leraar. In zijn inaugurele rede van 8 september 2006 laat hij zien waar de variatierekening zich nu bevindt.

Ik ga u vandaag vertellen over de twee zaken die mij in mijn werk aan het hart gaan: over onderzoek en over onderwijs. Ik grijp deze mogelijkheid aan om u iets te laten zien van het onderzoek dat we in onze groep doen, van het hoe en van het waarom, van de inhoudelijke en van de menselijke kant. Daarnaast kennen velen van u mijn interesse voor het onderwijs, het onderwijs dat wij hier verrichten maar ook voor het onderwijs elders.

De titel van deze voordracht, *Variatie doet weten*, is multi-interpretabel, en meerdere betekenissen zullen vandaag ook de revue passeren. In letterlijke zin verwijst de titel naar de leeropdracht van mijn eigen hoog-

leraarschap, variationele methoden. Methoden staan niet op zichzelf maar dienen een doel, en dat doel hoort erbij: variationele methoden voor de analyse van differentiaalvergelijkingen. Het vakgebied differentiaalvergelijkingen is enorm groot en heeft uitgebreide en uiteenlopende toepassingen. Binnen dit gebied gebeurt er teveel om op te noemen. Waar ik me op concentreer is waar differentiaalvergelijkingen systemen beschrijven die op één of andere manier complex zijn.

Complexiteit heeft vele gedaanten, die niet altijd overeenkomen met wat we in het dagelijks leven onder complexiteit verstaan. We komen bijvoorbeeld complexiteit tegen in de

vorm van ingewikkelde geometrie, die zich niet eenvoudig laat beschrijven (zie bijvoorbeeld figuur 1). Ik zal daarnaast een voorbeeld geven van een probleem dat heel veel oplossingen heeft — teveel oplossingen om handig te zijn. Hier ligt de complexiteit in de overdaad aan oplossingen.

In mijn werk gebruik ik variationele methoden als gereedschap om dergelijke complexiteit te lijf te gaan, om orde te ontdekken in complexe systemen, met als doel dat soort systemen beter te begrijpen. Ik hoop u in de



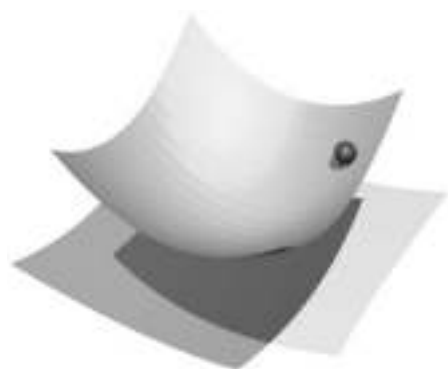
Illustratie: M. Verschuren

Figuur 1 Complexe geometrie

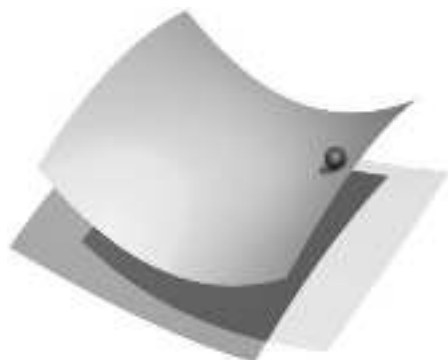


Mark Peletier

weten



Figuur 2 Een lokaal minimum



Figuur 3 Een zadelpunt

loop van deze rede te overtuigen dat variationele methoden daarbij een nuttig instrument zijn.

Energie

Het centrale concept in elke variationele aanpak van een probleem is dat van energie. Het gaat dan om systemen die worden gedreven door energie, dat betekent dat ze een punt van laagste energie opzoeken.

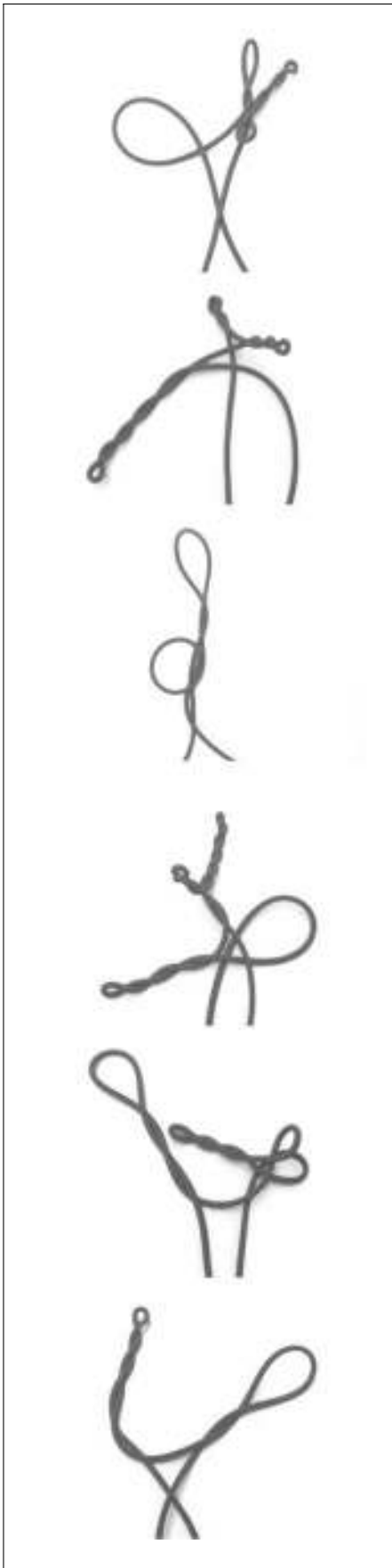
Als ik in de schaal in figuur 2 een balletje loslaat dan rolt het een beetje heen en weer en komt uiteindelijk tot rust in het laagste punt in deze schaal, en dat is een punt van laagste energie. Dat laagste punt noemen we stationair omdat daar het oppervlak lokaal horizontaal ligt. Als je daar een balletje neerlegt blijft het er stil liggen. In figuur 3 is er ook een stationair punt, en als je goed mikt dan kun je daar een balletje op laten uitkomen. Maar als je er een klein beetje naast zit gaat het mis. Daarom noemen we figuur 2, het lokale minimum, stabiel: als je een klein beetje naast het minimum zit rolt de bal weer terug. Het zadelpunt wordt dan onstabiel.

De staaf

Een van de klassieke open problemen in de

mechanica is dat van de elastische staaf waar je aan draait en trekt. Het is een klassiek probleem niet alleen omdat het al lang geleden geformuleerd is, maar ook omdat het model staat voor een hele klasse van problemen. Als je dit probleem kunt oplossen open je de deur naar een grote groep andere.

De vraag is simpel: trek en draai aan een touwtje, wat zie je dan? Als je dit uitprobeert merk je snel dat als je het touwtje maar genoeg draait, het met zichzelf in contact komt. Dit is daarmee een contactprobleem, en die zijn inherent moeilijker dan andere. Dat weten we allemaal wel uit eigen ervaring, zoals wanneer je met een hamer een spijker probeert te raken. Als je wat gaat experimenteren met een touwtje zult je figuren zien als die in figuur 4. Deze zes figuren heb ik in tien minuten gemaakt en gefotografeerd, en u kunt zich voorstellen dat er een schier eindeloze reeks van zulke figuren gemaakt kan worden. Vaak krijg je ook een veel simpeler figuur, zoals in figuur 5: de twee eindjes komen samen, kronkelen als een helix om elkaar heen en eindigen in een lus. De vraag is dan of te begrijpen is wat je ziet. Kun je begrijpen wanneer de ene voorkomt en wanneer de andere? En zou het te voorspellen zijn?



Figuur 4 Zes voorbeelden van lokale minimizers voor het staafcontactprobleem

De staaf die met zichzelf in contact komt, laat zich vrij makkelijk variationeel formuleren. Dat betekent dat de energie eenvoudig op te schrijven is; die is nu niet een functie van de plaats in drie dimensies, zoals in het geval van het balletje, maar een functie van de hele vorm van de staaf. Het betekent ook dat de vormen van figuur 4 en 5 overeenkomen met configuraties waarvoor die energie stationair is, deze keer onder randvoorwaarden. De voornaamste randvoorwaarde in deze situatie is dat de staaf niet door zichzelf heen gaat: dat maakt het probleem tot een contactprobleem. Het karakter van het stationaire punt, of het punt een lokaal minimum is of niet, geeft dan informatie over de stabiliteit van de structuren die we zien. De zes plaatjes van figuur 4 zijn voorbeelden van lokale minima onder randvoorwaarden. Problemen zoals deze blijken veel van zulke lokale minima te hebben en nog veel meer stationaire punten. Die veelheid is wat het probleem tot een complex probleem maakt. De uitdaging is dan om goed om te gaan met deze grote groep stationaire punten.

Een belangrijke speler in de poule van stationaire punten is dát punt waarvoor de energie minimaal is, dat is die toestand met de laagste energie die mogelijk is. Als je een half uurtje met een touwtje speelt, dan vermoed je vrij snel dat die laagste energietoestand er waarschijnlijk eentje is met de vorm van één lange vlecht met aan het eind een lus, zoals in figuur 5. Simpelweg omdat die het meeste voorkomt en het minst makkelijk in iets anders te veranderen is. De wiskundige vraag echter, of de globale minimizers inderdaad van deze vorm zijn, blijkt behoorlijk lastig; voorlopig is deze zelfs geheel buiten ons bereik. Dit is frustrerend: het is een simpel probleem met een eenvoudige formulering, ervaring wijst sterk in de richting van een eveneens simpele stelling, maar we weten werkelijk niet hoe we dit kunnen bewijzen.

Bob Planqué en ik — hij was destijds mijn aio — hebben daarom naar een simplificatie hiervan gekeken: die van een staaf die niet alleen met zichzelf in contact kan komen, maar die tegelijk gedwongen is om overal in contact te zijn met een vaste cilinder (zie figuur 6).



Figuur 5 Een veel voorkomende configuratie. Is het de globale minimizer?



Figuur 6 Een simpeler contactprobleem. De draad is altijd in contact met de cilinder en soms ook met zichzelf; we draaien en trekken aan de uiteinden.

De grijze cilinder in de figuur is gegeven en staat vast; de draad eromheen is waar we aan draaien. En ook hier zien we dat het een contactprobleem is: de rode draad is op sommige plekken alleen in contact met de cilinder en op andere ook met zichzelf. Door de draad te dwingen op het oppervlak van een cilinder te zitten reduceren we het probleem van driedimensionaal, in de vrije ruimte, naar het tweedimensionale oppervlak van de cilinder. Net als in het klassieke verhaal *Flatland* van Edwin Abbott, over een tweedimensionale wereld, maakt dit nogal wat uit: in dit geval zijn Bob en ik zelfs in staat geweest om het gedrag van globale minimizers geheel te beschrijven.



Figuur 7 Een globale minimizer van het contactprobleem

Hoe gaat zo iets in z'n werk? Vaak gebruiken we een bewijs uit het ongerijmde. Stel je wilt laten zien dat de globale minimizer een of andere eigenschap heeft, zeg eigenschap P. Dan beginnen we met de aanname dat hij die eigenschap niet heeft. Met die aanname op zak knutselen we aan de configuratie, een beetje duwen en trekken, zodat we uitkomen op een andere configuratie waarvan we kunnen laten zien dat die een lagere energie heeft. Dat kan niet, want we waren begonnen met de globale minimizer, dus dan is een tegenspraak gevonden. Een tegenspraak met de oorspronkelijke aanname dat de globale minimizer niet eigenschap P heeft; dus concluderen we dat die minimizer eigenschap P wel heeft. Door dit soort argumenten te gebruiken zijn Bob en ik erin geslaagd om de globale minimizer, de configuratie met de laatste energie, in detail te karakteriseren. Hij ziet eruit als in figuur 7: de staaf ligt tegen zichzelf aan in een wikkel en deze wikkel is ook de enige plek waar dat zelfcontact optreedt. De vorm van de wikkel kunnen we in detail beschrijven.

Dit was ongeveer wat we verwachtten, al was het maar door de ervaring van het spelen met een touwtje om onze vingers. Wat ons verraste was de ontdekking dat hoewel de staaf over een lang stuk tegen zichzelf aanligt, hij slechts op een beperkt aantal punten een kracht op zichzelf uitoefent (zie figuur 8).



Figuur 8 Strengen oefenen alleen kracht op elkaar uit bij de aangegeven punten.

Met andere woorden, langs bijna de gehele wikkell liggen de strengen naast elkaar zonder op elkaar kracht uit te oefenen; alleen in de punten die hier met stippen aangegeven zijn is een contactkracht aanwezig.

Dit is een wat bijzondere situatie. Elk van u ondervindt op dit moment ook de gevolgen van een contactsituatie: u zit allen op een stoel, of anders gezegd, de stoel houdt u van de grond. De stoel doet dat door een kracht op uw billen uit te oefenen. Als ik u mag vragen uw aandacht even op uw billen te richten, dan zult u met me eens zijn dat die kracht wel gelijkmatig verdeeld is over het contactoppervlak. Dat zou anders zijn als u op een spijkerbed zou zitten, dan concentreert de kracht zich in enkele kleine punten. Dit stavenprobleem is nu zo bijzonder, omdat het niet de scherpe punten van het spijkerbed heeft, maar wel de gelokaliseerde kracht ervan. Ondanks het gladde oppervlak van de staaf is de kracht sterk gelokaliseerd.

Wat we net gezien hebben is dat we, door gebruik te maken van de variationele formulering en van methoden die daarop geënt zijn, een beetje orde in de complexiteit kunnen scheppen. We kunnen namelijk de globale minimizers, een belangrijke klasse, tot in detail karakteriseren.

Overigens rijst ook nog wel eens de vraag of diezelfde orde niet geschapen had kunnen worden door een numerieke berekening uit te voeren. Computers zijn tegenwoordig heel krachtig, zo gaat dit argument, kunnen we daarmee niet gewoon oplossingen uitrekenen? Het antwoord op deze vraag is: ja en nee. Voor sommige vragen is de computer een uitstekend hulpmiddel, en voor andere simpelweg het verkeerde instrument. Het inzicht dat ik net schetste, over de gelokaliseerde contactkrachten, is met numerieke technieken niet te verkrijgen. Mijn visie hierop is dat we verder komen als we de juiste gereedschappen met elkaar combineren, en dat is ook de gedachte achter het *Center for Applied*

Analysis, Scientific Computing, and Applications (CASA). Dit center is twee jaar geleden opgericht en verenigt de leerstoelen Toegepaste Analyse en Scientific Computing. Door de sterke kanten van toegepaste analyse met de sterke kanten van Scientific Computing te combineren komen we verder dan met elk van de twee afzonderlijk.

Sterke uitspraken met zwakke typeringen

Het volgende verhaal is echt gebeurd. De hoofdpersoon is mijn vrouw Irene, al kende ik haar toen nog niet — ze was op dat moment drie jaar oud. In die tijd waren er metalen prullenbakken waar de naam van de gemeente in het deksel was gestanst.

De opa van Irene dacht: “Dat is een pienter meisje” en schreef het woord ‘Wassenaar’ op een stuk papier. Toen stelde hij de vraag: “Wat staat hier?” Irene kon nog niet lezen en had kunnen zeggen: “Ik heb geen idee, opa, laten we gaan touwtjespringen”. In plaats daarvan antwoordde ze: “Ik weet het niet, maar ik weet wel dat dit ook op de prullenbakken staat”.

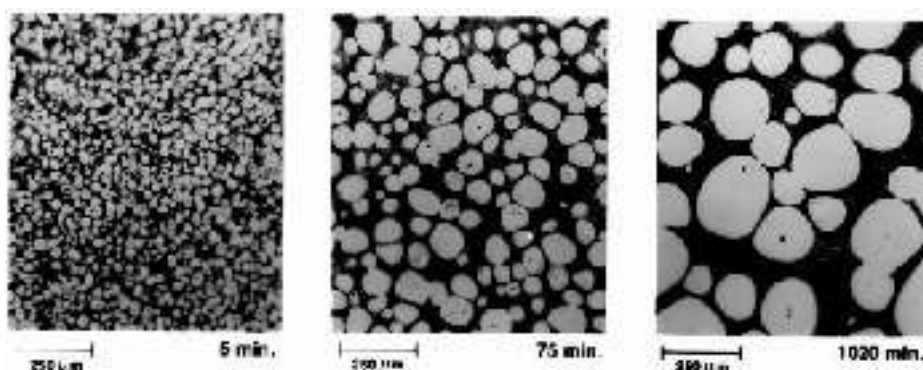
Irene maakte hier een opmerking die ik een *zwakke typering* wil noemen. Het lukte niet om het woord Wassenaar, dat haar opa opgeschreven had, volledig te karakteriseren. In plaats daarvan legde zij een verband met iets anders. Zo’n verband geeft informatie, of je zou zelfs kunnen zeggen, zo’n verband *is* informatie. Dit is een situatie waarin we ons als toegepast wiskundigen vaak bevinden. De vragen die we eigenlijk willen stellen kunnen we bijna nooit beantwoorden. Maar er is een belangrijke kunst, en kunst is hier echt het juiste woord, om goede zwakke typeringen te vinden. Het blijkt vaak zo te zijn dat we met een slimme keuze van die zwakke typering een verrassend sterke uitspraak kunnen doen; maar de keuze van die zwakke typering is daarin cruciaal.

Een klassiek voorbeeld van een zwakke typering is schaaloverbrugging. De luchtmoleculen in deze ruimte zijn te beschrij-

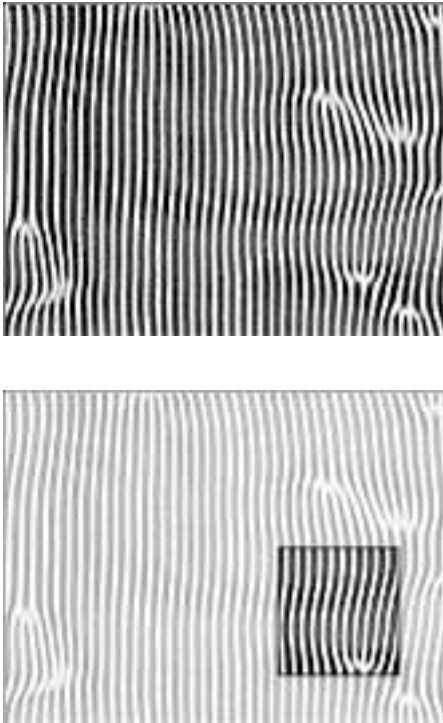
ven met een deeltjesmodel, waarin je van elk molecuul bijhoudt waar het zich bevindt. Door dit deeltjesmodel te middelen krijgen we de vergelijkingen voor de gasdynamica, de Navier-Stokesvergelijkingen. Beide modellen zijn wiskundig gezien niet triviaal, maar het feit dat er een verband tussen deze modellen aangelegd kan worden is een belangrijke vorm van informatie. Variationele methoden blijken bij uitstek geschikt als bron van zwakke typeringen. Een mooi voorbeeld is werk van Kohn en Otto, een paar jaar geleden, waarin zij een energieargument gebruiken om *coarsening* te beschrijven [9]. Figuur 9 toont een materiaal dat op microschaal een mengsel is van twee stoffen. Net als bekende mengsels als melk en boter kan dit mengsel gaan schiften; maar omdat het een vaste stof is en geen vloeistof gebeurt dat schiften op kleine schaal. En dat is het proces wat u hier ziet.

De geometrie van deze situatie is bijzonder complex en daarmee onmogelijk deterministisch te beschrijven. Statistische beschrijvingen zijn er vele, maar deze zijn beschrijvend van aard en niet voorspellend. Wat Kohn en Otto hebben laten zien echter, is dat er uit een combinatie van enerzijds de variationele structuur van de vergelijkingen en anderzijds de schalingseigenschappen van die vergelijkingen een afschatting gevonden kan worden die dit waargenomen gedrag, deze coarsening, beschrijft zonder in detail de geometrie te kennen. Deze methode heeft een deur geopend naar de bestudering van een groot aantal systemen met dit soort complexe oplossingen.

Een ander voorbeeld van een variationele zwakke typering is te zien in figuur 10. Als mensen naar de structuur links kijken zien zij een slecht opgehangen behang: iets wat eigenlijk periodiek zou moeten zijn maar het net niet is. Het wiskundig beschrijven van zulke structuren is een uitdaging: echte periodiciteit is eenvoudig te formuleren, maar zulke bijna-periodiciteit is heel lastig concreet



Figuur 9 Ostwald ripening: een proces van coarsening, waarin kleine aggregaten groeien en samenklonteren (uit [2])



Figuur 10 Een zwakke typering van periodiciteit: de energie in het kleine vierkant bevindt zich op hetzelfde niveau als wanneer de structuur echt periodiek was geweest. Bovendien is dit onafhankelijk van de plaats van het vierkant.

te maken. Alberti, Choksi en Otto hebben in dit geval een zwakke typering gevonden door de energie te bekijken in een klein deelgebied [3]. Zij hebben laten zien dat de energie in een klein deel van het gebied, het donkere vierkantje bijvoorbeeld, vrijwel gelijk moet zijn aan de energie die men zou hebben gehad als de oplossing wel exact periodiek was geweest. Bovendien is dit onafhankelijk van waar het vierkantje gelegd wordt. De energie bevindt zich op hetzelfde niveau als die van een periodieke structuur en is gelijkelijk verdeeld over het gebied. Dit is dus een kleiner broertje, een zwakke typering, van het concept periodiciteit. Het is de afgelopen jaren gebleken dat er een grote variatie te vinden is van dit soort sterke uitspraken met zwakke typering, met name in de studie van complexe systemen. Ook hier geldt dat variatie doet weten.

Biologische membranen

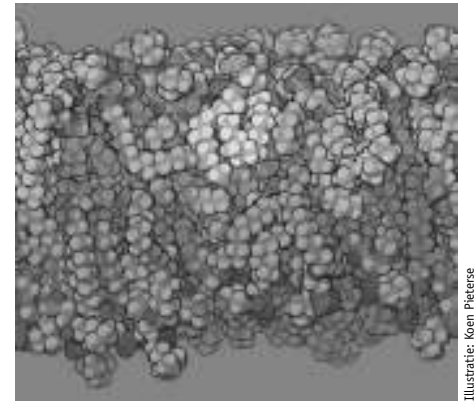
Ik wil als laatste een voorbeeld van zo'n zwakke typering geven dat uit onze eigen stal komt. Ook in dit voorbeeld speelt schaaloverbrugging een rol, maar ik wil u ook laten zien hoe we mechanische eigenschappen op een zwakke manier kunnen beschrijven. Het studie-object betreft biologische membranen. Dit zijn de membranen die elke cel in ons lichaam bijeen houden en daarnaast ook nog allerlei andere functies vervullen. Wan-

neer we inzoomen op zo'n membraan, zoals in de artist impression van figuur 11, dan blijkt dat dat membraan bestaat uit losse moleculen, lipiden, die netjes naast elkaar in dat membraan blijven zitten. Dat ze blijven zitten is bijzonder — de lipiden worden heftig heen en weer geschud door de thermische beweging van de watermoleculen. Dit schudden is voor een deel te herkennen in de numerieke berekening van figuur 12. Als het geen lipiden waren geweest, maar bijvoorbeeld alcoholmoleculen in een glas bier, dan waren ze in een mum van tijd over het hele glas verdeeld.

Dus rijst de vraag waarom deze structuren zo bij elkaar blijven; of, in termen van het model dat we beschouwen, waarom dit soort structuren in dat model bestaan en waarom ze stabiel zijn. Maar er blijkt nog meer aan de hand te zijn. Uit experimenten blijkt het membraan in staat te zijn om weerstand te bieden tegen rek, tegen breuk en tegen buiging. Leg dat naast het feit dat deze membranen bestaan uit losse moleculen zonder enige band met hun burens, dan is dat toch merkwaardig. De vraag rijst nu hoe we kunnen begrijpen dat deze eigenschappen ontstaan uit de microscopische eigenschappen van de lipiden.

De basiseigenschap die verantwoordelijk is voor dit gedrag is wel bekend. De lipiden bestaan uit twee delen, een kop die water aantrekt en twee staarten die water afstoten. Het gangbare argument is dat met deze bilaagstructuur de hydrofobe staarten zich van het water afkeren. De uitdaging is nu om dit wat vage argument wetenschappelijk handen en voeten te geven.

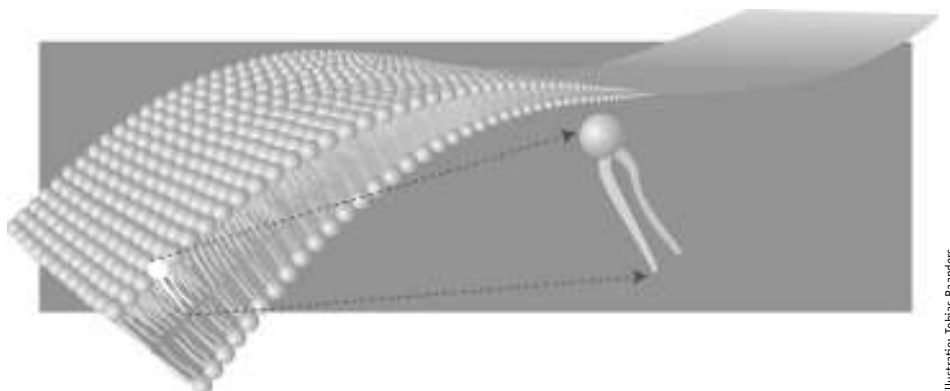
We doen dit door een verband aan te leggen tussen twee beschrijvingen van hetzelfde systeem, één op microscopisch niveau en de ander op macroniveau. Op de microschaal beschrijven we de lipiden met deeltjes en gebruiken een self-consistent mean-field approximation om dit systeem wat te vereenvoudigen. Dat levert, als eindproduct op micro-



Illustratie: Koen Pletense

Figuur 12 Een numerieke berekening van een lipide bilaag

niveau, een vrije energie op, F_ϵ , die een functie is van een kansverdeling ψ op de verzameling van toestanden. Stationaire punten van F_ϵ zijn weer evenwichtstoestanden. De energie F_ϵ heeft een subscript ϵ , en dit is de belangrijke parameter. Grof gezegd is ϵ de dikte van een membraan, en we zullen de limiet gaan bestuderen waarin ϵ klein wordt. Dit kan gezien worden als uitzoomen, en dit uitzoomen is weer een voorbeeld van die schaaloverbrugging die ik eerder noemde. Ik zal niet ingaan op de nog aanzienlijke aannamen die we doen om het probleem te simplificeren, en ook niet op de methode van Gammaconvergentie die we gebruiken om dit resultaat te bewijzen. Laat ik alleen zeggen dat we slechts de tweedimensionale situatie aankunnen. We kunnen dus nog niet spreken over oppervlakken in de ruimte, wat de fysisch relevante situatie is, maar alleen van krommen in het vlak. Maar in deze situatie is het wel gelukt om een mooi resultaat te bewijzen, waarin we feitelijk een reeksontwikkeling afleiden van de energie in de kleine parameter ϵ . De context is die van een membraan in twee dimensies, of, zoals het ook gesteld kan worden, een cilindervormig membraan in drie dimensies. In de limiet $\epsilon \rightarrow 0$ gaat de dikte van dit membraan naar nul en houden we een



Illustratie: Tobias Baanders

Figuur 11 Een biologisch membraan in artist impression

kromme y over in het vlak. De stelling is dat voor kleine ϵ de vrije energie van het membraan zich zo laat beschrijven:

$$F_\epsilon \approx 2 + \int_Y (m-1)^2 + c\epsilon(\#\text{uiteinden}) + \frac{\epsilon^2}{4} \int |y''(s)|^2 ds,$$

Ik zal de termen in deze uitdrukking hier uitleggen. Allereerst is er een term die constant is in ϵ , gelijk aan 2, en hier is meteen te zien dat we in dimensieloze grootheden werken. Vervolgens is er een term, eveneens op het niveau van orde 1, die afwijkingen penaliseert van massa m gelijk aan 1. Voor de interpretatie hiervan kunt u denken aan een elastiekje. Dat is te beschrijven als een lang voorwerp van verwaarloosbare dikte, dus als een kromme, maar het heeft nog steeds een massa per lengte-eenheid. Nog sterker, aan deze massa per lengte-eenheid kan de rektostand worden afgelezen: als ik het elastiekje uitrek, gaat de massa per lengte-eenheid omhoog, omdat ik dezelfde massa verdeel over een langere kromme. Deze term penaliseert afwijkingen van de massa van de waarde 1; dat impliceert dat de limietkromme een voorkeurslengte heeft, net als het elastiekje, en afwijkingen daarvan leiden tot hogere energie.

De tweede term, op orde ϵ , is een penalisatie van het aantal uiteinden van de kromme. De limietkromme kan gesloten zijn, in welk geval deze term verdwijnt; anders heeft het aantal uiteinden een bijdrage in de energie. In de laatste term, tenslotte, komen we de penalisatie van buiging tegen, op orde ϵ^2 . Deze integraal is dezelfde energie die Euler ooit afleidde voor de buiging van een elastische staaf.

De bovenstaande reeksontwikkeling is een belangrijk resultaat. Ten eerste komen de drie soorten gedrag die we wilden beschrijven, rek, breuk, en buiging, hier samen voor. Ten tweede zien we een interessante verdeling van schalen. Als ϵ klein is, is buiging het goedkoopst, in energetische zin; daarna komt breuk (het aantal uiteinden) en daarna rek. Dat betekent dat een membraan liever zal breken dan rekken en liever zal buigen dan breken.

We keren terug naar de oorspronkelijke vraag: hoe kunnen we begrijpen hoe de weerstand tegen rek, breuk en buiging ontstaat uit de eigenschappen van de lipiden? Hoe kunnen we in het complexe gedrag van de lipiden (zie figuur 12) dit relatief simpele, vaststofgedrag herkennen?

Dit resultaat geeft daar een antwoord op.

Ik heb het wiskundige proces dat van model naar resultaat gaat, weggelaten, maar u kunt zich voorstellen dat de details van dat proces informatie geven over waar de verschillende termen vandaan komen. Met die details is het mogelijk om bijvoorbeeld de term die over buiging gaat te koppelen aan bepaalde eigenschappen van de lipiden. Dit resultaat is ook een voorbeeld van het gebruik van variationale methoden. Deze reeksontwikkeling is een reeksontwikkeling voor de energie: we karakteriseren het systeem door de energie te karakteriseren. Het is ook een voorbeeld van schaaloverbrugging, wat tegenwoordig ook wel bekend is als multi-scale analysis.

Multi-scale analysis heeft een interessant geschiedenis, maar een nog veel interessantere toekomst, onder andere vanwege het belang van dit soort zwakke typering. De drie technische universiteiten zijn afgelopen voorjaar een Center of Excellence gestart met als titel *Multi-scale Phenomena*. Binnen CASA zien we hierin prachtige mogelijkheden, te beginnen met de aanstelling van een nieuwe hoogleraar.

Hiermee wil ik het deel van mijn intrede over variationale methoden beëindigen en starten met het tweede onderwerp van mijn rede: het onderwijs.

Onderwijs

Toen ik nog onderzoeker was aan het Centrum voor Wiskunde en Informatica in Amsterdam, was een van de aanlokkelijke aspecten van een overstap naar deze universiteit het feit dat ik mij hier met onderwijs bezig zou kunnen houden. De TU/e heeft op veel manieren met onderwijs te maken: wij geven allereerst zelf onderwijs aan onze studenten, wij borduren daarmee tevens voort op het onderwijs dat deze studenten in het voortraject hebben genoten en wij leiden tenslotte zelf docenten op die in dat voortraject lesgeven. Ik vind dat deze universiteit zich moet inzetten voor kwaliteit in elk van deze drie vormen van onderwijs en deze stelling ga ik nu onderbouwen.

In mijn vakgebied, de wiskunde, heeft de Technische Universiteit Eindhoven met mensen als Seidel en De Bruijn al vroeg een naam gevestigd op het gebied van onderwijs; dat werd onlangs weer bevestigd door het overweldigende enthousiasme waarmee een cd met oude wiskundedictaten, die met liefde en toewijding door Jan de Graaf is samengesteld, binnen en buiten de universiteit werd ontvangen. Dat was het verleden. Sinds mijn komst ben ik onder de indruk geraakt van de kwaliteit van het onderwijs dat door de wiskundegroep wordt gegeven en van de mate

waarin het belang van goed onderwijs door de medewerkers wordt gevoeld. Het verzet dat algemeen leeft tegen het denken in termen van rendementspercentages is daar een goed voorbeeld van.

Wiskunde heeft een uitzonderingspositie in het onderwijsveld, doordat het meer dan elk ander vak aan de basis staat van alles dat we in de bètatechnieksector doen. Het is daarmee een vak dat belangrijk is voor de gehele universiteit, en ik zeg dat niet uit arrogantie, maar uit observatie. De afgelopen jaren hebben alle bacheloropleidingen aan deze instelling meer tijd in het eerste jaar ingeruimd voor wiskunde. Dat is nogal wat. Het dalende niveau van de wiskundige kennis en vaardigheden bij onze instroom wordt blijkbaar bij alle studierichtingen als een nijpend probleem ervaren. Ik wil daarom over de grenzen van deze instelling heen kijken, naar het voortgezet onderwijs, naar de problemen die daar leven, en vooral naar de positie en de rol van docent.

Vakinhoudelijke opleiding van docenten

Iedereen is het erover eens dat het belangrijk is om goede docenten te hebben. Het vergt vele kwaliteiten om een goed docent te zijn; vakinhoudelijke kennis is daar één van. Op dit gebied wil ik hier ingaan.

Uit allerlei onderzoeken blijkt dat het vakinhoudelijke opleidingsniveau van docenten een belangrijke invloed heeft op de kwaliteit van het onderwijs. Smithers en Robinson bijvoorbeeld, hebben in het Verenigd Koninkrijk gekeken naar A-level (eindexamen) cijfers natuurkunde [4]. Zij vinden dat tien procent van de variatie in de gemiddelde cijfers tussen scholen kan worden verklaard uit het niveau van opleiding van de docenten in het vak natuurkunde: dus door het niveau van vakinhoudelijke expertise.

Voor onderzoek van dit type is tien procent overigens een verrassend groot getal; er zijn namelijk zoveel andere factoren die eveneens het gemiddelde cijfer beïnvloeden. Een deel daarvan nemen Smithers en Robinson expliciet mee; deze tien procent is het op-een-na-grootste effect, een groter effect dan het feit of het een witte of een zwarte school betreft, een rijke of arme, een *comprehensive* of een *grammar school*, of dat nu gaat om een meisjes-, jongens-, of gemengde school. De voorspellende waarde van de opleidingsgraad van de docent wordt alleen nog overtroefd door de voorspellende waarde van de leerling zelf: de cijfers die dezelfde leerlingen twee jaar eerder gescoord hebben vertegenwoordigen met vijftien procent een nog grotere voorspellende waarde. Dit is de situatie

aan het eind van het schoolcurriculum. Aan het begin geldt iets vergelijkbaars.

In de VS hebben Hill, Rowan, en Ball gevonden dat een belangrijk deel van de variatie op een rekentoets in groep 3 wordt verklaard door wiskundige kennis van de onderwijzer, op een veel hoger niveau dan wat op de basisschool wordt onderwezen [5].

Als laatste laat ik twee onderzoekers zelf aan het woord: Goldhaber en Brewer hebben gekeken naar wat wij groep 8 en klas 2 en 4 zouden noemen. Zij stellen in [6]: "Students whose teachers possess a B.A. or M.A. in math outperform other students in math." (Toevoeging: met een docent die zowel een BA als een MA in wiskunde heeft, lig je gemiddeld na vier jaar een trimester vóór op leerlingen die niet een dergelijke docent hebben.) Ook zeggen ze: "In mathematics, having a B.A. in education actually has a statistically significant negative impact on scores in math."

Deze onderzoeken tezamen suggereren een belangrijke stellingname: vakkennis is cruciaal; en vooral vakkennis op een niveau dat veel hoger ligt dan het niveau waarop de docent zelf lesgeeft. Wat betekent dit nu voor het voortgezet onderwijs en vooral voor het vwo? In het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs moeten de docenten mensen zijn met een academische opleiding, mensen die de universiteit uit eigen ervaring kennen, mensen met een academisch denken werkniveau. Anders kunnen leerlingen nooit goed voorbereid zijn op de universiteit. En hier wringt nu de schoen.

Het beroep van leraar is hard bezig geen beroep te worden voor academici, zoals Maarten Huygen onlangs opmerkte (zie [7]): van de 20.000 mensen die jaarlijks aan het leraarschap beginnen komt minder dan drie procent van de universitaire lerarenopleiding [8]. De academisch gevormde leraren zijn daarmee een soort die op uitsterven staat: nieuwgeborenen zijn er weinig, de bestaande populatie is sterk vergrijsd en van de paar jongeren emigreert een zorgwekkend groot deel naar banen buiten het onderwijs. Over tien jaar zijn onze studenten opgeleid door docenten die zelf nooit een universiteit van binnen hebben gezien; deze docenten zullen zelf geen master hebben, geen universitaire bachelor, en zij hebben zelfs geen vwo-diploma. Toen zij zelf leerling waren, waren zij daar namelijk niet sterk genoeg voor. Het laat zich raden welk effect deze trend op onze studenten zal hebben.

Laat het duidelijk zijn dat ik de individuele docent, met wat voor opleiding dan ook, van harte steun. Veel docenten spannen zich

met hart en ziel in, om niet te zeggen, werken zich uit de naad, om goed onderwijs te verzorgen. Ze verdienen daarvoor alle lof en alle steun. Waar ik me tegen verzet is ons huidige systeem, waarin we docenten vragen systematisch boven hun niveau les te geven. Dat is een slecht idee.

Alsof het nog niet erg genoeg is dat er weinig jonge academici kiezen voor het leeraarschap, hebben we ook nog eens als samenleving het belang van de opleiding en de vakkennis van docenten verwaarloosd. Sinds het HOS-akkoord in de jaren tachtig krijgen eerstegraads- en tweedegraadsleraren hetzelfde salaris. Met de invoering van de wet *Beroepen in het Onderwijs*, begin dit jaar, kunnen scholen vakoverstijgende teams samenstellen. Dan kan de gymleerling wiskunde geven en de wiskundeleraar gym. Van beide verwacht ik brokken, zij het van verschillende aard.

Overigens zijn de eindtermen voor de hbo-lerarenopleidingen met deze wet geformuleerd in termen van competenties. Dat zijn boterzachte criteria en met de outputfinanciering van de hbo-lerarenopleidingen in gedachten verwacht ik vooral dat deze tot nog meer diploma-inflatie zullen leiden. En waar de gymleerling in het voorbeeld van daar net nog een akte nodig heeft, kan de school sinds de invoering van het nieuwe functiewaarderingssysteem goedkope onderwijsassistenten voor de klas zetten, aan wie geen enkele eis wordt gesteld qua opleiding of diploma.

We zijn feitelijk aangeland in een situatie waarin iedereen voor de klas kan komen, dat de kwaliteiten die een docent bezit, hetzij door talent, hetzij door jarenlange training, inspanning en ervaring, geen rol meer spelen. Geen wonder dat de status van de docent binnen en buiten de school zo laag is. Geen wonder ook, dat academici naar andere banen uitkijken. En dat zal zo blijven totdat we vakkennis en opleidingsniveau weer de status geven die ze verdienen.

De Technische Universiteit Eindhoven

Uiteraard vind ik dat de politiek hier een verantwoordelijkheid heeft en daarmee ook wij als kiezers. Maar ook de academische wereld heeft hierin een verantwoordelijkheid, en aangezien we hier bijeen zijn concentreer ik me op de Technische Universiteit Eindhoven. Ik vind dat deze universiteit zich moet inspannen voor goed onderwijs in het vwo en voor een goede opleiding aan docenten.

Er is al een goed begin:

a. De lezingencyclus binnen het *Pre Univer-*

sity College (PUC) is een handreiking naar scholen. De activiteiten binnen het PUC moeten we zien als marketing: we brengen toekomstige 'klanten' in contact met ons 'product'. Dit is belangrijk, maar het is slechts een deel van het verhaal.

- b. De samenwerking met *Fontys* op het gebied van de eerstegraadslerarenopleiding is een uitstekend initiatief. Binnen deze samenwerking gaat de TU/e de vakinhoudelijke kwaliteit borgen. Dit moet ertoe leiden dat het niveau van inhoudelijke scholing van de Fontysafgestudeerden stijgt. Dit is heel hard nodig. Vanuit nationaal perspectief kan ik het belang van deze samenwerking niet genoeg onderstrepen.
- c. Bij vrijwel alle faculteiten bestaan allerlei kleinere initiatieven, zoals masterclasses, voorbeeldlessen, diverse samenwerkingen en nog veel meer. Deze moeten we vooral aanmoedigen en ondersteunen.
- d. Over de instaptoets is veel te doen geweest. Het is belangrijk om die zo te presenteren dat de student niet het gevoel krijgt verantwoordelijk te worden gehouden voor de fouten die bestuurders hebben gemaakt. Maar binnen deze randvoorwaarde pleit ik ervoor om hier vooral mee door te gaan. Het politieke signaal dat het niet goed gaat met het onderwijs in het vwo moeten we blijven geven.
- e. *Wortel TU/e* is een project om studenten en leerlingen via een webinterface sommen te laten maken. Een mogelijkheid die zich hiermee voordoet is dat leerlingen al vóór het eindexamen, de instaptoets op school kunnen uitproberen. Dit brengt de vraag of het vwo voorbereidt op het wetenschappelijk onderwijs hopelijk ook onder de aandacht van de docent.

Maar we kunnen verder gaan. Leiden en Utrecht bieden aan de betere vijfde- en zesdeklassers intensieve programma's aan, in de orde van twee dagen per week. Dit is geen wervingsactiviteit, maar een investering in het nationale onderwijs waarmee het kortetermijnbelang van de universiteit maar heel beperkt wordt gediend. Op de lange termijn, daarentegen, is zowel de bemoeienis zelf, als het signaal dat bemoeienis nodig is, van groot belang.

Wat ik hier beschrijf zijn maatregelen die de TU/e autonoom kan invoeren en dat voor een groot deel al doet. Dat is mooi, maar nog niet genoeg. Veel van de problemen in het onderwijs kunnen alleen op nationaal niveau worden aangepakt. Ik wil hier nog één idee neerleggen voor een dergelijke maatregel op nationaal niveau.



Illustratie: Ruben Oppenheimer

Certificatie

Ik zei net dat over tien jaar het merendeel van de leerlingen in het pre-academisch onderwijs, het vwo, zal worden opgeleid door docenten die nooit langs de universiteit gekomen zijn, daarmee niet universitair zijn opge-

leid, en ook niet op hun academische kwaliteiten zijn geselecteerd. Met deze situatie doen we de leerlingen en de maatschappij tekort.

Ik zie maar één uitweg hieruit: dat de universiteiten in samenwerking met de vakverenigingen een systeem van certificatie opzetten, gefaciliteerd door een vorm van nascholing. De nascholing moet wel van een ander type zijn dan wat nu gebruikelijk is — het moet intensieve en vakinhoudelijke nascholing zijn, verplicht voor alle docenten, afgesloten met een examen waar je ook voor kunt zakken én de resultaten van dit examen moeten openbaar zijn. Een dergelijk certificatiesysteem dient meerdere doelen tegelijk. Vak-kennis wordt zichtbaar, voor de docent, de school en de ouder; de innige koppeling tussen vakinhoudelijke kennis en kwaliteit van het onderwijs wordt benadrukt; en uiteraard heeft een dergelijk systeem ook een selecterende werking en stimuleert het mensen om

zich te verbreden en verdiepen. Al deze effecten verhogen de status van het beroep en maken het aantrekkelijker voor academici. Zo'n certificatiesysteem vereist gezamenlijke actie van de universiteiten, de vakverenigingen en de wetgever. Met name die laatste, de wetgever, is een trein die op dit moment de andere kant op denderd, naar meer vrijheid en blijheid voor alle betrokkenen. Een dergelijk systeem staat dus niet morgen op de rails. Maar als academisch instituut hebben wij de verantwoordelijkheid om verder te kijken dan morgen. Het probleem van het gebrek aan academisch geschoolde leraren gaat niet weg als wij er niets aan doen.

Ik heb met opzet niets gezegd over de kennisamenleving, over innovatie, en hoe het kabinet daar tegenaan kijkt. Dat zou te gemakkelijk zijn. Maar kijk wat dat betreft eens naar de komische kanttekening van Ruben Oppenheimer die mijn mening hierover heel aardig verwoordt.

Referenties

- 1 R.V. Kohn, F. Otto, 'Upper Bounds on Coarsening Rates', *Communications in Mathematical Physics* **229**, (2002), pp. 375–395
- 2 S.C. Hardy, P.W. Voorhees, 'Ostwald Ripening in a System with a High Volume Fraction of Coarsening Phase', *Metallurgical Transactions A* **19A** (1988), pp. 2713–2721
- 3 G. Alberti, R. Choksi, F. Otto, *Uniform Energy Distribution for Minimizers of a Nonlocal Functional*, in preparation
- 4 A. Smithers, P. Robinson, 'Physics in Schools and Colleges', <http://www.buckingham.ac.uk/education/research/ceer/pdfs/physicsprint.pdf> (2005)
- 5 H. C. Hill, B. Rowan, D. L. Ball, 'Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement', *American Educational Research Journal* **42**, (2005), pp. 371–406
- 6 Goldhaber, Brewer, 'Teacher Licensing and Student Achievement', *Better Teachers, Better Schools*, Thomas B. Fordham Foundation, www.edexcellence.net/foundation/publication/publication.cfm?id=15 (1999)
- 7 M. Huygen, 'Leraar is helaas geen vak meer voor academici', *NRC* (27 mei 2006)
- 8 Zie voor de aantallen docenten pagina 20 van de Nota Werken in het Onderwijs 2006 van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen, en voor de aantallen ULO-afgestudeerden de onderwijsvisite 2003, www.qanu.nl/comasy/uploaded-files/RapportULOdef.pdf
- 9 Zie voor de aantallen docenten pagina 20 van de Nota Werken in het Onderwijs 2006 van het Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen, en voor de aantallen ULO-afgestudeerden de onderwijsvisite 2003, www.qanu.nl/comasy/uploaded-files/RapportULOdef.pdf

Ruth Curtain

University of Groningen
Department of Mathematics
P.O. Box 800
9700 AV Groningen
r.f.curtain@math.rug.nl



Ruth Curtain

Afscheidsrede 29 jaar Rijksuniversiteit Groningen

Een Australische terugblik

Op 12 september van dit jaar sprak Ruth Curtain haar rede uit bij haar afscheid als hoogleraar systeem- en regeltheorie aan de Groningse universiteit. Geboren in 1941 in Melbourne, Australië, behaalde ze haar Masters' degree aan de universiteit van deze stad. Vervolgens voerde haar academische carrière haar over de hele wereld: een wereld die in deze periode in allerlei opzichten sterk veranderde. In onderstaande rede beschrijft ze deze reis en staat ze uitgebreid stil bij haar positie als vrouw in de bètawereld, maar ook op de vele verschillen tussen de Angelsaksische en Nederlandse tradities.

Zoals de titel aankondigt, heb ik 29 jaar aan deze universiteit gewerkt. Om mijn ervaringen hier in perspectief te plaatsen, lijkt het mij zinvol om iets te vertellen over de jaren daarvoor.

Waar kom ik vandaan?

Ik kom uit Australië, in 1950 een land met acht miljoen inwoners, nu zijn het er twintig miljoen. Het donkergrijze vlekje Nederland (zie figuur 1) had in 1950 een bevolking van tien miljoen en nu zestien miljoen. Rechtsonder op deze kaart ziet u Melbourne, mijn geboortestad, toen een stad van een miljoen inwoners en nu meer dan drie miljoen. Mijn ouders trouwden in 1938 toen mijn moeder net geen 18 was en mijn vader 28. Hij was huisschilder en mijn moeder verkoopster. Hij was rooms-katholiek en zij was protestants, wat toen ook in Australië omstreden was.

Ik was het eerste kind, maar binnen zes jaar waren dat er vier en dat bleef zo. Volgens de toenmalige gewoontes bleef mijn moeder thuis om voor ons te zorgen en zij zorgde ervoor dat wij altijd identiek gekleed gingen, en niet alleen op de foto (figuur 1). Misschien daarom vond ik het nooit een probleem om het schooluniform te dragen; integendeel, ik was er trots op. We bleven

de hele dag op school en ik heb vele gelukkige herinneringen aan de lunchpauzes op het schoolplein, waarin we ons met allerlei spelletjes amuseerden. De lunchpauzes werden ook gebruikt om voor teamsporten te oefenen. Teamsport vormde een integraal onderdeel van het curriculum en in figuur 2 ziet u een foto van ons succesvol derde basketbalteam. Onze coach leerde ons ook euclidische meetkunde. Ik was beslist geen sportster, maar ik vond het geweldig om mee te doen. Je leerde samen als team op te treden en sportwedstrijden tegen andere scholen creëerden een samenhangigheidsgevoel en versterkten de identiteit van de school.

Ik had het geluk de laatste vier jaar van mijn schooltijd op een van de beste openbare vwo-scholen in de stad, *University High School*, door te brengen. In figuur 2 rechtsboven en -onder ziet u dat we een uniform voor de zomer hadden en een voor de winter; wat u niet ziet zijn de strohoeden voor de zomer en baretten en handschoenen voor de winter. Van al deze foto's zou u denken dat ik naar een meisjesschool ging. Dat was niet zo, maar de klassen en de speelplaats waren wel strikt afgescheiden. Pas gedurende de laatste twee jaar wanneer men voor een hoofdrichting moest kiezen waren de klassen ge-

mengd en zelfs dan waren de zalen door een onzichtbare lijn gescheiden. Volgens de Britse traditie hadden we *prefects* die het goede voorbeeld dienden te geven en als doorgeefluik tussen de andere leerlingen en de leraren te fungeren. Er waren ook prijzen bij de uitreiking van de *Dux of School*. (De Dux of School wordt uitgereikt aan de student met de hoogste cijfers in het laatste schooljaar). Interessant genoeg waren dat drie jaar achter elkaar meisjes die een 'science major' hadden gekozen, maar ik was de enige die de harde bèta richting had gekozen (zie figuur 2 midboven). Maar vergis u niet, de sterren van de school waren de topsporters en het regende sportprijzen! De topevenementen van het jaar waren de dagen met zwemtoernooien en de atletiekwedstrijden tussen de scholen. Zo werd de teamgeest van de school versterkt.

Hoe dacht men toen over meisjes en exact? Dat is een ingewikkeld onderwerp en ik zal volstaan met drie anekdotes uit mijn verleden.

Tijdens mijn jeugd vonden Australiërs uit alle milieus onderwijs erg belangrijk, alleen wat voor meisjes geschikt werd gevonden was anders dan wat men voor jongens geschikt vond. De hoofddoelstelling voor meisjes was een goed huwelijk aan te gaan. Als het meisje uit een beter milieu kwam, was een dure kostschool gevolgd door een universitaire opleiding zeer geschikt, maar voor een meisje uit een arbeidersmilieu was dit weggegooid geld; ze gaat toch trouwen. Veel beter was het om een opleiding als secretaresse of als verpleegster te volgen, maar deze kostten ook geld. Tegen deze achtergrond vond mijn



Figuur 1 Links de vier kinderen Curtain, middenboven: Ruth Curtains ouders (1938), middenonder: Ruth Curtain op tweejarige leeftijd, rechts: Europa in Australië

vader dat ik als veertienjarige de school zou moeten verlaten om de kost te verdienen. Er was maar één persoon uit de hele vrienden- en familiekring die hier tegen was: mijn moeder. Zij vond het huwelijk ook het ideaal, maar, ze vond het ook belangrijk dat mijn zussen en ik iets zouden hebben waar we “op terug konden vallen”. Mijn moeder kon erg goed ruzie maken. Dus mocht ik doorgaan en elk jaar wanneer mijn vader er opnieuw over begon, kwam ze met het smoesje dat als ik vroegtijdig de school zou verlaten ik al mijn gewonnen beursgeld voor boeken zou moeten terugbetalen. Ik mocht dus de school afmaken en mijn zussen na mij ook.

In de laatste twee jaar van school waren er twee vakken wiskunde; zuiver en toegepast. Het laatste werd als het moeilijkste ervaren; het ging over mechanica. Bij een voorlichtingsbijeenkomst heeft de leraar Mr. Tyler de meisjes dat vak afgeraden want “de meeste meisjes zouden toch zakken”. Er werd ook verteld dat hoewel jonge meisjes soms op school zouden uitblinken, bij volwassenheid hun prestaties snel achteruit zouden gaan. Ik was daar werkelijk bang voor, maar het heeft mij aangespoord om harder te studeren.

Tentamens waren erg belangrijk en de cijfers (tot 100) werden voor de klas voorgelezen en je moest naar voren komen om je tentamen van de leraar op te halen. Mr. Coburn, de leraar zuivere wiskunde, las de cijfers voor en nadat een jongen met brede glimlach zijn tentamen met het cijfer 100 had opgehaald, viel er een tamelijk lange pauze. Toen las Mr. Coburn met een brede grijns voor, “Ruth Curtain 110” en hij bleef maar stralen. Ik probeerde

zonder te veel te glimlachen mijn tentamen op te halen, want meisjes hoorden verlegen en bescheiden te zijn. Mijn vrienden zouden het moeilijk geloven, maar dat heb ik erg lang volgehouden, met moeite wel te verstaan.

Naar de universiteit

Alle leerlingen in de provincie Victoria deden dezelfde eindexamens die ook dienden als toelatingsexamens tot de universiteit. Er waren eerste en tweede klas *honours*, voldoende en onvoldoende en natuurlijk ook rangordes en prijzen. Een redelijk percentage kreeg vrijstelling voor het collegegeld, maar niets extra's om van rond te komen. In die tijd was er een tekort aan leraren en de provincie probeerde meer potentiële leraren te lokken met een aantrekkelijke studiebeurs gedurende de hele vier- of vijfjarige studie. De voorwaarde was wel dat je na je universitaire studie drie jaar lang als leraar moest werken. Zo kon ik studeren en tegelijkertijd de kost verdienen. Ik vond het een privilege en een groot avontuur om naar de universiteit te mogen gaan.

Tijdens het eerste jaar had ik twee wiskunde vakken (weer zuiver en toegepast), scheikunde en mijn favoriete vak, natuurkunde. In het tweede jaar moest je één vak laten vallen en dat werd scheikunde. Het onderwijs was vrij massaal met tweehonderd à driehonderd studenten in de zaal, behalve voor wiskunde. Er was een aparte *honours*-stroom wiskunde voor de betere studenten en de *honours*-groep van vijftig werd vrij snel een groep van tien. Tentamens waren aan het eind van elk jaar en je kreeg eerste en tweede klas *honours* etc. en prijzen voor het hoogste cijfer. De rang-

orde was openbaar, maar in plaats van jouw naam stond er een nummer. In het derde jaar volgden studenten slechts één hoofdvak en ik vond de beslissing tussen theoretische natuurkunde en wiskunde erg moeilijk. Het liefst had ik het natuurkundepracticum laten vallen, maar dat practicum van twintig uur in de week was helaas verplicht. Wat speelde bij mijn beslissing?

Hoewel je als studente gelijk werd behandeld, was het in die tijd kristalhelder dat het voor een loopbaan anders zou liggen. Mannen dienden de voorkeur boven vrouwen te krijgen, niet alleen om dat ze slimmer waren, maar ook omdat ze een gezin moesten onderhouden. Ook daarom kregen ze voor hetzelfde werk in de meeste banen (zelfs als leraar) een hoger loon dan vrouwen. Getrouwde vrouwen mochten een tijdelijke aanstelling bij de overheid houden, maar geen vaste aanstelling en zonder recht op pensioenopbouw. Hierbij moeten we niet vergeten dat de meeste vrouwen het daar helemaal mee eens waren. Zo was het toen.

Dit speelde allemaal mee in mijn beslissing om als specialisatie in het derde jaar wiskunde te kiezen. Er waren weinig posities voor theoretische natuurkundigen en bij wiskunde werkte tenminste een aantal vrouwen, hoewel beslist geen rolmodellen voor jonge vrouwen: eerder het boegbeeld. Maar meteen in de eerste week miste ik de ontgisting van de geheimen van de wereld om ons heen die ik in natuurkunde vond. Ik veranderde mijn keuze in natuurkunde. Tot mijn verbazing werd ik opgeroepen om op bezoek te gaan bij de voorzitter van wiskunde,



Figuur 2 Linksboven: basketbal op Moreland Central, middenboven: Dux University High School (UHS), middenonder: sporttoernooi op UHS, rechts: UHS klas 3 en 5

Professor Cherry. In die tijd was de afstand tussen docent en student erg groot. Hij stelde een compromis voor; ik zou zuivere wiskunde als extra vak naast natuurkunde in mijn derde jaar kunnen volgen en de rest van de wiskunde in het vierde honours jaar afmaken. Zo geschiedde het. Aan het eind van twee overbeladen jaren was ik helemaal uitgeblust en ik zocht wat afleiding. Mijn oog viel op een advertentie in de dameskleedkamer. Virginia Sikorskis zocht een reisgezel om twee maanden lang rond Australië mee te liften. Dat was niet mijn eerste liftvakantie, maar met meer dan 11.000 km werd het wel de langste (figuur 3 rechts).

Daarna zou ik leraar worden en met tegenzin volgde ik een eenjarige lerarenopleiding. Achteraf gezien was het wel een waardevol jaar met algemene vakken als filosofie, psychologie, vergelijkingen van onderwijssystemen in andere landen en de geschiedenis van het onderwijs in eigen land. De didactiek en vooral de stages op scholen waren ook leerzaam. Ik had het geluk dat ik mijn drie jaar in het onderwijs mocht uitzitten als 'tutor' op de universiteit, wat mij de gelegenheid gaf om mijn Master's degree te behalen. Ik koos een onderwerp uit de algebra, maar helaas vond ik onderzoek daarin helemaal niet zo boeiend als ik had verwacht. Ik miste de motivatie vanuit de fysische wereld. Toch hield ik vol en keek rond naar andere mogelijkheden. Toevallig kwam dat door mijn vriendje die in een overheidslaboratorium werkte en in zijn werk regeltheorie toepaste. Hij was er helemaal weg van en ik werd ook aangestoken door zijn enthousiasme.

In die tijd was het nog traditie en bon ton om in Oxford of Cambridge in Engeland te promoveren. Maar omdat het vak optimale besturingstheorie in de Verenigde Staten bloeide, kozen wij Brown University (figuur 4). We hebben allebei een studiebeurs en een *Fullbright*-reisbeurs ontvangen. De sfeer op Brown was veel competitiever dan wij gewend waren en we hadden eerst het idee dat de andere studenten veel meer wisten dan wij. Gelukkig gaven onze tentamencijfers ons zelfvertrouwen terug. Brown was een prachtige keus want veel van de pioniers van optimale besturingstheorie en de moderne regeltheorie waren daar; La Salle, Hale, Wonham, Falb, Fleming en Kushner en zij trokken andere coryfeeën aan als bezoekers, in het bijzonder, de Russische auteurs van het baanbrekende boek over het maximumprincipe van Pontryagin. In 1969 promoveerde ik op het onderwerp *Stochastische Partiële Differentiaalvergelijkingen* onder de begeleiding van Peter Falb (figuur 4). Onder de voorwaarden van de *Fullbright* beurs mocht ik achttien maanden ervaring opdoen voordat ik terug naar eigen land hoorde te gaan. Dit deed ik op *Purdue* te midden van de maïsvelden. Het is verbazingwekkend hoeveel mensen ik later ben tegengekomen die daar ook voor korte tijd zijn geweest. Na vijf en half jaar afwezigheid ging ik terug naar Melbourne, maar alleen op bezoek. Ik wilde meer van de wereld zien en dat werd de *University of Warwick* waar ze een nieuw 'Control Theory Centre' hadden opgezet. Larry Markus was de directeur en met Patrick Parks, Tony Pritchard en een aantal postdocs organiseerden we elk jaar een thema binnen de

regeltheorie met bezoekers en een conferentie. Ons hoofdthema was oneindigdimensionale systemen en de samenwerking met Tony Pritchard was erg vruchtbaar. Squash was ook erg goed.

Waarom ben ik naar Groningen gekomen?

Hoewel ik na zes jaar nog altijd volop van mijn leven en werk op de University of Warwick genoot, had ik ambities om meer dan 'lecturer' te worden. Op dat moment waren de mogelijkheden voor promotie daar niet direct aanwezig en ik was al bezig met mogelijkheden in Australië, Canada en de Verenigde Staten te onderzoeken. Toevallig kwam rond deze periode een positie als lector in Groningen vrij. Ik had mijn cv al klaar liggen en ik dacht dat het in ieder geval aardig zou zijn om daar op bezoek bij Jan Willems te gaan. Op een druilerige dag heb ik mijn sollicitatiegesprek gehad en na afloop een diner in *Salle à Manger*, voor enkele jaren een van de beste restaurants in Groningen. Om eerlijk te zijn had Groningen niet zo'n verpletterende indruk op mij gemaakt. Maar het aanbod was erg aantrekkelijk en ik dacht dat voor vijf jaar het een goede ontwikkeling in mijn carrière zou bieden.

Hoe komt het dat ik nog steeds hier zit?

Is het omdat ik van de stad ben gaan houden? Is het omdat ik fietsen op het platteland zo fijn vind? Is het omdat ik hier zoveel dierbare vrienden heb gemaakt?

Welnu: in de eerste plaats komt het door de stormachtige ontwikkelingen op mijn vakgebied systeem- en regeltheorie in Nederland. In Groningen hadden we toen een instroom



Figuur 3 Links: University of Melbourne waar Ruth Curtain haar Masters' degree heeft behaald, rechts: 1100 kilometer liften door Australië

van rond de zestig enthousiaste eerstejaars-studenten wiskunde en een hoog percentage koos voor de afstudeerrichting systeem- en regeltheorie. We konden een ruime keus van vrij geavanceerde colleges systeem- en regeltheorie bieden aan twintig tot dertig enthousiaste studenten die voor een stimulerende sfeer zorgden. Een flink aantal studenten is in onze richting gepromoveerd, sommigen in Groningen en nog meer gingen naar andere universiteiten. Er waren toen vacatures bij wiskunde, vooral bij de technische universiteiten en het aantal systeemtheoretici in Nederland groeide snel. Het esprit de corps was geweldig en de vorming in 1987 van een van de eerste netwerken met landelijke aio-colleges werd enthousiast omarmd. Door deze colleges waaraan de meeste systeemtheorie docenten deelnamen en door onze jaarlijks Benelux bijeenkomsten ontstond een hechte gemeenschap die zowel ondersteunend als inspirerend werkte. In het bijzonder de dictaten voor de colleges vormden de kiem voor zes toonaangevende boeken. We waren niet alleen in Nederland actief, maar speelden en spelen een sterke internationale rol met participatie in 21 Europese projecten en organisatie van vele internationale conferenties en redactie verantwoordelijkheden in de toptijdschriften. In deze periode kreeg Nederland de reputatie als een van de vooraanstaande landen op het gebied systeem- en regeltheorie. Onze groep in Groningen verwelkomde een stroom aan buitenlandse gasten zoals Yukata ter gelegenheid van onze *European Control Conference* in 1993. Het netwerk vormde de kiem van de huidige onderzoeks-

school *Dutch Institute of Systems and Control* (DISC). Ik vind het geweldig om deze boeien de bloeiperiode te hebben meegemaakt.

Wat is regeltechniek?

Ik begin met een aantal voorbeelden waarin regeltechnieken worden toegepast:

- een vliegtuig zonder piloot dat op afstand wordt bestuurd,
- een satelliet die in een baan rond de aarde wordt gehouden,
- een schip dat stabiel wordt gehouden,
- een industriële oven voor het maken van bijvoorbeeld chips,
- een turbomotor,
- het manoeuvreren van industriële robots,
- het regelen van een pacemaker,
- het klimaat- en energiebeheer van gebouwen,
- het afspelen van cd's,
- regeltechnische componenten in auto's,
- het optimaliseren van landbouwirrigatie,
- de temperatuurregeling in kassen.

Er zijn echter veel meer voorbeelden. Regeltechniek is een verborgen technologie, die in een steeds groeiend aantal toepassingen wordt toegepast. Helaas is het onzichtbaar. Ik probeer op een eenvoudige manier een tipje van de sluier op te tillen.

Hoe werkt het?

Het basisprincipe is terugkoppeling of feedback. Wij passen bijna automatisch terugkoppeling toe in onze dagelijkse activiteiten. Bij het autorijden nemen we voortdurend waar, op grond waarvan we besluiten aan het stuur te draaien of te remmen of om gas te geven,

enz. Zien we rood licht voor ons, dan besluiten we te remmen. De kracht waarmee we op het rempedaal indrukken zal afhangen van onze schatting van de afstand tot het rode licht. Deze afstandsschatting voeren we terug als de kracht die wij uitoefenen. Schematisch kunnen we het zo zien. De auto met ons erin is het systeem en de output is onze schatting van de afstand en de input is de kracht waarmee we op het rempedaal indrukken. De regelaar die wij intuïtief gebruiken is een soort proportionele regeling. Hoe dichter bij het verkeerslicht hoe harder we remmen. Er is een terugkoppeling van de output via de regelaar en de input naar het systeem waardoor een gesloten lus ontstaat en zo ook een nieuw uitgebreid gesloten lussysteem. De regelaar kan gezien worden als een voorschrift dat de juiste input berekent voor een gegeven output. De meest eenvoudige regelaar is de proportionele regelaar: De input u is gelijk aan een constante K maal de output y en als K positief is, spreekt men van positieve feedback, terwijl als K negatief is, spreekt men van negatieve feedback. Op de snelweg gebruiken wij een soortgelijke feedback regeling om afstand tot de voorganger te houden. In luxe auto's doet de 'adaptive cruise control' dit automatisch voor ons. Er zijn een stuk of tien regeltechnische snufjes die op analoge wijze in luxe auto's werken. In feite ligt voor al deze toepassingen een feedbackschema aan de basis van het regelen.

Hoe ontwerpt men een regelaar?

Eerst maakt men van het systeem een wiskundig model, maar wat is een model? Stel dat we



Figuur 4 Links: Brown University, rechts: promotie op Brown University (1969)

op het platteland aan het wandelen zijn en in de verte zien we een aantal dieren. Eerst kunnen we niet duidelijk zien wat voor dieren het zijn. Als we in Australië zijn, zullen we ze voor kangoeroes aanzien, maar in Nederland waarschijnlijk voor herten en in Afrika voor iets heel anders. Met andere woorden, we maken regelmatig gebruik van modellen. Wiskundige modellen zijn natuurlijk anders en voor vele toepassingen zijn er nauwkeurige wiskundige modellen voorhanden, bijvoorbeeld voor de beweging van een satelliet in de ruimte. Op basis hiervan kan men uitrekenen hoe men een satelliet in een mooie elliptische baan rond de aarde kan krijgen. Het probleem is wel dat zelfs de meest nauwkeurige modellen nooit 100% exact zijn en wat men kan bereiken zal altijd iets afwijken van de gewenste elliptische baan. Deze kleine afwijking wordt steeds versterkt totdat de satelliet uit zijn baan schiet. Om de satelliet in zijn baan te houden zal men moeten regelen met kleine jetjes en om te weten hoeveel je moet regelen heb je metingen van de output nodig. Zonder feedback lukt dit niet.

Om deze reden zijn de modellen die wij gebruiken intrinsiek anders dan de modellen die worden gebruikt om natuurlijke verschijnselen te beschrijven. Aan de ene kant zijn onze modellen uitgebreider: de outputs, de inputs en de storingen vormen een essentieel onderdeel van onze modellen. Aan de andere kant zijn onze modellen van het systeem vaak betrekkelijk eenvoudig. De reden hiervoor is: hoe ingewikkelder het model hoe ingewikkelder de ontworpen regelaar. En ingewikkelde regelaars zijn moeilijk te implemen-

teren. Het is verbluffend hoe een eenvoudige regelaar het gedrag van een complex systeem naar wens kan beïnvloeden.

Wat is mijn aandeel hierin?

Dit valt onder de noemer systeem- en regeltheorie met de nadruk op theorie in plaats van de techniek. De kunst zit in de relatie tussen de keuze van modellen voor het systeem, de outputs, de inputs en de storingen en natuurlijk de doelstellingen voor het gedrag van het systeem. Dit leidt tot ontelbaar veel verschillende wiskundige problemen om op te lossen: de verborgen wiskunde. Dit is het aspect van het vak waar ik me mee bezighoud en in het bijzonder met systemen die door partiële differentiaalvergelijkingen beschreven worden, zoals een flexibele robotarm of een satelliet.

Satellieten zijn erg gevoelig voor trillingen. Als we willen onderzoeken hoe we ongewenste trillingen kunnen onderdrukken, hebben we eerst een model van het systeem nodig. Maar om de essenties van het probleem te analyseren beginnen we echter eerst met een prototype; een eenvoudig systeem dat de belangrijkste kenmerken van het oorspronkelijke systeem vertoont. Als prototype van de flexibele satelliet nemen we een lange flexibele balk met twee armen en in het midden de naaf. Stel dat we de trillingen willen onderdrukken door een kracht in het midden van de balk uit te oefenen. Stel ook dat we de snelheid van de naaf kunnen meten. Wij stellen een wiskundig model voor deze balk samen met de meting en de kracht op. Hieruit abstraheren we een wiskundig probleem om op te lossen: vind een voorschrift voor het kiezen

van de kracht u in termen van de meting y . Uit de wiskundige analyse blijkt dat de trillingen op een verrassend eenvoudige manier onderdrukt kunnen worden. Dit is de meest eenvoudig denkbare regelwet: neem de gemeten waarneming en gebruik dit als negatieve feedback. Dat dit zou werken wisten de ingenieurs al lang. Maar wat ik en mijn wiskundige collega's intrigeert is precies waarom dit werkt; wat karakteriseert de systemen waarvoor dit werkt en is het mogelijk om systemen te ontwerpen die zo werken? Zijn er andere manieren om dit te doen? Onze manier van begrijpen en van rechtvaardigen is om met wiskundige bewijzen te komen. Er ontstaat een boeiende vervlechting van de fysisch gemotiveerde vragen en de wiskundige structuren. Hier ga ik verder niet op in; het is een compleet andere taal. Wie meer over de verborgen wiskunde wil weten kan een van mijn boeken doorbladeren of naar mijn homepage kijken; google Ruth Curtain, Groningen.

Het wiskundig onderzoek naar passieve systemen zoals de flexibele balk heeft een lange geschiedenis in de systeem- en regeltheorie en veel van mijn collega's in de zaal hebben hieraan bijgedragen. Er wordt nog steeds hieraan gewerkt. Dit specifieke voorbeeld van een flexibele balk is een gevolg van vrij recent onderzoek naar oneindig dimensionale, passieve, systemen dat op de rand van systeemtheorie en operatorentheorie ligt.

Maar wat heeft dit te maken met het uitdempen van de trillingen van de satelliet? Uit ons onderzoek weten we het hoe en waarom van het uitdempen van trillingen in een hele scala van ideale flexibele systemen. Maar om



Figuur 5 Linksboven: Purdue University (1969-1971), linksonder: University of Warwick (1971-1977), middenboven: collega's van het Control Theory Centre, van links naar rechts: Tony Pritchard, Ruth Curtain, Patrick Parks en Larry Markus, middenonder: promotie van Paola Rocha (1986), van links naar rechts: Paola Rocha, Jan Willems, Christiaan Heij (staand), Ruth Curtain, Aad Stam (achter), Cees Praagman, Eric Thomas (achter) en Hans Nieuwenhuis, rechts: Rijksuniversiteit Groningen

een satelliet te regelen moet men met vele andere theoretische en vooral praktische aspecten rekening houden die ik vanwege tijdsgebrek niet kan behandelen. De wiskundige systeem- en regeltheorie draagt vooral bij aan de theoretische mogelijkheden voor ideale scenario's. De regeltechnici moeten deze dan vertalen naar implementeerbare regels in samenwerking met ander technische ingenieurs, in dit geval uit de ruimtevaart.

Systeem- en regeltheorie is een uitstekend voorbeeld van toegepaste wiskunde

Er is een sterke wisselwerking tussen mijn vakgebied systeem- en regeltheorie en de regeltechniek (de praktijk) en tussen systeem- en regeltheorie en zuivere wiskunde; ze voeden en stimuleren elkaar. Deze wisselwerking is essentieel voor alle drie de componenten. Dat vind ik nog altijd het boeiende van mijn vak dat tussen de zuivere wiskunde en de techniek in zit.

Een Australische blik terug op 29 jaar RUG

Nu terug naar de titel van deze lezing: in het begin heb ik een aantal persoonlijke anekdotes verteld over mijn ervaringen als Australisch meisje in de vijftiger jaren. Hoe heb ik het hier in Nederland als Australische ervaren? Mijn gevoel is dat mijn ervaringen hier voor slechts tien procent bepaald waren door het vrouw zijn en voor 90 procent door het Angelsaksische zijn. Wat het 'vrouw zijn' betreft, vermoed ik dat dit in mijn persoonlijke loopbaan in Nederland eerder een voordeel dan een nadeel was, maar dit heeft meer met

het tijdperk dan met het land te maken. Mijn definitie van Angelsaksisch is de gemene deler van het Verenigd Koninkrijk, de Verenigde Staten en Australië en tegen deze achtergrond heb ik het fascinerend gevonden om de Nederlandse cultuur en de veranderingen hierin te leren kennen. De verschillen zijn te veel om op te noemen, dus zal ik volstaan met wat mij toen het meest opviel:

- Alles moet 'leuk' zijn;
- In universitaire commissies hoort men hier niet te stemmen, maar ellenlang te praten om tot een unanieme (vaak suboptimale) beslissing te komen;
- Beleid en uitvoering worden vaak gescheiden, waardoor veel tijd werd besteed aan niet of slecht implementeerbaar beleid;
- Er bestaat geen land waarin aan de structuur van onderwijs en onderzoek tijdens de laatste dertig jaar zo veel is gesleuteld;
- Er bestaat geen Engelse vertaling voor het begrip 'allochtoon';
- 'Team' is een Engels leenwoord;
- In Nederland is het percentage Nederlanders met een baan van meer dan tien uur een belangrijk statistisch gegeven, terwijl men in Angelsaksische landen het percentage voltijdsbanen onder de bevolking relevanter vindt;
- Universteit en university zijn niet hetzelfde;

Ik zal nader ingaan op dit laatste. Bij mijn aankomst in 1977 bij wiskunde in het WSN-gebouw op het Paddepoel terrein werd ik door de hoogleraar informatica, Harry Whitfield, met Britse ironie verwelkomd

met de woorden: "Welcome to the science ghetto." Inderdaad leek het meer op werken op kantoor dan werken op een *university* zoals ik dat kende. Niet alleen kwam ik niet in aanraking met collega's uit andere afdelingen van onze faculteit, laat staan collega's uit de alpha-faculteiten, maar wiskunde werd in kleine koninkrijkes opgedeeld. In de vier *universities* waar ik had gezeten, voelde ik me in de eerste plaats lid van de afdeling wiskunde en in de tweede plaats lid van de university. Je hoorde bij een team en of je de anderen aardig of niet vond, werkte je samen als team, net zoals op een Angelsaksische school. Ik moet toegeven dat ik de sfeer van een university miste. Gelukkig zijn over de jaren daar wat veranderingen in gekomen en ik verwelkomde de plannen om een mini-bétacampus van het *Zernike* te maken compleet met een stafclub. Maar dat maakt het nog geen university, wat overigens niet erg hoeft te zijn; het is gewoon anders.

Een ontwikkeling van de laatste jaren is de stormvloed van cijfers en statistieken die worden geproduceerd over het onderwijs in het streven om de kwaliteit te meten en de kosten te drukken. Helaas resulteert dit vaak in het verschuiven van de kosten van onderwijs en onderzoek naar kosten voor het meten en evalueren. Statistieken en enquêtes worden ook gebruikt om academische hit lists te produceren zoals die van Elsevier. Als voorbeeld van dit verschijnsel wil ik ingaan op de rangschikking van de top tweehonderd van universiteiten in de wereld van de Britse *Times Higher Educational Supplement* (zie tabel 1).

1	USA	Harvard University	19	AUS	Melbourne University
2	USA	MIT	23	AUS	Australian National University
3	UK	Cambridge University	33	AUS	Monash University
4	UK	Oxford University	38	AUS	Sydney University
5	USA	Stanford University	40	AUS	University of NSW
6	USA	Univ. Calif, Berkeley	47	AUS	Queensland University
7	USA	Yale University	53	NL	Delft University of Technology
8	USA	CAL TECH	57	NL	Erasmus University
9	USA	Princeton University	58	NL	Amsterdam University
10	Fr	Ecole Polytechnique	70	NL	Eindhoven univ. of Technology

Tabel 1 Lijst uit de top tweehonderd van universiteiten van de Britse *Times Higher Educational Supplement*

1	USA	Harvard University	41	NL	Utrecht University
2	UK	Cambridge University	56	AUS	Australian National University
3	USA	Stanford University	72	NL	Leiden University
4	USA	Univ. Calif, Berkeley	82	AUS	Melbourne University
5	USA	MIT	102–150	AUS	Sydney, Qld
6	USA	CALTEC	102–150	AUS	Wester Aus.
7	USA	Columbia University	102–150	NL	Amsterdam, Groningen
8	USA	Princeton University	151–200	NL	UNSW
9	USA	Chicago University	151–200	NL	Delft, VU
10	UK	Oxford University	151–200	NL	Wageningen University

Tabel 2 Lijst uit de top tweehonderd van universiteiten uit Shanghai

In de linkerkolom ziet men de top tien universiteiten waarvan het merendeel Amerikaanse universiteiten zijn en negen van de tien Angelsaksische universiteiten. Met uitzondering van de University of California at Berkeley zijn het elite universiteiten met elitaire financiële middelen. In de rechter kolom vergelijk ik de beste geplaatste Australische universiteiten met de best geplaatste Nederlandse universiteiten. Ze zijn allemaal publieke universiteiten en ik vond de resultaten verrassend. De RUG kwam niet voor in de top tweehonderd. Maar bij de opening van het academisch jaar 2006 heeft de rector magnificus vol trots verteld dat Groningen wel tot de top tweehonderd universiteiten van de wereld hoort. Hoe kan dat? Dat kan omdat er meer dan één ranglijst van top tweehonderd universiteiten wordt geproduceerd. In tabel 2 staat een uittreksel uit de Shanghai lijst.

Men ziet dat er een grote overeenkomst bestaat tussen de top tien, maar daar houdt het mee op. Maar wat betekenen deze top tweehonderd lijsten? Wat zijn de criteria en hoe meten ze ze? Voor de 2005 rangorde hebben ze het gedaan als in tabel 3.

Ik zal niet ingaan op al deze criteria. Het punt dat ik wil maken is dat hun criteria een overlap van slechts twintig procent hebben. Ik zal ook niet ingaan op de vele andere

lijsten van de top tweehonderd universiteiten. Uit deze tabel is het duidelijk dat hun definities van 'de top tweehonderd universiteiten' totaal verschillend zijn. Wij wiskundigen denken te weten hoe men met definities moet omgaan. Eerst moet men een significante entiteit of begrip identificeren, dan een strakke definitie opstellen en pas daarna stellingen erover bewijzen. Maar met het begrip 'top tweehonderd universiteiten' begin-

	THES Shanghai	
% Academic peer review	40 %	0 %
% Recruiter review	10 %	0 %
% international staff	5 %	0 %
% international students	5 %	0 %
Staff-student ratio	20 %	0 %
Citations in expanded CSI	20 %	20 %
# Nobel prizes & Fields medals alumni	0 %	10 %
# Nobel prizes & Fields medals staff	0 %	10 %
# highly cited staff	0 %	20 %
# articles in Science & Nature	0 %	20 %
# normalization for size	0 %	10 %

Tabel 3 Criteria voor de beste universiteiten.

nen ze eerst met de stellingen en pas daarna geven ze slechts oppervlakkig aan waarop ze zijn gebaseerd. Het wordt een nieuw tak van sport: 'wetenschappelijke topsport', maar in deze sport mag men eigen regels kiezen. De Australiërs zullen met trots naar de THES-lijst verwijzen en de Nederlanders naar de Shanghai lijst, of nog beter, naar de lijst van hun eigen citatieguru, Professor van Raan in Leiden.

Professor van Raan gelooft in bibliometrische indicatoren, zijn vakgebied, want deze zouden objectief zijn. Alleen is de beslissing om uitsluitend te kijken naar zijn keuze van bibliometrische indicatoren allesbehalve objectief. In het bijzonder worden aspecten zoals 'scholarship' en het onderwijs helemaal buiten beschouwing gelaten. Objectief of niet, wetenschappelijke topsport is pas begonnen en ik citeer uit de *Times Higher Education Supplement* "While the debate continues on the methodology, ..." "there has been little argument about the thrust of the world ratings. They strive to be current, rather than historical, and to find proxies for excellence in teaching and research. An international outlook and a global reputation among academics, students and employers are all important aspects of a university that ranks among the world elite... the search for the world's leading universities is surely unstoppable." Deze hit lists hebben een enorme uitwerking op de ontwikkeling van onderwijs en onderzoek in alle landen. Ik voorspel dat over nog eens 29 jaar de verschillen tussen de culturen van de universiteiten en van de universiteiten erg klein zal zijn, "for better or for worse." Maar ik hoop dat sommige verschillen behouden blijven. In het bijzonder, de Nederlandse promotietraditie is iets om te koesteren, als ook de na-promotietradities. Verder is de traditie van het opstellen van stellingen of beweringen het behouden waard. Maar misschien zou het interessanter zijn als emeriti ook in de gelegenheid gesteld zouden worden om stellingen te poneren.

Meer informatie Het huidige artikel is een verkorte versie van de oorspronkelijke rede. De oorspronkelijke tekst, tezamen met foto's en een video-opname kunnen op <http://www.math.rug.nl/~curtain> worden gevonden.

Ionica Smeets

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

smeets@math.leidenuniv.nl

Boekbespreking Magische vierkanten

Van Lo Shu tot Sudoku

Arno van den Essen speelt slim in op de voortwoedende sudoku-rage. Hij gebruikt de populaire cijferpuzzels als aanleiding om een boek te schrijven over de geschiedenis van magische vierkanten en allerlei dingen die daar min of meer mee te maken hebben. Zijn doel is om “zoveel mogelijk mensen kennis te laten maken met de kracht en schoonheid van wiskunde”.

Het boek begint met een hoofdstuk over de Lo Shu, een drie bij drie magisch vierkant dat volgens de overlevering ongeveer vijfduizend jaar geleden op de rug van een schildpad werd gevonden. Daarna wordt de lezer in zeven hoofdstukken meegenomen langs een hele reeks magische vierkanten met steeds verschillende eigenschappen. De vraag is steeds of zulke vierkanten kunnen bestaan en zo ja, hoe ze gemaakt kunnen worden.

Daarna volgt een erg aardig hoofdstuk over bordvullende paardensprongen. In hoofdstuk 10 gaat het over de magische vierkanten die Benjamin Franklin maakte. Dit zijn vierkanten

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Figuur 1 Franklins vierkant van orde 8

waarbij iedere rij en iedere kolom de magische som hebben, elke halve rij of kolom de helft van de magische som heeft, alle gebogen diagonalen de magische som hebben en waarbij ook nog elk twee bij twee deelvierkant dezelfde som heeft. Er is nooit bekend geworden hoe Franklin het voor elkaar kreeg om in een avond zo'n zestien bij zestien vierkant te maken. Van den Essen geeft in dit boek voor het eerst een elementaire methode die Franklin gebruikt zou kunnen hebben. Tenslotte komen in het laatste hoofdstuk de op dit moment zo populaire sudoku's aan bod.

De geïnteresseerde leek is duidelijk de belangrijkste doelgroep voor dit boek, zelfs eenvoudige bewijzen staan in aanhangsels om niemand af te schrikken. Van den Essen legt alles stap voor stap uit en gebruikt nergens formules. Samen met de amusante anekdotes over mensen als Euler en Franklin maakt dit het boek makkelijk leesbaar. De auteur besteedt ook veel aandacht aan hoe en door wie nieuwe magische vierkanten ontdekt werden en welke vragen nog onbeantwoord zijn. Dit zet de lezer aan om zelf ook eens aan het puzzelen te slaan.

Soms dwaalt de auteur wel erg van af van wiskunde. Bijvoorbeeld als hij vertelt over alfa-magische vierkanten: magische vierkanten waarbij de aantallen letters in de namen van de cijfers ook weer een magisch vierkant vormen. Zulke vierkanten zijn afhankelijk van de taal die je gebruikt en hebben wiskundig gezien nauwelijks interessante eigenschappen. Een ander nadeel is dat de eenvoudige uitleg in het boek soms wel erg uitgebreid is. De constructie van Franklins acht bij acht magisch vierkanten beslaat zo'n tien pagina's

— en dan staat het moeilijkere geval nog in een aanhangsel. Voor wiskundigen biedt het boek dus wat weinig diepgang. De auteur zal de komende tijd met zijn vakgroep Computeralgebra van de RU Nijmegen een website ontwikkelen met daarop juist veel aandacht voor de diepere wiskundige achtergronden.

Kortom: dit boek is aardig voor wiskundigen die nog niets van magische vierkanten weten en voor wiskundigen die het niet erg vinden wanneer er geen diepe wiskunde in een boek voorkomt. *Magische vierkanten: van Lo Shu tot sudoku* is echter bijzonder geschikt om cadeau te geven aan vrienden en familieleden die niets van wiskunde willen weten, maar wel dol zijn op sudoku's. Zij kunnen veel plezier aan dit boek beleven en ook nog iets over wiskunde — hoe elementair ook — opsteken.



Figuur 2 Arno van den Essen, *Magische vierkanten: van Lo Shu tot Sudoku, De Wonderbaarlijke geschiedenis van wiskundige puzzels*, Veen Magazines, Diemen, 2005, 238 p., prijs € 17,50, ISBN: 9085710529.



Onno Boxma

Technische Universiteit Eindhoven

EURANDOM & Faculteit wiskunde en informatica

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

boxma@win.tue.nl



Onderzoek EURANDOM

Goede kansen

Onderzoeksinstituut Eurandom bestaat bijna tien jaar. In korte tijd heeft het instituut, dat zich richt op onderzoek op het gebied van kansrekening en statistiek, zich vooral ontwikkeld tot een populaire pleisterplaats voor jonge wiskundige onderzoekers komende vanuit alle windstreken. Onno Boxma, hoogleraar in de stochastische besliskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven is sinds 2005 wetenschappelijk directeur van dit instituut. Hij volgt hiermee de stichters Willem van Zwet en Frank den Hollander op. Hoe staat het instituut er momenteel voor?

Een in 1992 verschenen rapport van een *Verkenningcommissie Wiskunde*, getiteld *Wiskunde in beweging*, deed onder andere de volgende aanbeveling: "Neem op Europees niveau initiatief om te komen tot de oprichting in Nederland van een Europees instituut voor fundamenteel en toegepast onderzoek in de statistiek, kansrekening en (stochastische) besliskunde". Argumentatie: deze vakgebieden worden in Nederland op een zeer hoog niveau beoefend, en zijn in potentie enorm belangrijk in onze technologische maatschappij. Het onderzoek is echter te kleinschalig en verbrokkeld om een sterke maatschappelijke impact te hebben.

Vijf jaar later was het zo ver: het onderzoeksinstituut EURANDOM werd opgericht. Een instituut met een uniek concept, zonder

vaste wetenschappelijke staf, bemand door postdocs, en met een voor wiskundige begrippen grote kritische massa. Dit artikel schetst een beeld van de huidige positie van EURANDOM. In een drietal kaders wordt een indruk gegeven van recente onderzoeksprojecten.

Missie

De missie van EURANDOM is het onderzoek in de stochastiek en haar toepassingen te bevorderen. Zij vervult deze missie door de aanstelling van postdocs en promovendi, door bezoekersprogramma's en de organisatie van workshops, en door initiatieven te nemen betreffende (inter-)nationale onderzoeksprogramma's.

EURANDOM is overwegend een postdoc instituut. Het heeft zo'n twintig postdocs en een stuk of zes promovendi. De postdocs krijgen in het algemeen een aanstelling voor twee jaar. Vanaf de komst van de eerste postdoc, in 1998, heeft EURANDOM 103 jonge onderzoe-

kers aangesteld; 85 ervan waren uit het buitenland afkomstig. Een derde deel van de buitenlanders vindt na afloop van de aanstelling bij EURANDOM een positie in een Nederlandse universiteit of industrieel laboratorium.

De jonge onderzoekers worden begeleid door senior onderzoekers ('adviseurs'), die van diverse universiteiten afkomstig zijn. Momenteel hebben twaalf onderzoekers een formeel adviseurschap bij EURANDOM, meestal voor een dag per week.

Programma's

Vanaf het begin is het onderzoek van EURANDOM in programma's geordend. Deze programma's worden regelmatig bijgesteld. Momenteel zijn er drie programma's, elk met een aantal thema's (meer details zijn te lezen op www.eurandom.nl):

- a. Random Spatial Structures (RSS)
 - Critical phenomena
 - Disordered systems
 - Combinatorial probability

Het programma RSS richt zich op systemen die bestaan uit een groot aantal random componenten met onderlinge interactie. Het tracht hun ruimte-tijd gedrag te vangen door een combinatie van probabilistische, combinatorische en ergodische methoden te gebruiken. Kritische verschijnselen en

Figuur 1 Linksonder: Jack Serafin, postdoc afkomstig uit Polen presenteert zijn onderzoek aan een groep aio's en post-doc's. Frank den Hollander zit links op de voorste rij. Rechtsmidden: Harry Kesten, die de EURANDOM leerstoel in 2002 bekleedde, geeft college.

- universaliteit krijgen speciale aandacht.
- b. Queueing and performance analysis (QPA)
- Queueing theory
 - Performance analysis of production systems
 - Performance analysis of communica-

tion systems

- Multivariate risk modelling

QPA houdt zich bezig met wachtrijtheorie en haar toepassing op de prestatie-analyse van stochastische netwerken, i.h.b. productie- en communicatienetwerken.

Ook wordt onderzoek gedaan naar modellen uit de verzekeringswiskunde en risicotheorie, hierbij gebruik makend van het feit dat er een nauwe verwantschap bestaat met modellen en methoden die centraal staan in de wachtrijtheorie.

SIM: Genregelnetwerken

In de systeembioïologie zijn genregelnetwerken van primair belang. De interacties tussen genen en hun producten binnen een netwerk stellen cellen in staat hun specifieke biologische taken uit te voeren. Allerlei typen van metingen aan genexpressies bevatten informatie over het onderliggende genetisch mechanisme. Enorme hoeveelheden gegevens zijn/komen beschikbaar. Deze gegevens schreeuwen om de ontwikkeling van geschikte statistische technieken en theorieën om de relevante informatie eruit te destilleren.

Een voorbeeld is de embryonale ontwikkeling van de *Drosophila Melanogaster*, het fruitvliegje. In het beginstadium gaat het embryo door een segmentatiefase. Dit proces wordt geregeld door een aantal genen, waarbij men van het betreffende genregelnetwerk vooral wil weten welke genproducten welke genen activeren dan wel onderdrukken. Door middel van confocal laser scanning microscopy zijn in het vliegenlab van John Reinitz te Stony Brook (<http://flyex.ams.sunysb.edu>) honderden plaatjes gemaakt van de verdeling van genproducten in het embryo, waarbij slechts drie genproducten tegelijkertijd zichtbaar kunnen worden gemaakt. Als model voor het betreffende genregelnetwerk is een systeem van gewone differentiaalvergelijkingen opgesteld dat de genproductconcentraties als functies van de tijd beschrijft. Hierbij wordt de invloed van de genen weergegeven door parameters waarvan de waarden

op basis van de plaatjes dienen te worden geschat.

Binnen het *Statistics in Biology* programma van EURANDOM is de laatste jaren in samenwerking met de groep van bioinformaticus Jaap Kaandorp van de UvA gewerkt aan dit deterministische model. Een echt embryo wijkt natuurlijk op een stochastische manier van dit model af en bij de waarnemingen komen hier nog vele meetfouten bij. Een belangrijke meetfout treedt op bij het realiseren van het beoogde moment waarop de genproducten in het embryo gekleurd en waargenomen moeten worden. Gebruikmakend van juist het systeem van differentiaalvergelijkingen kon door postdoc Nadia Lalam (EURANDOM) en Chris Klaassen (EURANDOM/UvA) een redelijk statistisch model voor de waarnemingen worden afgeleid.

Dit model genereert nieuwe, zeer interessante, statistische problemen door de ingewikkelde afhankelijkheidsstructuur van de stochastische grootheden die de concentraties aan genproducten op verscheidene plaatsen binnen elk embryo beschrijven. Voor dit model hebben we $\sqrt{n}$ -consistentie van de pseudo-meest-aannemelijke schatter afgeleid. Deze schatter is efficiënt als alle stochastische variabelen normaal verdeeld zijn. Het aardige is dat dit statistische model algemeen toepasbaar is bij waarnemingen aan realisaties van een stelsel differentiaalvergelijkingen naar de tijd, waarbij het beoogde tijdstip van waarneming met een stochastische fout wordt gerealiseerd.

QPA: Wachtrijmodellen voor kabelnetwerken

EURANDOM heeft naast postdocs ook enige promovendi. Johan van Leeuwen werkte van 2002 tot 2005 als AIO op een door Philips gefinancierd project betreffende kabelnetwerken. Voor zijn proefschrift kreeg hij de prijs voor het beste proefschrift van onderzoeksschool Beta; onlangs ontving hij een VENI-beurs.

Kabelnetwerken zijn oorspronkelijk ontworpen voor het uitzenden van TV-beelden, maar door hedendaagse technieken is tweerichtingsverkeer van data mogelijk. Dit opent een nieuwe wereld van interactieve diensten met internet als meest prominente toepassing. Een belangrijke kwestie hierbij is hoe de capaciteit van het netwerk te verdelen onder de gebruikers.

Het centrale punt van een netwerk, verbonden met alle gebruikers, wordt aangeduid met head-end (HE). Een dienstverlener kan een signaal versturen van het HE naar de gebruikers over het neerwaartse kanaal. De gebruiker kan op zijn beurt reageren over het opwaartse kanaal (zie de figuur hiernaast). Het opwaartse kanaal wordt dus gedeeld door 100 tot circa 1000 gebruikers.

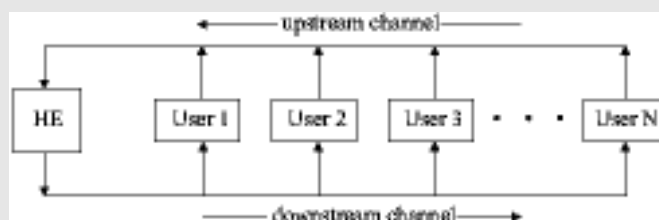
Verdelen van capaciteit

Het gedeelde opwaartse kanaal is een voorbeeld van *multi-access* communicatie: meerdere gebruikers hebben toegang tot hetzelfde communicatiekanaal. Ter verdeling van de capaciteit bekijken we een zogeheten *request-grant* mechanisme, waarbij een gebruiker eerst een verzoek stuurt naar de HE. Wanneer dit verzoek wordt

toegestaan, dan mag de gebruiker daadwerkelijk data versturen. Dit mechanisme voorkomt dat datapakketten botsen en zorgt voor een efficiënt gebruik van het kanaal. Wij modelleren deze situatie in termen van wachtrijmodellen die typisch meerdere-dimensionale Markov-ketens voorstellen. De analytische oplossingen van de modellen leiden tot prestatiematen in termen van capaciteit en vertraging, op grond waarvan we efficiënte schema's voorstellen ter verdeling van de capaciteit onder de gebruikers.

Andere toepassingen

Andere toepassingen zijn er legio. De modellen bevatten kenmerken van multi-access communicatie en capaciteitsverdeling, twee onderwerpen van belang in onderzoeksgebieden als computernetwerken, mobiele telefonie, netwerken op chips, satellietssystemen.



Een kabelnetwerk

- c. Statistical information and modelling (SIM)
 - Statistical signal and image analysis
 - Statistics in biology
 - Statistics in industry

SIM combineert analytische en algebraïsche methoden bij de behandeling van een aantal uiteenlopende statistische vraagstukken, zoals statistische classificatie, bootstrap methoden, microarrays, statistische signaal- en beeldanalyse, proefopzet, onderhoudsplanung en quantumstatistiek.

Bezoekers en workshops

De qua nationaliteit en cultuur zo diverse achtergrond van de postdocs staat in opvallend contrast met hun sterke overeenkomst qua onderzoeksoriëntatie. Deze mixture blijkt fantastisch te werken. De postdocs en het ondersteunende bureau organiseren allerlei professionele en sociale activiteiten, van een postdoc seminar tot gezamenlijke filmuitjes. Dit alles draagt sterk bij tot het bruisende karakter van het instituut, dat door bezoekers al is vergeleken met "het bubbelen van champagne". Andere bezoekers spraken over het leukste instituut dat ze ooit bezocht hadden; een classicistisch geschoolde bezoeker vertaalde het acroniem EURANDOM treffend met 'goede kansen'.

Overigens dragen die bezoekers zelf ook sterk bij tot het karakter van het instituut. Jaarlijks zijn er tussen de veertig en vijftig bezoekers voor een week of langer (buiten de workshopdeelnemers). Driemaal gaf een 'EURANDOM hoogleraar' tijdens een langdurig verblijf een serie lezingen: Harry Kesten, Francois Baccelli en Sid Resnick. Daarnaast brachten Gordon Slade en Offer Kella er enige tijd door als Stieltjes hoogleraar, en Uri Yechiali als gasthoogleraar van onderzoeksschool BETA. De afgelopen acht jaar zijn ruim zeventig workshops georganiseerd, met gemiddeld 40–45 deelnemers. Van 9 tot 11 juli 2007 organiseert EURANDOM het *Applied Probability INFORMS congres*; men verwacht dan ruim driehonderd deelnemers. Peter Glynn, Frank Kelly en Alain-Sol Sznitman zijn de hoofdsprekers.

Visitatie

Juistgenoemde Peter Glynn was de voorzitter van een geheel buitenlandse visitatiecommissie, die EURANDOM in opdracht van NWO najaar 2005 beoordeelde. De commissie was vol lof over het instituut. Niet alleen ontvingen de RSS- en QPA-programma's de hoogst mogelijke scores, maar ook was de commissie diep onder de indruk van de grote impact die

EURANDOM in haar korte bestaan al had gehad op de internationale stochastiek en van de efficiënte manier waarop het instituut werd gerund, op een manier die geheel ten dienste van de wetenschap staat — een groot compliment voor de eerste wetenschappelijke directeurs Willem van Zwet en Frank den Hollander, en zakelijk directeur Wim Senden en zijn mensen.

Financiën

De jaarlijkse kosten van EURANDOM bedragen ruim 2 Meuro (miljoen euro). Haar hoofdsponsors zijn NWO en de Technische Universiteit Eindhoven, die samen momenteel een kleine zestig procent van het budget leveren. De overige veertig procent betreft externe financiering, vooral via Europese en nationale onderzoeksprogramma's, persoonlijke beurzen en industriële contracten.

Toekomst

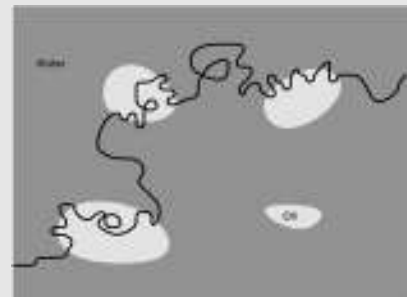
EURANDOM wil zich de komende jaren richten op een aantal projecten in strategisch gekozen gebieden van grote wetenschappelijke en maatschappelijke relevantie. Het wil, met gebruikmaking van bestaande sterkten, ook enige nieuwe toepassingsgebieden aanboren. Zo is de expertise betreffende de prestatieanalyse van communicatienetwerken (files van files) relevant voor de bestudering van files in het wegverkeer en van wachttijden in de gezondheidszorg. En het gedachtengoed van de mathematische statistische fysica wordt van grote betekenis in de mathematische biologie, met als sleutelwoorden: complexe structuren, hiërarchische interactie en multi-schaalgedrag. Interessante raakgebieden zijn o.a. moleculaire biologie, immunobiologie en epidemiologie. Ook hier liggen voor EURANDOM goede kansen! 

Dankwoord De auteur is dank verschuldigd aan Connie Cantrijn, Frank den Hollander, Chris Klaassen, Patty Koorn, Johan van Leeuwen en Wim Senden voor foto's, kaderteksten, en andere nuttige tekstuele bijdragen.

RSS: Faseovergangen bij polymeren

Polymeren zijn lange ketens van moleculen die via flexibele chemische bindingen aan elkaar zijn geregen. *Copolymeren* bestaan uit twee of meer verschillende typen moleculen — bijvoorbeeld hydrofobe en hydrofiele — aan elkaar geregen in een min of meer toevallige volgorde. Wanneer een copolymeer wordt geplaatst in de buurt van een scheidingsvlak tussen twee of meer verschillende media — bijvoorbeeld water en olie — dan zal het proberen zich zodanig langs dit scheidingsvlak te positioneren, dat zoveel mogelijk hydrofobe moleculen in de olie belanden en zoveel mogelijk hydrofiele moleculen in het water. Dat verlaagt de *energie*, maar gaat gepaard met een verlies aan *entropie* (= wanordelijkheid).

Nu blijkt dat bij het variëren van de parameters, die de interactie tussen de monomeren en de media bepalen, een zogenaamde *faseovergang* kan plaatsvinden, tussen een fase waar het polymeer sterk rond het scheidingsvlak kronkelt en een fase waar het zich van het scheidingsvlak verwijdt. In het eerste geval wint de energie, in het tweede geval wint de entropie. Het blijkt lastig om de curve in de parameterruimte waar deze faseovergang plaatsvindt te lokaliseren en om te doorgronden hoe het polymeer zich precies gedraagt in de buurt van deze curve. Een van de onderzoekprojecten op EURANDOM, uitgevoerd door F. den Hollander (Leiden+EURANDOM) en N. Pétrelis (EURANDOM) in samenwerking met S. Whittington (Toronto), concentreert zich op het geval waar het scheidingsvlak zelf toevallig is (zie de figuur), zoals in een *emulsie* bestaande uit oliedruppeltjes die in water zweven. Technieken uit de theorie van wanordelijke systemen laten zien dat de faseovergang gladder is in een emulsie dan in een systeem waar het scheidingsvlak lineair is.



Een copolymeer in een emulsie

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2
1055 XW Amsterdam
bmols@wanadoo.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006

Kogelwerende wiskunde

Kogelwerende vesten zijn nooit perfect. Schiet er maar hard genoeg op, en de kogel gaat er toch doorheen. Fabrikanten zoeken voortdurend naar nog betere kogelwerende eigenschappen van de supersterke vezels in hun vesten. Een betere statistische analyse van de schiettests op de vesten is daarvoor essentieel.

Wat doe je als je in je beroep de kans loopt om getroffen te worden door een rondvliegende kogel? Je wapent je met een kogelvrij vest om je borstkas heen. En dat is wat politieagenten, militairen, beveiligingsagenten en journalisten in de vuurlinie dan ook doen.

Maar de term 'kogelvrij' belooft veel meer dan de praktijk waarmaakt. In werkelijkheid is een *kogelvrij* vest een *kogelwerend* vest. Er is altijd wel een snelheid waarbij de kogel toch door het vest heen gaat. Maar hoe beter het vest, hoe moeilijker de kogel doordringt: de doordringingssnelheid van de kogel ligt hoger. Een werkelijk kogelvrij vest is wel mogelijk, maar wordt te dik en te zwaar om als politieagent of militair nog goed in te functioneren.

Tot voor kort bestonden kogelwerende vesten grotendeels uit metaal, en daardoor waren ze relatief zwaar. Dat veranderde met de uitvinding van supersterke lichte vezels

(op moleculair niveau bestaande uit stijve, zeer langgerekte moleculen, zogeheten polymeren). Nu bestaan de kogelwerende vesten uit meerdere lagen van deze vezels. Een belangrijke fabrikant van zulke vezels, is het bedrijf *Teijin Twaron B.V.*, een afsplitsing van Akzo-Nobel. Dezelfde vezels versterken trouwens ook legerhelmen en de bepantsering van voertuigen en straaljagers.

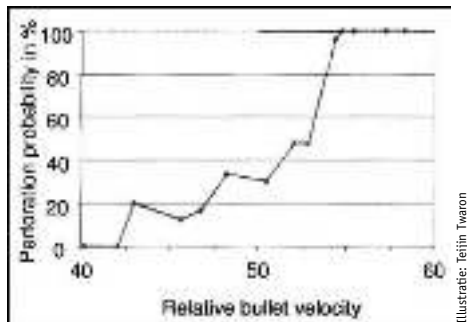
Kogel afgevuurd met 430m/s

Twaron zoekt voortdurend naar nieuwe productiemethoden om kogelwerende vesten te verbeteren. Liefst moeten ze nog lichter en sterker worden. Voor dit onderzoek test het bedrijf kogelwerende vesten. Standaard gebeurt dat door op een vest zes kogels met dezelfde snelheid af te schieten. Dit wordt herhaald voor in totaal zeven vesten van hetzelfde type.

De makkelijkste manier om vesten van een

verschillend type te vergelijken, is om voor elk type de kogelsnelheid te bepalen waarbij vijftig procent van de kogels door het vest heen dringt. Dat heet de V_{50} . Hoe hoger de V_{50} , hoe beter het vest. De praktijktest werkt als volgt. De eerste kogel wordt afgevuurd met een snelheid waarvan het bedrijf denkt dat deze in de buurt van de V_{50} ligt. De volgende kogels worden iets sneller of iets langzamer geschoten, zodanig dat er in totaal drie kogels doorheen dringen en drie worden tegengehouden. Een typisch waarde voor een V_{50} is 430 meter per seconde. "Maar", zo laat Aad Schaap van Teijin Twaron weten, "de precieze snelheid is afhankelijk van de vereiste minimale bescherming."

Vesten verkopen door de V_{50} als keurmerk te geven, is publicitair niet zo handig. Immers, geen politieagent of militair wil weten wanneer de helft van de kogels door zijn vest heen gaat. Dat is veel te veel. Twaron wil daarom weten bij welke kogelsnelheid slechts een op de honderd kogels (1%) doordringt: de V_{01} . Deze snelheid ligt uiteraard lager dan de V_{50} . V_{01} is typisch iets van 350 meter per seconde, maar ook hier hangt de exacte snelheid af van



Figuur 1 Kans dat een kogel door het vest dringt als functie van de snelheid van de kogel (als percentage van een maximum snelheid)

Illustratie: Teijin Twaron

de vereiste bescherming. Zowel V_{50} als V_{01} gebruikt de fabrikant om de kogelwerende vesten in diverse kwaliteitsklassen in te delen.

De NAVO heeft een standaardmethode opgesteld om de V_{50} te bepalen. Producenten en gebruikers hebben echter aangegeven dat deze test tot onnauwkeurige resultaten leidt. De methode levert voor identieke vesten verschillende resultaten voor V_{50} . Daarnaast bestaat er momenteel geen betrouwbare methode om de V_{01} te bepalen. Schaap: “Het bezwaar van de huidige V_{01} -standaard is dat deze met relatief weinig schoten wordt bepaald. Door het ontbreken van een betrouwbaarheidsinterval weten we dan ook niet hoe goed dat getal is. Maar dat moeten we wel weten als we zeker willen zijn dat een nieuw ontwikkeld vest beter is.”

Help ons bij de ontwikkeling van een goede statistische methode voor de bepaling van V_{50} en V_{01} , zo was de vraag van Twaron aan de Studiegroep Wiskunde & Industrie 2006.

Slimme curvefitting

Na een paar dagen puzzelen ontdekten de wiskundigen een betere methode om de V_{50} te schatten. Hoe hangt de kans op doordringing af van de snelheid waarmee een kogel is afgevuurd? Dat is steeds de algemene achterliggende vraag. Een sterker vest zal een kleinere doordringingskans geven bij een bepaalde snelheid dan een zwakker vest.

“In de eenvoudigste aanpak gingen we uit van een wiskundige functie met een gegeven globale vorm”, legt Marco Bijvank van de Vrije Universiteit in Amsterdam uit. “Hoe hoger de schotsnelheid, hoe groter de doordringingskans. De functie moet dus continu stijgen met toenemende schotsnelheid. Twee vrije parameters in die functie leggen de precieze loop van de functie vast. Gegeven de meetpunten die aangeven bij welke snelheid een kogel wel of niet door het vest heen gaat, is dan de opgave om die twee parameters te bepa-

len zodanig dat de functie het beste past bij de metingen. Is de functie eenmaal bekend, dan geeft deze ook de snelheid die bij een bepaalde doordringingskans hoort.”

Een andere aanpak gaat niet uit van een gegeven vorm van de doordringingsfunctie, maar probeert een curve te vinden waarvan de vorm helemaal niet vaststaat, maar die het beste past bij de meetpunten. Hierbij doet het probleem op dat het geregeld voorkomt dat een kogel met een hogere snelheid volgens de metingen toch een kleinere doordringingskans had. Dat kan gebeuren als er niet genoeg metingen zijn gedaan. Bij voldoende metingen heeft een kogel met een hogere snelheid immers altijd een grotere doordringingskans.

De wiskundigen kunnen dit oplossen door eerst op een slimme manier de meetdata te masseren en dan de beste functie te bepalen, of door een slimme methode te kiezen die toch een gladde en continu stijgende functie door de meetdata heen haalt.

Er zit nog een kleine adder onder het gras in de analyse van de schietresultaten. Wanneer op hetzelfde vest zes kogels met dezelfde snelheid worden afgevuurd, blijkt de kans dat een kogel erdoorheen schiet af te hangen van het schotnummer en dat is natuurlijk niet wat je verwacht. Immers, in eerste instantie verwacht je dat als je op hetzelfde vest kogels met exact dezelfde snelheid afvuurt, ze alle een gelijke kans hebben het vest te doorboren.

“Na een inslag door een kogel verandert het kogelwerende vest”, legt Schaap uit. “Dit betekent dat de kans om een vest te doorboren bij volgende schoten iets anders wordt. Afhankelijk van het vest en de gekozen kogel kan de doordringingskans voor de volgende schoten zowel hoger als lager uitvallen. In de praktijk moet een vest altijd beoordeeld worden nadat er met meerdere kogels op is geschoten. Als het schotnummer invloed heeft op de doordringingskans, dan moet de statistische methode die we willen ontwikkelen daar rekening mee houden.”

Doordringingsdiepte meenemen

Veel lastiger dan de bepaling van de bepaling van V_{50} is die van V_{01} . Toch ontwikkelden de wiskundigen naast een betere methode om V_{50} te bepalen, ook een nieuwe meetprocedure om uit de V_{50} de V_{01} te schatten. Zonder extra experimenten blijkt het niet mogelijk om uit de V_{50} een betrouwbare V_{01} te schatten. Het probleem is dat de V_{01} zo laag is dat er geen metingen bij zijn gedaan. Het is immers de snelheid waarbij slechts een op de

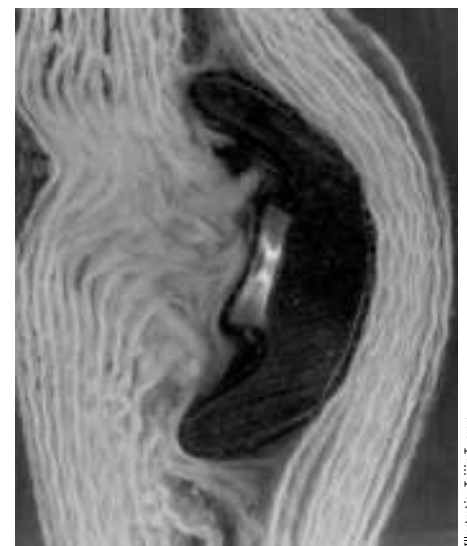
honderd kogels door het vest heen schiet. Er zouden dus honderden vesten en duizenden afgevuurde kogels nodig zijn om uit een experiment een betrouwbare V_{01} te bepalen. Dat is veel te duur en onpraktisch. Dus moet er een slimme methode komen om V_{01} indirect te schatten.

Bijvank: “Die slimmere methode is mogelijk door te kijken naar hoe diep een enkele kogel in het vest doordringt. Op die manier geeft een kogel niet alleen de informatie of hij wel of niet door het vest heen gaat, maar ook hoe diep hij in het vest doordringt in het geval hij niet door het hele vest heen schiet. Deze extra informatie kan gebruikt worden om V_{01} te schatten.”

Toch is Schaap niet overtuigd dat dit echt helpt: “Het is zeker nog niet aangetoond dat het zinvol is die informatie mee te nemen, maar het is wel een van de opmerkingen die we in de toekomst nader gaan onderzoeken.”

Meer informatie

www.twaron.com
Doorklikken naar ballistics/vests
www.kennislink.nl/web/show?id=147171
Oorlog om een vezel
www.win.tue.nl/swi2006
Studiegroep Wiskunde & Industrie 2006



Illustratie: Teijin Twaron

Figuur 2 Een kogel — afgeschoten van links — die in het kogelwerend vest is blijven steken. Goed te zien zijn ook de verschillende lagen waaruit het vest bestaat.

Agnes Verweij

TU Delft, Faculteit EWI

Mekelweg 4, HB04.090

2628 CD Delft

A.Verweij@ewi.tudelft.nl

Boekbespreking

Basisboek Wiskunde

Volgens de media zijn velen van mening dat de wiskundige bagage van de beginnende (bèta)student tekortschiet. Dit vinden ook de auteurs Jan van de Craats en Rob Bosch, beiden betrokken bij de popularisering van de wiskunde in het vwo-onderwijs. Zij stelden een 'Basisboek wiskunde' samen, om deze leemte op te vullen, en zelfs, als we afgaan op het voorwoord van het boek, om een norm te stellen voor het ingangsniveau van een bètastudie. Draagt dit boek bij aan het opvullen van de kloof tussen wiskunde van het vwo en van het wetenschappelijk onderwijs? Agnes Verweij gelooft er niets van.

Een cadeautje. Met deze woorden werd het plan gepresenteerd om aan alle studenten die in september 2006 met een studie Elektrotechniek of Informatica bij de TU Delft of met een studie Wiskunde bij deze TU en de Universiteit van Leiden beginnen een exemplaar van het *Basisboek Wiskunde* te geven. Het is inderdaad een bijzonder welkomstgeschenk, dit mooi verzorgde boek dat volgens het voorwoord alle basiswiskunde — behalve de kansrekening en statistiek — bevat die nodig is als ingangsniveau op het gebied van de bètavakken, informatica, economie en verwante studierichtingen binnen het hoger onderwijs.

Oefening weer de hoofdmoot

De met realistische wiskunde in dit tijdsperk opgevoede eerstejaarsstudenten zullen het ontbreken van contextopgaven en de minimale rol van de grafische rekenmachine onmiddellijk opvallen. Maar voor het overige lijkt de didactische opzet van het boek goed aan te sluiten bij de manier waarop (helaas) veel van deze studenten in het voortgezet on-

derwijs wiskunde geleerd hebben: oefeningen staan centraal, de bijbehorende tekst is alleen bedoeld voor wie problemen ontmoet bij het maken van de sommen. De geleidelijk in moeilijkheid opklimmende rijtjes sommen waarmee vaardigheden op het gebied van getallen, algebra, getallenrijen, vergelijkingen, meetkunde, functies en calculus geoefend worden, zijn daarom op de linkerpagina's van de betreffende hoofdstukken afgedrukt, terwijl op de volgende rechterpagina steeds een beknopte uitleg te vinden is.

Voor de geïnteresseerde student geeft het achtste hoofdstuk enkele achtergronden van onderwerpen uit de eerdere hoofdstukken, zonder opgaven. Hierna volgen de antwoorden van de oefenopgaven en een formuleoverzicht, waarvan de status in het midden gelaten wordt. Bevat dit overzicht, waarin niet alle in de eerste zeven hoofdstukken gebruikte formules opgenomen zijn, misschien de formules die volgens de auteurs uit het hoofd gekend zouden moeten worden? Het boek sluit af met een trefwoordenregister.

Geïsoleerde vaardigheden

Het is niet te hopen dat veel geslaagden voor de profielen N&G en N&T van het havo en vwo met belangstelling voor een exacte studie het *Basisboek Wiskunde* al voor de zomervakantie zelf hebben aangeschaft met de bedoeling dit, in overeenstemming met de in dit boek gesuggereerde noodzaak hiertoe, voor de start van de studie door te werken. Ook als dit leerlingen zijn die een exacte studie goed zouden aankunnen, kan dit tot zodanig teleurstellende ervaringen geleid hebben dat zij alsnog een andere studiekeuze hebben gemaakt. Zij zullen namelijk al snel gemerkt hebben dat verspreid over het boek een groot aantal oe-

feningen voorkomt met betrekking tot vaardigheden die niet tot de schoolstof behoren, terwijl de uitleg hierbij vaak niet voldoende is om deze nieuwe vaardigheden zelfstandig onder de knie te kunnen krijgen.

Voorbeelden van dergelijke vaardigheden zijn: de onvereenvoudigbare breuk bepalen die correspondeert met een gegeven repeterende decimale ontwikkeling, kwadraat afsplitsen, stelsels van twee of drie eerste-gradsvergelijkingen oplossen, hoeken tussen lijnen berekenen met behulp van het inproduct van hun normaalvectoren, grafieken van cyclometrische functies schetsen, een parametrisatie van een rechte lijn door twee gegeven punten opstellen, fouten schatten met behulp van differentiaal, partieel integreren, oneigenlijke integralen berekenen.

Het zou de auteurs gesierd hebben als zij in hun boek duidelijk hadden aangegeven dat deze en nog een aantal andere onderwerpen niet gerekend kunnen worden tot de voorkennis van wie op grond van zijn havo- of vwo-profiel toelaatbaar is tot een exacte studierichting. In het hbo en wo worden deze 'nieuwe' onderwerpen — voor zover zij relevant zijn voor de gekozen richting — daarom naar behoren onderwezen. Dit onderwijs is over het algemeen niet zoals in het *Basisboek Wiskunde* alleen gericht op beheersing van geïsoleerde vaardigheden, maar ook op betekenisverlening, op inpassing in het geheel van reeds verworven kennis en vaardigheden en op toepassing in een bredere context. Wie zich al voor aanvang van de studie wil inwerken in de hierbij benodigde nieuwe wiskundeonderdelen, kan dan ook beter gebruik maken van de voor die studie voorgeschreven wiskundeboeken of -dictaten dan van het *Basisboek Wiskunde*.

III Getallenrijen

8.4 Bereken de som van de volgende meetkundige rijen.

- $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 256$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$
- $2 + 6 + 18 + 54 + \dots + 1458$
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{729}$
- $\frac{5}{12} + \frac{3}{120} + \dots + \frac{1}{1030080}$

8.5 Bereken de som van de volgende oneindige meetkundige rijen.

- $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$
- $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$
- $7 + \frac{1}{12} + \frac{1}{120} + \dots$
- $1 - \frac{2}{11} + \frac{4}{121} - \frac{8}{1331} + \dots$

8.6 Schrijf de som van de volgende oneindige meetkundige rijen als een breuk.

- $0.1 - 0.01 + 0.001 - 0.0001 + \dots$
- $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots$
- $0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$
- $0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \dots$
- $0.98 - 0.0098 + 0.000098 - \dots$

Schrijf bij de volgende opgaven de gegeven decimale ontwikkeling als een onvermenigbaar breuk met behulp van de somformule voor een oneindige meetkundige rij. Neem daarbij aan dat de getoonde regelmaat zich onbeperkt voortzet: alle decimale ontwikkelingen zijn vanaf het begin of vanaf een zekere decimaal periodiek.

- 8.7
- 0.2222222222...
 - 0.333131313131...
 - 1.999999999999...
 - 0.123123123123...
 - 0.123333333333...

- 8.9
- 22.2444444444...
 - 0.700700700700...
 - 0.699699699699...
 - 8.124444444444...
 - 1.131313131313...

- 8.8
- 0.101010101010...
 - 0.330330330330...
 - 1.211211211211...
 - 0.000111111111...
 - 3.091919191919...

- 8.10
- 0.111109999999...
 - 0.365656565656...
 - 3.14153141531415...
 - 2.718281828182...
 - 0.090909090909...

II Rijen en limieten

Meetkundige rijen

Soms is het handig om de nummering van de termen van een getallenrij niet met 1 te laten beginnen, maar bijvoorbeeld met 0 omdat daardoor bepaalde formules eenvoudiger worden. We zullen dat bij de meetkundige rijen doen.

Een rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ heet een meetkundige rij met reden r als voor elke n geldt dat $a_{n+1} = a_n r$. Elke term ontstaat dus uit zijn voorganger door die met r te vermenigvuldigen. Een voorbeeld is de rij 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... waarbij elke term twee maal zo groot is als zijn voorganger. In dat geval is dus $r = 2$.

Als we de beginterm a_0 kortweg a noemen, geldt $a_1 = ar$, $a_2 = a_1 r = ar^2$ enzovoort. In het algemeen geldt voor elke n dat $a_n = ar^n$. Iedere meetkundige rij kan dus geschreven worden in de vorm

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$$

Als $r \neq 0$ wordt het gedrag van de rij vooral bepaald door r . Er geldt namelijk

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n &= \infty & \text{als } r > 1 \\ r^n &= 1 & \text{als } r = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r^n &= 0 & \text{als } -1 < r < 1 \\ r^n &= (-1)^n = \pm 1 & \text{als } r = -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |r|^n &= \infty & \text{als } r < -1 \end{aligned}$$

Ook voor een meetkundige rij bestaat er een eenvoudige formule voor de som $s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ van de eerste n termen. Om die te vinden, merken we op dat $rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$ zodat $s_n - rs_n = a - ar^n$ (alle tussen termen vallen tegen elkaar weg). Wanneer $r \neq 1$ kunnen we hieruit s_n oplossen: $s_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$.

Met behulp van de sigma-notatie geeft dit de somformule voor de *eindige* meetkundige rij:

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{mits } r \neq 1$$

Omdat $r^n \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$ als $-1 < r < 1$ volgt hieruit direct de somformule voor de *oneindige* meetkundige rij:

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1 - r} \quad \text{mits } -1 < r < 1$$

Twee pagina's uit het boek: links opgaven en rechts uitleg

Inzicht en vaardigheid

Zijn de gedeelten van het *Basisboek Wiskunde* die betrekking hebben op de op het havo of vwo behandelde wiskundeonderwerpen wél bruikbaar voor het verbeteren van de wiskundige basisvaardigheden van studenten? Het antwoord kan bevestigend zijn voor studenten die zich deze vaardigheden op het havo of vwo met inzicht hebben eigen gemaakt en ze destijds ook in verschillende situaties hebben leren toepassen. Voor hen kunnen sommige oefeningen uit het boek, en mogelijk ook de uitleg daarbij, zinvol zijn als zij merken dat ze bepaalde vaardigheden te slecht hebben onderhouden om deze in de context van de problemen die ze bij hun studie tegenkomen goed en vlot te kunnen gebruiken.

Lastig is wel dat in het *Basisboek Wiskunde* soms een andere methode besproken wordt dan die op school gebruikelijk is, wat bijvoorbeeld het geval is bij het bepalen van een vergelijking van de lijn door twee gegeven

punten in het vlak. Maar voor studenten die de inmiddels half of helemaal vergeten wiskundige basisvaardigheden als onbegrepen trucs geleerd hebben, is de didactiek van het *Basisboek Wiskunde* minder geschikt. Dat er, zoals het Voorwoord vermeldt, "maar één manier [is] om wiskunde onder de knie te krijgen: veel oefenen", behoeft namelijk enkele kanttekeningen. Deze zijn onder andere te vinden in de brochure *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen goede routine hebben*, auteur J. van Dormolen in samenwerking met de didactiekcommissie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, door deze vereniging uitgegeven in 1975 (heruitgave 1992), een brochure die nog niets aan actualiteit heeft ingeboet. De belangrijkste zijn in dit verband dat "het inoefenen van een vaardigheid pas met vrucht kan gebeuren nadat inzicht in die vaardigheid is verkregen" en dat "systeemscheiding kan (...) ontstaan doordat heel sterk geoefend wordt in het maken van

opgaven van eenzelfde type". Met name wat gerichtheid op inzicht en variatie van de oefensituaties betreft, schiet de didactische opzet van het *Basisboek Wiskunde* voor de wiskundig niet al te sterke student tekort. 



Basisboek Wiskunde, Jan van de Craats en Rob Bosch, Pearson Education Benelux, Oosterhout en Breda, 2005, 320 p., prijs €29,95, ISBN 90-430-1156-8.

Andries E. Brouwer

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513, 5600 MB Eindhoven

ae@win.tue.nl

Recreational Mathematics

Sudoku Puzzles and How to Solve Them

The Sudoku, a Latin square completion puzzle, has already conquered The Netherlands some time ago, surpassing in popularity the so-called griddlers ('Japanese puzzles' in Dutch). The puzzle was invented in Indianapolis in 1979 by Howard Garns. Garns contributed his puzzles to Dell Magazines, under the name of 'Number Place'. Interest in Sudoku surged due to a revival in Japan in 1986, when puzzle publisher Nikoli rediscovered the game. The name 'Sudoku' is the Japanese abbreviation of a longer phrase, "Suuji wa dokushin ni kagiru", meaning 'the digits must remain single' (source: Wikipedia). Although solving the puzzle is a trivial task for a computer, the puzzle has many interesting mathematical properties. There are even some open problems attached to it, as Andries Brouwer, professor in graph theory at the Technische Universiteit Eindhoven, shows in this article.

A Sudoku puzzle (of 'classical type') consists of a 9-by-9 matrix partitioned into nine 3-by-3 sub-matrices ('boxes'). Some of the entries are given, and the goal of the puzzle is to find the remaining entries, under the condition that the nine rows, the nine columns, and the nine boxes all contain a permutation of the symbols of some given alphabet of size 9, usually the digits 1–9, or the letters A–I.

Some mathematicians will claim that since this is a finite problem, it is trivial. The time needed to solve a Sudoku puzzle is $O(1)$ – indeed, one can always try the 9^{81} possible ways of filling the grid. But one can still ask for efficient ways of finding a solution. Or, if one already knows the solution, one can ask for a sequence of logical arguments one can use to convince someone else of the fact that this really is the unique solution.

Backtrack and elegance

It is very easy to write an efficient computer solver. Straightforward backtrack search suffices, and Knuth's 'dancing links' formulation of the backtrack search for an exact covering problem takes a few microseconds per puzzle on common hardware today.

For a human solver, backtracking is the last resort. If all attempts at further progress fail, one can always select an open square, preferably with only a few possibilities, and try these possibilities one by one—maybe using pencil and eraser, or maybe copying the partially filled diagram to several auxiliary sheets of paper and trying each possibility on a separate sheet of paper.

For very difficult Sudoku puzzles, this is the fastest way to solve them, both for computers and for humans.

However, one solves puzzles not because the answer is needed, but for fun, in order to exercise one's capabilities in logical reasoning. And solving by backtracking is dull, boring, mindless; it requires no thinking, is no fun at all, and should be left to computers.

So, Backtrack, or Trial & Error, is taboo. And if it cannot be avoided one prefers some limited form. Maybe whatever can be done entirely in one's head.

Grading

Most Sudoku puzzles one meets are computer-produced, and it is necessary to have a reasonable estimate of the difficulty of these puzzles. To this end one needs computer solvers that mimic human solvers. Thus, one would also implement the solving steps described below in a Sudoku solving program, not in order to find the solution as quickly as possible, but in order to judge the difficulty of the puzzle, or in order to be able to give hints to a human player. Such AI-type Sudoku solving programs tend to be a thousand to a million times slower than straightforward backtrack.

Generating

Given the backtrack solver, generating Sudoku puzzles is easy: start with an empty grid, and each time the backtrack solver says

that the solution is not unique throw in one more digit. (If at that point there is no solution anymore, try a different digit in the same place.) To generate a puzzle in this way requires maybe thirty calls to the backtrack solver, less than a millisecond. One can polish the puzzle a little by checking that none of the givens is superfluous.

Afterwards one feeds the puzzles that were generated to a grader. Maybe half will turn out to be very easy, and most will be rather easy ('humanly solvable'). It is very difficult to generate very difficult puzzles, puzzles that are too difficult even for very experienced humans.

Solving

Below we sketch a possible approach for a human solver. The goal is to be efficient. In particular, the boring and time-consuming action of writing all possibilities in every empty square is postponed as much as possible. On the other hand, some form of markup helps.

Baby steps

When eight digits in some row or column or box are known, one can find the last missing digit.

Singles

When there is only one place for a given digit in a given row or column or box, write it there. If there is only one digit that can go in a given square, write it there.

1	9	6	3		5	4	8	2
4	2	7		1	8	3	5	6
	5	3	2		4		7	9
6	1	2	7	4		8	3	5
9	4	8	5		1			
	7	5		8	2		4	1
5				2	6	7	9	
7	8	9	1	5		2	6	
	6	4	8	9	7	5	1	

Exercise (i) Solve this puzzle using baby steps only. (ii) Show that if a puzzle can be solved using baby steps only, it has at most 21 open squares.

Baby steps are particularly easy cases of singles. Checking for singles requires 324 steps. Knuth's 'dancing links' backtracker will take 324 steps if and only if the puzzle can be solved by singles only. It is unknown how

	1							
						3		
					1			
								1

Singles: the 1 in the center right box must be placed in the yellow square.

5						2	3	
			6					
								6
	6							

Singles: the 6 in the top row must be put in the yellow square.

many open squares a puzzle can have and be solvable by singles only. There are examples with 17 givens. It is unknown whether any Sudoku puzzles exist with 16 givens and a unique solution. (There exists an example with 16 givens and exactly two solutions.)

7	8					5		
				1				4
			2			9		
1							5	
3		4						
		6					1	3
	2		8		5			

Exercise Solve the above diagram, using singles only.



1	#		5	#	8	3	2	9
8	2		9	1	3	4		5
3	9	5		4	2	1		8
7	6	3	2	8	5	9	4	1
5	8	2	1	9	4		3	
4	1	9	3	#	#	8	5	2
2	#	1	8	3	#	5	9	
9	5			2	1		8	3
6	3	8		5	9	2	1	

1			5		8	3	2	9
8	2		9	1	3	4		5
3	9	5		4	2	1		8
7	6	3	2	8	5	9	4	1
5	8	2	1	9	4		3	
4	1	9	3			8	5	2
2		1	8	3		5	9	
9	5			2	1		8	3
6	3	8		5	9	2	1	

Matchings (3): For digit 7, the only possibilities in columns 2, 5, 6 occur in rows 1, 6, 7. Therefore, digit 7 cannot occur outside columns 2, 5, 6 in these rows.

Exercise Complete this Sudoku.

and columns interchanged. This argument is called *X-wing* for $n = 2$, *Swordfish* for $n = 3$, *Jellyfish* for $n = 4$.

The subset principle

Let S be a subset of the set of cells of a partially filled Sudoku diagram, and let for each digit d the number of occurrences of d in S be

	6				8	3		
	2	5				1		
				1	6			
		7		6				
8			4		5	7		3
							8	
		2				1	9	
	5					8		
4						7		

The subset principle: In the five colored squares, the five digits 2,3,4,5,9 each occur at most once (since all occurrences of 3,4,5 are in a single box and all occurrences of 2,5,9 in a single column). Since the situation is tight, digits 3,4,5 do not occur elsewhere in this box, and digits 2,5,9 do not occur elsewhere in this column.

The subset principle: one may remove a candidate for a cell outside S if its presence would force $\sum n_d < |S|$.

at most n_d . If $\sum n_d = |S|$, then the situation is tight: each digit d must occur precisely n_d times in S . In this case we can eliminate a digit d from the candidates of any cell C such that the presence of a d in C would force the number of d 's in S to be less than n_d .

More generally, one may remove a candidate for a cell outside S if its presence would force $\sum n_d < |S|$.

Hinge

The previous subsection used that each cell contains at least one digit. Conversely, each digit is in at least one cell in any given row, column or box.

Forcing Chains

Consider proposition $(i, j)d$: 'cell (i, j) has value d ' and proposition $(i, j)!d$: 'cell (i, j) has a value different from d '. By observing the grid one finds implications among such propositions.

There are at least three obvious types of such implications. Let us say that two cells are 'adjacent' (or, 'see each other') when they

	6				8	3		
	2	5				1		
				1	6			
		7		6				
8			4		5	7		3
							8	
		2				1	9	
	5					8		
4						7		

lie in the same row, column or box, so that they must contain different digits. This gives the first type (denoted by I): If (i, j) is adjacent to (k, l) then $(i, j)d > (k, l)!d$, where $>$ denotes implication.

4		2	8			1	6	
8			2		9	5	4	
			4		2	8		
9	4	1		2		8	3	5
2			3	8	4	6	9	1
6	8	3		9		4	7	2
7		8				9	2	4
3	2	4	9		8	7		6
			4	7	2	3		8

Hinge: if cell **a** has a 1, then cell **b** does not have a 1, and then the 1 in row 2 must be in cell **c**. But then the yellow area cannot contain a 1, which is impossible. (So, cell **a** has a 5.)

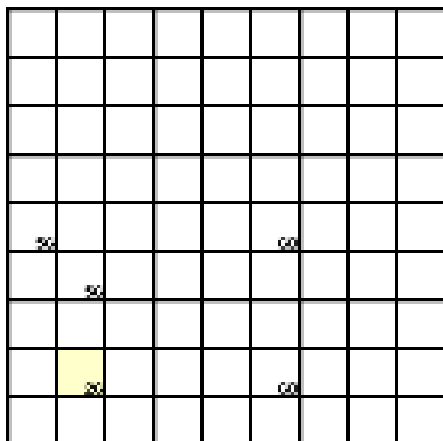
In case (i, j) is adjacent to (k, l) and (k, l) only has the two possibilities d and e , then $(i, j)d > (k, l)e$. This is the second type of implication (denoted by II).

Finally, if some row, column or box has only two possible positions (i, j) and (k, l) for some digit d , then $(i, j)d > (k, l)d$. This is the third type (denoted by III).

Let us now consider chains of implications. If $(i, j)d > \dots > (i, j)!d$ then $(i, j)!d$. For chains that only involve a single digit, and where the implication types alternate between I and III , one often uses a simplified notation like

$1 : (8, 2) - (6, 2) = (6, 9) - (4, 7) = (8, 7) - (8, 2)$.

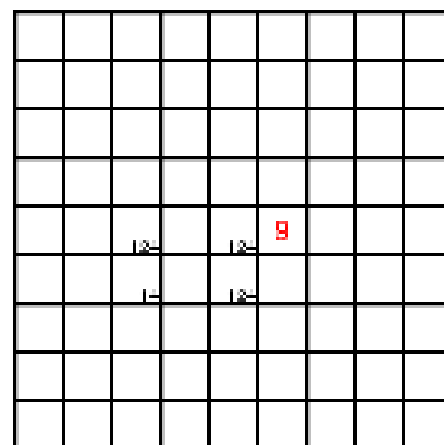
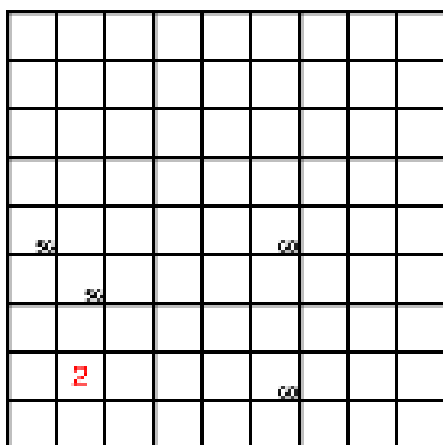
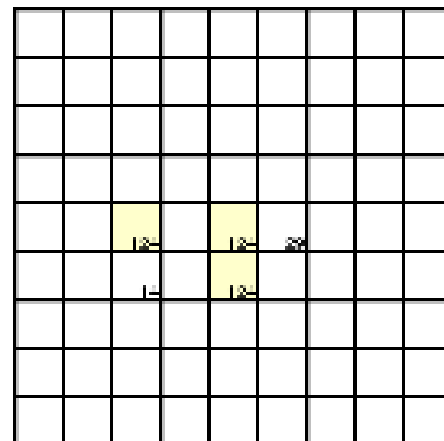
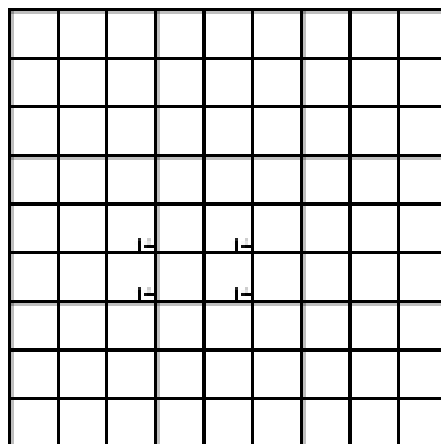
Here ' $-$ ' denotes that at most one is true and ' $=$ ' that at least one is true.



Finding useful chains may be nontrivial, and there are various techniques such as 'colouring' that help.

Uniqueness

A properly formulated Sudoku puzzle has a unique solution. One can assume that a given puzzle actually is properly formulated and use that in the reasoning, to exclude branches that would not lead to a unique solution.



A chain of implications. If $(i, j)d > \dots > (i, j)d$ then $(i, j)d$. For example, the sequence $(8, 2)6 > (8, 6)8 > (5, 6)6 > (5, 1)5 > (6, 2)6 > (8, 2)2$ is used to conclude that $(8, 2)2$.

For example, the above can be completed in at least two ways, violating the uniqueness assumption. This can be avoided: for instance in the diagram above at least one of the corners of the rectangle is 2.

Uniqueness: at least one of the corners of the rectangle must be 2.

2	8		5	1		3	9	7
	5			7	9	8	4	2
9	7			8	2	5		
7	9	2	8	5			3	
			7	2		9	5	8
5		8		9	3	7	2	
	3	7	9		8	2		5
8		9	2		5		7	3
	2	5	1	3	7		8	9

2	8		5	1		3	9	7
	5			7	9	8	4	2
9	7			8	2	5		
7	9	2	8	5			3	
			7	2		9	5	8
5		8		9	3	7	2	
	3	7	9		8	2		5
8		9	2		5		7	3
	2	5	1	3	7		8	9

Another chain of implications. (Check the given possibilities in red!) Here $(8, 2)1 > (6, 2)1 > (6, 9)1 > (4, 7)1 > (8, 7)1 > (8, 2)1$ is used to conclude $(8, 2)1$.

5	1	3	9			7	2	8
6	9	7	5	2	8	4	3	1
4	8	2	1	3		5		
3		5		1			8	
9		1	8			6		3
2		8				1		
1	5		4	8				
7			6	1				
8							1	

Uniqueness: if (7,7)3, then (7,5)8 and (8,7)8 so that (8,5)3 and we have a forbidden rectangle with pattern 83–38. So, (7,7)!3, which means that we have an X-wing: digit 3 in columns 2,7 can only be in rows 8,9 and does not occur elsewhere in these rows. In particular (9,4)!3 so that (6,4)3, and (8,5)!3 so that (8,5)8.

More generally the following theorem holds.

Theorem Suppose one writes some (more than 0) candidate numbers in some of the initially open cells of a given Sudoku diagram, 0 or 2 in each cell, such that each value occurs 0 or 2 times in any row, column, or box. Then

this Sudoku diagram has an even number of completions that agree with at least one of the candidates in each cell where candidates were given. In particular, if the Sudoku diagram has a unique solution, then that unique solution differs from both candidates in at least one cell.

Digit patterns and jigsaw puzzles

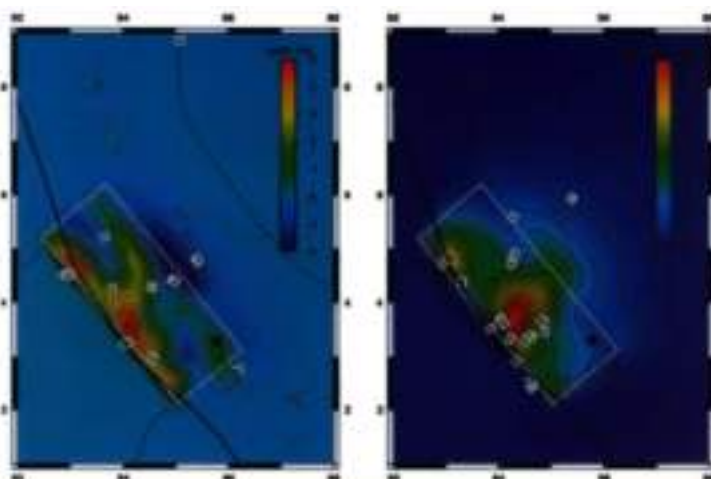
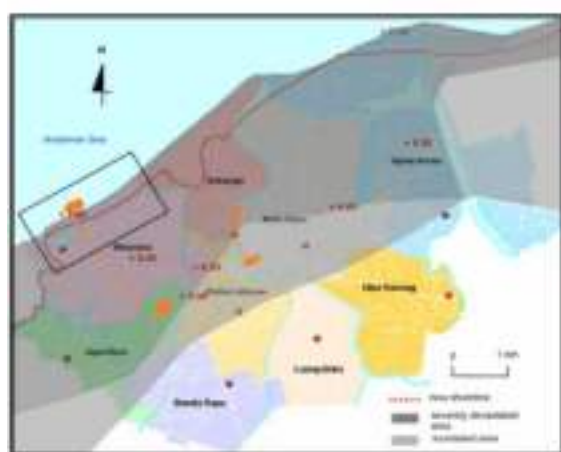
A more global approach was described by *Myth Jellies* (a pseudonym of a user of the Sudoku forum www.sudocue.net), the inventor of the *Pattern Overlay Method* (PDM), that is, jigsaw technique. Solve a puzzle until no further progress is made. Then, for each of the nine digits, write down all possible solution patterns for that digit. One hopes to find no more than a few dozen patterns in all. Now the actual solution has one pattern for each digit, where these 9 patterns partition the grid.

Regard each digit pattern ('jigsaw piece') as a boolean formula ('this pattern occurs in the solution'). Write down the formulas that express that for each of the nine digits exactly one pattern occurs, and that overlapping pieces cannot both be true. Solve the resulting system of propositional formulas.

This approach allows one to solve some otherwise unapproachable puzzles. ←

Remark This note is a condensed version of <http://homepages.cwi.nl/~aeb/games/sudoku>





Marjolein Dohmen-Janssen

Faculteit Construerende Technische Wetenschappen

Civiele Techniek

Afdeling Waterbeheer

Universiteit Twente

Postbus 217

7500 AE Enschede

c.m.dohmen-janssen@ctw.utwente.nl

Vakantiecursus

Hoe ontstaan tsunami's?

Op de Vakantiecursus 2006 met als thema 'Actuele Wiskunde' heeft Marjolein Dohmen-Janssen, onderzoeker op het gebied van waterbeheer aan de Universiteit Twente, de wiskundige achtergrond van de Tsunami besproken. Meestal gebeurt dit aan de hand van een of andere variant van de Korteweg-De Vriesvergelijking; hier is gekozen voor en zeer toegankelijke benadering vanuit de golfenfyfysica.

Op zondag 26 december 2004 werd Zuidoost-Azië getroffen door een van de zwaarste aardbevingen uit de geschiedenis. De magnitude was tenminste 9,0 [1]. Deze aardbeving, waarvan het epicentrum ongeveer 150 km ten westen van het Indonesische eiland Sumatra lag, veroorzaakte een vloedgolf – een *tsunami* – die tot enorme overstromingen leidde in de kustgebieden langs de Indische Oceaan: van Sumatra en Thailand tot aan Sri Lanka, India en zelfs Somalië. Ongeveer driehonderdduizend mensen kwamen om het leven en miljoenen raakten gewond en/of dakloos.

In dit artikel leggen we eerst kort uit hoe een tsunami ontstaat. Vervolgens gaan we uitgebreider in op de voortplanting van tsunami's over de oceaan en de veranderingen die optreden wanneer een tsunami de kust nadert. Daartoe laten we eerst zien hoe golven wiskundig te beschrijven zijn.

Een tsunami is een voorbeeld van een *lopende lange golf*. We hebben ervoor gekozen geen volledig overzicht van de theorie van (lange) golven te geven (zie hiervoor bijvoorbeeld [2]). In plaats daarvan presenteren we enkele karakteristieken van lopen-

de golven. Lopende golven zijn er in vele verschijningsvormen. De meest bekende zijn de 'gewone' golven op zee. Dit zijn korte golven. Het getij en een tsunami zijn voorbeelden van lange golven. We zullen laten zien dat de karakteristieken van 'gewone' (korte) golven en van lange golven (zoals tsunami's) twee uitersten vormen. Aan de hand hiervan worden de overeenkomsten en de verschillen duidelijk tussen korte en lange golven (en dus tussen 'gewone' golven en tsunami's) en wordt duidelijk hoe tsunami's zich voortplanten en hoe ze veranderen nabij de kust.

Daarna gaan we nog iets specifieker in op de voortplanting van de tsunami van 26 december 2004 over de oceaan om vervolgens te laten zien waarom tsunami's zulke desastreuze gevolgen kunnen hebben (in tegenstelling tot gewone golven terwijl die vaak veel hoger zijn). Tot slot staan we kort stil bij de (on)mogelijkheden om de gevolgen van een dergelijk natuurverschijnsel te beperken.

Oorsprong tsunami's

Om een tsunami te genereren is een mechanisme nodig dat in korte tijd een grote hoeveelheid water verplaatst. Een voorbeeld van zo'n mechanisme is een aardbeving die plaatsvindt in de aardkorst onder water. Niet elke aardbeving onder water veroorzaakt een tsunami. Twee platen die horizontaal langs elkaar schuiven kunnen wel een aardbeving veroorzaken, maar hierbij zal nauwelijks water verplaatst worden. Er moet een verticale beweging plaatsvinden van de zeebodem. Bovendien moet de aardbeving behoorlijk sterk zijn (magnitude $> 7,0$) en niet te diep onder de zeebodem plaatsvinden. Als een tsunami wordt opgewekt, hangt het ook nog af van de diepte van het water waaronder de aardbeving plaatsvindt of de tsunami zo hoog wordt als in december 2004. Als de aardbeving onder een ondiepe zee of oceaan plaatsvindt, is het verschil in waterdiepte tussen de plaats van ontstaan en het kustgebied klein. Daardoor is ook het verschil in voortplantingssnelheid van de tsunami klein en zal de hoogte van de golf weinig toenemen. De aardbeving van 26 december 2004 vond

Figuur 1 Linksboven: kaart van Banda Atjeh met de oorspronkelijke en de nieuwe kustlijn, het gebied dat grotendeels verwoest is en het gebied dat overstromd is. De oranje symbolen geven de verplaatsing weer van twee schepen door de tsunami. (Het linker schip, van meer dan 1000 ton, werd door de tsunami ruim 3 km landinwaarts meegesleept.) Het kader geeft de locatie aan van de satellietfoto's die eronder worden weergegeven. De getallen geven de waterdiepte in meters ten gevolge van de tsunami. De werkelijke overstromingsdiepte was nog ongeveer een meter hoger als gevolg van het getij op het moment van de tsunami (uit [5] op basis van data uit [11]). Rechtsboven: berekende verplaatsing van de zeebodem als gevolg van de aardbeving. Links: verticale verplaatsing, rechts: horizontale verplaatsing [7]. De dikke zwarte lijn geeft de rand van de Indo-Australische plaat weer. De dunne zwarte lijn geeft de kustlijn van noordwest-Sumatra en de omliggende eilanden aan. De getallen langs de horizontale en verticale assen geven respectievelijk de graden noorderbreedte en oosterlengte. Onderste twee foto's: Noordoost van Banda Atjeh, vóór en na de tsunami van 26 december 2004 [12].

Grootheid	Symbool	Eenheid	Omschrijving	Engels
Golfhoogte	H	m	Afstand tussen golftop en golfdal	Wave height
Golflengte	L	m	Afstand tussen twee golftoppen	Wave length
Amplitude	a	m	Maximale uitwijking wateroppervlak t.o.v. gemiddeld zeeniveau	Amplitude
Golfperiode	T	s	Tijdsduur tussen passeren twee golftoppen	Wave period
Voortplantingssnelheid	$c = L/T$	m/s	Snelheid waarmee individuele golf zich voortplant	Wave celerity
Hoekfrequentie	$\omega = 2\pi/T$	rad/s		Angular frequency
Golfgetal	$k = 2\pi/L$	rad/m		Wave number
Oppervlakte-uitwijking	$\eta(x, t)$	m	Niveau van de waterspiegel t.o.v. de gemiddelde waterstand	
Golfsteilheid	H/L	–	Verhouding tussen golfhoogte en golflengte	Wave steepness

Tabel 1 Gebruikte terminologie bij lopende golven

plaats onder een ruim 1 kilometer diep zeegebied.

De aardkorst bestaat uit verschillende platen die ten opzichte van elkaar bewegen. Voor de westkust van Sumatra schuift de Indo-Australische plaat geleidelijk naar het noordoosten onder de Euraziatische plaat (figuur 2a). Door de schuifweerstand tussen

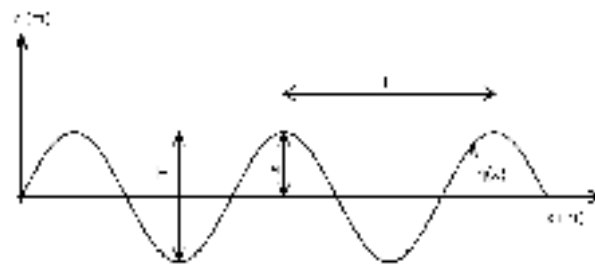
de twee platen wordt de Euraziatische plaat meegetrokken naar beneden en buigt de plaat op (figuur 2b). Bij de aardbeving is de Euraziatische plaat 'losgeschoten' en ongeveer twintig meter langs het breukvlak verplaatst. Het breukvlak maakt daar een hoek van 13° met het horizontale vlak, wat resulteert in een verticale verplaatsing van ongeveer 4,5 meter. Door de ontspanning is het opgebogen deel weer gestrekt. Dit losschieten en strekken heeft een stijging van de zeebodem en dus van de waterspiegel aan de oceaanzijde en een daling aan de continentale zijde veroorzaakt (figuur 1 rechtsboven en figuur 2c).

Deze verstoring plant zich vervolgens voort als een lopende golf. Door de specifieke configuratie zoals hierboven beschreven was het front van de tsunami-golven aan de westkant een top en aan de oostkant een dal, het laatste merkbaar als een zich aanvankelijk terugtrekken van de zee aan de kusten van Sumatra en Thailand. Het brongebied van de aardbeving en dus van de waterspiegelverstoring strekte zich uit over een gebied van circa 400×200 km (zie figuur 1 rechtsboven). Dit betekent dat een tsunami gegenereerd wordt met golflengtes van deze grootteorde.

Karakteristieken van lopende golven

Definitie en voorbeelden korte en lange golven

Om te beginnen presenteert figuur 3 een definitieschets van een lopende golf.



Figuur 3 Definitieschets van een lopende golf

Figuur 2 Schematische weergave van de tektoniek van het gebied rond Sumatra en de beweging van de aarde vóór en tijdens de aardbeving. De Indo-Australische plaat duikt onder de Euraziatische plaat (a). Door de schuifweerstand tussen deze twee platen trekt de onderduikende plaat de overliggende plaat een stukje mee naar beneden en buigt de laatste op (b). Als de spanning te groot wordt 'schiet' de bovenliggende plaat los en strekt weer. Als gevolg hiervan wordt het water aan de oceaanzijde omhoog geduwd en daalt het waterniveau aan de continentale zijde (c).

daarom windgolven genoemd. Het getij wordt veroorzaakt door de aantrekkingskracht tussen aarde en maan. Tsunami's worden veroorzaakt door bijvoorbeeld een aardbeving of door een landverschuiving of een vulkaanuitbarsting onder water.

- Golven worden 'kort' genoemd, of 'diepwatergolven' wanneer de *waterdiepte* waarover de golven zich voortplanten *groter* is dan de halve *golflengte*: $h \geq \frac{1}{2}L$ of $L \leq 2h$
- Golven worden 'lang' genoemd, of 'ondiepwatergolven' wanneer de *waterdiepte* waarover de golven zich voortplanten *kleiner* is dan $\frac{1}{20}$ van de *golflengte*: $h \leq \frac{1}{20}L$ of $L \geq 20h$

Voor een typische windgolf op de Noordzee met een golfperiode van 7 s is de golflengte ongeveer 75 m (zie later). Dit betekent dat dit een korte of diepwatergolf is in waterdieptes van ongeveer 35 m of meer. De diepte van de Noordzee is 30–40 meter en dus is dit inderdaad een korte of diepwatergolf; tenminste wanneer de golf zich voldoende ver uit de kust bevindt. Deze golf wordt een 'lange' of 'ondiepwatergolf' in waterdieptes van ongeveer 4 meter. Dichtbij de kust gedragen windgolven zich dus als ondiepwatergolven. Tsunami's hebben golflengtes in de orde van honderden kilometers. Zelfs op oceanen van enkele kilometers diep gedragen deze zich dus altijd als lange of ondiepwatergolven (voor $L = 200$ km: $h \leq 10$ km).

Oppervlakte-uitwijking

Voor een eerste benadering van de voortplanting van golven wordt gebruik gemaakt van de lineaire golftheorie. Deze gaat ervan uit dat de verstoringen ten gevolge van de golven klein zijn; oftewel dat de golfhoopte klein is ten opzichte van de waterdiepte en de golflengte ($H/h \ll 1$, $H/L \ll 1$). In dat geval is de uitwijking van het wateroppervlak te schrijven als:

$$\eta(x, t) = a \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

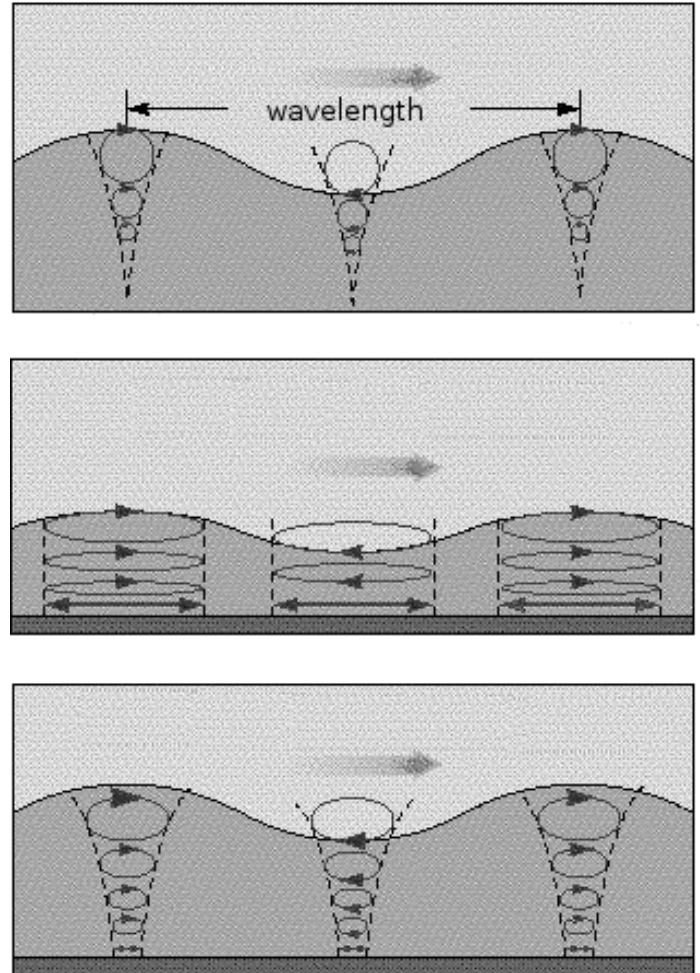
Woordenlijst seismologie

Hypocentrum = locatie van de aardbevingshaard

Epicentrum = de plaats aan het aardoppervlak recht boven het hypocentrum

Magnitude = de maat waarmee de sterkte van een aardbeving wordt weergegeven. Omdat aardbevingen grote variaties in sterkte hebben, zijn de magnitudeschalen logaritmisch. Er zijn verschillende magnitudeschalen. De bekendste is die van Richter, die gebaseerd is op de grootste amplitude van het seismogram, gemeten met een standaard seismometer en gecorrigeerd voor de afstand. Andere schalen zijn bijvoorbeeld gebaseerd op oppervlaktegolven (*surfacewave magnitude*) of ruimtegolven (*bodywave magnitude*). De meest recente schaal is de momentmagnitudeschaal, die afgeleid is van het seismisch moment. De in dit artikel genoemde magnitude is de momentmagnitude M . Tot $M = 6$ komt de schaal van Richter ongeveer overeen met deze schaal. Daarboven wijken deze schalen van elkaar af en geeft de schaal van Richter een te lage waarde (dit heet verzadiging).

Seismisch moment = maat voor de kracht van een aardbeving waarin het totale breukoppervlak, de gemiddelde verplaatsing van het breukvlak en de elasticiteitseigenschappen van het gesteente tot uitdrukking komen. Het is een maat voor de energie die vrijkomt uit de bron van de aardbeving.



Figuur 4 Schematische weergave van de waterbeweging (orbitaalbeweging) onder lopende golven (uit: [15]). Bovenste figuur zijn diepwatergolven: diepte $\geq \frac{1}{2}$ golflengte, middelste figuur ondiepwatergolven: diepte $\leq \frac{1}{20}$ golflengte en onderste figuur golven op tussenliggende waterdieptes: diepte $\leq \frac{1}{2}$ tot $\geq \frac{1}{20}$ golflengte.

Orbitaalbeweging

Golven planten zich voort met snelheid $c = L/T$. Bovendien zetten golven het water in beweging. De snelheid van de waterdeeltjes is echter niet gelijk aan de voortplantingssnelheid van golven. Deze *orbitaalbeweging* hangt af van het feit of we te maken hebben met diep- of ondiepwatergolven:

- Diepwatergolven veroorzaken een cirkelvormige orbitaalbeweging. Hoe verder onder het wateroppervlak, hoe minder de golven worden gevoeld en hoe kleiner de orbitaalbeweging is. Uiteindelijk is op een diepte van een halve golflengte onder het wateroppervlak de invloed van golven geheel verdwenen (zie voor een animatie van de orbitaalbeweging op diep water [8]).
- Het kenmerk van ondiepwatergolven is dat de waterdiepte zo klein is dat de drukfluctuaties en de snelheden van de waterdeeltjes ten gevolge van de golf vrijwel onverminderd doordringen tot de bodem. Dit leidt tot een ellipsvormige orbitaalbeweging, die vlak boven de bodem afgevlakt wordt tot een heen-en-weer gaande orbitaalbeweging evenwijdig aan de bodem. Onder lange golven beweegt de hele waterkolom dus (enigszins) heen en weer tijdens het passeren van de golftoppen en dalen.
- Voor tussenliggende waterdieptes is de orbitaalbeweging een

combinatie van deze uitersten.

De orbitaalbeweging is schematisch weergegeven voor diepwatertgolven, ondiepwatertgolven en golven op tussenliggende waterdieptes (figuur 4). Merk op dat de figuren niet op schaal zijn. De diameter van de cirkel die de waterdeeltjes beschrijven op diep water is gelijk aan de golfhoogte H . Deze is zeer veel kleiner dan de golflengte (typische waarden voor windgolven zijn $H = 2$ m, $L = 75$ m).

Orbitaalsnelheid

De horizontale en verticale snelheid van een waterdeeltje (horizontale en verticale orbitaalsnelheid) u en w worden gegeven door de volgende vergelijkingen:

$$u(x, t) = \omega a \frac{\cosh[k(h+z)]}{\sinh[kh]} \sin(\omega t - kx) = \hat{u} \sin(\omega t - kx) \quad (2)$$

$$w(x, t) = \omega a \frac{\sinh[k(h+z)]}{\sinh[kh]} \cos(\omega t - kx) = \hat{w} \cos(\omega t - kx) \quad (3)$$

De horizontale en verticale snelheid verschillen op ieder moment 90° in fase, overeenkomend met een cirkelvormige (of elipsvormige) beweging. Bovendien is de horizontale snelheid u in fase met de oppervlakteuitwijking η : onder de top van de golf is de horizontale snelheid van een waterdeeltje maximaal (en in de richting van de golfvoortplanting) en onder het dal van de golf is de horizontale snelheid van een waterdeeltje maximaal tegen de richting van de golfvoortplanting in. De verticale snelheid w is uit fase met de oppervlakteuitwijking η : onder de top en het dal van de golf is de verticale snelheid van een waterdeeltje nul. De verticale snelheid is maximaal (positief/negatief) bij de overgang van golftop naar golfdal en andersom.

Wat betreft de grootte van de horizontale en verticale watersnelheid kijken we naar de amplitudes $\hat{u}$ en $\hat{w}$ aan het wateroppervlak ($z = 0$) en aan de bodem ($z = -h$). Dit levert het volgende resultaat:

Aan het wateroppervlak ($z = 0$):

$$\hat{u} = \omega a \frac{\cosh[kh]}{\sinh[kh]} = \frac{\omega a}{\tanh[kh]} \quad (4)$$

$$\hat{w} = \omega a \frac{\sinh[kh]}{\sinh[kh]} = \omega a \quad (5)$$

Aan de zeebodem ($z = -h$):

$$\hat{u} = \omega a \frac{\cosh[0]}{\sinh[kh]} = \frac{\omega a}{\sinh[kh]} \quad (6)$$

$$\hat{w} = \omega a \frac{\sinh[0]}{\sinh[kh]} = 0 \quad (7)$$

De amplitude van de verticale watersnelheid is dus altijd gelijk aan nul aan de zeebodem (direct boven de bodem kan het water alleen evenwijdig aan de bodem stromen) en altijd gelijk aan $\omega a (= \pi H/T)$ aan het oppervlak.

Verskil in orbitaalsnelheid tussen korte en lange golven

De amplitude van de horizontale snelheid daarentegen hangt ook

nog af van $kh (= 2\pi h/L)$ en dus van de waterdiepte/golflengte verhouding. Met andere woorden deze horizontale watersnelheid is anders voor korte of diepwatertgolven ($kh \gg 1$) dan voor lange of ondiepwatertgolven ($kh \ll 1$). We maken gebruik van de volgende schattingen: voor grote x gedragen $\sinh x$ en $\cosh x$ zich als $\frac{1}{2}e^x$, en voor x dicht bij 0 gedraagt $\sinh x$ zich als x en is $\cosh x$ ongeveer gelijk aan 1. Dit stelt ons in staat een schatting van $\hat{u}$ en $\hat{w}$ te maken in de verschillende situaties:

- Voor korte of diepwatertgolven ($kh \gg 1$) op voldoende afstand boven de bodem ($k(h+z) \ll 1$) geldt:

$$\hat{u} \approx \omega a \frac{\frac{1}{2}e^{k(h+z)}}{\frac{1}{2}e^{kh}} = \omega a \frac{e^{kh}e^{kz}}{e^{kh}} = \omega a e^{kz} \quad (12)$$

$$\hat{w} \approx \omega a \frac{\frac{1}{2}e^{k(h+z)}}{\frac{1}{2}e^{kh}} = \omega a \frac{e^{kh}e^{kz}}{e^{kh}} = \omega a e^{kz} \quad (13)$$

Dus $\hat{u}$ en $\hat{w}$ zijn altijd aan elkaar gelijk (cirkelvormige beweging), zijn maximaal aan het wateroppervlak ($\hat{u} = \hat{w} = \omega a$) en nemen exponentieel af met de diepte.

- Voor lange of ondiepwatertgolven ($kh \ll 1$) geldt:

$$\hat{u} \approx \omega a \frac{1}{kh} = \frac{\omega a}{kh} \quad (14)$$

$$\hat{w} \approx \omega a \frac{k(h+z)}{kh} = \omega a \frac{h+z}{h} = \omega a \left(1 + \frac{z}{h}\right) \quad (15)$$

Hieruit blijkt dat voor lange golven de horizontale watersnelheid constant is over de diepte (de hele waterkolom is in beweging), terwijl de verticale watersnelheid lineair toeneemt van nul aan de zeebodem tot ωa aan het wateroppervlak.

Golfvoortplantingssnelheid en relatie tussen golfperiode en golflengte

Voor vrije zwaartekrachts-oppervlaktegolven bestaat een relatie tussen de frequentie en het golfgetal (ofwel tussen de golfperiode en de golflengte). Deze wordt gegeven door de volgende *dispersierelatie*:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (16)$$

Waarbij g de zwaartekrachtsversnelling is. Deze vergelijking is gelijk aan:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) \quad (17)$$

Omdat per definitie de voortplantingssnelheid gelijk is aan ω/k geldt:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \quad (18)$$

Omdat $\omega/k = L/T$ geldt ook:

$$c = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh) \quad (19)$$

Verskil in voortplantingssnelheid en golflengte tussen korte en lange golven

We maken gebruik van:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\tanh x) = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\tanh x) = x$$

- Voor korte of diepwatertgolven ($kh \gg 1$) geldt dus:



Foto: David Butow/Redux/Hollandse Hoogte

Een overlevende van de tsunami in de kuststreek van Atjeh

$$c = \frac{gT}{2\pi} \quad (22)$$

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \quad (23)$$

Zowel de golflengte als de voortplantingssnelheid zijn slechts afhankelijk van de golfperiode (en de zwaartekrachtsversnelling) en blijven onveranderd terwijl de golf zich voortplant (aangezien de golfperiode altijd constant is).

- Voor lange of ondiepwatergolven ($kh \ll 1$) geldt:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} kh = \sqrt{gh} \quad (24)$$

$$L = \sqrt{gh}T \quad (25)$$

Vergelijking (24) laat zien dat voor lange golven de voortplantingssnelheid slechts afhankelijk is van de waterdiepte (en de zwaartekrachtsversnelling) en dat deze afneemt met afnemen van de waterdiepte. De golflengte is daarnaast ook nog afhankelijk van de golfperiode, maar omdat deze niet verandert, neemt ook de golflengte af bij afnemende waterdiepte. Dit alles heeft gevolgen voor de golfhoogte zoals we later zullen zien.

Dispersie

Uit vergelijking (22) blijkt dat de voortplantingssnelheid van kor-

te golven slechts afhankelijk is van de golfperiode. Dit betekent dat naarmate de golfperiode langer is, de golven zich sneller voortplanten. Tijdens het voortplanten op de oceaan halen de langere golven de kortere dus in en na verloop van tijd bevinden de langere golven zich vooraan in het golfveld en de kortere golven achteraan. Dit wordt golfdispersie genoemd. Op het moment dat de langere golven de kortere golven inhalen verandert de oppervlakteuitwijking. Deze is namelijk het resultaat van beide golven (zie voor een animatie [9]). Door golfdispersie kan de oppervlakteuitwijking dus groter zijn dan ten gevolge van de individuele golven. Vergelijking (24) laat zien dat de voortplantingssnelheid van lange golven slechts afhankelijk is van de waterdiepte. Dit betekent dat – ongeacht de golfperiode – deze golven op een bepaalde locatie allemaal dezelfde voortplantingssnelheid hebben. Dit betekent dat golfdispersie zich bij lange golven niet voordoet en dat de oppervlakteuitwijking slechts bepaald wordt door de individuele golven. Omdat tsunami's lange golven zijn, is in eerste instantie de verwachting dat dispersie verwaarloosbaar is en dat de oppervlakteuitwijking slechts bepaald wordt door de individuele tsunamigolven. Er is echter gebleken dat voor de lange afstand waarover tsunami's zich verplaatsen dispersie toch een rol speelt en daardoor de oppervlakteuitwijking groter kan zijn dan die ten gevolge van de individuele tsunamigolven ([3], [4]).

Energie en energieoverdracht

Per eenheid van oppervlak bezitten golven een hoeveelheid energie gelijk aan:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (26)$$

Waarbij ρ de dichtheid van water is. De hoeveelheid energie hangt dus slechts af van de golfhoogte (en wel kwadratisch) en de dichtheid van water en de zwaartekrachtversnelling. Belangrijker dan de hoeveelheid energie die de golven bezitten is de hoeveelheid energie die ze over kunnen dragen (het vermogen). De energieoverdracht (energieflux) in de voortplantingsrichting per tijd en per breedte (dat wil zeggen per lengte golfkam) is gelijk aan:

$$F = Enc = \frac{1}{8} \rho g H^2 n c \quad (27)$$

$$n = \frac{1}{2} + \frac{kh}{\sinh(2kh)} \quad (28)$$

Op diep water ($kh \gg 1$) geldt $n = 1/2$ en dus:

$$F = \frac{1}{16} \rho g H^2 c \quad (29)$$

Op ondiep water ($kh \ll 1$) geldt $n = 1$ en dus:

$$F = \frac{1}{8} \rho g H^2 c \quad (30)$$

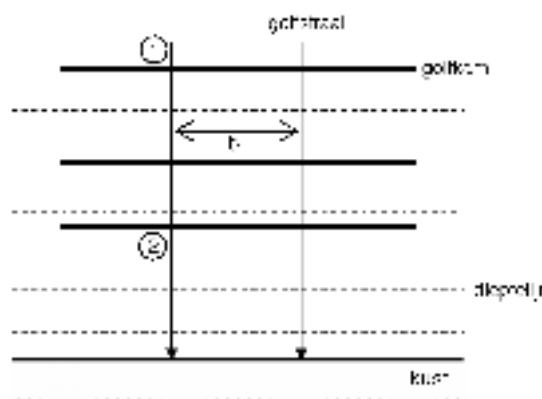
Shoaling en refractie

Zolang golven niet breken, vindt energieverlies voornamelijk plaats door wrijving langs de bodem. In een eerste benadering is dit energieverlies verwaarloosbaar. De energieoverdracht vindt plaats in de richting van de golfvoortplanting. Er is dus geen energieoverdracht in de richting loodrecht hierop (langs een golfkam). Dit alles houdt in dat de energieoverdracht constant is tussen twee golfstralen (loodlijnen op de golfkammen). Dit leidt tot twee belangrijke fenomenen wanneer golven de kust naderen: shoaling en refractie. Shoaling is het vervormen van de golven door het ondieper worden van het water, refractie is het bijdraaien van golven naar de dieptelijnen toe met eveneens een vervorming van de golf tot gevolg.

Wanneer golven de kust naderen, gedragen uiteindelijk alle golven zich als ondiepwatervolven. Het enige verschil is dat de positie van waaraf golven beschouwd kunnen worden als ondiepwatervolven dichterbij de kust ligt, naarmate de invallende golf korter is: Zoals we eerder hebben gezien gedraagt een tsunami zich zelfs op de oceaan als een lange golf. Een typische windgolf zal zich pas als lange golf gedragen in waterdiepte van enkele, dus enkele honderden meters uit de kust. Omdat we voor dit artikel met name geïnteresseerd zijn in de effecten van shoaling en refractie voor tsunami's, gaan we er in het vervolg van uit dat de golf zich steeds gedraagt als lange golf (zoals voor en tsunami het geval is).

Beschouw ten eerste een situatie van een rechte kust met evenwijdige dieptelijnen en een golf die loodrecht op de kust invalt, dat wil zeggen met de golfkammen evenwijdig aan de kust en de dieptelijnen (zie figuur 5).

F is de energieoverdracht per eenheid van breedte. De energieoverdracht tussen twee golfstralen is dus Fb , waarbij b de afstand tussen twee golfstralen is. Overigens is bij loodrecht invallende golven deze afstand constant (zie figuur 5). Het feit dat de energieoverdracht tussen twee golfstralen constant blijft, levert de vol-



Figuur 5 Boveenaanzicht van golven die loodrecht invallen op een kust met parallelle dieptelijnen

gende vergelijking:

$$\begin{aligned} F_1 b &= F_2 b \\ \frac{1}{8} \rho g H_1^2 c_1 b &= \frac{1}{8} \rho g H_2^2 c_2 b \\ H_1^2 c_1 &= H_2^2 c_2 \end{aligned} \quad (31)$$

Waarbij F_1 de energieoverdracht op locatie 1 is (ver uit de kust) en F_2 de energieoverdracht op locatie 2 (dichtbij de kust). Evenzo zijn H_1, H_2 en c_1 en c_2 de golfhoogtes en voortplantingssnelheden op de verschillende locaties. Omdat we een lange golf beschouwen is de voortplantingssnelheid gelijk aan $\sqrt{gh}$ en dus:

$$\begin{aligned} H_1^2 c_1 &= H_2^2 c_2 \\ H_1^2 \sqrt{gh_1} &= H_2^2 \sqrt{gh_2} \\ H_2 &= \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{1/4} H_1 \end{aligned} \quad (32)$$

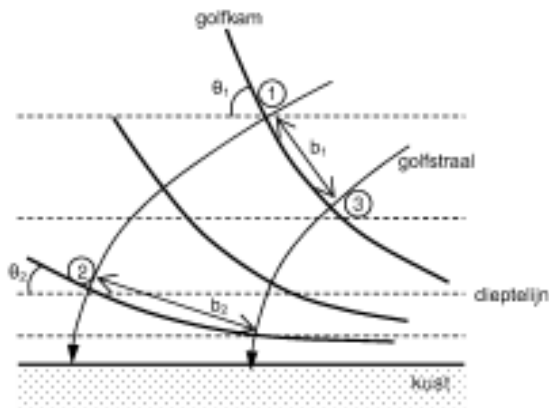
De golfhoogte dichtbij de kust is dus een factor $(h_1/h_2)^{1/4}$ groter dan de golfhoogte ver uit de kust. Een tsunami die opgewekt wordt op een diepte van 1 km en daar een hoogte heeft van een halve meter, heeft dus op een waterdiepte van 3 m een hoogte van ruim 4 m. Deze toename in golfhoogte is het gevolg van het ondieper worden van het water en wordt shoaling genoemd.

Beschouw nu een situatie waarbij golven schuin invallen op een rechte kust met evenwijdige dieptelijnen (figuur 6).

Het deel van de golf dat zich bevindt bij locatie 1, bevindt zich in dieper water dan het deel dat zich bevindt bij locatie 3. Omdat de voortplantingssnelheid afhangt van de waterdiepte, heeft het deel van de golf dat zich bevindt bij locatie 1 een hogere voortplantingssnelheid dan het deel dat zich bevindt bij locatie 3. Hierdoor verplaatst de golfkam zich gedurende een bepaalde tijdsduur op locatie 1 over een grotere afstand dan bij locatie 3. Het gevolg is dat de golven bijdraaien naar de ondiepten, dus naar de kust, toe. Dit proces heet refractie. Dit bijdraaien van de golven heeft eveneens gevolgen voor de golfhoogte.

Constante energieoverdracht tussen twee golfstralen leidt nu tot de volgende vergelijking:

$$\begin{aligned} F_1 b_1 &= F_2 b_2 \\ \frac{1}{8} \rho g H_1^2 c_1 \cos \theta_1 &= \frac{1}{8} \rho g H_2^2 c_2 \cos \theta_2 \\ H_1^2 \sqrt{gh_1} \cos \theta_1 &= H_2^2 \sqrt{gh_2} \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (33)$$



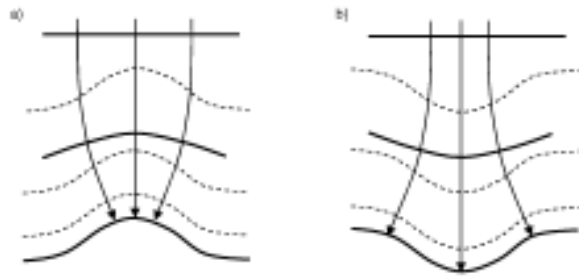
Figuur 6 Bovenaanzicht van golven die schuin invallen op een kust met parallelle dieptelijnen

En dus:

$$H_2 = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}} \quad (34)$$

Wanneer θ_2 kleiner is dan θ_1 (zoals in de situatie van schuin invallende golven op een rechte kust), leidt refractie tot een afname in de golfhoogte. Visueel is dit voor te stellen doordat de aanwezige energie tussen de golfstralen op locatie 1,

bij locatie 2 over een groter lengte van de golfkam wordt verspreid. Dit gaat dus samen met een afname van de golfhoogte. Bij gekromde dieptelijnen, hangt het van de situatie af, of refractie leidt tot een toe- of een afname van de golfhoogte, zoals geïllustreerd in figuur 7.



Figuur 7 Golfrefractie bij gekromde dieptelijnen. Situatie a: Kapen convergentie van golfstralen: refractie leidt tot toename van golfhoogte. Situatie b: Baaien divergentie van golfstralen: refractie leidt tot afname van golfhoogte.

Golfbreking en golfploop

De verhouding tussen de golfhoogte en de golflengte geeft de golfsteilheid. Wanneer de golfsteilheid te groot wordt, worden golven instabiel en zullen ze breken. De maximale steilheid die golven kunnen bereiken voordat ze breken wordt gegeven door het volgende criterium:

$$\left(\frac{H}{L} \right)_{\max} \cong 0.14 \tanh(kh) \quad (35)$$

Op diep water ($kh \gg 1$) kunnen windgolven breken tijdens een storm, wanneer door sterke wind de golven groeien. Dit gebeurt bij een steilheid van 0.14. Golven breken echter voornamelijk op

stranden. In de vorige paragraaf is gebleken dat door shoaling de voortplantingssnelheid en de lengte van de golven afnemen, terwijl de golfhoogte toeneemt. Hierdoor worden golven dus steeds steiler. Bovendien treedt er nog een extra vervorming op doordat de hogere delen sneller gaan lopen dan de lagere, waardoor met name de voorzijde van de golven (gezien vanuit de kust) extra steil wordt. Op ondiep water leidt het steilheidscriterium tot de volgende vergelijking:

$$\left(\frac{H}{L} \right)_{\max} \cong 0.14kh = 0.14 \frac{2\pi h}{L} = 0.88 \frac{h}{L} \quad (36)$$

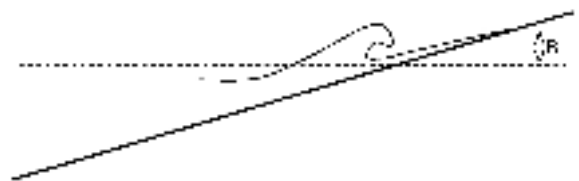
$$\left(\frac{H}{h} \right)_{\max} = 0.88 \quad (37)$$

In de praktijk blijkt de maximale golfhoogte/waterdiepte verhouding meer in de buurt van 0.6 te liggen. Dit betekent dat golven als gevolg van shoaling steeds hoger worden, totdat de golfhoogte ongeveer gelijk is aan 60% van de waterdiepte en de golven breken. Bij het breken verliezen ze een groot deel van de energie en dus daalt de golfhoogte.

Of golven werkelijk breken en hoe precies hangt af van de helling van het bodemprofiel (hellingshoek β) t.o.v. de golfsteilheid; de brekerparameter ξ :

$$\xi = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}} \quad (38)$$

Voor relatief steile bodemhellingen ($\xi > 3$) breken golven niet, maar worden ze teruggekaatst. Voor relatief flauwe bodemhellingen ($\xi < 3$) breken de golven op het strand.



Figuur 8 Definitieschets golfploophoogte R

In het laatste stadium van de nadering van een hellende kust treedt oploop op, waarbij de impuls van het aankomende water het water tegen de helling opstuwt. De golfploophoogte R boven het ongestoorde zeeniveau (zie figuur 8) die daarbij bereikt kan worden, kan wel tot tien keer de golfhoogte op dieper water bedragen. De oploophoogte wordt sterk door de brekerparameter bepaald. Voor brekende golven met $\xi < \text{ca. } 2.5$ geldt:

$$\frac{R}{H} \cong \xi = \frac{\tan \beta}{\sqrt{H/L_0}} \quad (39)$$

$$R \cong \sqrt{\frac{H}{L_0}} \tan \beta \cong 0.4T \sqrt{gH} \tan \beta \quad (40)$$

Voortplanting van de tsunami van 26 december 2004 over de oceaan

Het breukvlak van de aardbeving strekte zich uit over circa vierhonderd kilometer vanuit het hypocentrum in een ongeveer noord-noordwestelijke richting (zie figuur 1 rechtsboven). Vanwege de relatief grote lengte was de uitstraling van energie in de tsunami niet alzijdig maar meer in de vorm van twee gerichte bundels, in ongeveer oostelijke respectievelijk westelijke

richting. De gebieden in het pad van deze bundels (Noord-Sumatra/Thailand respectievelijk Sri Lanka/Somalië) zijn daarom veel zwaarder getroffen dan de meer zuidelijk of noordelijk gelegen gebieden. In oost-westrichting strekte het brongebied van de aardbeving zich uit over circa tweehonderd kilometer (zie figuur 1 rechtsboven). Het grootste deel van de golfenergie zit daarvoor in golflengten van deze grootteorde. De waterdiepte in de Golf van Bengalen is ongeveer 3 kilometer. De golflengte is dus ruimschoots langer dan $20h$ ($= 60$ km), waardoor de tsunamigolven inderdaad in redelijke benadering wiskundig beschreven kunnen worden als lange golven. De voortplantingssnelheid c van de tsunami kan bepaald worden met behulp van vergelijking (24). Met waterdiepten van ongeveer 3 kilometer is c dus ruim 600 km/uur. Ter vergelijking: voor windgolven op de oceaan wordt de voortplantingssnelheid slechts bepaald door de golfperiode (ordegrootte 10 s; zie vergelijking (22)). Windgolven hebben dus een voortplantingssnelheid in de orde van 15 m/s of 50 km/uur.

Variaties van de diepten in het zeegebied en de kustzones waarin de tsunami beweegt veroorzaken refractie, waardoor de golven naar de ondiepte toe draaien. Bij het passeren van kapen en kleine eilanden of openingen treedt uiteraard ook buiging op. Bij flauw hellende bodems wordt dit effect versterkt of zelfs gedomineerd door refractie. Vandaar dat ook kustgebieden aan de lijzijde toch zwaar getroffen kunnen worden, zoals de zuidwestkust van Sri Lanka.

Waarom zo desastreus?

Een tsunami is op de oceaan niet extreem hoog (twee uur na de aardbeving had de tsunami van 26 december 2004 op de oceaan een maximale hoogte van ongeveer 60 cm [10]). Gewone windgolven kunnen vele malen hoger zijn. Toch leiden dat soort windgolven niet tot dergelijke grote overstromingen. Het verschil zit voornamelijk in de periode en de lengte van de golf. Windgolven hebben een periode in de orde van 5–15 s en een lengte van maximaal enkele honderden meters. Tsunami's hebben een veel grotere periode (in de orde van een kwartier à een half uur) en een veel grotere lengte (de tsunami van 26 december had golflengten in de grootte-orde van ongeveer 150 kilometer).

Shoaling

Golven worden door shoaling hoger als ze de kust naderen en in ondieper water komen. Shoaling treedt dus pas op wanneer de golven zich in ondiep water bevinden ($h < 1/20L$). Door de relatief korte lengte van windgolven begint een windgolf pas te groeien wanneer de golf relatief dichtbij de kust is. Bijvoorbeeld: een windgolf met een golfperiode van 10 s (en een golflengte op diep water van 156 m; zie vergelijking (23)) begint te groeien als gevolg van shoaling in waterdieptes van ongeveer 7.5 m. Door de grote golflengte van een tsunami is zelfs de oceaan 'ondiep water'. Dit betekent dat een tsunami begint te groeien zo gauw de waterdiepte afneemt. De toename in golfhoogte als gevolg van shoaling is gerelateerd aan de verhouding van de waterdiepte op diep water (of de diepte waar voor het eerst shoaling optreedt) en de locale waterdiepte (zie Vgl.(32)). De tsunami van 26 december 2004 werd gegenereerd in een zeegebied met een diepte van ongeveer 1 km. Op een waterdiepte van bijvoorbeeld 3 m zou de tsunami dus ruim $4 \times$ zo hoog kunnen worden ($= 1000/3)^{0.25}$, terwijl een windgolf van 10 s dan slechts ongeveer 25% hoger is dan op diep water ($= 7.5/3)^{0.25}$.

Breking

De golfhoogte van een tsunami neemt dus veel sterker toe dan die van windgolven wanneer deze in ondieper water komt. Windgolven zijn echter op diep water vaak veel hoger dan tsunami's. Waarom tsunami's toch zo veel destructiever kunnen zijn, heeft weer te maken met de grote golflengte van een tsunami. Zoals eerder is uitgelegd worden golven instabiel wanneer de golfsteilheid te groot wordt.

Als gevolg van shoaling neemt de golfhoogte toe en de golflengte af. Door de relatief korte lengte van windgolven, bereiken zij daarbij veel eerder dan tsunami's de maximale steilheid. Windgolven breken dus voordat ze de kust bereiken. Daarmee verliezen ze een groot deel van hun energie. Door de veel grotere lengte wordt een tsunami lang niet zo steil, waardoor een tsunami niet of pas veel later breekt, maar het land oploopt; in sommige gevallen 'als een muur van water'.

Invloed golfperiode

Tot slot is een tsunami veel destructiever dan een windgolf doordat de lange golfperiode van een tsunami resulteert in een vrij lange duur van elke aanval. Om enig idee te geven van de hoeveelheid water die door een tsunami aangevoerd kan worden, is een vergelijking gemaakt met de afvoer van de Rijn in Nederland. Tijdens het hoogwater van 1995 voerde de Rijn (die bij hoog water een breedte heeft in de orde van 1 km) ongeveer $12.000 \text{ m}^3/\text{s}$ af. Een grove schatting laat zien dat over een strook kust met een lengte van een kilometer een tsunami met een hoogte op de oceaan van 60 cm in 7 minuten (de halve golfperiode ofwel de duur van de waterstandsverhoging door de tsunami) bijna 30 miljoen m^3 water meevoert. Dit komt overeen met ruim $70.000 \text{ m}^3/\text{s}$ (ongeveer zes keer de hoogwaterafvoer van de Rijn) over deze strook kust van een kilometer.

Gevolgen van de tsunami in Atjeh

Dit alles heeft grote gevolgen. In geval van lager gelegen land treedt overstroming op. De hoge stroomsnelheden die zich daarbij kunnen voordoen (tot wel 5 m/s), gecombineerd met de soms aanzienlijke overstromingsdiepten, kunnen leiden tot grote schade en veel slachtoffers. Uit sporen in het landschap heeft een Japans onderzoekteam geprobeerd in kaart te brengen hoe ver landinwaarts het water in en rond Banda Atjeh is gekomen [11]. Hieruit blijkt dat in sommige laaggelegen gebieden het water 4 km de stad in is gestroomd en dat op sommige plekken, die 2.5 – 3 km uit de kust lagen, het water 12 m boven gemiddeld zee-niveau heeft gestaan (figuur 1 linksboven). Aan de westkust ten zuiden van Banda Atjeh, waar de vlakke kuststrook slechts enkele honderden meters breed is en een heuvelrug aan de kust grenst, zijn oploophoogten opgetreden van circa 35 m (figuur 9).

Als gevolg van de tsunami zijn grote stukken kust weggeslagen en is bijna alle vegetatie en bebouwing verwoest. Satellietfoto's [12] laten zien dat de kust van Banda Atjeh nu enkele honderden meters verder landinwaarts ligt dan voor de tsunami figuur 1 linksboven en figuur 1 onder). Volgens het Japanse onderzoekteam is dit deels veroorzaakt door bodemdaling als gevolg van de aardbeving en deels door erosie van het strand als gevolg van de tsunami.

Voorkomen of schade beperken?

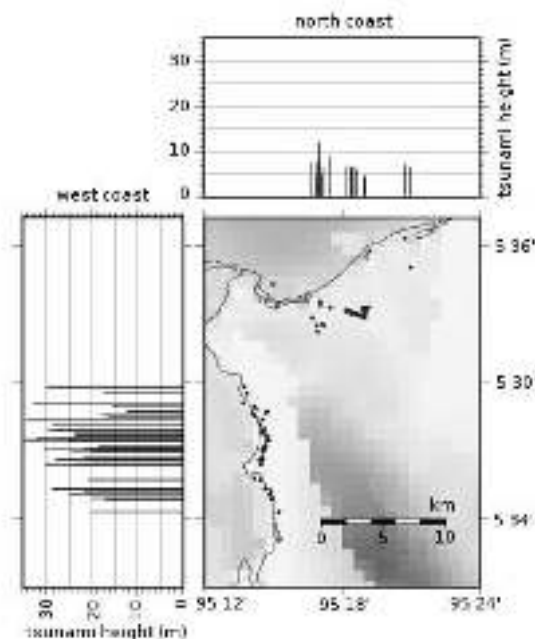
Het voorkomen van een tsunami is onmogelijk: de aardbeving die

de tsunami veroorzaakt is niet te voorkomen. Wel kan er worden nagedacht over hoe de schade valt te beperken. Daarbij valt te denken aan de volgende zaken:

- Voorlichting van de lokale bevolking over het voorkomen van tsunami's en de te nemen acties. Bijvoorbeeld mensen bewust laten worden van het feit dat het terugtrekken van de zee een voorteken van een tsunami kan zijn en mensen laten weten waar ze op dat moment naartoe moeten (in ieder geval niet naar zee!).
- Een tsunami-waarschuwingssysteem. Belangrijke aspecten hierbij zijn de vraag hoe de gehele bevolking bereikt kan worden ook in afgelegen gebieden en hoe de evacuatie geregeld moet worden. Overigens had een tsunami-waarschuwingssysteem voor Banda Atjeh nauwelijks zin gehad: er zat minder dan een half uur [13] tussen het optreden van de aardbeving en het moment waarop de tsunami deze stad van meer dan 300.000 inwoners bereikte.
- Regels voor het landgebruik in de kustzone. Bijvoorbeeld het niet langer toestaan dat mensen of bedrijven zich vestigen dicht bij de kust. Dit zal heel moeilijk blijken omdat in veel gevallen de kust de bron van inkomsten vormt voor de bevolking.
- Maatregelen die ervoor zorgen dat de tsunami zijn energie verliest voordat hij bebouwd gebied bereikt. Er is wel gesuggereerd om mangrove bossen aan te planten. Het is echter de verwachting dat de strook mangrove onrealistisch breed moet zijn (enkele tot honderden kilometers) om de tsunami af te remmen.
- Aangepaste bebouwing. Bijvoorbeeld gebouwen van meerdere verdiepingen met een open constructie op de begane grond: alleen kolommen of dragende muren evenwijdig aan de verwachte stroomrichting.

Conclusies

Tsunami's worden veroorzaakt door zware aardbevingen waarbij een verticale beweging plaatsvindt van de zeebodem. De verticale waterverplaatsing die hierbij optreedt, leidt tot een lange golf die zich voortplant over de oceaan. Wanneer de golf in ondieper water komt en de kustgebieden bereikt, neemt de golfhoogte zeer sterk toe (zie voor een illustratieve animatie [14]). Dit kan leiden tot grote overstromingen met alle gevolgen van dien. Door het bij-



Figuur 9 Gemeten golfploophoogte (tsunami height) in Banda Atjeh op 30 januari 2005 ten gevolge van de tsunami in meters boven lokaal getijniveau [11].

draaien van de golf naar de ondiepten toe, kunnen ook gebieden aan de lijzijde zwaar getroffen worden. Tsunami's zijn niet te voorkomen. Wel zouden het aantal slachtoffers en de schade beperkt kunnen worden, bijvoorbeeld door goede voorlichting van de bevolking, het gebruik van een tsunami-waarschuwingssysteem, door regels op te stellen voor het landgebruik in de kustzone of door gebouwen zo te ontwerpen dat ze beter bestand zijn tegen overstromingen.

Dankwoord Het huidige artikel is deels gebaseerd op een artikel dat verschenen is in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde [6], waarvan Jurjen Battjes van de TU Delft en Femke Goutbeek van het KNMI mede-auteurs waren. Hierdoor hebben zij indirect ook aan dit artikel bijgedragen, waarvoor ik hen hartelijk wil bedanken. Daarnaast wil ik Hein Haak van het KNMI bedanken voor zijn nuttige commentaar op dit artikel.

Referenties

- 1 Stein, S. en E.A. Okal, 'Speed and size of the Sumatra earthquake', *Nature* **434** (2005), pp. 581–582.
- 2 Mei, C.C., 'The applied dynamics of ocean surface waves', *Advanced series on ocean engineering* **1** (1989), Singapore: World Scientific, p. 740.
- 3 Van Groesen, E. en G. Klopman, 'Dispersive effects in tsunami generation', *Proceedings of the Workshop on The Indonesian Ocean Tsunami* (2005), Bali Indonesia.
- 4 Mirchina, N. and E. Pelinovsky, 'Dispersive intensification of tsunami waves', *Proc. ITS* (2001), pp. 789–794.
- 5 Meilianda, E., C.M. Dohmen-Janssen, S.J.M.H. Hulscher en J.P.M. Mulder, 'Towards coastal zone management of Banda Aceh beach: the coastal system before and after the tsunami disaster of December 26th 2004', *Proc. of the Int. Conf. on Coastal Conservation and Management* (17–20 April, Tavira – Algarve, Portugal), 2005
- 6 Dohmen-Janssen, C.M., J.A. Battjes and F.H. Goutbeek, 'Hoe ontstaan tsunami's en waarom?', *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde* **71**(12) (2005), Invited contribution (in Dutch), pp. 380–385
- 7 www.gps.caltech.edu/~jichen/Earthquake/2004/aceh/aceh.html
- 8 serc.carleton.edu/NAGTWorkshops/visualization/collections/coastal.wave.mechanics.html
- 9 physics.usask.ca/~hirose/ep225/animation/dispersion/anim-dispersion.html
- 10 www.noaa.gov/news/stories2005/images/tsunami-2hrs2.jpg
- 11 www.eri.u-tokyo.ac.jp/namegaya/sumatera/surveylog/eindex.htm
- 12 www.digitalglobe.com
- 13 www.eeri.org/lfe/pdf/indonesia.sumatra.tsunami.surveys.pdf
- 14 www.solcomhouse.com/tsunamis.htm
- 15 www.geneseo.edu/~gsci205/waves/waves.htm

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

bmols@wanadoo.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006

Roddelende branddetectoren

Een netwerk van draadloos pratende sensoren houdt in een bos in de gaten of er ergens een bosbrand uitbreekt. Gebeurt dat, dan moet het netwerk zo snel mogelijk een waarschuwings-signaal doorgeven aan een basisstation. Wat is de kans dat dit signaal het basisstation bereikt en hoe snel gaat dat? Wiskunde moet helpen een betrouwbaarder netwerk te maken.

Hoe kun je in een gigantisch bos snel en goedkoop detecteren of er ergens een bosbrand uitbreekt? Het Nederlandse elektronica- en it-bedrijf Chess werkt aan de ontwikkeling van een netwerk van goedkope, draadloze sensoren voor deze en vergelijkbare toepassingen waarin een signaal door een draadloos sensornetwerk bij een basisstation moet aankomen.

Het idee is eenvoudig. Leg met een bepaalde regelmaat een draadloos netwerk van sensoren in het bos aan. Stel er breekt ergens brand uit. De dichtstbijzijnde sensor merkt dit aan de sterk toegenomen temperatuur. Hij geeft een radiosignaal door aan zijn buursensor: 'er is brand bij mij in de buurt'. Deze sensor doet hetzelfde, en uiteindelijk moet het brandsignaal snel genoeg aankomen bij een basisstation aan de rand van het bos. Dat signaal moet de informatie hebben dat er brand is, op welke plek dat is gebeurd, en hoe laat. Om energie te sparen staan de sensoren korte tijd in de slaapstand. Daarna worden ze allemaal tegelijk even wakker, kijken of er een brandbericht binnenkomt en sturen eventueel een bericht naar de burens. Vervolgens keren ze weer voor even terug in

de slaapstand.

"Onze centrale vraag aan de wiskundigen was hoe je een optimaal systeem van roddelende sensoren ontwerpt", legt Bert Bos van Chess uit. "Komt het brandsignaal wel altijd aan? Hoe snel komt het signaal aan bij het basisstation?"

Brand op meerdere plekken tegelijk

Het netwerk van goedkope, roddelende sensoren zal niet ideaal zijn. Een goed ontwerp moet daarom rekening houden met wat er allemaal mis kan gaan. Niet elk sensor hoeft te werken. De batterij kan leeg zijn, of de sensor zelf kan kapot zijn. Desondanks wil je dat het systeem als geheel nog steeds in staat is een brand te detecteren. Verder kan het zo zijn dat een uitgezonden bericht niet goed wordt opgepikt door een buursensor. De communicatie kan misgaan, ook als beide sensoren werken.

Verder kan een bosbrand op meerdere plekken uitbreken. Idealiter wil je dan dat er bij het basisstation signalen aankomen die vertellen op welke plekken en op welke tijden de verschillende branden zijn uitgebroken. De sensoren hebben echter maar een beperkt ge-

heugen en kunnen dus niet een groot aantal berichten onthouden en doorsturen. Ze moeten kiezen welke berichten ze wel doorsturen en welke niet. En ook welke berichten ze uit hun geheugen wissen omdat anders de hoeveelheid informatie niet meer past. Wat is daarvoor de optimale strategie?

Omdat de sensoren goedkoop moeten zijn, zullen ze ook goedkope batterijen hebben. Daarmee zijn ze beperkt in hoe ver ze het draadloze radiosignaal kunnen sturen. Hoe verder een sensor zijn informatie wil sturen, hoe meer energie dat kost. In het eenvoudigste en goedkoopste geval stuurt elke sensor zijn signaal alleen naar de directe burens. Een sensor weet zelf niet waar hij in het netwerk zit, en ook niet waar het basisstation zich bevindt. Ze sturen dus eigenlijk blindelings informatie rond. Bij de brandmelding moet wel duidelijk worden welke sensor, op welke locatie de brand opmerkt.

Om uit te vinden hoe je het beste een optimaal netwerk van roddelende sensoren ontwerpt, hebben de wiskundigen twee aanpakken onderzocht. Misja Nuijens van de Vrije Universiteit in Amsterdam: "In een analytische aanpak hebben we geprobeerd een formule te vinden die aangeeft hoe goed het netwerk communiceert. Zo'n formule vind je echter alleen maar voor het eenvoudige geval dat je een eendimensionale rij van sensoren hebt. De formule die we zo hebben afgeleid,



Figuur 1 De eerste concrete toepassing van een draadloos sensorsysteem, is voor een beurs waar veel bezoekers rondlopen. Elke bezoeker heeft een badge met een sensor. Als je op zoek bent naar een bepaald persoon op die beurs, dan kun je het netwerk gebruiken om te vinden waar die persoon rondloopt.

vertelt hoe de verwachte tijd van een signaal om aan te komen bij het basisstation, afhangt van de kans dat de communicatie tussen twee sensoren werkt en van de afstand tot het basisstation.”

Neem je de meer realistische situatie van een tweedimensionaal netwerk, dan wordt het probleem te moeilijk voor een analytische benadering. Dan heb je een computersimulatie van het netwerk nodig. Beide aanpakken vullen elkaar echter aan. De analytische aanpak levert een inzicht dat de computersimulatie niet kan leveren, en andersom. De computersimulatie is wel het meeste geschikt om inzicht te geven in de complexe praktijk.

Optimale geheugenstrategie

Een ander deel van de wiskundige analyse richtte zich op de optimale geheugenstrategie voor de sensoren. Een sensor heeft maar een beperkt geheugen en kan niet alle boodschappen onthouden. Een voor de hand liggende strategie lijkt dat elke sensor de oudste boodschap weggooit om geheugenruimte vrij te maken voor een nieuwe boodschap. “Die strategie blijkt echter niet goed te werken”, vertelt Nuijens. “In het geval er op twee plekken brand uitbreekt, waarvan er eentje dicht bij het basisstation ligt, en de ander ver weg van het basisstation, blijkt het brandsignaal dat van ver weg moet komen niet aan te komen. En dat wil je juist wel. Beide brandsignalen moeten aankomen.”

Een veel betere strategie blijkt om een willekeurige keuze uit de berichten te nemen. Stel dat er op meerdere plekken branden optreden dan er plaats is in het sensorgeheugen. Dan is het beter dat een sensor op een willekeurige manier kiest welke berichten hij doorgeeft, dan om steeds het oudste bericht weg te gooien.

Deze strategie kan nog verder worden verbeterd. Wanneer ergens een brand optreedt,

zal de sensor die dit meet keer op keer hetzelfde brandsignaal naar zijn burens zenden. Maar die burens weten na de eerste boodschap al lang dat er brand is. “Een nog betere strategie is daarom om een nieuwe boodschap een lagere prioriteit te geven als de sensor daarvoor al hetzelfde signaal ontving van dezelfde buur”, aldus Nuijens. “Op deze manier komt het brandsignaal nog sneller aan bij het basisstation, zo blijkt.”

Vergroot het bereik van de sensoren

De computersimulaties laten ook zien dat als sensoren een signaal sturen over een groter bereik, het brandsignaal een grotere kans heeft aan te komen bij het basisstation. Alleen kost het meer energie en dus meer geld om een sensor over een grotere afstand te laten communiceren. Afhankelijk van hoe snel het signaal moet aankomen bij het basisstation, kan het nuttig zijn te investeren in sensoren met een groter bereik.

Ook blijkt het uit te maken volgens welk rooster de sensoren in het platte vlak worden verdeeld. Voor de hand ligt natuurlijk een rechthoekig rooster. In dit rooster kan elke sensor met vier andere sensoren praten. Maar computersimulaties laten duidelijk zien dat een hexagonaal rooster (elke sensor heeft dan zes andere sensoren) een veel betere prestatie levert dan een rechthoekig rooster. In een hexagonaal rooster komt het brandsignaal sneller aan en bovendien is het netwerk dan beter bestand tegen storingen zoals het uitvallen van sensoren of het mislopen van communicatie tussen twee sensoren.

De vraag hoe het optimale roddelende sensornetwerk eruit ziet, hangt sterk af van hoe belangrijk het is hoe snel een signaal aankomt bij het basisstation en van hoeveel het netwerk mag kosten. Een snelle communicatie die ongevoelig is voor storingen zal immers een stuk duurder uitvallen dan een langzame communicatie die ook af en toe mag falen.

Handige vragenlijst voor de klant

De eerste concrete toepassing van een draadloos sensorsysteem staat voor eind 2006 gepland, vertelt Bert Bos van Chess: “Niet voor de detectie van bosbranden, maar voor een beurs waar veel bezoekers rondlopen. Elke bezoeker heeft een badge met een sensor. Als je op zoek bent naar een bepaald persoon op die beurs, dan kun je het netwerk gebruiken om te vinden waar die persoon rondloopt. Dat wordt het eerste concrete experiment met een toepassing. We zijn bezig met verschillende mogelijke toepassingen.”

Behalve bosbranddetectie, kan het bij-

voorbeeld gaan om het detecteren van een gaslek in een huis, een vuilnisophaalsysteem dat in de stad in de gaten houdt wanneer vuilniscontainers in de stad bijna vol zijn, of een netwerk van geluidsdetectoren dat bijvoorbeeld de geluidsoverschrijding rondom een vliegveld in de gaten houdt.

De wiskundige analyse heeft laten zien welke aspecten cruciaal zijn in een netwerk van roddelende sensoren. Nuijens: “Wij geven als aanbeveling dat Chess aan de hand van die analyse een vragenlijst voor de klant kan opstellen om erachter te komen hoe belangrijk de diverse aspecten zijn in de specifieke toepassing van de klant.”

Hoe belangrijk is het dat het signaal snel aankomt? Bij een bosbrand is dat essentieel. Bij een netwerk dat de geluidsoverschrijding rondom Schiphol in de gaten moet houden, is snelheid niet van belang. Hoe goed moet de sensor zijn, en wat mag het kosten? Een sensor die niet alleen een draadloos signaal aan de naaste buur doorgeeft maar ook aan de tweede buur, of nog verder weg, moet over een krachtigere batterij beschikken. Dat kan, maar dan wordt de sensor duurder. De wiskundige analyse kan laten zien hoe de kostenbatenanalyse voor de specifieke toepassing van de klant uitvalt.

“Wij hebben inmiddels de financiering rond om met een aantal partners uit het midden- en kleinbedrijf een netwerk van zo’n tienduizend sensoren te bouwen”, vertelt Bos. “Daar kunnen we dan realistische experimenten mee doen. Veel beter dan het netwerkje van enkele tientallen sensoren dat we tot nu toe hebben gebruikt. Dat kleine netwerk hebben we vooral gebruikt om te kijken hoe de communicatie tussen de sensoren werkt.”

Bos is vooral blij met de formule die de wiskundigen hebben afgeleid voor de betrouwbaarheid van het netwerk: “Tot nu toe hadden we alleen computersimulaties, maar geen concrete formule. Met die formule kunnen we de betrouwbaarheid beter onderbouwen. Ook kunnen we daarmee potentiële klanten beter overtuigen.”

Het bedrijf gaat waarschijnlijk ook de aanbeveling overnemen om een sensor niet alleen te laten praten met zijn naaste burens, maar het bereik iets groter te maken. Bos: “Met niet al te veel extra kosten, vergroot dat de betrouwbaarheid van het netwerk flink.”

Meer informatie
www.chess.nl

Rob van Oord

Docent wiskunde

Coenecoop College

Dreef 2-6

2741 SR Waddinxveen

robvanoord@tiscali.nl

Onderwijs

Heen en weer voor de klas en boven de stof

Na 2007 vindt er opnieuw een herziening plaats van de Tweede Fase en vanaf 2010 zullen er inhoudelijk nieuwe leerplannen komen. Voor een wiskundeleraar in het voortgezet onderwijs hebben al deze veranderingen ingrijpende gevolgen. Hoe gaat een leraar hiermee om, wat gaat er veranderen en wat blijft er nog bestaan? Rob van Oord, wiskundedocent met meer dan dertig jaar ervaring, geeft een beschouwing over de veranderingen die wiskundedocenten in het wiskundeonderwijs hebben meegemaakt. Tegelijkertijd beschrijft hij de alledaagse praktijk van een hedendaagse wiskundedocent. Over dit onderwerp heeft hij op 28 maart 2006 een voordracht gehouden tijdens het Minisymposium Wiskundeonderwijs in beweging op het 42e Nederlands Mathematisch congres. Tijdens deze voordracht illustreerde hij zijn overtuiging dat wiskundeonderwijs spannend en uitdagend moet zijn door het publiek een puzzel voor te schotelen [1]. Bij stukjes en beetjes werd de oplossing onthuld. Er zat een dubbele boodschap in: de wiskunde(eindtermen) zijn wel in beweging, maar ze veranderen niet, ze worden slechts anders ingedeeld.

De laatste tijd staat het wiskundeonderwijs extra in de belangstelling. Er wordt geschreven over aansluitingsproblematiek en instaptoetsen [2]. Van alle kanten hoor je geklaag. Bovenbouwdocenten vinden dat leerlingen te weinig inzet vertonen, te weinig echt oefenen. Veel basisvaardigheden zijn onvoldoende aanwezig. Ze wijten dat aan de onderbouw, de basisvorming. Niet geheel ten onrechte want de basisvorming (iedereen gelijke kansen) heeft in de ogen van veel docenten voor een aanzienlijke niveauverlaging van het wiskunde onderwijs geleid. De betere (B)leerling

werd nauwelijks uitgedaagd en haalde fluitend hoge cijfers. Daar komt nog bij dat wiskunde in de onderbouw het enige exacte vak is. In de hoeveelheid van vakken wordt een 5 voor wiskunde gemakkelijk gecompenseerd, maar ... in de bovenbouw is het wel een verplicht vak in alle profielen.

Op het wetenschappelijk en hoger onderwijs vinden ze dat leerlingen te weinig algebraïsche vaardigheden hebben. Hooglaren wiskunde, zoals bijvoorbeeld Jan van de Craats, luiden de noodklok in voordrachten en columns. Er wordt gewezen naar de

bovenbouwdocenten en examencommissies, bijvoorbeeld in Van de Craats' voordracht op de openingsbijeenkomst van de SURF-conferentie op 9 maart 2006. Zie www.staff.science.uva.nl/~craats: "Constructiegroepen worden aangestuurd door CITO-medewerkers die onder invloed staan van didactici die geloven in realistisch wiskundeonderwijs, geen kennis hebben van de manier waarop wiskunde in het vervolgonderwijs gebruikt wordt, niet ontvankelijk zijn voor kritiek van afnemers."

Zelfs leerlingen klagen (Lieve Maria) dat ze te weinig geleerd hebben en toch geven de eindtermen voldoende handreikingen tot het leren van mooie wiskunde en voldoende vaardigheden. Ik had deze studenten wel eens willen horen als ze één of twee jaar eerder als leerlingen op de middelbare school een moeilijker examen gehad hadden! Zouden ze dat dan meteen kenbaar gemaakt hebben met Stoute Maria? Ongetwijfeld maakten ze dan eveneens een protestwebsite, want daar besteden ze wel veel tijd aan. Het gemakkelijkste is natuurlijk om 'de anderen' de schuld te geven.

De belangrijkste reden voor al dat geklaag

is volgens mij dat er zo veel veranderingen zijn in het onderwijs, en zeker in het wiskundeonderwijs dat sommige er geen touw meer aan vast kunnen knopen. Je krijgt als wiskundeleraar het gevoel: het gaat te snel, het gaat de verkeerde kant op, maar je kunt er geen invloed op uitoefenen.

De herziening van de Tweede Fase maakte de tongen los. Er is actie gevoerd tegen het voorgenomen plan van de minister om wiskunde B op het vwo van 760 tot 520 studielastuur (SLU) te reduceren, onder het motto: alle vakken zijn gelijk. Gelukkig hebben we de schade kunnen beperken en krijgt wiskunde B 600 SLU op het vwo en 360 SLU (in plaats van de voorgenomen 320) op het havo. Ook de Tweede Fase als zodanig staat onder druk. Al drie jaar geleden gaf Anne van Streun al in dit tijdschrift commentaar op de Tweede Fase [3].

Van kennis naar vaardigheden

Alles moet sneller, leuker, verrassender, actueler, en het mag niet te lang duren. Ik noem dat de *Veronica*-mentaliteit van de huidige maatschappij. Vroeger was kennis belangrijker dan vaardigheden als weten hoe en waar je iets kan vinden, zelfstandig iets kunnen bestuderen, je mening geven over wat je gezien, gehoord of gelezen hebt, een presentatie kunnen houden, spreekvaardigheid.

Veel vakken in de Tweede Fase spelen in op deze nieuwe trend in de maatschappij. Kleine, afgebakende stukjes leerstof: veel visuele ondersteuning, door middel van foto's, cartoons, video, plaatjes en filmpjes op internet, enzovoorts. In dit opzicht wijkt wiskunde af van deze vakken. Bij de wiskunde is nieuwe stof meestal gekoppeld aan oude, sterker nog, het borduurt voort op eerder aangeleerde vaardigheden. De *zapp*-cultuur van nu vraagt om pakkende slogans, korte issues, liefst met beelden verlichtigd.

Natuurlijk zouden we een *PowerPoint* dia-voorstelling van de wiskundelessen kunnen maken of —nog nieuwerwetser— een smartboardvoorstelling. Alleen dan ben ik bang dat de leerlingen wel eventjes geïnteresseerd naar het scherm zitten te kijken, maar dat de aandacht na drie of vier dia's verslapt en ze lui worden. Want alles wat de docent gaat zeggen komt wel op het scherm. Ik heb liever dat de leerlingen goed opletten, meedoen met de uitleg en de voorbeelden, zodat ze de docent kunnen betrappen op foutjes of tegenstrijdige uitspraken of onduidelijkheden. Als u een idee heeft waarmee leerlingen buiten school allemaal bezig zijn, dan kunt u zich voorstellen dat je als docent alle zeilen moet

bijzetten om voor hen het wiskundeonderwijs aantrekkelijk te maken. Zinnige of liever betekenisvolle wiskunde, dat zal niet meevallen. Ik vind dat de wiskundeleraar daar toch zijn best voor moet doen [4]. De leerlingen willen een beloning; het liefst in de vorm van een hoog cijfer. Maar ook kleine beloningen werken stimulerend.

Denk in dit verband aan de hoge vlucht die de kangoeroewedstrijd doormaakt. De wedstrijdvorm, overal op tv te zien spreekt kennelijk aan. Van *Lingo* tot *2 voor 12*, van *Nationaal dictee* tot *Nationale Wetenschapsquiz*, iedereen vindt wel een wedstrijd of quiz van zijn gading waaraan hij, bij voorkeur zittend op de bank bij de tv, mee meedoet.

Stelt u zich voor, het is maandag het eerste uur. De leerlingen 4 havo wiskunde A komen het lokaal binnen. Denkt u dat ze meteen klaar zitten met een houding van: zo meneer, wilt u ons weer mooie dingen uit de wiskunde leren?

De leerlingen van nu scheiden hun schooltijd veel meer van hun vrije tijd dan pakweg twintig jaar geleden. In elke huiskamer staat een pc, die vooral door de jeugd intensief gebruikt wordt. Denkt u niet dat ze daar allerlei leerzame informatie op zoeken. Nee, chatten, SMS-en en LAN-spelen, liefst met een groep, daarmee houden de cohorten leerlingen zich bezig. Het weekend begint voor hen echt na het laatste lesuur op de vrijdag. De hele wereld staat voor hen open op internet. Daarnaast doen veel leerlingen in hun vrije tijd aan sport, en hebben ze een baantje om kleding, muziek, uitgaan te kunnen bekostigen.

De maatschappij vraagt niet meer naar leerlingen die veel kennis hebben, maar die vaardig zijn in veel zaken. Weten waar je iets opzoekt, je mening goed onder woorden kunnen brengen, een verslag of werkstuk maken van iets wat je hebt meegemaakt of uitgezocht, spreekvaardigheid, een kritische houding. Had de leerling vroeger een paar hoofdvakken, waaronder wiskunde, waaraan ze al hun energie besteedden, nu wordt door veel meer vakken aandacht gevraagd.

Veranderingen in het (wiskunde)onderwijs: van klassikale les naar zelfwerkzaamheid

Het lijkt wel of elke maatschappelijke verandering die tot politieke veranderingen leidt, zijn weerslag vindt in het onderwijs. Omdat onderwijs van iedereen is kun je hier politiek altijd mooi op scoren. De Mammoetwet, afschaffing van HBS, gymnasium, ulo, mulo en mms, leidden tot mavo, havo en vwo. Lager beroepsonderwijs en nijverheidsonderwijs werd vmbo. Vervolgens komen midden-school en basisvorming, vakkenpakketten en

doorstroomprofielen. Keuzes van leerlingen moesten langer kunnen worden uitgesteld. Veel leerlingen bleken in het vervolgonderwijs te stranden, vanwege zogenoemde pretpakketten. Het niveau van bepaalde vakken zakte. Leerlingen werd te veel opgedragen wat ze moesten doen zonder dat ze zich daar verantwoordelijk voor voelden. Het onderwijs van de vakkenpakketten voldeed niet aan de eisen van de maatschappij. Plannen voor studiehuis en Tweede Fase werden gemaakt. De leerlingen moesten meer zelf verantwoordelijk zijn voor hun leerprestaties.

Het hebben van kennis verdwijnt naar de achtergrond, het beschikken over vaardigheden komt op de voorgrond. Actief en zelfstandig studeren is nu het devies. Veranderingen in het onderwijs volgen maatschappelijke veranderingen op de voet. Het Studiehuis en de Tweede Fase komen op tafel. Beter aansluiting op het vervolgonderwijs, maar doorstromen wordt moeilijker. Intrede van de pc en daarmee een onuitputtelijke bron van informatievoorziening dringen klassikale lessen naar de achtergrond. De mediatheek is momenteel het drukst bezochte lokaal van de school.

Actief en zelfstandig leren:

Gaf je vroeger nog huiswerk op, nu zijn er de werkwijzers. Drie keer per jaar krijgen de leerlingen (voor alle vakken) een overzicht waarin per week staat wat de leerdoelen zijn en de vaardigheden die ze gaan aanleren. In de les wachten ze niet op het startsein van de leraar, ze gaan meteen aan de slag met waar ze gebleven zijn.

Zelfverantwoordelijk leren:

Lessen waarin de docent het hele uur bezig is met uitleg van de stof of bespreking van het huiswerk zijn uit den boze. De Tweede Fase docent geeft hooguit een korte instructie, of een aanwijzing waar de leerling de belangrijkste begrippen kan vinden. Voor wiskunde betekent dit dat weinig opgaven worden besproken in de les. De stof wordt uitgelegd, dan moet de leerling ermee aan de slag. De methoden hebben antwoordenboekjes en uitwerkingen op een cd-rom. Vaak heeft de docent een map met uitwerkingen voor in de klas liggen die de leerlingen kunnen raadplegen. De leerlingen komen individueel hulp vragen bij de docent. De praktijk is dat leerlingen niet meer allemaal met dezelfde paragraaf bezig zijn. Meestal lopen ze achter bij de werkwijzer. De docent pikt er af en toe een voor de stof representatieve, of moeilijke opgave uit om samen met de klas te doen. Het lijkt de

kant op te gaan dat de methoden de rol van de docent overnemen, dan wel marginaliseren. Hoe dan ook: De *rol van de docent* is veranderd. De docent stuurt het programma, helpt bij problemen. Er is minder contacttijd dan gewenst, omdat veel scholen *banduren of keuzeuren* hebben ingelast. Daarin kiest de leerling voor welk vak hij gaat werken/leren. Was er voor de Tweede Fase een minimumlessentabel waarin het (minimum) aantal lessen (van 50 minuten) was vastgelegd, nu hanteren schooldirecties een omrekeningsfactor waarmee het aantal uren (van 45 minuten) contacttijd wordt bepaald. Dit kan per school nogal verschillend uitvallen. Vooral veel wiskundevakken hebben naar mijn smaak een te gering aantal uren contacttijd.

Ook heeft *de toetsing* een andere rol gekregen. Voor de gehele bovenbouw is er van alle vakken een *Plan van Toetsing en Afsluiting* (PTA). Hierin ligt nauwkeurig vast welke onderdelen, in welke periode, met welke weging nader gespecificeerde stukken leerstof worden afgenomen. De afgenomen toetsen worden bewaard in een dossier, dat nog tot een jaar na het behalen van het diploma op school bewaard wordt. Het schoolexamencijfer wordt opgebouwd uit de dossiercijfers. Leerlingen weten dat alleen de dossiertoetsen meetellen voor het eindexamen en zijn geneigd om het leren voor voortgangstoetsen uit te stellen, want die tellen toch niet mee. Gevolg voor wiskundeonderwijs: toetsen worden niet meer afgenomen aan het eind van een hoofdstuk, maar in toetsweken waarin elk vak een toets mag plaatsen. Als wiskundedocent ben je wel gedwongen om aan die toetsen een dossierweging te geven, want anders bestaat het gevaar dat er niet voor geleerd wordt. Omdat het aantal verplichte vakken veel groter is dan voor de Tweede Fase, is de status van het vak wiskunde veel lager: het is slechts een van de vele vakken. Een onvoldoende voor wiskunde is niet zo erg. Het wordt gecompenseerd door andere cijfers.

Algemene vaardigheden

Naast de specifieke eindtermen van de vakinhoud staan ook voor wiskunde algemene vaardigheden in het examenprogramma vermeld, zoals informatievaardigheden, onderzoeksvaardigheden, oriëntatie op studie en beroep. In de volgende paragraaf kom ik hier op terug.

Veranderingen in het wiskundeonderwijs: van rijen oefensommen naar contextproblemen

Wat te denken van de veranderingen die een (iets oudere) wiskundedocent allemaal

heeft meegemaakt. Wat er allemaal verzonnen wordt, door het ministerie, door vakontwikkelgroepen, door schrijvers van de wiskundemethoden, de docent op de werkvloer moet het allemaal maar doen.

Als leerling op de middelbare school in mijn tijd had je drie vakken wiskunde: goniometrie, analytische meetkunde en stereometrie. Drie mooie cijfers op je lijst als het meezat. Toen kwam de Mammoetwet. Wiskunde I voor alle leerlingen op het vwo en wiskunde II voor de bollebozen. Dat veel leerlingen in deze periode een hekel aan wiskunde kregen vind ik wel begrijpelijk. Congruentiebewijzen en ingewikkelde letterformules die moesten worden vereenvoudigd zoals in de tweede klas havo/vwo waren een crime. Een groot aantal afspraken om tot het tekenen van een grafiek te komen, veel oefenen met differentiëren en integreren, parameterkrommen zonder tekening erbij en gekunstelde modulusfuncties die daarmee in één formule eigenlijk twee functies definieerden met verschillende domeinen, en daarmee niet-differentieerbare situaties, dit soort opgaven waren voor de eenvoudige leerling 5V en 6V hoofdbrekend. Als beginnend docent werd ik geconfronteerd met kansrekening en statistiek. Met de rommelige colleges van Freudenthal als inhoudelijk en didactisch voorbeeld in gedachte —mijn tot dan toe enige ervaring met deze tak van wiskunde— beloofde dat niet veel goeds. Gelukkig maakte ik me de beginselen van kansrekening en statistiek snel eigen, en vonden de leerlingen het ook niet zo moeilijk. Vervolgens kwam middenschool en basisvorming. Vakkenpakketten en doorstroomprofielen. Wiskunde A doet zijn intrede. Wiskunde A moet de belangstelling en het nut van wiskunde voor iedereen onderstrepen: realistisch wiskundeonderwijs. Maatschappelijk relevante onderwerpen, sommen uit contexten, samenhang met andere vakken. De wiskunde van Jan de Lange, zich op Hans Freudenthal beroepend. In die tijd werden er nog inhoudelijke nascholingen gegeven. Met drie collega's gingen we een jaar lang op nascholing in Delft, naar Agnes Verweij. Sommetjes maken, maar vooral ook discussies over het hoe en waarom. Daarna de praktijk in de lessen. Wiskunde wordt door de leerlingen niet meer als bijzonder vak beleefd, wiskunde A is een soort aardrijkskundevak geworden. Grote groepen B-leerlingen doen wiskunde A er fluitend bij. Het kostte ons enkele jaren om te wennen aan de veranderde status van het vak. Op mijn school heeft Jan Breeman ons er toen doorgesleept. En dan, bij de invoering van de profielen kreeg elk profiel zijn speci-

fieke wiskunde. Zo wordt de docent havo/vwo geacht om nu op acht niveaus wiskunde te geven. WiA1 en WiA1,2 in de maatschappij profielen, WiB1 en WiB1,2 in de gezondheid profielen.

De grafische rekenmachine

Gepaard gaand met deze profilering van de wiskunde maakte de gewone rekenmachine plaats voor de *Grafische Rekenmachine* (GR). Het tekenen van een grafiek werd een koud kunstje. Nooit meer sommen met een volledig onderzoek van een functie. "Gelukkig maar," dachten de leerlingen, want als je daar een foutje in had, kon je meestal ook de volgende vragen niet volledig beantwoorden. Dat het door velen verguisde apparaat ook didactische voordelen heeft is minder bekend. Zo deed ik vroeger twee lessen over de geboorte van het Eulergetal e . Het maken van de tabel van de hellingen van de grafiek van de functie $v(x) = 2^x$ ('de vader' van e) kostte een les, en die van $m(x) = 3^x$ ('de moeder') kostte nog een les. Nu kan ik aan het eind van één les de klas feliciteren met de geboorte van dit mooie nieuwe getal en beschuit met muisjes uitdelen. De aandacht bij de wiskunde in de Tweede Fase is naar modelleren en redeneren gegaan. Met de GR in de hand kun je nu veel interessante problemen onderzoeken. Veel rekenwerk (functiewaarden uitrekenen) kan snel met de GR gedaan worden, als je wilt in een tabel. Helaas zijn er leerlingen die zich zonder dit apparaat volledig onthand voelen. Ze rekenen er alles mee uit. Maar voor een deel ligt dat ook aan de docenten die dit toestaan.

ICT en onderzoeksvaardigheden.

Een onderdeel van het schoolexamen wiskunde is de *praktische opdracht* (PO). Deze moet in groepsverband van ten minste drie leerlingen gemaakt worden. De PO bepaalt twintig tot veertig procent van het schoolexamencijfer dat weer de helft van eindexamencijfer bepaalt. Bij het maken van de PO spelen samenwerking en ICT-vaardigheden een grote rol met het gevaar dat er ook veel van internet gekopieerd kan worden. Van leerlingen wordt geëist dat ze een goed verslag van de opdracht kunnen maken. Maar een wiskunde PO moet wel enig wiskundig niveau hebben. Zo moet er eigenlijk al in de onderbouw op worden voorbereid. Goed overleg met de docenten in de onderbouw is ook hiervoor noodzakelijk.

Hoe een school de PO opneemt in het plan van toetsing en afsluiting (PTA) kan heel verschillend zijn. Mijn leerlingen krijgen in vwo

4 een voorbereidende PO over producten van lineaire functies: $\text{lijn} \times \text{lijn} = \text{parabool}$, maar is het omgekeerde ook waar? $\text{Parabool} / \text{lijn} = \text{lijn}$? Wanneer wel/niet? Wat krijg je met $\text{parabool} \times \text{lijn}$ of $\text{parabool} / \text{lijn}$? Waar zitten alle toppen van een familie? Ik deel de klas op in tweetallen die elk een eigen opdracht krijgen op het niveau waarvan ik denk dat ze het aankunnen. In het verslag moet wel wiskunde staan. Een punt is voor wie iets origineels of speciaals heeft gevonden. Elk jaar zie ik weer werkstukken van groepjes die iets moois hebben gevonden.

In vwo 5 krijgen ze een *computeropdracht*: zelf het programma *Telproblemen* doorwerken, aantekeningen maken, en afsluiten met een individuele toets (vijf procent van het dossier). Goed voor hun zelfvertrouwen want er kan hoog gescoord worden. Dan de *echte PO* (vijftien procent van het dossier). De liefhebbers doen in groepjes van vier mee met de *wiskunde B-dag*, een internationale wedstrijd voor teams. In 2004 ben ik voorzichtig begonnen met meedoen. Dit jaar had ik er meer vertrouwen in. Ik beloofde de deelnemers dat ze geen onvoldoende konden halen als ze meededen. Dit resulteerde in deelname van bijna

de hele klas. Op de wedstrijddag nam ik het werk in, beoordeelde het met een voorlopig cijfer, schreef er opmerkingen bij waar ik nog verbeteringen verwachtte, en gaf ze nog twee weken de tijd om een verbeterde versie in te leveren. De overige leerlingen laat ik een PO maken over het fileprobleem. Dit gaat over een formule van de doorstroming van een rij auto's —met wel met behoorlijk wat wiskunde erin.

Nieuw

in de Tweede Fase bij wiskunde op het vwo is het keuzeonderwerp, het zogenaamde *zebrablok*, een naam die ooit door Jan Breeman is bedacht. Op de kaart met domeinen en studielasturen van het programma voor de Tweede Fase stonden een aantal gestreepte blokken. De studielast van deze blokken moest besteed gaan worden aan een keuzeonderwerp. Voor er sprake was van de Tweede Fase maakten Jan Breeman en ik al kleine boekjes voor vwo 4 over allerlei onderwerpen waarin wiskunde een rol speelt. Omdat onze school rijkelijk bedeed was met vier uur wiskunde in vwo 4, lieten we de leerlingen zelfstandig enkele van die boekjes doorwerken. Ze de-

den dit met veel plezier. Nu in de Tweede Fase kiezen mijn leerlingen zelf een onderwerp uit een van de titels van de zebra-reeks. Voor iedere leerling zit er wel een interessant onderwerp bij waarmee hij aan de slag wil. Ze werken het boekje in hun eentje en zonder hulp of uitleg van mij door, zoeken in overleg met mij een extra opdracht uit. Dan komt de presentatie aan de hele klas. Maximaal vijftien minuten. Steeds vaker zie ik een mooie PowerPoint-presentatie. Een helder en duidelijke uitleg. Een bevlogen verhaal over de extra opdracht. Dan moet het logboek en het schrift met de uitwerkingen worden ingeleverd. Het cijfer (vijf procent van het dossier) is nooit onvoldoende. Het zebra-blok vind ik een niet meer weg te denken onderdeel van de wiskunde in de Tweede Fase (zie ook [5]).

Veranderingen in het onderwijzen van wiskunde: van krijtje naar applet

Mag je nog wel een hele les uitleg geven met een krijtje op het bord? Een gevolg van de Tweede Fase is dat de schoolboeken (*methoden*) zo compleet mogelijk proberen te zijn. Op de eerste bladzijden van elk boek wordt uitgelegd wat de leerdoelen zijn, hoe je het



foto: Roeland Koning

boek moet gebruiken, hoe het is ingedeeld, hoe je je zelf kunt toetsen, waar de extra oefening staat, er staan suggesties voor een praktische opdracht, enzovoorts. Dan is er een cd-rom waarop de uitwerkingen van de opgaven staan, er zijn animaties en applets waarin bepaalde stukjes leerstof of vaardigheden worden uitgelegd. Ik durf te stellen dat de meeste wiskundeleraars het boek bijna letterlijk volgen. Enige probleem voor hen lijkt te zijn welke opgaven geschrapt kunnen worden. Dit vind ik een kwalijke zaak. Het boek moet ondersteunend zijn. Er moet voldoende uitleg in staan en een samenvatting van de te bereiken leerdoelen. Maar bij de manier waarop de leerling die doelen bereikt neemt een aantal methoden te veel het heft in handen. Een voorbeeld hoe het moet, en doe maar na. Ik pleit ervoor dat docenten (weer) meer zelf het heft in handen nemen. Samen met de leerling zelfontdekkend leren. Wat is er mooier dan dat een leerling zelf de 'aha'-beleving heeft wanneer hij een bepaald begrip snapt door het zelf gevonden te hebben. Samen aan het werk terwijl het hele bord vol komt te staan met tabellen, formules, tekeningen, diagrammen in allerlei kleuren: heerlijk, fantastisch. Ik zou legio voorbeelden kunnen aanhalen waarbij je de leerlingen dit gevoel kunt laten beleven. De grafische rekenmachine kan hierin een belangrijke rol spelen. Als 'checker', of als hulpje bij het ophalen van rekenregeltjes. Ik geef altijd opgaven op proefwerken die ze zonder GR moeten maken. Ook vergelijkingen oplossen, maximum/minimum, oppervlakte, inhoud berekenen laat ik meestal exact doen. Het is natuurlijk leuk dat de GR dat ook kan, maar het weten indrukken van de juiste knop-

pen kan nooit het doel van wiskundeonderwijs zijn. Toch wringt hier de schoen. De leerlingen wordt verweten dat ze niet meer kunnen rekenen. Het zij zo. Ik denk dat veel oefenen met rekenen weinig extra gecijferdheid oplevert, ook al zou je er de tijd voor nemen in je lessen. Ik denk dat de GR veel kan bijdragen tot een beter begrip van allerlei wiskunde. Als didactisch hulpmiddel zou ik hem niet meer willen missen. Zoals bij de geboorte van het getal e . Een ander voorbeeld: wat is x^{-1} ? Probeer eerst 2^{-1} en 3^{-1} , eventueel met de toets maak breuk, dan snappen ze ook dat x^{-1} hetzelfde is als $1/x$ is. Leer ze dat 2^{-1} in het rijtje $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$, $2^0 = 1$ hoort. Telkens wanneer een negatieve exponent op de proppen komt, probeer ik hen te laten refereren aan het ontstaan van het begrip dat erachter zit. Daarbij kan de GR een prachtige rol spelen.

Er is veel kritiek op de contextwiskunde. Vaak worden er door schrijvers van de methoden contexten met de haren bij gesleept omdat de formule dan praktisch lijkt. Zo is er een opgave over twee fietsers, van de een is de tijd-afstand-grafiek een rechte lijn, die rijdt dus met een constante snelheid, van de ander is het een stuk van de grafiek van een derdegraads functie. Als je dan uitrekent dat op $t = 0$ de snelheid 60 km/u is, dan klopt er iets niet. De kritiek op dit soort opgaven vind ik terecht. Ook zouden er in examens in overvloed oneigenlijke contexten staan. Dit laatste bestrijd ik. Maar het kan ook anders, het moet anders. Er zijn voldoende zinvolle contexten die ook een mooi stuk wiskunde inleiden. Of waarop de theorie kan worden toegepast. Dit kunnen ook situaties zijn uit

de wiskunde zelf. Wat is de helling van een grafiek? Hoe kun je die redelijk benaderen? Hoe vouw je een bakje van een A4-tje met zo groot mogelijke inhoud? (Eerst echt laten vouwen natuurlijk, liefst een heel nest van bakjes). Staartdelen (met letters), hoe moet dat? Wat is er aan de hand als de staartdeling uitkomt? Hoe kun je een *perforatie* maken in een grafiek? Hoe gedraagt de hellingfunctie van een exponentiële grafiek zich? Hoe maak je een regelmatige achthoek uit een cirkel? En hoe uit een vierkant? Waarom is $2^{\log_2 8}$ gelijk aan 8? Ik probeer mijn leerlingen inzichtelijk te laten leren. Ik laat ze eerst de samenvatting van een hoofdstuk lezen, en wil dat ze dan bij het maken van de opgaven deze in gedachten houden. Als je het snapt hoeft je niet per se alle opgaven te maken. Maak een keuze. Houd jezelf voor wat je geleerd hebt.

Tenslotte zou ik nog willen opmerken dat ik hoop dat het competentiegericht onderwijs op de leraaropleidingen ruim aandacht geeft aan de competenties: ... heeft voldoende rekenvaardigheid en ... staat voldoende boven de leerstof. Elke wiskundeleraar zou moeten weten hoe je een hoek van 60° vouwt [6] en moeten kunnen bewijzen dat hij echt 60° is, en hoe je een parabool vouwt. Zo kan ik nog vele voorbeelden noemen. Alleen als je voldoende boven de stof staat ben je in staat om interessante wiskunde aan de leerlingen voor te schotelen, zelfontdekkend leren te begeleiden door de juiste vragen te stellen, de juiste vaardigheden op te halen, de juiste dwarsverbanden te leggen. Kortom om spannende en uitdagende lessen te geven. 

Referenties

- 1 Rob van Oord, 'Een puzzel', *Euclides* **81** (2005), pp. 104–106.
- 2 Rob van Oord, 'Aansluiting vwo - TU', *Euclides* **81** (2006), pp. 242–247.
- 3 Anne van Streun, 'Gerommel aan de Tweede Fase', *Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie* **4**(1) (2003), pp. 56,57.
- 4 P.J. Palmer, 'De goeroe van het nieuwe leren?', *Euclides* **81** (2005), pp. 117–119.
- 5 Rob van Oord, 'De Tweede Fase en het zebrablok', *Euclides* **78** (2002), pp. 86–89.
- 6 Hans Melissen en Rob van Oord, *Schuiven met auto's, munten en bollen*, 2001, Epsilon Uitgaven, Utrecht.

Jaap Spies

Landschaplaan 88
7824 BM Emmen
jaapspies@gmail.com

Problemenrubriek Permanent solutions of Problem 29

Dancing School problems

The Dancing School Problems originated from Problem 29 of the March 2002 issue of the *Nieuw Archief voor Wiskunde*. The author of this problem, Lute Kamstra, found his inspiration in juggling. A flawed solution was published and after that the problem was declared open again. The present author, challenged by the editor, found a solution in January 2003. At the time, the Problem Section of the NAW was merged into the UWC, and there were still a few solutions to problems left unpublished, such as this solution. The methods used to solve this problem are connected to Graph Theory.

The following Dancing School Problem is equivalent to Problem 29: Imagine a group of n ($n > 0$) girls ranging in integer length from m to $m + n - 1$ cm and a corresponding group of $n + h$ boys ($h \geq 0$) with length ranging from m to $m + n + h - 1$ cm. Clearly, m is the minimal length of both boys and girls.

The location is a dancing school. The teacher selects a group of n out of $n + h$ boys. A girl of length l can now choose a dancing partner out of this group of n boys, someone either of her own length or taller up to a maximum of $l + h$. How many 'matchings' are possible?

A Solution

Let us return to the original problem of Lute Kamstra. Let $n > 0$ and $h \geq 0$ be given and let $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ be a subset of $\{1, 2, \dots, n + h\}$, where we assume that $a_i < a_j$ whenever $i < j$. The problem asks us to count the number of bijections $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ that satisfy $k \leq \pi(k) \leq k + h$ for all k . We can code the restrictions in an n by n (0,1)-matrix $B = [b_{ij}]$ by setting $b_{ij} = 1$ if and only if $i \leq a_j \leq i + h$. The set of S_B of permitted bijections can then be characterized as follows:

$$S_B = \left\{ \pi \mid \prod_{i=1}^n b_{i\pi(i)} = 1 \right\}.$$

The number of elements of S_B is given by the following formula

$$|S_B| = \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n b_{i\pi(i)},$$

the latter expression is the *permanent* of the matrix B , which we denote $\text{Per}(B)$.

The matrix B can be interpreted as an incidence matrix of a bipartite graph G with vertices in $X = \{1, 2, \dots, n\}$ and $Y = A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. An edge of G is a pair (i, a_j) with $b_{ij} = 1$.

The Permanent of a Matrix

In 1812 permanents were introduced independently by Binet and Cauchy. They are defined as follows.

Let $A = (a_{ij})$ be an $m \times n$ matrix over any commutative ring, $m \leq n$. The *permanent* of A is given by

$$\text{Per}(A) = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \quad (1)$$

where the summation extends over all one-to-one functions π from $\{1, \dots, m\}$ to $\{1, \dots, n\}$.

The product $a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ is called a *diagonal product*. So the permanent of an $m \times n$ matrix A is the sum of all the diagonal products of A .

Binet gave algorithms for $m = 2, 3$ and 4. There are general algorithms by Binet/Minc and Ryser. See [3] and [4]. For an implementation of Ryser's algorithm in SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation) see [8]. As far as we know SAGE [5] is the only Computer Algebra System (CAS) with a permanent function for rectangular matrices.

The Permanent of a Matrix of order n

The *permanent* of a square matrix A of order n is defined as $\text{Per}(A) = \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ where we sum over all $n!$ possible permutations π of $1, 2, \dots, n$.

What is this rather strange cousin of the determinant? Let us try to make this permanent more visible. We define a vector $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ and a vector $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ with $\bar{y} = A\bar{x}$. We define a multivariate polynomial

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n y_i = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) \cdot (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) \cdots (a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n)$$

Expanding this polynomial and summing the terms with $x_1 x_2 \cdots x_n$, we get

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi} a_{1\pi(1)} x_{\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} x_{\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} x_{\pi(n)} \\ &= \left(\sum_{\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \right) \cdot x_1 x_2 \cdots x_n \end{aligned}$$

So $\text{Per}(A)$ is the coefficient of the term with $x_1 x_2 \cdots x_n$.

How can we compute a permanent efficiently?

We know now where to find the permanent, but how can we compute it? There is the famous Ryser's Algorithm (see [3], p. 199-200). Here we give an alternative.

We define $Q(\bar{x}) = (\prod_{i=1}^n x_i) \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, and sum $Q(\bar{x})$ over all possible $\bar{x}$ with $x_i = \pm 1$, for $i=1, 2, \dots, n$.

As we can easily see only the term $\text{Per}(A) \cdot x_1 x_2 \dots x_n$ of $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ always contributes to this sum ($x_i^2 = 1$ for $i = 1, 2, \dots, n$). A term t of $Q(\bar{x})$ with factor x_k missing in $P(x_1, \dots, x_n)$ is counted once as t and once as $-t$, so the overall result is 0. There are 2^n possible vectors $\bar{x}$ with $x_i = \pm 1$ for all i , so we have proved that the permanent of A is

$$\text{Per}(A) = 2^{-n} \cdot \sum_{x_i = \pm 1} Q(\bar{x}).$$

A matching in G is a set of disjoint edges. A perfect matching is a matching containing n edges. The number of perfect matchings is $\text{Per}(B)$. See [3] p. 44.

Rook Theory

There is a more algebraic approach to the computation of $|S_B|$. We interpret the matrix B as an $n \times n$ chess board. On squares with $b_{ij} = 1$ we may place a rook. Let $r_k(B)$ be the number of ways we can place k non-attacking rooks on the board (that is, choose k squares on B of which no two are on the same line). This again corresponds to a bipartite graph G , hence $r_k(B)$ is the number of matchings with k edges.

The *rook polynomial* $r(B, x)$ is defined as $r(B, x) = \sum_{k=0}^n r_k(B) x^k$ and $(r_0(B), r_1(B), \dots, r_n(B))$ is called the *rook vector* of B . The number of perfect matchings is $r_n(B) = \text{Per}(B)$.

In theory it is possible to determine the rook polynomial of arbitrary chessboards using the so-called expansion theorem. We mark a square on board B as special and let B_s denote the chessboard obtained from B by deleting the corresponding row and column. B_d is the board obtained from B by deleting the special square, meaning that we change the 1 into a 0. The ways of placing k non-attacking rooks can now be divided in two cases, those that have the rook in the special square and those that do not. In the first case we have $r_{k-1}(B_s)$ possibilities and in the second $r_k(B_d)$. We consequently do have the relation $r_k(B) = r_{k-1}(B_s) + r_k(B_d)$. This corresponds to $r(B, x) = x r(B_s, x) + r(B_d, x)$. We can now find the rook polynomial of arbitrary boards by repeatedly applying the expansion formula.

All Solutions

Let $m = \binom{n+h}{n} = \binom{n+h}{h}$ be the number of different subsets X_i of order n of the set $X = \{1, 2, \dots, n+h\}$. We define a so called (0,1) configuration matrix $C = [c_{ij}]$ with $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n+h$ and $c_{ij} = 1$ if and only if $x_j \in X_i$.

Let $A_k, k = 1, 2, \dots, m$ be a possible subset of X . In the row $[c_{kj}]$ let h be the number of entries with $c_{kj} = 0$, n the number of entries with $c_{kj} = 1$ and $A_k = \{j | c_{kj} = 1\} = \{a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n}\}$. We define the matrix $B_k = [b_{ij}]$ of order n with $b_{ij} = 1$ if and only if $i \leq a_{k,j} \leq i+h$. In terms of these notions the answer of Problem 29 for A_k is $\text{Per}(B_k)$ for $k = 1, 2, \dots, m$.

In [6] a C-program can be found which for given n and h cal-

culates the answers for all possible subsets A_k .

Related Problems

What if the girls assume power, depose the teacher and choose directly out of the set of $n+h$ boys (still observing the length restrictions)? Formulated in the spirit of Problem 29: we can simply count the injective maps $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n+h\}$ subject to the original restrictions: $k \leq \pi(k) \leq k+h$ for all k .

Clearly we can once again associate a bipartite graph G to this problem. The n -set X of girls and the $(n+h)$ -set Y of boys provide the vertices. If a girl x can choose a boy y of appropriate length we have an edge $\{x, y\}$ of G .

The adjacency matrix A has the special form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}.$$

The matrix B that codes the restrictions now is an n by $n+h$ matrix of zeros and ones, defined by $b_{ij} = 1$ if and only if $i \leq j \leq i+h$.

In the matrix B a matching M with cardinality n corresponds to a set of n 1's with no two of the 1's on the same row. The total number of matchings with $|M| = n$ is $\text{Per}(B)$.

It is clear that this problem can be translated into a Rook Problem: find the number of all possible non-attacking placings of n rooks on an $n \times (n+h)$ -chessboard, when placing a rook on the i -th row and the j -th column is subject to the condition $i \leq j \leq i+h$.

As stated above we already have a solution to this problem: $\text{Per}(B)$. However, the special form of the matrix B may allow for a more explicit formula. There is one in Ryser's Algorithm: We translate Theorem 7.1.1 of [3] to our situation.

Let $B = [b_{ij}]$ the $n \times (n+h)$ (0,1)-matrix with $b_{ij} = 1$ if and only if $i \leq j \leq i+h$. For any submatrix C of B we let $\prod(C)$ denote the product of its row sums and for a number r with $h \leq r \leq n+h-1$ the expression $\sum \prod(B_r)$ denote the sum of all $\prod(B_r)$, where B_r runs over all $n \times (n+h-r)$ -submatrices of B . Then

$$\text{Per}(B) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{h+k}{k} \sum \prod(B_{h+k}).$$

Some Concrete Results

Let A be a (0,1)-matrix with m rows and n columns ($m \leq n$), let α be a k -subset of the m -set $\{1, 2, \dots, m\}$ and let β be a k -subset of $\{1, 2, \dots, n\}$. $A[\alpha, \beta]$ is the $k \times k$ submatrix of A determined by rows i with $i \in \alpha$ and columns j with $j \in \beta$.

The permanent $\text{Per}(A[\alpha, \beta])$ is called a *permanental k -minor* of A . We define the sum over all possible α as β

$$p_k(A) = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} \text{Per}(A[\alpha, \beta]).$$

We define $p_0(A) = 1$ and note that $p_m(A) = \text{Per}(A)$. The number $p_k(A)$ counts the number of sets of k ones in the matrix A with no two ones in the same row, so $(p_1(A), \dots, p_m(A))$ is the rook vector of A . According to Theorem 7.2.1 of [3] we can evaluate the permanent of a (0,1)-matrix in terms of the permanental minors of the complementary matrix $J_{m,n} - A$, where $J_{m,n}$ is the m by n matrix with all entries 1.

Translated to our matrix B of the previous section, we get

$$\text{Per}(B) = \sum_{k=0}^n (-1)^k p_k(J_{n,n+h} - B) \frac{(n+h-k)!}{h!}.$$

The Van der Waerden Conjecture: a story told by J.H. van Lint

Few mathematicians have ever heard of permanents and if so, it is the Permanent Theorem, better known as the Van der Waerden conjecture. Cited from [1]: "Van Lint, a well-known Dutch mathematician, wrote (see [2]) about the previous history of the Van der Waerden conjecture:

'Much of the work on permanents is in some way connected to this conjecture and about 75% of the work on permanents is less than 20 years old! ... In 1926 B.L. van der Waerden proposed as a problem (!) to determine the minimal permanent among all doubly stochastic matrices. It was natural to assume that this minimum is $\text{Per } J_n = n!n^{-n}$. Let us denote by Ω_n the set of all doubly stochastic matrices. The assertion

$$A \in \Omega_n \cap A \neq J_n \Rightarrow (\text{Per}(A) > \text{per}(J_n))$$

became known as the Van der Waerden conjecture. Sometimes just showing that $n!n^{-n}$ is the minimal value is referred to as the conjecture.

This note allows me to save for posterity a humorous experience of the late sixties. Van der Waerden, retired by then, attended a meeting on combinatorics, a field he had never worked in seriously. A young mathematician was desperate to present his thesis in 20 minutes. I was sitting in the front row next to Van der Waerden when the famous conjecture was mentioned by the speaker and the alleged author inquired what this famous conjecture stated!! The exasperated speaker spent a few seconds of his precious time to explain and at the end of his talk wandered over to us to read the badge of the person who had asked this inexcusable question. I could foresee what was to happen and yet, I remember how he recoiled. You needn't worry — he recovered and now is a famous combinatorialist. The

lesson for the reader is the following. If you did not know of the 'conjecture' then it is comforting to realize that it was 40 years old before Van der Waerden heard that it had this name.

What is the origin of the problem? Upon my request Van der Waerden went far back in his memory and came up with the following. One day in 1926 during the discussion that took place daily in Hamburg O. Schreier mentioned that G.A. Miller had proved that there is a mutual system of representatives for the right and left cosets of a subgroup H of a finite group G . At this moment Van der Waerden observed that this was a property of any two partitions of a set of size μn into μ subsets of size n . This theorem was published in "Hamburger Abhandlungen" in 1927. In the note, added in the proof, Van der Waerden acknowledged that he had rediscovered the theorem which is now known as the König-Hall theorem ...

In the terminology of permanents we can formulate the problem Schreier and Van der Waerden were considering as follows. Let $A_i (1 \leq i \leq \mu)$ and $B_k (1 \leq k \leq \mu)$ be the subsets in two partitions and let $a_{ik} := |A_i \cap B_k|$. Then $A = (a_{ik})$ is a matrix with constant line sums ($= n$). The assertion that there is a mutual system of representatives of the sets A_i respectively of the sets B_k is the same as to say that $\text{Per } A > 0$. At this point Van der Waerden wondered what the minimal permanent, under the side condition that all line sums are 1, is? He posed this as a problem in Jber. d. D.M.V. 35 and thus the Van der Waerden conjecture was born.' "

Remarks

The matrix J_n is the $n \times n$ matrix with all entries equal to $1/n$. In a double stochastic matrix all rows and all columns sum up to 1. G.P. Egorychev provided one of the proofs in 1981. The other independent proof is from D.I. Falikman.

This is in particular interesting for $h \geq n - 2$, in which case we can easily see that $p_k(J_{n,n+h} - B)$ is independent of h , meaning that $\text{Per}(B) = f(n, h)$ is polynomial in h . For example, we have:

$$f(5, h) = h^5 - 5h^4 + 25h^3 - 55h^2 + 80h - 4 \quad (h \geq 3).$$

We have polynomials up to $f(10, h)$. See the sequences A079908-A079914 in [7]. In [6] a small SAGE-program can be found that generates these polynomials.

The Free Dancing School and Juggling

What if the girls choose directly out of the set of $n + h$ boys, and take a boy either of their own length or taller as partner.

Again B is a $(0, 1)$ -matrix of size $n \times (n + h)$ that specifies the

possible dancing pairs. We have $b_{ij} = 1$ if and only if $i \leq j \leq n + h$. The number of matchings with cardinality n is $\text{Per}(B)$. Let $b_1, b_2, \dots, b_m$ be integers with $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m$. The $m \times b_m$ $(0, 1)$ -matrix $A = [a_{ij}]$ defined by $a_{ij} = 1$ if and only if $1 \leq j \leq b_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$) is called a *Ferrers matrix*, and is denoted by $F(b_1, b_2, \dots, b_m)$. According to [3], Corollary 7.2.6, we can calculate the permanent with $\text{Per}(F(b_1, b_2, \dots, b_m)) = \prod_{i=1}^m (b_i - i + 1)$. We can associate a matrix B to a Ferrers matrix $F(b_1, b_2, \dots, b_n)$ by setting $b_i = h + i$. So $\text{Per}(B) = \prod_{i=1}^n (h + i - i + 1) = (h + 1)^n$; a result we could also have found by direct counting.

We note that the counting problem in Proposition 3.1 in *Juggling polynomials* by Kamstra can be solved by calculating the permanent of the corresponding Ferrers matrix. See [9] page 5. 

References

- G.P. Egorychev, 'Van der Waerden Conjecture and Applications', in *Handbook of Algebra* 1, edited by M. Hazewinkel, Elsevier, 1996.
- J.H. van Lint, 'The van der Waerden Conjecture: two proofs in one year', *Math. Intelligencer* 4 (1982), 72-77.
- Richard A. Brualdi, Herbert J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- Henryk Minc, *Permanents*, Addison-Wesley, Reading, 1978.
- William Stein, David Joyner, *SAGE: Software for Algebra and Geometry Experimentation*, Comm. Computer Algebra 39 (2005), pp. 61-64.
- www.jaapspies.nl/mathfiles
- The Online Encyclopedia of Integer Sequences*, www.research.att.com/~njas/sequences
- <http://sage.math.washington.edu/sage/>
- Lute Kamstra *Juggling polynomials*, CWI Report PNA-R0113, 2001.

Jaap Top

Instituut voor wiskunde en informatica
 Rijksuniversiteit Groningen
 Postbus 800
 9700 AV Groningen
 j.top@math.rug.nl



Onderwijs

De opgaven van de LIMO

De Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade (LIMO) vond voor de tweede keer plaats op vrijdag 2 juni in Nijmegen. De tien opgaven werden door de deelnemers als behoorlijk pittig ervaren. Hoe zagen de opgaven eruit?

De opgaven van de LIMO kwamen ook dit jaar weer uit de verschillende disciplines binnen de wiskunde. Om er een indruk van te geven, drukken we de tien opgaven hieronder af. Voor elke volledige en correcte oplossing konden de deelnemende groepen tien punten verdienen, dus maximaal waren er honderd punten te verdienen. De deelnemers mochten er totaal drie uur aan werken.

De beste groep met de naam *Groep van orde 4*, afkomstig uit de Universiteit Utrecht won met 49 punten. Tweede werd de eveneens Utrechtse groep *Taart* met 43 punten. De derde prijs werd behaald door de groep *NSA* van de Universiteit Amsterdam.

Voor een uitgebreid verslag van Dion Coumans, zie de nieuwsrubriek van het septembernummer van het Nieuw Archief voor Wiskunde. De oplossingen zijn te vinden op internetpagina www.desda.science.ru.nl/antwoordenboekje2006.pdf 

De opgaven

De opgaven zijn bedacht door wiskundigen van verschillende Nederlandse universiteiten. De meeste bedenkers waren 's middags aanwezig om de opgaven zelf na te kijken.

Opgave 1: Een eigenwaardenprobleem

Michael Bochev, Universiteit Twente

Dit is een klassiek probleem dat in verschillende toepassingen voorkomt, bijvoorbeeld bij het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen met behulp van de eindige elementenmethode (we danken Ferenc Izsák voor het onder de aandacht

brengen van dit probleem). We beginnen met de volgende definitie:

Definitie Voor twee matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ definiëren we hun Kroneckerproduct $A \otimes B$ als de volgende matrix

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}.$$

Bijvoorbeeld als $m = n = 2$ hebben we

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Opgave Gegeven zijn twee matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die elk een volledig stelsel van eigenvectoren hebben, met andere woorden, er bestaan nietsinguliere matrices $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ en diagonaalmatrices

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_m \end{pmatrix}$$

met $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ zodanig dat

$$AV = V\Lambda, \quad BW = W\Gamma. \quad (1)$$

De lineair onafhankelijke kolommen van de matrices V en W zijn respectievelijk de eigenvectoren van A en B . Bewijs dat de eigenwaarden van $A \otimes B$ zijn

$$\{\gamma_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Bepaal verder een matrix waarvan de kolommen de eigenvectoren van $A \otimes B$ zijn. (Hint: Gebruik relaties (1) en het volgende lemma.)

Lemma Voor elke twee gehele getallen m en n bestaat er een matrix $P \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ zodanig dat voor alle matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ geldt

$$P^T(A \otimes B)P = B \otimes A.$$

De matrix P is tevens orthogonaal: $P^{-1} = P^T$.

Opgave 2: Priemgetallen

Frans Keune, Radboud Universiteit Nijmegen

De rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ van gehele getallen is gegeven door

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n \quad \text{voor alle } n \geq 0. \end{cases}$$

Bewijs dat $a_p \equiv 1 \pmod{p}$ voor alle priemgetallen p .

Opgave 3: Pi als breuk?

Klaas Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen

Aan het eind van de achttiende eeuw bewezen Lambert en Legendre dat π niet rationaal is. In deze opgave geef je een bijzonder eenvoudig analytisch bewijs van dit feit. Het is een bewijs uit het ongerijmde. Stel dat π rationaal is, dan is π^2 dat ook, zodat $\pi^2 = a/b$ met $a, b \in \mathbb{N}$. Je gaat nu een tegenspraak afleiden.

N.B. Voor het oplossen van iedere volgende opgave mag je de te bewijzen bewering van een vorige opgave gebruiken. De opgaven zijn zodoende onafhankelijk te maken.

Definieer

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$ later zal worden bepaald, en daaruit

$$F_n(x) = b^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \pi^{2n-2k} f_n^{(2k)}(x),$$

ofwel

$$F_n(x) = b^n \left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right).$$

1. Bewijs dat $F_n(0)$ en $F_n(1)$ gehele getallen zijn.
2. Bewijs dat $\pi a^n \int_0^1 f_n(x) \sin(\pi x) dx = F_n(1) + F_n(0)$.
3. Bewijs hieruit dat $0 < F_n(1) + F_n(0) < \pi a^n / n!$.
4. Leid nu met behulp van de Stirlingformule:

$$n! \sim \sqrt{s\pi n} e^{-n} n^n$$

een tegenspraak af.

Opgave 4: Een toren van machten

Hendrik Lenstra, Universiteit Leiden

Bepaal of er positieve gehele getallen a, b, n en m bestaan, zo dat $a \neq b, n \geq 2, m \geq 2$ en

$$a^{a^{a^{\dots^a}}} \}^n = b^{b^{b^{\dots^b}}} \}^m.$$

Opgave 5: De ijzergieterij

R.D. Nobel, Vrije Universiteit

Het bedrijf *Complex* wil elke maand een n -tal verschillende legeringen maken uit m verschillende metalen. Deze metalen zijn niet onmiddellijk beschikbaar maar moeten via een serie van twee bewerkingen, *smelten* en *onttrekken*, verkregen worden uit een t -tal ertsen die bedrijf *Complex* elke maand moet inkopen. De inkoop-prijs van één ton erts k is C_k ($k = 1, \dots, t$).

Van elke erts kan onbepoort veel worden ingekocht, maar het totale tonnage aan ingekocht erts mag vanwege de beschikbare verwerkingscapaciteit niet meer dan E bedragen.

Het smelten van een ton van erts k kost een bedrag S_k en neemt een tijd T_k uur in beslag. Het onttrekken van metaal i uit gesmolten erts k kost een bedrag D_{ik} per ton metaal i , en neemt, opnieuw per ton metaal i , een tijd F_{ik} uur in beslag. Verder is gegeven dat in één ton van erts k een percentage P_{ik} aan metaal i zit ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, t$). In legering j wil bedrijf *Complex* hoogstens een percentage Q_{ij} van metaal i opnemen en minstens een percentage R_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Het bij elkaar voegen en goed mengen van de verschillende metalen, nodig voor een optimale kwaliteit van de legering, kost voor elke ton van legering j een bedrag B_j , en neemt voor elke ton een tijd U_j uur in beslag. Alle bewerkingen (smelten van de verschillende ertsen, het onttrekken van de verschillende metalen uit de verschillende ertsen en het mengen van de metalen voor de verschillende legeringen) worden *na elkaar* uitgevoerd.

In totaal is W uur per maand beschikbaar voor alle werkzaamheden bij elkaar, maar aan het smelten mag hoogstens 30 procent van deze tijd besteed worden. Het onttrekken van de metalen dient tussen de 40 en 60 procent van de tijd in beslag te nemen en aan het bij elkaar voegen en mengen van de metalen moet minstens 10 procent van de tijd besteed worden.

Het bedrijf *Complex* is verplicht elke maand van legering j minstens V_j ton te produceren. De legering j wordt door *Complex* verkocht voor een bedrag van G_j per ton. De vraag naar alle legeringen veronderstellen we onbepoort. Uiteraard is *Complex* geïnteresseerd in een productieplan dat een maximale winst per maand oplevert.





Van links naar rechts, voorste rij: Hendrik Lenstra, Klaas Landsman, Frans Keune, achterste rij: Arno van den Essen, Robert Tijdeman, Floris Takens

Formuleer dit probleem van *Complex* als een lineair programmeringsprobleem. We nemen aan dat aan alle lineariteitseisen voldaan is, dus, om een voorbeeld te noemen, het smelten van twee ton erts vergt twee keer zoveel tijd als het smelten van één ton, ook al is dit misschien niet geheel realistisch.

Opgave 6: Bijzondere functies

F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen

We beschouwen continue reële afbeeldingen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. We noemen $p \in \mathbb{R}$ een periodiek punt voor f met periode k als $f^k(p) = p$ en $f^i(p) \neq p$ voor $i = 1 \dots k-1$. (Deze terminologie sluit aan bij de interpretatie van $(\mathbb{R}, f)$ als dynamisch systeem: $\mathbb{R}$ is de verzameling van alle mogelijke toestanden en f beeldt elke toestand af op de toestand die daar na één tijdstap op volgt.)

Stel nu dat f een periodiek punt p heeft met periode vier, en wel zo dat $p = f^4(p) < f(p) < f^3(p) < f^2(p)$. Toon aan dat voor elke k de afbeelding f een periodiek punt heeft met periode k .

Opgave 7: Naar beneden afronden

R. Tijdeman en S.W. Rosema, Universiteit Leiden

Stel $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ met $ad - bc = \pm 1$. Zij $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal $\leq x$.

- a) Stel $a > 1, b > 1$. Bewijs dat $\lfloor \frac{c}{a} \rfloor = \lfloor \frac{d}{b} \rfloor$.
 b) Stel $a > 0, b \geq 0, a + b > c + d$. Bewijs dat $a \geq c$.

Opgave 8: Magische vierkanten

A.R.P. van den Essen, Radboud Universiteit Nijmegen

Zij M een 3×3 magisch vierkant, dat wil zeggen een 3×3 -matrix waarin de som van alle getallen in iedere rij, kolom en ieder van de twee hoofddiagonalen hetzelfde is.

Laat zien dat voor ieder oneven natuurlijk getal n de matrix M^n een magisch vierkant is. Hierbij wordt onder M^n verstaan het matrix product van n factoren M .

Opgave 9: Bernoulli-polynomen

J. Top en G. Tiesinga, Rijksuniversiteit Groningen

Acht jaar na zijn dood, verscheen in Bazel het boek *Ars Conjectandi* van Jakob Bernoulli. Jakob was de oom van de in Groningen geboren Daniel Bernoulli (1700) en de broer van Johann, die van 1695 tot 1705 hoogleraar in Groningen was en vandaar vertrok om zijn overleden broer in Bazel te kunnen opvolgen.

In *Ars Conjectandi* leidt Jakob onder meer een formule af voor

$\sum_{k=0}^n k^m$, in termen van wat tegenwoordig een *Bernoullipolynoom* heet. We noteren P voor de lineaire ruimte over $\mathbb{Q}$ bestaande uit alle veeltermen in de variabele x , met rationale getallen als coëfficiënten. Op P beschouwen we drie lineaire operatoren, namelijk

$$D: P \rightarrow P \text{ gegeven door } D(f) = \frac{df}{dx}$$

$$\Delta: P \rightarrow P \text{ gegeven door } \Delta(f) = f(x+1) - f(x)$$

$$\varphi: P \rightarrow P \text{ gegeven door } \varphi(f) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

a) Toon aan dat $\Delta = \varphi \circ D = D \circ \varphi$ en $\Delta \circ \varphi = \varphi \circ \Delta$ en $\Delta \circ D = D \circ \Delta$.

b) Bewijs verder dat φ inverteerbaar is.

Voor elk geheel getal $n \geq 0$ definiëren we het n -de Bernoullipolynoom $B_n(x)$ door

$$B_n(x) := \varphi^{-1}(x^n).$$

c) Bewijs de volgende eigenschappen van de Bernoullipolynomen.

- $B_n(x)$ heeft graad n .
- $\frac{dB_n(x)}{dx} = nB_{n-1}(x)$ voor $n \geq 1$.
- $\Delta(B_n(x)) = nx^{n-1}$ voor $n \geq 1$.
- $\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0))}{(m+1)}$ voor $n \geq 1, m \geq 0$.
- $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = x^n$.
- $B_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x+k)^n$.

Opgave 10: Een statistisch vraagstuk

A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit Amsterdam

Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijke reëelwaardige stochastische grootheden zijn, met kansdichtheid

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{(x-\mu)/\sigma}$$

voor $x \leq \mu$ en $f(x) = 0$ voor $x > \mu$. Hierin zijn $\mu \in \mathbb{R}$ en $\sigma > 0$ constanten.

We definiëren

$$\hat{\mu}_n = \max(X_1, \dots, X_n),$$

$$\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_n - X_i),$$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu - X_i).$$

Een rij stochastische grootheden T_n convergeert in verdeling naar de (continue) verdelingsfunctie F als voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n \leq x) = F(x).$$

N.B. Voor het oplossen van iedere volgende opgave mag je de te bewijzen bewering van een vorige opgave gebruiken. De opgaven zijn zodoende onafhankelijk te maken.

- Bewijs dat $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n)$ de meest aannemelijke schatter van (μ, σ) is.
- Laat zien dat de rij stochastische grootheden $n(\hat{\mu}_n - \mu)$ in verdeling naar een limiet convergeert.
- Gebruik de centrale limietstelling om te bewijzen dat de rij stochastische grootheden $\sqrt{n}(S_n - \sigma)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert.
- Bewijs dat de rij stochastische grootheden $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma)$ in verdeling naar een normale verdeling convergeert, en geef de parameters van deze normale verdeling.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



J. van de Groep
Gegoochel met Getallen
Wiskundige Goocheltrucs voor in de Les

Houten: EPN, 2006
 62 p., prijs €5,95
 ISBN 90-11-09944-3

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen in 1999 werd door Job van de Groep een workshop met de titel *Gegoochel met getallen* georganiseerd. Het materiaal voor deze workshop heeft als basis voor dit boek gediend. De trucs in het boek (overigens niet alleen met getallen) zijn gebaseerd op wiskundig getinte principes. In de jaargangen 80 en 81 van Euclides is onder de titel *De wiskundeleraar als goochelaar* ook een zestal voorbeelden hiervan verschenen. In totaal komen in het boek 41 trucs aan bod, verdeeld over vier hoofdstukken: diverse trucs met getallen, trucs met getallen-kaarten, trucs met speelkaarten, topologische trucs. Elk hoofdstuk is onderverdeeld in paragrafen, en in elke paragraaf wordt één truc behandeld. De structuur is voor alle paragrafen min of meer hetzelfde. Allereerst wordt het verloop van de truc beschreven. Daarna wordt (voor de gebruiker) een verklaring gegeven. En tenslotte wordt er een mogelijke transfer naar de les gegeven. Dat kan bijvoorbeeld zijn het vragen aan de leerlingen naar een verklaring, of nadenken over wat er verandert als je sommige dingen net iets anders zou doen. Een enkele keer wordt er in de paragraaf zelf een variant of aanvulling gegeven. De meeste trucs hebben op een of andere manier wel met getallen te maken, maar bijvoorbeeld in het laatste hoofdstuk komen ook trucs met knopen voor. Achterin het boek staat een aantal verwijzingen naar inspiratiebronnen en goochel-lectuur, onder andere verwijzingen naar een aantal boeken van Martin Gardner. In het voorwoord schrijft de auteur dat het boekje gebruikt kan worden wanneer je als leraar iets anders, iets bijzonders wilt doen, en ook dat het de mogelijkheid biedt een ludieke aanvulling te geven op de behandeling van bepaalde wiskunde onderwerpen. Ik denk dat het daar uitermate geschikt voor is. Het is een zeer gevarieerde collectie, en geeft per truc een prima beschrijving van de uit te voeren act. In het onderdeel *transfer naar de les* worden tal van interessante, en naar mijn idee voor leerlingen ook prikkelende vragen gesteld. Een aanrader voor elke docent in het voortgezet onderwijs.

B. van Asch

J. Jorgenson, S. Lang
Spherical inversion on $SL_n(\mathbb{R})$

Springer Monographs in Mathematics
 Berlijn : Springer Verlag, 2001
 426 p., prijs €101,60
 ISBN 0-387-95115-6

De theorie van bolfuncties behoorde vijftig jaar geleden tot de universitaire curricula van wiskunde en natuurkunde, maar is daar nu bijna geheel uit verdwenen. Ze leeft voort op een ander niveau door de ontdekking door Selberg, omstreeks 1950, van een absoluut fantastisch verband met de groepentheorie. Vanuit dat gezichtspunt is en wordt er veel onderzoek verricht. Als men spreekt van groepentheorie spreekt men automatisch

ook van groepsrepresentaties. Harish-Chandra kan beschouwd worden als de grondlegger van deze nieuwe theorie voor semi-simpele Liegroepen ($SL_n(\mathbf{R})$ is een voorbeeld van een semi-simpele Liegroep). Zijn monumentale werk is echter niet erg toegankelijk voor niet-ingewijden. Het vereist veel voorkennis van de structuurtheorie van Liegroepen. Er zijn intussen echter nogal wat boeken gepubliceerd die de kloof tussen specialisten en niet-specialisten hebben verkleind. Als belangrijkste auteurs noemen we in dit verband Helgason, Varadarajan, Knapp, maar ook boeken van Sugiura, Tom Dieck en anderen, die elementair zijn, kunnen worden genoemd. We beperken ons hier tot deze selectie van boeken.

De auteurs van het te bespreken boek, Jorgenson en Lang, zijn niet-specialisten. De inmiddels overleden Lang heeft zijn sporen verdiend als schrijver van 'verklarende' wiskunde. Als voorbeeld, zijn boek over $SL(2, \mathbf{R})$ ademt de geest van: waarom doen de specialisten zo moeilijk en houden ze zo weinig rekening met niet-ingewijden? Natuurlijk zal een boek, uit deze geest ontstaan, Lang zelf zeker bevredigd hebben. Maar is zo'n boek ook voor anderen aantrekkelijk? Hoe groot is de schare ontevreden, die zelfs niet genoeg heeft aan de boeken van Sugiura en Tom Dieck? Het te bespreken boek gaat over de groep $SL_n(\mathbf{R})$. De groep $SL_2(\mathbf{R})$ (van Lang's andere boek) is niet exemplarisch genoeg voor een semi-simpele Liegroep, zeggen de auteurs. Natuurlijk zit hier een kern van waarheid in, maar als de lezerskring de groep $SL_2(\mathbf{R})$ als introductie goed vindt, waarom dan nog eens $SL_n(\mathbf{R})$? Het antwoord is, denk ik, eenvoudig: de auteurs hadden de theorie voor de speciale groep $SL_n(\mathbf{R})$ nodig voor hun eigen onderzoek. Al het geschimp op de 'specialisten' die er een potje van maken, lijkt me daarom ongepast. De lezerskring die de auteurs op het oog hebben blijft overigens onduidelijk. De aanpak van de theorie die de auteurs kiezen is tegendraads. Groepsrepresentaties mogen niet meer, alleen 'echte' analyse mag, de 'heat kernel' moet. Daar is niets op tegen. Maar waarom eigenlijk?

Zoals ook in Lang's boeken, worden begrippen en notaties van de specialisten veranderd. De bekende Langlands ontbinding van een parabolische ondergroep heet nu ook Iwasawa ontbinding, de orthogonale groep $O(n, \mathbf{R})$ heet $Uni_n(\mathbf{R})$, de gebruikelijke notatie KAN (Iwasawa) is nu KAU, de Abel transformatie heet nu Harish transform (om van te rillen), enzovoort, enzovoort. Misschien trekt de toon van deze boekbespreking uw aandacht en wilt U het boek wel kopen. De inhoud is niet zo slecht. U krijgt een niet-conventioneel boek in uw bezit!

G. van Dijk

E. Giusti

Direct Methods in the Calculus of Variations

London : World Scientific Publishing, 2003

403 p., prijs \$ 58.-

ISBN 981-238-043-4

In many scientific disciplines (e.g., theoretical and mathematical physics) a problem is considered more or less solved, as soon as it has been formulated as a variational problem. All further elaboration thereby is reduced to mathematics. It is at this point where the present book starts.

The calculus of variations is concerned with the following problem. Given an open subset $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, the search is for a func-

tion $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ that minimizes an integral functional

$$F(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx.$$

Here, the function u has to satisfy suitable conditions. The book is restricted to the celebrated Dirichlet problem, where u takes prescribed values $U(x)$ at the boundary $\partial\Omega$:

$$u = U \text{ on } \partial\Omega.$$

In the case where F is of class C^1 , a standard infinitesimal argument leads from the functional to the well-known partial differential equations in u named after Euler (or Euler-Lagrange)

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i^\alpha}(x, u(x), Du(x)) \right) - \frac{\partial F}{\partial u^\alpha}(x, u(x), Du(x)) = 0,$$

for each $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Satisfying the Euler equations is necessary for u to be a minimum. In the case $n = 1$ these Euler equations become ODE's. A great number of examples exists, often dating from the beginning days of infinitesimal calculus, that are all linked to these ODE's. Many of these examples belong to the domain of classical mechanics. At the theoretical level, here is one of the links with the Hamiltonian formalism and symplectic geometry.

The present book entirely focuses on the case $n \geq 2$, which means that the Euler equations form a system of PDE's. In the footsteps of Riemann, now a more direct approach is taken, where the integral functional is minimized among all u satisfying the boundary condition $u = U$ on $\partial\Omega$. In the case where the functional is the so-called Dirichlet integral $\int_{\Omega} |Du|^2 dx$, the Euler equation is the Laplace equation and the functions u have to be harmonic, taking the prescribed values at the boundary $\partial\Omega$. In this spirit Riemann introduced the Dirichlet principle, which essentially consists of considering $F : V \rightarrow \mathbf{R}$, where V is the manifold of all functions u satisfying $u = U$ on $\partial\Omega$. More precisely, these so-called direct methods consist of proving the existence of a minimum (or maximum) of the functional F and more generally of discovering their properties, without recourse to the Euler equations.

Applying suitable generalizations of the Weierstrass theorem, the existence of minima (and maxima) roughly is based on compactness properties of V as well as on (semi-) continuity and convexity properties of F . One of the main problems is to define suitable function spaces (e.g., Sobolev spaces) with an appropriate topology. Once the (e.g., weak) existence of a minimum has been established, its regularity properties become important, such as (Lipschitz or Hölder) continuity of the solution and possibly its derivatives. Many results also have been proven for special cases, e.g., where the functional only depends on the gradient, i.e., where

$$F(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(Du(x)) dx.$$

An example of this is the area functional

$$F(u, \Omega) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx.$$

This is a rich and active area of research with classical roots, to which many mathematicians have contributed, including Hilbert, Lebesgue, Tonelli, De Giorgi, Nash and Moser, just to mention a few of them. The author gives a systematic account of this theory.

The treatment is self-sufficient except for some knowledge of the Lebesgue integral, the first properties of L^p -spaces and elementary functional analysis. The book is partially based on course notes, but also on research by the author and his collaborators, resulting in a unified treatment of the regularity of the minima of functionals and of the solutions to systems of elliptic PDE's.

The book is written in a clear expository style. The introductory chapter gives a good setting of the problem area. Also the separate chapters have a clear introduction and are, moreover, concluded by a section *Notes and Comments* in which links with the literature are discussed. In this way the reader also gets an impression of the historical development of this domain of research. One comment is that the book greatly lacks examples, particularly in the direction of its many applications. In fact, it has been written in the typical, somewhat inwardly looking, style that has been characteristic for mathematics textbooks over many decades. This being said, the addition of a good number of exercises may render (parts of) it suitable for excellent courses at the master and PhD level. Recommended!

H.W. Broer



M.O. Deville, P.F. Fischer, E.H. Mund
High-Order Methods for Incompressible Fluid Flow

Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, No. 9
Cambridge: Cambridge University Press, 2002
499 p., prijs £65,-
ISBN 0-521-45309-7

Het boek begint met een korte afleiding van de meest belangrijke behoudswetten in de stromingsleer. Verder wordt de eindige-elementenmethode ingevoerd, waarbij de methoden van Ritz en Galerkin duidelijk aan de orde komen. De auteurs gaan in op de wiskundige principes van deze eindige-elementenmethoden, inclusief een onderbouwing met behulp van wiskundige concepten en stellingen. Voor het bewijs van deze stellingen verwijzen zij naar de literatuur. Er worden specifieke voorbeelden uit de numerieke stromingsleer uiteengezet. Verder worden spectrale elementen ingevoerd en wordt hun invloed op de bandbreedte van de stijfheidsmatrix eenvoudig beschreven. Ook beschrijft het boek kort enige basisprincipes van klassieke iteratieve methoden voor het oplossen van lineaire stelsels. Deze beschrijving is duidelijk maar onvolledig. In de laatste hoofdstukken volgt een behandeling van domein decompositie, multigrid en parallel rekenen. Tenslotte gaan enkele appendices in op wiskundige begrippen uit de functionaalanalyse en approximatietheorie.

De behandeling van de verschillende eindige-elementenmethoden en hun principes is duidelijk. Ook de verzameling van onderwerpen binnen de eindige-elementenstructuur is breed en actueel. Ter motivatie van de principes worden belangrijke wiskundige stellingen gebruikt, waarbij ook de gevolgen van de stellingen zijn weergegeven. Om de tekst leesbaar te houden, ontbreken hier terecht de bewijzen van dergelijke stellingen. Voor de bewijzen wordt verwezen naar de relevante boeken. Dit brengt echter met zich mee dat de informatie in de eerste appendix over begrippen in de functionaalanalyse voor de rest van het boek niet relevant is. Helaas komen alternatieve methoden als de eindige

differentie en eindige volume methode niet aan de orde, hoewel deze (met name de laatste) veel gebruikt wordt binnen de numerieke stromingsleer. Verder is de beschrijving van domein decompositie, multigrid en parallel rekenen erg beknopt.

Als studieboek zal het boek voor masterstudenten en promovendi geschikt kunnen zijn voor bestudering van eindige-elementenmethoden. Voor een eerste kennismaking met deze methoden is het niveau waarschijnlijk te hoog, hierdoor is het boek waarschijnlijk te specialistisch voor masterstudenten. Voor onderzoekers en docenten die met eindige elementen te maken hebben, is het boek zeer geschikt als naslagwerk... een aanrader! Voor multigrid, iteratieve methoden voor lineaire stelsels, domein decompositie en parallel rekenen zou het gebruik van een ander boek meer geschikt zijn. De titel zou eigenlijk ook het woord eindige elementen dienen te bevatten, om de inhoud beter te weer spiegelen.

F.J. Vermolen

S. Dominich

Mathematical Foundations of Information Retrieval

Mathematical Modelling: Theory and Applications, 12

Dordrecht : Kluwer Academic, 2001,

284 p., prijs €112,30

ISBN 0-7923-6861-4

Information retrieval (IR) onderzoek richt zich op de wijze waarop men relevante informatie van niet-relevante informatie kan onderscheiden. De informatie waar we het dan over hebben, is ongestructureerd; dat wil zeggen dat het geen vooraf gedefinieerde verzameling van feiten is. In een informatica-omgeving richt het information retrieval onderzoek zich op het ontwikkelen en bouwen van een IR-systeem. De basisonderzoeksvraag luidt zodoende: op welke automatische wijze kan men relevante informatie van niet-relevante informatie onderscheiden. IR-systemen kennen altijd twee hoofdactiviteiten: het indexeren van de informatiebehoefte van de gebruiker en de bronnen (de documenten) én het vergelijken van de indexen. De vergelijking vindt plaats op basis van een bepaalde definitie van wat 'relevantie' zou moeten zijn. Deze definitie wordt het onderliggend *information retrieval model* genoemd. Relevantie is in de werkelijkheid vaak een abstract begrip. Dit komt omdat de informatiebehoefte een persoonlijke behoefte is. Een gedachte, een kennishiaat. Het information retrieval probleem werd al eerder gekarakteriseerd met de zinsnede: "I don't know what I'm looking for, but I'll know when I find it".

De uitdagende vraag bij information retrieval is steeds: hoe bouw ik een beter IR-systeem? Voor het verbeteren van systemen dienen we te beschikken over een heldere definitie van relevantie. De theorievorming rondom information retrieval is reeds jarenlang een onderwerp van onderzoek en discussie. Zo stelt IR-onderzoeker Blair: "Information retrieval researchers are like automotive engineers who are trying to improve the design of automobiles without being able to measure horsepower or fuel efficiency." Information retrieval onderzoek wordt gekenmerkt door een grote toepassingsgerichtheid, wat leidt tot een grote voorkeur voor de pragmatische, experimentele onderzoeksaanpak. In *Mathematical Foundations of Information Retrieval* tracht Sándor Dominich op theoretische wijze IR te bestuderen. Deze aanpak is lovenswaardig, wiskunde wordt regelmatig gebruikt in IR, veelal

als fundament voor een IR-model. Echter, wiskunde wordt zelden gebruikt in de vorm van een metatheorie voor het bestuderen van IR. Op wiskundige wijze tracht Dominich alle facetten van verschillende IR-modellen te beschrijven. Hij gebruikt hiervoor wiskundige notaties en concepten, onder andere uit de vectortheorie en verzamelingentheorie. Het boek ademt een over-exposure van kennis uit. Dominich heeft 161 pagina's nodig om alle benodigde achtergrondinformatie te geven. Na een introductie van IR die qua presentatie enigszins gedateerd overkomt, wordt een overzicht van wiskundige theorieën gepresenteerd, variërend van verzamelingentheorie, vectortheorie, grafentheorie tot en met neurale netwerken. Daarna komen alle bekende IR-modellen aan bod. In Hoofdstuk 4 (startend op pagina 161!) start hij met zijn modelleerwerk. Met een zeer complexe combinatie van verzamelingen, formules en toegepaste theorieën poneert Dominich een generiek IR-formalisme. Met behulp van deze theorie tracht Dominich enkele bekende concepten zoals de waarden recall en precision en relevance feedback te bestuderen. Echt veel nieuwe conclusies of resultaten levert het formaliseren niet op. Het is wederom een aanpak waarop de waarschuwing van Keith van Rijsbergen en Mounia Lalmas, twee bekende theoretici uit het IR-vakgebied, van toepassing is: "If you can't say it in words, then you had better not whistle it in mathematics either". Dit boek is dan ook voor wiskundigen niet aan te raden, zij krijgen te veel basiskennis gepresenteerd en het modelleerwerk ziet er voor een leek imposant uit, maar zal weinig wiskundeharten sneller laten kloppen. Mocht een wiskundige geïnteresseerd zijn in het vakgebied van IR dan zijn voor een introductie van populaire IR-modellen talrijke betere boeken verkrijgbaar. Voor het andere beoogde publiek: de IR-specialist met weinig kennis van de wiskunde, is het gehanteerde formalisme veel te complex. Zij zullen zeer waarschijnlijk na het lezen van dit boek niet de vele mogelijkheden van wiskunde voor metatheoretische doeleinden voor IR op de juiste waarde kunnen inschatten.

T. Huibers

N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, A. Pinkus (eds.)
Multivariate Approximation and Applications

Cambridge: Cambridge University Press 2001

286 p., prijs £55,-

ISBN 0-521-80023-4

This book is an advanced introduction to multivariate approximation and related topics. It consists of nine chapters written by leading experts surveying many new ideas and techniques and their applications. Each chapter is of a tutorial nature, containing an extensive list of references to recent literature. The book is primarily of interest to researchers in approximation theory and its applications in signal processing, computer vision and computer graphics. It reviews the approximation-theoretic foundations of multiresolution techniques, wavelets and splines. Some background in approximation theory is helpful, and for some chapters even indispensable.

The first five chapters are of a rather theoretical nature, treating multivariate approximation and interpolation by special classes of functions. In particular, radial basis functions (Chapters 1 and 2) and shift invariant function spaces (Chapters 4 and 5) are discussed rather extensively. The discussion of shift invariant function spaces is of particular interest for researchers in wavelets and

related multiresolution methods. Chapter 3 deals with the representation and analysis of scattered data on spheres, and is relevant for data processing in geophysics and meteorology.

The next two chapters deal with algorithmic aspects of wavelet approximation. Chapter 6 discusses theory and algorithms for spline wavelets on non-uniform partitions of a bounded interval, and focuses in particular on existence and uniqueness of bases and algorithms for decomposition and reconstruction. In Chapter 7 applications of non-linear wavelets to data compression, statistical estimation, and adaptive schemes of partial differential and integral equations are presented.

The last two chapters deal with applications. Chapter 8 discusses subdivision surfaces and multiresolution techniques in computer graphics. In particular, multiresolution editing is presented as a technique for interactive manipulation of complex surfaces of arbitrary topology. Furthermore, ideas based on subdivision are applied to generate a hierarchy of increasingly finer meshes representing such surfaces. Chapter 9 discusses applications to reverse engineering, aiming at the (re)construction of a smooth surface model from a finite point sample of the surface. Several reconstruction techniques are surveyed.

The book is intended to be an ideal introduction to multivariate approximation theory for researchers and graduate students. Although the book definitely gives a nice overview of some core topics, I doubt whether this ambition has been established completely. Furthermore, some knowledge of approximation techniques and the basic ideas of wavelet theory seems indispensable for a good understanding of the more theoretical chapters of the book. It is a little bit disappointing that the link between theory and applications in the first five chapters is not clarified at all. Yet I recommend the book as secondary reading to researchers in signal processing and related fields who want to get an impression of the theoretical underpinning of their field.

G. Vegter



P.M. Gadea, J. Muñoz Masqué
Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds
A Workbook for Students and Teachers

Kluwer Texts in the Mathematical Sciences

Dordrecht : Kluwer Ac. Publishers, 2001

478 p., prijs €174,-

ISBN 1-4020-0027-8

De titel 'Workbook' is voor dit boek goed gekozen. De auteurs stellen zich op het standpunt dat de grondslagen van de theorie van differentieerbare variëteiten voor een gemiddelde student snel erg abstract worden, en dat deze er baat bij heeft om zo veel mogelijk concrete gevallen door te werken.

De eerste helft van het boek bestaat dan ook uit zes hoofdstukken met merendeels expliciete problemen, gevolgd door hun oplossingen. De tweede helft wordt gevormd door een hoofdstuk met definities en stellingen die relevant zijn voor het eerste gedeelte, een overzicht van formules, en een handleiding van het programma *Superficies* (Spaans voor oppervlakken), dat op een CD-Rom bij het boek wordt geleverd.

De onderwerpen van de eerste zes hoofdstukken vormen met elkaar oefenstof voor een grondige introductie in de theorie van

differentieerbare variëteiten: de algemene definitie van variëteit en differentiaalstructuur, differentiaalvormen, de stelling van Frobenius over integreerbare distributies, de stellingen van Stokes en de Rham, Liegroepen, vezelbundels, connecties, karakteristieke klassen, Riemannse geometrie, Hodge-steroperator en harmonische vormen.

Voor wie voorbeelden en illustraties bij deze begrippen zoekt, kan dit boek een uitkomst zijn: de auteurs hebben veel moeite gedaan om berekenbare en toch niet-triviale voorbeelden te vinden. Behalve voor het hoofdstuk over Liegroepen en over vezelbundels is hun dat ook aardig gelukt.

Helaas hebben de auteurs van de ambitie afgezien van het boek een zelfstandig geheel te maken. Het is uitsluitend als hulpmiddel naast een cursus in bovenstaande onderwerpen bedoeld, wat zich ook weerspiegelt in de organisatie: de 'theoretische' hoofdstukken over definities, stellingen en formules zijn naar achteren verbannen, terwijl ze misschien een wel natuurlijkere plaats aan het begin van het desbetreffende hoofdstuk hadden kunnen hebben. Ook het feit dat alle opgaven direct gevolgd worden door hun oplossingen lijkt wat ongelukkig... de verleiding van studenten om 'even verder' te lezen is toch altijd groot. De typografie is tenslotte die van een standaard L^AT_EX-dictaat, dat vervolgens goed ingebonden is.

F. Wagener

In het boek van Kimmel en Axelrod worden vertakkingsmodellen in oplopende graad van ingewikkeldheid behandeld, steeds gemotiveerd door bepaalde biologische verschijnselen. Het boek bevat zeer veel voorbeelden van (naar mijn indruk) tamelijk realistische toepassingen, waarbij overigens veel biologisch 'jargon' wordt gebruikt. Gelukkig is er een heel nuttig hoofdstuk waar biologische achtergrond en terminologie worden uitgelegd. Een aardig voorbeeld van zo'n toepassing is in Hoofdstuk 6, waar gerekend wordt aan vertakkingsprocessen met meerdere types deeltjes. Het gaat hier om verschillende theorieën betreffende de manier waarop bepaalde cellen muteren. Ruwweg is de vraag of het mechanisme bestaat uit onomkeerbare '1-staps' mutaties, of uit '2-staps' mutaties waarbij de eerste stap omkeerbaar en de tweede onomkeerbaar is. Om dit te beantwoorden worden verschillende modellen doorgerekend en de bijbehorende 'voorspellingen' vergeleken met echte data.

Hoewel het boek (gedeeltelijk in een appendix) een inleiding in de kansrekening en in het bijzonder de kans theoretische vertakkingstheorie geeft, is het volgens mij (wat wiskundigen betreft) vooral aan te bevelen aan diegenen die al met vertakkingsprocessen bekend zijn (bijvoorbeeld via de eerder hierboven genoemde boeken) en nieuwsgierig zijn naar de manier waarop deze expliciet kunnen worden toegepast in de biologie.

J. van den Berg



M. Kimmel, D.E. Axelrod
Branching Processes in Biology
Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 19
 Berlijn : Springer Verlag, 2002
 230 p., prijs €69,50
 ISBN 0-387-95340-X

Vertakkingsprocessen vormen een klassiek onderdeel van de kansrekening. Ze kunnen worden gebruikt om bepaalde groeiverschijnselen te beschrijven. Een aangename eigenschap van deze modellen is dat er veel expliciet rekenwerk aan gedaan kan worden.

Het eenvoudigste geval is het Galton-Watsonproces. Daarbij starten we met één deeltje op tijdstip 0. De tijd wordt discreet verondersteld. Op tijdstip één verdwijnt het deeltje en wordt vervangen door een random aantal 'eerste-generatie deeltjes', volgens een bepaalde kansverdeling (de 'parameter' van het model). Op tijdstip 2 verdwijnt ook elk van deze deeltjes en wordt (onafhankelijk van de anderen) vervangen door een random aantal (met dezelfde verdeling als hierboven) tweede-generatie deeltjes, enzovoort. Voor de hand liggende vragen (die min of meer expliciet beantwoord kunnen worden) zijn: "Wat is de kans dat deze populatie nooit uitsterft, en wat is de verdeling van het aantal deeltjes op een bepaald tijdstip?"

Ingewikkelder modellen zijn die waarbij de tijd continu is, en waarbij we verschillende soorten deeltjes toestaan. Er zijn zeer veel artikelen en diverse voor een wiskundig publiek geschreven boeken verschenen, zoals de klassiekers *The theory of branching processes* (1963) van Harris, en *Branching Processes* (1972) van Athreya en Ney.

N.M.J. Woodhouse
Special Relativity
Springer Undergraduate Mathematics Series
 Berlijn : Springer Verlag, 2003
 192 p., prijs €35,-
 ISBN 1-85233-426-6

Speciale relativiteitstheorie behoort in een bachelorstudie wiskunde steeds vaker tot het programma, al dan niet als keuzevak. Dit boekje van N. Woodhouse, een ervaren mathematisch fysicus, is met name bedoeld voor wiskundestudenten die geen volledig natuurkunde programma volgen, maar die wel kennis willen maken met de speciale relativiteitstheorie.

De eerste drie hoofdstukken zijn dan ook gewijd aan de benodigde voorkennis: klassieke mechanica en elektromagnetisme. Daarna volgt in de Hoofdstukken 4 en 5 een introductie in de speciale relativiteitstheorie. De behandeling is vrij standaard en de Lorentz-transformatie wordt afgeleid met behulp van de Bondifactor. De nadruk ligt hier op de natuurkunde, geheel terecht zou ik zeggen. Maar ook jammer, omdat de wiskundige structuur naar mijn idee onvoldoende uit de verf komt. Dit onderwerp is uitermate geschikt om dwarsverbanden met lineaire algebra en groepentheorie te laten zien en om wiskundestudenten te motiveren voor de mathematische fysica.

In Hoofdstuk 8 volgt de relativistische behandeling van de elektrodynamica en het boek wordt besloten met een hoofdstuk over tensoren. Hier wordt een wiskundige behandeling van tensoren op de Minkowskiruimte gegeven, beknopt en helder.

Dit boek is in een aantrekkelijke stijl geschreven en als tekst bij een college lijkt het mij dan ook zeer bruikbaar. Bovendien zijn er bij elk hoofdstuk voldoende opgaven. Maar iets meer wiskunde zou de bruikbaarheid voor met name wiskundestudenten vergroten.

H.G.J. Pijls

Problemen

| Problem Section

The *Universitaire Wiskunde Competitie* (UWC) has changed back into a general Problem Section, open for everyone. In particular, the prizes are no longer restricted to students. For each problem the most elegant solution will be rewarded with a 20 Euro book token. The problems and results can also be found on the Problem Section website www.nieuwarchief.nl/ps.

Now and then there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro. To round off Session 2006/2 correctly, this issue includes the ladder.

Both proposed problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarchief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this session is March 1, 2007.

The prizes for the Problem Section are sponsored by *Optiver Derivatives Trading*.



Problem A (Folklore)

Seventeen students play in a tournament featuring three sports: badminton, squash, and tennis. Any two students play against each other in exactly one of the three sports. Show that there is a group of at least three students who compete amongst themselves in one and the same sport.

Problem B (Proposed by Arthur Engel)

The sequence $\{a_n\}_{n \geq 1}$ is defined by

$$a_1 = 1; a_2 = 12; a_3 = 20; a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Prove that $4a_n a_{n+1} + 1$ is a square for all $n \in \mathbf{N}$.

Problem C (Proposed by Michiel Vermeulen)

Let G be a finite group of order $p + 1$ with p a prime. Show that p divides the order of $\text{Aut}(G)$ if and only if p is a Mersenne prime, that is, of the form $2^n - 1$, and G is isomorphic to $(\mathbf{Z}/2)^n$.

Edition 2006/2

For Session 2006/2 We received submissions from Toon Brans, Ruud Jeurissen, Jaap Spies, and Peter Vandendriessche.

Problem 2006/2-A Prove or disprove the following:

In a 9×9 Sudoku-square one randomly places the numbers $1 \dots 8$. There is at least one field such that if any one of the numbers $1 \dots 9$ is placed there, the Sudoku-square can be filled in to a (not necessarily unique) complete solution.

Solution This problem was solved by Toon Brans, Ruud Jeurissen, and Peter Vandendriessche. Their solutions were comparable.

We disprove the statement as follows: If the numbers $1 \dots 8$ are placed on the main diagonal from the top left corner towards the bottom right, there is no field where a number between 1 and 8 can be placed without giving a contradiction. In the first row the 1 cannot be placed, in the second row no 2 is possible, $\dots$, in the eighth row no 8. This is the case for the columns as well. In the field in the lower right corner no 8 is possible.

Problem 2006/2-B Imagine a flea circus consisting of n boxes in a row, numbered $1, 2, \dots, n$. In each of the first m boxes there is one flea ($m \leq n$). Each flea can jump forward to boxes at a distance of at most $d = n - m$. For all fleas all $d+1$ jumps have the same probability.

The director of the circus has marked m boxes as special targets. On his sign all m fleas jump simultaneously (no collisions).

1. Calculate the probability that after the jump exactly m boxes are occupied.
2. Calculate the probability that all m marked boxes are occupied.

Solution No solutions were sent in. The solution below is based on that of the proposer Jaap Spies.

Part 1

The jumps of the fleas correspond to a bipartite graph G . The possible jumps of the fleas can be coded in a $(0,1)$ -matrix B of size m by n , with $b_{ij} = 1$ if and only if $i \leq j \leq i + d$. The total number of jumps with exactly m boxes occupied is the same as the number of injective maps $\pi : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ for which $b_{i\pi(i)} = 1$ for all i . This number equals $\text{per}(B)$, the permanent of B , see [1], p. 44. The probability that after the jump exactly m boxes are occupied is therefore $\text{per}(B)/(d+1)^m$.

Part 2

Let A be the set of marked boxes, then $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ is a subset of $\{1, 2, \dots, n\}$ with $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq n$ and $0 < m \leq n$. A successful jump of the fleas can be associated with a bijection $\pi : \{1, \dots, m\} \rightarrow A$ such that $i \leq \pi(i) \leq i + d$ for all i . The number of such successful jumps is equal to the permanent of the $(0,1)$ -matrix C , of size m by m , defined by $c_{ij} = 1$ if and only if $i \leq a_j \leq i + d$. The probability that after the jump the m marked boxes are occupied is $\text{per}(C)/(d+1)^m$.

References

- [1] Brualdi, H.J. Ryser, Combinatorial Matrix Theory, Cambridge University Press, 1991.
 [2] The Dancing School Problems: <http://www.jaapspies.nl/mathfiles/problems.html>

Problem 2006/2-C We are given two measurable spaces $(X, \mathcal{A})$ and $(Y, \mathcal{B})$ plus a sub- σ -algebra $\mathcal{C}$ of $\mathcal{A}$. We are also given a real-valued function f on $X \times Y$ that is measurable with respect to the σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (generated by the family $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$). Furthermore, each horizontal section f_y is measurable on X with respect to $\mathcal{C}$. Prove or disprove: f is measurable with respect to $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$.

Solution No solutions were sent in. The solution below is based on that of the proposer Klaas Pieter Hart.

Here is a counterexample. Let $X = Y = \omega_1$, the first uncountable ordinal. Let $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\omega_1)$, the power set. Let $\mathcal{C}$ be the σ -algebra that consists of the countable subsets of ω_1 and those with countable complements.

The set $L = \{(\alpha, \beta) : \alpha \leq \beta < \omega_1\}$ belongs to $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ but not to $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$. Its horizontal sections of L are countable — they are of the form $[0, \beta]$ — and therefore they belong to $\mathcal{C}$. This means that the characteristic function of L is a counterexample.

L belongs to $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

To show that L belongs to $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ we construct a sequence $\langle A_n \times B_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ of rectangles such that $L = \bigcap_{n \geq m} A_n \times B_n$. This is done quite indirectly.

By recursion we construct a sequence $\langle X_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ of infinite subsets of $\mathbb{N}$ with the following property: if $\beta < \alpha$ then $X_\alpha \setminus X_\beta$ is finite and $X_\beta \setminus X_\alpha$ is infinite — we abbreviate this as $X_\alpha \subset^* X_\beta$. For $\alpha < \omega_1$ we write $Y_\alpha = \mathbb{N} \setminus X_{\alpha+1}$ and we observe that the two sequences obtained in this way satisfy

$$\alpha \leq \beta \text{ if and only if } X_\alpha \cap Y_\beta \text{ is infinite.} \quad (*)$$

From the X_α and Y_α we define $A_n = \{\alpha : n \in X_\alpha\}$ and $B_n = \{\alpha : n \in Y_\alpha\}$. The

equivalence $(*)$ is translated in terms of the A_n and B_n reads

$$(\alpha, \beta) \in L \text{ if and only if } (\alpha, \beta) \in A_n \times B_n \text{ infinitely often.}$$

But this means $L = \bigcap_m \bigcup_{n \geq m} A_n \times B_n$, as promised.

It remains to construct the X_α . Start with $X_0 = \mathbf{N}$. At successor stages let $X_{\alpha+1}$ be the even numbered elements of X_α (in its monotone enumeration). If α is a limit ordinal enumerate $\{\beta : \beta < \alpha\}$ in a simple sequence $\{\beta_n : n \in \mathbf{N}\}$ and recursively let x_n be the minimum of $\bigcap_{i \leq n} X_{\beta_n} \setminus \{x_i : i < n\}$; then let $X_\alpha = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$.

L does not belong to $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$

Let $\mathcal{D}$ denote the family of those subsets Z of $\omega_1 \times \omega_1$ for which one can find an ordinal α and a subset A of ω_1 such that $Z \cap ([\alpha, \omega_1) \times \omega_1) = [\alpha, \omega_1) \times A$. We show that $\mathcal{D}$ is a σ -algebra that contains all rectangles $C \times B$ with $C \in \mathcal{C}$ and $B \in \mathcal{B}$; this implies $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$. Clearly L does not belong to $\mathcal{D}$ and hence not to $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$.

$\mathcal{D}$ is a σ -algebra Clearly $\omega_1 \times \omega_1$ belongs to $\mathcal{D}$.

If Z belongs to $\mathcal{D}$ then so does its complement Z^c : if $Z \cap ([\alpha, \omega_1) \times \omega_1) = [\alpha, \omega_1) \times A$ then $Z^c \cap ([\alpha, \omega_1) \times \omega_1) = [\alpha, \omega_1) \times A^c$.

Let $\langle Z_n \rangle_n$ be a sequence of elements of $\mathcal{D}$, with associated ordinals α_n and sets A_n . Let $\alpha = \sup_n \alpha_n$ and $A = \bigcup_n A_n$; then $\bigcup_n Z_n \cap ([\alpha, \omega_1) \times \omega_1) = [\alpha, \omega_1) \times A$, so $\bigcup_n Z_n$ belongs to $\mathcal{D}$.

Every rectangle $C \times B$, with $C \in \mathcal{C}$ and $B \in \mathcal{B}$, belongs to $\mathcal{D}$ If C is countable let α be such that $C \subseteq [0, \alpha)$ then $C \times B \cap ([\alpha, \omega_1) \times \omega_1) = [\alpha, \omega_1) \times \emptyset$.

If C is co-countable let α be such that $C^c \subseteq [0, \alpha)$ then $C \times B \cap ([\alpha, \omega_1) \times \omega_1) = [\alpha, \omega_1) \times B$.

Remarks

In fact one has $\mathcal{D} = \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$. To see this let $Z \in \mathcal{D}$, with associated ordinal α and set A . Now observe that Z is the union of $[\alpha, \omega_1) \times A$ and $\bigcup_{\beta < \alpha} \{\beta\} \times Z_\beta$, where Z_β denotes $\{\gamma : (\beta, \gamma) \in Z\}$. This expresses Z as a countable union of rectangles from $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$.

In Kunen's thesis [1] it is shown that, in fact, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is the whole power set of $\omega_1 \times \omega_1$; the proof that L belongs to the algebra is a simplification, for this special case, of Kunen's argument. The algebras $\mathcal{C}$ and $\mathcal{A}$ are quite far apart and rather extreme. I do not know what the answer is for more familiar σ -algebras. Specifically: can one prove that f is $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$ -measurable when both X and Y both are the real line, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ the σ -algebra of Lebesgue-measurable sets and $\mathcal{C}$ the σ -algebra of Borel sets?

Reference

[1] Kunen, Kenneth, *Inaccessibility properties of cardinals*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1968.

Results of Session 2006/2

Name	A	B	C	D	Total
1. Brans	8	0	0	0	24
1. Vandendriessche	8	0	0	0	24

Final Table after Session 2006/2

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

Name	Points
1. Arne Smeets	28
2. Annelies Horr�	21
3. Ferry Kwakkel	19