

Inhoud | Contents

- 154 Colofon
- 155 Redactioneel *Jaap Top*
- 156 Agenda
- 158 Nieuws

Samenleving | Society

- 162 De lemniscaatkraan *Gijs Nieuwenhuis*
- 186 De overval bij het Koninklijk Instituut voor de Marine *Gerard Alberts, Jaap Molenaar, Jaap Top*

Onderzoek | Research

- 167 Galois Theory and Arithmetic *Laurent Lafforgue, Mathieu Florence*
- 172 Halltripels en kindertekeningen *Hans Montanus*
- 177 Studiegroep wiskunde met de industrie *Bennie Mols*

Geschiedenis | History

- 179 De samenwerking tussen Korteweg en De Vries *Bastiaan Willink*

Onderwijs | Education

- 195 Reactiekinetiek herbekeken *Wolfgang Jacquet, Gert Sonck*
- 198 Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra *Paul Drijvers*

Boeken | Books

- 204 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 194 Hoeveel cacao zit er nog in de koetjesreep? *Ralph Hanzen*
- 219 Problemen

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (Jaap.Molenaar@wur.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@uva.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)
Yves van Gennip (y.v.gennip@tue.nl)

Bureau redactie

Annelies Hafkenscheid, Arno Kret, Wendy Ellens

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.) Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaai (UvA)

TEX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)

Uitgeverij Ten Brink

Postbus 41, 7940 AA Meppel

tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cwii.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50.

Members of SIAM, the *Société Math matique de France*, the *Gesellschaft f r Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105. Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink

Postbus 41, 7940 AA Meppel

tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Jan van Mill (VU, ondervoorzitter), Herman te Riele (CWI, secretaris), Fieke Dekkers (RIVM, penningmeester), Wieb Bosma (RUN), Klaas Pieter Hart (TUD), Vivi Rottschäfer (UL), Iris van Gulik - Gulikers (VdCSG)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
4	03-12-2006	
1	03-03-2007	06-11-2006
2	16-06-2007	05-02-2007
3	16-09-2007	05-05-2007

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Korteweg (afgebeeld op de kaft) en De Vries zijn in de naar hen genaamde vergelijking voor altijd verenigd. Hoe verhoudt hun onderzoek zich tot het werk van Joseph Boussinesq? Lees de vreemde geschiedenis op bladzijde 179.

Op de drempel

Als ik straks dit redactioneel afgerond heb, begint voor mij een aantal weken vakantie. Bovenstaande titel dringt zich dan ook gemakkelijk op.

Een van de laatste artikelen die ik voor de vakantie heb bekeken, heet 'Mathematics on the threshold', geschreven door André Heck en Leendert van Gastel en dit jaar gepubliceerd in het *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*. Het artikel is onderdeel van een behoorlijke stapel papieren die me was toegestuurd door een medewerker van het Groningse Instituut voor Didactiek en Onderwijsontwikkeling. Omdat ik beide auteurs ken en de rest van de stapel over een vergelijkbaar onderwerp handelt, maar dan door voor mij onbekende auteurs, kwam hun verhaal bovenop te liggen.

Ongeveer tegelijk met het toesturen van deze collectie analyses, want dat zijn het, van diverse instaptoetsen en precalculustests en diagnostische toetsen voor beginnende studenten wiskunde en natuurwetenschappen, hadden we thuis een verlossende avond. Op de drempel tussen basisschool en middelbaar onderwijs konden ouders en andere belangstellenden genieten van de musical die de vertrekkende groep 8-leerlingen ons voorschotelden. Het liep perfect! Wat was er gedrield: maandenlang waren lange stukken tekst uit het hoofd geleerd. Het vliegensvlug omkleden was voor de leerlingen met een dubbelrol tot een routine geworden, de mimiek en de articulatie waren bijna professioneel. De directe baten van al dit gedril en het uit het hoofd gestamp waren duidelijk: een uur lang plezier voor alle toehoorders, en een welverdiend applaus voor groep 8.

De reden dat mij zoveel didactisch materiaal werd toegestuurd, is dat ik straks aan de andere kant van de vakantie-drempel in het kader van de Groningse Brede Bachelor, de cursus *Calculus 1* aan de gezamenlijke wiskunde-, natuurkunde-, sterrenkunde- en scheikundestudenten mag geven. Aan het begin daarvan is extra ruimte voor het verkleinen van eventuele verschillen in achtergrond of voor het vergroten van wat wiskundige basisvaardigheden. Helaas is die ruimte vrij beperkt.

Deze ruimte was er voor de musicalartiesten echter wel. De musical duurde een uur en mijn zoontje zal er thuis zeker dertig uur aan gestampt hebben plus wat zanguren met hulp van de meegeleverde cd. Het aantal uren drillwerk en repeteren tijdens de lessen en zelfs tijdens een aantal avonden op school durf ik niet eens te schatten.

De baten van het jezelf grondig aanleren van een aantal wiskun-

dige basisvaardigheden overtreffen in hoge mate die van een schoolmusical. Toegegeven, als trotse vader van een hoofdrolspeler vlak ik ook de laatste niet uit. Natuurlijk bestaan die baten mede uit het vergroten van slaagkansen bij tentamens en uit het voorkomen van frustratie, maar belangrijker is om jezelf in staat te stellen al je aandacht te reserveren voor de diepere kanten van een probleem: de routinekanten gaan immers vanzelf. Daarnaast is er natuurlijk ook nog simpelweg plezier.

Bij de musical was dit ook goed te zien: doordat de teksten en de houding weinig aandacht meer vergden, kwam er ruimte voor improvisatie.

In het openbaar vervoer en in kantines vindt al maandenlang nog een grondige drill-oefening plaats: nog steeds is de sudoku een geweldig populaire puzzel. Ongetwijfeld zal dit bij liefhebbers tot een enorme vaardigheid op dit gebied hebben geleid. Als u denkt dat ik afkeurend kijk naar investeringen als het uit het hoofd leren van musicalteksten of het snel door elkaar gebruiken van basisstappen voor het oplossen van sudoku's, dan hebt u het mis. Op zijn minst leert de beoefenaar hier een vorm van discipline. Het moet toch wel saai zijn om na twintig pagina's musicaltekst, ook je deeltjes van bladzijde eenentwintig uit het hoofd te moeten leren. Persoonlijk had ik het na tien sudoku's (uit een vrijdag- of zaterdageditie van een dagblad dat in de loop van de week de moeilijkheidsgraad verhoogt) wel gezien. Velen blijken echter zoveel uithoudingsvermogen te bezitten dat ze aan de gang blijven.

Vanuit dit perspectief kijk ik vol verwachting naar de internetpagina's vol oefenmateriaal wiskundebasisvaardigheden van Rob Bosch en Jan van de Craats. Als we alleen maar de reeds aanwezige gedisciplineerdheid van velen kunnen aanroepen en hen aanzetten tot het aanscherpen van deze vaardigheden, dan wacht onze opleidingen een gouden toekomst. Bedenk, op onze basisschool was het musicalslagingspercentage honderd procent! Ik ga in september, aan de andere kant van de drempel, onze studenten zeker wijzen op hun mogelijkheden. 

Jaap Top
hoofredacteur

Instituut voor wiskunde en informatica, Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
top@math.rug.nl

Agenda

Upcoming Events

september 2006

18 – 20 september

□ Stochastic Complex Systems

Conferentie op het gebied van statistiek in bio-informatica, fylogenetica, milieustatistiek, beeldverwerking, 'spatial statistics' en 'Markov Chain Monte Carlo'

plaats University of Bath, Verenigd Koninkrijk

info www.bath.ac.uk

18 – 20 september

□ Sixth Annual Meeting of ENBIS

Congres dat statistici uit de praktijk met academische statistici en consultants samenbrengt

plaats Wrocław, Polen

info www.enbis.org

18 – 20 september

□ Parsim 06

Bijeenkomst over actuele trends in numerieke simulaties voor *parallel engineering environments*

plaats Bonn, Duitsland

info www.nwo.nl

18 – 27 september

□ Environmental Dispersion Processes

Workshop over de ontwikkeling en analyse van wiskundige modellen en simulaties van turbulent transport van gas, kleine deeltjes en warmte

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

22 september

□ Wiskundetoernooi voor scholieren

Het vijftiende Wiskundetoernooi voor scholieren, bestaande uit een individuele ronde en een teamwedstrijd. Deze laatste is dit jaar gericht op de cryptografie

plaats Radboud Universiteit, Nijmegen

info www.wetenschapsjournalisten.nl/vwn

25 – 29 september

□ EIDMA minicourse by prof. Cheryl Praeger

Minicursus van vijf dagen over permutatiegroepen in algebra en combinatoriek

plaats Vrije Universiteit Brussel, België

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses/mini-courses/praeger/praeger.html

25 – 29 september

□ Computer Science Logic 2006

Jaarlijkse conferentie van de *European Association for Computer Science Logic* (EACSL) voor zowel logici als informatici

plaats Szeged, Hongarije

info www.inf.u-szeged.hu/~cslo6/geninf.php

oktober 2006

2–6 oktober

□ Geometric and Multiscale Methods for Geophysical Fluid Dynamics

Workshop over modellering met geometrisch-analytische en geometrisch-numerieke methoden

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

11–13 oktober

□ 2006 Conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen

De eenendertigste conferentie. Thema's: modelreductie en hoge-orde discretisatie methoden

plaats Woudschoten

info www.cwi.nl/projects/wnw/conf2006

19 – 21 oktober

□ European Practice Based and Practitioner Research Conference on Learning and Instruction

Conferentie over kwaliteitsverbetering in lesgeven en leren: ontwikkeling e implementatie. Speciaal onderwerp: ICT

plaats University of Leuven, België

info <http://practitionerresearch2006.ac.cy>

november 2006

2 november

□ Elk kind kan rekenen!

Conferentie over het effectief omgaan met verschillen in het reken-wiskundeonderwijs bestemd voor onder andere leerkrachten basisonderwijs

plaats CPS, Amersfoort

info www.cps.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

2 – 4 november

❑ **Pioneering Software in the 1960s**

Conferentie over de ontwikkeling van software in de jaren zestig van de vorige eeuw

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events

3 – 5 november

❑ **17e Novembertagung on the history and philosophy of mathematics**

Jaarlijkse bijeenkomst van jonge onderzoekers op het gebied van de geschiedenis en filosofie van de wiskunde

plaats University of Edinburgh, Schotland

info www.17th-novembertagung.net

3 – 5 november

❑ **Second Mental Calculation World Cup**

Wereldkampioenschappen hoofdrekenen

plaats Giessen, Duitsland

info www.recordholders.org/en/events/worldcup

4 november

❑ **NvVW Jaarvergadering/Studiedag 2006**

Jaarvergadering en tevens studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, met themagedeelte: *Doorlopende leerlijnen of breukvlakken?*

plaats Nieuwegein

info www.nvvw.nl

13 – 15 november

❑ **Stochastics Meeting Lunteren**

Bijeenkomst voor statistici en stochastici

plaats Lunteren

info www.cwi.nl

17 november

❑ **Afscheidssymposium Piet Hemker**

Afscheid bij het CWI van numericus en UvA-hoogleraar Piet Hemker

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events

17 november

❑ **Slotsymposium Mathematische Fysica**

Eindsymposium ter afsluiting van het FOM/GBE programma *Mathematische Fysica*. Hoofdspreker: Michael Atiyah

info www.nwo.nl

24 november

❑ **Voorronde Wiskunde A-lympiade**

Wiskundewedstrijd voor middelbare scholieren in Nederland, Duitsland, Denemarken, op de Nederlandse Antillen en Aruba met wiskunde A in hun profiel of pakket

plaats Middelbare scholen

info www.fi.uu.nl/Alympiade

24 november

❑ **Voorronde Wiskunde B-dag**

Wiskundewedstrijd voor leerlingen in 5 havo en 5/6 vwo met wiskunde B in het profiel of pakket

plaats Middelbare scholen

info www.fi.uu.nl/wisbdag

29 november

❑ **Wiskunde in een Elektronische Leeromgeving**

Cursus voor wiskundeleraars over wat een elektronische leeromgeving kan betekenen voor het eigen wiskundeonderwijs

plaats APS, Utrecht

info www.fi.uu.nl

december 2006

12 december

❑ **Reünie van het Centrum voor Wiskunde en Informatica**

Reünie naar aanleiding van het zestigjarig bestaan van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (voorheen Mathematisch Centrum)

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events/2006/reunie

januari–april 2007

6 januari 2007

❑ **Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap 2007**

Het thema is Wiskunde in Natuur, Leven en Technologie

info www.wiskgenoot.nl

17 – 19 januari 2007

❑ **25e Panama Conferentie**

Conferentie over reken- en wiskundeonderwijs

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/panama/conferentie

29 januari – 2 februari 2007

❑ **Studiegroep Wiskunde met Industrie**

Wiskundigen werken een week lang aan problemen aangedragen door bedrijven

plaats Universiteit Utrecht

info www.math.uu.nl/swi2007

2 – 3 februari 2007

❑ **Nationale Wiskunde Dagen**

Tweedaagse conferentie voor wiskundeleraars over uiteenlopende wiskundige onderwerpen

plaats Leeuwenhorst Congrescentrum, Noordwijkerhout

info www.fi.uu.nl/nwd

21 – 24 februari 2007

❑ **TCC 2007**

Theory of Cryptography Conference over de paradigma's, aanpakken en technieken die gebruikt worden om cryptografische problemen te definiëren en op te lossen

plaats Trippenhuis, Amsterdam

info www.cwi.nl/projects/crypto/tcco7

19 – 23 maart 2007

❑ **Two-dimensional Turbulence**

Workshop over turbulentie in twee dimensies gericht op het samenbrengen van wetenschappers uit verschillende disciplines

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

12 – 13 april 2007

❑ **43ste Nederlands Mathematisch Congres**

De Universiteit Leiden en de Technische Universiteit Delft organiseren gezamenlijk het Nederlands Mathematisch Congres 2007

plaats Gorlaeuscomplex, Leiden

info www.wiskgenoot.nl

18 april 2007

❑ **De Grote Rekendag**

Dag waarop basisschoolleerlingen op een andere manier dan gewoonlijk de wiskunde ontdekken

plaats Scholen in Nederland en België

info www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijgaande activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

Moerdijk Akademielid

Ieke Moerdijk, hoogleraar topologie aan de *Universiteit Utrecht*, is door de *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen* (KNAW) benoemd als nieuw lid van de afdeling Natuurkunde, sectie Wiskunde.

Na studies wiskunde, filosofie en algemene taalwetenschap aan de *Universiteit van Amsterdam*, promoveerde hij aan dezelfde universiteit in 1985 cum laude in de wiskunde. Via Chicago en Cambridge kwam hij uiteindelijk in Utrecht terecht, waar hij sinds 1996 hoogleraar is.

De benoeming vindt plaats op grond van wetenschappelijke prestaties, waar ook zeker Moerdijks (co-)auteurschap van de boeken *Sheaves in Geometry and Logic*, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, *Algebraic Set Theory* en *Classifying Spaces and Classifying Topoi* toegerekend zal worden.

Zijn huidige onderzoek beslaat gebieden als de topologische algebra, differentiaalalgebra en de toepassingen van topologische structuren in wiskundige logica. Bron: www.science.uu.nl/betanieuws/2006.08



foto: Jürgen Koslowski

Ieke Moerdijk in gesprek met Max Kelly en zijn vrouw op Isle of Thorns (1992)

Succesformule

Ook met vier vingers per hand is wiskunde niet weg te slaan uit het dagelijks leven, zo bewijst 's werelds beroemdste gele familie keer op keer. Geanimeerde comedy *The Simpsons* heeft wiskundige grappen nooit geschuwd en ook in de afsluitende aflevering van het meest recente seizoen konden de verwijzingen naar wiskunde niet ontbreken. Een baseballspeler wordt de vraag voorgelegd wat het bezoekersaantal bij de zojuist gespeelde wedstrijd is: 8191, 8128 of 8208. Drie ogenschijnlijk willekeurig uitgekozen getallen, al zal een getaltheoreticus hier een *Mersenne priemgetal* ($8191 = 2^{13} - 1$), het vierde *perfecte getal* ($8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$, de som van zijn positive delers) en een narcistisch getal ($8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$, de som van de cijfers waaruit het getal bestaat tot de macht het aantal cijfers) in herkennen.

Het is niet toevallig dat *The Simpsons* vol zit met wiskundige humor. Het schrijversteam kan vele afgestudeerde en gepromoveerde wiskundigen en wetenschappers tot zijn leden rekenen. Een lijst met alle wiskundige verwijzingen in alle afleveringen is te vinden op simpsonsmath.com (www.mathsci.appstate.edu/~sjg/simpsonsmath), een website opgezet door de wiskundigen Sarah J. Greenwald van *Appalachian State University* en Andrew Nestler van *Santa Monica College* die de show ook gebruiken in lezingen over wiskunde voor een breed publiek. Bron: www.sciencenews.org/articles/20060610/bob8.asp

VVS-OR Scriptieprijs naar wiskundige

De Vereniging voor Statistiek en Operationele Research (VVS-OR) heeft haar jaarlijkse Scriptieprijs dit keer toegekend aan wiskundige Maaïke Verloop. Haar afstudeerverslag *Efficient flow scheduling in resource-sharing networks* was niet alleen goed genoeg om Verloop in augustus 2005 cum laude af te laten studeren, maar het resultaat van haar onderzoek, dat ze uitvoerde onder begeleiding van Erik Balder van de Universiteit Utrecht en Sem Borst van het Centrum voor Wiskunde en Informatica, bleek ook nog eens opgewassen tegen andere scripties uit vakgebieden zo gevarieerd als econometrie, sociale wetenschappen, technologie management, economie en wiskunde in de strijd om de VVS-OR Scriptieprijs.

De jaarlijkse VVS Scriptie Prijs is in 1988 ingesteld om bij studenten de belangstelling te bevorderen voor onderzoek naar praktisch relevante methoden uit de statistiek en operationele research. De prijs omvat naast de eer een bedrag van vijfhonderd euro.

Bron: www.vvs-or.nl/vvsprijs/ en www.science.uu.nl/betanieuws/



Foto: Alex Koning

Maaïke Verloop tijdens de uitreiking van de Scriptieprijs

Koning Voetbal

Inmiddels ligt het wereldkampioenschap voetbal alweer een tijdje achter ons: ook deze keer had de bal weer vele mensen in zijn greep, en ook statistici ontsnapten niet aan de lokroep van het spel.

Zo voerde econometrist en sporteconoom Ruud Koning van de Rijks-universiteit Groningen gedurende het toernooi een lopende statistische analyse uit van de kanshebbers op de wereldtitel. Zich basierend op resultaten uit het nabije verleden, analyseerde Koning voorafgaand aan het toernooi dat uiteindelijk verliezend finalist Frankrijk de meeste kans had om de titel te winnen, namelijk 14,7%, op de voet gevolgd door Spanje en Brazilië. Uiteindelijk wonnaar Italië werd slechts 4,1% kans op de titel toegedicht en moest daarmee zeven landen boven zich dulden. Tijdens het begin van het toernooi paste Koning zijn

voorspellingen enkele malen aan, door de nieuwe uitslagen mee te nemen in zijn model, maar hoger dan 5,3% kwam Italië niet.

Ruud Koning heeft een dergelijke analyse voor het eerst uitgevoerd tijdens het WK van 1994. Toen werd Brazilië correct als winnaar voorspeld. Tijdens het EK 1996 was het model aanzienlijk minder succesvol, maar in 1998 en 2000 waren de resultaten opnieuw in redelijke overeenstemming met het uiteindelijke resultaat, met Frankrijk als correct voorspelde winnaar.

Bron: www.kennislink.nl en www.rhkonig.com

Peter D. Lax wint SIAM-prijs

De Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) heeft dit jaar de Prize for Distinguished Service to the Profession uitgereikt aan Peter D. Lax. Dit gebeurde tijdens de jaarlijkse bijeenkomst van SIAM, die dit jaar van 10 tot en met 14 juli in Boston gehouden werd. Deze prijs wordt ieder jaar uitgereikt aan een wiskundige die op Amerikaans nationaal niveau veel heeft bijgedragen aan de toegepaste wiskunde, een beschrijving die op Lax zeker van toepassing is.

Lax als grondlegger van de moderne theorie van lineaire en niet-lineaire hyperbolische differentiaalvergelijkingen, was bijna heel zijn academische leven verbonden aan New York University. Hij heeft verder niet alleen belangrijke bijdragen aan de numerieke wiskunde geleverd, maar heeft als bestuurder ook een belangrijke rol gespeeld in de Verenigde Staten bij verscheidene nationale wiskundige instellingen. Vorig jaar won Lax ook al de Abel-prijs.

Bron: www.siam.org/about/news-siam.php?id=972

Koekjes, kristallen en speltheorie

Fysicus Adam S. Landsberg van Claremont McKenna, Scripps Pitzer Colleges in Claremont, Californië en informaticus Eric J. Friedman van Cornell University hebben tijdens hun onderzoek verbanden aan de dag gelegd tussen het spelletje Chomp en de groei van kristallen.

De regels van Chomp zijn zeer eenvoudig. Het spel wordt gespeeld door twee spelers op een speelveld bestaande uit een rechthoek van m bij n koekjes (of een andere favoriet voorwerp). De eerste speler kiest een koekje uit en verwijdert het samen met alle koekjes die er boven of rechts van liggen. Dan is de andere speler aan de beurt om koekjes te verwijderen. De speler die gedwongen wordt het koekje in de linkerbenedenhoek te nemen, heeft verloren.

Chomp is bedacht begin jaren zeventig door wiskundige en econoom David Gale van de University of California in Berkeley en kreeg zijn naam van wiskundecolumnist Martin Gardner. Achteraf bleek dat het spel een speciaal geval is van een getallenspel, bedacht door de Amsterdamse wiskundige Frederik Schuh die werkzaam was aan de Technische Hoogeschool Delft (tegenwoordig de Technische Universiteit Delft). In Schuhs spel wordt een groot getal gekozen en hiervan worden alle delers opgeschreven, met uitzondering van 1. De spelers strepen om beurten een deler en alle delers van dat getal weg. De speler die gedwongen wordt om het begingetal zelf te kiezen, verliest.

Het is niet moeilijk om te bewijzen dat de eerste speler in Chomp altijd kan winnen, tenzij $m = n = 1$. Stel namelijk dat dit niet zo is en de tweede speler voor elke mogelijke eerste beurt van speler 1, een reactie klaar heeft die speler 2 het spel laat winnen. Stel dan dat speler 1 in de eerste beurt het koekje rechtsboven wegneemt en speler twee voert vervolgens de zet uit die hem laat winnen. De toestand van het speelveld op dit punt had echter ook bereikt kunnen worden door speler 1 in zijn eerste zet en dus had hij kunnen winnen.

Voor simpele gevallen als een vierkant, of een rechthoek waarbij $m = 2$ of $n = 2$ kan zelfs expliciet de winnende strategie aangegeven worden (een puzzeltje voor de lezer), maar in het algemeen is het vinden van een winnende eerste zet een complex en wiskundig interessant vraagstuk.

In hun onderzoek richtten Landsberg en Friedman zich op rechthoeken met drie rijen, wat het mogelijk maakt elke configuratie van het speelveld aan te geven met drie coördinaten, namelijk het aantal koekjes in de eerste (x), tweede (y) en derde (z) rij. Door voor vaste waarden voor x een y - z -plot te maken van de mogelijk winnende posities, wisten de onderzoekers onderliggende geometrische patronen te ontdekken, die veel weg hebben van kristalgroei. Hierdoor werd het spel plotseling toegankelijk voor gebruik van de uit de natuurkunde bekende renormalisatietechniek.

Friedman en Landsberg wisten op deze manier aan te tonen dat alle 3 bij n rechthoeken een unieke winnende zet hebben. Verder geven ze een probabilistische aanpak om te bepalen in welk gebied in het speelveld deze winnende zet waarschijnlijk te vinden is. De Leidse wetenschappers hopen hun methode in de toekomst te kunnen toepassen op andere problemen uit de informatica en economie.

Bron: www.sciencenews.org/articles/20060722/bob10.asp

Goede Nederlandse prestatie bij IMC

Deze zomer heeft in Oekraïne de 13e *International Mathematics Competition for University Students* plaatsgevonden. Voor deze jaarlijkse wedstrijd komen studenten uit de hele wereld — dit jaar waren dat er 241 van 75 verschillende universiteiten — samen om individueel in totaal twaalf opgaven te maken.

De IMC wordt al jaren georganiseerd door John Jayne van University College London, maar vindt meestal plaats in Oost-Europa, waar een veel grotere traditie van wiskundewedstrijden is dan in West-Europa. De meeste deelnemers komen uit Oost-Europa, maar er zijn ook teams aanwezig uit landen als Iran, Indonesië, Brazilië en dit jaar ook Nederland.

Nederland deed dit jaar voor de eerste keer mee aan de IMC. Dit was een initiatief van Fokko van de Bult, die bovendien een wekelijkse trainingsbijeenkomst heeft georganiseerd aan de Universiteit van Amsterdam, om de Nederlandse deelnemers voor te bereiden op de wedstrijd. Een dergelijke training is vrij zeldzaam bij de deelnemers aan de IMC.

Een bijeenkomst duurde vaak twee tot drie uur en bestond grotendeels uit het bestuderen en oplossen van opgaven die tijdens de IMC's van de voorgaande jaren en tijdens vergelijkbare wedstrijden waren gevraagd. Na afloop werd er vaak gezamenlijk gegeten door onze trainingsgroep. De groep bestond uit tien wiskundestudenten uit Amsterdam, Utrecht en Leiden uit het eerste tot en met het derde studiejaar, waarvan er velen al ervaring hadden met de *Internationale Wiskunde Olympiade* voor scholieren (IMS).

De acht leden van de Nederlandse afvaardiging vertrokken op de ochtend van de twintigste juli naar Odessa, een kuststad in Oekraïne. Daar werden we ontvangen door de organisatoren van de IMC en naar onze verblijfplaats gebracht, een zomerkamp uit het communistische tijdperk, direct aan de Zwarte Zee. Op dit terrein met omliggend park hebben we gegeten, geslapen en ook de toets zelf gemaakt.

De toets vond plaats direct aan het begin van de zesdaagse IMC. Op twee dagen moet je een toets van zes opgaven maken. De opgaven zijn oplopend in moeilijkheidsgraad. De nadruk ligt op analyse, maar dit jaar kwamen ook onderwerpen als combinatoriek, diophantische

vergelijkingen en ongelijkheden aan de orde.

Toen we de toets eenmaal gemaakt hadden, was er tijd voor een excursie naar het centrum van Odessa, een stad die ondanks haar jonge leeftijd toch veel geschiedenis kent. Ook werd er een bijzonder concert bezocht en werden veel contacten gelegd met buitenlandse studenten.

Dit jaar heeft ongeveer tweederde van de deelnemers met de hoogste scores een prijs gekregen, waarbij onderscheid is gemaakt tussen eerste, tweede en derde prijzen, die elk ongeveer even vaak zijn uitgekeerd. Verder kreeg iedereen die geen prijs heeft gewonnen, maar wel totaal tenminste twee opgaven heeft opgelost een eervolle vermelding.

De Nederlanders scoorden allemaal rond de grens voor de derde prijs zodat er vijf derde prijzen en twee eervolle vermeldingen mee naar huis werden gebracht: een resultaat waar we heel tevreden mee zijn.

Sander Kupers en Johannes Steenstra



De Nederlandse en Belgische deelnemers en de Nederlandse teamleider, van links naar rechts: Esther Bod (Utrecht), Peter Vandendriessche (Gent), Thomas Decru (Gent), Sjoerd Boersma (Utrecht), Fokko van de Bult (Amsterdam, teamleider), Sander Kupers (Utrecht), Johannes Steenstra (Utrecht), Arno Kret (Leiden), Iris Smit (Amsterdam) en Victor Pessers (Amsterdam)

Groep van orde 4 wint LIMO

Op vrijdag 2 juni 2006 vond de tweede *Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade* (LIMO) plaats. Vorig jaar won het Nijmeegse team 'Squeak!' de eerste editie. Dit jaar mocht de Nijmeegse wiskundestudievereniging *Desda* dan ook de organisatie verzorgen.

Vanaf tien uur arriveerden studenten vanuit het hele land in Nijmegen. In totaal deden er zeventien teams van zeven verschillende universiteiten mee. Een mooi aantal wat aangeeft dat studenten graag de wiskundige strijd met elkaar aangaan!

's Ochtends konden de studenten het eerst op een luchtige manier tegen elkaar opnemen in een quiz gebaseerd op *Eén tegen 100*. Wiskundige en niet-wiskundige vragen wisselden elkaar af, waarbij er steeds meer teams afvielen. 'De unitaire units' uit Nijmegen en 'PFFF' uit Groningen hielden het het langst vol. De slotvraag moest de beslissing brengen: hoeveel Google-hits kreeg je op donderdag 1 juni om 11:58 u bij het zoeken op 'wiskunde'? Beide teams zaten er ver naast. Met 800.000 kwam 'PFFF' het dichtst in de buurt van het goed antwoord (5.120.000) en zij konden de taart met LIMO-logo in ontvangst nemen.

Na de lunch was het tijd voor het serieuze werk. De teams kregen elk een eigen kamertje waar ze zich konden wagen aan de tien inspirerende opgaven bedacht door hoogleraren van verschillende universiteiten en uit verscheidene wiskundige vakgebieden. Er werd diep nagedacht, druk overlegd en hard gewerkt om zo veel mogelijk opgaven op te lossen. Om half vijf waren velen nog druk bezig, maar toch moest alles ingeleverd worden. Het was tijd voor de borrel. Hier werd druk nagepraat over de opgaven en gespeculeerd over de mogelijke winnaar.

Ondertussen keek elke hoogleraar de door hemzelf opgestelde opgave na. Ruim een uur later was de uitslag bekend. Op de derde plaats eindigde 'NSA' uit Amsterdam. Utrecht legde dit jaar beslag op de eerste én de tweede plaats, respectievelijk door de teams 'Groep van orde 4' en 'Taart'.

De dag eindigde met een smaakvol diner. Daarna keerde iedereen weer huiswaarts, terugkijkend op een geslaagde dag vol competitie en vooral gezelligheid.

Bron: Dion Coumans

Perelman weigert Fieldsmedaille

De geniale wiskundige Grisha Perelman is niet op komen dagen bij de uitreiking van de Fieldsmedailles, de belangrijkste prijzen voor wiskundig onderzoek.

De winnaars van de Fieldsmedailles, het equivalent van de Nobel-prijs voor wiskundig onderzoek, zijn vanmiddag bekend gemaakt op het Internationale Wiskundecongres in Madrid. Drie van de vier laureaten waren aanwezig om hun medaille in ontvangst te nemen. Grote afwezige was, niet geheel onverwacht, de Russische wiskundige Grisha Perelman.

Perelman leverde drie jaar geleden het bewijs voor het honderd jaar oude vermoeden van Poincaré, om daarna van de aardbodem te verdwijnen. "Tot mijn spijt heeft Perelman voor de eer bedankt", zei de voorzitter van de Internationale Wiskundige Unie, John Ball. Een nadere verklaring gaf Ball niet. Naar verluidt is Perelman teleurgesteld geraakt in de wiskunde.

De Britse krant 'The Sunday Telegraph' maakte gisteren bekend Perelman opgespoord te hebben. Hij zou in een kleine flat in Sint Petersburg wonen, samen met zijn moeder. Hij had 'niets van belang' te melden, schreef de krant. "Ik heb mijn berekeningen gepubliceerd. Dat is wat ik het publiek te bieden heb."

De andere drie winnaars ontvingen vandaag hun medaille uit handen van de Spaanse koning Juan Carlos. Wendelin Werner van de Universiteit van Parijs-Zuid in Orsay kreeg de Fieldsmedaille voor zijn werk aan fase-overgangen. De Rus Andrei Okounkov, verbonden aan de Princeton Universiteit, krijgt de prijs voor de vele bruggen die hij bouwde tussen op het eerste gezicht niet-gerelateerde onderzoeksgebieden. En de jongste prijswinnaar, de 31-jarige Terence Tao, is al helemaal een alleseter. Hij houdt zich bezig met uiteenlopende onderwerpen als getaltheorie en de wiskunde achter de algemene relativiteitstheorie en de quantummechanica. In zijn korte carrière heeft hij zich ontwikkeld tot een soort 'Mister Fix-It' voor gefrustreerde onderzoekers, die er op eigen houtje niet uitkomen, schrijft New Scientist.

Bron: Noorderlicht



foto: Celene Chang/Daily Princetonian

Perelman presenteert zijn bewijs van het vermoeden van Poincaré.

Flatland, the movie

Het bekende negentiende-eeuwse boek *Flatlands* van Edwin A. Abbott, dat zich geheel in twee dimensies afspeelt, heeft een verfilming gekregen. Het verhaal is wel behoorlijk gemoderniseerd: er komen nu auto's en treinen in voor. De trailer is te zien op de website.

Bron: www.flatlandthemovie.com



Biografisch Woordenboek online

Op donderdag 21 september 2006 is het *Biografisch Woordenboek van Nederlandse Wiskundigen* (BWNW) online gegaan. In het kader van het NWO-project *Leraar in Onderzoek*, bedoeld voor wiskundedocenten in het middelbaar onderwijs, voerde Alex van den Brandhof, leraar wiskunde aan het Vossiusgymnasium te Amsterdam, de eerste fase van de totstandkoming van het woordenboek uit.

Het BWNW bestaat uit korte levensschetsen van Nederlandse wiskundigen ten dienste van docenten die hun college willen verluchten of verrijken, studenten en scholieren die op zoek zijn naar materiaal voor een werkstuk, en wetenschapsjournalisten. Diverse deskundige auteurs hebben bijdragen geleverd aan het woordenboek.

Het woordenboek is te vinden onder www.bwnw.nl en de website wordt gehost door het Centrum voor Wiskunde en Informatica.

Bron: Alex van den Brandhof

Erratum juninummer 2006

In het juninummer van jaargang 2006 staat op pagina 113 een onjuiste functiebeschrijving van de auteur Raoul Robert. Hij is *directeur de recherche* (onderzoeker bij de CNRS met de rang van hoogleraar) aan het *Institut Fourier* van de Universiteit Joseph Fourier te Grenoble.

De eindredactie



Gijs Nieuwenhuis

Structural Analysis Engineer

NKMNoell Special Cranes GmbH

Kruisweg 643, 2132 NC Hoofddorp

gijs.nieuwenhuis@nkmnoell.com

Toepassingen

De lemniscaatkraan

Elke wiskundige heeft wel eens kennis gemaakt met de klassieke lemniscaat van Jacob Bernoulli. Minder bekend is echter dat zogenaamde lemniscoïden, veralgemeniseerde lemniscaten, ook bij het ontwerpen van hijskranen een belangrijke rol spelen: lemniscaatkranen behoren sinds de jaren dertig tot de meest geavanceerde kraanconstructies. Op de CWI-vakantiecursus 2005 [1] en de wiskunde b-dag 2004 [2] voor middelbare scholieren werd dit onderwerp vanuit wiskundig perspectief benaderd. Maar welke rol speelt de wiskunde bij de daadwerkelijke constructie van deze kranen? Hoe kijken ingenieurs ertegenaan? Wat doen zij met de lemniscaat en waarom is juist deze kromme zo aantrekkelijk? Gijs Nieuwenhuis construeert als Structural Analysis Engineer zulke lemniscaatkranen bij het Nederlands-Duitse NKM Noell Special Cranes nadat hij jarenlang sterkterekenaar en hoofd engineering was bij de fabrikant van kranen FIGEE in Haarlem en Amsterdam. Zijn nieuwste project is de constructie van een drijvende kraan, een 'lemniscaat' van 36 ton op 43 meter die gaat werken op een 21 meter breed ponton met een nieuw systeem van balancering. In dit artikel beschrijft hij de constructie van lemniscaatkranen en welke problemen er in werkelijkheid de kop opsteken.

Een bekende verschijning in de havens is de lemniscaatkraan. Deze kraan, die bijna zonder uitzondering is uitgevoerd als drijvende kraan, dankt zijn naam aan een wiskundige kromme, de lemniscaat. Of het terecht is dat deze kraan de naam draagt, is beter te beoordelen na het lezen van dit artikel.

Korte beschrijving van het kraantype

De lemniscaatkraan is in principe een bijzondere dubbelarmkraan. Bijzonder en ken-

merkend is dat dit kraantype een bovenste arm heeft, de bovenarm, die bijna horizontaal blijft bij het vluchtverstellen, toppen genoemd. De gewone tuimelarmkraan heeft een bovenarm die, zoals de naam al aangeeft, veel grotere bewegingen maakt. In de uiterste ingetopte stand staat de arm bijna verticaal. Een ander kenmerk is dat de voorarm en de achterarm in de middenstand vrijwel verticaal staan. De drijvende kraan wordt ingezet als overslag- kraan tussen bulkcarriers en lichters. Op deze manier is een dure kade niet nodig en kan de diepgang van de bulkcar-

rier worden gereduceerd en vervolgens door de sluizen worden getrokken, zoals dat bijvoorbeeld in IJmuiden het geval is. Het grote schip kan dan met gewone walkranen verder worden gelost. Een andere mogelijkheid is de kraan in te zetten op twee locaties of te gebruiken om direct op de wal over te slaan, eventueel met meerdere kranen (zie figuur 4).

Horizontale lastlijn

De verhoudingen van de armen worden zodanig gekozen dat de last een vrijwel horizontale beweging maakt. Het belang van de zogenaamde horizontale lastlijn is de volgende: Bij het toppen is het wenselijk om de krachten in het mechanisme dat deze beweging aandrijft, het topwerk, beperkt te houden. In geval van een flinke helling in de lastlijn, moet het topwerk een hijsbeweging uitvoeren en is er meer topvermogen nodig.

De echte lemniscaat

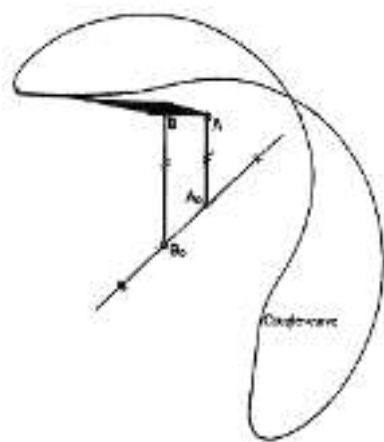
De lemniscaat is een meetkundige plaats van punten waarvan de afstanden tot twee brandpunten een constant product hebben. Deze is minder bruikbaar voor de kraan. In de figuur 2 is te zien dat na enige aanpassing er een deel van de kromme is die vrijwel horizontaal is. Voor het verkrijgen van deze lemniscaatkrom-

Figuur 1 Een lemniscaatkraan. Bij het naar voren bewegen verandert de hoogte van de punt van de takel nauwelijks.

me, is er een vaste verhouding van lengtes voor de armen, het zogenaamde giekstelsel. De opzet hiervan is vrij eenvoudig te benaderen met de volgende vier gegevens: Stel de lengte van de bovenarm op 1; de lengte van de voor- en achterarm op respectievelijk 0,86 en 0,66. Kies de steunpunten van deze armen door deze in een verticale stand te zetten en sluit de voorarm aan op 0,29 van de bovenarmlengte. Vanuit deze positie is een acceptabele lastlijn te verkrijgen.

Keuze van de armlengtes

Voor het vinden van de juiste afmetingen is het niet zozeer nodig om de theorie van de lemniscaatkromme te weten, maar is het van groot belang te onderzoeken wat de gevolgen zijn voor de kraan als van de ideale lastlijn wordt afgeweken. Door af te wijken van de afmetingen die behoren bij de echte lemniscaat wordt er niet meer gesproken over een lemniscaat, maar ook wel over een lemniscoïde. Om de effecten te weten van de aanpassingen, is in het verleden proefondervindelijk gewerkt. Op de tekenkamer van de fabrikant van kranen FIGEE, een bekende naam rond de lemniscaatkraan, heeft jarenlang een meccanodoos gestaan. In ieder geval is daar bereikt dat met aanpassen van de verhoudingen de theoretische verhoudingen voor het giekstelsel, de lemniscaat wel is verlaten, maar er een groter werkbaar bereik is gerealiseerd. Een veelgebruikt analyse middel is de spreadsheet. Op de webpagina [2] is heel aardig een gevoel te krijgen van de effecten van de verschillende systeemmaten. Juist met een eenvoudig stuk gereedschap als een spreadsheet, is vrij snel een heel acceptabele lastlijn te realiseren. Constructeurs heb-



Figuur 2 De baan die het uiteinde van de arm van een lemniscaatkraan beschrijft (de Coupler-curve). In het plaatje stelt de zwarte ruit de arm voor, en AA_0 en BB_0 de steunpunten van de arm, waarbij A_0 en B_0 rotatiepunten zijn. Zie ook figuur 3.



Figuur 3 De balancerende van de lemniscaatkraan is in veel gevallen gezocht in de achterarm. Hier vormt de ballastbak een geheel met de achterarm.

ben immers de neiging om de lengtes van de armen op 'mooie' maten te zetten. Hoewel een armlengte van 25687 mm of iets dergelijks nauwelijks op grote bezwaren zal stuiten wordt hier toch graag een maat van 25700 van gemaakt. Zulke kleine aanpassingen zijn veelal (aantoonbaar) te accepteren.

Aanpassing van eis lastlijn

Veel berekeningen die in het verleden zijn gemaakt gingen uit van de horizontale lastlijn. De vast opgestelde kraan, zonder pontonbeweging dus, maakte hierbij een mooie horizontale lastlijn. Een andere mogelijkheid is om in de lastlijn een compensatie aan te brengen voor de beweging die de kraan maakt door de pontonbeweging. Met name de beweging om de langsas, de 'roll' heeft veel invloed op de lastlijn. Een drijvende kraan, dwars op ponton met volle last op maximale vlucht, maakt een hoek van zo'n 2 graden, ook wel de 'trimhoek' genoemd. Het is duidelijk dat deze be-

weging van de het ponton een nadelige invloed heeft op het topwerk. De lastlijn maakt door de pontonhoek een helling. De eerste 16-tons kranen van FIGEE hebben na oplevering een extra ballast gekregen omdat deze hoek voor het topwerk teveel van het goede was. Door een verbeterd programma waarbij de invloed van de pontonhoek meegenomen wordt, zijn topwerkproblemen te voorkomen.

Algemeen geldende eis voor lastlijn

Uiteindelijk is een fraai horizontale lastlijn niet heel erg van belang voor een drijvende kraan. Het was ons immers te doen om het topvermogen beperkt te houden. Door lastlijnvariaties te combineren met vermogensberekeningen is een optimale curve te bepalen. Hierbij moet de berekening worden gemaakt voor in- en uittoppen met volle last met kraan in lengterichting van ponton (kraan maakt heel kleine hoek) en met de kraan dwarsuit (kraan maakt grootste pontonhoek). De berekening moet ook worden herhaald

met een lege grijper. Hiermee is het maximale bereikt: de minimale eisen voor het topwerk worden bepaald.

Balancerings

Een andere eis aan de kraan is de balancerings van het giekstelsel. Bij een ideale balancerings staat in iedere stand van de giekdelen de armen in evenwicht. Dat houdt dat voor zowel het intoppen als het uittoppen buiten eventuele wrijving geen energie moet worden toegevoerd of afgevoerd. Het gemeenschappelijk zwaartepunt van de giekdelen maakt dan in de meeste gevallen een bijna rechte lijn. Veelal wordt de balancerings zodanig uitgelegd, dat er een curve ontstaat met twee dalen. Op die vluchtstanden is er een stabiel evenwicht. De mate van balans heeft een groot effect op het benodigde vermogen, veel groter dan bijvoorbeeld het effect van de pontonhoek.

Conventionele balancerings

De balancerings van de lemniscaatkraan is in veel gevallen gezocht in de achterarm. Dit is te zien in figuur 3 waarin de ballastbak een geheel vormt met de achterarm. Dit maakt de opzet van de kraan eenvoudig: er is sprake van een achterarm, een voorarm en een bovenarm. De mate van balancerings van de kraan voor wat betreft het giekstelsel is acceptabel. Een nadeel vormt echter de positie van de ballastbak. Door het geïntegreerd zijn aan de achterarm, staat de zogenaamde ballastbak erg ver naar achteren en kan dan in

aanraking komen met het schip.

Andere balancerings

Kranenfabrikant FIGEE heeft in het recente verleden een kraan gemaakt die, evenals een tuimelarmkraan, een aparte arm met ballastbak, de balansarm koppelde aan de voorarm. Met deze manier van balanceren zijn er meer mogelijkheden. Door de koppelstang is er immers een mechanisme ontstaan, waarmee een overbrenging kan worden gemaakt waarbij de hoeken en hoeksnelheden van de voorarm en de balansarm kunnen verschillen. Door een draaipunt voor de balansarm meer in het hart van de kraan te brengen, is de ballast uit de gevarenzone te halen en kan de kraan een normale geometrie krijgen. Tot nu toe is de balancerings slechts gericht op het in balans brengen van het giekstelsel. Hierbij is het ook mogelijk om de totale kraanbalans te beïnvloeden. Wat is de horizontale verplaatsing van het gemeenschappelijk zwaartepunt van het giekstelsel. Door met deze bril naar de kraanbalans te kijken is het mogelijk door extra ballast een sterk verbeterde balans te verkrijgen.

Sterkte-eisen

De sterkte-eisen worden opgelegd door de norm. Hiervoor worden veelal nog steeds de Nederlandse normen *NEN 2018* en *NEN 2019* gebruikt. De norm maakt een indeling voor het stalen geraamte in kraangroepen. Deze indeling is een combinatie van hoeveelheid last-

spelen en het lastspectrum. Met het aantal lastspelen wordt in het ontwerp aangegeven hoeveel keer de kraan het lastspel zal doorlopen en het lastspectrum geeft aan de intensiteit waarmee de last zijn maximale waarde benadert. Hiermee heeft een kraan die veelvuldig met de bedrijfslast (dat is de maximale last, *Safe Working Load*) wordt belast en tevens een soort bedrijf kent waarbij de kraan veelvuldig wordt gebruikt, een hogere kraangroep dan een kraan die een lager aantal lastspelen maakt en ook minder intens wordt belast. Deze normen stellen eisen aan de maximale spanningen voor zowel sterkte, afhankelijk van het materiaal, en de vermoeiing, afhankelijk van kraanindeling, kerfgroep en grensspanningsverhouding.

Dynamica van de kraan

Een van de bijzondere elementen van de lemniscaatkraan is de dynamiek. Zoals zoveel kranen die zwenkbaar op de kade staan opgesteld, kent de kraan de dynamische belasting uit toppen en zwenken (massatraagheid van de giekdelen), gecombineerd met de effecten uit last. Echter voor een drijvende kraan komen daar nog verschillende andere belastingen bij. Naast de scheefstand van de kraan zelf, een statische belasting in twee richtingen, dus in lengterings van de kraan en loodrecht daarop; dwars op de kraan, zijn er ook dynamische belastingen door de versnellingen van de combinatie van kraan en ponton. Op iedere vluchtstand van de kraan en iedere



Figuur 4 De 25 tons lemniscaatkraan van OVET lost direct op de wal.

hijslast heeft de kraan een andere evenwichtstand. Omdat de vluchtstanden veranderen en de hijslast regelmatig verandert, heeft dit drijvende lichaam de neiging om de nieuwe evenwichtstand te gaan innemen. Omdat de combinatie van kraan en ponton een vrij grote traagheid heeft, met name om de lengte-as van het ponton, heeft de kraan de neiging om door te schieten en een pendeling te beginnen om de nieuwe evenwichtstand. Dit wordt echter voorkomen door een redelijke mate van demping door het water wat bij het aannemen van een andere pontonhoek moet worden verplaatst. Een eenvoudige en bruikbare modellering van de kraan die bewegend is om de lengte-as (roll) is de volgende. Hierbij is U de uitwijking in graden, t de tijd in seconden en T de slingertijd.

$$\text{Hoek } \varphi = U \sin \frac{2\pi t}{T}$$

$$\text{Hoeksnelheid } \omega = U \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi t}{T}$$

$$\text{Hoekversnelling } \alpha = -U \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Met enkele metingen uit de praktijk zijn eenvoudig de slingertijd (circa 6/7 seconden) en de maximale hoek (dynamisch circa 3 graden) te bepalen. Met deze waarden is al snel te berekenen dat de maximale (roll)versnelling zo'n $0,05 \text{ rad/s}^2$ bedraagt. Een groot effect van de rollversnelling is terug te vinden in het topwerk. Omdat de klassieke berekeningen deze belastingen niet meenamen, traden

er in het topwerk belastingen op die niet uit de (hand)berekeningen terug te herleiden waren. Met name dit effect maakte de lemniscaatkraan tot een 'lastige' kraan.

Effecten uit zeegang

Op enkele plaatsen waar de lemniscaatkraan is ingezet, was het niet mogelijk om in de beschermde omgeving van de haven te werken. De kranen werken dan soms meer dan een kilometer uit de kust.

Als een kraan eenmaal aan een groot schip is begonnen is het wenselijk de klus af te maken. Hierbij treden andere belastingen op dan die alleen uit de eigen beweging voortkomen van de kraan. De kraan is dan, zeker bij serieuze golfhoogtes van zo'n twee meter, onderhevig aan versnellingen door het water. Dit doet zich voor in bijvoorbeeld India, waar de zeeconditie voor de kraan niet al te gunstig is. Hoewel het voor de kraandrijver een zeer vermoeiende bezigheid is om de hijslast veilig in het schip te brengen, wordt er daar tot extreme condities doorgegaan.

Ter illustratie: ter hoogte van de cabine geeft een versnelling van $0,05 \text{ rad/s}^2$ een langs- of dwarsversnelling van $\alpha = \omega \cdot h = 0,05 \times 30 = 1,5 \text{ m/s}^2$. Deze waarde wordt minimaal verdrievoudigd bij serieuze zeegang. Dan treedt een dwarsversnelling op van circa $\frac{1}{2}g$!

Overige berekeningen

Naast de berekeningen voor de lastlijn; de

keuzes voor de balanceren en de analyses voor de versnellingen die op de kraan werken in bedrijf; zijn er ook de 'standaard' berekeningen voor de kraan. Evenals de vermogensberekeningen voor hijsen, toppen en zwenken zal er ook een controle moeten zijn op stabiliteit tegen plooi en knik. Van een knik is voor een 'leek' een voorstelling te maken, maar dat is voor plooi lastiger. Kort gezegd komt het op het volgende neer: ook een plaatveld zal onder drukspanning een of meer bolingen willen gaan vertonen. Om dit te voorkomen moeten er plooiverstijvers worden aangebracht.

Stijfheidseisen

Aan kranen worden regelmatig eisen gesteld ten aanzien van de stijfheid. De meest in het oog lopende eis is de zakking aan de top. Hiervoor wordt logischerwijs de nominale hijslast als maat genomen. Een bruikbare eis hiervoor is $1/400$ of $1/500$ van de vlucht. Dit houdt in dat onder invloed van een hijslast de zakking bij 40 m vlucht niet meer is dan 100 of zelfs 80 mm. Niet zozeer de verplaatsing van de top als wel de eigenfrequentie is hierbij bepalend.

Andere eisen zijn bijvoorbeeld de horizontale verplaatsing (dwars) door de last. Een laatste ontwikkeling is een stijfheid van de cabineondersteuning. Deze heeft met name in de horizontale (dwars)richting een grote invloed op het comfort van de kraandrijver. $\leftarrow$

Referenties

¹ R.H. Kaenders, 'Kranen en Lemniscaten', *De schijf van vijf (Meetkunde, Algebra, Analyse,*

Discrete wiskunde, Stochastiek), Syllabus CWI vakantiecursus, (2005)

² 'Dansende Stangen', wiskunde b-dag 2004, <http://www.fi.uu.nl/wisbdag/>

Laurent Lafforgue

*Institut des hautes études scientifiques (IHES),
Le Bois-Marie, 35 route de Chartres,
Bures-sur-Yvette, Frankrijk
laurent@ihes.fr*

Mathieu Florence

*Avenue de la Poste 24
1020 Renens, Zwitserland
mathieu.florence@gmail.com*

Overzichtsartikel

Galois Theory and Arithmetic

At the age of twenty, in the night before the duel that would end his life, Evariste Galois (1811–1832) wrote an account of his thoughts of the previous years. These concerned a theory of algebraic equations that now bears his name: Galois theory. Now more than ever, it is central to arithmetic, where it brings together algebra, geometry, topology, and harmonic analysis. In this article, Laurent Lafforgue, professor at the Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) and Field Medalist in the year 2002, connects the classical theory with the contemporary state of the research area. His text is supplemented with frames by Mathieu Florence, post-doc at the Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL). The French version appeared in the collection ‘Images des Mathématiques 2004’ published by the Centre National de la Recherche Scientifique. Translation: Reinie Ern .

An algebraic equation in an unknown X can be written as $a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$. When the degree d is 1, this equation has the solution $-a_0/a_1$ whenever the coefficients a_0, a_1 are elements of a set F in which the four operations $+$, $-$, $\times$, and $/$ are defined; such an F is called a field. When $d = 2$, the solutions are

$$\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}\right)/2a_2.$$

Likewise, for $d = 3$ or 4 , the solutions can be expressed in terms of the four operations and the taking of the roots $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ of the equations $X^2 = a$, $X^3 = a$, and $X^4 = a$. Abel showed that this is impossible from $d = 5$ on. Galois theory answers the most

general question of determining all relations between algebraic equations with coefficients in a field F . To each we associate the finite set of its solutions endowed with the action of a group G_F , the Galois group of F . The relations between equations then correspond to maps between the associated finite sets that respect the action of G_F .

Between 1958 and 1970, the French mathematician Alexander Grothendieck brought a new vision and two important generalizations to Galois theory, in the setting of his recasting of algebraic geometry into *theory of schemes*. He first defines the coverings of a scheme S : these are the schemes S' fibered over S that locally, in the sense of his ‘ tale topology’, can be written as stacks of copies of S , like the floors in an apartment building. Then he shows that the category of coverings of S is equivalent to that of the finite sets endowed with the action of a group π_S , the ‘fundamental group of S' ’. To each field F corresponds a scheme of dimension 0, its ‘spectrum’, $S = \text{Spec}(F)$, and the algebraic equations in one variable with coefficients in F correspond to the coverings of S . The fundamental group π_S is none other than the group G_F . Thus we have a common generalization of Galois theory and of the theory of the topological fundamental group of Henri Poincaré (1854–1912).

In the same way as there are schemes of all dimensions, there are fibrations of all relative dimensions above a scheme S , and not only the relative dimension 0 of the coverings. When $S = \text{Spec}(F)$, these are ‘varieties’ defined by algebraic equations in more than one variable. In this vertical direction, Grothendieck also gave a partial generalization of Galois theory, the ‘ -adic cohomology’ of fibrations. The cohomology, or rather the homo-

Polynomial Equations and Galois Theory

Classically, the general degree three equation with, say, real coefficients is resolved in two steps. First you reduce the equation to the form

$$P(X) = X^3 - pX + q = 0 \quad p, q \text{ real}$$

by eliminating the X^2 term. Then you look for a root x of P of the form

$$x = u + v \quad \text{where } 3uv = p.$$

By expanding $P(u + v)$, we obtain the system

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = p^3/27, \end{cases}$$

which we know how to solve: u^3 and v^3 are the roots of the polynomial $X^2 + qX + p^3/27$. Finally, we arrive at Cardano's Formula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

which gives all three roots of P . The choice of the first cube root of unity fixes the choice of the second because of the relation $3uv = p$. The degree four equation can be reduced by a similar method to that of degree three.

Galois theory allows us to show the absence of a formula similar to the one above for the equations of degree five or more, that is, of the form $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, where $n \geq 5$ and the a_i are in a field K . For simplicity, we will

assume here that the characteristic of K is zero. The equation $P(X) = 0$ is then said to be *solvable by radicals* if there is a formula using the elements of K and the operations $+$, $-$, $\times$, $/$, and $\sqrt[n]{}$ that gives the roots of P . Let us give two essential definitions. A *splitting field* for P is a field L containing K , in which P has all its roots:

$$P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

with $\alpha_i \in L$, and such that $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Such a field L is unique up to isomorphism. For example, the splitting field of $X^3 - 2$ for $K = \mathbf{Q}$ is $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3})$. The Galois group of this extension L/K , denoted $\text{Gal}_{L/K}$, is the group $\text{Aut}_K L$ of automorphisms of L that leave the elements of K invariant. In the example above, this group is the symmetric group with three elements. An essential result due to Galois states that the equation $P = 0$ is solvable by radicals if and only if $\text{Gal}_{L/K}$ is solvable. (A group G is called *solvable* if there exist subgroups $G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = \{e\}$ such that H_{i+1} is a normal subgroup of H_i and H_i/H_{i+1} is Abelian.)

In particular, if we consider the coefficients a_i of P as variables, we can apply this result to the field $K = \mathbf{C}(a_0, \dots, a_{n-1})$. The group $\text{Gal}_{L/K}$ can then be identified with the group of permutations of the roots α_i . Now, this group is not solvable for $n \geq 5$, whence the impossibility of solving the general equation of degree $n \geq 5$ by radicals, as was shown by the Norwegian mathematician Niels Hendrik Abel (1802–1829).

logy, of a topological space had been invented by Poincaré, and as soon as the 1940's, André Weil was interested in adapting it to algebraic geometry. After pioneering work by Jean-Pierre Serre, Grothendieck realized this adaptation, associating to every fibration of a scheme S the ℓ -adic cohomology spaces that are continuous linear representations of the fundamental group π_S ; we call these Galois representations of S . We would have a complete generalization of Galois theory if we could have moved back up from these to algebraic varieties; this is the object of Grothendieck's theory of 'motives', which, even today, remains conjectural. Outside of relative dimension 0, we know only the case of the varieties called 'Abelian' conjectured by John Tate and proved by Gerd Faltings in 1983: when two Abelian varieties have the same ℓ -adic cohomology, each parametrizes the other. But if it is true that the category of fibrations, or rather of 'motives', over a base scheme S is equivalent to that of the Galois representations of S , determining these representations and their mutual relations is crucial.

Arithmetic is the study of algebraic varieties, and therefore of Galois representations, over the field $\mathbf{Q}$ of rational numbers. Grothendieck associates the point $\text{Spec } \mathbf{Q}$ to this field, but also a scheme of dimension 1, $\text{Spec } \mathbf{Z}$, whose points are the prime numbers and whose regular functions are the elements of $\mathbf{Q}$. This makes $\mathbf{Q}$ similar to the fields of algebraic functions on curves. Just as we can associate to a function f on a curve the order $v_p(f)$ of

the zero or pole at every point p , likewise for every prime number p a rational number f has a unique integer $v_p(f)$ such that $f/p^{v_p(f)}$ has no factor p . The field $\mathbf{Q}$ and the function fields $F(C)$ of algebraic curves C over a field whose number of elements is finite are called global fields. To every Galois representation of such a field we can associate an analytic function L that is an infinite product of factors indexed by the points of $\text{Spec } \mathbf{Z}$ or C . These are generalizations of the Riemann ζ -function $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ and we expect that, as is the case for the Riemann ζ -function, they admit analytic continuations and functional equations linking their values in s and $1 - s$. Grothendieck proved this for the function fields as a consequence of a result coming from topology, the 'Poincaré duality'. But we still have no duality on $\text{Spec } \mathbf{Z}$...

According to the predictions of the Canadian mathematician Robert Langlands, it is through the L functions that Galois theory meets harmonic analysis. This is a branch of mathematics created in the 19th century by Joseph Fourier to analyze waves, that studies periodic functions, for example $\cos()$ and $\sin()$ on $\mathbf{R}$ with period group $2\pi\mathbf{Z}$. To a global field $F = \mathbf{Q}$ or $F(C)$ we associate its 'ring of adèles' $\mathbf{A}_F$ that is an infinite product of fields $\mathbf{F}_p$, 'localizations of F ', in all points p of $\text{Spec } (F)$ or C . The functions on the group $GL_r(\mathbf{A}_F)$ of invertible $r \times r$ matrices with coefficients in $\mathbf{A}_F$ with period group $GL_r(F)$ are called *automorphic*. In a different form, these were first studied by Poincaré. To every automorphic representation of $GL_r(\mathbf{A}_F)$, Langlands associated an analytic

Algebraic Varieties and Schemes

The simplest object studied in algebraic geometry is the affine space A_K^n , where K is an algebraically closed field. As set, A_K^n is equal to K^n . It is endowed with a topology called the *Zariski topology*, whose closed subsets are the sets $V(I)$ of zeros in K^n of an ideal I of $K[X_1, \dots, X_n]$.

However, this topology is too coarse to distinguish sufficiently many algebraic varieties. We must therefore add some structure. For every open subset $U \subset A_K^n$, we define the *regular functions* on U as the maps from U to K that can be written as P/Q for polynomials P and Q , where Q has no zeros on U . These functions have a remarkable property. Indeed, giving a regular function f on U is equivalent to giving a covering $\{U_i\}$ of U by open subsets, and regular functions f_i on U_i such that $f_i = f_j$ on $U_i \cap U_j$.

We call the map $U \mapsto \{\text{regular functions on } U\}$ a *sheaf* on A_K^n (note the analogy with the sheaf of C^∞ functions on a C^∞ variety).

More generally, to every commutative ring A , Grothendieck's theory of schemes associates a topological space whose points are the prime ideals of A , and whose closed subsets are the sets $V(I)$ of prime ideals containing an ideal $I \subset A$. This space is endowed with a sheaf of rings constructed in such a way that, loosely speaking, A corresponds to the regular functions on this space. The resulting object is called the *spectrum* of A , and is denoted $\text{Spec}(A)$. This is an affine scheme. General schemes are obtained by gluing such affine schemes together.

Let us consider $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ and $\text{Spec}(K[X])$ more closely. We can draw them as follows:



Figure 1 $\text{Spec}(\mathbf{Z})$ and $\text{Spec}(K[X])$

In both cases, the topological space in question resembles a straight line with the cofinite topology, plus a dense point η corresponding to the zero ideal. If K is countable, these two spaces are homeomorphic. Nevertheless, the schemes are not isomorphic: their sheaves of regular functions are completely different.

Consider the scheme $S = \text{Spec}(K[X_1, \dots, X_n]/(P))$, where P is an irreducible polynomial. The closed points of S correspond to the maximal ideals of $K[X_1, \dots, X_n]$ containing P , which according to Hilbert's Nullstellensatz are in bijection with the solutions of the equation $P = 0$ in K^n . It follows that S is an *algebraic hypersurface*.

This example together with that of $\text{Spec}(\mathbf{Z}[i])$, studied in the frame *Etale Coverings and Fundamental Group*, shows how the theory of schemes is a common generalization of arithmetic and algebraic geometry.

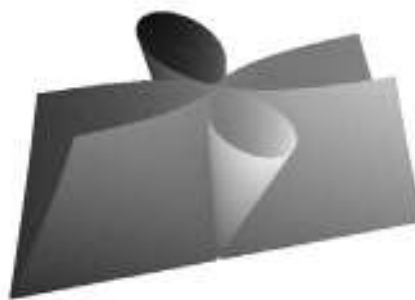


Figure 2 Algebraic hypersurface

function L , also defined by an infinite product of factors indexed by p , that admits an analytic continuation and a functional equation. He conjectured the following fantastic statement: for every $r \geq 1$, there exists a unique correspondence preserving the L functions, $\sigma \mapsto \pi_\sigma$, $\pi \mapsto \sigma_\pi$ between the set of Galois representations σ of dimension r of F and the set of automorphic representations π of $GL_r(\mathbf{A}_F)$.

The case $r = 1$ is a reformulation, already known to Emil Artin (1898–1962), of the theory of class fields, which kept all arithmeticians busy in the 19th century, up to the 1930's. The case $r \geq 2$ is more subtle, as the groups $GL_r(\mathbf{A}_F)$ are no longer commutative.

For $F = F(\mathbf{C})$, and thanks to the functional equations of Grothendieck, we have been able to show that if there are maps $\pi \mapsto \sigma_\pi$ in ranks $< r$, there are maps in the other direction $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ for ranks $\leq r$. For $F = \mathbf{Q}$ and $r \neq 1$, the most important construction $\sigma \mapsto \pi_\sigma$ to date is due to Andrew Wiles: it is when σ comes from an elliptic curve, an Abelian variety of dimension 1. By the theorem of Faltings mentioned before, this means that every elliptic curve over $\mathbf{Q}$ can be parametrized by what we call a modular curve. This result, as everyone knows, implies Fermat's theorem.

In the other direction, $\pi \mapsto \sigma_\pi$, we are looking for the σ_π in the ℓ -adic cohomology of suitable varieties over F . For $F = F(\mathbf{C})$, the Ukrainian mathematician Vladimir Drinfeld proposed a conjectural answer to the question at the beginning of the 1970's, the 'chtoucas' varieties; he later proved the case $r = 2$. Recently, the author of this article generalized the proof of Drinfeld to arbitrary dimension, so that at this moment, the Langlands correspondence on functions fields has been proved. On $F = \mathbf{Q}$, a partial answer is given conjecturally by the varieties that generalize modular curves, introduced by the Japanese mathematician Shimura even before Langlands stated his program. However, the cohomology of these varieties can only contain part of the Galois representations, and in general, we do not know yet how to determine it explicitly.

The theories of Galois and Grothendieck and the Langlands program that completes them are a great and beautiful product of the human mind. No one doubts that the yet to be resolved problems that they pose — the motives, the cohomology of Shimura varieties, and other more general varieties that must still be

Étale Coverings and Fundamental Group

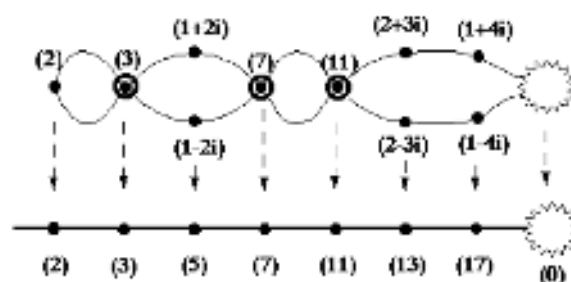
We will now explain how the notion of covering, well-known for ‘nice’ topological spaces, generalizes to schemes. For simplification, all schemes we consider here are supposed connected. We must translate the notion of local isomorphism to algebraic geometry; if we do this naïvely, we obtain nothing. A surjective morphism of schemes that is a local isomorphism is in fact an isomorphism, because the Zariski open subsets are dense for a large class of schemes. We must therefore refine this topology to obtain a new one, called *étale topology*. This is not a topology in the usual sense: for every scheme we have a family of morphisms of schemes $\{f_i : U_i \rightarrow X\}$ satisfying certain properties that axiomatize the notion of ‘covering of X by open $U_i \hookrightarrow X$ ’. The maps $\{f_i : U_i \rightarrow X\}$ considered here are étale morphisms. A good definition of these morphisms is that of the Jacobian criterion: $\{f : U \rightarrow X\}$ is called étale if locally, f represents U by polynomial equations $P_1(X_1, \dots, X_n) = \dots = P_n(X_1, \dots, X_n) = 0$ with $\det(\delta P_i / \delta P_j)$ invertible. You might think of U as a horizontal strip stretched over X without folds.

However, this does not reflect the richness of this notion. For example, if $X = \text{Spec}(K)$, U will be of the type $\text{Spec}(L)$, where L is a field that is a finite separable extension of K .

A covering between schemes is, up to details, a surjective étale morphism $U \rightarrow X$. For example, $C^* \rightarrow C^*$, $x \mapsto x^n$ is

an étale covering of the scheme $C^* = \text{Spec}(C[X, 1/X])$. As in topology, we have the notion of Galois covering. Moreover, if $X = \text{Spec}(K)$, the Galois coverings correspond to Galois field extensions.

Even though in general there is no universal covering of a given scheme S , there does exist a *fundamental group* π_S whose finite quotients are the automorphism groups of the Galois coverings. A non-trivial result is that $\pi_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} = \{e\}$, that is, that every number field K is ramified at at least one prime number p . For example, the canonical map $\text{Spec}(\mathbb{Z}[i]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ is ramified at the point $(1+i)$: if we remove this point, the resulting morphism is étale. This morphism can be drawn as follows:



Class Field Theory

A major problem of modern mathematics is the description of the Galois group of $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$. This question is extremely delicate. Nevertheless, class field theory gives a partial answer. It has two facets.

The first is local: we consider *local fields*, for example the p -adic numbers or the formal series over a finite field. The principal result is the following: the correspondence

$$\begin{aligned} &\{\text{finite Abelian extensions of } K\} \rightarrow \\ &\{\text{subgroups of } K^* \text{ with finite index}\}, \\ &L \mapsto N_{L/K}(L^*) \end{aligned}$$

is bijective, where $N_{L/K}$ denotes the norm of the extension L/K . Moreover, for every Galois extension L/K we have an isomorphism

$$(\alpha, L/K) : K^*/N_{L/K}(L^*) \xrightarrow{\sim} \text{Gal}_{L/K}^{\text{ab}}$$

with a good number of functorial properties. This gives us a description of $\text{Gal}_{L/K}^{\text{ab}}$, the largest Abelian quotient of $\text{Gal}_{L/K}$. These results can be obtained in various ways, in particular thanks to the Nakayama-Tate duality between certain Galois

cohomology groups.

The other facet of class field theory deals with *global fields*. To fix some ideas, K now denotes a number field. The role that K^* plays in the local case is now held by the group $C_K = I_K/K^*$, the *idèle class group* of K . We denote by I_K the group of idèles, which for $K = \mathbb{Q}$ is defined as $I_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^* \times \prod'_{p \in P} \mathbb{Q}_p^*$, where P denotes the set of prime numbers, $\mathbb{Q}_p$ is the field of p -adic numbers, and $\prod'$ is the restricted product, that is, the set of elements of the usual product that are almost everywhere units. In general, the factors of the product defining I_K are the completions of K for all absolute values of K . These fields are $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ for the Archimedean absolute values, and finite extensions of p -adic fields for the others. We then have two theorems analogous to the ones above, obtained by replacing K^* respectively L^* by C_K respectively C_L . The ingredients of the proof are still of cohomologic nature, but also analytic: the Chebotarev density theorem, a vast generalization of the theorem of Dirichlet on arithmetic progressions, comes in at a crucial point in the proof. In fact, class field theory even gives a description of the abelianization of $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ for every global field K . This comes down to describing all continuous representations of dimension 1 of $\text{Gal}(\overline{K}/K)$; this is where this theory coincides with the Langlands program for $r = 1$.

Automorphic Representations

We will now describe in detail the notion of *automorphic representation* of the group $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$. To simplify this discussion, we consider a function field F over an algebraic curve C defined over a finite field, for example $F = \mathbf{F}_p(t)$. The ring of adèles of F is $\mathbf{A} = \prod'_{x \in C} F_x$, where F_x denotes the local field obtained by completing F at the point $x \in C$, and $\prod'$ is the set of elements of the usual product that are almost everywhere integers, that is, elements of the ring of integers $O_x \subset F_x$.

The ring $\mathbf{A}$ is endowed with a topology whose basis of open neighborhoods of 0 is given by the sets $\prod_{x \in S} H_x \times \prod_{x \notin S} O_x$, where $S \subset C$ is finite and $H_x \subset F_x$ is open for $x \in S$. We have a natural injection $F \hookrightarrow \mathbf{A}$. We call a function $f : \mathrm{GL}_r(\mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{C}$ with the following properties an *automorphic form on $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$* :

- f is left-invariant for $\mathrm{GL}_r(F)$: $f(\gamma x) = f(x)$ for $\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)$, $x \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$,
- f is right-invariant for an open subgroup $H \subset \mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$: $f(x) = f(xh)$ for $h \in H$, $x \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$.

Strictly speaking, we should add a third condition that we leave out here.

The group $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$ acts on the space A of automorphic forms by $(g.f)(x) = f(xg)$ for $f \in A$ and $x, g \in \mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$.

An *automorphic representation* is an irreducible representation of $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A})$ that occurs in the space A . Let us recall that a representation $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ is called *irreducible* if the only subspaces of V that are stable under ρ are $\{0\}$ and V . An automorphic representation can always be written as an infinite tensor product of local factors that are irreducible representations of the groups $\mathrm{GL}_r(F_x)$. This is the local aspect of this theory. The global aspect is contained in the left-invariance of the automorphic forms for the subgroup $\mathrm{GL}_r(F)$.

defined, the properties of L functions of Galois representations — will for a long time remain on the horizon of algebraic and arithmetic geometry. $\Leftarrow$

Some Definitions

- A group is a set endowed with a law of composition $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, a unit element, and an inverse map $g \mapsto g^{-1}$. It is commutative or Abelian if we always have $g_1 g_2 = g_2 g_1$. An action of a group on a finite set consists of associating to every element of the group a permutation of the elements of the set, in

a way that is compatible with the laws of composition.

- A category is a collection of objects and relations between the objects.
- A linear representation of a group is a vector space endowed with linear transformations indexed by the elements of the group, in a way that is compatible with the laws of composition.
- A ring is a set in which the three operations $+$, $-$, and $\times$ are defined, but not necessarily the division $/$.

Hans Montanus

Bunuelaan 16
1325 PL Almere
hans.montanus@wxs.nl

Onderzoek

Halltripels en kindertekeningen

In het kader van het NWO-project Leraar In Onderzoek (LIO) heeft wiskundeleraar Hans Montanus zich beziggehouden met onderzoek aan het zogenaamde Hallvermoeden en Belyi-afbeeldingen. Tijdens dit werk heeft hij een resultaat van W.W. Stothers uit 1981 herontdekt, maar dan wel in een alternatieve en combinatorische versie, die geschikt is voor presentatie aan een breder publiek. Dit resultaat wordt hier gepresenteerd. Ander werk op dit gebied zal verschijnen in een wetenschappelijke publicatie samen met Frits Beukers, de begeleider van de auteur. De Groningse wiskundestudent Jeroen Sijsling zette het oorspronkelijke werk om in onderstaande tekst.

Een interessant onderwerp in de getaltheorie is het zoeken naar geheeltallige oplossingen van de vergelijking

$$x^3 - y^2 = k$$

met $|k|$ klein in verhouding tot $|x|$. Hierbij laten we flauwe oplossingen van de vorm $x = n^2$, $y = n^3$, $k = 0$ buiten beschouwing. Op deze gevallen na blijkt vrijwel altijd te gelden dat $|k| > \sqrt{|x|}$. Er zijn echter wel uitzonderingen hierop, bijvoorbeeld één van de simpelste oplossingen: $x = 2$, $y = 3$, $k = -1$. Sterker nog, Danilov en Schinzel hebben zelfs oneindige rijen van oplossingen (x_n, y_n, k_n) met $|k_n|/\sqrt{|x_n|} < 1$ geconstrueerd. Een voorbeeld van zo'n constructie kan worden gevonden in [1]: definieer (a_n, b_n) door

$$(682 + 61\sqrt{125})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{125}.$$

Per constructie hebben we

$$\begin{aligned} a_n^2 - 125b_n^2 &= (682 + 61\sqrt{125})^{2n+1}(682 - 61\sqrt{125})^{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+1} = -1. \end{aligned}$$

Omdat $a_n^2 \equiv -1 \pmod{125}$, moet er gelden $a_n \equiv \pm 3 \pmod{5}$. Als $a_n \equiv -3 \pmod{5}$, dan vervangen we a_n door $-a_n$. Omdat nu $a_n \equiv 3 \pmod{5}$, geeft

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(a_n - 3)^2 - 5}{5}, \\ y_n &= b_n(a_n^2 - 9a_n + 19), \\ k_n &= x_n^3 - y_n^2, \end{aligned}$$

een geheeltallige oplossing van onze vergelijking. Het blijkt dat

$$|k_n|/\sqrt{|x_n|} = \frac{27|2a_n - 11|\sqrt{5}}{125\sqrt{(a_n - 3)^2 - 5}},$$

en dit convergeert naar $\frac{54\sqrt{5}}{125} < 1$ als n naar oneindig gaat, hetgeen oneindig veel tegenvoorbeelden levert.

Toch is het verleidelijk om het volgende te poneren:

Vermoeden. *Er bestaat een constante $C > 0$ zo, dat $|x^3 - y^2| \neq 0 \Rightarrow |x^3 - y^2| > C\sqrt{|x|}$ voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Dit staat bekend als het *sterke Hallvermoeden*. Het geloof in dit in 1971 door Marshall Hall Jr. voorgestelde vermoeden is er recentelijk een beetje op achteruit gegaan. De volgende zwakkere variant

heeft een grotere kans om waar te zijn:

Vermoeden. Voor alle $\epsilon > 0$ bestaat er een constante $C_\epsilon > 0$ zo, dat

$$|x^3 - y^2| \neq 0 \Rightarrow |x^3 - y^2| > C_\epsilon |x|^{\frac{1}{2}-\epsilon}$$

voor alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Een mooi overzicht van het werk aan deze vermoedens valt te vinden in [2], samen met een oplossing waarvoor

$$|k|/\sqrt{|x|} < \frac{1}{46},$$

tot nu toe het record. Op de tweede plaats in de recordlijst (zie [3]) staat Bosman, met

$$|k|/\sqrt{|x|} < \frac{1}{10}.$$

Polynomiale Halltripels

Het is nogal moeilijk om goed grip te krijgen op de getaltheoretische Hallvermoedens. We kunnen echter ook naar eventuele meetkundige analogieën kijken. Dit gaat als volgt. In plaats van naar gehele getallen kijken we naar polynomen over een algebraïsch afgesloten lichaam van karakteristiek 0, laten we zeggen $\mathbb{C}$. En in plaats van de absolute waarde van een geheel getal kijken we nu naar de graad van een polynoom. Met andere woorden, we kijken naar oplossingen in $\mathbb{C}[z]$ van de vergelijking

$$X^3 - Y^2 = K,$$

en we willen weten hoe groot de graad $\text{grd}(K)$ van K kan zijn vergeleken met $\text{grd}(X)$. Allicht treden de enige interessante gevallen op als de graad van X even is: anders geldt er immers

$$\text{grd}(X^3 - Y^2) \geq \text{grd}(X^3).$$

In tegenstelling tot wat de eerste indruk doet vermoeden, is deze variant van het probleem gemakkelijker dan het origineel. Dat komt omdat polynomen de fijne eigenschap hebben dat ze gedifferentieerd kunnen worden. Voor de graad van polynomen valt nu de sterke variant van het Hallvermoeden te bewijzen:

Propositie. Laat X en Y polynomen zijn met $\text{grd}(X) = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Als we stellen $K = X^3 - Y^2$, dan hebben we ofwel $K = 0$ ofwel $\text{grd}(K) \geq m + 1$.

Deze propositie kan op diverse manieren worden bewezen. Lezers die bekend zijn met algebraïsche topologie of complexe analyse, kunnen de Riemann-Hurwitz-formule toepassen op de rationale functie X^3/K . Een elementairder bewijs kan verkregen worden door de ABC-stelling voor polynomen toe te passen:

Stelling. Laten coprieme polynomen A, B, C gegeven zijn, met $A + B = C$. Beschouw $\text{Rad}(ABC)$, het product van de verschillende factoren in de lineaire ontbinding van ABC . Dan geldt

$$\max(\text{grd}(A), \text{grd}(B), \text{grd}(C)) \leq \text{grd}(\text{Rad}(ABC)) - 1.$$

In feite is deze stelling ook een gevolg van de Riemann-Hurwitz-formule. De stelling komt erop neer dat de som van twee coprieme polynomen die heel veel machten bevatten, zelf niet al te veel machten bevat. Voor een bewijs van deze formule verwijzen we naar [1]. Met deze stelling volgt onze propositie door te nemen

$$A = X^3/\text{ggd}(X, Y),$$

$$B = Y^2/\text{ggd}(X, Y),$$

$$C = K/\text{ggd}(X, Y).$$

De ABC-stelling heeft een analogon in de getaltheorie: het *abc*-vermoeden. De zwakke variant van het Hallvermoeden valt hieruit te bewijzen. Het *abc*-vermoeden is echter nog steeds niet bewezen; het is een Heilige Graal van de huidige wiskunde. Voor een goed relaas over dit vermoeden verwijzen we weer naar [1].

Laten we nog even opmerken dat het echt nodig is om in karakteristiek nul te werken: anders is de propositie simpelweg niet waar. In karakteristiek 2 geldt bijvoorbeeld

$$(z^2)^3 - (z^3 + 1)^2 = 1,$$

en in karakteristiek 3 hebben we

$$(z^2 + 1)^3 - (z^3)^2 = 1.$$

Andere polynomen substitueren voor z geeft natuurlijk nog meer tegenvoorbeelden. We weten niet of er in karakteristiek > 3 ook tegenvoorbeelden zijn, maar het lijkt niet onredelijk om dit te veronderstellen.

Van meetkunde naar getaltheorie

We zouden graag iets substantieels zeggen over de Hallvermoedens zonder het *abc*-vermoeden te gebruiken. Misschien kan dit door een omweg te nemen via de eerder genoemde meetkunde. Stel dat X, Y en K alle coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ hebben, en dat $K \neq 0$, $\text{grd}(X) = 2m$ (we kijken dus alleen naar interessante gevallen). Dan zijn voor $n \in \mathbb{Z}$ de getallen $X(n)$, $Y(n)$ en $K(n)$ alle geheel, en natuurlijk is $(X(n), Y(n), K(n))$ dan een oplossing voor de getaltheoretische Hallvergelijking. We willen dat $K(n)$ klein is in verhouding tot $X(n)$. De meest natuurlijke manier om dit voor elkaar te krijgen is om te eisen dat $\text{grd}(K)$ klein is vergeleken met $\text{grd}(X)$. We weten zeker dat er moet gelden $\text{grd}(K) \geq m + 1$, dus laten we kijken naar het extreme met $\text{grd}(K) = m + 1$.

Definitie. Een tripel (X, Y, K) van polynomen in $\mathbb{C}[z]$ heet een polynomiaal Halltripel van type m als er geldt

$$X^3 - Y^2 = K,$$

$$\text{grd}(X) = 2m, \text{grd}(Y) = 3m, \text{grd}(K) = m + 1.$$

Shioda ([4]) noemt zulke tripels Davenport-Stotherstripels, naar de eerste wiskundigen die ze uitgebreid onderzocht hebben.

Natuurlijk kunnen we gegeven een polynomiale Halltripel (X, Y, Z) oneindig veel polynomiale Halltripels construeren door de coördinaten te transformeren. Deze verschillen echter niet wezenlijk van het oorspronkelijke Halltripel, en we beschouwen ze dan ook als equivalent. Oftewel:

Voorbeelden van polynomiale Halltripels

Om ruimte te besparen beperken we ons tot het geven van alleen X en K . Voor $m \leq 4$ weten we dat onze tripels op equivalentie na de enige zijn (zie het artikel).

$$m = 1 : X = 4z^2 + 1, K = 1 + 3z^2.$$

$$m = 2 : X = z^4 + 4z, K = -8z^3 - 36.$$

$$m = 3 : X = z^6 + 4z^4 + 10z^2 + 6,$$

$$K = \frac{27}{4}(4z^4 + 13z^2 + 32).$$

$$m = 4 : X = z^8 - 2z^7 + 7z^6 - 6z^5 + 11z^4 + 4z^3 + 12z + 1,$$

$$K = \frac{-27}{4}(4z^5 - 5z^4 + 18z^3 - 3z^2 + 14z + 31).$$

Helaas geven deze geen interessante oplossingen van de getaltheoretische Hallvergelijking. Voor $m = 5$ is het volgende Halltripel (gevonden door Birch) wél interessant:

$$X = \frac{1}{9}(z^{10} + 6z^7 + 15z^4 + 12z),$$

$$K = -\frac{1}{108}(3z^6 + 14z^3 + 27).$$

Coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ worden in deze oplossing verkregen door $6z + 3$ voor z te substitueren. Dan worden de coëfficiënten echter nogal groot, dus in plaats daarvan kijken we naar $P(n)$ voor $n \equiv 3 \pmod{6}$. Het blijkt voor $n = -9, -3, 3, 9$ we vier interessante oplossingen van de getaltheoretische Hallvergelijking, met $|k|/\sqrt{|x|}$ gelijk aan respectievelijk 0.75, 0.23, 0.27 en 0.75.

Het Birchpolynoom correspondeert met het dessin voor $m = 5$ met de meeste symmetrie (zie rechterhelft figuur 1, links-boven).

Definitie. Twee Halltripels (X_1, Y_1, K_1) en (X_2, Y_2, K_2) heten equivalent als er constanten $u, w \in \mathbb{C}^*$, $v \in \mathbb{C}$ bestaan zo, dat $X_2(z) = w^2 X_1(uz + v)$, $Y_2(z) = w^3 Y_1(uz + v)$, en $K_2(z) = w^6 K_1(uz + v)$.

Merk op dat zelfs als we een polynomiaal Halltripel (X, Y, K) beschouwen, er nog steeds maar eindig veel $n \in \mathbb{Z}$ zijn met de eigenschap dat $|K(n)| < \sqrt{|X(n)|}$. Immers, door de voorwaarden op de graad zien we dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |K(n)|/\sqrt{|X(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |n|^{m+1}/\sqrt{|n|^{2m}} = \infty.$$

Er is dus geen enkele kans op het vinden van veel interessante getaltheoretische Halltripels met één vast polynomiaal Halltripel. Toch zijn er vaak wel een paar interessante waarden (zie het kader). Er dringen zich nu de volgende vragen op:

- Is er een systematische manier is om een oneindige rij polynomiale Halltripels te bepalen?
- Is het mogelijk om, gegeven een polynomiaal Halltripel in die rij, systematisch een 'goed' getaltheoretisch Halltripel te destilleren?

Als het antwoord op deze vragen bevestigend luidt, dan zouden we misschien een oneindige rij tripels kunnen construeren dat een tegenvoorbeeld vormt voor één van de Hallvermoedens.

Het antwoord op onze vragen lijkt helaas ontkennend te moeten luiden. Het expliciet verkrijgen van polynomiale Halltripels is een vrij lastige aangelegenheid, en er lijkt geen manier te zijn om de Halltripels van type $m + 1$ snel te bepalen gegeven de Halltripels van type kleiner dan $m + 1$. Daardoor kunnen we ook niet systematisch 'goede' gehele waarden voor polynomiale Halltripels vinden. Er speelt ook nog een andere kwestie: om veel gehele waarden te krijgen is het op zijn minst wenselijk dat het polynomiale Halltripel coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ heeft. Zoals beschreven in [5], blijkt dit niet vaak het geval te zijn. Voor $m = 1, 2, 3, 4$ hebben alle equivalentieklassen van tripels een representant met coëfficiënten in $\mathbb{Z}$. Er zijn ook zulke klassen voor $m = 5$, maar het lijkt erop dat bijvoorbeeld voor $m = 6, \dots, 11$ er geen klassen zijn met representanten die coëfficiënten in $\mathbb{Z}$ hebben.

Polynomiale Halltripels zijn echter op zich al interessant: zoals we zullen zien bevinden ze zich op een belangrijk kruispunt van verschillende wiskundige takken. Bovendien is er één stukje informatie dat we wél kunnen verkrijgen, namelijk het aantal equivalentieklassen van tripels van vast type m .

Dessins d'enfants

We gaan het verband bekijken tussen onze Halltripels en een andere klasse wiskundige objecten die naar Grothendieck *dessins d'enfants* of *kindertekeningen* worden genoemd. Het verband is als volgt. Een snelle berekening toont aan dat, gegeven een Halltripel (X, Y, K) , de rationale functie

$$f = X^3/K = 1 + Y^2/K$$

de eigenschap heeft dat

$$f'(z) = 0 \Rightarrow X = 0,$$

of

$$Y = 0 \Rightarrow f(z) \in \{0, 1\}.$$

Een functie met deze eigenschap heet een Belyi-afbeelding. Beschouw nu het inverse beeld in $\mathbb{C}$ van het interval $[0, 1]$ onder f . Dit is een samenhangende graaf in het vlak. De punten die afbeelden naar 0 (ook wel 0-vertices genoemd) markeren we met een open stip, en de punten die afbeelden naar 1 (de 1-vertices) markeren we met een gesloten stip. Met deze markeringen wordt ons inverse beeld een speciaal soort gemarkeerde graaf, dat een dessin d'enfant genoemd wordt. Een uitgebreide inleiding tot dessins is [6], maar deze is van nogal hoog technisch niveau; een toegankelijker inleiding is [7].

Het valt na te gaan dat in het extreme geval van Halltripels geldt dat X, Y en K geen meervoudige nulpunten hebben. Dit betekent dat in 0-vertices f tot de derde macht verdwijnt, want daar geldt $f = X^3/K = 0$. In termen van het dessin betekent dit dat er in 0-vertices steeds drie zijden samenkomen. Op een zelfde manier valt te zien dat

$$f - 1 = X^3/K - 1 = 1 + Y^2/K - 1 = Y^2/K$$

tot de tweede macht verdwijnt in een 1-vertex, waardoor er in de 1-vertices steeds twee zijden samenkomen. De nulpunten van K

blijken door het dessin te worden ingesloten in celletjes die snel kleiner worden naarmate m groter wordt. Door de graad van X , Y en K te beschouwen valt te zien dat het dessin dat bij een Halltripel van type m hoort, $2m$ stuks 0-vertices en $3m$ stuks 1-vertices (dus $3m$ zijden) bevat, en dat het $m + 1$ celletjes insluit. Zo'n dessin noemen we een *Halldessin* van type m .

We hebben nu de volgende opmerkelijke omkering:

Stelling. *Met elk Halldessin correspondeert een rationale functie X^3/K met $\text{grd}(X) = 2m$, $\text{grd}(K) = m + 1$ die dat dessin levert. Deze functie is op equivalentie na uniek bepaald.*

Op dit punt zal de lezer ons moeten vertrouwen. De stelling is niet extreem moeilijk om te bewijzen, maar er moet een nogal uitgebreide en technische reis door de wiskunde voor gemaakt worden. Het idee is dat de kindertekening een vertakte overdekking van de Riemannbol specificeert, die de 0-vertices naar 0 stuurt, de 1-vertices naar 1, de zijden naar $(0, 1)$, en de open cellen naar de rest van de Riemannbol liften, wordt deze overdekking precies de rationale functie die we zoeken.

Wij volstaan met het geven van een heuristisch argument voor de eindigheid van het aantal polynomiale Halltripels. Definieer de volgende variabelen:

$$X = a(z - p_1) \cdots (z - p_{2m}),$$

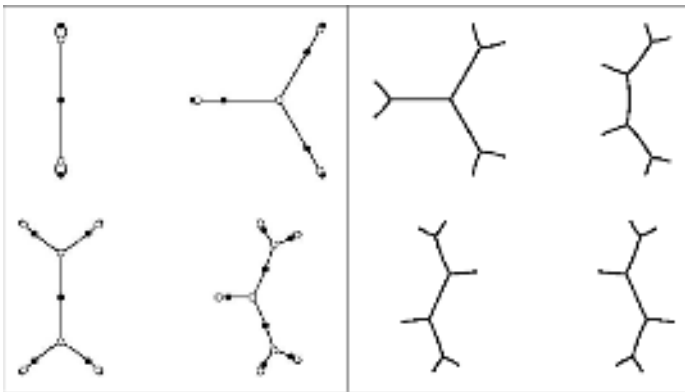
$$Y = b(z - q_1) \cdots (z - q_{3m}),$$

$$K = c(z - r_1) \cdots (z - r_{m+1}).$$

In totaal hebben we $6m + 4$ parameters. We willen dat

$$X^3 - Y^2 = K.$$

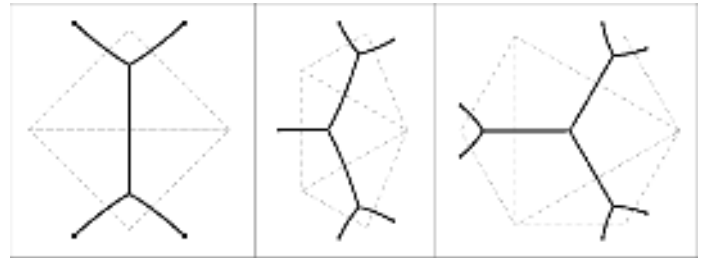
Deze vergelijking levert $6m + 1$ eisen op de parameters. Er blijven er 3 over, en die worden geëlimineerd door de equivalentie.



Figuur 1 Links de dessins voor $m = 1, \dots, 4$, rechts de vier dessins voor $m = 5$, weergegeven als boom

Het begrip equivalentie transformeert als volgt onder de reis van polynomiale Halltripels naar dessins: twee tripels zijn equivalent precies als hun kindertekeningen in elkaar vervormd kunnen worden door een oriëntatie-bewarende deformering van het vlak (dus spiegelingen zijn niet toegestaan). Dit betekent een equivalentieklasse van Halltripels ook opgevat kan worden als een deformatieklasse van een Halldessin. Door dit opmerkelijke verband tussen meetkunde en combinatoriek dat dessins ons ver-

schaffen, wordt het tellen van polynomiale Halltripels aanzienlijk gemakkelijker. Zo valt bijvoorbeeld aan de plaatjes te zien dat er maar één zo'n deformatieklasse is voor $m = 1, \dots, 4$, dus kan er ook maar één equivalentieklasse van Halltripels van die types zijn. Voor $m = 5$ krijgen we vier deformatieklassen. Één van die klassen is de spiegeling van een andere. Omdat complexe conjugatie het vlak spiegelt gaan de corresponderende Halltripels door complexe conjugatie in elkaar over.



Figuur 2 Links het duale dessin voor $m = 3$, in het midden het duale dessin voor $m = 4$, rechts het meest symmetrische duale dessin voor $m = 5$

De toegevoegde plaatjes zijn de daadwerkelijke inverse beelden van $[0, 1]$ onder de rationale functies X^3/K die bij de oplossingen in het kader horen. De grootte van de celletjes neemt drastisch af met m : de stippen die de vertices markeren begin elkaar zelfs te overlappen. Dit suggereert een nieuwe manier om zulke dessins weer te geven. Hiervoor beginnen we met ons dessin, maar we verwijderen de markeringen en knippen de celletjes eraf. Zo krijgen we een boom met $m + 1$ eindpunten en $m - 1$ interne punten waar steeds 3 zijden samenkomen. Laten we zo'n boom een *Hallboom* noemen (van type m). Uit een Hallboom kunnen we het Halldessin reconstrueren door aan elk eindpunt een celletje vast te maken, de punten waar drie zijden samenkomen, met een open stip te markeren, en de zijden met een gesloten stip te markeren. Dus er is een bijectieve correspondentie tussen equivalentieklassen van polynomiale Halltripels van type m en deformatieklassen van Hallbomen van type m . Die laatste verzameling heeft een veel betere combinatorische structuur. Zo is het bijvoorbeeld, in tegenstelling tot het eerdere geval met Halltripels, nu wel duidelijk hoe we de Hallbomen van type $m + 1$ kunnen construeren gegeven de Hallbomen van type m : dit gaat simpelweg door het lijmen van de Hallboom van type 2 aan de uiteinden van de Hallbomen van type m . Het is daarom eenvoudiger om het aantal Hallbomen te berekenen. We kunnen echter nog één laatste versimpeling bereiken, namelijk door *duale dessins* te beschouwen.

Duale Halldessins

Uit een Hallboom zoals boven beschouwd kunnen we een nieuw dessin construeren, dat we het *duale Halldessin* zullen noemen. Hiervoor denken we eerst een lange lus om de boom die alle eindpunten raakt. De Hallboom verdeelt de binnenkant van deze lus nu in $m + 1$ delen. We tekenen nu een open stip in elk deel van de binnenkant en een gesloten stip op elke zijde van de oorspronkelijke boom. Dan verbinden we elke open stip met de gesloten stippen die op de rand liggen van het deel van de binnenkant waar de open stip zich in bevindt. Dit is ons duale dessin. Het dient opgemerkt te worden dat deze definitie van duaal dessin niet geheel natuurlijk is: een fatsoenlijk duaal dessin had natuurlijk direct uit het oorspronkelijke Halldessin geconstrueerd moeten worden, en

niet uit de Hallboom die een verminking van dat dessin is. In ons speciale geval is het echter veel inzichtelijker om op onze manier te werk te gaan. We zien namelijk dat we met deze constructie een triangulatie verkrijgen van een convexe $(m+1)$ -hoek bestaande uit $m-1$ driehoeken. Uit deze triangulatie valt de Hallboom (op deforming na) terug te vinden door een punt te tekenen in elke driehoek van de triangulatie en deze punten te verbinden met de gesloten punten op de zijden van die driehoek. Een paar plaatjes zijn bijgevoegd.

We zien dus dat het aantal deformatieklassen van Hallbomen gelijk is aan het aantal triangulaties van een convexe $(m+1)$ -hoek in $m-1$ driehoeken. Dit getal (noem het $D(m)$) is door Brown expliciet bepaald ([8]). Het kan ook worden gevonden in de *Encyclopedia of Integer Sequences* ([9]). Een formule is

$$D(m) = \frac{1}{m+1}C(m-1) + \frac{1}{2}C\left(\frac{m-1}{3}\right) + \frac{2}{3}C\left(\frac{m-2}{3}\right).$$

Hier is $C(x)$ het x -de Catalan-getal

$$\frac{1}{x+1} \binom{2x}{x}$$

als x geheel is, en anders is het 0. De rij

$$\{D(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$$

begint als volgt:

$$1, 1, 1, 1, 4, 6, 19, 49, 150, 442, 1424, \\ 4522, 14924, 49536, 167367, 570285, \dots$$

Samengevat:

Stelling. Een expliciete formule voor het aantal equivalentieklassen van Halltripels van type m , het aantal deformeringsklassen van Hallbomen van type m , en het aantal triangulaties van een convexe $(m+1)$ -hoek in $m-1$ driehoeken wordt gegeven door $D(m)$.

Deze opmerkelijke formule is maar een van de resultaten die mogelijk worden gemaakt door het expliciete verband tussen meetkunde en combinatoriek dat gevormd wordt door dessins. Grothendieck's eigen beschrijving van hun deugden in zijn *Esquisse d'un Programme* (zie [10]) is in dit verband aardig om te lezen. ↵

Referenties

- 1 F. Beukers, *Getaltheorie voor Beginners*, Epsilon, 1999.
- 2 N. Elkies, *Rational Points near curves and small nonzero $|x^3 - y^2|$ via lattice reduction*, Proc. ANTS-IV (2000), pp. 33-63.
- 3 www.iec.csic.es/ismael/hall.htm.
- 4 T. Shioda, *Elliptic Surfaces and Davenport-Stothers Triples*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 54 (2005), pp. 49-68.
- 5 J.C.M. Montanus, *Polynomial solutions of the equation $x^3 - y^2 = k$* , verslag in Project LIO, NWO (2004).
- 6 J. Oesterlé, *Dessins d'enfants*, Séminaire Bourbaki, Juni 2002.
- 7 L. Zapponi, *What is a dessin d'enfant?*, Not. AMS 50 (2003), pp. 788-789.
- 8 W. G. Brown, *Enumeration of triangulations of the disk*, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), pp. 746-768.
- 9 <http://www.research.att.com/njas/sequences/>.
- 10 L. Schneps and P. Lochak (ed.), *Geometric Galois Actions 1*, Cambridge University Press, 1997.

Bennie Mols

Kijkduinstraat 121-2

1055 XW Amsterdam

bmols@wanadoo.nl

Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006

Metingen onder druk

Vaak wordt er op de bijeenkomsten van een Studiegroep Wiskunde met de Industrie vanuit het niets een model opgebouwd voor een of andere commerciële toepassing. Hier speelt creativiteit een belangrijke rol en kan een bedrijf een oplossing voorgeschoteld krijgen die buiten de eigen expertise ligt. Minder vaak worden wiskundigen ingezet om een bestaand proces minutieus onder de loep te nemen: waar zit nu toch die fout in de analyse? Wat zien we over het hoofd? Een dergelijk probleem werd aangedragen door het Nederlands Meetinstituut (NMI). Drukmeters moeten steeds nauwkeuriger kunnen meten. Om ze te kalibreren, gebruikt het NMI een zeer precieze zuiger-cilinderdrukstandaard. De methode waarmee deze de druk bepaalt, lijkt eenvoudig, maar er zit een adder onder het gras. Wetenschapsjournalist Bennie Mols schrijft deze bijdrage naar aanleiding van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006.

Metten is weten. Je moet dan echter wel weten dat je nauwkeurig meet: je wilt kunnen vertrouwen op je meetapparaat. Een horloge gaat na verloop van tijd verkeerd lopen: zo kun je gemakkelijk je trein missen. Als je een kilogram kaas koopt, wil je er van op aan kunnen dat de weegschaal van de kaasboer je niet bedriegt en als je vloerbedekking voor je woonkamer koopt, wil je wel dat je kunt vertrouwen op de maatlat waarmee je je woonkamer opmeet. Lengte, tijd en gewicht zijn belangrijke meetgrootheden.

Een andere belangrijke meetgrootte is de druk. Druk is de kracht op een oppervlak gedeeld door de grootte van het oppervlak. Neem bijvoorbeeld de luchtdruk. Lucht heeft een bepaald gewicht en dat drukt op een oppervlak. De trommelvliezen in je oren merken dat wanneer je bijvoorbeeld met een kabelbaan in de bergen omhoog of omlaag gaat. Hoe hoger in de bergen, hoe lager de luchtdruk. Een typische waarde van de luchtdruk in Nederland is duizend *hectoPascal*, wat weer gelijk is aan duizend *millibar*.

Drukmetingen spelen een belangrijke rol in het voorspellen van het weer, in de luchtvaart, maar ook in industriële processen. Industrieën automatiseren steeds meer van hun processen en gebruiken automatische drukmeters om die processen te controleren en te

regelen. Die drukmeters moeten nauwkeurig en stabiel zijn. Afhankelijk van de toepassing, wordt er bijvoorbeeld gebruik gemaakt van barometers (voor de luchtdruk), manometers (bijvoorbeeld op een fietspomp), drukbalansen, digitale drukmeters of vacuümmeters. Een perfect vacuüm bestaat niet, dus er is altijd wel enige druk, hoe klein ook.

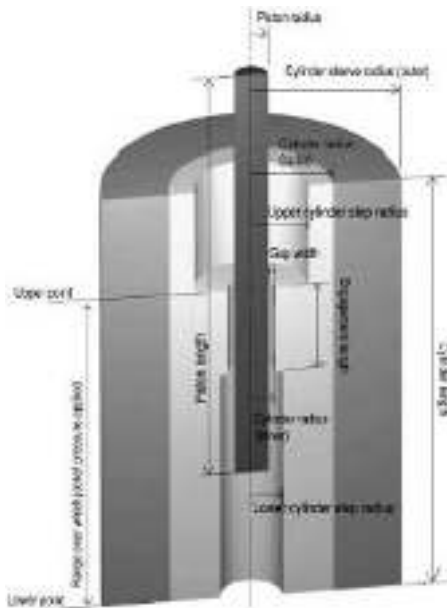
Als een bedrijf of instelling in Nederland wil weten hoe nauwkeurig en betrouwbaar zijn meetapparaat is, dan kan het zijn meetapparaat laten controleren door het Nederlands Meetinstituut (NMI) in Delft. Jos Verbeek van het NMI: "Wij kalibreren het meetapparaat en geven een certificaat af waarop staat hoe betrouwbaar het meetapparaat is, wat de afwijkingen zijn. De klant kan daar vervolgens voor corrigeren."

Diverse Europese landen hebben ieder hun eigen nationale meetinstituut. Om drukmeters van klanten te kalibreren, gebruiken ze ieder hun eigen nauwkeurige drukmeters. De Europese organisatie van verzamelde nationale meetinstituten, EUROMET, kwam met het idee om de drukstandaarden van zes van die Europese instituten (Duitsland, Frankrijk, Italië, Turkije, Slowakije en Nederland) te vergelijken. Ieder instituut bleek een iets andere methode te gebruiken om de druk van hun drukstandaarden te bepalen. Verbeek: "Wij

willen graag weten wat de verschillen zijn tussen die methoden en of we onze eigen methode kunnen verbeteren."

Zuiger gefopt

De drukstandaarden die de meetinstituten wilden vergelijken, bestaan uit een zuiger die in een cilinder schuift. De cilinder is gevuld met een gas of een vloeistof. Voor de meting van relatief kleine drukken wordt een gas gebruikt. Dan gaat het meestal om droge lucht, stikstof of helium. Voor de meting van relatief hoge drukken wordt een vloeistof gebruikt. Een vloeistof laat zich immers moeilijk samendrukken, waardoor al snel een grote druk wordt opgebouwd onder de zuiger. Als vloeistof wordt meestal olie gebruikt. De druk wordt bepaald door een bekende massa te plaatsen op de zuiger. De druk is dan de kracht die op het zuigeroppervlak werkt gedeeld door het zuigeroppervlak. In de ideale wereld lijkt dat een fluitje van een cent. Maar in de praktijk zit er altijd een smalle opening tussen zuiger en cilinder. Als de zuiger omlaag wordt gedrukt, stroomt er een beetje gas of vloeistof door die opening omhoog. Zo wordt de zuiger meer tegengewerkt dan alleen door het gas of de vloeistof die onder de zuiger zit. Het probleem is nu om een goede methode te verzinnen die bij een gegeven massa op de zuiger, op de nauwkeurigste manier de druk berekent. De druk die de drukstandaard bepaalt, wordt door de extra tegenwerking van het gas of de vloeistof in de smalle opening iets groter dan de druk van alleen het gas of de vloeistof onder het zuigeroppervlak. De druk die je echt wilt weten is dus iets kleiner dan de druk die je zou verwachten op grond van het gewicht van de zuiger die erop drijft. Daarvoor moet je het meetapparaat corrigeren. Omdat de druk wordt be-



Figuur 1 Het zuiger-cilindersysteem schematisch weergegeven

rekend als de kracht op de zuiger gedeeld door het zuigeroppervlak, kun je de echte druk berekenen door een iets groter zuigeroppervlak aan te nemen. Dat heet een effectief zuigeroppervlak. De uitdaging is nu om een goede formule op te stellen die dat effectief zuigeroppervlak berekent. Om dat uit te zoeken leverde het NMI aan de wiskundigen van de Studiegroep een serie meetdata, inclusief de bijbehorende meetfouten, van de zes Europese instituten die aan het vergelijkingsproject meededen.

Scheve stukken

De wiskundigen onderzochten allereerst in hoeverre de zes methoden van zes Europese meetinstituten van elkaar verschillen. “Het bleek dat vijf van de zes methoden weliswaar een iets andere formule gebruiken, maar dat ze in essentie hetzelfde achterliggende natuurkundige model gebruiken om het effectieve oppervlak te berekenen”, vertelt wiskundige Jan Draisma van de TU Eindhoven. “Het NMI-model bleek af te wijken van de andere modellen. We zijn toen gaan uitzoeken waar dat aan lag en welke gevolgen dat heeft.”

Het NMI-model meet op dertien hoogten de diameter van de zuiger en de cilinder met een nauwkeurigheid van vijftig nanometer (een nanometer is een miljoenste millimeter, ofwel een miljardste meter). Daaruit volgt dan de grootte van het bijbehorende oppervlak. De cilinder is natuurlijk overal ietsje breder dan de zuiger, maar allebei zullen ze niet op elke hoogte even breed zijn, want in de echte wereld bestaat geen perfectie. Op elke hoogte bepaalt het NMI dan een ge-

middelde. Het effectieve oppervlak berekenen ze door het gemiddelde van al die gemiddelden te berekenen. Intuïtief is dat een prima methode. Er zit echter een gemene ader onder het gras. Omdat cilinder en zuiger niet perfect glad zijn, stroomt het gas of de vloeistof in de tussenopening zo nu en dan langs een scheef oppervlak. Draisma: “De NMI-methode blijkt subtiele effecten hiervan niet in de formule mee te nemen. Om dat wel te doen, is het nodig om met een wiskundige vergelijking de stroming van het gas of de vloeistof door de nauwe opening uit te rekenen. Hieruit volgt dan de extra druk die deze stroming op de zuiger veroorzaakt. Het blijkt belangrijk om rekening te houden met de druk die het gas of de vloeistof uitoefenen op de stukken zuiger en cilinder die een beetje scheef staan. En die stukken zijn er altijd in de niet-perfekte wereld.”

Daaruit kan dan het effectieve zuigeroppervlak worden berekend. Bij een perfecte zuiger en cilinder reikt het effectieve oppervlak tot het midden van de opening. Maar in werkelijkheid zal dat niet het geval zijn. Waar de andere vijf Europese meetinstituten dit effect wel meenemen, doet het NMI dit niet. Dat verklaart de verschillen tussen de NMI-resultaten en die van de andere instituten. “Wij bevelen het NMI daarom ook aan om een methode te gebruiken die dat stromingseffect wel helemaal meeneemt”, zegt Draisma. Een tweede belangrijke aanbeveling zit in een betere methode om aan te geven hoe betrouwbaar de drukmeting is. Een meting gebeurt immers altijd met een bepaalde onnauwkeurigheid. De druk is bijvoorbeeld 1000 millibar ± 1 millibar. Een professioneel meetinstrument geeft altijd een specificatie voor de meetnauwkeurigheid.

Draisma: “Tot nu toe beschouwde het NMI de afwijkingen die ze op de dertien hoogten

meten voor de diameters van cilinder en zuiger als meetfouten. Maar dat zijn ze niet. Het blijkt namelijk dat je de diameters veel preciezer kunt meten, dan dat de fabrikant de zuiger en de cilinder kan maken. Dat inzicht hebben we gebruikt om een nauwkeuriger foutinterval te bepalen.”

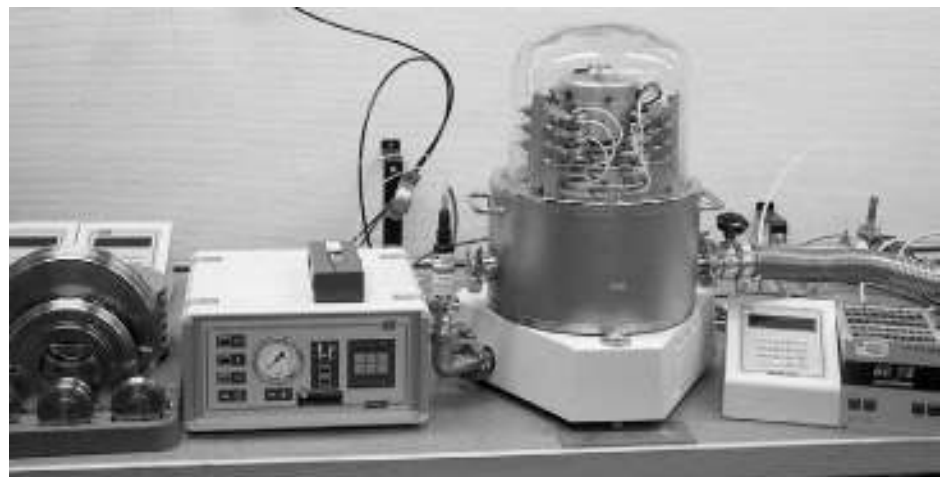
Wereldrecord drukmeting

Jos Verbeek van het NMI is tevreden met de resultaten. “We nemen de aanbevelingen van de wiskundigen zeker over. Bovendien laten we een afstudeerstudent wiskunde zich verder buigen over dit complexe meetprobleem. Het laatste woord over de wiskundige aanpak ervan is nog niet gezegd.”

Hoe nauwkeurig doen de drukmeters van de meetinstituten het? “Het wereldrecord nauwkeurige drukmeting ligt momenteel op 0,0005%, aldus Verbeek. En dat is ake- lig nauwkeurig. Het doel is zelfs om naar 0,0001% te gaan. Maar dan zijn we zeker tien jaar verder. Bij het NMI halen we nauwkeurigheden tussen 0,003% en 1%, afhankelijk van de toepassing. Die 1% geldt bijvoorbeeld voor vacuümmetingen.”

Het zuiger-cilindersysteem dat de wiskundigen bestudeerden, haalt een nauwkeurigheid van 0,0004 tot 0,07 millibar of hectoPascal. Deze nauwkeurigheden zijn nodig voor het kalibreren van drukmeters uit industriële processen. Bij vacuümmetingen liggen de nauwkeurigheden in de orde van 10^{-8} tot 10^{-10} millibar of hectoPascal, maar die metingen gebeuren met andere apparatuur. Bij het meten van hele hoge drukken, speelt trouwens weer een heel ander probleem. Dan gaan zuiger en cilinder door de hoge druk zelf een beetje vervormen. Ook dat effect moet dan weer worden meegenomen.

Metten is niet automatisch weten. Goed meten leidt in elk geval wel tot meer weten. 



De NMI-opstelling met de zuiger-cilinderdrukstandaard

Bastiaan Willink

Laan van Meerdervoort 1068

2564 AX Den Haag

willinkb@xs4all.nl

Geschiedenis De samenwerking tussen Korteweg en De Vries

Een speurtocht naar persoonlijkheden¹

De namen Korteweg en De Vries zijn door de jaren heen vast met elkaar verbonden. De vergelijking die hun naam draagt speelt een fundamentele rol in de ontwikkeling van de theorie van niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. Hoe kwamen het proefschrift van De Vries en het Korteweg-de Vries-artikel tot stand? Bastiaan Willink, ver familielid van beide wiskundigen, deed er onderzoek naar. Dit artikel is gebaseerd op een lezing, gehouden door de auteur op het aan Korteweg en De Vries gewijde symposium aan de Universiteit van Amsterdam in september 2003.

Er is sinds de herontdekking door Zabusky en Kruskal in 1965 een uitgebreide literatuur ontstaan over de Korteweg-de Vriesvergelijking (KdV-vergelijking), waarmee het gedrag van lange golven in ondiep water kan worden beschreven. Het is niet de bedoeling van dit artikel om iets toe te voegen aan de discussies over de inhoud van de vergelijking of over de genese van de theorie der niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen. Recent heeft Eduard de Jager daar twee artikelen aan toegevoegd [1]. Eerder hebben Robert Pego en anderen vraagtekens gezet bij de originaliteit van het werk van De Vries en Korteweg, vooral in relatie tot het werk van Boussinesq [2]. De

Jager heeft echter plausibel gemaakt dat, hoewel de KdV-vergelijking na een betrekkelijk eenvoudige substitutie af te leiden is uit een vergelijking van Boussinesq, Korteweg en De Vries vanuit een andere invalshoek dan Boussinesq nieuwe belangrijke resultaten hebben bereikt.

Naast de wiskundige en hydrodynamische aspecten van de discussie over prioriteit en originaliteit zijn er echter andere, historische aspecten. Eerder heeft Ad Maas al geschreven over Korteweg als overgangsfiguur in de wiskundig-academische traditie [3]. In dit artikel wil ik ingaan op de persoonlijke achtergronden van zowel Korteweg als De Vries, die een nieuw licht werpen op de vreemde ontstaansgeschiedenis van De Vries' proefschrift en het KdV-artikel. Terwijl Korteweg bekend staat als een Nederlandse pionier op het gebied van de wetenschappelijke bibliografie en het internationaal publiceren, lijkt er paradoxaal genoeg het een en ander mis te zijn gegaan bij de verwerking van de internationale literatuur door zijn promovendus, Gustav de Vries. Het lijkt ongerijmd dat Korteweg, die een belangrijke rol heeft gespeeld in de professionalisering van de exacte wetenschappen in Nederland, juist een steek zou hebben laten vallen bij de begeleiding van een pro-

movendus, een essentieel onderdeel van het vak van hoogleraar. Dat Korteweg en De Vries echter mensen van vlees en bloed waren, zal blijken uit hun hieronder volgende levensgeschiedenissen, die de merkwaardige gebeurtenissen rond de promotie begrijpelijker maken.

Eerder publiceerde ik in een voetnoot in mijn boek *De Tweede Gouden Eeuw* al een brief van promotor aan promovendus, die op zijn minst bevreemding wekt [4]. Hij dateert uit oktober 1893, een jaar voor De Vries' promotie op 1 december 1894. Vanwege zijn historisch belang citeer ik hem hier nogmaals:

“Geachte Heer,

Tot mijn spijt kan ik uw dissertatie zoals ze daar ligt niet aannemen. Er is te veel vertaaltwerk in, waar ge Rayleigh of McCowan bijna letterlijk volgt. De opmerkingen en verduidelijkingen die gij zo nu en dan tusschen voegt, maken dit niet goed. De studie van de lectuur van uw onderwerp moet slechts middel zijn om te komen tot eene meer zelfstandige behandeling [‘waarbij U’ is foutief ingevoegd, B.W.] in eigen gekozen bewoordingen en gedachtegang, opgewekt desnoods door de lectuur, maar niet zóó letterlijk nagevolgd. Zijt ge het onderwerp zooverre meester dat ge dit kunt doen, dan zult ge vanzelf ook allicht



Figuur 1 Joseph Boussinesq (1842–1929)

op kwesties stuiten door Rayleigh en McCowan opgeworpen die gelegenheid geven uwe krachten te toonen.

Ten einde U aan de gang te helpen zend ik U de schets eener behandeling van de kwestie van de enkele golf volgens de een weinig gewijzigde methode van Rayleigh [dat punt staat in het uiteindelijke KdV-artikel volgens de aanbiedingsbrief ook centraal, B.W.] [K. zal zien of hij een leidraad kan vinden om aan de hand te doen ter verdere uitwerking [...] Of ik daarin slagen zal kan ik natuurlijk niet weten [...] Voor een historisch overzicht van de theorie der golven, zoudt ge veel meer literatuur moeten raadplegen dan ge gedaan hebt en dat zal in Alkmaar moeilijk zijn [...] Uwe inleiding bevat te uitsluitend zaken die men in handboeken (Lamb en Basset) even goed terugvindt [sic].

Het is natuurlijk voor U eene teleurstelling waar hij meendet reeds bijna aan het einde van uwe taak te zijn ge nog slechts voorarbeid blijkt achter de rug te hebben. Laat U intusschen niet ontmoedigen. Ik wil gaarne mijn best doen om U [op het] paard te helpen [...]”²

Uit een studie van Eduard De Jager naar de bewaarde papieren van De Vries zou blijken dat deze vervolgens grotendeels zelfstandig tot de resultaten in zijn proefschrift is gekomen.³ Daarmee lijkt De Vries meer credits te verdienen dan ik hem in 1998 gegeven heb. Maar het blijft toch wel frappant dat een promotor een jaar voor de promotieplechtigheid een promovendus bekritiseert, omdat hij te weinig eigen ideeën naar voren heeft

gebracht. Op zijn minst moet De Vries na de brief onder grote druk hebben gestaan. De situatie leek me na publicatie van mijn boek zo vreemd dat ik nieuw onderzoek heb gedaan. Het zodoende ontdekte De Vries-archief heeft vervolgens Eduard De Jager mede in staat gesteld De Vries’ verdiensten beter in te schatten. Zelf ben ik op andere feiten en documenten gestuit die begrijpelijker maken waarom juist rond 1894 Korteweg en De Vries onder grote tijdsdruk stonden, waardoor ze in sommige opzichten wel erg haastig te werk gingen.

Wat is er precies gebeurd na Kortewegs brief op poten? En kan er indirect meer duidelijkheid geschapen worden over De Vries’ talent, zodat begrijpelijker wordt dat hij in zijn promotiejaar toch nog tot origineel werk kwam? Heeft hij nog andere dingen gepresteerd? En als dat niet zo was, hoe kon Korteweg De Vries dan zover krijgen dat hij boven zichzelf zou zijn uitgestegen? Ten slotte was het belangrijk boven water te krijgen wat Korteweg en De Vries wisten van het sterk verwante werk van Boussinesq. Omdat zulke feiten vaak spoorloos plegen te verdwijnen geef ik details die enige kleur aanbrengen in de schetsen van twee verschillende persoonlijkheden in gevecht met stress en tijd.

Een duik in de archieven was bij Korteweg zo te nemen, bij De Vries betekende het een speurtocht van een half jaar. Om aan de Kortewegkant van de tunnel te beginnen. Van hem zijn veel papieren bewaard gebleven. Het belangrijkste is zijn wetenschappelijke archief in de universiteitsbibliotheek van de Universiteit van Amsterdam.⁴ Wat kunnen we nu uit dit materiaal over Korteweg in het algemeen en speciaal uit de periode rond 1894 te weten komen? Het beeld is tamelijk compleet. Ik zal proberen een wat uitvoeriger indruk te geven van de mens Korteweg, zodat zijn reacties op de promotieperikelen in 1893–1895 beter kunnen worden begrepen.

Het leven van Korteweg

Diederik Korteweg was de oudste zoon in een gezin met zes kinderen, vijf jongens en een meisje. Zijn vader was een niet-katholieke arrondissementsrechter uit Den Bosch: het gezin verkeerde daardoor in een wat geïsoleerde positie. Het doet wat denken aan zijn leeftijdsgenoot, de vader van Van Gogh, die dominee was in Nuenen. Misschien dat die positie Kortewegs vader er mede toe bracht om vrijmetselaar te worden, een onder vooruitstrevende burgers in die tijd niet ongebruikelijke stap.⁵ In die wereld heeft hij zijn echte carrière gemaakt. Hij bracht het tot lid van

het Nederlands hoofdbestuur onder prins Frederik, de broer van koning Willem II, en van internationale arbitragecommissies.⁶ De onafhankelijke en internationale instelling van vader Korteweg heeft hij over kunnen brengen op zijn zonen. Ik heb niets kunnen vinden over het vrijmetselaarschap van een van zijn zonen. Die waren allemaal van het niet-gelovige en meer of minder linksliberale type. Mogelijk waren ze als wetenschappers niet zo gecharmeerd van de semi-religieuze aspecten van de beweging. Van Died is bekend dat hij een rol speelde in het Amsterdamse liberalisme en dat hij Multatuli financieel heeft gesteund. De op een na oudste, Bastiaan, had ook een relatie tot Multatuli. Hij was getrouwd met Elize Baart die gespeeld had in de première van Multatuli’s toneelstuk *Vorstenschool*. Hij ging in de politiek verder dan Died en werd socialist. Toen hij begon te wanhopen aan de toekomst pleegde hij samen met zijn vrouw in 1879 zelfmoord, een ramp die de landelijke pers haalde, maar vooral de familie hard heeft geraakt. De schrijver Jeroen Brouwers heeft er een boekje aan gewijd.⁷

De derde broer, Johan, werd hoogleraar chirurgie en zijn vierde broer Piet een belangrijk malariaonderzoeker.⁸ Volgens mij, maar Brouwers vond dat teveel gespeculeer, was een nevenoorzaak van de zelfmoord van broer Bastiaan de bijzonder competitieve sfeer die tussen de broers heerste. Ze gaven elkaar als studenten raadsels op in hun eigen vakgebied, zodat ze allemaal gedwongen werden ook andere vakken te bestuderen.⁹ Bas was ook wiskundige en had zijn baan als docent aan de Koninklijke Militaire Academie in Breda te danken aan Diederik, maar hij kon niet komen tot eigen onderzoek. We zullen straks zien dat er een vergelijkbare situatie was bij de eveneens fatsoenlijk-burgerlijke familie De Vries.

Korteweg was dus agnost, liberaal en opgevoed in een gezin waar gepresteerd moest worden. Het is een beetje vreemd dat hij een betrekkelijk grillige studietijd heeft gehad. Hij kreeg eerst lager onderwijs op een instituut Berman in Den Bosch en daarna privélessen van de latere schoolopziener Ringeling. Pas in september 1865 ging hij naar de Polytechnische School in Delft, die in de wet van 1863 onder het Middelbaar Onderwijs was gerangschikt. In Delft vond hij de studie te praktisch en onwetenschappelijk. Na een MO-examen werd hij in 1869 op zijn enentwintigste leraar aan de HBS in Tilburg en vervolgens in Breda, en ging hij door met de wiskundestudie in zijn vrije tijd. Pas op zijn achtentwintigste deed hij in 1876 universitair toelatingsexamen in

Utrecht. Toen Diederik in april 1877 in Utrecht kandidaats deed was dat een maand voor zijn drie jaar jongere broer Johan promoveerde in de medicijnen.¹⁰ Maar al vanaf 1877 assisteerde Diederik Korteweg de natuurkundige Van der Waals bij wiskundige problemen. Snel daarna op 31 januari 1878 deed hij cum laude doctoraal in Amsterdam. Hij moet toen al ver gevorderd zijn geweest met zijn proefschrift over de voortplantingssnelheid van golven in elastische buizen, want hij promoveerde hetzelfde jaar op 12 juli als eerste promovendus van de Universiteit van Amsterdam. Hij heeft daarbij naar eigen zeggen veel hulp gehad van professor Van den Berg uit Leiden.¹¹ Twee weken na zijn promotie trouwde hij met een barones d'Aulnis de Bourouill, op het eerste gezicht een voorbeeld van 'omhoog trouwen', maar de d'Aulnissen waren niet zo statusgevoelig en de broer van Bientje d'Aulnis was de pionier van de wiskundige economie in Nederland. Tot hun teleurstelling kreeg het echtpaar geen kinderen.

We kijken nog eens naar Diederik Kortewegs carrière. Verbazend, zo'n trage en dan opeens flitsende loopbaan: in 1876 toelatingsexamen, in 1877 kandidaats en meteen assistent, in 1878 doctoraal en promotie. In 1881 werd Korteweg hoogleraar.¹² Het thema 'concurrerende broers' speelde naast het streven naar een hoogleraarschap een rol bij de sterke prestatiedrang, zoals dat ook het geval was bij De Vries en later bij Brouwer, bij de laatste vooral ten opzichte van zijn neven. Na Kortewegs benoeming in 1881 gaf hij colleges in wiskunde, mechanica en sterrenkunde. Dat deed hij nauwgezet, hij kon studenten heel kritisch tegemoet treden, maar was zeker later ook een vaderfiguur. Naast zijn onderwijs werkte hij, gestimuleerd door Van der Waals, aan zijn wiskundige beschrijving van plooiën in oppervlakken en de toepassing ervan op Van der Waals' theorie over fase-evenwichten in binaire mengsels. De grote artikelen van Korteweg daarover verschenen in 1889 en 1891 en werden onlangs door mevrouw Sengers-Levelt en haar broer herontdekt en in hun historisch verband geplaatst [5]. Naast het werk van P.H. Schoute waren het de eerste wiskundige artikelen van internationaal belang in de Nederlandse Tweede Gouden Eeuw. Terecht heeft Ad Maas erop gewezen dat Korteweg in een aantal opzichten beschouwd kan worden als een overgangsfiguur tussen de hoogleraren die rond het midden van de negentiende eeuw nuttige toegepast-wiskundige docenten waren en de echte onderzoekers als Brouwer na 1900.¹³ Toch lijkt Korteweg als wiskundig onderzoeker belang-



Figuur 2 Diederik Korteweg (1848–1941) op 49-jarige leeftijd

rijker dan veel 'professionals' van de generatie na hem.

Wat bij Korteweg treft is met hoeveel energie hij op veel verschillende terreinen aan het werk is geweest en dat hij vrijwel altijd tot resultaten kwam. Hij heeft twintig jaar lang

van 1900 tot 1920 de Huygens-editie gedragen, waar hij ook weer ontdekkingen deed over de invloed van Snellius op Descartes en van deze op Huygens. Intussen ploeterde hij tegelijkertijd op het regionaal bureau voor de *Internationale Catalogus van weten-*



bron: Een Friesch geslacht uit Amsterdam, 1936

Figuur 3 Gustav de Vries (1866–1934)

schappelijke literatuur, waar alle Nederlandse exact-wetenschappelijke artikelen en boeken werden geregistreerd en geïndexeerd. In het proefschrift uit 1982 van Paul Schneiders over de bibliotheek- en documentatiebeweging 1880–1914 komt Kortewegs sisyphus-arbeid uitvoerig ter sprake [6].

De promotie van De Vries

Het eerste bij Korteweg direct relevante feit voor de spanningen rond de promotie van De Vries was het overlijden in 1893 van de stadsarchivaris van Amsterdam, Nicolaas de Roever (1850–1893). Omdat diens echtgenote ook al was overleden werden de drie kinderen, twee meisjes en een jongen, in 1893 of 1894 geadopteerd door Korteweg en zijn vrouw, die zelf dus kinderloos waren en al in de veertig. Dat moet heel wat problemen opgeleverd hebben. Het was ook een klap dat de pleegzoon Arend al in 1896 op zijn 11-de stierf.¹⁴

Een tweede direct voor de promotie van De Vries relevante omstandigheid naast zijn plotselinge pleegvaderschap was dat Korteweg in 1893/'94 rector magnificus was van de Universiteit van Amsterdam en onder meer werkte aan zijn bekende rede Het bloeitijdperk der wiskundige wetenschappen in Nederland, waarin hij vooruitliep op het historisch onderzoek uit de tweede helft van zijn wetenschappelijke carrière. Voor de volledigheid: met 'het bloeitijdperk' bedoelde hij de zeventiende eeuw. De rede sprak hij in januari 1894 uit. Al die pleegvader-, hoogleraren- en rectorenbesognes kunnen verklaren, waarom hij ook wat kortaangeboden was, toen hij De

Vries' concept-proefschrift onder ogen kreeg. Promotor Korteweg was een noeste, nuchtere en efficiënte werker van grote veelzijdigheid die toch een beetje de grenzen van wat hij aankon bereikt had. Hij herinnerde zich zijn eigen efficiënte promotiewerk en zag dat De Vries niet echt opschoot. Zelf was hij de jaren ervoor met oude Nederlandse wiskundigen en plooi-puntentheorie bezig geweest, en had hij de hydrodynamische literatuur waarschijnlijk niet al te grondig bijgehouden. Daarom zag hij wel dat De Vries Scott Russell, Airy, Rayleigh, McCowan, Greenhill en Boussinesq had bestudeerd, maar niet dat er publicaties van de laatste ontbraken.

Er ontstond een beetje een situatie zoals tien jaar later met Brouwer. Die had ook een concept ingeleverd waar Korteweg veel moeite mee had. Wat een hoop overbodig gezwaai! Korteweg werd in 1905 opnieuw boos over zoveel inefficiëntie en dwong Brouwer om allerlei filosofische passages te schrappen. Het verschil met De Vries was, dat Brouwer zijn belangrijkste ideeën in zijn ontwerp had staan, terwijl dat bij De Vries nog lang niet het geval was.

Het leven van De Vries

Wie stond er aan de andere kant van de promotieplechtigheid? Wat weten we van de promovendus De Vries? Een boek uit 1936 over de familie De Vries was een goed uitgangspunt om verder te zoeken.^{15,16} Zo bleek de Utrechtse hoogleraar Jan de Vries Gustavs oudere broer te zijn.¹⁷ Een derde broer, August, werd secretaris-generaal van het Ministerie van Financiën en staatsraad in buitengewone dienst.¹⁸ Twee broers dus die het ongeveer evenver hebben gebracht als twee van de Kortewegbroers. Van die succesvolle broers, die Gustav ook moeilijk te wegen frustratie zullen hebben bezorgd, zijn de takken uitgestorven, bij Gustavs familie is dat bepaald niet het geval. Er bleken in Leiden zelfs twee kleinzonen te wonen, die een archief van hun grootvader in bezit hadden. Welk beeld krijgt men nu uit deze en andere papieren?

Gustav de Vries kwam uit een familie die in veel opzichten aan die van Korteweg doet denken, hoewel een vader die boekhandelaar in Amsterdam was behoorlijk verschilt van een rechter in Den Bosch. Gustavs oudste broer was zoals gezegd wiskundehoogleraar evenals oudste zoon Diederik bij de Kortewegen. Died Korteweg en Jan de Vries kenden elkaar goed, ze waren beiden lid van de Koninklijke Akademie. En beiden hadden ze een jongere broer met wiskundetalent die ze aan een baan hielpen. Korteweg zijn broer Bas

bij de KMA in Breda, Jan de Vries zijn broer Gustav die hij zijn baan op de vijfjarige HBS in Haarlem kon doorgeven, toen hij zelf naar de Polytechnische School in Delft ging. Maar Gustav de Vries doet ook in andere opzichten aan Bastiaan Korteweg denken. Hij kon zijn draai in die baan niet vinden.

Hij was dan wel gepromoveerd, maar kwam daarna moeizaam tot publicaties en dat betekende dat hij altijd bleef vastzitten aan die HBS. De eerste jaren ging het wel, hij viel zelfs voor een zieke collega in. Maar in de jaarverslagen van de HBS van 1902, 1903 en 1904 staat er steeds iets als 'geruime tijd afwezig wegens ziekte'.¹⁹ Een adres uit 1908 — ook Bas Korteweg publiceerde een brochure over zijn ontslag aan de KMA — van De Vries aan de Haarlemse wethouder van onderwijs Thiel²⁰ maakt duidelijk dat hij in 1902 vijf weken in een inrichting voor zenuwlijders zat vanwege teleurstellingen over mislukte sollicitaties en gebrek aan steun daarbij van zijn directeur Brongersma.

Het gevecht om acceptatie

De Vries probeerde wel te blijven studeren en te schrijven in zijn bibliotheek aan Ripperdarpark 45, waar de vier kinderen, die op het overleden kind volgden niet bepaald welkom waren. Zo publiceerde hij rond 1900 twee artikelen over cyclonen in de *Proceedings* van de Akademie die ik niet onder ogen heb gehad en in 1907 een *Beknopt leerboek der rekenen stelkunde* bij uitgeverij De Erven Bohn. In 1909 werd hij ontslagen bij de vijfjarige HBS en aangesteld als leraar aan de driejarige variant. Het jaar ervoor moet hij onaan-



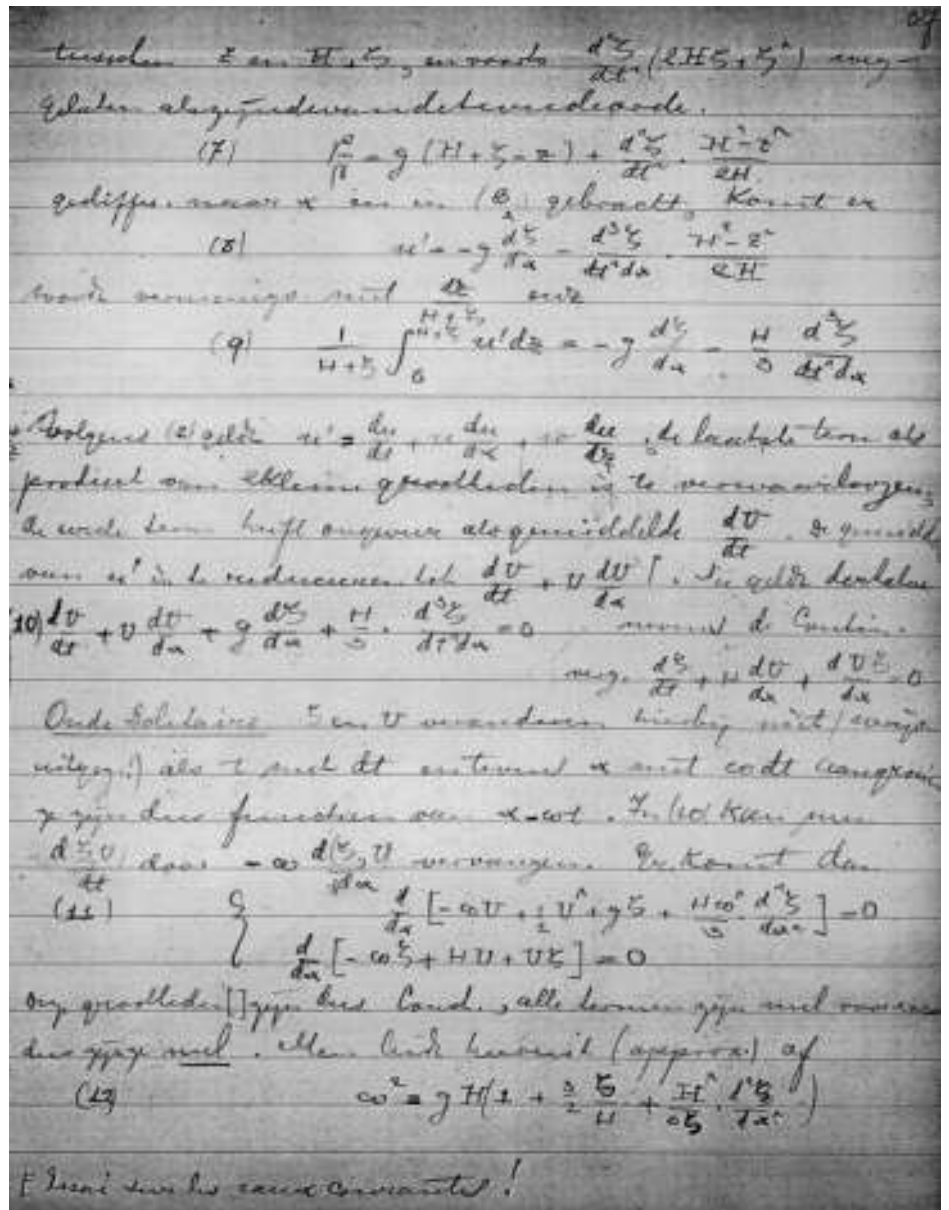
bron: Onze hoogleraren, 1898

Figuur 4 Diederik Korteweg (1848–1941)

genaam verrast zijn geweest, toen hij een via Korteweg aan het *Nieuw Archief voor Wiskunde* gestuurd artikel terugkreeg. De redacteur, de Leidse hoogleraar en algebraïcus Kluyver schrijft aan Korteweg, die de brief aan De Vries liet zien: 'Amice, het vreemde stuk van den heer de Vries heb ik gezien. Het geeft mij den indruk, dat de schrijver een vrij natuurlijk en veel voorkomend verschijnsel toevallig heeft opgemerkt, dat hij zich van den waren aard geen juiste voorstelling maakt en nu min of meer tot een wonder verheft wat eigenlijk zeer alledaagsch is'. Hij geeft een uitleg van de zwakke plekken in het artikel en noemt De Vries een 'schrijver op leeftijd' (hij was toen 42!).²¹

De brief van Kluyver is van april 1908, De Vries' boze lange brief aan de wethouder van augustus is van hetzelfde jaar. Hij schrijft in zijn adres: "[dit] gevoegd bij het leed, veroorzaakt door het plotselinge overlijden van een kind". De teleurstellingen kwamen in de eerste plaats, wat iets zegt over de enorme frustratie. Uit de stukken blijkt dat De Vries wellicht wat teveel eiste van zijn leerlingen in de hogere klassen, maar dat hij het behoorlijk deed in de lagere. Dat duidt erop dat hij van de laatsten nog niet veel verwachtte, maar bij de ouderen misschien geestelijke verwantschap zocht. Toen hij steeds onder zijn bevoegdheid moest doceren van zijn directeur, solliciteerde hij naar allerlei betrekkingen, maar werd zelfs niet op de voordracht gezet. Allemaal buitengewoon frustrerend. Ook uit de lange, zelfs gedrukte brief aan de wethouder blijkt dat er veel collegae waren die hem sociaal onhandig vonden omgaan met het bestraffen van leerlingen, maar ook met het onderwijs zelf. Het beeld rijst op van een behoorlijk contactgestoorde man.²²

Ondanks alle tegenslagen publiceerde De Vries in 1912 via Korteweg toch nog twee artikelen over een eigen 'calculus rationis' in de *Proceedings* van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.²³ Na 1912 vond hij nieuwe levensvervullingen. Hij voelde zich behoorlijk thuis op de nieuwe school die weinig eisen aan hem stelde. Hij gaf zeven uur wiskunde in alle drie de klassen en gebruikte daarbij zijn leerboek tot 1911 (daarna niet meer) en ook dat van zijn broer en Janssen van Raaij over vlakke meetkunde. Daarnaast gaf hij les in boekhouden. In 1913 werd hij aangenomen als lid van de vrijmetselaarsloge *Vicit vim virtus* (De deugd heeft de kracht overwonnen), waarvan hij in 1916 meester werd.²⁴ In 1926 splitste hij zich met anderen af tot de nieuwe loge *Kennemerland*. Voor zijn loges hield hij lange doorwrochte betogen over wijs-



Figuur 5 Vermelding door De Vries van Boussinesq's 'Traité' onderaan bladzijde 37 van zijn samenvatting van St Venant, 1885

gerige onderwerpen. Opvallend in zijn nagelaten papieren is een lange analyse van Goethes *Faust* waarin hij zich aansluit bij een Franse commentator.²⁵

Ten slotte werd De Vries spiritist. Dat klinkt vandaag de dag misschien wat vreemd, maar rond 1900 waren er veel belangrijke bèta-onderzoekers, vooral in Engeland en Amerika, zeer actief met het onderzoeken van mediums en theoretiseren over vierde en hogere dimensies om een mogelijk overleven na de dood te verklaren, zoals de Franse Nobelprijswinnaar medicijnen Richet en de fysici Oliver Lodge, die de term 'black hole' voorstelde, en William Crookes, waarvan De Vries voor zijn proefschrift artikelen had bestudeerd. In december 1934 is hij na afloop van een séance in Haarlem-Noord door een auto geschept²⁶

en in het ziekenhuis overleden. Zijn steeds wat ziekelijke vrouw waarmee hij na het vroeg overleden kind nog vier kinderen kreeg overleefde hem drie jaar. Over De Vries en zijn wat treurigstemmende carrière lijkt nu bijna alles boven water gebracht.²⁷ Hij was een behoorlijk goede onderzoeker, die echter met zijn proefschrift meteen zijn grootste prestatie heeft geleverd. Dat moet direct en indirect aan de door Korteweg uitgeoefende druk en de als zwaar ervaren leraars taak te danken zijn geweest.

Stress en slordigheid

Wat was De Vries' situatie in 1893/'94, welke wisselwerking vond er plaats met Korteweg en hoe zit het met het hun kennis van het werk van Boussinesq? We hebben gezien dat

De Vries, vlak voor zijn oudere broer Jan hem de nieuwe baan in Haarlem bezorgde, zijn concept-proefschrift had ingeleverd bij Korteweg. Daarna volgde Kortewegs standje, dat De Vries in een hogere versnelling deed schakelen. Intussen had de HBS-leraar het al vreselijk druk. Na zijn promotie, in de tijd dat het artikel voor de Royal Society werd voorbereid door 'my young friend and myself' (schrijft Korteweg in zijn aanbiedingsbrief),²⁸ klaagt De Vries dat hij geen tijd meer heeft voor schrijven of het doen van onderzoek door de vele proefwerken die hij moest nakijken, maar dit zal al eerder gespeeld hebben, terwijl Korteweg in zijn brief juist aandrang op veel meer studie. Promotor én promovendus stonden dus begin 1894 onder flinke druk, hadden beiden weinig tijd en moeten gedacht hebben: het is nu of nooit.

Dat blijkt de literatuurstudie te hebben beïnvloed. De Vries heeft helaas geen bibliografie toegevoegd aan zijn proefschrift. Hij heeft wel keurige uittreksels nagelaten van door hem bestudeerde literatuur, waaronder artikelen van Boussinesq uit 1870 en 1871.²⁹ We kunnen zijn literatuurstudie op de voet volgen. Hij begon met de Engelse literatuur over zijn onderwerp en zal in Rayleighs artikel *On waves* uit april 1876 in het *Philosophical Magazine* op de naam van Boussinesq gestuit zijn. Rayleigh schrijft daar: "I have lately seen a memoir by Mr. Boussinesq (1871, Comptes Rendus vol. LXXII.), in which is contained a theory of the solitary wave very similar to that of this paper. So far as our results are common, the credit of the priority belongs of course to Mr. Boussinesq". Uit de formulering blijkt dat Rayleigh niet wist dat Boussinesq al hoogleraar was, of dat als derde baron Rayleigh niet belangrijk vond.

Daarna bestudeerde De Vries ook wat Franse literatuur, Boussinesq 1870 en het eerste artikel uit 1871, maar ook stukken van Saint-Venant uit 1885. In een door De Vries bestudeerd artikel van Saint-Venant in de *Comptes Rendus*, vol. CI uit 1885 staat een duidelijke verwijzing naar Boussinesqs 680 bladzijden lange traktaat uit 1877, *Essai sur la théorie des eaux courantes*, waarin zoals Pego en anderen hebben laten zien de KdV-vergelijking in een voetnoot voorkomt. De Vries vermeldt vervolgens Boussinesqs *Essai* expliciet op blz. 38 en 40 van zijn uittreksels en schrijft onderaan bladzijde 37 zelfs *Essai sur les eaux courantes* met een uitroepeteken! (Zie figuur 5.)

In zijn grote artikel stelt De Jager: "It is somewhat surprising that Korteweg and De Vries refer in their paper only to Boussinesqs short communication in the *Comptes Rendus*

of 1871 and not to the extensive article in the *J.Math. Pures et Appl.* and the *Essai sur la théorie des eaux courantes* in 1872, respectively 1877. However, we should realize that the international exchange of scientific achievements in those days was not at the level as it is today."³⁰ Dit lijkt te kort door de bocht. Er zijn, ondanks Kortewegs aansporingen om meer te studeren, geen aanwijzingen voor, dat De Vries van het bestaan van Boussinesqs artikel uit 1872 op de hoogte was. Ook blijkt uit niets dat hij het grote traktaat uit 1877 gelezen heeft, wat vreemd is, vooral als je er een uitroepeteken bij zet. Zeer waarschijnlijk was er ook een exemplaar van het werk (dat een prijs ontving van de *Académie des Sciences* [7]) in Nederland aanwezig, ik vond het traktaat bijvoorbeeld op de bibliotheek van de Polytechnische School in Delft. Het kan ook zijn, dat hij erin is verdwaald, het is een dik en niet gemakkelijk boek, maar dan zou De Vries dat toch met Korteweg besproken moeten hebben, en daarvan is geen spoor in het proefschrift en de briefwisseling te vinden. Ten slotte is het merkwaardig dat Korteweg niet via een ander kanaal van het bekroonde traktaat op de hoogte zou zijn geweest.

Comedy of Errors

In ieder geval heeft de onder tijdsdruk staande De Vries iets belangrijks bewust of onbewust nagelaten. Ondanks Kortewegs grote aandacht voor bibliografisch verantwoord onderzoek, die ook blijkt uit zijn geciteerde brief waarin expliciet verdere literatuurstudie werd geëist, en De Vries' zorgvuldig gemaakte uittreksels, blijkt toch na het uitroepeteken geen verdere studie van Boussinesq te zijn gevolgd. Bij Rayleigh was het in 1876 al wat vreemd dat hij niet doorgezocht heeft. Maar toen waren Boussinesqs grote werk uit 1877 en Saint-Venants verwijzingen uit 1885 nog niet verschenen. In 1894 lijkt me de omissie bij De Vries onvergeeflijk, al zaten hij en Korteweg toen waarschijnlijk al op een ander theoretisch spoor.

Het is eveneens vreemd dat Boussinesq, die tot 1929 leefde, nooit heeft geprotesteerd bij Korteweg of de editor van het *Philosophical Magazine*. Saint-Venant heeft deze 'comedy of errors' niet meer meegemaakt. Hij was in 1885 liefst 88 jaar oud en overleed het volgende jaar. Eerder had hij een grote rol gespeeld in Boussinesqs leven en hem in 1873 aan zijn eerste hoogleraarschap geholpen in Lille, waar ook Pasteur zijn carrière begon. Boussinesq zag uit naar samenwerking met de krasse oude man, toen hij in 1886 naar de Sorbonne overging, maar dat was jammer

genoeg te hoog gegrepen. Later werd Boussinesq decaan van de afdeling natuurwetenschappen van de Académie des Sciences. Hij heeft zeker een internationaal netwerk gehad. Er zou moeten worden nagezocht of er directe of indirecte contacten tussen Boussinesq en Korteweg zijn geweest.³¹ De laatste heeft bijvoorbeeld een aantal brieven uitgewisseld met Paul Appell die Boussinesq goed gekend moet hebben.

Terwijl Korteweg en De Vries duidelijk internationaal georiënteerd waren, moeten we bij het niet-reageren van Rayleigh op Boussinesqs artikel uit 1872 en van Boussinesq op het KdV-artikel uit 1896 wel in aanmerking nemen, dat de nationale wetenschappelijke culturen in de grote landen nog dominant waren. Rayleigh las vooral Engelsen en ook de redactie van het *Philosophical Magazine* kende de internationale literatuur niet goed genoeg. Boussinesq op zijn beurt las vooral Fransen. Met moeite keken ze over de grenzen, en dan vooral naar Duitsland. Daar waren de eerste twee delen van Poggendorff al verschenen, maar die waren vooral historisch van aard. Ook de *Catalogue of Scientific Papers* van de Royal Society bestond al, maar werd kennelijk niet door alle praktiserende onderzoekers geraadpleegd.

Korteweg en De Vries waren zeker internationaler ingesteld dan Rayleigh en Boussinesq, en Korteweg bovendien een goede bibliograaf, maar zelfs zij reageerden onder tijdsdruk niet adequaat. De Vries stopte met de Boussinesqstudie na een uitroepeteken bij het belang van zijn werk gezet te hebben. Het is aannemelijk dat hij Korteweg vervolgens niet van het bestaan van het grote traktaat op de hoogte heeft gebracht, al kan ook Korteweg gevonden hebben dat het nu welletjes was na al het overschrijven. Kennelijk heeft ook hij, terwijl hij eind 1893 nog had aangedrongen op veel meer literatuurstudie, in de drukte een steek laten vallen. Door de door Korteweg en de omstandigheden uitgeoefende druk is De Vries wel boven zichzelf uitgestegen, dat is de positieve kant van de zaak. Natuurlijk moeten we blij zijn met De Vries' proefschrift en het KdV-artikel, maar het is zeker ook denkbaar, dat de hele promotie van De Vries na de grondige bestudering van Boussinesq niet zou zijn doorgegaan... ↵

Noten

- 1 Ik dank mevrouw Sengers-Levelt voor commentaar op een eerdere versie van dit artikel, dat gebaseerd is op een lezing, gehouden op een aan Korteweg en De Vries gewijd symposium aan de UvA in september 2003.
- 2 *Het Korteweg archief*, aanwezig op de Universiteitsbibliotheek van de Universiteit van Amsterdam, ingedeeld in twee hoofdgroepen, de Huygens-editie en de rest, vervolgens naar jaar. Ik heb het eigen stuk waarnaar Korteweg verwijst daar niet kunnen vinden, en evenmin in het door de kleinzonen van De Vries in Leiden bewaarde De Vries-archief.
- 3 In een brief aan mij meegedeeld door Eduard De Jager
- 4 Na Kortewegs dood heeft zijn leerling Gerrit Mannoury de papieren naar correspondent geordend. Dat deed hij in Kortewegs door Cuyper gebouwde huis met de serre van twee verdiepingen op de hoek van de Vondelstraat tegenover de Heilig Hartkerk, waar hij zelf lang door Korteweg voor doorstuderen was klaargestoomd. Helaas heeft een UB-medewerker het hele archief opnieuw en nu chronologisch per jaar geordend, zodat ik vele uren extra heb moeten zoeken naar de Korteweg-de Vries-correspondentie. In het archief zit ook de 'berg van Brouwer', de vele brieven van en aan Brouwer rond 1906 (Korteweg bewaarde gelukkig zijn eigen concepten) die Dirk van Dalen in zijn boeken heeft gebruikt. Ook mevrouw Sengers-Levelt heeft het archief bekeken voor haar boek over de Nederlandse thermodynamica rond 1900.
- 5 Er bestaat geen wetenschappelijk verantwoorde geschiedenis van de Nederlandse vrijmet-selarij (sinds kort is er aan de universiteit van Leiden wel een leerstoel). Bekend is wel dat bijvoorbeeld Multatuli en Jacob van Lennep leden waren. Onder het leiderschap van prins Frederik waren de loges, alleen toegankelijk voor mannen, een ontmoetingspunt voor vooral adel en grootburgerij.
- 6 Eigen archiefmateriaal, afkomstig van mijn grootmoeder, mevrouw W.M. Van Steeden-Korteweg
- 7 Jeroen Brouwers, *Twee verwoeste levens. De levensloop en de dubbelzelfmoord van Elize Baart en Bastiaan Korteweg*, Amsterdam 1993
- 8 Johan was mijn overgrootvader, waardoor ik veel Korteweg-materiaal ontving via mijn grootmoeder en mijn oom Jaap van Steeden, haar enige zoon. De vierde broer had een zoon Remmert, later een belangrijke pionier in het kankeronderzoek. De vijfde broer, Willem, stierf als student filosofie in Leiden. Tenslotte was er nog een zuster, mevrouw Rand-Korteweg, waarover bijna niets bekend is.
- 9 Aantekeningen van mijn grootmoeder, mevrouw Van Steeden-Korteweg
- 10 Ook Jo had geen gymnasiumdiploma; hij had privélessen gevolgd.
- 11 *Onze Hoogleraren*, Rotterdam 1898, 265 (broer Jo volgt op blz. 267)
- 12 Broer Jo pas in 1887
- 13 Ad Maas, o.c.
- 14 Korteweg en Bientje d'Aulnis zijn op Zorgvlied bij hem begraven.
- 15 Het zoeken naar zijn antecedenten was een veel tijdrovender karwei dan bij Korteweg. Er waren meer wiskundigen De Vries, maar natuurlijk waren ze zelden verwant. Al na korte tijd bleek er geen relatie te zijn tussen Gustav en Kortewegs jongere collega Hendrik de Vries. De gouden tip kwam van De Vries zelf. In zijn proefschrift had hij 'geboren in Amsterdam' moeten vermelden. Dat gevoegd bij zijn bijzondere voornaam leidde op het gemeentearchief via de tienjarige tafels naar zijn ouders en geboortedatum in 1866. Via het Centraal Bureau voor Genealogie in Den Haag werden zo met behulp van persoonskaarten volgende verwanten gevonden. Na een paar weken doorzoeken bleken er twee oude dames op de Veluwe te zijn die nog veel over Gustav de Vries konden vertellen, mevrouw De Vries-Helmert uit Ermelo, in 1999 87 jaar en getrouwd geweest met David de Vries; Rie Bosman uit Harderwijk, in 1999 73 jaar en de vriendin van de overleden Rubertus Jan de Vries (Ruurd). De dames legden uit dat er zowel anti-semieten (Gustav lijkt er één van te zijn geweest) als verzetsstrijders in de familie waren geweest.
- 16 Een Fries geslacht uit Amsterdam, 1936 (niet in de handel gebracht, maar wel in bibliotheken te vinden)
- 17 De tak van Jan de Vries stierf uit, toen zijn kleinzoon Jan (geb. in 1920 en zoon van dr. Jan de Vries, wiskundeleraar aan het Amersfoortse gymnasium) op 2 maart 1945 met 49 andere verzetsstrijders bij Varsseveld door de Duitsers werd geëxecuteerd als represaille voor een aanslag in de buurt, waarbij vier Duitse militairen waren gedood (bron: Ned. Inst. Voor Oorlogsdocumentatie). Uiteindelijk werd deze broer secretaris-generaal van het Ministerie van Financiën en staatsraad in buitengewone dienst.
- 18 Toen ik bij de kleinzonen van De Vries aan het Leidse grachtje was bespeurde ik enig wantrouwen. Een familielid van Korteweg die volgens een overlevering in de familie De Vries wellicht aan de haal was gegaan met de ideeën van hun grootvader! Ik had juist een lange queue achter de rug om na mijn boek nog eens extra te kijken of ik De Vries geen onrecht had aangedaan, dus ik voelde me daar ongemakkelijk onder. Maar door Gustavs broer August werd iets later posthuum wat aangevuld. Het bleek dat August, hij kocht een dubbele naam en heette later Laman de Vries, via de Roelvinks familie was van mijn overgrootvader Willink. Zo bleek er minstens één achterhaalbare genealogische relatie tussen Korteweg en De Vries te bestaan, en kon ik erop wijzen dat de familieloyaliteit niet al te eenzijdig was.
- 19 *Gemeente Archief Haarlem* (sindsdien gefuseerd met het *Rijksarchief in Noord-Holland*), *Archieven rechtsvoorgangers Spaarne Scholengemeenschap te Haarlem, Archief van de HBS-B*, 1864-1958, inv. nrs. 35 en 36, Jaarverslagen 1889-1906 en 1907-1920.
- 20 Dit bevond zich bij de papieren van De Vries' kleinzonen.
- 21 De brief komt uit het Kortewegarchief. Lourens van den Brom, waarmee ik in contact kwam door zijn archiefonderzoek naar Kortewegs academische loopbaan, heeft de argumentatie van Kluyver onderzocht en plausibel gemaakt.
- 22 Hedendaagse deskundigen zouden wellicht van het syndroom van Asperger spreken.
- 23 Die artikelen zijn bekeken door professor Anne Troelstra, die ook weer vond dat ze te weinig ingingen op onderzoek van anderen. Ze hebben niets met grondslagenonderzoek te maken. "Wellicht zou een analyticus er nog meer in kunnen vinden. Mijn indruk is dat Korteweg De Vries er bij zijn promotie toe heeft gebracht om voort te bouwen op werk van anderen, maar dat De Vries naderhand te geïsoleerd bezig is geweest".
- 24 Ik heb niet kunnen ontdekken, waarom hij al in 1908 in een brief aan Korteweg het woord 'broeder' gebruikte, maar het lijkt erop dat hij al eerder vrijmet-selaar was. De gegevens over de vrijmet-selarij komen uit het *Cultureel Maçonniek Centrum* Prins Frederik in Den Haag.
- 25 Dit stuk bevindt zich ook bij de broers De Vries in Leiden.
- 26 Bron: mevrouw De Vries-Helmert
- 27 Troelstra suggereerde terecht om een analyse-expert nog eens naar de 'calculus rationis'-publicaties en -papieren te laten kijken. Daarnaast zou het zeker nog aanbeveling verdienen om De Vries' proefschrift minutieus te vergelijken met het KdV-artikel.
- 28 In het Kortewegarchief op de UB van de UvA
- 29 In het De Vriesarchief bij de kleinzonen in Leiden
- 30 De Jager, o.c. 2006, 21
- 31 Ik heb er in het Kortewegarchief niets over kunnen vinden, maar zoals bij Brouwer valt er nog heel wat te graven.

Referenties

- 1 Eduard de Jager, 'De Korteweg-de Vriesvergelijking in wezen en verschijning', *ITW-Nieuws jrg. 12* (3), juli 2004, pp. 19-25; id., 'On the origin of the Korteweg-de Vries Equation', arXiv:math.HO/0602661 v1 28 Feb 2006. Zie voor verdere literatuurverwijzingen deze artikelen.
- 2 Robert Pego, 'Origin of the KdV Equation', *Notices of the American Mathematical Society*, (vol. 45), (1997), nr. 3, p. 358.
- 3 Ad Maas, D.J. Korteweg: 'backbencher van de Tweede Gouden Eeuw', *De Gids*, maart/april 2005, pp. 229-244.
- 4 Bastiaan Willink, 'De Tweede Gouden Eeuw. Nederland en de Nobelprijzen voor natuurwetenschappen 1870-1940', Amsterdam, 1998, p. 247.
- 5 Johanna Levelt Sengers, 'How fluids unmix', *Discoveries by the School of Van der Waals en Kamerlingh Onnes*, Amsterdam, 2002.
- 6 Paul Schneiders, *De bibliotheek- en documentatiebeweging 1880-1914: bibliografische ondernemingen rond 1900*, dissertatie UvA, 1982.
- 7 I. Grattan-Guinness, *The rainbow of mathematics*, blz. 601.

Gerard Alberts

Korteweg - de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
G.Alberts@uva.nl

Jaap Molenaar

Biometris
Wageningen Universiteit en Researchcentrum
Postbus 100
6700 AC Wageningen
jaap.molenaar@wur.nl

Jaap Top

Instituut voor wiskunde en informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen
j.top@math.rug.nl

De overval Bij het Koninklijk Instituut voor de Marine

Karakter is meer

Wiskunde en militaire technologie hebben elkaar vanaf de vroegste geschiedenis sterk beïnvloed. De ballistiek en cryptografie behoren tot hun klassieke gemeenschappelijke veld; later kwam daar nog de systeemtheorie, in het bijzonder het gebied van de zelfbesturende objecten, en de speltheorie bij. Het is niet verwonderlijk dat men binnen de Nederlandse krijgsmacht het wiskundig niveau voortdurend probeert op te schroeven: in deze wereld speelt internationale competitie een belangrijke rol. Toch hebben er de laatste tien jaar grote veranderingen plaatsgevonden. Gerard Alberts, Jaap Molenaar en Jaap Top gingen naar het Koninklijk Instituut voor de Marine in Den Helder om uit te vinden welke.

Er zijn opmerkelijke verschuivingen aan de gang binnen de militaire opleidingen in Nederland. Terwijl in Breda op de KMA de harde technische sector vrijwel is verdwenen, wordt er in Den Helder gestreefd naar een volledig erkende technische Bacheloropleiding, waarin wiskunde een centrale plaats inneemt. Voor deze Overval bezochten we de Marinebasis in Den Helder, betraden een wereld die men zelden direct associeert met wiskunde en spraken over het hoe en waarom van de veranderingen. Eerst een korte historische inleiding.

Polytechnique

Wiskunde en natuurkunde vormen sinds twee eeuwen een wezenlijk bestanddeel van de vooropleiding van het militair kader. In de Franse *Ecole Polytechnique* vond deze ge-

woonte om toekomstige officieren in deze vakken te scholen haar oorsprong, niet zozeer terwille van toepassingen maar teneinde goede denkgewoonten bij te brengen. Dit wordt de propedeutische functie van de wiskunde genoemd. Het technisch hoger onderwijs, dat wil zeggen de technische opleiding met een propedeuse in wis- en natuurkunde, begon in Nederland in 1813 met de Artillerie- en Genieschool in Delft. Die werd overigens weer gesloten na een conflict over het wiskundig gehalte van de lessen tussen de wiskundige Jacob de Gelder en de directeur Johan Voet. In 1828 werd in Breda de opleiding heringericht als Koninklijke Militaire Academie (KMA), waar men cadetten opleidt voor de officiersrangen bij de landmacht. Snel daarna, namelijk in 1829, werd de marinevariant opgericht, het

Koninklijk Instituut voor de Marine (KIM), alwaar men adelborsten opleidt voor het kader van de marine.

Een burgerlijke academie kwam er pas in 1842, weer in Delft. Daar studeert men vandaag de dag nog civiele vormen van techniek met een wiskundige propedeuse. In de twintigste eeuw verkreeg de Technische Hogeschool in Delft de status van hoger onderwijs, en werden er soortgelijke Hogescholen opgericht in Eindhoven en Twente. Sinds bijna 25 jaar heten de Technische Hogescholen overigens Technische Universiteiten. In de twintigste eeuw veranderde ook de rol van de wiskunde: nog steeds propedeutisch voor het aanleren van goede denkgewoonten, maar in toenemende mate ook als een bruikbare en in de techniek toepasbare wetenschap; zie [1]–[3].

Terwijl de militaire opleidingen mede aan de wieg stonden van de propedeutische functie van de wiskunde, die zo kenmerkend is voor het hoger technisch onderwijs, hebben ze een eeuw geleden de slag om academische erkenning gemist en zich ontwikkeld tot interne beroepsopleidingen. Met de vorming van de Nederlandse Defensie Academie (NL-

DA) maken zij zich op voor een inhaalslag op dit punt. Opmerkelijk genoeg gaat dit gepaard met een verruiming van de rol van de wiskunde.

Onder water

Herman Monsuur: "In 1992 werden aan de KMA in Breda alle wiskundigen eruit gegooid. Om dat in Den Helder voor te zijn hebben we ons onzichtbaar gemaakt door de separate vakgroep wis- en natuurkunde op te heffen. Alle wiskundigen, zes indertijd, aan het KIM hebben zich aangesloten bij andere vakgroepen. We leven nog steeds in diaspora. Een aantal zijn gegaan naar de navigatie, een voor de hand liggende keuze, een aantal naar de sectie sensor-, wapen- en commandosystemen (SEWACO). Professor Delver had een ander idee; samen met hem ben ik het experiment aangegaan om ons met politicologen en historici te verenigen in een nieuwe vakgroep Internationale Veiligheidsstudies (IVS). De bedoeling was een smeltkroes, in de samenwerking zouden de politicologen bijvoorbeeld modelletjes gaan gebruiken, maar daarvoor schrokken ze in de praktijk toch terug.

De Nederlandse Defensie Academie

Sinds november 2005 zijn alle militaire opleidingsinstituten in Nederland gefuseerd tot de Nederlandse Defensie Academie, afgekort NLDA. Deze academie koerst aan op accreditatie als universitaire bachelor-opleiding. "Wij hikken al decennia aan tegen het niet-universiteitszijn. De accreditatierondes die momenteel aan de gang zijn vormen onze kans om de academische status te verwerven", zegt Patrick Oonincx, universitair hoofd-docent aan het Koninklijk Instituut voor de Marine in Den Helder. Die accreditatie is een civiele erkenning en verraadt het spanningsveld tussen militaire hiërarchie en burgerlijke status. Reeds langer zochten de militaire opleidingsinstituten ieder voor zich deze erkenning: "We hebben nu feitelijk wel promovendi, maar die zijn formeel in dienst in bijvoorbeeld Delft, en worden betaald en begeleid door ons."

De NLDA wil meer met wiskunde doen dan de traditionele propedeutische functie. Dat betekent voor het KIM in Den Helder dat er meer ruimte komt voor wiskundeonderwijs aan een grotere doelgroep en dat het toegepast wiskundeonderzoek vergroot wordt.



De entree van het Koninklijk Instituut voor de Marine

Bij de KMA werd iedere kwantitatieve benadering uitgebannen. Nu ligt dat in Den Helder per traditie anders, omdat de filosofie van de marine altijd is geweest: "Wij bouwen onze eigen schepen." Een consequentie daarvan is dat men deskundigen op dat terrein in huis wil hebben. De techniek heeft bij de marine altijd hoger in het vaandel gestaan dan bij de landmacht. Indertijd hadden we aan het KIM een eigen afstudeerrichting, maar dat strookte eigenlijk niet met het idee dat wiskunde er is ten dienste van de navigatie, de radar, de strategie, etcetera. Om te overleven hebben we wiskunde gekoppeld aan, doen opgaan in al die verschillende toepassingen, opdat we niet geïsoleerd en vervolgens geëlimineerd zouden kunnen worden. Inderdaad, we zijn onder water gegaan, we hebben de kleur van de omgeving proberen aan te nemen. Om onze identiteit niet helemaal te verliezen is er toen een wiskundeplatform voor overleg over de basisvakken opgericht."

Delver ging zover dat hij zich geen wiskundige meer noemde, maar strateeg. "Dat heb ik hem niet na kunnen doen: een kwestie van karakter: hij bewoog zich gemakkelijk in die kringen, maar ook een kwestie van keuzevrijheid: ik was nog met mijn proefschrift bezig."

Een nieuw curriculum

Patrick Oonincx: "Vroeger was het hier een schooltje met wiskunde in een propedeutische functie. Met het oog op de gewenste accreditatie is hier het curriculum grondig vernieuwd. Nu is het ook onder andere aan mij naaste collega's met weinig onderzoekservaring bij het onderzoek te betrekken. We hebben promovendi, die brengen leven in de brouwerij. Onder het oude systeem vervolgden studenten ook wel hun opleiding om een

academische titel te behalen, meestal in Delft of Nottingham. Je zat in de eerste drie jaar hier bij het KIM als adelborst. Bij voldoende behaalde studiepunten werd je korporaal en vervolgens sergeant adelborst. Daarna ging je een half jaar op praktijkstage en tijdens die stage werd je luitenant ter zee 3e klasse (vaandrig), de laagste officiersrang. Dan kwam je een half jaar terug hier en kreeg je bijvoorbeeld complexe functietheorie en in datzelfde vierde jaar Runge-Kuttamethoden. Tenslotte ging je naar Delft om af te studeren en werd je bevorderd tot luitenant ter zee 2e klasse (luitenant). We hebben hier nu een volledige w.o.-bachelor opgezet en daarvoor de hele opleiding opnieuw doordacht. De bachelor heeft 24 ec (*European Credits*: 1 ec = 28 uur studie) wiskunde: stevig voor een niet-wiskundeopleiding. Anders dan vroeger is het lagerejaars wiskundeonderwijs geen serviceonderwijs meer, het worden nu grondslagenvakken genoemd. Daarna volgt de verbreding en tenslotte de verdieping met een aantal verschillende afstudeerrichtingen. Voor veel vakken gebruiken we dezelfde boeken als in Delft."

Monsuur: "In het kader van de bacheloropleiding waarvoor we ons willen accrediteren is een tweedeling gemaakt, alles wat 'alfa' of 'gamma' is gaat na de propedeuse naar de KMA in Breda, alle techniek is geconcentreerd hier bij het KIM. De tweedeling wordt zelfs zo extreem doorgevoerd, dat alles wat niet techniek is, hier ook niet meer bestaat: de afstudeerrichting veiligheidsstudies is hier dan ook opgeheven. Internationale Veiligheidsstudies bestaat als afstudeerrichting alleen nog in Breda, binnen de beoogde bachelor Krijgswetenschappen en is helemaal 'alfa' ingekleurd. Delver en ande-

ren van veiligheidsstudies verhuizen voor het grootste deel van hun tijd naar Breda, ik blijf hier. De bacheloropleiding die we hier verzorgen heet Militaire Systemen en Technologie (MS&T). Het NLDA heeft drie opleidingsvarianten: Krijgswetenschappen, Bedrijfs- en Bestuurswetenschappen en MS&T. Adelborsten in Den Helder en cadetten in Breda volgen in hun eerste jaar, hun 'jongste jaar', tot april een gemeenschappelijke opleiding met inleidingen in alledrie de varianten. Is er eenmaal gekozen voor MS&T, dan gaat de knop om en beginnen we gewoon met een serieuze aanpak van Analyse, Lineaire Algebra en Mechanica. Die gelden als zware vakken."

De accreditatie is aangevraagd voor de NLDA als geheel. In dat kader moet men zich voor 2008 waarmaken als wetenschappelijke instelling. Het onderzoek heeft dan ook enorm aan belang gewonnen. "Ik ben blijven publiceren en ben daardoor plotseling een hele pief hier. Er komen aio's. Er moeten deeltijdhoogleraren komen om de link met de bestaande universiteiten te versterken. Er komt een hoogleraar Operation Research (OR) voor een dag in de week, ik ben UHD en er zijn twee vacatures voor UD's. Zo vormen we straks een hele groep, met ambities. Ik deed mijn onderzoek altijd in mijn uppie, straks met collega's. Hier intern is het echt een cultuuromslag."

Promoveren op Unmanned Air Vehicles

Een voorbeeld van intern onderzoek is het werk van Jochum Tadema. Hij kwam in 1997 direct na het vwo op het KIM. "Iedereen op

de adelborstenopleiding is intern. Er zijn veel clubs en er is veel sport, dus afleiding krijg je genoeg. Het lijkt een beetje op het Engelse college-systeem. De discipline en de saamhorigheid helpen je om te focussen op je studie. In mijn vierde jaar ben ik op de oude *De Ruyter* naar de West geweest. Daarna ben ik gaan afstuderen aan de TUD met als richting avionica. Dat is een combinatie van electrotechniek en vliegtuigbouwkunde. Aansluitingsproblemen tussen KIM en TUD waren er niet en ik kreeg zelfs vanuit het KIM een extra jaar om extra dingen te doen.

Daarna heb ik ruim anderhalf jaar op de Witte de With gevaren. Die is nu verkocht aan Chili. Toen kreeg ik de kans om te gaan promoveren op de NLDA. De TUD-begeleider en beoogd promotor is Erik Theunissen, waar ik ook al bij afgestudeerd was. Hij is hier nu deeltijdhoogleraar. Het onderwerp is de besturing van Unmanned Air Vehicles (UAV's). Die heb je in alle soorten en maten. Van rugzakmodelletjes die maximaal een uur in de lucht kunnen blijven en waarmee een soldaat kan bekijken wat er gebeurt aan de andere kant van een heuvel, tot 'global hawks', die op 15 km hoogte vliegen, 36 uur achter elkaar. Onbemande vluchten worden steeds populairder. Vooral ter vervanging van langdurige bemande verkenningsvluchten, die zeer belastend zijn voor bemanningen. 'Dull, dirty, and dangerous' worden ze wel genoemd.

Er is op het gebied van UAV's nog erg veel te ontwikkelen. Momenteel zijn de routes veelal voorgeprogrammeerd, maar dan kan

een opstekende wind de koers flink veranderen. Voor het direct besturen is er voortdurende communicatie nodig tussen de UAV en een operator. Deze moet de binnenkomende gegevens interpreteren en op grond daarvan beslissingen nemen. Omdat de camera's slechts een beperkte zichthoek hebben is dit niet eenvoudig en moet de operator geholpen worden met zoveel mogelijk extra informatie. Ook belangrijke informatie is bijvoorbeeld of de UAV op een gegeven moment zichtbaar is voor de vijand gegeven de vijandelijke radar-capaciteit. Mijn promotiewerk bevat flink wat wiskundige elementen, maar de nadruk ligt op het structureren en visualiseren van de data ten behoeve van de operator. We bouwen nu een soort lab waarin we de interactie tussen de operator en het besturingssysteem simuleren."

Onderzoek in de Systeemtheorie

Arthur Vermeulen studeerde elektrotechniek aan de TUD met een afstudeerstage in Frankrijk. Daarna ging hij naar Grenoble om een jaar lang 'cognitieve wetenschappen' te volgen. In het Franse onderwijsstelsel wordt zo'n vak aangeboden als een 'losse' studie van een jaar. "Ik had daar veel contact met mensen uit de artificial intelligence en met neurobiologen. Omdat ik graag onderwijservaring wilde opdoen solliciteerde ik bij het KIM. Sinds die tijd is hij docent regeltechniek. Waarom zo'n vak in die omgeving? De adelborsten moeten er allemaal iets van begrijpen hoe systemen werken. Schepen zijn zeer complexe platfor-



Patrick Ooninx op de brug van de vaarsimulator

men. Ook de zeedienstofficieren op de brug, die zich nog het minst met de techniek bezig houden, moeten er een inleiding in gehad hebben. De andere officieren op een schip al helemaal, want die zijn met bijvoorbeeld complexe wapensystemen en sensoren bezig."

Hoe is de praktijk met de theorie verweven tijdens de colleges regeltechniek?

"Ik zoek naar concrete plaatsen op de vloot waar je dynamische systemen in werking ziet. Hoewel de meeste systemen kant en klaar ingekocht worden hebben de marinetechnici nog veel werk aan het koppelen ervan. Dat doen we allemaal zelf en daarvoor schrijven we zelf programma's. Daarvoor moeten onze mensen de globale architectuur kunnen doorgronden. Momenteel wordt research steeds belangrijker, wat ik heel positief vind. Ik zelf houd me bezig met geleidingsmethoden: hoe krijg ik een raket bij een doel."

Er is veel samenwerking met de tak Defensie en Veiligheid van TNO. Deze heeft drie afdelingen: Wassenaar (het vroeger Fysisch-Electronisch Lab), Delft (het vroegere Prins Mauritslab) en Soesterberg.

Wiskunde in de opleidingen van het KIM

Uit de opleidingsgids van een van de studierichtingen van het KIM, zie [4] (een document van 218 pagina's!):

"Wiskunde en natuurwetenschappen vormen de fundamentele intellectuele gereedschappen waarmee afgestudeerde technisch-wetenschappelijke officieren de krachten in de wereld begrijpen en kunnen beteugelen. Studenten moeten een goed begrip ontwikkelen van de natuurwetenschappen in het algemeen en zullen, afhankelijk van de door hen gekozen specialisatie, specifieke vakgebieden diepgaander bestuderen. Dit begrip vormt de basis voor de voor hen relevante ingenieurswetenschap. Deze zal in het leerplan verder worden ontwikkeld.

De technische wetenschappen zijn in sterke mate kwantitatief, hetgeen tot uiting komt in de taal der wiskunde. De technisch-wetenschappelijk opgeleide officier (TWOO) moet bedreven zijn in het hanteren van getallen en wiskundige methodieken om de natuurwetenschappelijke basis van hun toepassingsgebied te begrijpen. Ook zijn wiskundige gereedschappen nodig bij de bestudering van de modelvorming en het gebruik en inzet van technische systemen om een optimaal ontwerp te verkrijgen."

Is dit niet allemaal supergeheim?

Vermeulen: "Nee, er is een hele gemeenschap die daar in het openbaar op een academische wijze mee bezig is. We publiceren gewoon in de open literatuur, in regeltechniek-tijdschriften als bijvoorbeeld *Guidance*. De methodes worden openlijk bediscussieerd, alleen de implementatie ervan in een concreet raketstelsel is uiteraard uiterst confidentieel."

Zijn er verschillen met de slagingspercentages tussen het NLDA en de universiteiten?

"Ja, er is dit verschil dat we selecteren aan de poort. Als studenten hier mislukken hebben niet alleen zij maar ook wij een probleem: het zijn onze werknemers. Ik denk dat het hier zwaarder voor ze is: ze moeten in het eerste jaar niet alleen leren studeren, maar ze krijgen er de militaire vorming bij. Er is hier de stok dat we bij wanprestatie mensen wegsturen, maar het moment van bezinning komt bij zo'n eerstejaars die onderpresteert niet altijd op tijd. In het vierde jaar varen ze mee op de vloot en daar leren ze verantwoordelijkheid te dragen. Hun motivatie is daarna dan ook prima. Ze werken aan de universiteit vaak harder dan het programma voorschrijft. Misschien zou een stevige bedrijfsstage vroeg in de universitaire studie eenzelfde effect hebben bij gewone studenten."

Onderzoek in de OR

Herman Monsuur is direct na zijn afstuderen bij Takens aan de Rijksuniversiteit Groningen in 1988 naar het KIM gekomen als docent wiskunde. "Omdat ik me al vrij snel verveelde, heb ik onderzoek opgepakt. De ambitie om te promoveren had ik ook bij mijn sollicitatie aangegeven. Ik had de keus om in de wiskunde van Takens verder te gaan, dynamische systemen — dat had hier best gekund — of iets anders waarvoor binnen de marine belangstelling zou zijn. Ik heb het vraagstuk van de asymmetrische relaties opgepakt, volgordeproblemen. Bepaal wie de winnaar is van een toernooi; er komen twintig raketten op je af, welke ga je dan het eerst bestrijden; dat soort vraagstukken, meer algebra dan speltheorie. Met dit onderwerp kwam ik terecht in een werkgroepje van Stef Tijs in Tilburg. Bij hem ben ik gepromoveerd. Nee, ik ben geen speltheoreticus geworden, gewoon wiskundige gebleven, wiskundige met aandacht voor de toepassingen. Wel ben ik omgeschoold van continu, naar discreet wiskundige."

Wat is de specifieke inbreng van Monsuur in opleiding en onderzoek?

"Kwantificeren, objectiveerbaar maken van de verhalen van de politicologen en de stra-



Jochum Tadema

tegen. Er is uit dat experiment van samenwerking met de politicologen en anderen niet helemaal uitgekomen wat ik had verwacht. Ik was het ook wel een beetje zat met die politicologen. Het eerste wat zij zeggen is: "De mens is zo complex, dat kun je niet modeleren." Vervolgens bekennen ze dat ze nooit hoger dan een 4 hebben gehaald voor wiskunde. Ze willen er ook niet echt aan, het modeleren. Het was tijd voor een nieuwe uitdaging. In de huidige setting van Militaire Systemen en Techniek (MS&T) spreekt dat kwantificeren vanzelf. Mijn competenties zijn plotseling erg in trek. Niet bij alle adelborsten overigens. Die zijn gekomen op een advertentie *Avonturier gezocht* en dan zitten ze plotseling met Monsuur voor de klas die hen Gaussische eliminatiemethoden probeert uit te leggen. Dan zou jij je toch ook bedonderd voelen ..."

"Ik mocht de hele afstudeerrichting OR gaan invullen: speltheorie, besliskunde, een typisch marineonderwerp als 'Search and Detection', scenario analyses, statistische analyse. We proberen het ook interessant te maken voor mensen die niet echt van techniek houden. Dat is wel een probleem hier: je studeert hier af in techniek terwijl niet iedere adelborst daar evenveel voor voelt."

"Wat betreft onderzoek ligt het nog niet vast waar we de zwaartepunten gaan leggen. Het ligt voor de hand om onderzoek te doen naar het evalueren van zogenaamde Network Centered Systems, een hot item in de militaire strategie. Vroeger kon je de kracht van een strijdmacht uitdrukken in aantallen schepen



Robert van de Ketterij bij de kleine zeppelin

en manschappen en kon je het succes van een operatie afmeten aan het aantal meters verplaatsing van de frontlinie. Tegenwoordig is de kracht veel meer afhankelijk van netwerken en interactie tussen netwerken en moet je heel andere criteria ontwikkelen om de effectiviteit van een operatie te evalueren. Je bent sterker als je verbonden bent met de partij die informatie heeft. Hoe kwantificeer je een begrip als 'Situational Awareness'. Daar gebruik je speltheoretische en besliskundige techniek bij. Je gaat terug naar de roots van OR."

Onderzoek in de Mathematische Fysica

Robert van de Ketterij studeerde scheepsbouwkunde in Delft en promoveerde daar in 2001 bij Peter Currie op het gebied van de Technische Aardwetenschappen. Na gewerkt te hebben bij baggerbedrijf IHC Holland te Kinderdijk en Damen scheepsbouw in Gorinchem komt Robert naar het KIM. "Een groot verschil met mijn vorige werkkringen: hier hebben we maar één klant en er is voldoende budget! Ik ben vooral aangenomen voor het doen van wetenschappelijk onderzoek. De praktijk is evenwel, dat ik mijn tijd nu nog hoofdzakelijk aan onderwijs besteed. Uit mijn onderwijs haal ik echter zeker wel ideeën voor onderzoek".

Buiten Roberts werkkamer hangt een klei-

ne zeppelin met het opschrift *NUNA* tegen het plafond. "De naam ervan? Die heeft vast iets met de sponsoring te maken. En nee hoor, het is niet vreemd dat aanstaande marineofficieren zich met een luchtvaartuig bezighouden. De fysica van een zeppelin is dezelfde als die van een onderzeeër. De studenten leren aan de hand van die zeppelin (UAV) het opstellen van bewegingsvergelijkingen, positiebepalingen, besturing, numerieke aspecten. Dit is een tweedejaarsproject. Niet erg zwaar, maar toch kan ik er genoeg vaktechnische dingen in kwijt." Robert is vol enthousiasme: "Er kan nog veel meer mee. Bijvoorbeeld in combinatie met strategie en speltheorie. De zeppelin tegen onze vijf robots."

Studenten in Den Helder zijn volgens Robert niet wezenlijk anders dan wat hij zich uit Delft herinnert: "Goed plannen is vaak een zwak punt, ze beginnen veel te laat. Luie studenten heb je hier ook, hoor. Ik zie geen grote verschillen als gevolg van de militaire discipline. Voor een standaardvak als 'Stabiliteit en Stromingsleer' slaagt typisch zo'n 70%. En bij een echt struikelvak komt dit percentage niet uit boven de 30."

Werkpak

In de kantine lopen vandaag bijna alle adelborsten in overall. Deze week is er geen college want iedereen timmert druk aan de weg

en aan het gebouw voor het grote vierdaagse feest dat over een week van start gaat. Adelborsten timmeren in zichtbaar toegewijd teamwork een compleet tropisch decor in elkaar. De bevriende, meest vrouwelijke, gasten voor dat feest zullen aankomen met een verbinding die per traditie veelbetekenend 'de feeëntrein' heet.

Michiel Ingen Housz en Justin Jepkes, die net het eerste jaar achter de rug hebben, denken verschillend over de wiskundecolleges die ze sinds kort volgen; het is nog te kort om te zeggen dat het tegenvalt. Analyse en Lineaire Algebra vinden ze lastiger dan Mechanica, dat je nog enigszins op je gevoel kunt doen. Deze vakken nemen ze op de koop toe, ze zijn hier in de eerste plaats om marine-officier te worden. Op de foto willen ze niet, want in verband met de timmerwerkzaamheden zijn ze in werkpak.

De VOKIM

De Vlagofficier van het KIM (De VOKIM), Michiel Tegelberg is hoofd van het opleidingsinstituut in Den Helder en plaatsvervangend commandeur van de Nederlandse Defensie Academie (NLDA).

Hoe verloopt de samensmelting van de drie opleidingen tot NLDA?

"Het bestuurlijke proces van het samengaan van drie opleidingen vertoont kinderziektes, dat is normaal. De adelborsten zelf ervaren het als heel natuurlijk. Ik zelf vind het een verademing in vergelijking met het kunstmatig antagonisme uit mijn opleidingstijd, toen 'die van de KMA' als ander volk beschouwd werden. Het samengaan komt niet voort uit bezuiniging, maar uit politieke druk dat de drie krijgsmachtonderdelen tegenwoordig nauw moeten samenwerken. Als je samen wordt ingezet, is het belangrijk dat die verschillende officieren elkaar van meet af aan kennen. Afhankelijk van de studiekeuze kunnen adelborsten één of twee jaar in Breda zitten en kunnen cadetten hiernaartoe komen."

Waarom hebt U wiskundigen in huis?

"We hebben wiskundigen in huis om onze jonge officieren kennis bij te brengen en, misschien nog belangrijker, inzicht, mathematisch inzicht, ruimtelijk inzicht. De diepgang verschilt. Sommige mensen laat je liever in de bouten en moeren duiken, bij andere leg je meer nadruk op de complexe omgeving waarin ze zullen moeten functioneren en stimuleer je veeleer het ruimtelijk inzicht. Er is bij de marine altijd gevraagd om een gymnasium-b of hbs-b achtergrond, met name voor de technische en elektrotechnische

dienst. Ook voor de zeedienst, voor de operationele gebruiker van de complexe technische systemen, hebben we altijd die eis gesteld, maar nu noodgedwongen een beetje los moeten laten, omdat er domweg niet meer genoeg jongelui worden aangeleverd met deze vooropleiding. Nu mikken we op zestig procent die bètageschoold is en de bachelor Militaire Systemen en Technologie (MS&T), volgt. De overige veertig procent is eerlijk verdeeld over de twee andere takken van sport, de Krijgswetenschappen en de Bedrijfs- en Bestuurswetenschappen. We willen dat nog steeds een behoorlijk contingent van de operationele gebruiker die achtergrond heeft.”

“Nogmaals, wiskunde is zelfs een heel directe bouwsteen voor het ruimtelijk inzicht. Het varen met een schip in een operationele situatie, met hier een vijand, daar een vriend, ginds een vliegtuig, vergt een zeker ruimtelijk inzicht en niet alleen bij de commandant maar ook bij de man achter het radarscherm. Het blijft van belang dat de mens in zo’n situatie een goed idee heeft wat er eigenlijk gebeurt. Ik blijf erop hameren dat de officieren blijven kijken naar de realiteit achter de systemen, achter radarscherm, peiling en extrapolatie, en dat vereist ruimtelijk inzicht. Zelf nadenken blijft nodig en dan ontkomt je niet aan een wiskundige basis. Ik ben daarom een groot voorstander van het op een stevig peil houden van wiskundige kennis. Dat is wel eens strijd. Ook in onze organisatie krijg je wel te horen dat er toch geen wetenschappers nodig zijn om een schip te varen. Dan moet ik weer uitleggen dat we ingenieurs opleiden en dat is toch echt iets anders dan wetenschappers afleveren — al zijn er misschien enkelen die doorgaan als wetenschapper.

Als je een bepaald niveau nastreeft, dan moet je ook op dat niveau inzetten, niet alleen qua onderwijscapaciteit, maar ook qua onderzoekscapaciteit. Wij denken dat we eigenlijk al jarenlang mensen afleveren die op academisch denk- en werkniveau acteren. Ik word in die uitspraak gesterkt doordat de praktijk leert dat nogal wat van onze studenten relatief eenvoudig afstuderen in Delft of Amsterdam. Er zijn er zelfs die binnen de nominale tijd niet alleen hun officiersdiploma halen maar ook en passant een civiel ticket.”

Zijn de wiskundigen weer helemaal terug van weggeweest binnen de militaire opleidingen? Tegelberg: “Hier in Den Helder, waar we focussen op de bètakant, zeker wel. De marine wil een ‘smart-buyer’ zijn van apparatuur, we willen medeontwikkelen aan het materieel dat we aanschaffen. De luchtmacht heeft die traditie niet en zit meer op de lijn van

het kopen van de plank: dit zijn de specificaties, lever het maar. De luchtmacht komt er nu door schade en schande achter dat als je in je organisatie geen mensen hebt die op niveau kunnen meepraten met de industrie, al is het alleen maar als klant, als behoeftesteller, dat dat een gemis is. Het is een hoopvolle ontwikkeling dat de luchtmacht ook weer officieren wil hebben die bètageschoold zijn. En ook bij de landmacht is men er achter gekomen dat het niet verstandig is de bètakant uit te bannen.

De grote zorg is: kunnen we voldoende van deze jongelui en voldoende staf binnenhalen om dit waar te maken. Kunnen we Den Helder aantrekkelijk genoeg maken? Het ligt immers niet in het centrum van de mathematisch wetenschapsbeoefening in Nederland. Een andere vraag is: “Zijn er voldoende mensen met een bèta-interesse?” Het opleiden van bèta’s is zwaar verwaarloosd door de BV Nederland. Ik ben nog niet meteen optimistisch, maar wel blij dat er steeds meer artikelen in de kranten verschijnen waarin men constateert dat er iets verwaarloosd is. Als we onze ambitieuze doelstellingen over kenniseconomie inhoud willen geven, dan moeten we echt ongelooflijk snel maatregelen treffen.”

Begint in Den Helder de victorie? Hier is immers iets eerder dan elders in Nederland erkend dat wiskunde belangrijk is!

“De vergelijking met elders kan ik niet maken en een victorie zal het slechts worden als wij voldoende jongelui aangeleverd krijgen. Het is cruciaal voor ons dat er een besef ontstaat in Nederland dat we dit echt moeten willen. Voor de kenniseconomie moeten we investeren in onderwijs. We moeten duidelijk maken hoe waardevol, hoe leuk het ook kan zijn zich in techniek te verdiepen. En wiskunde zie ik daarbij als een cruciale bouwsteen. De strijdkrachten zijn best wel populair, de werving in het algemeen is geen probleem. Het knelpunt zit in het aantrekken van technisch personeel.”

Hoe is de internationale vergelijking in opleidingen?

“We werken nauw samen met de Belgische en Franse collega’s die ver gevorderd zijn met het opzetten van bachelor- en mastersopleidingen. We kregen reeds een aanbod uit Frankrijk om een paar van onze bachelors te laten instromen in hun mastersopleiding, maar ik vrees dat we niet veel studenten hebben die het Frans voldoende machtig zijn. Ik denk trouwens niet dat wij zelf de ambitie moeten hebben om structureel iedereen op te leiden tot master. We willen absoluut wel dat een zeker percentage van onze bachelors

doorgaan voor een masters, zo’n vijftien of twintig procent. Je wilt gewoon graag een aantal mensen van dat niveau in je bedrijf hebben. De selectie hangt sterk af van de individuele ambitie. Het is echter, denk ik, niet haalbaar om hier voor deze mensen een eigen mastersopleiding op te tuigen. Dat is een kwestie van Value for Money.”

Heeft de accreditatiewens ook te maken met een civiel arbeidsmarktperspectief?

“Het streven naar civiele erkenning is afgeleid van het nieuwe personeelsbeleid. Het defensiebrede nieuwe personeelsbeleid is erop gericht een brede basis te hebben en een smalle top. De brede basis bestaat, gegeven de aard van het werk, in hoofdzaak uit jonge mensen. Die kun je echter als ze ouder worden niet meer allemaal in het bedrijf houden. Vroeger zat er veel vet in de organisatie. Je zocht functies, omdat je de mensen had; die hadden een contract voor het leven. Vijftien jaar geleden is daar rigoreus het mes in gezet. We nemen mensen niet meer ‘for life’ aan, maar tot rond hun 35ste en dan komt het moment van de waarheid. Als je weet dat er honderden mensen per jaar iets anders zullen moeten gaan doen, moet je zorgen dat die mensen ook de goede papieren hebben om iets anders te kunnen gaan doen.”

Golfbeweging

Hoe is in de opleiding de verhouding tussen wetenschappelijke vorming en disciplineren tot varend officier?

Tegelberg: “Ik besef heel goed dat het ambitieus is om twee doelstellingen, een bacheloropleiding en een militaire praktijkopleiding samen in vier jaar te proppen. De ver-



Michiel Tegelberg



Het Algemeen Tehuis voor Militairen in Den Helder heeft een andere bestemming gekregen.

houding tussen die twee is een eeuwenoud spanningsveld. Honderd jaar geleden stonden er reeds mensen op die stelden dat de adelborsten hier wel leerden hoe je een schip moest varen, maar één en één bij elkaar optellen en mensen netjes met u en meneer aanspreken was er niet bij. Algemene ontwikkeling en kennis van de politiek zouden de officieren ontberen, dus er kwam wat minder praktijk en wat meer aandacht voor al die andere dingen. Dan komen er onderwijsgevenheden die dat uitbouwen tot er weer een reactie komt: “Het zijn nu bijna wetenschappers, maar ze kunnen niet meer varen”. Die golfbeweging is zo oud als dit instituut. De opleiding is van 1829, dit gebouw staat er sinds 1869.”

Waar zitten we nu in de golf?

“We werken nu stevig aan de wetenschappelijke vorming en de wetenschappelijke status. Dat moet wel als we die accreditatie rond willen krijgen. Gevoelsmatig zou er dus bij een aantal mensen het idee kunnen postvatten dat de praktische vorming een beetje ondersneeuwt. Ik moet het evenwicht bewaren in de opleiding, maar uiteindelijk wordt het bepaald door onze klant.

De klant, dat zijn al die operationele commandanten; dat is de buurman hier, de admiraal, dat zijn de generaals van de landmacht, zij moeten tevreden zijn over de mensen die we aanleveren. Wij luisteren goed naar de signalen. Zo wees onderzoek eens uit dat men niet helemaal tevreden was over de leidinggevende capaciteiten; daar hebben we de opleiding direct voor gecorrigeerd. Vanuit de marine heb ik overi-

gens nog geen klachten gehoord dat commandanten ontevreden zouden zijn over de opleiding.”

Ambitie

Gevraagd naar de relatie tussen militaire en wetenschappelijke hiërarchie, tussen de drill-officieren en de wetenschappers, verwijst Monsuur naar de spreuk van het KIM, die nu tot motto van de hele NLDA is verheven: Kennis is macht, karakter is meer.

Monsuur: “In het licht van de accreditatie hebben de wetenschappers even gewonnen. Op dit moment zullen bijvoorbeeld overwegingen van militaire senioriteit geen rol spelen bij de werving van personeel voor de opleiding. Het gebeurt wel eens dat adelborsten ingeschakeld worden voor een klusje of een oefening in uren die ze geacht worden aan zelfstudie te besteden. Dan zie je ze ineens in overall voorbijkomen. Dan kijk je even de andere kant op. Het heeft geen zin onnodige spanningen op te roepen.”

Tegelberg: “Ons ambitieniveau ligt hoger dan een hbo-opleiding, omdat wij meer doen dan varen met een schip, aanzienlijk meer. De mensen hier worden opgeleid om zo’n schip op een heel bijzondere manier in te zetten. Dat doen ze niet met acht of tien man, zoals op een koopvaardijship, maar met een bemanning van honderdvijftig tot tweehonderd, wat een geheel eigen dynamiek met zich meebrengt. Het gaat dus om een combinatie van technische en management vaardigheden, waarbij mensen moeten worden aangestuurd in uiterst complexe situaties. Je weet

tegenwoordig niet wie de vijand is, of er een vijand is. Alles wat je doet als officier ligt onder een vergrootglas; de wereld kijkt mee. Die verantwoordelijkheid moet je kunnen dragen. Er worden zware eisen gesteld aan onze jonge leiders.

De essentiële vragen — doe ik het goede ding en doe ik het ding goed — daar draait het om. Ik denk dat daarvoor nodig is om dat academische denk- en werkniveau te hebben. Wetenschap is kennis verkregen door twijfel, door gezonde twijfel. Het woord twijfel lijkt in een militaire organisatie uit den boze te zijn. Toch moet je kritisch blijven nadenken: ben ik met het goede ding bezig. De kritische benadering is cruciaal.

De wiskunde wordt zeker niet het slachtoffer van de combinatie van de twee processen, bestuurlijke integratie en accreditatie. Doordat we hier nog sterker koersen op de traditioneel reeds aanwezige technische gerichtheid, wordt de wiskunde ook sterker ontwikkeld. De enige zorg: er moeten ook voldoende studenten komen die dat willen en kunnen oppakken.”



Referenties

- 1 Jan A.M.M. Janssen, *Op weg naar Breda. De opleiding van officieren voor het Nederlandse leger tot aan de oprichting van de Koninklijke Militaire Academie in 1828*, Sectie Militaire Geschiedenis Landmachtstaf, 's-Gravenhage, 1989
- 2 Danny Beckers, *Het despotisme der Mathesis. Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland 1750–1850*, Verloren, Hilversum, 2003
- 3 Gerard Alberts, *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945–1960*, Amsterdam University Press, Amsterdam, 1998
- 4 F.G.J. Absil en O. Boot, *Programmaomschrijving Opleiding Militaire Systemen en Technologie*, NLDA, VS. 3.5, 2005



Hr.Ms. Van Nes in het jaar 2000

Ralph Hanzen

—
ralph.hanzen@yahoo.com

Column Lieve Maria

Hoeveel cacao zit er nog in de koetjesreep?

Hoe is het om vanuit het bedrijfsleven het onderwijs in te duiken? Ralph Hanzen, geboren in 1972, startte na een studie technische natuurkunde aan de Technische Universiteit Eindhoven zijn loopbaan bij een leverancier aan de halfgeleiderindustrie. Na een tijd in de Verenigde Staten te hebben gewerkt, besloot hij, terug in Nederland, wiskundeleraar te worden. Inmiddels is hij weer terug bij zijn oude werkgever. Waarom?

‘Inhoud’ is een woord met vele betekenissen. Laat ik beginnen met een eenvoudige beschrijving. Van Dale meldt: “dat waarmee iets gevuld is”. Dat sluit goed aan bij de betekenis die ik in gedachten had: als je bij de plaatselijke supermarkt een koetjesreep haalt dan staan daar de ingrediënten op. Ik neem aan dat iedereen het plezierig vindt te weten wat de eigenschappen zijn van wat je koopt. Sterker nog, ik neem aan dat iedereen het de plicht van de koetjesrepenfabrikant vindt op de wikkel aan te geven wat hij er voor zaken in stopt. Voor de hand liggend, logisch en niet ter discussie. Ik mis die openhartigheid in het onderwijs.

Een andere betekenis van ‘inhoud’ kunnen we vinden in de meer persoonlijke sfeer. Van Dale noemt het innerlijke waarde. Onderwijs speelt bij het aanbrengen daarvan een belangrijke rol. Rondom deze essentiële taak die de maatschappij zichzelf heeft toebedeeld, worden we echter van belangrijk minder informatie voorzien dan bij de aankoop van onze reep chocolade. Een snelle telling op de havo/vwo-school waar ik werkte, levert ongeveer 35% academisch geschoolde docenten op. Voor een groot deel van die groep gloort binnen nu en vijf jaar pensioen. Deze informatie is voor buitenstaanders niet toegankelijk. Waarom eigenlijk niet?

In het algemeen plakt er op een school geen helder etiket. In de schoolgids wordt nadrukkelijk vermeld dat er met de modernste methoden gewerkt wordt en ook de internationale reizen worden natuurlijk vermeld. Wie in zo’n brochure echter op zoek gaat naar informatie over het opleidingsniveau van de leraren komt bedrogen uit. Een bijzin als “uitstekende examenresultaten garanderen een succesvolle start aan een vervolgopleiding” volstaat. Dit soort opwaardering van bijzaken en het daarmee gepaard gaande ontbreken van vragen van ouders over de kwaliteit van het onderwijshart, de leraar, heeft me steeds verbaasd. Blijkbaar zijn de ingrediënten van ons onderwijs irrelevant of het onderwerp wordt om sociaal wenselijke redenen gemeden. Ik suggereer natuurlijk stiekem een analogie tussen ingrediënten en opleidingsniveau van de leraar. Ik zal die kort onderbouwen.

Eind vorig jaar heeft een onderzoek met betrekking tot het natuurkundeonderwijs in Groot-Brittannië nogal wat stof doen opwaaien. Succes bij vervolgstudies van leerlingen bleek in eerste instantie sterk voorspelbaar door, natuurlijk, hun aanleg. De opvallende tweede succesindicator was niet de ervaring van een leraar, ook niet de groepsgrootte, en ook niet de sociaal-culturele samenstelling van een groep, maar het opleidingsniveau van de leraar! Dus wil je als overheid sturen in succes, dan weet je aan welke knop je moet draaien (bron: www.buckingham.ac.uk/education/research/ceer/pdfs/physicsprint.pdf).

Ik pleit in dit licht voor een ingrediëntenpublicatieplicht voor scholen. Laat onderwijsinstellingen openbaar maken wat de achtergrond van hun leraren is. Momenteel is het scholen vanwege de Wet BIO toegestaan hierover te zwijgen. (De *Wet op de beroepen in het onderwijs* (Wet BIO) gaat over de kwaliteit van het onderwijspersoneel.) Sterker nog, alle docenten worden op één hoop gegooid, omdat *competentiescans* en *Persoonlijke Ontwikkelingsplannen* (POPs) in deze nivelleringswaan zin blijkbaar meer gewicht inbrengen dan vijf jaar degelijke opleiding. De wet laat zelfs in het midden of er nog wel een wiskundige wiskundeles geeft.

Opvallend is trouwens het verschil tussen eerstegraads lerarenopleidingen aan hbo’s en universiteiten. Ga eens naar de websites van een hbo en een universitaire lerarenopleiding voor het vak wiskunde en let dan op instapeisen en verschillen in curricula tussen beide typen opleidingen. Ik heb tijdens het behalen van mijn lesbevoegdheid een paar maanden op een hbo rondgelopen, maar ik ben vervolgens gevlucht naar de universiteit. Ik weet waar ik het over heb. Dit verhaal geldt overigens niet per definitie voor niet-universitair geschoolde docenten die al jaren voor klas staan: hun opleiding was vergelijkbaar met de huidige universitaire lerarenopleidingen.

Onlangs heb ik het ministerie om informatie gevraagd omtrent het aantal academisch geschoolde leraren in het middelbare onderwijs. Vorige week ontving ik als antwoord dat die gegevens niet bekend zijn, maar dat die op Prinsjesdag 2006 in de *Nota Werken in het Onderwijs 2007* worden gepresenteerd. Toch bijzonder dat de overheid het pas in 2006 nuttig blijkt te vinden om dit soort informatie boven tafel te krijgen. Of zou de roep om beter onderwijs door clubs als Beter Onderwijs Nederland, VNO-NCW, MKB en Lieve Maria toch effect hebben? Aan ons de taak de overheid te doordringen van het belang van de hoogopgeleide eerste- en tweedegraads vakdocent! ←

Wolfgang Jacquet

Faculteit Wetenschappen
 Departement voor Electronica en Informatica (ETRO)
 Onderzoeksgroep Toegepaste Wiskunde (TWIS)
 Vrije Universiteit Brussel (VUB)
 Pleinlaan 2
 1050 Brussel, België
 wjacquet@vub.ac.be

Gert Sonck

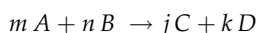
Faculteit Wetenschappen
 Zelfstudiecentrum B (ZSCB)
 Vakgroep Wiskunde (DWIS)
 Vrije Universiteit Brussel (VUB)
 Pleinlaan 2
 1050 Brussel, België
 ggsonck@vub.ac.be

Onderwijs

Reactiekinetiek herbekeken

Bij de invoering van vakoverschrijdende verwerkingsopdrachten voor het eerste bachelorjaar Wetenschappen aan de Vrije Universiteit Brussel blijkt vrijwel geen enkele student een onderbouwde redenering te kunnen formuleren die de reactiesnelheidsvergelijking in de scheikunde motiveert. Dit is de aanleiding tot een zoektocht naar de manier waarop de snelheidswet wordt ingevoerd. De auteurs geven verschillende suggesties voor het bestuderen van de snelheidsvergelijking van een elementaire reactie.

Is het mogelijk om de vorm van de algemeen voorgestelde reactiesnelheidswetten te motiveren door middel van een modelleringsproces waarbij randvoorwaarden van een chemische reactie gecombineerd worden met een gangbare wiskundige benadering? Om de gedachte te vestigen beschouwen we de volgende hypothetische reactie:



Waarin m moleculen A en n moleculen B reageren tot j moleculen C en k moleculen D .

We veronderstellen dat:

1. de reactie 'elementair' is,
2. de terugreactie van C en D naar A en B nagenoeg onbestaande is.

Een elementaire reactie is een reactie die slechts uit één stap bestaat [1], analoog aan het begrip 'elementary process' [3].

De hypothese dat de terugreactie niet plaatsvindt is een redelijke benadering wanneer er zich nog geen, of zeer weinig, reactieproducten C en D gevormd hebben, omdat het dan zeer onwaarschijnlijk is dat een molecuul C een molecuul D tegenkomt.

Laat $[A]$, $[B]$, $[C]$ en $[D]$ de concentraties van de producten A , B , C en D in het reactiemengsel zijn. Merk op dat

$$\frac{1}{m} \frac{d[A]}{dt} = \frac{1}{n} \frac{d[B]}{dt} = -\frac{1}{j} \frac{d[C]}{dt} = -\frac{1}{k} \frac{d[D]}{dt}.$$

De reactiesnelheid wordt dan ook gedefinieerd als $\frac{1}{t} \frac{d[X]}{dt}$, de afgeleide naar de tijd van de concentratie van een van de reagentia ter linker zijde van de reactievergelijking gedeeld door zijn coëfficiënt in de vergelijking. Voor de hand ligt dat de reactiesnelheid enerzijds afhangt van de kans op een botsing tussen de reagentia en anderzijds van de kans dat een botsing aanleiding geeft tot een verbinding. De kans op een botsing is afhankelijk van de concentraties van de reagentia en hun beweeglijkheid, de kans op een 'vruchtbare botsing' is mogelijk afhankelijk van de oriëntatie van de moleculen ten opzichte van elkaar, de botsingsrichting, de noodzakelijke energie om de verbinding tot stand te brengen, enzovoort. Wanneer de temperatuur niet te veel evolueert, de reagentia homogeen verdeeld zijn en er geen katalysatoren gebruikt worden kan, bij wijze van benadering, de reactiesnelheid gezien worden als een functie van de concentraties $[A]$ en $[B]$. Het basismodel wordt:

$$s(t) = \frac{1}{m} \frac{d[A]}{dt}(t) = f([A](t), [B](t)).$$

In vele handboeken wordt dan een multiplicatief model naar voren geschoven:

$$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^m[B]^n.$$

Vervolgens worden als aanpassing voor de niet ideale werkelijkheid en het behandelen van samengestelde reacties, in de exponenten van de concentraties de coëfficiënten vervangen door parameters:

$$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^\alpha[B]^\beta.$$

Ter illustratie van de manier waarop dit gebeurt citeren we enkele

boeken, gebruikt aan de Vrije Universiteit Brussel als referentiewerken voor het bacheloronderwijs.

1. Zonder motivatie, aan de hand van een voorbeeld wordt in [2] gesteld: "For the decomposition of nitrogen dioxide, we can write: $\text{Rate} = k[\text{NO}_2]^n$ ", om vervolgens te vermelden dat de exponent bepaald dient te worden door middel van een experiment, en niet volgt uit de evenwichtsvergelijking. Verder in de tekst lezen we onder de titel 12.3 *Determining the form of the Rate Law*: "The first step in understanding how a given chemical reaction occurs is to determine the form of the rate law. That is, we need to determine experimentally the power to which each reactant concentration must be raised in the rate law."
2. In [4] staat zonder verdere uitleg: "In many instances it is possible to express the differential rate law as a product of reagent concentrations, each raised to some power", analoog in [3]: "Numerous experiments show that the rate of a reaction usually is proportional to the concentrations of the reactants raised to small integer powers."
3. Aan de hand van de beschrijving van een experiment waarin N_2O_5 in gasvorm wordt ontbonden in NO_2 en O_2 voor verschillende beginconcentraties wordt in [1] de vorm van een reactiesnelheidswet ingevoerd. Op basis van dezelfde reactie wordt in [5] een variant van het experiment in [1] gebruikt.

Uit Nederlandstalige boeken halen we de volgende motivaties.

1. Het leerboek [10] verklaart de evenredigheid tussen de reactiesnelheid en de concentraties van de reactieproducten aan de hand van botsingen, zonder in detail te treden. Drie bladzijden verder staat: "In 1867 vonden Guldenberg en Waage dat de reactiesnelheid (s_1) in het homogeen mengsel, waar de concentraties van de reagerende stoffen gering zijn, evenredig is met het product van de concentraties," In een vertaling van het oorspronkelijke werk van Waage en Guldenberg [12], kan geen motivatie voor de specifieke vorm van de reactiesnelheidswet gevonden worden.
2. In [9] wordt verwezen naar resultaten die uit een practicum zijn verkregen, om vervolgens over te gaan op een redenering gebaseerd op botsingswaarschijnlijkheden voor een reactie tussen twee identieke moleculen. De 'wet van de massawerking', wanneer verschillende reagentia voorkomen, wordt verder niet toegelicht.
3. In [7], [6], [8], en [11] volgt uit de evenredigheid van de reactiesnelheid met de concentraties van elk van de reagentia afzonderlijk dat de reactiesnelheid evenredig is met het product van de concentraties, dit zonder deze overgang te motiveren.

Statistische-experimentele benadering

Een gangbare statistisch-experimentele methode voor het bestuderen van een grootheid, functie van verschillende beïnvloedende factoren, is de volgende:

- laat het experiment onder gecontroleerde omstandigheden doorgaan voor verschillende waarden voor de beïnvloedende factoren,
- meet de onderzochte grootheid zo nauwkeurig mogelijk voor de verschillende waarden van de beïnvloedende factoren,
- probeer door middel van bijvoorbeeld een regressieanalyse het verband tussen de beïnvloedende factoren en de onderzochte grootheid te modelleren,
- behoud uitsluitend termen met coëfficiënten die statistisch

significant van nul verschillen.

Een mogelijke vertaling hiervan naar het onderzoek van de reactiesnelheid van 'elementaire' reacties, is:

- laat de reactie onder gecontroleerde omstandigheden doorgaan,
- meet zo nauwkeurige mogelijk de concentraties reagentia als functie van de tijd,
- schat het verloop van de reactiesnelheid,
- probeer door middel van een regressieanalyse de reactiesnelheid te modelleren in functie van de concentraties,
- behoud uitsluitend termen met coëfficiënten die statistisch significant van nul verschillen.

Besluit dat het multiplicatieve model aanvaardbaar is, indien voor nagenoeg alle observaties van het verloop van 'elementaire' reacties enkel de coëfficiënt van het product $[A]^m [B]^n$ van de concentraties significant van nul verschilt.

De onderzochte referentiewerken die vertrekken vanuit een experimentele benadering volgen deze gangbare statistische methode niet. Hierdoor komt de validatie van de vorm van de reactiesnelheidswet vanuit statistisch experimenteel oogpunt in het gedrang. Het multiplicatieve model 'verklaart' de experimenteel waargenomen data, maar a priori zou een ander model beter bij de data kunnen aansluiten. Er zijn echter verzachtende omstandigheden. De reactiesnelheidswetten die verkregen worden door telkens slechts één van de reagentia in de tijd te laten evolueren zijn evenredigheden. Door deze specifieke vorm volgt de algemene reactiesnelheidswet:

Stel dat, indien $[A]$ bij benadering constant is, $s(t)$ evenredig is met $[B]^n$ en dat, indien $[B]$ bij benadering constant is, $s(t)$ evenredig is met $[A]^m$. Expliciet: er bestaan twee functies $\alpha = \alpha([B])$ en $\beta = \beta([A])$ zodat:

$$f([A], [B]) = \alpha([B])[A]^m = \beta([A])[B]^n.$$

Dan volgt door $[A] = 1$ te kiezen, dat $\alpha([B]) = \beta(1) [B]^n$ en, door $[B] = 1$ te kiezen, dat $\beta([A]) = \alpha(1) [A]^m$. Dus is

$$f([A], [B]) = \beta(1) [B]^n [A]^m = \alpha(1) [A]^m [B]^n.$$

Hieruit concluderen we dat $\beta(1) = \alpha(1) =: \gamma$, dus

$$f([A], [B]) = \gamma [A]^m [B]^n.$$

De statistisch experimentele methode dient dus enkel gebruikt te worden voor het aantonen van de evenredigheden wanneer slechts één van de reagentia veranderlijk is.

Taylorbenadering

In de statistische regressieanalyse wordt een poging gedaan om f te benaderen door middel van een polynoom in $[A]$ en $[B]$. Veronderstel dat we de reactiesnelheid $s(t) = f([A], [B])$ kunnen benaderen door middel van een Taylorontwikkeling tot de tweede orde:

$$f([A], [B]) \approx \alpha + \beta_1 [A] + \beta_2 [B] + \gamma_1 [A]^2 + \gamma_2 [A] [B] + \gamma_3 [B]^2.$$

Door te gebruiken dat indien één van de reagentia A of B afwezig is de reactie niet doorgaat, volgt dat alle coëfficiënten behalve γ_2 nul zijn.

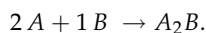
Analoge redeneringen voor Taylorbenaderingen van hogere orde laten zien dat algemeen enkel de termen waarin het product van de concentraties $[A]$ en $[B]$ voorkomen beschouwd dienen te worden.

Het uitbreiden van het model door parameters als machten in te voeren, waarbij het multiplicatieve karakter behouden blijft, kan beschouwd worden als een manier om de hogere orde Taylortermen op te vangen. Hierbij kan de afwijking ten opzichte van één van de parameters eventueel maat staan voor de kwaliteit van de benadering met de tweede orde Taylorontwikkeling.

Uitleggen zonder kanstheorie waarom de coëfficiënten van de reactievergelijking bij elementaire reacties een rol spelen lijkt ons onmogelijk.

Kanstheoretische benadering

Veronderstel, om de gedachte te bepalen, $m = 2$ en $n = 1$:



Noteer M het aantal moleculen A en N het aantal moleculen B in het reactiemengsel op zeker tijdstip. We nummeren de A -moleculen A_1 tot A_M en de B -moleculen B_1 tot B_N . We noteren $[A_i A_j B_k]$ de gebeurtenis dat het i -de A -molecuul met het j -de A -molecuul en het k -de B -molecuul reageren. Hierbij mogen we veronderstellen $j > i$. Dan is:

$$P[\text{reacties}] = \sum_{i=1}^M \sum_{j>i}^M \sum_{k=1}^N P[A_i A_j B_k].$$

Uit symmetrieoverwegingen kunnen we stellen dat de kans dat één welbepaalde A -molecuul met één welbepaalde A -molecuul en één welbepaalde B -molecuul reageert, niet afhangt van welke

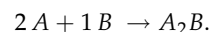
moleculen we beschouwen; we noteren deze kans met P . Dus

$$P[\text{reactie}] = \sum_{i=1}^M \sum_{j>i}^M \sum_{k=1}^N P = \frac{1}{2}(M^2 - M)NP.$$

Bij benadering voor M groot is dit

$$\approx \frac{1}{2} P M^2 N.$$

In het eenvoudigst denkbare model veronderstellen we dat de reactiesnelheid evenredig is met de kans op het plaatsvinden van een reactie op een bepaald tijdstip. De bovenstaande benadering verklaart dan de exponenten 2 en 1 in de reactiesnelheidswet voor elementaire reacties



Een analoog argument generaliseert dit naar willekeurige m en n .

Conclusies

Pedagogisch lijkt het belangrijk om het experiment te behouden, al was het om de rol van de reactiecoëfficiënten in de reactiesnelheidswet te laten ontdekken en vervolgens de waarom vraag te stellen. Om de reactiesnelheidswet te verkrijgen is het voldoende zich te beperken tot het bestuderen van reacties waarbij telkens slechts één van de reagentia veranderlijk is. Het is echter nuttig om aan te geven waarom dit mogelijk is.

Alhoewel men zich kan beperken tot 'experimenteel zien we dat' is het wenselijk om, met een kanstheoretische redenering, voor elementaire reacties te verantwoorden dat de exponenten nagenoeg gehele getallen zijn. Men kan de vorm van de snelheidsvergelijkingen voor elementaire reacties verklaren aan de hand van elementaire wiskunde.

Referenties

- 1 P. W. Atkins, and L. L. Jones, *Chemical Principles: The Quest for Insight Second Edition*, W. H. Freeman and Company, New York, 2002.
- 2 S. S. Zumdahl and S. A. Zumdahl, *Chemistry Fifth Edition*, Houghton Mifflin Company, Boston New York, 2000.
- 3 D. A. McQuarrie and P. A. Rock, *General Chemistry Second Edition*, W. H. Freeman and Company, New York, 1998.
- 4 B. M. Mahan and R. J. Myers, *University Chemistry Fourth Edition*, Addison Wesley, 1987.
- 5 W. L. Masterton and E. J. Slowinski and C. L. Stanitski, *Chemical Principles Sixth Edition*, CBS College Publishing, Japan, 1985.
- 6 K. Bruggemans and Y. Herzog, *Fundamentele begrippen van algemene chemie*, Uitgeverij De Boeck nv, Antwerpen, 2005.
- 7 M. Chalmet and L. Scherpereel and H. Van Landeghem, *Chemie eenheid: Anorganische chemie*, NV Standaard Uitgeverij, Antwerpen, 1995.
- 8 J. C. De Vroey and J. Van de Weerd, *Chemie GO*, Uitgeverij De Boeck nv, Antwerpen, 2004.
- 9 J. Put and E. Vandenbempt and G. Vandermissen, *Chemie in-zicht: Chemische dynamica*, Wolters Plantyn, Deurne, 1999.
- 10 A. Delaruelle and A. I. Claes, *Anorganische chemie*, NV Standaard Uitgeverij, Antwerpen, 1984.
- 11 A. Capon and J. Jansen and M. Meeus and E. Onkelinx and N. Rotty and G. Speelmans and A. Surins and A. Vangerven, *NANO 3: Een venster op chemie en biochemie in het hoger onderwijs*, Wolters Plantyn, Deurne, 1999.
- 12 O. Bastiaansen, *The Law of Mass Action, A Centenary Volume*, Universiteitsforlaget, Oslo, 1964.

Paul Drijvers

Freudenthal Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 9432

3506 GK Utrecht

p.drijvers@fi.uu.nl

Onderwijs

Context, abstractie en vaardigheid in schoolalgebra

Van allerlei kanten wordt er geklaagd over het rendement van het wiskundeonderwijs in de tweede fase van het vwo. Studenten voelen zich slecht voorbereid op de universiteit en hebben de 'Lieve Maria' actie op touw gezet. Op universiteiten zijn zogenaamde efficiëntiecurssussen gemeengoed. De opvattingen over benodigde maatregelen zijn verdeeld. Stemmen gaan op om minder tijd aan contexten te besteden en meer algebraïsche basisvaardigheden te oefenen. Een aantal medewerkers van het Freudenthal Instituut heeft in een recente bundel 'Wat a is, dat kun je niet weten' [1] de standpunten over algebraonderwijs opnieuw bepaald.¹ Paul Drijvers, redacteur van deze publicatie, stelt dat de gesignaleerde problematiek serieus genomen moet worden, maar dat de voorgestelde oplossingen hun doel voorbij schieten.

Het gaat niet goed met algebra in het vwo. De 'afnemers' uit het hoger onderwijs, bijvoorbeeld de technische universiteiten, klagen in toenemende mate over de gebrekkige beheersing van algebraïsche vaardigheden van eerstejaars studenten. Vervolgopleidingen voeren instaptoetsen in die zich vooral op deze basisvaardigheden richten. De resultaten daarvan laten zien dat slechts weinig studenten aan de verwachtingen van de docenten voldoen. "Is dit wat het studiehuis oplevert?" vraagt men zich af.

Op dit moment presteert de vwo-leerling op algebraïsch gebied onder de maat. We treffen in 6-vwo leerlingen aan die pittig ar-

gumenteren, hun verstand durven gebruiken, goede werkstukken maken en die in het openbaar met flair verdedigen. Maar wat algebra betreft zijn diezelfde leerlingen vaak hulpeloos. Een kleine hobbel, bijvoorbeeld in de vorm van een formule met een breuk, blijkt niet zelden onoverkomelijk te zijn.

Wat te doen? Er gaan stemmen op om de klok een tijd terug te zetten: 'back to the basics', weg met al die zogenaamd realistische contexten, gewoon veel oefenen! Dit artikel gaat over twee 'hete hangijzers' in de discussie over schoolalgebra en aansluitingsproblematiek: de rol van contexten en de algebraïsche vaardigheden. Hoewel de signa-

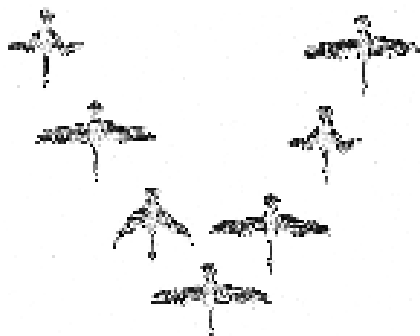
leerde problemen in de tweede fase van het vwo de aanleiding vormen van dit artikel, hebben de voorbeelden en de conclusies ook betrekking op de onderbouw, waar de algebraïsch lijn immers wordt ingezet.

Context en abstractie

Het gebruik van contexten in de wiskundeles roept vragen op. Zijn contexten wel nodig en moeten we wel zo voorzichtig zijn met de overgang van concreet naar abstract? Veelgehoorde kritiek op de manier waarop contexten in het huidige wiskundeonderwijs functioneren, betreft de volgende punten.

Het gebruik van gekunstelde contexten

Niet zelden zijn contexten gekunsteld en irreëel. Het zijn geen herkenbare problemen die op een natuurlijke manier tot wiskunde leiden, maar ze zijn geconstrueerd om wiskunde te verpakken. In een schoolboek vinden we bijvoorbeeld de tekst "Een ijsblokje met ribben van 30 mm begint langzaam te smelten. Elke minuut worden de ribben 1,5 mm korter." Dat is een context die vanuit fys-



Figuur 1 Vogels in V-formatie

isch oogpunt eerder verwarring oproept dan aanleiding is tot wiskundige activiteit. In zulke gevallen is het eerlijker de wiskunde 'puur' te presenteren.

Het misverstand van het dagelijks leven

Het idee van contexten wordt wel eens karikaturaal opgevat als 'elk sommetje moet met een verhaaltje uit het dagelijks leven beginnen'. In een schoolmethode staat bijvoorbeeld: "Meneer Kok besluit zijn grasveld te vergroten. Aan twee kanten komt er een even brede strook van x meter bij." Dergelijke contexten zijn niet realistisch en niet productief.

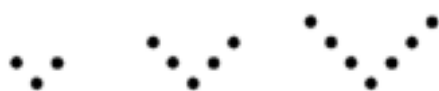
Het achterwege blijven van abstractie

Als de context nooit wordt ontstegen, dan houdt de algebra een ad-hoc karakter en wordt aan abstraheren niet toegekomen. In de situatie van de V-formatie bijvoorbeeld (zie figuur 1 en 2) moet het niet blijven bij het bepalen van het aantal ganzen of stippen in het vijfde patroon, maar moeten ook vragen gesteld worden als: waarom is het aantal stippen altijd oneven? Of: hoe kun je het aantal stippen in het n -de patroon uitrekenen?

Deze kritiek op het gebruik van contexten in de huidige onderwijspraktijk is terecht. De conclusie ervan is echter niet dat contexten overbodig zijn; wel dat er het nodige te verbeteren valt aan de manier waarop ze in de praktijk van het wiskundeonderwijs functioneren. Waarom niet zonder context en hoe moet het dan wel? Eerst drie voorbeelden van contexten die aanleiding zijn tot algebra.

Algebra uit rekenen

Misschien kent u het volgende rekenkuntje.

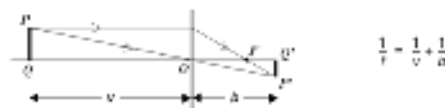


Figuur 2 Abstracte V-formatie

Om 65 te kwadrateren, vermenigvuldig ik de 6 aan het begin met 7, dat is 42, en daar plak ik het kwadraat van 5 achter. Dat geeft dus 4225, klopt. Bij 15 is het nog eenvoudiger te controleren: 1 keer 2 en dan 25 erachter geeft 225. En bij 95 werkt het ook! Met vwo-leerlingen van 13 of 14 jaar kan de verbazing dat dit werkt worden uitgebuit. Om 65 keer 65 te schatten met 60 keer 70, dat is wel een verstandig begin. Maar waarom heb ik dan 25 te kort? Klopt dit altijd? En vooral: hoe kun je dat zeker weten? Met algebra natuurlijk! Uitwerken van $(10a + 5)^2$ is de sleutel. Dergelijke intrigerende rekenopgaven, waarvan er meer te vinden zijn in de oefenbundel van Martin Kindt [2], vragen om algebra als middel dat zekerheid verschaft. In deze rekencontext wordt niet alleen algebraïsche basisvaardigheid geoefend, maar blijkt ook hoe algebra functioneert als onderdeel van de wiskundige activiteit als geheel.

De lenzenformule

In figuur 3 staat de lenzenformule die leerlingen van 14–15 jaar bij natuurkunde tegenkomen. De formule beschrijft de samenhang tussen drie grootheden: brandpunt-, voorwerp- en beeldafstand (f , v en b). Een interessante vraag is nu: hoe verandert de beeldafstand bij een gegeven lens (dus f is vast) als het voorwerp van de lens af beweegt? De constructie in de figuur geeft al een idee: als het lijnstuk PQ naar links beweegt, zal de hoek die de lijn PO maakt met de horizontale as kleiner worden met als gevolg dat P' als het ware naar F toe kruipt. De volgende redenering is hierop een belangrijke aanvulling. Bij een gegeven lens is de som $\frac{1}{v} + \frac{1}{b}$ constant. Als v groter wordt, dan wordt $\frac{1}{v}$ kleiner. Omdat het totaal $\frac{1}{v} + \frac{1}{b}$ niet verandert, moet $\frac{1}{b}$ wel groter worden en dus wordt b kleiner. Andersom geldt natuurlijk: als v kleiner wordt, dan wordt b juist groter. De dynamiek in de fysische context ondersteunt het redeneren met de algebraïsche vormen, die betekenis krijgen vanuit de natuurkundige context.

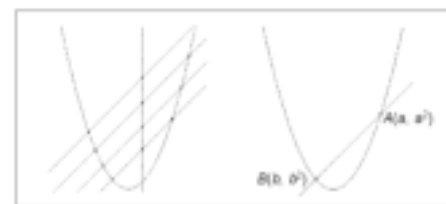


Figuur 3 De lenzenformule in beeld

Algebra in meetkunde

Het voorbeeld in figuur 4, aan de orde in 5 vwo, heeft een meetkundige achtergrond. In het linkerscherm is (met het meetkundeprogramma Cabri) een parabool geconstrueerd. Deze wordt gesneden door enkele evenwijdige lijnen. We letten nu op de middens van de snijpunten van de lijnen en de parabool.

De meetkundige plaats van deze middens lijkt een verticale halve rechte te zijn. Maar is dat echt zo en wat is de positie van die lijn? Dit probleem vraagt om algebra. Stel dat een lijn met voorgeschreven richting de parabool in twee punten snijdt. Kies een handig assenstelsel en noem de x -coördinaten a en b ; de punten zijn dan $A(a, a^2)$ en $B(b, b^2)$. De richtingscoëfficiënt van AB is nu $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$. Omdat we in de meetkundige situatie de richting van de lijnen vast hebben gekozen, weten we dat deze uitdrukking in a en b een vaste waarde heeft.



Figuur 4 Een parabool snijden met een lijn met vaste richting

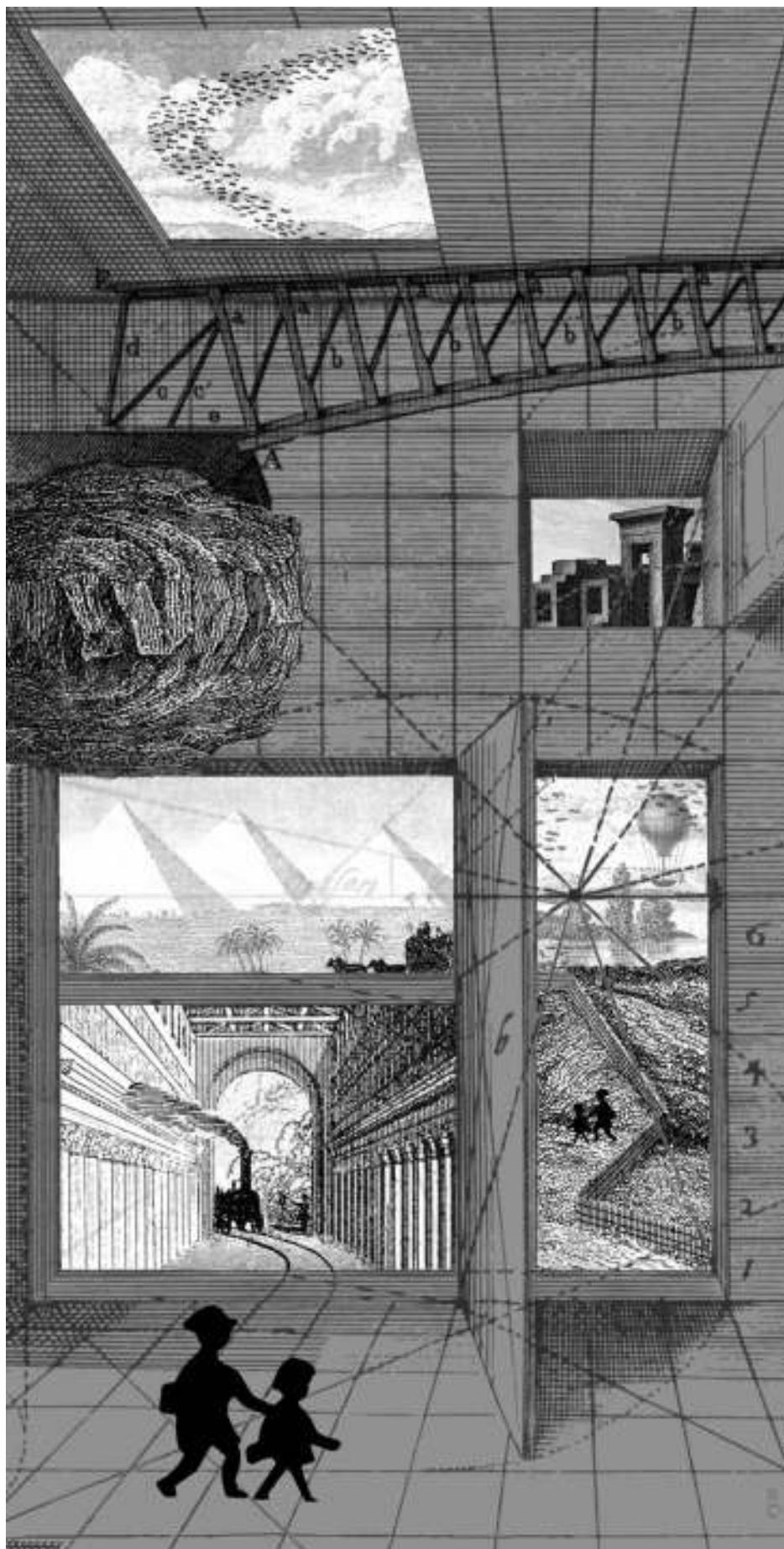
De algebra vertelt ons nu dat

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \text{ voor } a \neq b$$

En we weten dat $a + b$ constant is. Dus $(a + b)/2$ is ook constant. De verbinding algebra-meetkunde ligt nu voor de hand: de x -coördinaten van die middens zijn $(a + b)/2$ en dus constant. Hieruit volgt het meetkundige feit dat de middens van AB op één lijn liggen. In het algebraïsch deel van dit oplossingsproces is de vereenvoudiging van de uitdrukking voor de richtingscoëfficiënt de belangrijkste schakel. De essentiële stappen, de ontbinding van en het uitdelen van een factor $a - b$, zijn algebraïsch en hebben geen direct zichtbare meetkundige representant. De meetkunde is aanleiding tot algebra, maar de band met de oorspronkelijke context wordt hiertijdens de algebraïsche operatie dus even losgelaten.

Algebra: abstraheren van context

Algebra is een hulpmiddel bij het oplossen van problemen. Deze problemen kunnen zich in allerlei gebieden afspelen: in het rekenen (het eerste voorbeeld), in de wiskunde zelf (meetkunde in het derde voorbeeld, maar ook analyse of kansrekening), in andere exacte vakken (natuurkunde in het tweede voorbeeld), economische wetenschappen, levenswetenschappen of in de dagelijkse (beroeps)praktijk. Deze gebieden leveren de contexten waar algebra uit voort komt en waarbinnen ze functioneert.



In de *Van Dale* wordt 'context' onder andere omschreven als het 'verband waarin iets zich voordoet'. Algebra doet zich voor in situaties. Daarmee vormen contexten de bron, de aanleiding en de legitimatie van de algebra. Het is onterecht en gekunsteld om die aanleiding te negeren. Het uitstellen van toepassen 'tot later' is niet motiverend en evenmin productief.

Contexten, in bovenstaande zin opgevat, bieden de leerling grond onder de voeten en zijn het vertrekpunt voor algebra. Een geschikte probleemsituatie wordt vertaald in algebraïsche termen, in een algebraïsch model. Dat modelleren is onderdeel van wat in didactiekjargon horizontaal mathematiseren wordt genoemd. Daar moet het niet bij blijven. Geleidelijk wordt de context losgelaten en gaat het algebraïsch model een eigen leven leiden, waarbij kennis van de abstracte algebra-wereld wordt opgebouwd en toegepast. Zo nodigt de context uit tot abstraheren: het loslaten van de concrete context en het opbouwen van een overstijgende wereld van algebraïsche objecten en operaties, die leerlingen zich geleidelijk aan eigen maken. Deze abstractie is een essentieel onderdeel van het zogeheten verticaal mathematiseren [3].

Abstraheren is bijzonder productief, omdat het je in staat stelt klassen van op het eerste gezicht verschillende situaties vanuit hetzelfde overstijgende perspectief te bekijken en aan te pakken. Abstraheren is echter ook moeilijk: een vertrouwd, concreet referentiekader wordt vervangen door een relatienetwerk van wiskundige objecten en operaties. De aanvankelijk abstracte algebra-wereld wordt steeds meer een betekenisvolle 'realiteit', die daarnaast ook functioneert bij het oplossen van concrete problemen.

Omdat abstraheren zo complex is, kun je er niet mee beginnen. Het moet uit een context ontstaan. Dat betekent natuurlijk niet dat het achterwege moet blijven. Een van de doelen van het algebra-onderwijs in het vwo is dat leerlingen dit abstractieproces ervaren en daaraan schort het vaak in de huidige onderwijspraktijk.

Samengevat

In schoolalgebra vindt een subtiel samenspel plaats tussen context en abstractie, tussen horizontaal en verticaal mathematiseren. De context slaat een brug tussen de ervaringswereld en de wiskundewereld en nodigt uit tot abstractie. Contexten buiten beschouwing laten en meteen insteken op het abstracte niveau is een heilloze weg: voor veel leerlingen is dit niet haalbaar en bovendien leidt

het tot manipuleren in een algebrawereld die voor hen geen betekenis heeft. Daardoor ontwikkelen zij niet het vermogen tot modelleren met en toepassen van algebra, of tot transfer naar andere vakken.

In praktijk functioneren contexten niet optimaal. De kunst is om geschikte contexten te vinden die passen bij de leerling, het onderwijsniveau en het doel van het onderwijs. Dat is geen eenvoudige opgave! Voor bètaprofielen liggen toepassingen uit de exacte sfeer voor de hand. Ook is het aan te bevelen om contexten te gebruiken die langer 'leven' dan één, vaak korte, opgave.

Aan het begin van deze paragraaf was de vraag: zijn contexten wel nodig en moeten we wel zo voorzichtig zijn met de overgang van concreet naar abstract? De antwoorden zijn dus: ja, in het algemeen zijn contexten nodig, en zeker, de overgang van concreet naar abstract is een subtiele, die verre van triviaal is. De abstractiestap moet, zeker in de tweede fase van het vwo, wel worden gezet, maar met beleid.

Algebraïsche vaardigheden

Een tweede discussiepunt is de beheersing van algebraïsche basisvaardigheden, waaraan het instromende studenten in exacte vervolgoedingen lijkt te mankeren. Het vereenvoudigen van

$$\frac{3a}{3a-2} - \frac{a+2}{a}$$

gaat eerstejaars studenten bijvoorbeeld slecht af². Het differentiëren van een functie als

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

kan ook onoverkomelijke problemen veroorzaken.

Ook in de internationale literatuur komen we voorbeelden tegen van tegenvallende vaardigheden. Wenger laat bijvoorbeeld zien dat leerlingen en studenten ook vroeger al geen idee hadden hoe ze een vergelijking als

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

naar v moeten oplossen [4]. Moet er dan niet gewoon meer op die basisvaardigheden worden geoefend? Misschien wel, maar dat is zeker niet het hele antwoord.

Basisvaardigheden en symbol sense

Voor deze discussie is het goed verschillende kanten van algebraïsche vaardigheid te onderscheiden. Schoolalgebra omvat het uit-



voeren van standaardprocedures zoals het oplossen van eenvoudige vergelijkingen en het vereenvoudigen van uitdrukkingen. Dat is algebraïsche basisvaardigheid, zeg maar algebraïsch rekenen [5]. Het is duidelijk dat leerlingen een aantal basisbewerkingen geroutineerd en foutloos moeten kunnen uitvoeren. Dat vraagt behalve inzicht ook oefening en onderhoud en op dit punt is een herbezinning op de huidige onderwijspraktijk op zijn plaats. Hoewel uitgebalanceerde leerlijnen ontbreken, zijn hiervoor wel aanknopingspunten voorhanden zoals die van het productief oefenen [2].

Maar algebra is meer dan het beheersen van basisvaardigheden. Denk bijvoorbeeld aan:

- een geschikte strategie kiezen, een plan maken, heuristieken gebruiken;
- een algebraïsch model opstellen, algebraïsch modelleren;
- zien hoe het repertoire van basisvaardigheden in de situatie kan worden toegepast;
- overzicht houden op het oplossingsproces zonder te ‘verdrinken’ in deelstappen;
- vervolgstappen verstandig kiezen;
- globaal kijken naar expressies, formules ‘lezen’ en daarin relevante en minder relevante kenmerken onderscheiden;
- algebraïsche resultaten interpreteren.

Kemme spreekt in dit verband van algebraïsch redeneren [5]. De redenering bij de lenzenformule is een voorbeeld. In zulke kwalitatieve redeneringen spelen bijvoorbeeld symmetrie-overwegingen en randgevallen een rol, of het identificeren van ‘winnende factoren’ in een algebraïsch krachtenspel.

In de vakliteratuur wordt voor dit alles het begrip *symbol sense* gebruikt [6–8]. Symbol sense is de algebraïsche expertise of ‘algebraïsche geletterdheid’ die op de achtergrond de uitvoering van de basisroutines stuurt en het inzicht in onderliggende concepten omvat.



Figuur 5 Twee kanten van algebraïsche vaardigheid

Figuur 5 geeft de dimensie basisvaardigheid–symbol sense schematisch weer. Het gaat niet om tegenpolen: de twee kanten zijn sterk verweven en het één kan niet zonder het ander. Algebraïsch redeneren is pas goed mogelijk als je de bewerkingen enigszins in de vingers hebt. Andersom is bij het algebraïsch rekenen

ook enig redeneren nodig, zeker als de ‘automatische piloot’ hapert of de situatie afwijkt van de gebruikelijke.

Deze dimensie helpt om het probleem te lokaliseren. De klachten uit het vervolgonderwijs spitsen zich toe op de linkerzijde, wat het pleidooi voor het oefenen van basisvaardigheden verklaart. Het probleem ligt echter complexer. We kijken vanuit dit perspectief even terug op de gegeven voorbeelden.

In het voorbeeld uit de ingangstoets ontbreekt bijvoorbeeld een doel, wat het opstellen van een plan moeilijk maakt. Wat een handige vorm van

$$\frac{3a}{3a-2} - \frac{a+2}{a}$$

is, hangt tenslotte van de situatie af. Vermoedelijk zou de score beter zijn als er ‘0’ achter de uitdrukking had gestaan.

In het voorbeeld van de afgeleide van

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

is het goed mogelijk dat de leerlingen uitstekend in staat zijn om $f(x) = \frac{1}{x}$ en $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ naar x te differentiëren, maar niet zien hoe ze dat kunnen gebruiken in de complexere samenstelling.

Bij het oplossen van

$$v\sqrt{u} = 1 + 2v\sqrt{1+u}$$

naar v is de clou dat leerlingen de vergelijking niet zien als

$$v \times \Delta = 1 + 2 \times v \times \square,$$

waarbij de inhoud van Δ en $\square$ er niet toe doet omdat de twee wortels niets met v te maken hebben. De basisvaardigheden zijn hier zinloos zolang je niet in staat bent de vergelijking op zo’n globale manier te doorzien. Sterker nog, al te veel oefening met wortelvormen is waarschijnlijk de oorzaak van de veelgemaakte strategische fout om in deze vergelijking eerst te proberen de wortels weg te werken ([4, 9]).

In het eerder gegeven voorbeeld van de parabool en de lijn (figuur 3) zijn leerlingen misschien wel in staat om $a^2 - b^2$ te ontbinden als hun dat ‘kaal’ wordt gevraagd; de moeilijkheid ligt voor een deel in het herkennen van de toepasbaarheid van deze ontbinding in deze situatie.

De matige prestaties van leerlingen en studenten worden veroorzaakt door de onvoldoende beheersing van het subtiele samen-

spel tussen routine om basisbewerkingen te kunnen uitvoeren en impliciete symbol sense vaardigheden die daarbij een rol spelen.

Het gaat dan om het plannen van het oplossingsproces, het herkennen van de toepasbaarheid van basisoperaties in complexere situaties, en het stapelen van verschillende basisoperaties die in principe beheerst worden. Het ontbreken van deze symbol sense vaardigheden is één van de oorzaken van de hulpeloosheid van de leerlingen. Het probleem met het ‘kaal’ oefenen van basisvaardigheden is dat deze symbol sense aspecten onvoldoende aandacht krijgen. Het strategisch toepassen van basisvaardigheden in complexe situaties moet dus in het algebraonderwijs expliciet aan de orde komen.

Samengevat

Het geïsoleerd oefenen van basisvaardigheden brengt het gevaar met zich mee dat symbol sense vaardigheden onderbelicht blijven. Het gevolg is dan dat leerlingen de algebra niet kunnen toepassen, de oplossingsmethode niet overzien of niet met een stapeling van basisstappen kunnen omgaan. Natuurlijk kan het goed zijn om af en toe een element van het algebraewerk apart te nemen en te oefenen. Toch valt meer te verwachten van geïntegreerde oefening, waarin inzicht en automatisme hand in hand gaan. Beter dan Freudenthal [10] kunnen we het niet zeggen:

“Advocates of insightful learning are often accused of being soft on training. Rather than against training, my objection to drill is that it endangers retention of insight. There is, however a way of training — including memorisation — where every little step adds something to the treasure of insight: training integrated with insightful learning.”

Welke kant op met algebra in het vwo?

Wat betekent het bovenstaande nu voor de handelingspraktijk van leerling en docent in de wiskundeles? Om te beginnen is al opgemerkt dat geschikte contexten het vertrekpunt vormen voor mathematiseren. In de Natuurprofielen, waar de kwestie van de algebraïsche vaardigheden het sterkst speelt, zullen deze veelal in de bètasfeer of in de onderdelen van de wiskunde zelf gevonden kunnen worden.

Voor de leerlingen is zo’n context aanleiding tot algebraïseren, waarbij in meer of mindere mate afstand tot de concrete probleemsituatie wordt genomen. Dan is een aantal algebraïsche bewerkingen nodig. Daarbij zijn basisvaardigheden en symbol sense vaardigheden verweven. De basisvaardigheden moe-

ten zodanig beheerst worden dat de leerling niet struikelt over 'letterbreuken', machten en wortels, of haakjes. Symbol sense vaardigheden maken dat de leerling een oplossingsstrategie kan ontwikkelen en aanhouden, en om kan gaan met complexe stapeling van basisoperaties. Samen maakt dit dat de leerling niet langer met lege handen staat bij algebraïsche obstakels. Afhankelijk van de context kan het werk zich op het niveau van de probleemsituatie bevinden of daarnaar terugkeren, of zich meer op het abstracte niveau van de algebra-wereld afspelen.

De docent heeft in dit proces een belangrijke rol. Hij kan bepaalde basisvaardigheden uit het oplossingsproces even apart laten oefenen. Als bijvoorbeeld de lenzenformule uit figuur 3 moet worden omgeschreven tot

$$b = \frac{fv}{v - f},$$

kan het uitdrukken van één variabele in andere ook geïsoleerd worden geoefend, wat zeker voor gevallen met parameters is aan te bevelen. Ook kan de docent de vaak impliciete heuristische, begripsmatige en strategische aspecten van het oplossingsproces be-

nadrukken. Of de leerlingen uitdagen om de stap naar de abstractie te zetten. Op deze manier wordt algebraïsche activiteit, die zowel basisvaardigheden als symbol sense omvat, een natuurlijk en geïntegreerd onderdeel van het oplossen van problemen.

Conclusie

De problematiek van de gebrekkige aansluiting tussen voorbereidend onderwijs en hoger onderwijs, de matige beheersing van algebraïsche vaardigheden en het ontbreken van leerlijnen voor ontwikkeling en onderhoud hiervan moet serieus worden genomen. De oorzaak wordt echter al te eenvoudig bij het gebruik van contexten en het gebrek aan oefening van basisvaardigheden gelegd³. Te weinig aandacht voor contexten leidt ertoe dat de aanleiding tot en de toepassing van algebra onderbelicht blijven. Dan wordt algebra een geïsoleerde en moeilijk toegankelijke wereld in plaats van een betekenisvol, geïntegreerd en toepasbaar onderdeel van de wiskunde⁴. Een goede context nodigt uit tot abstractie en algebraïsche begripsontwikkeling.

Voor wat betreft de vaardigheden moet de verwevenheid van basisvaardigheden en

symbol sense centraal staan. Dat neemt niet weg dat er op het punt van de algebraïsche basisvaardigheden werk aan de winkel is. In onderwerpen als Analytische meetkunde en Dynamische modellen, die in het experimentele examenprogramma voor wiskunde D staan (zie www.ctwo.nl), kunnen algebraïsche basisvaardigheden een natuurlijke en functionele plaats krijgen. De volgende punten geven dan ook richting aan het ontwikkelen van het algebra-onderwijs in het vwo:

- Het vertrekpunt zijn goede, functionele en uitdagende contexten die betekenisvol zijn voor de leerlingen van het vwo, aansluiten bij het niveau en het profiel van de leerling en uitnodigen tot abstraheren;
- Algebra wordt organisch ingebed in het wiskundeleerproces en niet aangeleerd als een verzameling geïsoleerde stukjes acrobatiek;
- Algebra is voor de leerling van het vwo zowel een middel om problemen op te lossen als een gebied waarin uitdagende abstractere vragen worden onderzocht;
- Bij schoolalgebra gaan inzicht en beheersing, symbol sense en basisvaardigheid hand in hand.

Noten

- 1 Voor dit artikel is met name geput uit het hoofdstuk 'Oriëntatie op schoolalgebra' van Paul Drijvers, Aad Goddijn en Martin Kindt.
- 2 Dit item is afkomstig van de ingangstoets van de TU Eindhoven in 2003.

- 3 Evenmin ligt naar mijn overtuiging de oorzaak in het gebruik van ICT, maar dat is een onderwerp voor een ander artikel, zie bijvoorbeeld [8].
- 4 Het is overigens opvallend dat de vernieuw-

ingscommissies van de andere bètavakken het gebruik van contexten in de zogeheten context-concept benadering als leidraad nemen in de ontwikkeling van de nieuwe examenprogramma's voor de tweede fase h/v per 2010.

Referenties

- 1 P. Drijvers (red.), *Wat is, dat kun je niet weten. Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school*, Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2006.
- 2 M. Kindt, *Oefeningen in algebra*, Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2003.
- 3 K. Gravemeijer, 'Revisiting 'Mathematics education revisited'', in *Freudenthal 100* (H. Ter Heege, T. Goris, R. Keijzer, L. Wesker, red.), Universiteit Utrecht, Freudenthal Instituut, 2005, pp. 106–113.
- 4 R.H. Wenger, 'Cognitive science and algebra learning', in *Cognitive science and algebra learning* (A. Schoenfeld (Ed)), Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1987.
- 5 S. Kemme, 'Welke algebra is nodig voor klas 4?', *Nieuwe Wiskrant*, **21**(3) (2002), pp. 29–31.
- 6 A. Arcavi, 'Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics', *For the Learning of Mathematics*, **14**(3) (1994), pp. 24–35, <http://flm.educ.ualberta.ca/>.
- 7 A. Arcavi, 'Developing and using symbol sense in mathematics', *For the Learning of Mathematics*, **25**(2) (2005), pp. 42–47.
- 8 P. Drijvers, 'Algebraïsche vaardigheden, symbol sense en ICT' *Nieuwe Wiskrant*, **23**(1) (2003), pp. 38–42.
- 9 K. Gravemeijer, 'Globaal kijken, een kenmerk van algebraïsche deskundigheid' *Nieuwe Wiskrant*, **10**(2) (1990), pp. 29–33.
- 10 H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1991.

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



Paul Drijvers (red.)
**Wat a is, dat kun je niet weten:
 Een pleidooi voor betekenisvolle al-
 gebra op school**
*Utrecht : Freudenthal Instituut, Universiteit
 Utrecht, 2006*
 199 p., prijs €15,00
 ISBN 90-70786-00-1

De titel van dit boek *Wat a is, dat kun je niet weten*, een verzameling artikelen onder redactie van Paul Drijvers, lijkt de lezer te willen verleiden een formule op te lossen en hierdoor algebra te bedrijven. Op de achterflap staat te lezen dat dit boek gaat over betekenisvolle algebra op school, waarmee bedoeld wordt dat algebraïsche vaardigheden in contexten hun betekenis krijgen. De betekenis van algebra als zijnde nuttig en zinvol voor de vorming van abstractie in wiskundige context, is niet het pleidooi dat Drijvers wil ontlocken — hoewel hiervoor voldoende aanknopingspunten in het boek te vinden zijn.

De opbouw van het boek is van 'laag naar hoog'. Dat wil zeggen dat het boek begint met rekenen in het primair onderwijs — via algebra in het vmbo, de onderbouw en de tweede fase van havo en vwo, het profiel natuur en techniek — en eindigt in een visie op schoolalgebra als onderdeel van de schoolwiskunde. Alle auteurs werken op het *Freudenthal Instituut*, dat zich vanaf zijn oprichting gespecialiseerd heeft in de ontwikkeling van realistisch wiskundeonderwijs. In het Nederlandse primair onderwijs is deze realistische benadering inmiddels in brede zin geaccepteerd. In de bovenbouw van het voortgezet onderwijs daarentegen, stapelen de problemen zich op. Het hoger onderwijs constateert een ernstig tekort aan algebraïsche vaardigheden. Deze publicatie speelt daarop in door een discussie op gang te willen brengen over betekenisvolle schoolalgebra. In hoofdstuk 4, dat algebra in de onderbouw van havo en vwo beschrijft, vergelijkt Paul Drijvers voorbeelden uit veel gebruikte schoolmethodes van 1955, 1969 en 2003. Opvallend is, dat hij verdedigt waarom het algebraonderwijs anno 2003 is wat het is. Hij ondersteunt dat met een voorbeeld uit Getal en ruimte 1 havo/vwo (2003). Het gaat over mevrouw Slim die in haar tuin een diepe put (het water is onder in de put warmer dan boven in de put) wil, zodat ze onderin water kan koken. "Meneer Slim is tot vele dingen bereid. Toch wil hij zo'n put niet voor zijn vrouw graven. Waarom denk je?" (p. 56). De vraag is of het hier wel om een betekenisvolle context gaat. Het hoofdstuk vervolgt met patronen en structuren, formules en variabelen, generaliseren en bewijzen, en mondt uit in een gedifferentieerd model voor de toekomst. Er zijn voldoende aanzetten tot de conceptvorming in dit hoofdstuk te vinden.

Het stippenpatroon bijvoorbeeld (figuur 4 op p. 59): rijen stippen in de vorm van een vierkante matrix, 1 zwarte stip in de eerste kolom aangevuld met grijze stippen en de laatste rij alleen zwarte stippen (dus in geval van een vierkante matrix van 9 stippen: 1 zwarte stip gevolgd door 4 grijze stippen in de eerste 4 rijen en 5 zwarte stippen in de laatste rij), ontwikkelt zich tot de algebraïsche structuur $N^2 = (2N - 1) + (N - 1)^2$.

Dit patroon wordt niet verder uitgewerkt naar formules, variabelen, generaliseren en bewijzen, of naar het geïntroduceerde model. Het hoofdstuk zou aan overtuigingskracht winnen als volgens dit model: (1) het stippenpatroon (context) zich zou ontwik-

kelen tot de structuur

$$N^2 = (2N - 1) + (N - 1)^2 \quad (\text{representatie});$$

(2) er een verband gelegd wordt met

$$N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1 \quad (\text{procedure});$$

en (3) zich verder ontwikkelt via

$$N^2 - (N - M)^2 = 2NM - M^2$$

en

$$(N - M)^2 = N^2 - 2NM + M^2 \quad (\text{generaliseren})$$

tot merkwaardige producten (concept). In het hoofdstuk daarna gaat Drijvers verder in op algebraïsche vaardigheden als basisvaardigheden en als symbol sense. Terecht legt hij de nadruk op de ontwikkeling van symbol sense. In de uitwerking daarvan grijpt hij terug naar contexten. Het gaat dan om twee gemeenten *A* en *B* die aan dezelfde kant van een spoorlijn, respectievelijk op 5 en 10 km afstand van die lijn liggen. "De afstand van *A* tot *B* is (hemelsbreed) 13 km De busmaatschappij wil dat de totale afstand $AS + SB$ zo klein mogelijk is. Wat is de beste plaats voor het (trein)station?". De illustratie bestaat uit punten en lijnen. Kan deze context als betekenisvol gekarakteriseerd worden? Verderop illustreert figuur 9 (p. 79) een opgave die algebraïsch redeneren over even en oneven functies beoogt uit te lokken.

Vraag "Wat valt je op in de grafieken van f , g , en h ?" als $f(x) = x^4 - x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$, en $h(x) = 3^* \cos x$.

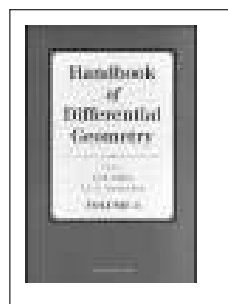
Vermoedelijk wordt hier toch enige bemoeienis van de docent verwacht. In dit hoofdstuk legt Drijvers verder geen verbanden met het eerder geïntroduceerde model in hoofdstuk 4.

Henk van der Kooij en Aad Goddijn komen in hoofdstuk 6 met een geslaagde aanzet tot integratie van algebra in andere schoolvakken. Zo is er een rijke variatie te vinden in de ontwikkelgang van context naar representatie. De stap daarna, van representatie naar conceptontwikkeling komt niet aan de orde, daardoor blijft het bij een serie aanzetten tot de vorming van symbol sense. In hoofdstuk 7 spitst Martin Kindt zich toe op de vorming van basiskennis met het oog op conceptontwikkeling (abstractie). Terecht legt hij de vinger op de zwakke plek, te weinig oefening om als automatisme te worden opgeslagen in het geheugen. Basiskennis is noodzakelijk voor de opbouw van wendbare kennis. Cursief en vet gedrukt is de volgende zin te lezen "Goede vaardigheid in rekenen en algebra schept ruimte om productief wiskunde te bedrijven" (p. 108). Menigeen zal deze uitspraak van harte bevestigen. Kindt komt vervolgens met allerlei voorbeelden om technieken te oefenen zoals omkeervragen 'Bedenk een vergelijking waarvan 9 en -10 de enige oplossingen zijn', en 'Zoek een functie y van x zodat $y^2 = 2y$ ' (p. 115). Ook de rijtjes, slierten en patronen uit de Rekenkalender (1979) om slim te leren rekenen zijn aanbevelingswaardig. Gelukkig merkt Kindt op "het kwadraatafsplitsen en het ontbinden in factoren in eerste instantie als dé aangewezen oplossingstechnieken te beschouwen bij vierkantsvergelijkingen" (p. 126). Daarnaast geeft hij voldoende uitdagende voorbeelden om oefenen leuk te kunnen vinden, de verbazing van eenzelfde uitkomst van een hele rij opgaven bijvoorbeeld (uit Sawyer, 1969). De tien aanbevelingen om productief te oefenen zijn zeker de moeite van het lezen waard.

Paul Drijvers en Martin van Reeuwijk gaan in hoofdstuk 8 in

op de relatie tussen ICT-gebruik en algebra. Onder het kopje 'recente ontwikkelingen' halen zij een voorbeeld uit *Moderne wiskunde A1(B1)* deel 1, p. 127 aan. Het voorbeeld gaat over onderzoek naar de grafiek van $y = \sin(x - c)$. De vraag is of juist in deze context de pc zo noodzakelijk is. Vermoedelijk is een onderwijsleergesprek minstens zo effectief. Gaat het bij ICT-gebruik juist niet om activiteiten die zonder die hulpmiddelen niet mogelijk zijn? ICT-gebruik in het onderwijs is tenslotte een middel en geen doel. Dit doel wordt verduidelijkt met een illustratie van een applet *Geometrische Algebra* over $2x^2 + 2y^2 + 5xy$ (figuur 3). De meerwaarde van de meetkundige representatie in deze algebraïsche context is niet direct duidelijk, maar die zal zeker te vinden zijn (p. 141). Drijvers en Van Reeuwijk vinden overigens ook dat de rol van de docent cruciaal is. Bij 'het vermenigvuldigen van lijnen' bijvoorbeeld staat een illustratie (figuur 4, p. 142) met de afbeelding van het scherm van een grafische rekenmachine: grafieken van twee lijnen die allebei de x -as snijden en de grafiek van een tweedegraads functie die uiteraard door dezelfde snijpunten gaat. Wellicht origineel, maar ze geven geen relaties aan met dal- en bergparabolen, kwadratische of lineaire vergelijkingen. De voorbeelden in dit hoofdstuk zijn stuk voor stuk de moeite waard, maar een theoretisch raamwerk ontbreekt. In het laatste hoofdstuk, van de hand van Aad Goddijn, komt de oorsprong van algebra en de betekenis daarvan in de geschiedenis op fraaie wijze tot uiting. Misschien had dit wel het eerste hoofdstuk moeten zijn. Ongetwijfeld is het zo dat dit boek de lezer op ideeën brengt en daarom voldoet aan de oorspronkelijke bedoeling, een brede discussie over betekenisvolle algebra op school. Een 'volbloedwiskundige' zal zich wellicht verbazen over de niet-klassieke opzet en uitwerking. Voor lerarenopleidingen is dit echter een aanrader omdat er voldoende aanzetten te vinden zijn tot reflectie op de plaats die algebra toekomt in het voortgezet onderwijs. Trouwe *Nieuwe Wiskrant* lezers zullen de intenties van de schrijver(s) herkennen. Wie wil weten wat a betekent en zijn algebraonderwijs wil introduceren met elementen uit de geschiedenis of wil integreren met meetkunde, analyse of statistiek moet dit boek zeker aanschaffen.

N. Verhoeve



F.J.E. Dillen, L.C.A. Verstraeten (eds.)
Handbook of Differential Geometry (vol. 1)

Amsterdam: North-Holland, 2000

1054 p., prijs \$ 187,-

ISBN 0-444-82240-2

The editors of this handbook have taken on a massive task. Their aim is to give a 'rather complete survey of differential geometry'. Wisely enough they make no predictions as to how many handbooks it will take to complete their undertaking. The editors avow their intention to publish chapters covering significant areas of differential geometry as they are sent in by the contributors to these volumes, rather than trying to build the house of differential geometry from its foundations. This may be the only feasible approach, although the resulting somewhat jumbled collection may leave not only this reader slightly dissatisfied.

This first volume contains chapters on differential geometry of webs, spaces of metrics and curvature functionals, Riemannian submanifolds, Einstein metrics in dimension four, the Atiyah-Singer index theorem, isospectral manifolds, submanifolds with parallel fundamental form, sphere theorems, affine differential geometry, isoparametric hypersurfaces, and curves. Each is written by a leading expert in the respective area. The few that I have browsed contain expository writing of the highest quality.

The prospective readership varies from chapter to chapter. For instance, the brief survey by P. Gilkey on the Atiyah-Singer index theorem strikes me as one of the most useful introductions to this topic that I have seen and provides a quick guide to the central ideas in this landmark theorem. Equally valuable are C. Gordon's survey on isospectral manifolds and G. Thorbergsson's on isoparametric hypersurfaces, the latter containing an immensely valuable historical sketch, as well as K. Shiohama's review of sphere theorems.

It will be a very different reader who has the stamina to plough through close to three hundred pages on Einstein metrics in dimension four, written by A. Derdzinski. This is really a monograph written for the reader with serious ambitions. The same holds for the chapters on differential geometry of webs, by M. Akivis and V. Goldberg, and Riemannian submanifolds, by B.-Y. Chen, which are of similar dimensions.

A look at the bibliographies of the individual chapters reveals other striking differences in the author's intentions. Derdzinski's chapter, for example, has a very brief bibliography, suggesting that it can be read almost like a textbook. Gilkey's survey, appropriately enough, has an equally brief bibliography and refers those who want to learn more to some standard monographs. Chen's bibliography, by contrast, covers 44 pages, and other authors aim at similar encyclopaedic surveys of the literature.

All in all, I find some of the longer chapters – well written and interesting as they may be – a little at odds with the spirit of a handbook. If one were to measure a subject's importance by the number of pages allocated to it in this handbook, one might get a downright skewed view of differential geometry. But for the price of a couple of textbooks one gets a handful of very useful surveys plus three monographs thrown in for good measure. The individual reader may want to decide from the actual choice of topics whether this or any forthcoming handbook really is a bargain, but I would certainly wish to find them in a not too dusty corner of my local library.

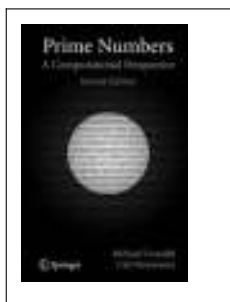
H. Geiges

a cheap, fast and reliable slave which can do all the tedious computing work at a rate which is only limited by the speed of light. This slave has much stimulated the development of algorithms for treating questions on prime — and composite — numbers. Some of these algorithms would probably never have been found without the presence of fast computers, simply because they are too complicated to be tested and applied *without* them. As a consequence, a new scientific discipline called *computational number theory* has arisen on the interface between mathematics and computer science.

This book is a very successful attempt of the authors to describe the current state-of-the-art of computational number theory, with focus on prime number questions. It starts with an introductory chapter on what we know about primes and on celebrated prime conjectures like the twin primes conjecture, the Goldbach conjecture, and the Riemann hypothesis, and a chapter on basic algorithms which play a key role in computational number theory, like Euclid's algorithm for computing the greatest common divisor and the modular inverse. The core of the book (Chapters 3–7) concentrates on the following three questions: A. how to find out quickly whether or not a given large number is prime; B. how to *prove* large numbers to be prime; C. how to find the prime factors of large numbers, which are known to be composed of two or more primes. Space does not allow us to even only mention here all the algorithms which are discussed in this book, to help answer these three questions. Therefore we restrict ourselves here to the best (class of) algorithms which are known for each of the three questions.

To answer question A, so-called pseudoprime tests are the best to use. The simplest one is Fermat's little theorem: *If n is a prime, then for any integer a we have $a^n \equiv a \pmod{n}$.* Unfortunately, there are also composite numbers satisfying this theorem but these are quite rare, and with several refinements to (practically) exclude these composites, Fermat's little theorem is the best known approach to tackle question A. The fastest known algorithm to prove primality of large numbers (question B.) is based on the theory of elliptic curves. An implementation of this by Atkin and Morain has been used to prove primality of (general) numbers of several thousands of digits. Its complexity is not known, but heuristic estimates say that it is polynomial, i.e., in practice $O(\log^{4+\epsilon} n)$ operations are needed to prove primality of n . The second edition of this book also describes the recent AKS primality test of Agrawal, Kayal and Saxena and newer variants of it which are proved to have polynomial time complexity (but have not yet beaten the best known practical primality proving algorithms). The best known algorithm for factoring large numbers n (question C.) is the so-called Number Field Sieve. It tries to find integers x and y such that $x^2 \equiv y^2 \pmod{n}$ and next computes $\gcd(x - y, n)$. If $x \not\equiv \pm y \pmod{n}$, then $1 < \gcd(x - y, n) < n$ so this gcd is a proper divisor of n . Such a pair x, y is constructed (basically) by finding and combining many pairs $\theta, \phi(\theta)$, where θ lies in a particular algebraic number ring, and ϕ is a homomorphism from that ring to $\mathbb{Z}_n$. The largest (general) number factored so far with the Number Field Sieve has 200 decimal digits.

Chapter 8, *The ubiquity of prime numbers*, describes many disparate domains *outside* number theory where prime numbers play a role. Chapter 9 treats fast algorithms for large-integer arithmetic. This is indispensable for computational number theory because modern factoring and primality testing algorithms are



Richard Crandall, Carl Pomerance
Prime Numbers: A Computational Perspective

New York: Springer Verlag, 2005 (2nd ed.)
597 p., prijs €58,80
ISBN 0-387-25282-7

Prime numbers, the building blocks of the numbers by which we count, have fascinated calculators since antiquity. On a scientific level, this has given rise to the mathematical research domain called number theory. The computer era has provided this with

dealing with numbers which are far too large to be stored in single machine words.

One of the many attractive features of this book is the rich and beautiful set of exercises and research problems at the end of each chapter in which the authors generously offer the reader many good ideas for further study and research. For example, Chapter 1 closes with twenty-three pages of exercises and eight pages of research problems, while the whole chapter covers 76 pages!

Another attractive feature is that the algorithms are presented in a C language style pseudocode which makes them easily understandable and convertible in C or some other programming language. The website www.perfsci.com gives implementation code in *Mathematica* form of all the algorithms presented in this book.

The reviewer knows one of the authors as an excellent teacher. This is reflected throughout the book: the authors have managed to lay down their broad and deep insight in primes into this book in a very lucid and vivid way. For the reviewer, while reading parts of the book, it was as if he was following blackboard talks of Carl Pomerance. The book provides excellent material for graduate and undergraduate courses on computational number theory.

Warmly recommended to researchers and students interested in the fascinating world of prime numbers!
H.J.J. te Riele

vele voorbeelden van misbruik van getallen bij het nemen van beslissingen. Het zal er voor zorgen dat ik de krant morgen wat kritischer dan gewoonlijk zal lezen.
G. Koole



S. Albeverio, P. Kurasov
**Singular Perturbations of Differential Operators:
Solvable Schrödinger-type Operators**
London Mathematical Society Lecture Note Series, 271
Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 429 p., prijs £ 38.00
ISBN 0-521-77912-X

The interest in the singular perturbation problems treated in this book probably started with the four page paper by F.A. Berezin and L.D. Faddeev published in 1961. In it they studied the delta potential interaction $L_\alpha = -\Delta + \alpha\delta(x)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, of the Laplace operator $-\Delta$ in the Hilbert space $L^2(\mathbf{R}^3)$. The problem was to model this expression by a selfadjoint operator with the same spectral properties. The key to their solution is to identify L_α with one of the selfadjoint extensions of the restriction $L^0 = \Delta|_{C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})}$ of $-\Delta$, whose closure in $L^2(\mathbf{R}^3)$ is a symmetric operator with defect indices $(1, 1)$. Similar modelling problems appear in, for example, quantum theory, fluid mechanics, optics, superconductivity, and high energy physics. The appendix in the book (25 pp.) on the history and background of singular perturbations refers to these applications in these and many other fields, and the bibliography contains just below a thousand items.

Mathematically these problems can be formulated as follows: Associate a suitable selfadjoint operator A_α , sometimes called the realization or model, with the formal expression $A + \alpha\langle\varphi, \cdot\rangle\varphi$, where A is a given selfadjoint operator in a Hilbert space H and φ is some singular element. To define the latter, one uses the scale of Hilbert spaces associated with A : $H_2(A) \subset H_1(A) \subset H \subset H_{-1}(A) \subset H_{-2}(A)$. The two sets on the left are the Hilbert spaces $\text{dom } |A|$ and $\text{dom } \sqrt{|A|}$ equipped with the norms $\|f\|_j = \|(|A| + 1)^{j/2}f\|$, $j = 2, 1$, respectively. They contain the A -smooth elements. The two sets on the right are their duals: $H_{-j}(A) = H_j(A)^*$. They contain the A -singular elements. By the duality, the inner product $\langle f, g \rangle$ on H can be extended or restricted so that it makes sense for $f \in H_j(A)$ and $g \in H_{-j}(A)$ and the other way around.

The operator $(|A| + 1)^{-j/2}$ can now be defined on the elements of $H_{-j}(A)$ and $\|f\|_{-j} = \|(|A| + 1)^{-j/2}f\|$ defines a norm on $H_{-j}(A)$ which turns it into a Hilbert space, $j = 1, 2$. The inclusion mappings are injections with dense range. The models A_α of the rank one perturbation of A by φ depends on the singularity of φ and carry different names. If $\varphi \in H$ then A_α is called a bounded perturbation of A ; in this case A_α simply coincides with the selfadjoint operator $A + \alpha\langle\varphi, \cdot\rangle\varphi$ in H defined on $\text{dom } A$. If $\varphi \in H_{-1}(A) \setminus H$ then A_α is called a bounded form perturbation, and if $\varphi \in H_{-2}(A) \setminus H_{-1}(A)$ it is called a singular perturbation.

These perturbations can be characterized in various ways, for example, via forms or smooth approximations, but one characterization they all have in common: they are selfadjoint extensions of the restriction $A^0 = A|_{\{f \in \text{dom } A | \langle f, \varphi \rangle = 0\}}$ of A . So extension theory



W.J. Adams
Slippery Math in Public Affairs: Price Tag and Defense
New York: Marcel Dekker, 2002
247 p., prijs \$ 139,95
ISBN 0-8247-0790-7

Dit boekje gaat niet over wiskunde, maar over het gebruik en vooral misbruik van getallen in de publieke sector en de politiek. In de loop van het boekje wordt overtuigend aangetoond aan de hand van ettelijke voorbeelden uit de Amerikaanse praktijk dat cijfers een vaak onterechte suggestie van autoriteit en exactheid geven. Gesjoemel met getallen, onterechte interpretaties, het getalsmatig 'oplossen' van complexe vergelijkingen, slecht onderbouwde voorspellingen, het komt allemaal uitbundig aan de orde. Maar om eerlijk te zijn, halverwege het boekje heb je de boodschap wel door. En tegen die tijd heb je ook wel genoeg van de flauwe tekeningen van de dochter van de auteur die vrijwel elke pagina larderen. Gelukkig voelde ik me echter verplicht tot het einde toe door te lezen. Het laatste hoofdstuk gaat namelijk over de vraag: Hoe kunnen we kinderen onderwijzen zodat ze kritisch tegenover het gebruik van getallen staan? Helaas komt de auteur niet veel verder dan een lijst referenties over het kritisch gebruik van getallen en de constatering dat het geen politiek belang dient burgers mondig te maken. Ook maakt hij duidelijk dat hij voor het onderwijzen van de grenzen van de mogelijkheden van een wiskundige aanpak is, maar hoe dit in het wiskundeprogramma vorm moet krijgen komt niet aan bod. Wat wel aan bod komt is kritiek op het huidige programma, dat slechts op economisch en politiek gewin uit zou zijn. Een magere conclusie.

De waarde van dit boekje moet vooral worden gezocht in de

comes into play with a central role for M.G. Krein's formula. This formula parametrizes the resolvents of all selfadjoint extensions of A^0 in terms of one selfadjoint extension of A^0 and its so called Q -function. It can be used to calculate the wave operators and the scattering matrix associated with two selfadjoint extensions of A^0 .

The book assumes knowledge of the theory of linear operators on Hilbert spaces such as in the books by N.I. Achiezer and I.M. Glazman and by M. Reed and B. Simon, and it starts at a slow pace with the rank one perturbation just explained. Then it goes on at a quicker pace to generalized perturbations with selfadjoint extensions of A^0 in spaces larger than the original Hilbert space, to finite rank perturbations and related wave operators and scattering matrices, to infinite rank perturbations and finally to two- and few-body problems with finite rank perturbations of operators defined on tensor products of Hilbert spaces. The authors have done a good job in making the theory accessible for researchers in analysis and mathematical physics.

The only comment I have concerns the use or rather non-use of linear relations. Sometimes the restricted operator A^0 is non-densely defined and so its adjoint is a 'multivalued operator' or linear relation which is easily described and among its selfadjoint extensions there are those which are not an operator and they are also easily described. For example, in the case of a bounded perturbation the selfadjoint relation extension is unique and corresponds to the case $\alpha = \infty$ as can be deduced via Krein's formula. The authors recognize this phenomenon, but nevertheless do not consider these extensions. In fact, they completely avoid the use of linear relations. That is a pity, the theory would have been more complete when these cases were included. From a spectral point of view they are sometimes rather interesting. In some recent papers (by Yu.G. Shondin, J.F. van Diejen and A. Tip, and others) singular perturbations are studied where $\varphi \in H_{-m}(A)$ with $m > 2$. This higher singularity seems to warrant the use of indefinite metric spaces (in this case Pontryagin spaces) and selfadjoint linear relations provide a handy tool in the construction of the models.

A. Dijkma

is proved. The book includes two appendices (11 pages together), one on the Riemann zeta function and one on the Haar integral.

It makes for an excellent text book, an instructor's delight and a pleasure for students because of the precise formulation and the concise proofs in a little over one hundred pages. Prerequisites are the proper and improper Riemann integral, uniform convergence, and an elementary course in algebra. Although metric spaces are introduced and explained in so far as needed in about eight pages, the book is probably better appreciated after having completed a course in this area also. The Lebesgue integral and measure theory are avoided to streamline the presentation; completion of metric spaces is used instead.

A gem of a first course in harmonic analysis, heartily recommended.

A. Dijkma



Yuh-Dauh Lyuu

Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms

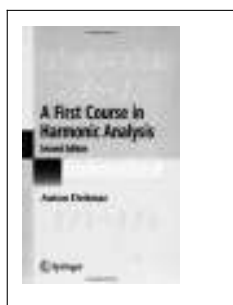
Cambridge : Cambridge University Press, 2002

648 p., prijs £50.00

ISBN 0-521-78171-X

Since 1973, when Black and Scholes published their path-breaking paper on the pricing of an European call, there has been a lot of activity in modelling and understanding financial markets. Besides option pricing theory, among others a theory of interest rates and a portfolio theory have emerged. Recently, in the last decade, the field of finance has received a lot of attention in mathematics and has developed into one of the most active branches of applied mathematics. In the same time many books appeared on derivatives, interest rate theory, financial engineering and numerical methods. The book under consideration can also be placed in this direction. Following a computational approach, it aims to present the main ideas of the financial theory. It is written for technically oriented MBA students and students in engineering and natural sciences who want to learn about quantitative finance, assuming no background in finance but some basic knowledge of probability, optimization and calculus.

The book is organized in 33 chapters and a bibliography, where each chapter ends with hints for further reading. The needed mathematics is treated on the way and numerical implementations of the main algorithms are provided in pseudo code. The first six chapters introduce basic concepts of static financial models, statistics and algorithmic analysis. The next six chapters are about option pricing in discrete and continuous time, covering among others the binomial tree and the Black-Scholes formula. Brownian motion, Ito calculus, martingales and partial differential equations are concisely treated in the Chapters 13 till 16 in the context of continuous time financial models and hedging. Then the author probes deeper into specific methods for implementation such as numerical methods for solving partial differential equations, Monte Carlo simulation, least squares and splines. The rest of the book (Chapters 21 through 31) treats interest rate theory and discusses theory, such as the Capital Asset Pricing Model (CAPM) and Value at Risk (VaR), and practice of portfolio man-



A. Deitmar

A first course in harmonic analysis

Universitext

Berlin: Springer Verlag, 2002

151 p., prijs \$ 48,10

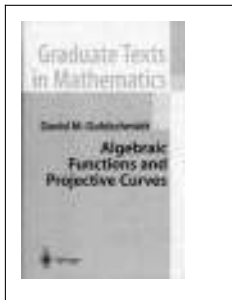
ISBN 0-387-95375-2

This is a well thought through introduction to harmonic analysis in Aikido style: efficient, swift, elegant, and concentrated. In 135 pages (including nineteen pages of exercises) it presents the central concepts of the theory up to and including the Plancherel theorem in its various guises. First for Fourier series, then for the Fourier transform, then for locally compact abelian groups and finally for noncommutative groups (the Peter-Weyl theorem). Of course, the latter completeness results (and, for example, the dominated and monotone convergence theorems and the Pontryagin duality theorem) are not proved in full generality, but illustrated by proofs of simple special cases; almost everything else

agement. Throughout the text one finds a lot of exercises with (partial) solutions given at the end of the book. Also, there are numerous programming assignments. Chapter 32 contains information about the web software developed for the book.

To sum up, the book offers a self-contained and accessible treatment of the classical theory with an emphasis on algorithms and their implementation. However, recent developments (e.g. stochastic volatility, discontinuous price processes, incomplete markets) are not covered. By the set-up, the book seems useful for a quantitative (computational) finance course and also lends itself for independent study.

M.R. Pistorius



D.M. Goldschmidt
Algebraic Functions and Projective Curves

Graduate Texts in Mathematics, 215
Berlijn : Springer Verlag, 2002
179 p., prijs €42,75
ISBN 0-387-95432-5

Het boek van D.M. Goldschmidt heeft als doelstelling de lezer de theorie van algebraïsche krommen bij te brengen. De schrijver heeft ervoor gekozen deze theorie zo elementair mogelijk uit te leggen. Een benadering die hiervoor geschikt is, is algebraïsche krommen te beschrijven door hun functielichamen en inderdaad hebben andere auteurs voorheen deze benadering om dezelfde reden gekozen. Het boek ter bespreking heeft het voordeel dat de geometrische benadering niet uit het oog verloren wordt. In het bijzonder worden er ook geometrische eigenschappen van de theorie belicht.

Het boek heeft vijf hoofdstukken en een appendix over elementaire lichaamstheorie. Na elk hoofdstuk volgt een aantal opgaven waarin de besproken theorie verduidelijkt wordt. In totaal zijn er 51 opgaven in het boek. In hoofdstuk 1 worden enkele begrippen ingevoerd die later nodig zijn. Hieronder zijn valuaties, completering, differentiaalvormen (inclusief een beschrijving van Hasse afgeleiden) en residuen (zoals behandeld door Tate). In hoofdstuk 2 worden vervolgens functielichamen ingevoerd en wordt een aantal basiseigenschappen bewezen waaronder de cruciale stelling van Riemann-Roch. In het derde hoofdstuk staan eindige uitbreidingen van functielichamen centraal met speciale aandacht voor Galoisuitbreidingen en hyperelliptische functielichamen. Het voorlaatste hoofdstuk besteedt aandacht aan een aantal geometrische aspecten van de theorie waaronder afbeeldingen en inbeddingen van algebraïsche krommen in projectieve ruimten, Weierstrass-punten (Stöhr-Volochtheorie) en vlakke projectieve krommen. Tenslotte wordt in het laatste hoofdstuk de zeta-functie van een algebraïsche kromme gedefinieerd over een eindig lichaam onderzocht. In het bijzonder wordt de Riemannhypothese voor zulke zetafuncties bewezen. Hierbij wordt de aanpak van Bombieri gevolgd en wordt gebruik gemaakt van een bovengrens voor het aantal punten op een kromme die in het vorige hoofdstuk met behulp van Stöhr-Volochtheorie verkregen is.

Al met al is dit op zichzelf staande boek een goede aanvulling op de bestaande literatuur over functielichamen en boven-

dien goed geschikt als leerboek voor diegene die de basistheorie van algebraïsche krommen wil leren zonder zich eerst het algemene taalgebruik van de moderne algebraïsche meetkunde eigen te maken.

P.H.T. Beelen

A. Achterberg

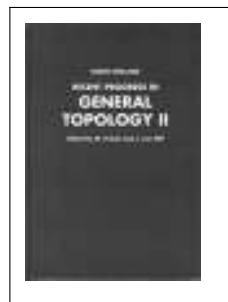
Kosmologie: Van oerknal via niets tot straling en stof

Utrecht: Epsilon, Tweede druk, 2002

554 p., prijs €38,-
ISBN 90-5041-070-7

Kosmologie is in de mode. Wie in de sterrenkunde werkt, krijgt stevast van vriendelijke voorbijgangers de vraag: "Wat was er voor de Oerknal?" Kosmologie is ook een bijzonder levendig onderzoeksterrein. Beide omstandigheden maken dat er een grote vraag is naar boeken over dit onderwerp en dus is er ook een groot aanbod. In mijn privéverzameling heb ik er al vier dozijn staan, en dat is waarschijnlijk nog niet de helft van wat er op de markt is. Deze toestand is relevant, omdat de vraag over een kosmologie-boek nu niet is: "Is het een goed boek, dat recht doet aan het vak?" maar "Is het merkbaar beter dan de rest?" Voor een schrijver is dit lastig, want het is nu niet meer voldoende om een werk te schrijven waar alle relevante onderwerpen redelijk naar voren komen en waarin geen ernstige fouten staan. Het boek moet zich echt onderscheiden, en helaas doet Achterbergs *Kosmologie* dat niet. Met de eerste druk was dat beter: het was half zo dik, het was bijtijds op de markt toen er nog weinig andere waren, en bevatte een verstandige keuze van onderwerpen. Nu echter ligt hier een pil van 554 bladzijden die op mij nogal braaf en weinig kritisch overkomt, waarin wel alle canonieke kosmologische punten aan de orde worden gesteld, maar waar geen wetenschappelijke of didactische visie uit blijkt. Het slechte nieuws is dus dat dit werk zich niet bijzonder onderscheidt, behalve dan doordat het goedkoop is en in het Nederlands is geschreven, en dus door een astronomische consumentengids niet zou worden aangemerkt als 'beste koop'. Het goede nieuws is dat Achterbergs boek zorgvuldig en degelijk is, en daarmee van mij het predikaat 'voordelige keus' krijgt.

V. Icke



M. Husek, J. van Mill (eds.)

Recent progress in general topology II

Amsterdam: Elsevier, 2002
652 p., prijs €150,-
ISBN 0-444-50980-1

Dit boek is een waardige opvolger van *Recent progress in general topology I* dat in 1992 verscheen onder dezelfde redactie en bij dezelfde uitgever (ISBN 0-444-89674-0). Eens per vijf jaar vindt in Praag het congres Toposym plaats, over topologie en haar relaties tot de moderne analyse en algebra. Dit congres wordt gezien als het belangrijkste topologie congres. Om een goed beeld te geven van de stand van zaken van de topologie werd tijdens het congres in 1991 besloten tot de uitgave van *Recent progress in general*

topology I, de voorganger van het onderhavige werk. De opzet van het nieuwe deel II is in grote lijnen hetzelfde als die van deel I: in negentien overzichtsartikelen wordt een beeld geschetst van de ontwikkeling van de topologie met speciale aandacht voor de resultaten van de laatste tien jaar. Nieuw in dit deel zijn de essays, waarin de coryfeeën R.D. Anderson, W.W. Comfort, M. Henriksen, S. Mardišić, J. Nagata, M.E. Rudin, J.M. Smirnov en L. Vietoris hun persoonlijke visie geven over facetten van de topologie. Verder zijn er nu naast een uitgebreid zakenregister ook een nuttig personenregister en een verzamellijst van de problemen en vragen uit de artikelen in het boek. In het boek zijn de artikelen lexicografisch geordend op achternaam van de eerste auteur. Geordend volgens het classificatieschema van de AMS, volgt hier een lijst van de bijdragen, aangegeven met trefwoorden en auteurs: Hyperruimten door Holáen Pelant; Banachruimten van continue functies door Godefroy; Functieruimten door Marciszewski; Oneindigdimensionale topologie door Dijkstra en Van Mill; Continue selecties door Repovš en Semenov; Uitbreidingen van ruimten door Baker, Kunen en Dow; Quasi-uniforme ruimten door Künzi; Metriscie ruimten door Gruenhage; Geordende ruimten door Bennett en Lutzer; Gegeneraliseerde variëteiten door Kawamura; Dimensietheorie door Pol en Toruńczyk; Beschrijvende verzamelingenleer door Solecki; Topologische groepen door Arhangel'skii, Shakhmatov en Tkachenko; Topologische halfgroepen door Hindman en Strauss; Topologische dynamica door Glasner; en Domeintheorie door Martin, Mislove en Reed. *J.M. Aarts*



F. Hausdorff
**Gesammelte Werke Band II:
Grundzüge der Mengenlehre**
Berlijn: Springer Verlag, 2002
883 p., prijs €99,95
ISBN 3-540-42224-2

In 1914 verscheen in Leipzig het inmiddels bekende en invloedrijke boek *Grundzüge der Mengenlehre* van Felix Hausdorff. In dit boek stroomlijnde Hausdorff de Cantoriaanse verzamelingenleer tot een imposante theorie. Maar dat is niet alles. Hij breidde die theorie op verschillende plaatsen uit, besteedde veel aandacht aan beschrijvende verzamelingenleer, gaf de algemene topologie een zet in de goede richting en behandelde en verbeterde de maat- en integratietheorie uit het proefschrift van Lebesgue. Al met al is het nog steeds een leerzaam en boeiend geheel. De verzamelingenleer werd door de *Grundzüge* als zelfstandige discipline op de wiskundige kaart gezet en heeft inmiddels bewezen zeer fundamentele en moeilijke problemen tot een oplossing te kunnen brengen. Het boek heeft lang dienst gedaan zoals blijkt uit het herdrukken ervan door Chelsea Publishing Company in 1949, 1965 en 1978.

Het te bespreken boek is een herdruk uit 2002 van de *Grundzüge* met een indrukwekkend aantal kanttekeningen en aanvullingen. Een uitgebreid team van wiskundigen heeft meegewerkt aan de totstandkoming van deze uitgave. Het totale boek beslaat 883 pagina's, waarvan 486 voor de eigenlijke *Grundzüge*. Het boek begint met een uitgebreide historische inleiding door

Purkert. Allereerst wordt de weg die Hausdorff aflegde naar de *Grundzüge* beschreven. Daarna volgt een bespreking en opsomming van eerder gepubliceerde boeken en monografieën op het gebied van de verzamelingenleer. Tenslotte wordt beschreven hoe de *Grundzüge* werd ontvangen door de toenmalige wetenschappelijke wereld. Een interessant detail is dat het boek werd gepubliceerd in april 1914 aan de vooravond van de eerste wereldoorlog. Een groot aantal wiskundigen kon daardoor pas na de oorlog van het boek kennisnemen. Een uitgebreide en relevante literatuurlijst besluit het artikel van Purkert. De afgedrukte tekst van de *Grundzüge* is vrijwel identiek aan die van de originele uitgave uit 1914. De redacteurs hebben 102 opmerkingen toegevoegd met specifiek commentaar. Daarna volgen elf essays door specialisten over onder meer topologische noties, beschrijvende verzamelingenleer en maat- en integratietheorie. Het boek besluit met zes korte artikelen uit de nalatenschap van Hausdorff en negen recensies van de *Grundzüge* (waaronder een zelfrecensie en een zeer lovende recensie van H. Blumberg).

Het heruitgeven van een klassieker zoals de *Grundzüge der Mengenlehre* vereist moed. Het team van redacteurs heeft bijna vierhonderd pagina's commentaar van uiteenlopende aard toegevoegd. Al lezend ontstaat hierdoor een uitstekend beeld van de centrale plaats die de *Grundzüge der Mengenlehre* inneemt in de wiskundige literatuur.

J. van Mill



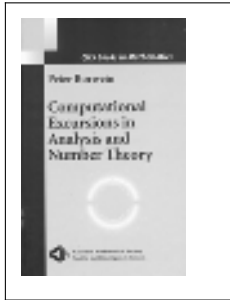
R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan
Fixed Point Theory and Applications
Cambridge Tracts in Mathematics, 141
Cambridge: Cambridge University Press,
2001
170 p., prijs £45.00
ISBN 0-521-80250-4

This is a careful presentation of some main streams in fixed point theory. Starting from the Banach fixed point theorem, fixed points for nonexpansive maps in Hilbert spaces are approached (exercises deal with the usual extension to uniformly convex Banach spaces). This is followed by a discussion of continuation methods for contractive and nonexpansive mappings. Next, fixed point results are studied in finite and infinite-dimensional normed spaces (Brouwer, Schauder, Mönch – Brouwer's result is proven by means of the method introduced in the textbook by Goebel and Kirk). This is followed by a presentation of variants of those results for nonself mappings. Also this development is continued by a study of continuation principles, of which the main three approaches in the literature are discussed (essential map approach, 0-epi map approach, degree theory). This leads to a number of important fixed point results (e.g., Krasnoselskii's results on compression and expansion of a cone, Furi-Pera type results, etc.).

After an interlude with fixed point results in Hausdorff locally convex spaces (e.g., Schauder-Tychonov, Furi-Pera), the 0-epi property is discussed in a Fréchet space setting. Extensions of several of the previously mentioned fixed point results to multi-valued mappings (e.g., Nader, Furi-Pera, Kakutani, Fan) are also presented. Several well-chosen examples (e.g., applications to boundary value problems or abstract economies), complement

the presentation. Each of the twelve chapters contains a number of exercises. The bibliography lists almost two hundred references. In the reviewer's opinion this book is a fine text for specialized seminars at the graduate level. It can also be of use to non-specialists who desire to learn more about fixed point results belonging to the fairly wide range that is covered by the book.

E.J. Balder



P. Borwein
**Computational Excursions in
 Analysis and Number Theory**
CMS Books in Mathematics
 New York : Springer-Verlag, 2002,
 220 p., prijs €58,80
 ISBN 0-387-95444-9

This extraordinary book brings together a variety of old problems — old, but very much alive — about polynomials with integer coefficients. Typically, these problems are concerned with the size of the polynomial, often restricted by conditions on the height or the degree. The tools are of an analytic nature with probabilistic and Diophantine elements, and have a strong computational component. The seventeen problems chosen by the author have been the subject of intensive research by outstanding mathematicians, they are still (partially) open and most have resisted complete solutions for fifty years or more. The author gives an overview of the progress made on these problems in recent years, and he explains the main ideas on which the results are based. The necessary background is also presented, which makes the book self-contained to a degree.

As the book is very rich in content, I can only present a small selection of the main problems. Let $n \in \mathbf{N}$. The principal classes of polynomials that the book considers are

$$\begin{aligned} Z_n &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i z^i : a_i \in \mathbf{Z} \right\}; \\ F_n &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i z^i : a_i \in \{-1, 0, 1\} \right\}; \\ L_n &:= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i z^i : a_i \in \{-1, 1\} \right\}. \end{aligned}$$

Further, the *height* of a polynomial is the magnitude of its largest coefficient, and the *length* of a polynomial is the sum of the absolute values of its coefficients. Finally, the *supremum norm* of a polynomial p on a set A is defined by

$$\|p\|_A := \sup_{z \in A} |p(z)|,$$

and the *Mahler measure* of p is defined as

$$M(p) := \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})| d\theta \right).$$

What follows is a personal selection from the seventeen problems on which the book focuses.

The Integer Chebyshev Problem. Find a nonzero polynomial in Z_n that has the smallest possible supremum norm on the unit interval. Analyze the asymptotic behavior as n tends to infinity.

The Prouhet-Tarry-Escott Problem. Find a polynomial with integer coefficients that is divisible by $(z-1)^n$ and has smallest possible length.

Littlewood's Problem in L_∞ . Find a polynomial in L_n that has smallest possible supremum norm on the unit disk. Show that there exist positive constants c_1 and c_2 such that for any n it is possible to find $p_n \in L_n$ with

$$c_1 \sqrt{n+1} \leq |p_n(z)| \leq c_2 \sqrt{n+1}$$

for all complex z with $|z| = 1$.

Mahler's Problem. For each n , find the polynomials in L_n that have largest possible Mahler measure. Analyze the asymptotic behavior as n tends to infinity.

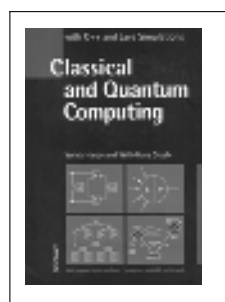
Multiplicity of Zeros of Height One Polynomials. What is the maximum multiplicity of the vanishing at 1 of a polynomial in F_n ?

The Schur-Siegel-Smyth Trace Problem. Fix $\varepsilon > 0$. Suppose $p_n(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \in Z_n$ has all real, positive roots and is irreducible. Show that, independently of n , except for finitely many explicitly computable exceptions, $|a_{n-1}| \geq (2-\varepsilon)n$.

The book comprises sixteen short chapters and four appendices, the final one (Appendix D) gives eight pages of research problems copied from each chapter. Besides the section on research problems, each chapter contains sections on Introductory Exercises, Computational Problems, and Selected References. Finally, Appendix A gives a compendium of inequalities, Appendix B is a self contained account of lattice basis reduction, and Appendix C gives some explicit formulae for the L_4 norm of polynomials closely related to Fekete polynomials.

In conclusion, this book is suitable for advanced students of analysis and analytic number theory. It is very well written, rather concise and to the point. The references given in the individual chapters are gathered at the end of the book to fill fourteen full pages. Strongly recommended for specialists in computational analysis and number theory.

R. Stroeker



Y. Hardy, W.H. Steeb
**Classical and Quantum Computing:
 With C++ and Java Simulations**
 Basel : Birkhäuser, 2002
 585 p., prijs €58,85
 ISBN 3-7643-6610-9

This is a remarkable book about algorithms and computation. To give an impression of the book it probably suffices to mention the title of each chapter, of which there are 24. However, we restrict ourselves to only a few of them. Topics included are: Algorithms, boolean algebra, number representation, logic gates, latches and registers, error correcting codes, cryptography, finite state machines, computability and Turing machines, neural networks, genetic algorithms, quantum mechanics, quantum computing, quantum hardware. Indeed a monumental work in 585

pages. My impression is that virtually every aspect of computing which is directly related to algorithms and computing devices is included in the book. So mathematical methods to speed up computations are not considered. This excludes for example numerical mathematics. The notion of Fast Fourier Transform is not mentioned in the book, but the technique is used implicitly in the treatment of the quantum Fourier transform. In the chapter about recursion we find some remarks about the recursive evaluation of Bessel functions and elliptic integrals, but they are mathematically very superficial.

But even with the restriction of mathematical shallowness, the subject material is still vast. One feature that I found remarkable was that on page 120 we still find ourselves looking at circuits that one would ordinarily see in books on digital electronics. However, very soon we turn to more exciting subjects such as neural networks, genetic algorithms and quantum computing. Since large numbers of books are published on each of these subjects, it is clear that the present book can only contain brief introductions. This is the way I view the book. It is an encyclopedic work on algorithms and computing which one can use to refresh ones memory about each of the subjects. Although the authors claim that this is a good textbook for self-study I tend not to agree with them. The explanations are very terse and once one is lost there is no recovery. Also I do not see the educational advantage of putting long C++-sources in the text. However, I am very impressed by the ambitions of the authors.

F. Beukers

É. Cartan

Riemannian Geometry in an Orthogonal Frame

London : World Scientific Publishing, 2001

259 p., prijs £22,-

ISBN 981-02-4747-8

In 1928 verscheen Élie Cartans boek *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, met een gemoderniseerde en sterk uitgebreide tweede editie in 1948. Dit boek was gebaseerd op Cartans college uit 1925–26 aan de Sorbonne. Het was een uitstekende inleiding in Cartans differentiaalmeetkundige methoden, in het bijzonder zijn differentiaalvormen en zijn *repères mobiles* = moving frames. In 1926–27 gaf Cartan een tweede college over differentiaalvormen en bewegende raamwerken, met toepassingen op problemen in Riemannse variëteiten, waarvan de inhoud niet in de *Leçons* is opgenomen. Het hier besproken boek is een vertaling door Vladislav V. Goldberg van dit tweede college en van nog een aantal secties van het college uit 1925–26.

Het boek is aantrekkelijk uitgevoerd, met een mooi plaatje op het kaft van bewegende raamwerken boven een kalm rimpelende zee en met een prettige, duidelijke typografie. Een ander aantrekkelijk aspect van het boek is dat ieder nieuw stukje theorie telkens toegepast wordt op concrete differentiaalmeetkundige problemen, hetgeen de student meteen de gelegenheid geeft om de verworven kennis te oefenen.

Toch vind ik het boek minder geschikt als leerboek voor de huidige generaties van studenten, vanwege het totaal gedateerde karakter van de presentatie.

Het is om heel goede redenen dat men de differentiaalmeetkunde heel expliciet is gaan opbouwen op het begrip van de raakvectoren aan de variëteit in een gegeven punt van de variëteit.

Deze vormen samen een lineaire ruimte, de raakruimte aan de variëteit in het gegeven punt, van dezelfde dimensie als de dimensie van de variëteit. Een differentiaalvorm van de graad p is een functie die aan ieder punt x van de variëteit een antisymmetrische p -lineaire vorm op de raakruimte in x toevoegt. Een bewegend raamwerk is een functie die aan ieder punt x een basis van de raakruimte in het punt x toevoegt. Deze basis hoeft niet de standaardbasis in een lokaal coördinatensysteem te zijn, het is deze grotere vrijheid in de keuze van de bases in de raakruimten die de bewegende raamwerken tot zo'n handig hulpmiddel in de differentiaalmeetkunde maken. Toegegeven, voor deze definities moet men eerst de raakruimten introduceren en dat vergt enige tijd en moeite, maar daarna zijn alle verdere begrippen volkomen expliciet en helder in termen van lineaire algebra in de raakruimten.

In het hier besproken boek begint de theorie van differentiaalvormen met: "Suppose that a Pfaffian form $\omega = \sum a_i dx^i$ is given. Usually the differentials dx^i of the independent variables x^i are considered as new independent variables. However, we can also take them to be given functions of the independent variables, $dx^i = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$, a directed displacement with a definite symbol of differentiation. Consider two symbols of differentiation d and δ and two series of differentials $d\delta x^i$ and δdx^i , which in general are distinct. . .". Geen van de hier genoemde termen wordt nader uitgelegd en zo gaat het in het hele boek door. Misschien was deze taal voor iedereen duidelijk in 1926–27 (al heb ik daar ook enige twijfel over), maar ik kan me niet voorstellen dat een tegenwoordige student begrijpt wat hier bedoeld wordt. Iemand die al differentiaalmeetkunde kent herkent dat ω een differentiaalvorm van de graad 1 is, dus een lineaire vorm op iedere raakruimte. De 'symbols of differentiation' zouden wel eens vectorvelden kunnen zijn, maar om daar zeker van te kunnen zijn zou ik eerst de rest van het verhaal moeten lezen om te kijken wat ermee wordt gedaan.

Hoewel het boek mij ongeschikt lijkt als leerboek, bevat het voor een docent differentiaalmeetkunde veel interessante toepassingen. Die moeten echter wel eerst nog vertaald worden naar de huidige terminologie (helaas heeft Goldberg dat niet gedaan), voordat ze op onze studenten losgelaten kunnen worden.

J.J. Duistermaat

P. Hilton, D. Holton, J. Pedersen

Mathematical vistas: From a room with many windows

Undergraduate texts in mathematics

Berlijn : Springer Verlag, 2002

335 p., prijs €74,85

ISBN 0-387-95064-8

Laat ik direct in de eerste zin van deze boekbespreking ondubbelzinnig duidelijk maken dat *Mathematical Vistas*, net als zijn voorloper *Mathematical Reflections*, een absolute aanrader is voor iedereen die op een serieus niveau van wiskunde wil en kan genieten. Dit geldt zowel voor de geïnteresseerde en begaafde scholier die voor het eerst in aanraking komt met wiskunde, als ook voor de ervaren onderzoeker die al het nodige 'achter de kiezen' heeft.

Het onderwerp van het boek is niet eenduidig. Het is niet zozeer een boek uit één stuk, als wel een bundeling van negen werken over uiteenlopende onderwerpen. Voor een groot deel

kunnen de negen hoofdstukken onafhankelijk van elkaar gelezen worden. Is het ene hoofdstuk misschien te lastig, of spreekt het gewoon niet aan, dan zijn er nog acht andere hoofdstukken die klaar liggen om gelezen en vooral genoten te worden.

De titels van de negen hoofdstukken geven duidelijk aan wat voor moois er in dit werk te vinden is: *Paradoxes in Mathematics; Not the Last of Fermat; Fibonacci and Lucas Numbers: Their Connections and Divisibility Properties; Paper-Folding, Polyhedra-Building, and Number Theory; Are Four Colors Really Enough?; From Binomial to Trinomial Coefficients and Beyond; Catalan Numbers; Symmetry; Parties.*

De schrijvers beogen niet de onderwerpen uitputtend te behandelen. Dat kan natuurlijk ook niet met zoveel onderwerpen in één boek. Nee, de schrijvers willen de lezer uitdagen en uitnodigen kennis te maken met bijzonder mooie wiskundige onderwerpen en de ideeën er achter. Een rode draad in het boek is dat wiskunde niet zozeer iets is dat je moet *leren* als wel iets waar je over moet *nadenken* en waar je vooral ook van kunt *genieten*.

Wat het niveau van het boek betreft zijn de schrijvers er in geslaagd zowel de valkuil van de oppervlakkigheid als ook die van de ontoegankelijkheid te vermijden. Ieder hoofdstuk begint heel toegankelijk en gaandeweg wordt het niveau opgeschroefd tot het aan het eind voor menig lezer net te moeilijk zal zijn. En dit is heel goed! Dit prikkelt een hoofdstuk vaker door te nemen, na te denken over de inhoud om aan het eind telkens net iets verder te komen met inzicht en begrip.

De didactische opbouw van ieder hoofdstuk is zonder meer goed te noemen. Het begint telkens met een introductie waarna de schrijvers steeds dieper op het onderwerp ingaan. Een royale hoeveelheid 'breaks' stelt de lezer in staat de informatie op een rijtje te zetten en te verwerken. De lay-out van de tekst en het veelvuldig gebruik van heldere afbeeldingen maakt een frisse en uitnodigende indruk.

Het boek is niet alleen geschikt om zelfstandig door te nemen voor eigen plezier. Ieder hoofdstuk zou in de bovenbouw van het vwo de voedingsbodem kunnen zijn voor een schitterend profielwerkstuk. Daarnaast zijn er onderwerpen genoeg in te vinden voor mooie voordrachten die niet al te specialistisch moeten zijn, maar wel interessant voor een wiskundig publiek.

Mijn mening over *Mathematical Vistas* is uitermate positief. Het is een schitterend boek voor iedere wiskundige (beginner en gevorderd) op ieder niveau en het mag zeker niet in uw boekenkast of bibliotheek ontbreken!

H. Finkelberg

B.A. Magurn

An Algebraic Introduction to K-Theory

Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 87

Cambridge : Cambridge University Press, 2002

676 p., prijs £80.00

ISBN 0-521-80078-1

An Algebraic Introduction to K-Theory is, zoals de titel suggereert, een introductie. De toon is gezet als in het eerste hoofdstuk matrixvermenigvuldiging wordt uitgelegd: er wordt weinig algebraïsche voorkennis verondersteld. Wie snel op de hoogte wil worden gebracht van *cutting edge* K-theoretisch onderzoek komt er bekaaid vanaf. Voor de beginnende student kon dit boek nog

wel eens zeer geschikt zijn.

Het gevaar met het behandelen van een geavanceerd onderwerp, uitgaande van weinig voorkennis, is, dat de stapgrootte nog wel eens exponentieel toeneemt. Het ene moment word je dan in slaap gesust met matrixvermenigvuldigingen en het volgende moment wordt er van je verwacht dat je weet wat spectraalrijen zijn. Dit boek heeft daar geen last van. De keerzijde is dat we het hier hebben over een boek van meer dan 650 pagina's en dat de eerste K_2 pas op pagina 401 wordt gedefinieerd. In de tussentijd zijn modulen, projectieve modulen, Grothendieck groepen, dimensies van ringen, een basis in getaltheorie en representatietheorie behandeld.

Gedurende het hele boek is geprobeerd om de lezer houvast te geven door de bewijzen vrij ver uit te spellen en nogal eens te rekenen. Wie een goede algebraïsche opvoeding heeft genoten, maakt zich nu wellicht zorgen. Er wordt echter voldoende de nadruk gelegd op eigenschappen en exacte rijen. De basis is hiermee gelegd om een echt boek over K -theorie open te slaan.

Het imposant ogende boek licht slechts een tipje van de sluier op als het om K -theorie gaat. Het gaat om de weg er naar toe. Het is een goed studieboek dat vraagt om meer.

R. Groenewegen

G.M. Hek (editor)

Proceedings of the forty-second European study group with industry

Amsterdam : CWI, 2002

120 p., prijs €15,85

ISBN 90-6196-516-0

Study Groups with Industry are meetings of practitioners and academic mathematicians. These meetings build on a long tradition. The first one took place in the sixties in Oxford. In the Netherlands the study groups have been organized every year since 1998, with the support of the research program *Wiskunde Toegepast*, a joint activity of the *Technology Foundation STW* and the section *Exact Sciences* of the *Netherlands Organization for Scientific Research* (NWO). Before the start of the present meeting industries and other organizations were invited to suggest interesting problems that might be solved with mathematical techniques. Six topics were selected: The Artis Zoo (Amsterdam): Cooling Overheated Fish, Philips Research Laboratories: Compression of Audio-signals, Science Magazine Natuur en Techniek: Diffusion of Euro Coins over Europe, Phytocare: Better Advice to Rose Cultivators, Magma Design Automation: Component Placement on Chips, NIOZ : Reconstruction of Sea-surface Temperatures Using Fossil Marine Plankton.

During the meeting about seventy people discussed these problems and came up with solutions. These solutions are described in this book. They represent a wide variety of mathematical techniques stemming from diverse branches of applied mathematics. The emphasis is on the modelling aspects.

The Artis aquarium has difficulty in maintaining a reasonable temperature in the mammoth sea water tanks during the peak of the summer. The water gets too hot as a result of the heat produced by the lamps which are necessary to make the fish visible. The problem is to reduce the temperature at minimal cost. A description of the energy balance of the various sources of energy and loss of energy leads to a simple model. The analysis of this

model leads to a simple solution.

At Philips Research Laboratories a new way for the digital representation of high quality audio signals has been introduced as an alternative to the 16-bit recording format used for CD signals. The new method produces 1-bit audio streams. Philips is interested in better methods for the lossless compression of these streams. The study group comes to the conclusion that the existing compression algorithms are not very far from optimal.

The diffusion of the different national Euro coins is studied using Markov chains and it is estimated how long it will take until half of the coins in our wallets will be foreign. The result is that this will take roughly one year. By now we all know that this result is wrong.

The problem is considered how rose production in a greenhouse can be optimized. Very simplified models are developed: a local model for the photosynthetic rate per area of leaf and a global model of the greenhouse, that transforms the photosynthesis of the leaves into an increase in mass of the rose crop.

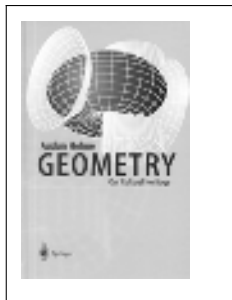
The optimal placement of components on a chip, which can be considered as a rectangular area, is a well-known problem. The problem becomes more difficult if large parts of this area are excluded. The authors reduce the problem to a Quadratic Assignment Problem on which a lot of literature exists.

The reconstruction of sea-surface temperatures using fossil marine plankton is of great interest for global climate models. The authors develop some simple models to study this problem and carry out some calculations.

I can recommend this book to anyone interested in mathematical modelling in different fields of application. From a mathematical point of view most of the models are very simple, but developing these models is certainly not trivial. *J.H.A. de Smit*

torische contexten. In delen herinnert de stijl aan de vlotte maar historisch zeer vereenvoudigende stijl van 'historische romans' van bijvoorbeeld Stefan Zweig of Lion Feuchtwanger. Er wordt zelfs verwezen naar Zweig's *Sternstunden der Menschheit*, maar helaas noemt Holme hem Stephan Schweig – één voorbeeld van een aantal kleinere slordigheden. Holme kan vlot vertellen, zoals bijvoorbeeld over Babylon, the Gate of The Gods, the Bab-Ili, een stad "with exquisite restaurants and a most sinful and hedonistic nightlife". Holme vertelt niet alleen leuke verhaaltjes, maar laat ook zien hoe wiskundigen in turbulenties en conflicten terecht kwamen — in de oude en de moderne tijd. Hij slaagt erin de valkuil te vermijden van een apolitieke beschrijving van de wiskundige geschiedenis. Bij vervolging en tirannie schuwt hij geen vereenvoudigende vergelijking zoals die tussen de situatie in het nationaal-socialistische Duitsland (geïllustreerd door de uitspraak van David Hilbert die — op de vraag van nationaal-socialisten hoe zijn instituut in Göttingen zonder joden ervoor zou staan — gezegd zou hebben, dat zijn instituut dan gewoon niet meer bestond) en de situatie in Alexandria na de vernieling van de bibliotheek en de moord op Hypatia. En tussen al deze verhalen altijd weer wiskunde — de klassieke problemen, de schuifoplossingen van de Grieken: conchoïde van Nicomedes, de kwadratrix van Hippias, Archimedes' constructie van de heptagon. De bijdragen van Ptolomeus, Menelaus, Pythagoras, Archytas, Apollonius, Erathostenes, Euclides en Gauss, Klein, Hilbert, Hausdorff, Thom, Zeeman en vele anderen passeren de revue.

Dit alles gebeurt in het eerste deel, *A Cultural Heritage*. In het tweede gedeelte, *Introduction to Geometry*, komen enkele onderwerpen op een modernere manier terug zonder kennis van lineaire algebra te veronderstellen. Dit maakt het soms moeizaam en voegt niet zoveel toe aan wat in — soms betere — inleidende wiskundeboeken staat. Het eerste deel alleen al maakt dit tot een prachtig en goed leesbaar boek — zelfs voor gevorderden. *R. Kaenders*



A. Holme
Geometry: Our cultural heritage
Berlijn : Springer Verlag, 2002
378 p., prijs €42,75
ISBN 3-540-41949-7

Wiskundigen beschikken over een rijke schat aan verhalen. Een prachtig voorbeeld hiervan is het verhaal van de Pythagoreër Hippasus van Metapontium die, in tegenstelling tot zijn oligarchische broeders, democratisch was ingesteld en uiteindelijk door de anderen op een boot werd gezet waar hij verhongerd zou zijn. Zij deden dat omdat hij per se het brisante feit dat er incommensurabele afstanden in een pentagon zitten aan het gewone volk dacht door te moeten vertellen. Bijna elke wiskundige kent dit verhaal en eeuwenlang heeft het invloed uitgeoefend op de perceptie van de geschiedenis van de wiskunde. Voor Holme hoort het verhaal bij de culturele erfenis van de meetkunde. En volgens goede traditie gebruikt hij het verhaal om uit te leggen dat de afstanden in een pentagon nu daadwerkelijk incommensurabel zijn en waarom dit academische feit zo'n sociale lading kan hebben.

Holme heeft voor de lerarenopleiding een wiskundeboek met bewijzen en stellingen geschreven dat recht doet aan cultuurhis-

F.W. Lawvere, R. Rosebrugh
Sets for Mathematics
Cambridge : Cambridge University Press, 2003
261 p., prijs £22.99
ISBN 0-521-01060-8

This is an interesting book, it combines the foundational work of Dedekind and Cantor in set theory with that of Eilenberg and MacLane in category theory. It introduces sets and mappings between them axiomatically, by formulating the axioms in the language of category theory. For instance, non-degeneracy becomes: the initial (empty) set 0 is not isomorphic to the terminal (one-element) set 1. The Axiom of Choice becomes: every epimorphism (surjection) has a section. In this manner the authors introduce at the same time the language of categories and various (defining) properties of sets. This culminates, halfway the book, in a chapter listing eight axioms for set theory. The second half of the book proceeds to investigate further properties of sets and functions — for instance about exponentiation or powersets — on the basis of this axiomatisation.

A characteristic point of this book is thus that it uses the language of category theory to capture and work in the well-known universe of sets. But using category theory one can talk about

many other universes, such as topological spaces or vector spaces. This extra generality is not emphasised right in the beginning, but creeps in as the book proceeds. This may cause some confusion, because it is not always very explicit in which universe the authors are working. While they introduce the (categorical) properties of sets, they try to convey an awareness for the speciality of certain of these properties. For instance, in the category of sets and functions it is the case that each monomorphism with non-empty domain is a section. This property does not hold in all other universes and categories. In general, the wide-ranging perspectives and examples constitute the most valuable parts of the book.

The first of two authors, Lawvere, is one of the founding fathers of category theory. He is also known for his original language, which also shows up in this book. For instance, in the appendix on logic, different possible presentations of algebraic structures are discussed, with the advice: "In the long run it is best to try to bring the form of the subjective presentation paradigm as much as possible into harmony with the objective content of the objects to be presented; with the help of the categorical method we will be able to approach that goal."

The book explains the fundamental structures underlying mathematics and forms a rich source of examples showing connections and similarities. The book is intended for advanced undergraduate or beginning graduate students. A good introduction should be both inspiring and very clear. The high level that is achieved for the first point is not always reached for the second one.

B. Jacobs

L.L. Avramov, M. Chardin, M. Morales and C. Polini (eds.)

Commutative Algebra: Interactions with Algebraic Geometry

Providence : American Mathematical Society, 2003

360 p., prijs \$ 89

ISBN 0-8218-3233-6

Dit boek is het verslag van niet een maar twee conferenties, met bijna gelijklopende titels: *Algèbre commutative. Interactions avec la géométrie algébrique*, in Grénoble, en *Commutative Algebra and its Interactions with Algebraic Geometry*, een special session van de gezamenlijke bijeenkomst van de AMS en de SMF in Lyon. Een gecoördineerde voorbereiding heeft geresulteerd in een indrukwekkende lijst van voordrachten. Voor de meeste daarvan is een verwijzing opgenomen naar een gepubliceerd artikel. Deze bundel bevat 21 bijdragen van nogal verschillend karakter.

Van de langere artikelen wil ik er hier twee noemen. In een duidelijk overzichtsartikel, *The Frobenius homomorphism and homological dimensions*, bespreekt Claudia Miller de ontwikkelingen met als vertrekpunt het artikel van Kunz uit 1969, waarin hij bewijst dat een lokale ring van positieve karakteristiek regulier is dan en slechts dan als het Frobenius endomorfisme plat is. De titel van Ragnar Buchweitz' bijdrage, *Morita contexts, idempotents, and Hochschild cohomology — with applications to invariant rings*, moge voor zichzelf spreken.

In een beknopt artikel met de intrigerende titel *Cartan involutiveness = Mumford regularity* wijst Bernard Malgrange (de bekende analyticus uit Grénoble) erop dat de homologische interpretatie van de Cartan test in de theorie van uitwendige differentiaal-

systemen equivalent is met l -regulariteit in de zin van Mumford, ongeveer tegelijkertijd ontwikkeld, en dat er bijna geen interactie geweest schijnt te zijn tussen algebraïsch-meetkundigen en differentiaalmeetkundigen.

J. Stevens



C. Birkenhake, H. Lange

Complex Abelian varieties

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 302

Berlijn : Springer Verlag, 2004 (2nd augmented ed.)

637 p., prijs € 96,25

ISBN 3-540-20488-1

Dat de namen van de auteurs nu in alfabetische volgorde staan is het eerste wat opvalt bij deze herziene en uitgebreide uitgave van een boek dat ongeveer vijftien jaar eerder uitkwam. Daarnaast springt de toename van het aantal pagina's met zo'n tweehonderd in het oog. De gedachte dat vooruitgang in de wiskunde leidt tot vereenvoudiging, kortere bewijzen en sneller inzicht is hier blijkbaar niet van toepassing. In de eerste twaalf hoofdstukken is weinig veranderd ten opzichte van de eerdere uitgave; er zijn vijf nieuwe hoofdstukken toegevoegd wat de toename van omvang en gewicht verklaart.

Het onderwerp van het boek is abelse variëteiten over het lichaam van de complexe getallen. Een complexe abelse variëteit kan gegeven worden als een complexe torus (vectorruimte V gedeeld door een rooster Λ) die ingebed kan worden in een complex-projectieve ruimte. Deze laatste eigenschap kan worden vertaald in de existentie van een positief-definiete hermitesese vorm op V waarvan het imaginaire deel geheeltallige waarden op Λ aanneemt. De vectorruimte V is dan de universele overdekking en de kanonieke afbeelding $V \rightarrow X$ kan gezien worden als de exponentiële afbeelding voor een complexe Liegroep. De beschrijving van een complexe abelse variëteit als complexe torus geeft een snelle toegang tot een aantal belangrijke eigenschappen en centrale stellingen. Dit in schril contrast tot de algemene (algebraïsche) theorie van abelse variëteiten waar de analoge inzichten heel wat meer moeite kosten. Dat die moeite dan ook beloond wordt met een dieper inzicht in het onderwerp mag niet onvermeld blijven.

In het onderhavige boek staat de benadering van complexe tori centraal. De eerste twaalf hoofdstukken (het oude boek) geven een nogal encyclopedische inleiding in het onderwerp met een vracht aan opgaven. Daarmee vervult dit boek een nuttige functie.

Voor de rest van de bespreking beperk ik me tot de nieuwe hoofdstukken. Die beginnen met een hoofdstuk over automorfismen. Algemeenheden over automorfismen van variëteiten worden toegepast op abelse variëteiten. De zin van dit hoofdstuk ontgaat me. Daarna komt een hoofdstuk over vectorbundels op abelse variëteiten. Hier wordt de Fourier-Mukai-transformatie behandeld en dit hoofdstuk kan gezien worden als een inleiding in het meest actieve deel van dit gebied. Het volgende hoofdstuk (met een storende drukfout in de titel) bevat een potpourri van resultaten variërend van syzygiën, Seshadri-constanten, minimale lengte van perioden en de singulariteiten van de theta-divisor.

Het voorlaatste hoofdstuk over de Chowgroepen van abelse variëteiten heeft (in aansluiting met de literatuur) een veel algebraïscher karakter dan de rest van het boek. Dan volgt nog een hoofdstuk over het Hodgevermoeden voor 'algemene' abelse variëteiten en 'algemene' Jacobianen.

Als iemand op reis gaat en aarzelt welke editie meegaat in de koffer dan is mijn advies: neem gerust de eerste editie. Het verschil in gewicht laat dan nog genoeg ruimte om Polishchuk's boek over complexe abelse variëteiten (met tal van interessante nieuwe inzichten) mee te nemen.

G. van der Geer

A. Polishchuk

Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform

Cambridge tracts in mathematics, 153

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

292 p., prijs £50.00

ISBN 0-521-80804-9

De theorie van de abelse variëteiten heeft een lange geschiedenis en vindt haar oorsprong in de theorie van de elliptische integralen van Fagnano en anderen in de 18-de eeuw en is vernoemd naar Abel, die een grote invloed op haar ontwikkeling heeft gehad. Sinds het artikel van Riemann uit 1857 is niet langer de algebraïsche kromme, maar de bijbehorende complexe torus het uitgangspunt. De bijbehorende functietheorie, in het bijzonder de theorie van de thetafuncties, onderging daarna in de tweede helft van de 19-de eeuw een stormachtige ontwikkeling. Het was André Weil die de abelse variëteit zelf tot het uitgangspunt van de theorie maakte. Mumford heeft later deze theorie van Weil herschreven in Grothendieck's taal van de schema's. Abelse variëteiten spelen een fundamentele rol in een aantal van de sleutelresultaten van de 20ste eeuw, zoals de stelling van Hasse-Weil, het bewijs van het Mordellvermoeden door Faltings en Wiles' bewijs van Fermat's laatste stelling. Ondanks dat zijn er maar een paar boeken aan dit thema gewijd. Naast een boek van Lang en de klassieker van Mumford uit 1970 zijn er nog een paar boeken over de complexe theorie, zoals een dun boekje van Swinnerton-Dyer, een Lecture Notes van Kempf en een pil van Lange en Birkenhake. Nu is er dan een nieuw boek van Polishchuk. Maar de auteur waarschuwt direct in de inleiding dat we geen verbetering van de bestaande uiteenzettingen van de theorie van abelse variëteiten en thetafuncties mogen verwachten.

Het boek belicht veeleer de bestaande theorie vanuit een nieuw gezichtspunt, waarbij de Fourier-Mukai-transformatie een centrale rol speelt. In de klassieke theorie van abelse variëteiten over de complexe getallen speelt de Fouriertransformatie een deels verborgen rol in de Poisson-sommatieformule voor de Riemann-thetafunctie. In de moderne theorie is de Fouriertransformatie een afbeelding van de Chowring (of cohomologie) van een abelse variëteit naar de Chowring van de duale abelse variëteit die het gewone snijproduct overvoert in het Pontryaginproduct. De Fourier-Mukai-transformatie, ingevoerd door Mukai in 1981, is een functor van de afgeleide categorie van quasi-coherente schoven op een abelse variëteit naar de analoge categorie op de duale abelse variëteit. Het is een krachtig wapen om vectorbundels op een abelse variëteit te begrijpen. Naast de Fourier-Mukai-transformatie is 'categorificatie' een tweede thema in dit boek. Onder categorificatie wordt het vervangen van verzame-

lingstheoretische begrippen door hun categorie-theoretische analoge verstaan. Zo is de categorie van lijnbundels op een abelse variëteit het analogon van de categorie van kwadratische functies op een abelse groep; het feit dat voor een kwadratische functie op een abelse groep de uitdrukking

$$f(x+y+z) - f(x+y) - f(x+z) - f(y+z) + f(x) + f(y) + f(z)$$

constant is correspondeert met de Stelling van de Kubus voor lijnbundels.

Het onderhavige boek valt uiteen in drie delen. Het begint met een analytisch deel waarin summier de theorie over de complexe getallen wordt verteld. De Heisenberggroep en thetafuncties spelen een belangrijke rol. Ook wordt het verband gelegd met spiegelsymmetrie. De Fourier-Mukai-transformatie kent een soort reëel analogon binnen de spiegelsymmetrie voor tori die tori met een complexe structuur verbindt met tori met een symplectische structuur. Dit verklaart ook een deel van de interesse voor de Fourier-Mukai-transformatie. Het tweede deel van het boek bevat de algebraïsche theorie met de Fourier-Mukai-transformatie als belangrijkste ingrediënt, zoals bijvoorbeeld gebruikt bij de constructie van de duale abelse variëteit. Het laatste deel behandelt Jacobianen. Hier wordt bijvoorbeeld Torelli bewezen met Fourier-Mukai.

Het nieuwe perspectief maakt dit een interessant en boeiend boek. Soms werkt het nieuwe gezichtspunt een beetje als een keurslijf; zo wordt vaak naar later verwezen voor bewijzen die pas geleverd worden als de Fourier-Mukai-transformatie volledig beschikbaar is. Een aantal paragrafen in het boek blijken doodlopende straatjes te zijn, maar in het geheel genomen is het een verfrissend boek dat iedereen met belangstelling voor abelse variëteiten, of waarom niet, met belangstelling voor echte wiskunde, kan worden aanbevolen.

G. van der Geer

B.L.J. Braaksma, G.K. Immink, M. van der Put, J. Top (eds.)

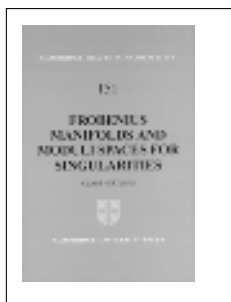
Proceedings of the Conference on Differential equations and the Stokes phenomenon: Groningen, the Netherlands, 28-30 May 2001

London: World Scientific Publishing, 2002

329 p., prijs \$ 107, ISBN 981-238-172-4

This book contains expanded versions of lectures held during a workshop on differential equations and the Stokes phenomenon, held in Groningen in 2001. There are thirteen contributions scattered over a large variety of subjects. It is futile to give a complete overview of these thirteen chapters, so let me mention a few that caught my interest. A contribution of Y. André with an introduction to the theory of p -adic differential equations, with a possible outlook on p -adic Stokes phenomena. Then there is a contribution of M. Berkenbosch with an attempt to construct a moduli space for systems of first order linear differential equations. In the contribution of Van der Kamp, Sanders and Top we find an introduction to generalised Lie symmetries for algebraists together with an application of number theory to this theory. Of course, mentioning only these results in this review is a very personal choice. Therefore I advise anyone with an interest in this area to have a look and see if there are chapters to his taste in this very interesting collection.

F. Beukers



C. Hertling
Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities
Cambridge Tracts in Mathematics, 151
 Cambridge : Cambridge University Press, 2002
 270 p., prijs £55,-
 ISBN 0-521-81296-8

Dit boek gaat over verbanden tussen twee verschillende theorieën: Frobeniusvariëteiten en Singulariteitentheorie.

Allereerst Frobenius manifolds. Dit zijn complexe manifolds met extra structuren op de complexe raakbundel, namelijk een vermenigvuldiging en een metriek. De definitie van Frobenius manifolds gaat terug op Dubrovin (1991), die zijn motivatie ontleende aan het werk van Witten, Dijkgraaf, Verlinde en Verlinde over topologische veldentheorie (in de theoretische natuurkunde).

Singulariteitentheorie ontstond als specifiek onderwerp rond 1970 op grond van werk van Whitney, Thom, Arnol'd, Mather, Brieskorn. Het beschrijft verschijnselen, die van parameters afhangen en onderscheidt stabiele situaties van instabiele. In het geval dat verschijnselen beschreven worden door een reële of complexe (potentiaal)functie geeft dit aanleiding tot semi-universele deformaties en diverse algebraïsche, meetkundige en topologische structuren en invarianten. Voor geïsoleerde singulariteiten van functies is de basisruimte van de semi-universele deformatie eindigdimensionaal en glad.

Op deze basisruimte bestaat op een natuurlijke manier een complexe vermenigvuldiging en metriek, die aanleiding geeft tot de structuur van een Frobenius manifold. Dit gaat terug op het werk van K. Saito en M. Saito in de jaren tachtig, en gold als zeer moeilijk te doorgronden.

Anderzijds: uitgaande van een zogenaamd massief F-manifold en de studie van de vermenigvuldiging volgt de definitie van een Lagrange afbeelding met bijbehorende genererende functie en caustiek. Dit levert een direct verband met de theorie van ontvouwingen van singulariteiten.

Het boek van Hertling handelt over de isomorfie van een klasse van Frobenius manifolds en singulariteitentheorie. Meer precies toont hij aan, dat kiemen van massieve F-manifolds met 'glad analytisch spectrum' precies overeenstemmen met de basisruimten van kiemen van complexe holomorfe functies met geïsoleerde singulariteiten. Deze uitspraak generaliseert hij verder tot de klasse van geïsoleerde 'rand singulariteiten'.

In de tweede helft van het boek komt de constructie van K. Saito nader aan de orde met de beschrijving van de Gauss-Manin connectie, gepolariseerde gemengde Hodgestructuren en de hogere residue paring. Hertling zorgt hier voor gedetailleerde behandeling. Daarnaast geeft hij ook toepassingen, bijvoorbeeld op het μ -constant stratum van singulariteiten.

Het boek is duidelijk en helder geschreven. De schrijver is in staat gebleken om vele zaken, die verspreid en onvolledig in de literatuur stonden, leesbaar op te schrijven en te vereenvoudigen. Verder zijn de talloze verwijzingen van belang.

Het is echter geen eenvoudige kost. Het onderwerp vereist nogal wat voorkennis: basisonderwerpen van complexe analytische meetkunde (met inbegrip van coherente schoven en platheid

van connecties), begrippen uit de symplectische meetkunde, kennis van singulariteitentheorie. De auteur geeft in het begin vaak alleen motivatie, definities en stellingen en verwijst verder naar de literatuur. Na de inleidende paragrafen is het boek echter compleet in uitleg en bewijs.

Het is een mooi boek geworden, dat ik zeer aanbeveel. Noemenswaard zijn ook de Nederlandse bijdragen aan de gebieden, zowel van fysische als mathematische aard.

D. Siersma

D.E. Hesseling

Gnomes in the fog: The reception of Brouwer's intuitionism in the 1920s

Science Networks. Historical Studies, 28
 Basel: Birkhäuser, 2003
 447 p., prijs €115,56
 ISBN 3-7643-6536-6

In het begin van de twintigste eeuw werd een heftig debat gevoerd over de vraag wat wiskunde is. De Nederlandse wiskundige Brouwer, die het wiskundig intuïtionisme ontwikkelde, speelde hierin een belangrijke rol. Brouwer stelde wiskundige principes ter discussie die sedert de Grieken waren geaccepteerd, en hij ontwikkelde een alternatieve wiskunde gebaseerd op nieuwe principes. Volgens Brouwer bestaat wiskunde als mentale constructies in het hoofd van iemand die wiskunde bedrijft. Wiskunde wordt niet ontdekt maar gemaakt. Daarom wijst Brouwer het principe van de uitgesloten derde af. Dit principe maakt namelijk een bewijs uit het ongerijmde mogelijk, waarbij wiskundige objecten moeten worden erkend die niet in een mentale constructie zijn ontstaan. Brouwer had invloed op belangrijke denkers zoals Wittgenstein en Gödel.

Hesseling onderzocht — op het raakvlak van wiskunde en filosofie — wat het intuïtionisme van Brouwer teweegbracht. *Gnomes in the fog* is naar zijn eigen zeggen een verbeterde versie van zijn dissertatie. Elk hoofdstuk is voorzien van een gedegen inleiding, waardoor het boek ook toegankelijk is voor de minder wiskundig geschoonde lezer. Voor deze lezer is tevens een verklarende woordenlijst opgenomen. Het boek is helder geschreven in vloeiend Engels, en geeft interessante achtergrondinformatie over de persoonlijke facetten van Brouwer: over zijn geloofsbelijdenis voor de Remonstrantse kerk waarin hij zijn ontologisch solipsisme onthult: "[...] het eenige ware voor mij is mijn eigen ikheid van het oogenblik [...]", over zijn karakter: "[...] aan de meeste mensen heb ik het land [...]", enz.

In bekende naslagwerken wordt het debat beschreven als een discussie tussen drie stromingen: het formalisme, intuïtionisme en logicisme, waarbij het probleem van de paradoxen van de verzamelingenleer het hoofdthema is. Hesseling herschreef de geschiedenis van het debat op drie punten. Zijn stellingen zijn: Het logicisme speelde slechts een marginale rol, Bertrand Russell — de proponent van het logicisme — nam niet deel aan het debat; De paradoxen stonden niet centraal in het debat, maar de vraag hoe wiskunde bestaat en het principe van de uitgesloten derde; Het intuïtionisme en het formalisme leverden nauwelijks strijd met elkaar.

Het debat werd in gang gezet door een publicatie van Hermann Weyl. Deze plaatste in 1921 het thema over het 'wiskundige bestaan' definitief op de agenda. Weyl werd een van de eerste

aanhangers van Brouwers intuïtionisme. Hesseling ging niet over een nacht ijs, hij onderzocht de reacties van honderdtwintig personen die deelnamen aan de discussie, waaronder 'grote namen' zoals Hilbert en Weyl, maar ook minder bekende wiskundigen en filosofen. Daarbij gebruikte hij meer dan tweehonderdvijftig publicaties.

Samenvattend: vernieuwend, gedegen en fraai uitgegeven, kortom een prachtboek!
N. Krijn

J. Ponstein

Nonstandard Analysis

Groningen : SOM Research School School, 2002

147 p., tekst gratis verkrijgbaar op internet

som.rug.nl/bestanden/ponstein.pdf

ISBN 90-367-1672-1

Tot ver in de negentiende eeuw werkten wiskundigen vrijelijk met 'infinitesimaal kleine' en 'oneindig grote' getallen. Een voorbeeld hiervan is de manier waarop Euler de formule

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

(voor complexe z) afleidde: hij begint met te zeggen dat voor 'oneindig grote' waarden van n ,

$$2 \sinh x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n.$$

Nu staat er rechts een veelterm van de vorm $a^n - b^n$, die ontbonden kan worden als $(a - b)(a - \varepsilon_1 b) \cdots (a - \varepsilon_{n-1} b)$, waar $1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ de n -de eenheidswortels zijn. Enzovoorts.

Deze manier van werken werd verlaten na de invoering door Weierstrass van rigoureuze argumenten met ε 's en δ 's, omdat niet altijd duidelijk was, hoe de redeneringen met 'oneindig groot' geïnterpreteerd moesten worden. Cauchy 'bewees' bijvoorbeeld dat de puntsgewijze limiet van een convergente rij continue functies continu is...

Eén van de verrassingen van de twintigste-eeuwse modeltheorie is de ontwikkeling door Abraham Robinson van de 'niet-standaardanalyse', die het mogelijk maakte de oude werkwijze met infinitesimalen en oneindig grote getallen van een correcte interpretatie te voorzien. Ze werden dus gerehabiliteerd. (Ja, ook het bewijs van Cauchy! Alleen moet de conclusie anders worden uitgelegd.)

De theorie gaat uit van een domein van *hyperreële getallen* *R waarin zich 'niet-standaard' getallen bevinden. *R is zo geconstrueerd dat elke deelverzameling A van de verzameling van gewone reële getallen R een extensie ${}^*A \subset {}^*R$ heeft, en dito voor elke verzameling van deelverzamelingen van R , enzovoort.

Hiervoor geldt het *transfer principe*, dat grofweg zegt dat *A dezelfde eigenschappen heeft met betrekking tot *R , als A met betrekking tot R . Verder heeft elke $r \in {}^*R$ een unieke schrijfwijze als $r = s + x$ waarbij $s \in R$ (s is het 'standaard deel' van r), en x een 'infinitesimaal' is, dat wil zeggen dat $|x| < \frac{1}{n}$ voor elk positief natuurlijk getal n .

We hebben nu het volgende simpele bewijs van de tussenwaardestelling van de analyse: Stel $f : [a, b] \rightarrow R$ continu met $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. We moeten een $x \in (a, b)$ vinden met $f(x) = 0$.

Bewijs: kies $m \in {}^*N$ hypergroot (m is groter dan elk standaard natuurlijk getal). Verdeel het interval $[a, b]$ in m sub-intervalletjes van lengte $\frac{b-a}{m}$. Er is nu een kleinste $k \in {}^*N$ waarvoor geldt dat $f(a + k \frac{b-a}{m}) > 0$. Uit de continuïteit van f volgt nu, dat als s het standaard deel van $a + k \frac{b-a}{m}$ is, $f(s) = 0$ geldt. Het beroep dat in dit bewijs gedaan wordt op het 'kleinste element' principe voor *N is gerechtvaardigd door het transfer principe.

Jaap Ponstein, in leven hoogleraar Operations Research in Groningen, begon zich na zijn emeritaat voor de grondslagen van deze niet-standaard analyse te interesseren. Na uitgebreide literatuurstudie legde hij zijn inzichten neer in een manuscript dat, na zijn plotseling overlijden in 1995, werd uitgetypt en dat nu is uitgegeven door de Research School Systems, Organization and Management.

Het boekje handelt grotendeels (honderd van de honderdveertig bladzijden) over de *grondslagen* van de niet-standaardanalyse: de constructie van *R en de principes van redeneren erover. Voor een logicus als ondergetekende is deze behandeling een beetje wijdlopijg en omslachtig. Maar door de prettige stijl waarin het geschreven is, en de vele voorbeelden (zoals de in deze recensie genoemde), is het heel geschikt om een eerste indruk op te doen van het vak. En een waardig testimonium van een wiskundige met originele interesses.

J. van Oosten

Problemen

| Problem Section

From this issue on, the *Universitaire Wiskunde Competitie* (UWC) will be changed back into a general Problem Section, open for everyone. In particular, the prizes are no longer restricted to students. For each problem the most elegant solution will be rewarded with a 20 Euro book token.

Now and then there will be a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will receive a prize of 100 Euro. To round off Sessions 2006/1 and 2006/2 correctly, this issue and the next will include the ladder.

Both proposed problems and solutions can be sent to uwc@nieuwarchief.nl or to the address given below in the left-hand corner; submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred. When proposing a problem, please include a complete solution, relevant references, etc. Group contributions are welcome. Participants should repeat their name, address, university and year of study if applicable at the beginning of each problem/solution. If you discover a problem has already been solved in the literature, please let us know. The submission deadline for this session is December 1, 2006.

The prizes for the Problem Section are sponsored by *Optiver Derivatives Trading*.



Problem A (Problem Exchange)

Evaluate

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1} dx.$$

Problem B (Proposed by Peter Montgomery)

1. Find an integer n (as small as possible) and rational numbers $a_1, \dots, a_n$ such that

$$\sqrt{10 + 3\sqrt{11}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}.$$

2. Find an integer n (as small as possible) and rational numbers $b_1, \dots, b_n$ such that

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{b_i}.$$

Problem C (Proposed by Paul Penning)

Consider a triangle ABC inscribed in an ellipse. For given A the other vertices can be adjusted to maximize the circumference. Prove or disprove that this maximum circumference is independent to the position of A on the ellipse.

Problem * (Proposed by Christiaan van de Woestijne)

Let $f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ be a polynomial of degree n with rational coefficients. Suppose that $\text{degree}(\gcd(f(X), f^{(k)}(X))) > 0$ for $k = 1 \dots n-1$. Prove or disprove $f(X) = a(X-b)^n$, for some rational numbers a, b . (See also [arXiv:math.AC/0605090](https://arxiv.org/abs/math.AC/0605090), 3 May 2006.)

Edition 2006/1

For Session 2006/1 We received submissions from Rik Bos, Thomas Decru, Ruud Jeurissen, Jaap Spies, B. Sury, the Fejéntaláltuka Szeged Problem Solving Group, Peter Vandendriessche, and Gerd Verbouwe.

Problem 2006/1-A We are given a lamp and a sufficiently large number of synchronised time switches that can be turned on or off by the quarter of an hour and have a revolution time of 24 hours. We are going to mount a finite number of switches on top of each

other, and put the lamp on top of the result. At the beginning, all time switches are synchronised at 24.00 hours. We define a *period* to be a time span in which the lamp is on for at least one quarter of an hour, and is off for at least one quarter of an hour, and which repeats itself. Which periods, shorter than 4 days, can be constructed?

Solution No solutions were sent in. The solution below is based on that of the proposer Jurjen Bos.

The smallest unit of time is a quarter of an hour. In 24 hours we consider 96 such units, and in 4 days we consider 384 units.

With one switch we are able to create periods of length m units, where m divides 96 and $m > 1$. So with one switch we can create periods of length 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32 and 48 units.

What happens when we combine two switches? Since we are not interested in how long (and in when) the light burns during one period, we may assume the light only burns the first unit of the period.

Suppose a set A of switches causes a period of a units, while a set B causes a period of b units. Assuming that the light burns just 1 unit in each of the periods caused by A and B , we see that the combination of the sets A and B causes a period of ab units.

Notice that the only prime divisors of 96 are 2 and 3. Any combination of switches will increase the factor 2 and/or 3 in the length of the period. The periods we find are therefore:

- 2 switches 9, 18, 36, 64, 72, 128, 144, 192, 256, 288, 384
- 3 switches 27, 54, 108, 216
- 4 switches 81, 162, 324
- 5 switches 243

Problem 2006/1-B Let $P = (0, 0)$, $Q = (3, 4)$. Find all points $A = (X, Y)$ such that

- X and Y are integers,
- the lengths of line segments PA and QA are integers.

Solution This problem was solved by Peter Vandendriessche. The solution below is based on his solution.

We modify the problem a little bit by introducing a coordinate transformation T (a combination of a translation and point-multiplication by a factor 2):

$$\begin{cases} x = 2X - 3 \\ y = 2Y - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} X = \frac{x+3}{2} \\ Y = \frac{y+4}{2} \end{cases}$$

Let $R = T(P) = (-3, -4)$, $S = T(Q) = (3, 4)$ and $B = T(A)$. With the new coordinates the problem is symmetric about $(0, 0)$. Notice that x has to be odd and y has to be even, in order that (X, Y) will be a lattice point. Since the transformation T consist of a multiplication by a factor 2, the distances $\overline{BR}$ en $\overline{BS}$ have to be even, and so does the difference. Let therefore

$$2d = \overline{BR} - \overline{BS} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+4)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

After squaring this equation, we have

$$4d^2 = 2x^2 + 2y^2 + 50 - 2\sqrt{(x^2 + y^2 + 25)^2 - (6x + 8y)^2}.$$

Dividing by 2 leads to

$$x^2 + y^2 + 25 - 2d^2 = \sqrt{(x^2 + y^2 + 25)^2 - 4(3x + 4y)^2}.$$

After squaring (again) and dividing by 4 we have

$$0 = d^4 - d^2(x^2 + y^2 + 25) + (3x + 4y)^2. \quad (*)$$

Notice that $x \equiv 1 \pmod{2}$ and $y \equiv 0 \pmod{2}$, whence $d \equiv 1 \pmod{2}$. Using the triangle inequality we find that $|2d| < 10$. Therefore $|d| \in \{1, 3, 5\}$.

If $|d| = 5$, $(*)$ can be reduced to $(4x - 3y)^2 = 0$. Therefore $(x, y) = (3\lambda, 4\lambda)$, or in terms of the original coordinates, $(X, Y) = (3\mu, 4\mu)$, where μ is integral.

For the case $|d| = 3$, the equality $(*)$ can be reduced to $7y^2 + 24xy = 144$. Substitute $y = 12v$. We find $v(7v + 2x) = 1$. There are only 2 integral solutions: $(x, v) = (3, 1)$ and $(x, v) = (-3, -1)$. Then $(x, y) = (3, 12)$ and $(x, y) = (-3, -12)$, or in terms of the original coordinates $(X, Y) = (3, -4)$ and $(X, Y) = (0, 8)$.

Finally, if $|d| = 1$, then $(*)$ can be reduced to $8x^2 + 24xy + 15y^2 = 24$. Substitute $y = 4v$. We find $x^2 + 12xv + 30v^2 = 3$. Now substitute $u = x + 6v$. We have

$$u^2 - 6v^2 = 3. \quad (**)$$

This equation is a well-known Pell equation, which can be solved using algebraic number theory. The solutions of $(**)$ are of the form (u_n, v_n) where u_n and v_n both satisfy $z_{n+1} = 10z_n - z_{n-1}$. Consequently, the solutions (x, y) of $(*)$ are of the form (x_n, y_n) where x_n and y_n also both satisfy $z_{n+1} = 10z_n - z_{n-1}$. Moreover, the values for $n = 0, 1$ are fixed: either $(x_0, y_0) = (-3, 4)$ and $(x_1, y_1) = (-39, 44)$, or $(x_0, y_0) = (9, -4)$ and $(x_1, y_1) = (93, -44)$. For the solutions (X, Y) of the initial problem, this leads to the recurrences $X_{n+1} = 10X_n - X_{n-1} - 12$ and $Y_{n+1} = 10Y_n - Y_{n-1} - 16$ with initial values $(X_0, Y_0) = (0, 4)$, $(X_1, Y_1) = (-18, 24)$ or $(X_0, Y_0) = (6, 0)$, $(X_1, Y_1) = (48, -20)$.

Problem 2006/1-C Let $n \geq 1$ be an integer and $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ be a polynomial with real coefficients. Suppose that f satisfies the following condition:

$$|f(\xi)| \leq 1 \quad \text{for each } \xi \in [-1, 1].$$

Consider the polynomial

$$g(x) = a_0 x^n + \dots + a_n,$$

the reciprocal polynomial of f . Show that g satisfies

$$|g(\xi)| \leq 2^{n-1} \quad \text{for each } \xi \in [-1, 1].$$

Solution This problem has been solved by Peter Vandendriessche, Rik Bos, and the Fejéntaláltuka Szeged Problem Solving Group. The solution below is based on that of the proposer.

It is clear, by writing $g(x) = x^n f(1/x)$, that we have to prove that $|a_n| \leq 2^{n-1}$ and $|f(\xi)| \leq 2^{n-1} |\xi|^n$ for all $\xi \in \mathbf{R}$ with $|\xi| > 1$. Furthermore we can assume, without loss of generality, that $a_n > 0$.

Before we start proving the desired properties of f , we recall the definition of the Chebyshev polynomials as well as some identities that they satisfy. Define recursively

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x; \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x) \quad \text{for } n \geq 0.$$

The following identities are satisfied by T_n :

$$T_n(\cos \alpha) = \cos n\alpha; \quad T_n(\cosh t) = \cosh nt.$$

Let n be at least 1. From the first identity we see that $|T_n(\xi)| \leq 1$ for all $\xi \in [-1, 1]$. From the second identity and the fact that $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ it is clear that $|T_n(\xi)| \leq 2^{n-1} |\xi|^n$ for all $\xi \in \mathbf{R}$ with $|\xi| > 1$. From the recursion defining T_n we see that the leading coefficient of T_n is equal to 2^{n-1} . So the T_n form an optimal example of polynomials satisfying the conditions and the conclusion of the problem.

First we will prove the following lemma:

Lemma. Let f be a polynomial with real coefficients satisfying $|f(\xi)| \leq 1$ for all $\xi \in [-1, 1]$. Then for each $n \geq 1$, the polynomial $P(x) = f(x) - T_n(x)$ has at least n zeroes on $[-1, 1]$, counted with multiplicity.

Proof. If we put $x_k = \cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)$ for $k \in \{0, \dots, n\}$, then $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ and $T_n(x_k) = (-1)^{n-k}$. Furthermore $\frac{d}{dx}T_n(x_k) = 0$ for each $k \neq 0, n$. This means that

$$f(x + x_k) = P(x + x_k) + T(x + x_k) = P(x_k) + T(x_k) + \frac{d}{dx}P(x_k)x + O(x^2). \quad (1)$$

If $P(x_k) \neq 0 \neq P(x_{k+1})$ then by the intermediate value theorem, P has a zero on (x_k, x_{k+1}) . If $P(x_k) = 0$ with $k \neq 0, n$, then the zero x_k must be of multiplicity $m > 1$, because otherwise in view of (1) we can find ξ arbitrarily close to x_k with $|f(\xi)| > 1$. If we split up these m zeroes into 1 zero for the interval $[x_{k-1}, x_k]$ and $m-1$ zeroes for $[x_k, x_{k+1}]$, then in the end we see that each interval $[x_k, x_{k+1}]$ (now k runs from 0 to $n-1$) has at least one zero of P . By the splitting this gives a correct counting of the zeros. $\square$

Let's now prove that $a_n \leq 2^{n-1}$. Suppose that $a_n > 2^{n-1}$. Define $P(x) = \frac{2^{n-1}}{a_n}f(x) - T_n(x)$. Then $\deg(P) \leq n-1$. Because of the lemma, we see that $P = 0$. Hence $f(x) = \frac{a_n}{2^{n-1}}T_n(x)$, which contradicts the conditions on f .

The only thing left to show is that $|f(\xi)| \leq 2^{n-1}|\xi|^n$ for all $\xi \in \mathbf{R}$ with $|\xi| > 1$. So suppose that there is a ξ violating this property. Then without loss of generality we may assume that $\xi > 1$, otherwise replace $f(x)$ by $(-1)^n f(-x)$. There are two cases to distinguish: $f(\xi) > 2^{n-1}\xi^n$ and $f(\xi) < -2^{n-1}\xi^n$.

In the case $f(\xi) > 2^{n-1}\xi^n$ look at the polynomial $P(x) = f(x) - T_n(x)$. First note that P is nonzero, otherwise $f(x) = T_n(x)$, which is a contradiction. The lemma implies that P has at least n zeroes on $[-1, 1]$. It follows that $\deg(P) = n$ and $a_n < 2^{n-1}$. We can see that $f(\xi) > 2^{n-1}\xi^n \geq T_n(\xi)$ so $P(\xi) > 0$. The leading coefficient of P is negative so P must have a zero on (ξ, ∞) . But then P has at least $n+1$ zeroes, which is again a contradiction. In the case $f(\xi) < -2^{n-1}\xi^n$ the same argument applies with $P(x) = -f(x) - T_n(x)$.

Problem 2006/1-D Let G be a group such that the maps $f_m, f_n : G \rightarrow G$ given by $f_m(x) = x^m$ and $f_n(x) = x^n$ are both homomorphisms.

1. Show that G is Abelian if (m, n) is one of the pairs (4,11), (6,17).
2. Show that there are infinitely many pairs (m, n) such that G is Abelian.
3. Show that for every m there are infinitely many n such that G is Abelian.
4. Given a pair (m, n) , how are we able to predict whether G is Abelian?

Solution This problem was solved by R. Bos, Peter Vandendriessche, B. Sury, and Jaap Spies. The solution below is based on that of R. Bos.

Let G be a group, and let $f_k : G \rightarrow G, x \mapsto x^k$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Obviously, when G is Abelian, every f_k is a (homo)morphism. Conversely, we shall prove:

Theorem 1. Suppose m and n satisfy the following: f_m and f_n are morphisms on a group G and $\gcd(m(m-1), n(n-1)) = 2$. Then G is Abelian. Moreover, for every m and n with $\gcd(m(m-1), n(n-1)) \neq 2$, there exists a non-Abelian group G such that f_m and f_n are morphisms on G .

This completely classifies the pairs (m, n) mentioned in the problem. In particular, it provides an easy answer for all parts of the problem. For instance, given any m (different from 0,1) and any integer a we can take $n = am(m-1) - 1$ and easily check that the condition of the first part in the theorem is satisfied. Hence for every m there are infinitely many n such that G is Abelian.

To prove the theorem, let us first introduce the following notation. $G^n = \mathcal{I}(f_n)$ is the image of G under f_n , $C(G)$ is the center of G (the set of group elements h for which $gh = hg$, for all $g \in G$), $M = M(G) = \{n \in \mathbf{Z} \mid f_n \text{ is a morphism on } G\}$, and $A = A(G) = \{n \in \mathbf{Z} \mid f_n \text{ is an antimorphism on } G\}$ (that is, $f_n(xy) = f_n(y)f_n(x)$).

Lemma 1. If G is a group and $G^n, C(G), M$ and A are as defined above, the following statements hold for all $n, k \in \mathbf{Z}$.

- i. $n \in M \Leftrightarrow -n \in A$,

- ii. $n, kn \in M \Leftrightarrow n, n - kn \in M$,
 iii. $n \in M \Leftrightarrow 1 - n \in M$,
 iv. $n, -n \in M \Leftrightarrow n \in M \wedge G^n$ is abelian $\Leftrightarrow n\mathbf{Z} \subseteq M$,
 v. $n, -n \in M \Rightarrow G^n \subseteq C(G)$,
 vi. If $k, n \in M$, then $k \times n \in M$.

Proof. (i) $(xy)^n = x^n y^n \Leftrightarrow (xy)^{-n} = y^{-n} x^{-n}$,

(ii) It suffices to prove ' $\Rightarrow$ '. To do so, first note that for every k we have $(uv)^k = u(vu)^{k-1}v$ (this also holds for negative k). Since $kn, n \in M$ we see that

$$x^{kn} y^{kn} = ((xy)^n)^k = (x^n y^n)^k = x^n (y^n x^n)^{k-1} y^n = x^n ((yx)^n)^{k-1} y^n,$$

hence $x^{kn-n} y^{kn-n} = (yx)^{kn-n}$, from which it follows that $kn - n \in A$, and $n - kn \in M$.

(iii) Apply (ii) to the pair $(1, n)$

(iv) Suppose n and $-n \in M$. According to (i), $n \in M \cap A$, hence $x^n y^n = (xy)^n = y^n x^n$, which implies that G^n is an abelian subgroup of G . As $n \in M$ and G^n is abelian, we see that $(xy)^{nt} = (x^n y^n)^t = x^{nt} y^{nt}$ since x^n and y^n commute. The last implication is trivial.

(v) We already know from (iv) that G^n is abelian, so $xy^n x^{-1} = (xy x^{-1})^n = x^n y^n x^{-n} = y^n$

(vi) Suppose $k, m \in M$, then $(xy)^{km} = (x^k y^k)^m = x^{km} y^{km}$. $\square$

Corollary 1. G is abelian $\Leftrightarrow -1 \in M \Leftrightarrow 2 \in M$.

Proof. Since $1 \in M$, Lemma 1 (iv) and (iii) show that G is abelian iff $-1 \in M$, iff $2 \in M$. $\square$

Lemma 2.

i. Suppose $m\mathbf{Z} \subseteq M$ and $n \in M$, then $n + m\mathbf{Z} \subseteq M$.

ii. Suppose $m\mathbf{Z}, n\mathbf{Z} \subseteq M$ and $k = \gcd(m, n)$, then $k\mathbf{Z} \subseteq M$.

Proof. (i) If $k = am + n$, then since am and n belong to M we have $(xy)^k = (xy)^{am} (xy)^n = x^{am} y^{am} x^n y^n$. Moreover $G^m \subseteq C(G)$ (Lemma 1 (v)), so y^{am} and x^n commute, hence $x^{am} y^{am} x^n y^n = x^{am} x^n y^{am} y^n = x^k y^k$.

(ii) From (i) we see that $m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z} \subseteq M$. Since $k\mathbf{Z} = m\mathbf{Z} + n\mathbf{Z}$ we are done. $\square$

Lemma 3. Suppose $n \in M$. If $k = n(n-1)$, then $k, -k \in M$.

Proof. Apply Lemma 1(iii) and (vi) a number of times: from $n \in M$ we see that $1 - n \in M$, so $-k = n(1 - n) \in M$, but also $n^2 \in M$, therefore (Lemma 1 (iii)) $1 - n^2 \in M$. Since both $1 - n \in M$, and $1 - n^2 \in M$ and $1 - n \mid 1 - n^2$ Lemma 1 (ii) shows that $1 - n - (1 - n^2) = k \in M$. $\square$

Corollary 2. Suppose $n \in M$. Then $n(n-1)\mathbf{Z} \subseteq M$.

Proof. Apply Lemma 3 and Lemma 1 (iv). $\square$

Proposition 1. Suppose m and n both belong to M . Let $r = m(m-1)$ and $s = n(n-1)$. If $\gcd(r, s) = 2$, then G is abelian.

Proof. Corollary 2 implies that $r\mathbf{Z}, s\mathbf{Z} \subseteq M$ and Lemma 2 (ii) shows that $2\mathbf{Z} \subseteq M$. Hence G is abelian by Corollary 1. $\square$

Proposition 2. Suppose r and s are as above. If $\gcd(r, s) \neq 2$ then there exists a non-abelian group G such that m and n both belong to M .

Proof. Note that r and s have a common factor p^i where p is prime and $i > 0$ (and $i > 1$ if $p = 2$). Then p^i divides $r = m(m-1)$ hence p^i divides m or $m-1$. Suppose p^i divides m and similarly that p^i divides n . We shall define a finite non-abelian group $G = G(p)$ with p^3 elements in such a way that when p is odd we have $x^p = 1$ for every $x \in G$, and when $p = 2$, $x^4 = 1$ for every $x \in G$. This shows that in all cases $x^m = 1$ and $x^n = 1$ for every

$x \in G$. In particular m and n belong to M . The same conclusions hold if for instance p^i divides $m - 1$, since then $x^{m-1} = 1$, hence $x^m = x$, which again shows that $m \in M$. $\square$

So let's proceed to the construction of the group $G = G(p)$. This will be a subgroup of the general linear group $GL_3(\mathbb{F}_p)$ of degree 3 over the finite field with p elements consisting of the matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

but more easily represented as the set of all elements $(x, y, z) \in \mathbb{F}_p^3$ with $(x, y, z) \times (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$. It is easily verified that this defines a non-abelian group with unit $(0, 0, 0)$ and $(x, y, z)^n = (nx, ny, nz + \frac{1}{2}n(n-1)xy)$. In particular $(x, y, z)^p = (0, 0, 0)$ for odd p and $(x, y, z)^4 = (0, 0, 0)$ for the case $p = 2$ as was required.

Problem 2006/2-* Even though the problem was placed in NAW 2006/2, we have already received several solutions and have decided to close the problem for submissions.

Prove or disprove that if $\binom{2n+1}{n} \equiv 1 \pmod{n^2 + n + 1}$ where $n^2 + n + 1$ is a prime, then $n = 8$.

Solution This problem was solved by Thomas Decru, Ruud Jeurissen, and Gerd Verbouwe. All of them had the following solution.

Choosing $n = 24$, we find that $n^2 + n + 1$ is a prime and $\binom{2n+1}{n} \equiv 1 \pmod{n^2 + n + 1}$. Thus the statement is refuted. Gerd Verbouwe showed that this is the only example for $n < 309$ other than $n = 8$.

Remark Hennie ter Morsche noticed that the solution of problem 2005/3-A is more general. Since $f(x) + 1 = f(x - 1)$ we find that f is the sum of $-x$ and the solutions of $g(x) = g(x - 1)$. But for g we can choose an arbitrary continuous function with period 1.

Results of Session 2006/1

Name	A	B	C	D	Total
1. Vandendriessche	-	8	8	6	102

Final Table after Session 2006/1

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

Name	Points
1. Frank	36
2. Smeets	28
3. Annelies Horré	21

Erratum: the scores of Session 2005/4 were miscomputed. The top 3 should have been Syb Botma (42 points), DESDA (38 points), and Frank (36 points).