

Inhoud | Contents

74 Colofon

75 Redactioneel *Jaap Molenaar*

76 Agenda

78 Nieuws

Overzichtsartikelen | Reviews

84 Möbius in strips en strings *Jaap Top*

113 Wiskunde en turbulentie *Raoul Robert*

Onderzoek | Research

91 Een functionele blik onder water *Patrick Oonincx*

98 Studiegroep wiskunde met de industrie *Sandjai Bhulai, Marco Bijvank, Misja Nuyens*

106 Tussen beweging en ademhaling *Sanne Houweling, Andreas Daffertshofer*

Cultuur | Culture

123 Stochastiek in de vroege muziek van Xenakis *Derk Pik*

Boeken | Books

120 Het meten van de wereld *Ionica Smeets*

128 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

83 Wiskundigen in den vreemde *Pieter Allaart*

96 Realistische wiskunde versus abstract denken *Martinus van Hoorn*

147 Problemen/UWC

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (drpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern  (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)
Yves van Gennip (y.vangennip@phys.uu.nl)

Bureau redactie

Annelies Hafkenscheid, Arno Kret, Wendy Ellens

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.) Jan van de Craats (UvA), Hans Cuypers (TUE), Yves van Gennip (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (UvA)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden vóór het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
NL-1090 GB Amsterdam
KWG-exchange@cw.nl, fax +31 20 5924026

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. In 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" is het 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap.

De contributie voor leden van het KWG bedraagt  70 per jaar. Gepensioneerden en werklozen betalen  35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor  25 per jaar. Studenten en pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van  50. Members of SIAM, the Société Mathématique de France, the Gesellschaft f r Angewandte Mathematik und Mechanik, the Deutsche Mathematiker-Vereinigung, and of the American, Australian, Belgian, Indian, London, Spanish, and South-African Mathematical Societies living outside of the Netherlands pay  50 instead of the full membership fee of  70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of  5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of  7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor  90 respectievelijk  105. Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Henk Broer (RUG, voorzitter), Jan van Mill (VU, ondervoorzitter), Herman te Riele (CWI, secretaris), Fieke Dekkers (RIVM, penningmeester), Wieb Bosma (RUN), Klaas Pieter Hart (TUD), Vivi Rottschäfer (UL), Iris van Gulik - Gulikers (VdCSG)

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	16-09-2006	-
4	03-12-2006	07-08-2006
1	03-03-2007	06-11-2006
2	16-06-2007	05-02-2007

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Waarom adem je met het zelfde tempo als waar mee je je beweegt? Kijk op pagina 106 hoe niet-lineaire dynamica hier een bepalende rol in speelt. (Foto: het Europees kampioenschap indoor roeien, 18 december 2004. Copyright: Bastiaan Heus/Hollandse Hoogte)

Niet-Lineair

Laatst woonde ik een voordracht bij van plasmafysicus Niek Lopes Cardozo over het boeien van publiek. In zijn uiterst illustratieve optreden — beter: voorstelling — betoogde hij dat het met een voordracht net is als met een roman: het boeit alleen als er spanning opgebouwd en onderhouden wordt. Het geijkte lineaire patroon — door hem ‘kleutertechniek’ genoemd — dat de meeste lezingen kenmerkt is daarvoor minder geschikt. Een betere aanpak is de niet-lineaire: kies een aantal verschillende verhaallijnen en vervlecht ze. Numerici onder ons krijgen bij het idee van de parallelle verhaallijnen ongetwijfeld een associatie met ‘parallel rekenen’. Daarbij lopen er een aantal numerieke berekeningen naast elkaar, die onderling gegevens kunnen uitwisselen en uiteindelijk samen bijdragen aan een integraal resultaat. Omdat echter ook voor de beste spreker of schrijver de tijd hardnekkig lineair blijft doortikken, moeten de parallel bedoelde verhaallijnen toch sequentieel verteld worden. Het mooie is nu dat de luisteraar of lezer daar geen enkele moeite mee heeft. Wel verdient het aanbeveling bij het tijdelijk afsluiten van een verhaallijn een ‘cliff hanger’ in te bouwen.

Een van onze dochters riep onlangs spontaan uit: “Wiskunde, dat is tenminste een vak waar je blij van wordt.” Ze bleek te bedoelen dat in de wiskunde het ene zo mooi uit het andere volgt. Je weet precies waar je aan toe bent. Dit in tegenstelling tot scheikunde, een vak waar ze kop noch staart aan kan ontdekken. Volgens haar is dus het mooie van de wiskunde het sequentiële element. Dat roept de vraag op of die niet-lineaire aanpak wel past bij wiskunde verhalen.

Even iets anders. Wist u dat NAW een trendsettend magazine is? In het juninummer van vorig jaar maakte Klaas Pieter Hart bescheiden melding van een nieuw soort breinbreker, de sudoku. Na onze melding werd dit verschijnsel ook in ons land razend populair. De hypes schijnen bij ons uit het Oosten te komen. Na de kubus-van-Rubickhype en de *tamagotchi*-rage raast momenteel de sudokugolf als een tsunami over ons land. Of men nu alfa, beta, gamma of helemaal niet geïntereerd is, iedereen doet het. In de trein zag ik zelfs een niet onvermaard theoloog z'n dagelijkse ‘sudootje’ invullen. Maar ook wiskundigen schijnen een kick te krijgen als ze met een zucht van opwinding het laatste cijfertje neerschrijven, hoewel ze daarbij toch altijd vagelijk verontrust blijven door de vraag of de zojuist geconstrueerde oplossing wel uniek is. In een advertentie voor een sudoku-gamecomputer las ik tot mijn ontzetting: “Geen wiskunde nodig, los het raadsel met logica op.” Als we volhouden dat wiskunde niet veel anders is dan het nemen van logische stappen uitgaande van enkele

axioma's, vraag je je af: waarom beleven zoveel mensen intens plezier aan ‘logische’ puzzels, maar niet aan wiskunde? Als ‘logisch puzzelen’ kennelijk ‘in de genen’ zit, waarom wiskunde dan niet? Trouwens, hoeveel negen bij negen sudoku's zouden er bestaan?

Weet u waar ik niet goed van word? Van bestuurders die meer invloed willen krijgen op de richting van het onderzoek en denken dat te bereiken door steeds grootschaliger financieringsstructuren te creëren. Momenteel is de operatie *SmartMix* gaande. Er worden wetenschappelijk Nederland grote financiële worsten voorgehouden, maar alleen consortia van giga-omvang met een ‘man-op-de maan’-gehalte maken een kans. Wiskundig Nederland zal hier niet wel bij varen. Wij moeten het hebben van kleinschalig, hoogwaardig onderzoek en in de soepketels van deze consortia kunnen we hoogstens zorgen voor het snufje zout. Ten aanzien van deze ontwikkelingen citeer ik prof. Van Witteloostuijn, lid van de Raad van Economisch Adviseurs van de Tweede Kamer: “De handigste mensen krijgen miljoenensubsidies, maar dat zijn niet altijd de beste. Ik noem geen namen, maar ik ken wetenschappers die heel handig zijn in het schrijven van wervende teksten, terwijl hun onderzoek werkelijk brandhout is. Gekleed in strakke pakken geven zij mooie powerpointpresentaties, terwijl het vooral gebakken lucht is.” Wat de beleidsmakers vergeten en waarschijnlijk haten is dat de voortgang van de wetenschap inherent iets onvoorspelbaars heeft. De ‘sprongen voorwaarts’ komen op onverwachte momenten en uit onvermoede hoeken. En zelden door een grootschalige inspanning van velen, maar meestal door de creativiteit van enkelen. Het is zoals Hes Maki Kaji, de bedenker van de sudoku, het verwoordt: “Ik weet echt niet waarom juist deze puzzel zo aanslaat.” Zijn hele leven al ontwerpt hij hersenkrakende spelletjes, maar alleen de sudoku werd een rage op wereldschaal.

Overigens, er zijn zo'n $6.67 \cdot 10^{21}$ negen bij negen sudoku's, waarvan er ongeveer $5 \cdot 10^9$ essentieel verschillend zijn. Over de logica annex wiskunde van de sudoku leest u alles in ons volgende nummer. Het huidige nummer behoeft ik niet bij u aan te bevelen, daar bent u al in begonnen.

En, bevat het, dat niet-lineaire?



Jaap Molenaar
hoofdredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Technische Universiteit Eindhoven

Wageningen Universiteit en Researchcentrum

j.molenaar1@tue.nl

Agenda

Upcoming Events

juni 2006

25 juni – 2 juli

7th Junior Mathematical Congress

Een congres voor jongeren van 15 tot 25 jaar, met de nadruk op de groep tussen 15 en 20 jaar. Er worden lezingen en seminars gegeven door de jongeren zelf en door enkele uitgenodigde sprekers

plaats Tg-Mures, Roemenië

info www.uni-miskolc.hu/matjun7

27 juni – 3 juli

Challenging Mathematics in and beyond the Classroom

Conferentie over wiskundeonderwijs georganiseerd door the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)

plaats Trondheim, Noorwegen

info www.amt.edu.au/icmi16

30 juni – 5 juli

3rd International Conference on the Teaching of Mathematics

Conferentie over wiskundeonderwijs voor bachelorstudenten, gecentreerd rond onder andere innovatieve onderwijsmethoden en technologie

plaats Istanbul, Turkije

info www.advancity.net/tmd/sites/ictm3

30 juni – 5 juli

Computability in Europe 2006

Conferentie met als titel *Logical Approaches to Computational Barriers*. Thema: het P versus NP probleem

plaats University of Wales, Swansea, Verenigd Koninkrijk

info www.cs.swansea.ac.uk/cieo6

juli 2006

3 – 7 juli

Progress in ab initio modeling of biomolecules: methods and applications

Workshop op het gebied van computational life science, in het bijzonder modellering van biomoleculen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

10 – 14 juli

Asymptotics, particles, processes and inverse problems

Workshop voor statistici en kansrekenaars over stochastische processen, ter gelegenheid van de vijfenzestigste verjaardag van Piet Groeneboom

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

12 – 14 juli

DEON'06

Workshop over deontische logica in de informatica, met nadruk op *artificial normative systems*

plaats Utrecht

info www.cs.uu.nl/deon2006

17 – 21 juli

Membrane Computing

Workshop over computerrekenmethoden die geïnspireerd zijn door modellen uit de biologie, in het bijzonder door uit cellen bestaande membranen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

18 – 21 juli

13th ILAS Conference

Conferentie van de *International Linear Algebra Society* over verscheidene thema's in de lineaire algebra als lineaire algebra in de statistiek en numerieke lineaire algebra

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info staff.science.uva.nl/~brandts/ILASo6

20 – 23 juli

DES-TIME-2006

Internationaal symposium over de integratie van technologie in het onderwijs

plaats Technische Universiteit Dresden, Duitsland

info www.des-time-2006.de

22 juli

ICCG, BIGSTAB, and Jacobi-Davidson

Seminar naar aanleiding van het emeritaat van Henk van der Vorst. Sprekers zijn onder meer Per Christian Hansen, Bernd Fischer, Dan Sorensen en Iain Duff

plaats Zalencentrum "In de Driehoek", Utrecht

info staff.science.uva.nl/~brandts/henkvdvorst

31 juli – 4 augustus

Vierkant Zomerkamp

Zomerkamp met een wiskundige inslag georganiseerd door *Vierkant voor Wiskunde* voor kinderen van groep 6–8 van het basisonderwijs (schooljaar 2005/2006)

plaats De Poelakker, Lunteren

info www.vierkantvoorwiskunde.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

augustus 2006

7 – 10 augustus

☐ **Conference on Topology and Computer Science**
Afscheidsconferentie voor Peter Collins and Mike Reed over topologie en informatica met speciale sessies over verzamelingtheoretische topologie, theoretische informatica en continuümtheorie

plaats Oxford, Verenigd Koninkrijk

info www.illc.uva.nl/NewsandEvents/#item1045

7 – 11 augustus

☐ **Vierkant Zomerkamp**

Zomerkamp met een wiskundige inslag georganiseerd door *Vierkant voor Wiskunde* voor scholieren van de eerste en tweede klas van de middelbare school (schooljaar 2005/2006)

plaats De Poelakker, Lunteren

info www.vierkantvoorwiskunde.nl

14 – 18 augustus

☐ **Vierkant Zomerkamp**

Zie *Vierkant Zomerkamp*, 7–11 augustus

plaats De Poelakker, Lunteren

info www.vierkantvoorwiskunde.nl

21 – 30 augustus

☐ **Stirring and Mixing in Turbulence: the Lagrangian Approach**

Workshop over vloeistofdynamica en in het bijzonder turbulentie

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

22–30 augustus

☐ **International Congress of Mathematicians 2006 (ICM 2006)**

Drie prijsuitreikingen: de *Fields medal* (wiskundig onderzoek), de *Nevanlinna prize* (theoretische informatica), de *Gauss prize* (toegepaste wiskunde)

plaats Madrid, Spanje

info www.icm2006.org

25 – 26 augustus

☐ **Vakantiecursus Wiskunde voor leraren 2006**

Cursus wiskunde voor leraren in de exacte vakken in vwo, havo en hbo. Thema: actuele wiskunde. Ook op 1 en 2 september in Amsterdam

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.cwi.nl/events/2006/VC2006

27 – 31 augustus

☐ **27th Annual Conference of the International Society for Clinical Biostatistics**

Internationale conferentie over theorie, methoden en toepassingen van biostatistiek

plaats Genève, Zwitserland

info www.iscb2006.info

september 2006

1 – 2 september

☐ **Vakantiecursus Wiskunde voor leraren 2006**

Cursus wiskunde voor leraren in de exacte vakken in vwo, havo en hbo. Thema: actuele wiskunde. Ook op 25 en 26 augustus in Eindhoven

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events/2006/VC2006

4 – 8 september

☐ **11th Seminar NUMDIFF**

Seminar over het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen en algebraïsche differentiaalvergelijkingen

plaats University of Halle, Duitsland

info sim.mathematik.uni-halle.de/numdiff/Numdiff11

5 – 8 september

☐ **ECCOMAS CFD 2006 Conference**

Europese conferentie over computationele vloeistofdynamica

plaats Egmond aan Zee

info www.eccomascfd2006.nl

11 – 15 september

☐ **Islamic Architecture**

Workshop over geometrische patronen in Islamitische kunst

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

18 – 27 september

☐ **Environmental Dispersion Processes**

Workshop over de ontwikkeling en analyse van wiskundige modellen en simulaties van turbulent transport van gas, kleine deeltjes of warmte

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

25 – 29 september

☐ **EIDMA minicourse by Cheryl Praeger**

Een minicursus van vijf dagen over permutatiegroepen in algebra en combinatoriek

plaats Vrije Universiteit Brussel, België

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses/minicourses/praeager/praeager.html

25 – 29 september

☐ **Computer Science Logic 2006**

Jaarlijkse conferentie van de *European Association for Computer Science Logic* (EACSL) voor zowel logici als informatici

plaats Szeged, Hongarije

info www.inf.u-szeged.hu/~cslo6/geninf.php

oktober–november 2006

2 – 6 oktober

☐ **Geometric and Multiscale Methods for Geophysical Fluid Dynamics**

Workshop over geofysische vloeistofdynamica, parametrisatie van meso- en microschaaleffecten. Toepassingen: meteorologie en klimaatsimulaties

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

11 – 13 oktober

☐ **Conferentie van de Nederlands-Vlaamse Numerieke Wiskunde Gemeenschappen**

De eenendertigste conferentie. Thema's: modelreductie en hoge-orde discretisatie methoden

plaats Woudschoten

info www.cwi.nl/projects/wnw/conf2006

2 – 4 november

☐ **Pioneering Software in the 1960s**

Conferentie over de ontwikkeling van software in de jaren zestig van de vorige eeuw

plaats CWI, Amsterdam

info www.cwi.nl/events

13 – 15 november

☐ **Stochastics Meeting Lunteren**

Jaarlijkse bijeenkomst voor statistici en stochastici

plaats Lunteren

info www.cwi.nl

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

In Memoriam Herman van Rossum (1917–2006)

Op 25 februari 2006 overleed op achtentachtigjarige leeftijd Hermanus van Rossum, geboren te Amsterdam op 16 juli 1917, emeritus hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam.

Naast een baan als leraar op het Amsterdams Lyceum promoveerde Van Rossum in 1953 te Utrecht bij J. Popken op het proefschrift *A theory of orthogonal polynomials based on the Padé table*. In de bij het proefschrift behorende stellingen waarschuwde Van Rossum voor de misvatting dat inzicht aan kennis zou moeten voorafgaan, en voor teveel aandacht voor pedagogiek en psychologie in een lerarenopleiding.

Enkele jaren na zijn promotie werd hij aangesteld als hoofdambtenaar op het Mathematisch Instituut te Amsterdam. Toen omstreeks 1965 bij de subfaculteit Scheikunde van de UvA behoefte ontstond aan beter wiskundeonderwijs, werd er binnen deze faculteit een lectoraat ingesteld dat bezet werd door Van Rossum. In 1966 hield Van Rossum zijn inaugurele rede, getiteld *Ontwikkelingen in de toegepaste wiskunde*. Opvallend is dat de stochastiek in de oratie nauwelijks aan de orde kwam. Samen met zijn assistent Ernst Koper zette Van Rossum een breed programma Wiskunde voor Chemici op, gehuisvest in het Laboratorium voor Chemische Technologie aan de Plantage Muidergracht.

Zijn aanpak vond een vruchtbare voedingsbodem en al snel werd een groot aantal deeldisciplines onderwezen. Door de gebruikte aanpak nam ook het afnemende veld enorm toe: uiteindelijk hadden ook de subfaculteiten Geologie, Farmacie, Biologie, Fysische Geografie en Natuurkunde belangstelling voor de door Van Rossum en zijn medewerkers verzorgde cursussen. In de hoogtijdagen had Van Rossums *Instituut voor Propedeutische Wiskunde*, later het *Instituut voor Interdisciplinaire Wiskunde* genoemd, twaalf werknemers en een eigen verdieping in het gebouw aan de Roetersstraat 15. Van Rossum was een aimabel mens met gevoel voor humor die zijn medewerkers veel ruimte gaf. Het Instituut werd zelfs in de weekends benut: om te werken maar ook om de interne schaakcompetitie te houden. De niet-wiskundigen stelden het door het Instituut verzorgde onderwijs altijd zeer op prijs. De wiskundigen waren niet allemaal enthousiast. De ontwikkeling stond haaks op de heersende traditie met grote aandacht voor meer zuivere wiskunde. Bij de oprichting van de nieuwe Faculteit Wiskunde en Informatica fuseerde het Instituut daarmee en hield het op te bestaan.

Van Rossum heeft enkele tientallen publicaties op zijn naam staan in het bijzonder op het gebied van approximatietheorie.

Marcel de Bruin

Prijs voor artikel Hansjörg Geiges

De commissie voor de popularisering van de wiskunde van de *European Mathematical Society* organiseerde in 2005 voor het eerst een competitie voor wiskundige artikelen geschreven voor een breed publiek. De nadruk lag op het algemene karakter en de leesbaarheid van het artikel. De derde prijs ging naar het artikel *Christiaan Huygens and Contact Geometry* van Hansjörg Geiges, verschenen in het juninummer 2005 van het Nieuw Archief voor Wiskunde.

Bron: www.emis.de

Het 290-vermoeden bewezen

Manjul Bhargava (Princeton University) en Jonathan P. Hanke (Duke University, Durham, N.C.) hebben het 290-vermoeden bewezen. Ze hebben hun resultaten beschreven tijdens het *International Conference on*

Number Theory and Mathematical Physics afgelopen december aan *SASTRA University* in Kumbakonam, India.

Het 290-vermoeden stelt, dat wanneer men wil weten of een geheelwaardige kwadratische vorm universeel is, het volstaat dit te testen voor de getallen 1 tot en met 290. Een kwadratische vorm heet universeel, wanneer alle positieve gehele getallen als waarde uit deze vorm verkregen kunnen worden.

In het verleden werden al soortgelijke resultaten bewezen, maar nog nooit in zo'n algemeenheid als nu. Al in 1770 bewees Joseph-Louis Lagrange dat elk positief geheel getal geschreven kan worden als de som van hoogstens vier kwadraten. Nadat in 1916 de Indiase Srinivasa Ramanujan 53 universele kwadratische vormen vond, begon men zich al snel te interesseren in de vraag hoe getest kan worden of een kwadratische vorm universeel is. In 1993 bewezen John H. Conway en William Schneeberger de 15-stelling, die garandeert dat een kwadratische vorm uit een bepaalde deelklasse van vormen, waartoe ook de door Lagrange en Ramanujan ontdekte vormen behoren, universeel is, als hij de getallen 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, en 15 representeert. Ze publiceerden hun bewijs echter nooit en na verdere berekeningen stelden zij het 290-vermoeden op. Bhargava wist later de 15-stelling via een andere weg te bewijzen en na enkele soortgelijke resultaten in de jaren daarna, ook het 290-vermoeden. Met behulp van Jonathan P. Hanke werd ook de computer ingezet bij het bewijzen van deze stelling.

In december 2005 was Bhargava op grond van eerder werk een van de twee winnaars van de *SASTRA Ramanujan Prijs*, die jaarlijks wordt uitgereikt aan jonge wiskundigen die belangrijke bijdragen hebben geleverd aan een onderzoeksgebied waarin Ramanujan actief was of dat door hem beïnvloed is. De andere winnaar was Kannan Soundararajan, voor zijn werk in de analytische getaltheorie.

Bron: www.sciencenews.org



foto: Milana Zurova

Manjul Bhargava, een van de auteurs van het bewijs van het 290-vermoeden

Eindhovens eredoctoraat voor wiskundige Wheeler

Tijdens de feestelijkheden ter gelegenheid van het vijftigjarig bestaan van de *Technische Universiteit Eindhoven* op 27 april, is aan de Texaanse Mary Wheeler een eredoctoraat uitgereikt voor haar onderzoek op

het gebied van de toegepaste en industriële wiskunde en in het bijzonder het numeriek oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen.

Deze hoogleraar *Petroleum and Geosystems Engineering* en hoogleraar *Aerospace Engineering and Engineering Mechanics* aan The University of Texas in Austin ontving haar eredoctoraat uit handen van Bob Mattheij in de Stadskerk Sint Cathrien in Eindhoven.

Haar bijzondere interesse ligt bij het modelleren van ondergrondse stromingen en twee dagen voor de plechtigheden vond er dan ook een symposium plaats over stroming in poreuze media, ter ere van de gelauwerde directeur van het *Centre for Subsurface Modeling*.

Bron: w3.tue.nl



foto: Bart van Overbeek

Van links naar rechts: Kees van Hee (decaan van de Faculteit voor wiskunde en informatica), Mary Wheeler, Bob Mattheij, Hans van Duijn (rector magnificus)

Wiskundigen ijverig voor de industrie

Eind januari werd in Eindhoven de jaarlijkse week Wiskunde met industrie georganiseerd. Dit jaar werkten ongeveer zeventig wiskundigen aan zes verschillende problemen van het bedrijfsleven. De week bestond uit brainstormen, verhitte discussies, bellen met deskundigen over de hele wereld, het opstellen van wiskundige modellen en fantastische lunches.

Op maandag presenteren de bedrijven hun problemen. *ASML* gebruikt bijvoorbeeld op dit moment één heel erg groot stuk software voor alle klanten. Ze vragen zich af of het programma niet beter in losse modules kan worden gesplitst. De vraag voor de wiskundigen is: hoeveel delen moeten er komen? Andere problemen komen van

- Teijon Twarren (Hoe kunnen kogelvrije vesten het beste getest worden?),
- CHESS (Met wat voor netwerk kunnen bosbranden het beste gedetecteerd worden met een netwerk van sensoren?),
- Nucletron (Kunnen jullie de echte situatie uit ultrasound beelden reconstrueren?),
- Het Nederlands Meetinstituut (Wat is de beste methode om een drukmeter te kalibreren?),
- DSM (Hoe houden we zuurstof tegen in doorzichtig folie?).

De eerste dag wordt ook gebruikt om in groepen de problemen helderder te formuleren en te bedenken welke wiskundige technieken gebruikt kunnen worden. Dinsdag wordt de hele dag aan de problemen gewerkt. Professoren, docenten, AiO's, en mensen uit het bedrijfsleven werken samen en er is geen enkele hiërarchie. Tussendoor worden experts over de hele wereld gebeld en gemaild of zij misschien ideeën hebben. Woensdag worden aan het eind van de middag de tussenresultaten gepresenteerd. De bedrijven kunnen dan zeggen of het de

goede kant op gaat en de wiskundigen uit andere groepen kunnen slimme vragen stellen en nieuwe ideeën opperen. Donderdag is de laatste dag om aan de problemen te werken en moeten ook de eindpresentaties voorbereid worden. Er wordt pizza en frisdrank bezorgd, zodat iedereen door kan werken — tot het gebouw om tien uur sluit.

Vrijdag worden de oplossingen een voor een gepresenteerd. Formules, simulaties en mooie plaatjes vliegen voorbij. Geen van de problemen is helemaal opgelost, maar bij elk probleem is er een goed begin gemaakt. De bedrijven zijn tevreden over de oplossingen en een aantal contactpersonen wil de rest van zijn bedrijf ervan overtuigen dat ze met deze resultaten verder moeten werken. De wiskundigen bedenken intussen alweer nieuwe dingen die ze ook nog uit kunnen werken. De uiteindelijke proceedings zullen dan ook meer bevatten dan alleen het werk van deze week.

Alleen de contactpersoon van ASML weet niet of hij blij moet zijn met de oplossing. Hij heeft het probleem van het verdelen van de software in modules ingebracht. De rest van zijn afdeling vindt dat het niet nodig is om aan dit probleem te gaan rekenen. Volgens hen kunnen ze voortaan het beste met drie delen gaan werken. Echte argumenten hebben ze daarvoor eigenlijk niet. Vrijdag presenteren de wiskundigen na een week modelleren hun conclusie: drie delen moeten het worden...

Ionica Smeets



Een karakteristieke aanblik bij de studiegroep

Ook rechters vallen voor de wiskunde

In april was de rij van Fibonacci weer even kort wereldnieuws. Dit geïdealiseerde model van de groei van een konijnenpopulatie werd namelijk door rechter Sir Peter Winston Smith gebruikt in zijn *Smithy Code*.

Rechter Smith had moeten oordelen in de zaak die de schrijvers van het boek *The Holy Blood and the Holy Grail* hadden aangespannen tegen Dan Brown, de populaire schrijver van *The Da Vinci Code*, wegens vermeend plagiaat. In zijn oordeel, dat gunstig uitviel voor Brown, had Smith een verborgen boodschap verstoppt. De letters “s m i t h y c o d e j a e i e x t o s t g p s a c g r e a m q w f k a d p m q z v” waren schuingedrukt in het vonnis.

Toen dit bekend werd, ontstond op internet en in kranten gedurende enige tijd een verwoede zoektocht naar de ontcijfering van deze Smithy Code. Sleutel hierin bleek de rij konijnengetallen van Leonardo Pisano en een slimigheidje van Caesar. Deze laatste had namelijk tweedu-

zend jaar geleden al bedacht dat je een tekst kon coderen door elke letter een vast aantal plaatsen in het alfabet op te schuiven. De variatie die Smith hierop bedacht, was om de letters niet een vast aantal plaatsen op te schuiven, maar het aantal de de eerste getallen van de rij van Fibonacci te laten volgen.

Dan Tench, jurist en journalist voor *The Guardian* was de eerste die de verborgen boodschap “*Jackie Fisher, who are you? Dreadnought*” wist te ontcijferen. Blijkbaar had Smith op deze manier aandacht willen vragen voor zijn grote held, admiraal Jackie Fisher, die een belangrijke persoon was in de Britse marine aan het eind van de negentiende en het begin van de twintigste eeuw en die het eerste moderne oorlogsschip, de *HMS Dreadnought* ontwierp.

Nu maar hopen dat er geen decoderingswetten overtreden zijn in deze hele zaak, anders moet Sir Peter Winston Smith weer opnieuw aan de bak.

Op <http://www.win.tue.nl/rcwil/henkvt> valt een interview met wiskundige Henk van Tilborg uit het *Radio1 Journaal* te beluisteren over de Smithy Code.

Bron: books.guardian.co.uk

De kaarten zijn geschud

Het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) bestaat dit jaar zestig jaar en heeft in het teken daarvan voor de eerste keer de *Van Wijngaarden Award 2006* uitgereikt, bestemd voor wetenschappers die een bijzondere betekenis hebben voor de wiskunde en informatica. De laureaten zijn de informaticus Nancy A. Lynch van het MIT en de wiskundige Persi Diaconis van *Stanford University*.

Deze laatste, voormalig beroepsgoochelaar, heeft zijn onderzoek op het gebied van Markovketens toegepast op een kaartschudprobleem: hoe vaak moet een pak kaarten geschud worden om een willekeurige volgorde te krijgen. Samen met Dave Bayer van de Universiteit van Columbia bewees Diaconis dat als de kaarten verdeeld worden over twee stapels en vervolgens een nieuwe stapel gevormd wordt door willekeurig kaarten van beide stapels te nemen, dan moet er zeven keer geschud worden. Op deze manier de kaarten uit twee spellen in willekeurige volgorde brengen, kost negen keer schudden, voor zes spellen moet er twaalf keer geschud worden.

De prijs is vernoemd naar Adriaan van Wijngaarden (1916–1987), een van de grondleggers van de informatica in Nederland. Ongeveer een jaar na de oprichting van het Mathematisch Centrum op 11 februari 1946 kwam Van Wijngaarden er in dienst als hoofd van de rekenafdeling. Later was hij van 1961 tot 1980 directeur van het Mathematisch Centrum, dat sinds 1983 Centrum voor Wiskunde en Informatica heet.

Bron: www.cwi.nl en www.kennislink.nl

Zweedse Carleson wint Abelprijs

De Zweedse wiskundige Lennart Carleson heeft de Abelprijs 2006 gewonnen. Deze prijs, die vergezeld gaat van zes miljoen Noorse kronen (755.000 euro), werd hem toegekend door de *Norske Videnskaps-Akademi* (Noorse Academie van Wetenschappen) wegens zijn belangrijke bijdragen aan de harmonische analyse en de theorie van gladde dynamische systemen.

Carleson, geboren in 1928 te Stockholm, werd al op zesentwintjarige leeftijd professor aan de Universiteit van Stockholm en heeft sindsdien leerstoelen bekleed aan de universiteiten van Uppsala en Los Angeles en het Koninklijk Technologisch Instituut in Stockholm.

Drie problemen die door Carleson opgelost zijn, worden door het Nobelprijsc comité speciaal genoemd. Hem werd de prijs toegekend

voor zijn werk op het gebied van convergentie van Fourierreeksen, het bewijzen van het *Coronavermoeden* en het aantonen dat de Hénon-afbeelding een vreemde attractor heeft.

Al aan het begin van de negentiende eeuw formuleerde Jean Baptiste Joseph Fourier het vermoeden dat functies 'waarvan de grafiek getekend kan worden', geschreven kunnen worden als een superpositie van sinussen en cosinussen. Pas in 1913 echter werd dit vermoeden expliciet geformuleerd door de Rus Lusin en het was Carleson die in 1966 de convergentie *bijna overal* van de Fourierreeks van een kwadratisch integreerbare functie bewees.

In het Coronavermoeden worden bepaalde verbanden gelegd tussen het gedrag van een functie op een open schijf en op de rand van die schijf. Opgesteld door Japans wiskundige Kakutani in de jaren veertig, werd dit vermoeden bewezen door Carleson in het daaropvolgende decade.

In 1991 toonde de meest recente Abelprijswinnaar aan dat de Hénon-afbeelding een vreemde attractor heeft. Dat wil zeggen dat het asymptotisch gedrag van het dynamische systeem beschreven door deze afbeelding zich beperkt tot een deelgebied van het totale vlak waarin de dynamica zich afspeelt, maar zich binnen dit deelgebied chaotisch gedraagt.

De tendens van Carleson om zich op onopgeloste vermoedens en problemen te storten, leidde het Abelprijsc comité tot de uitspraak: "Carleson is always far ahead of the crowd. He concentrates on only the most difficult and deep problems. Once these are solved, he lets others invade the new kingdom he has discovered, and he moves on to even wilder and more remote domains of science."

Maar niet alleen de inhoudelijke aspecten van de wiskunde hebben de Zweed bezig gehouden. Hij is ook zeer begaan met het onderwijs van wiskunde en met de plaats van wiskunde in de maatschappij. Zo wist hij tijdens zijn voorzitterschap van de *International Mathematical Union* (1978-1982) de Volksrepubliek China een plaats in deze unie te bezorgen, iets wat destijds politiek zeer gevoelig lag. Ook wist hij in de jaren zeventig het Zweedse onderzoeksinstituut *Institut Mittag-Leffler* nieuw leven in te blazen.

Op 23 mei jongstleden is de prijs door de Noorse koningin Sonja aan Lennart Carleson overhandigd.

Bron: www.abelprisen.no



Lennart Carleson, winnaar van de Abelprijs 2006

Pythagoras bij Paul

Een docent wiskunde te gast bij Paul de Leeuw? Op 8 mei inderdaad. Toen maakte Swier Garst zijn opwachting in het televisieprogramma *Mooi! weer de Leeuw*.

Op verzoek van een van zijn leerlingen kreeg Garst de mogelijkheid om aan een klas les te geven die wat groter is dan de gebruikelijke twintig scholieren, namelijk aan heel De Leeuwijkend Nederland.

Bewapend met een krijtje en een schoolbord nam Garst aan de hand van Pythagoras' stelling Paul en publiek ruim tien minuten lang mee de wereld van de wiskunde in.

Onder de hieronder genoemde link, is dit fragment terug te vinden in het filmpje met de titel *afterparty 06-05-2006*, vanaf 36 minuten na het begin.

Bron: mooiweerdeleeuw.vara.nl

Scholiere ziet perspectief in wiskunde

Marleen Kooiman, zeventien jaar oud en scholiere van een 6vwo-klas op het Bonhoeffercollege Castricum, breidde de stelling van Desargues uit in het profielwerkstuk dat ze over deze stelling schreef. Hiervoor ontving ze op 31 maart de Werkstuklabprijs van de Universiteit van Amsterdam.

De stelling van Desargues uit de projectieve meetkunde, oorspronkelijk geïnspireerd door de perspectiefleer, zegt dat twee driehoeken in puntperspectief zijn (dat wil zeggen dat de drie lijnen die de hoekpunten van de verschillende driehoeken verbinden door één punt lopen) dan en slechts dan als de snijpunten van de verlengde zijdes van de driehoeken ook op één lijn liggen. Kooiman bewees soortgelijke resultaten voor configuraties met een willekeurig aantal hoekpunten alsmede voor configuraties in hogere dimensies.

De jury verkoos het werk van de scholiere boven de inzendingen op het gebied van scheikunde, natuurkunde, biologie en informatica, wegens de grote eigen bijdrage van de aankomend studente wiskunde Kooiman.

Bron: www.bonhoeffer.nl/ en www.kennislink.nl

Promovendusprijs uitgereikt tijdens NMC

Tijdens het Nederlands Mathematisch Congres op 28 maart is voor de eerste maal de *Philips Wiskundeprijs voor promovendi* uitgereikt. Tijdens een speciaal minisymposium kregen promovendi de kans om door middel van een voordracht van een kwartier iets over hun eigen onderzoek te vertellen aan een algemeen wiskundig publiek, waarna een jury de in haar ogen beste voordracht met de Wiskundeprijs mocht belonen.

Het minisymposium kende zes deelnemers, waarvan uiteindelijk Joost Batenburg van het CWI de prijs won voor zijn voordracht over discrete tomografie een discipline uit de beeldverwerking die zich bezig houdt met reconstructie van beelden vanuit een klein aantal projecties.

Het besproken onderzoek is ook van belang voor de natuurkunde, waar de behandelde wiskunde gebruikt kan worden om driedimensionale beelden te maken van de atomen in nanokristallen, die op hun beurt weer kunnen leiden tot beter inzicht in de materiaaleigenschappen van het kristal.

Bron: www.wiskundepersdienst.nl

Het 42ste Nederlands Mathematisch Congres in Delft

De ruim tweehonderd wiskundigen die op maandag 27 of dinsdag 28 maart het Nederlands Mathematisch Congres bezochten, dat door de Delftse en Leidse wiskundigen samen werd georganiseerd, kunnen zich slechts uitstekend vermaakt hebben. Zeker indien ze daarbij dezelfde risicovermijdende keuzes maakten als ondergetekende. Jan Aarts (TUD) merkte bij de opening van het congres op dat de opleiding tot wiskundig ingenieur precies vijftig jaar geleden in Delft van start is gegaan.

Het programma van beide dagen maakte duidelijk hoezeer nieuwe toepassingen, en in het bijzonder de enorme rekenkracht van de moderne computer, in deze vijftig jaar de wiskunde hebben beïnvloed.

In de voortreffelijke openingsvoordracht toonde Henk van der Vorst (UU) ons de fascinerende wereld van *Krylov subspaces*, die worden gebruikt om enorme tijdswinst te boeken bij het numeriek oplossen van reusachtige stelsels lineaire vergelijkingen. In een volmaakte slotvoordracht behandelde Hendrik Lenstra (UL) het abc-vermoeden en de plannen om in het *Kennislink*-project via een grootschalig opgezet numeriek experiment nieuwe getaltheoretische resultaten te behalen.

Naast hoofdvoordrachten waren er speciale voordrachten en minisymposia. Er was de *Begeer Lecture* over priemgetallen van de Indiase wiskundige Manindra Agrawal (Kanpur) en de *Timmanlezing* door R.E. O'Malley (Washington) over perturbatietheorie. Ik koos echter voor de voordracht van Henk Barendregt (RU) over computerwiskunde, daarmee het zekere voor het onzekere nemend. Barendregt gaf een helder overzicht van de belangrijke ondersteunende rol die computers kunnen spelen bij het modelleren, rekenen en redeneren. En inderdaad, in tegenstelling tot de situatie vijftig jaar geleden, bleek uit de andere voordrachten dat de computer nu bijna altijd een of andere rol speelt.

Ook op de minisymposia was dit het geval. Zelfs een leuk en op het eerste gezicht zuiver wiskundig verhaal over *random graphs* van Tobias Müller (Oxford) suggereerde toepassingen op het *World Wide Web*. Bij de minisymposia was de keuze voor de deelnemer lastig: Abelprijswinnaars, financiële wiskunde, wiskundeonderwijs, wiskunde en levenswetenschap, geschiedenis van de wiskunde in Delft, aangemelde voordrachten, promovendipresentaties.

Natuurlijk kon ik niet overal bij zijn. Gerard Alberts (UVA) was erg op dreef in zijn verhaal over de rol van Timman en Bottema bij de oprichting in 1956 van de opleiding tot wiskundig ingenieur. Joost Batenburg (CWI/UL) kreeg de Philips Wiskunde Prijs voor het beste proefschrift. Er was een door Joop Doorman (TUD) erg goed voorgezeten forum over realistisch wiskundeonderwijs, waarbij misschien wat te snel naar convergentie van standpunten werd gestreefd. Verder kreeg Jan van de Craats (UVA) de *Chris Zaal Bokaal* voor het beste artikel in het NAW van het afgelopen jaar.

Teun Koetsier

Veel scholen van plan Wiskunde D aan te bieden

Volgens een recente peiling van het Tweede Fase Adviespunt zijn veel scholen in 2007 van plan wiskunde-D aan te bieden, op de havo afdeling 59%, bij het Athenemum 69% en op het gymnasium zelfs 73%. Voor het nieuwe bètavak *Natuur, Leven en Technologie* liggen deze percentages wat lager: respectievelijk 45%, 53% en 55%.

Bron: Gerard Koolstra en www.tweedefase-loket.nl

Beter met wiskunde

Wiskundigen en besliskundigen van de universiteiten van Leiden, Maastricht, Rotterdam, Twente en beide universiteiten in Amsterdam zijn een samenwerking gestart om ziekenhuizen te helpen doelmatiger te werken. Lodewijk Kallenberg (Universiteit Leiden), hoogleraar-directeur van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde, heeft dit initiatief opgezet, waarbij nieuwe organisatie modellen voor de ziekenhuizen ontwikkeld worden.

Dat deze hulp geen overbodige luxe is, blijkt uit het feit dat, na enkele jaren van verbetering, de financiële positie van vele ziekenhuizen dit jaar weer zeer slecht is. De eerste resultaten van de wiskundige

inmenging zijn ook al duidelijk merkbaar. Zo kon het Wilhelmina Ziekenhuis in Assen het aantal operatiekamers met één verminderen naar vijf, zonder op de productie in te hoeven leveren.

Meerdere ziekenhuizen zullen in deze samenwerking betrokken worden.

Bron: www.elsevier.nl

Jan van de Craats wint belangrijke prijs

Wiskundige Jan van de Craats heeft de *NWO Eurekaprijs* gewonnen voor het beste oeuvre op het terrein van wetenschapscommunicatie.

Jan van de Craats is emeritus hoogleraar wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie in Breda, hoogleraar wiskunde en maatschappij aan de Universiteit van Amsterdam en hoogleraar didactiek van de wiskunde aan de Open Universiteit. Naast zijn werk zet hij zich al jarenlang in voor popularisering van wiskunde.

De jury onder voorzitter Robbert Dijkgraaf was vol lof voor de kwaliteit en diversiteit van zijn activiteiten. Toegankelijke stukken in de krant, trainingen voor deelnemers aan de Wiskunde Olympiade, lezingen over Islamitische wiskunde, verschillende boeken over wiskunde en onlangs nog een webklas over Riemannhypothese.

De prijs bestaat uit een Eurekabeeldje en 12.500 euro. Ionica Smeets



Jan van de Craats (Utrecht, redactievergadering NAW, juni 2004)

Erratum

Naar aanleiding van een aantal opmerkingen van Tom Koornwinder met betrekking tot het artikel 'Niet-commutatieve meetkunde niet-communicabel?' verschenen in het maartnummer van dit jaar, wil de auteur graag de volgende correcties maken.

De stelling op Pagina 29 geldt niet voor θ irrationaal maar voor θ rationaal. Daarnaast vraagt het gebruik in Voorbeeld c op pagina 28 van trigonometrische functies als basis van de continue functies op de cirkel een toevoeging. Essentieel hier is het feit dat deze trigonometrische functies een dichte onderalgebra vormen van $C(S^1)$, zodat een (continue) representatie van $C(S^1)$ geheel is bepaald door zijn waarde op het genererend polynoom $z = e^{2\pi it}$ van de cirkel. Een soortgelijk argument hoort thuis in het voorbeeld op pagina 28–29.

Walter D. van Suijlekom

Pieter Allaart

Mathematics Department, University of North Texas
P.O. Box 311430, Denton, TX 76203-1430, USA
allaart@unt.edu

Column Wiskundigen in den vreemde

Once upon a time in the West

Meteen na zijn promotie in 1998 in de waarschijnlijkheidsrekening aan de Vrije Universiteit te Amsterdam vertrok Pieter Allaart naar Texas, om er nooit meer weg te gaan. Hij begon er met een aanstelling als ‘visiting assistant professor’ aan de University of North Texas en vervolgde deze met een ‘tenure track’ positie aan dezelfde universiteit. Hoe is het deze jonge wiskundige tussen de cowboys vergaan?

Toen ik promoveerde, wilde ik het liefst ver van Nederland een nieuw leven beginnen. Het telefoontje de dag na mijn promotie hielp daarbij. Mike Keane (toen nog aan het CWI) had een bezoeker uit noord-Texas, die meldde dat zijn faculteit een tijdelijke vervanger zocht voor iemand die een last-minute sabbatical genomen had. Nu had Mike een dag tevoren nog vragen gesteld bij mijn promotie: hij wist wel iemand. Enkele weken later, na een kort telefonisch sollicitatiegesprek, kon ik mij gaan opmaken voor een geheel nieuw avontuur. Texas was immers het wilde westen! Texas was cowboys en indianen, olie, Apollo 13, en natuurlijk de TV-serie Dallas.

Bij aankomst was Texas vooral een verzengende hitte. Dat bleef het ook de eerste paar weken, gedurende welke er van alles geregeld moest worden: een appartement, een bankrekening en, het belangrijkste, een Social Security Number (vergelijkbaar met het Nederlandse SoFi nummer). Zonder dit laatste kun je in Amerika weinig beginnen: zelfs de sleutel van je werkamer krijg je niet. Een gastvrije collega nam me tijdelijk in zijn huis op; een ander leende me een fiets.

Van die eerste dagen herinner ik me nog vooral de stoet van financiële adviseurs in grijze pakken, die probeerden je klandizie te winnen voor het beleggen van je pensioengeld: hiervoor zijn Amerikaanse werknemers namelijk zelf verantwoordelijk. Helaas had ik teveel andere dingen aan het hoofd: waar vraag ik een email-adres aan, hoe werkt Microsoft Windows, waarom ontbreekt de letter E in het Amerikaanse waarderingssysteem (A,B,C,D,F), en wat is in vredesnaam een ‘quiz’?

Het eerste semester had ik volledig mijn handen vol aan de twee calculuscolleges die mij toegewezen waren. Voor het eerst je eigen colleges geven, en dan ook nog eens in het Engels, was een forse omschakeling. Daarnaast werd je ook nog geacht met regelmaat huiswerk in te nemen en na te zien, en voorts diverse toetsen en korte schriftelijke overhoringen (inderdaad, de

‘quiz’) te geven net als op de middelbare school! Als docent ben je overal zelf voor verantwoordelijk. Alleen wanneer je geluk hebt, wordt je een student-assistent toegewezen die helpt met correctiewerk. Verder zijn er nauwelijks richtlijnen betreffende bijvoorbeeld de moeilijkheidsgraad van examens. Aan het begin tastte ik werkelijk in het duister, maar vrij snel werd duidelijk dat ik met mijn Nederlandse achtergrond veel te hoge verwachtingen had. Ik gaf veel lage cijfers, en kreeg slechte beoordelingen van de studenten.

Het tweede semester was nog erger: ik moest een servicecollege geven dat pure middelbare school wiskunde bleek te zijn. Ik had me nooit voorgesteld dat ik in mijn eerste baan zou moeten uitleggen hoe je een vierkantsvergelijking oplost. De studierichtingen van de studenten liepen uiteen van communicatiewetenschappen tot mode-ontwerpen. Ik wist ze niet te bereiken. (Nu, zeven jaar later, weet ik dat ik niets moet verwachten van een eerstejaars student, en er simpelweg vanuit te gaan dat deze geen breuken vereenvoudigen kan. Kan hij of zij dat wel, dan is dat een goed begin.)

Op de een of andere manier besloot de faculteit mijn tijdelijke aanstelling met een jaar te verlengen, en datzelfde gebeurde het jaar daarop nog eens. Het was een onzekere tijd met veel sollicitaties en zelfs een paar gesprekken aan andere universiteiten, maar uiteindelijk, na drie jaar tijdelijke dienst (en gestaag verbeterende onderwijsbeoordelingen), bood North Texas mij de felbegeerde ‘tenure-track’ positie aan, met de in Amerika gebruikelijke proeftijd van zes jaar. Het hielp daarbij ongetwijfeld dat mijn onderzoek weer op gang was gekomen.

Inmiddels is de proeftijd grotendeels verstreken; volgend jaar wordt beslist of ik permanent mag blijven. Volgens het faculteitshoofd zit dat wel goed, maar de beslissing moet wel goedgekeurd worden door een reeks bureaucraten op diverse niveaus. Daaronder bevindt zich de ‘Provost’, een soort adjunct-rector-magnificus met een naar Nederlandse begrippen ongekende beslissingsbevoegdheid, zelfs wanneer het gaat om disciplines waar hij in het geheel geen verstand van heeft. Deze man veroorzaakte onlangs hevige opschudding door zonder verdere uitleg en tegen het advies van de faculteiten en dekanen in een groot aantal medewerkers de permanente aanstelling te weigeren. Wat dat betreft, blijft het dus spannend tot het laatste moment.



Jaap Top

Afdeling Wiskunde en Informatica
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen
top@math.rug.nl

Feestrede

Möbius in strips

In vele kelders van universiteiten kan men ze nog wel aantreffen: gips- en draadmodellen van algebraïsche oppervlakken en andere meetkundige objecten. Vroeg in de twintigste eeuw is men gestopt met de productie ervan; wel vonden ze een vervolg in de abstracte beeldende kunst. De beeldhouwer Henry Moore heeft eens verteld hoe gefascineerd hij was door deze draadfiguren, en hoe hij zich door deze voorstellingen heeft laten inspireren. Tegenwoordig staan virtuele modellen dank zij de computer weer in de belangstelling. Misschien beantwoorden deze figuren toch aan de behoefte om te kunnen zien waar je aan rekt. Jaap Top bespreekt in dit artikel de Möbiusstrings: een algebraïsch object, dat aanleiding geeft tot een speciaal type draad- en gipsmodel. In de Rijksuniversiteit Groningen is een complete verzameling te vinden, zij het dat deze wel restauratie behoeft. Hij sprak deze tekst uit op 22 mei bij het afscheid van Jan van Maanen, die benoemd is tot hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.

Wie op internet naar Möbius zoekt, zal onmiddellijk bij de Franse striptekenaar Jean Giraud terecht komen. Maar dat is niet de Möbius die in deze tekst een hoofdrol speelt. Weliswaar is ook bij de onze een strip de belangrijkste reden waarom hij veelvuldig op internet te vinden is. Om nog even in dezelfde stijl te blijven, de Möbiusstrip speelt een belangrijke rol in het stripverhaal *De Wentelwereld*, getekend door Don Lawrence en geschreven door Martin Lodewijk.

Direct nadat de geheimen van een Möbiusstrip van hun verhaal uit de doeken zijn gedaan (zie drie pagina's verderop),

volgt een plaatje waarop een welgevormd boegbeeld van achteren wordt getoond. De oplettende lezer zullen de strings hierop niet ontgaan. Over zulke draadjes, de Möbiusstrings, hebben we het hier.

August Ferdinand Möbius (1790–1868) was een Duits sterrenkundige en wiskundige. Hij leerde sterrenkunde van Gauss, en wiskunde van diens promotor Pfaff. In 1816 kreeg Möbius een vaste aanstelling aan de universiteit van Leipzig. Daarna werd zijn ambitie snel duidelijk: hij wilde hoogleraar in Leipzig worden. Maar dat viel niet mee.

Pas in 1844, enkele jaren na zijn vijftig-

ste verjaardag dus, ging deze lang gekoesterde wens in vervulling. Die Möbiusstrip overigens, vond men pas na zijn dood in nagelaten geschriften. In de kennissenkring van Jan van Maanen vindt men personen die veel meer over Möbius te vertellen hebben. John Fauvel, Robin Wilson en Raymond Flood redigeerden het in 1993 verschenen boek *Möbius and his Band: Mathematics and Astronomy in Nineteenth-Century Germany*. De Möbiusstrings komen daarin evenwel niet voor.

Strings

De originele Möbiusstrings werden van zijden draadjes gemaakt, aan het eind van de negentiende eeuw, bij de firma Martin Schilling in Leipzig. We danken ze aan de hoogleraar Hermann Wiener (1857–1939) uit Darmstadt, die er in 1901, eveneens bij de firma M. Schilling, de tekst *Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung* over publiceerde.

De definitie van een *Möbiusstring* begint met een homogene, derdegraads veelterm $F(x, y, z)$ met reële coëfficiënten. Homogeen betekent, dat $F(tx, ty, tz)/F(x, y, z)$ een macht t^n van t is, en derdegraads im-

en strings

pliceert dat $n = 3$. We eisen verder, dat F irreducibel is, hetgeen wil zeggen dat voor elk paar niet-constante veeltermen G, H geldt, dat $G \cdot H \neq F$. Neem nu een lijn ℓ door de oorsprong in de ruimte $\mathbf{R}^3$. Zo'n lijn ℓ wordt bepaald door een 'richting' $0 \neq v \in \mathbf{R}^3$, en bestaat dan uit alle veelvouden

$$\ell := \{tv ; t \in \mathbf{R}\}.$$

Als $F(v) = 0$, dan volgt $F(tv) = t^3 F(v) = 0$ voor elke $t \in \mathbf{R}$, en we korten dit af door te schrijven $F(\ell) = 0$. Omgekeerd, als $F(v) \neq 0$, dan geldt $F(tv) \neq 0$ voor elke $t \neq 0$, en dit schrijven we als $F(\ell) \neq 0$ (hoewel in dit geval natuurlijk het punt $(0, 0, 0) \in \ell$ wél ingevuld in F de waarde nul oplevert).

Een Möbiusstring bestaat uit een groot (maar eindig) aantal lijnen ℓ door de oorsprong in $\mathbf{R}^3$, die voldoen aan $F(\ell) = 0$. In een concreet model zoals de firma Schilling maakte, kan je natuurlijk geen oneindig lange lijn ℓ stoppen. Daarom beperken we ons tot een stukje ervan:

$$s\ell := \{w \in \ell ; \|w\| \leq 10\}.$$

In de in 1899 verschenen Serie XXV van de *Mathematische Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, maakte de firma Schilling precies zeven verschillende Möbiusstrings. In feite wist men al een aantal jaren eerder hoe een Möbiusstring er zou gaan uitzien. Elk lijnstukje $s\ell$ in zo'n string wordt namelijk volledig bepaald door een willekeurig punt $\neq 0$ op $s\ell$. Dus door de punten v van de string te nemen, die precies op een gegeven bol om de oorsprong liggen, bepaal je de hele string. In 1886 liet hoogleraar Alexander Wilhelm Brill (1842–1935) in Tübingen student Dollinger uit gips twee bollen met straal 5 maken. Hierop werden de punten van de zeven Möbiusstrings getekend. Preciezer gezegd, op zo'n bol zie je

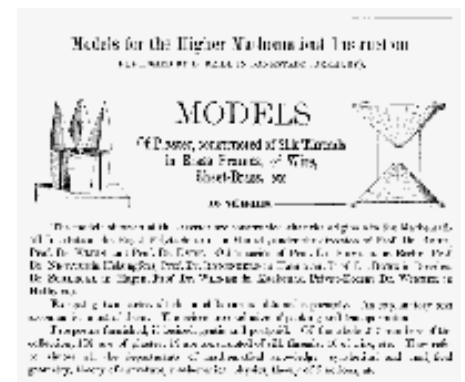
$$\{w \in \mathbf{R}^3 ; \|w\| = 5 \text{ \& } F(w) = 0\}$$

voor in totaal zeven verschillende homogene, derdegraads veeltermen F (op een van de bollen drie, op de andere vier veeltermen). Ze staan te boek als Nummer 2a en 2b in Serie XVII van de al eerder genoemde *mathematische Modelle für*

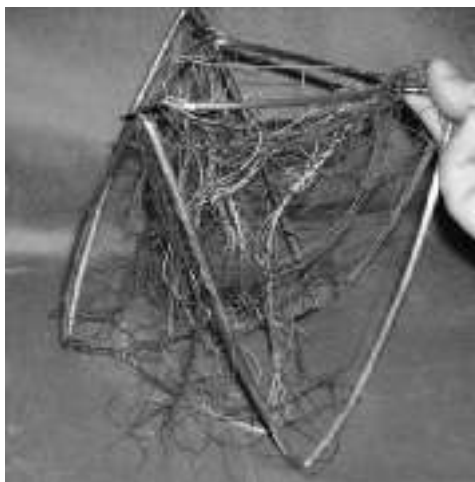
den höheren mathematischen Unterricht.

Exemplaren van alle negen genoemde modellen zijn in het bezit van het Groningse Instituut voor Wiskunde en Informatica. De advertenties in diverse wiskundetijdschriften, waarmee de firma L. Brill (broer van Alexander) en opvolger de firma M. Schilling hun modellen wereldwijd aanprezen, bleven niet onopgemerkt. Onderstaand voorbeeld komt uit het *American Journal of Mathematics*, juli 1890.

Overigens, ruim een eeuw na het oorspronkelijke ontwerp zien alle zeven Gro-



Annonce in het *American Journal of Mathematics* van 1890



Twee Groningse draadmodellen in slechte staat: links de *parabola cuspidata*, rechts de *parabola campaniformis cum ovali*

ningse Möbiusstrings er ongeveer hetzelfde uit, ten gevolge van het feit dat een uit zijdedraad vervaardigd model na zoveel tijd vrij letterlijk tot op de draad versleten is. De oudere gipsbollen daarentegen hebben de tand des tijds beter doorstaan.

Newtons typen

Om uit te leggen waarom er zeven Möbiusstrings zijn, en niet bijvoorbeeld zes of dertien of een ander aantal waar minder 'volheid' van afstraalt, beperken we ons zelf tot een simpel soort derdegraads veeltermen. Dit lijkt een essentiële beperking, maar in feite is het dat niet, omdat bewezen kan worden dat met een lineaire variabelentransformatie elke F in een exemplaar van onze speciale soort kan worden overgevoerd. Neem reële getallen a, b, c en

$$F(x, y, z) := x^3 + ax^2z + bxz^2 + cz^3 - y^2z.$$

We zijn geïnteresseerd in de nulpunten van F . Zoals we al zagen, bestaat de verzameling $V(F)$ van alle nulpunten uit een collectie lijnen door de oorsprong. Wat we



De twee gipsen bollen van A.W. von Brill. Op de twee bollen staan afgebeeld $\{w \in \mathbb{R}^3; \|w\| = 5 \text{ \& } F(w) = 0\}$ voor zeven verschillende homogene, derdegraads veeltermen F . Op de ene bol staan er drie, op de andere vier. Deze staan in *mathematische Modelle für den höheren mathematischen Unterricht* als Nummer 2a en 2b in Serie XVII.

eerst doen, is deze verzameling doorsnijden met het vlak $V(z - 1)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeven door $z = 1$. Per definitie is

$$V(z - 1) \cap V(F) = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3; y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c\}.$$

In het vlak $V(z - 1)$ zien we dus de reële oplossingen (x, y) van $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$. Anders gezegd, we zien twee grafieken, namelijk die van de functie

$$f: x \mapsto \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c},$$

en de in de x -as gespiegelde grafiek hiervan, die van

$$-f: x \mapsto -\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}.$$

Sir Isaac Newton (1643–1727) gaf in een appendix 'Enumeratio Linearum Tertii Ordinis' van zijn boek *Opticks* (1704) een klassificatie in termen van de veelterm $x^3 + ax^2 + bx + c$. Hij vindt vijf typen.

- De veelterm heeft drie reële nulpunten $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Het domein van de functies $f, -f$ bestaat dan uit twee gedeelten: voor $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$ vormen de beide grafieken samen een gladde 'ovaal'; voor $x \geq \alpha_3$ zie je, in Newtons woorden, een 'klokvorm'. De officiële naam die hij aan dit geval geeft, luidt *parabola campaniformis cum ovali*.
- De veelterm heeft drie verschillende nulpunten, namelijk één reële, α , en een paar complex geconjugeerde. In dit geval vormen de grafieken, voor $x \geq \alpha$, samen een 'klokvorm'. Bij Newton heet dit de *parabola pura*.
- De veelterm heeft slechts twee nulpunten, een dubbele en een enkele. Deze zijn dan beide reëel (omdat anders een complex geconjugeerde ook nog een

nulpunt was, en dat zouden er in totaal teveel zijn). We kunnen dus schrijven

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2(x - \beta)$$

met $\alpha \neq \beta$. We nemen nu aan dat $\alpha > \beta$. Het domein van f en $-f$ bestaat dan uit alle $x \geq \beta$. Samen vormen de beide grafieken een kromme die zichzelf kruist in het punt $(\alpha, 0)$; Newton: een *parabola nodata*.

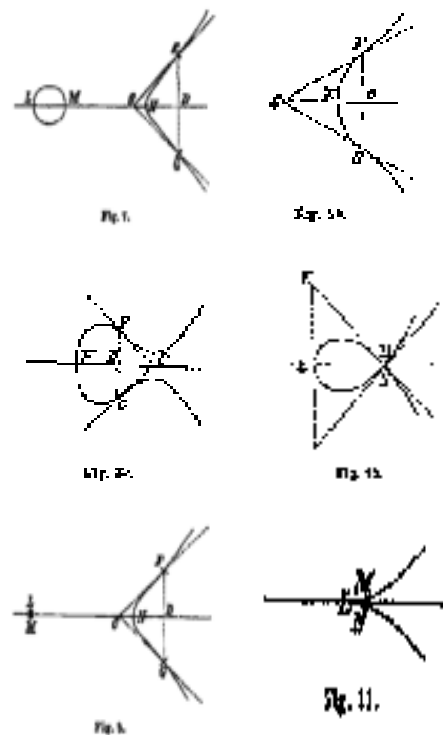
- In het analoge geval als hierboven, maar dan met $\alpha < \beta$, is $x = \alpha$ een geïsoleerd punt van het domein van f en $-f$. De grafieken samen bestaan uit het losse punt $(\alpha, 0)$, samen met een 'klokvorm' voor $x \geq \beta$. Dit is volgens Newton de *parabola punctata*.
- Het overblijvende geval is, dat de veelterm slechts een drievooudig nulpunt heeft. We kunnen dan schrijven

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^3$$

voor zekere $\alpha \in \mathbb{R}$. Het domein van $\pm f$ bestaat uit alle $x \geq \alpha$, en de beide grafieken 'raken' elkaar in het eindpunt $(\alpha, 0)$. Newton noemt dit laatste geval een *parabola cuspidata*.

Buigpunten

Was de theorie bij Newton geëindigd, dan hadden we vijf Newtonstrings en niet



De hier getoonde plaatjes zijn van Möbius (1852). Merk op dat hij twee figuren geeft die een parabola pura voorstellen.

meer. Het gaat echter verder: in de catalogus die de firma Schilling in 1911 uitbrengt bij al hun modellen, wordt in de beschrijving van Serie XVII 2ab gewag gemaakt van Möbius "seine schöne Untersuchungen" over derdegraads krommen. In 1852 publiceerde Möbius zijn 'Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung', 82 pagina's in de *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften*, math.-phys. Klasse. Hij geeft hier een verfijning van Newtons klassificatie, en daaraan danken we het gegeven dat Schillings Serie XXV uit zeven draadmodellen en niet uit vijf bestaat: de Möbiusstrings.

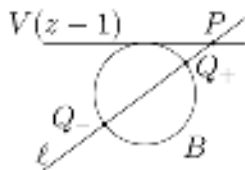
Möbius doorsnijdt de nulpuntsverzameling $V(F)$ van de homogene, derdegraads veelterm F niet met het vlak $V(z-1)$, maar met de bol B met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Het resultaat krijgt als naam *sferische (kromme) lijn van de derde orde*:

$$B \cap V(F) = \{w \in \mathbb{R}^3; F(w) = 0 \text{ \& } \|w\| = 1\}.$$

Ieder punt $P := (x, y, 1) \in V(z-1) \cap V(F)$ levert, door de lijn ℓ die $P := (x, y, 1)$ en $(0, 0, 0)$ bevat te doorsnijden met de bol B , twee punten

$$Q_{\pm} := \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} (x, y, 1)$$

van $B \cap V(F)$.



Zo krijg je alle punten van $B \cap V(F)$ behalve die met z -coördinaat $z = 0$. Omdat we uitgaan van een vergelijking

$$F = x^3 + ax^2z + bxz^2 + cz^3 - y^2z = 0,$$

correspondeert dit met het puntenpaar $\pm(0, 1, 0)$. We zien aan deze berekening, dat de 'grote cirkel' in B gegeven door $z = 0$, de kromme $B \cap V(F)$ met multipliciteit 3 snijdt in de punten $\pm(0, 1, 0)$. Deze punten zijn 'buigpunten' op de kromme. $z = 0$ definieert de 'raaklijn' aan de kromme in zo'n punt. De kromme steekt in zo'n punt over van de 'ene kant' van deze raaklijn naar de andere kant.



De geheimen van een Möbiusstrip, uit: *De Wentelwereld*, Don Lawrence (tekenaar) en Martin Lodewijk (tekst)

Een plaatje van $B \cap V(F)$ maken, kan, zoals Brill en Dollinger het in 1886 deden, door de figuur op een uit gips vervaardigde bol te tekenen. Op een stuk papier kan het natuurlijk ook. Daartoe nemen we eerst de bovenste helft ($z \geq 0$) van de bol B . Deze projecteren we loodrecht op het xy -vlak, zodat het beeld de schijf $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ wordt. De rand van de schijf correspondeert dan met de punten van de bol die z -coördinaat 0 hebben. En de punten van $B \cap V(F)$ corresponderen met de twee randpunten $\pm(0, 1) \in D$ samen met alle

$$(x/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}, y/\sqrt{x^2 + y^2 + 1}) \in D$$

waarbij $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$.



Het idee van Möbius is, nog meer buigpunten van $B \cap V(F)$ dan die met $z = 0$ (dus, dan die op de rand van de hier gegeven schijven) te gaan zoeken. Die hebben dan een z -coördinaat $\neq 0$, dus ze corresponderen met zekere punten van $V(z-1) \cap V(F)$. De punten die we zoeken zijn dus gewoon punten op de grafiek van $f: x \mapsto \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ of op die van $-f$. En wat we zoeken zijn precies die punten, waarin de grafiek oversteeft van de ene

kant van de raaklijn in het punt aan de grafiek, naar de andere kant. Kortom, we zoeken buigpunten van de grafiek; een onderwerp dat we ver na Möbius zelfs in het middelbare school curriculum aantreffen.

Een eerste observatie die hier gemaakt kan worden is, dat als f een buigpunt (α, β) heeft bij $x = \alpha$, dan heeft $-f$ dat ook, en wel $(\alpha, -\beta)$. De 'grote cirkel' in B die door

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} (\alpha, \pm\beta, 1)$$

gaat, snijdt $B \cap V(F)$ dan verder in de al bekende buigpunten $\pm(0, 1, 0)$. Möbius laat zien, dat de grafiek van f niet meer dan één buigpunt heeft. Hij heeft hiervoor een lang en slim meetkundig bewijs; een alternatief ervoor loopt als volgt. Heeft f voor $x = \xi$ een buigpunt, dan is $f''(\xi) = 0$. Schrijf nu $f(x) = \sqrt{p(x)}$. Dan is eenvoudig na te rekenen dat

$$f''(x) = \frac{2p(x)p''(x) - (p'(x))^2}{4p(x)\sqrt{p(x)}}.$$

We zijn dus op zoek naar die reële oplossingen van de vergelijking $2p(x)p''(x) - (p'(x))^2 = 0$, die bovendien voldoen aan $p(x) > 0$. Omdat $p(x) = x^3 + \dots$, volgt $p''' = 6$, en daarmee

$$\frac{d}{dx} (2p(x)p''(x) - (p'(x))^2) = 12p(x).$$

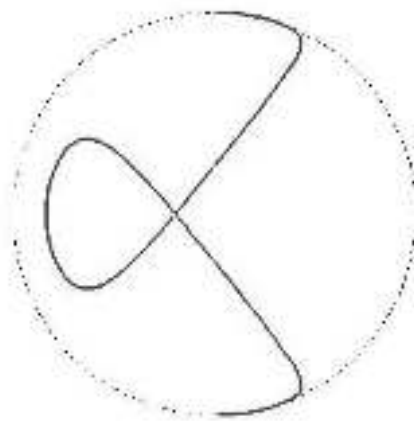
Hieruit volgt dat $2p(x)p''(x) - (p'(x))^2$ stijgend is op elk open interval in het domein van f . Heeft $p(x)$ hooguit twee reële nulpunten, dan zien we hieruit direct dat f'' hoogstens één nulpunt heeft op het gebied waar $p(x) > 0$, dus inderdaad heeft de grafiek van f dan hooguit één buigpunt. In het resterende geval heeft $p(x)$ drie onderling verschillende reële nulpunten. Tussen de twee kleinste ervan is de afgeleide van f dalend (van $+\infty$ naar $-\infty$) en de functie f dus (strict) convex (hier zit de bovenste helft van de 'ovaal' waar Newton van sprak). Zo'n convexe functie heeft geen buigpunten. En zoals we net al zagen, voorbij het grootste nulpunt van $p(x)$ kan f ook maar hooguit één buigpunt hebben.

Zo is bewezen, dat $V(z-1) \cap V(F)$ nul of twee buigpunten bevat, en dus $B \cap V(F)$ één of drie paren antipodale buigpunten. Zijn dit er drie, dan bepaalt, zoals we zagen, de grote cirkel door twee buigpunten de derde. Zoals eerder gezegd, onze speciale vorm voor F is geen echte be-

perking omdat door een lineaire transformatie van de variabelen, elke irreducibele, homogene derdegraads veelterm in deze speciale vorm kan worden gebracht. Dus: voor willekeurige homogene, irreducibele F van graad 3 geldt, dat gegeven twee niet antipodale buigpunten in $B \cap V(F)$, alle (zes) buigpunten te krijgen zijn door de grote cirkel door deze twee met $V(F)$ te doorsnijden.

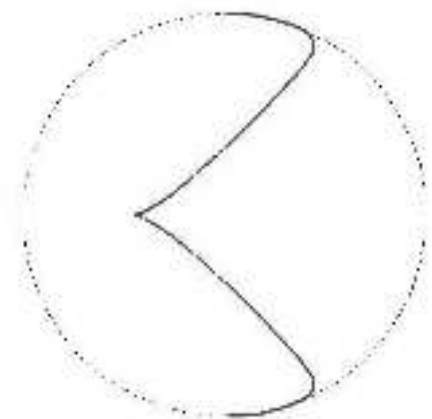
Zeven soorten strings

Evenals Möbius, gaan we vervolgens na voor welke typen in de klassificatie van Newton $B \cap V(F)$ één paar, dan wel drie paren antipodale buigpunten heeft. Anders gezegd, voor welke veeltermen $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ heeft de grafiek van $f(x) = \sqrt{p(x)}$ een buigpunt? Om deze vraag te beantwoorden merken we op, dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)x^{-3/2} = 1$. Dus voor x groot, is de grafiek van $f(x)$ evenals die van $x \mapsto x^{3/2}$ hol (concaaf). Uiteraard zien we dit ook aan f' en aan f'' : die laatste is positief voor grote x , dus daar is f' stijgend. Bovendien is voor $x \gg 0$ ook f' positief, dus f neemt steeds sneller toe. Is het grootste nulpunt $x = \alpha$ van $p(x)$ een enkelvoudig nulpunt, dan is de rechterafgeleide van f in dat punt oneindig, oftewel de 'raaklijn' aan de grafiek van f is in $(\alpha, 0)$ verticaal. Voor $x > \alpha$ loopt de grafiek dan eerst minder stijl (de afgeleide f' is dalend). Kortom, de grafiek van f is voor $x > \alpha$ eerst bol (convex). Tussen $x = \alpha$ en $x = \infty$ zit dan een punt waarin de grafiek overgaat van bol naar hol. Dus: is het grootste nulpunt van $p(x)$ enkelvoudig, dan heeft de grafiek van f een buigpunt. Dit gebeurt precies voor de typen (1), (2) en (4) in de klassificatie van Newton.



Soort 6 (nodata)

Voor het derde type (parabola nodata) kan je door eventueel eerst de grafiek van f te translateren langs de x -as, aannemen dat $f(x) = \sqrt{x^2(x-\beta)}$ met $\beta < 0$. Vervolgens herschalen we de x -as (vervang x door $-\beta x$) en ook de y -as, zodat we als functie $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ overhouden. Het is gemakkelijk na te rekenen dat de grafiek hiervan geen buigpunten bevat. Type (3) van Newton levert ook een Soort (Gattung) bij Möbius: Soort 6. Het resterende, vijfde type (parabola cuspidata) heeft eveneens geen buigpunten: de tweede afgeleide van $\sqrt{(x-\beta)^3}$ heeft voor $x \geq \beta$ geen nulpunten. Dit heet bij Möbius Soort 7.

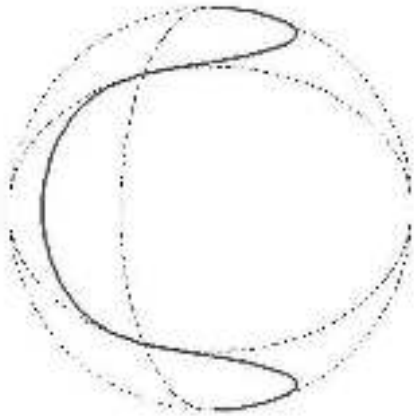


Soort 7 (cuspidata)

Möbius gaat verder met de typen (1), (2) en (4). Op de bol B heeft $B \cap V(F)$ dan drie paren antipodale buigpunten. Hiermee maakt hij vier grote cirkels op B , namelijk de cirkel waar al deze buigpunten op liggen, en voor elk van de drie paren de grote cirkel die de raaklijn in het paar aan $B \cap V(F)$ definieert. We kunnen deze configuratie ook (min of meer) terugvinden in het vlak $V(z-1)$: de cirkel in B gegeven door $z = 0$ is daar niet aanwezig, maar daarbij denken we voor het gemak aan een lijn in het oneindige ('voorbij onze horizon').

De grote cirkel door alle buigpunten zien we in $V(z-1)$ als de verticale lijn ($x = \text{constant}$) door het buigpunt van f en dat van $-f$. De resterende twee grote cirkels corresponderen in $V(z-1)$ met de raaklijnen door het buigpunt van f en $-f$, respectievelijk. Deze laatste twee raaklijnen zijn elkaars beeld onder spiegeling in de x -as. In het bijzonder levert dit twee mogelijkheden.

Ten eerste, kunnen beide evenwijdig aan de x -as lopen; ze snijden elkaar dan in B in een punt van de derde raaklijn $z = 0$,



Soort 5 (pura-b)

of anders gezegd, de drie raaklijnen (grote cirkels) in B behorend bij de drie paren antipodale buigpunten, gaan door één punt. De andere mogelijkheid is, dat de twee raaklijnen elkaar in een punt van $V(z-1)$ op de x -as snijden.

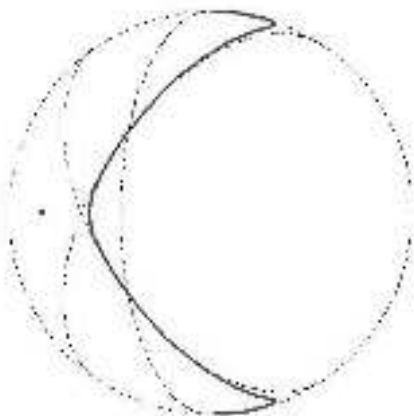
Als $V(z-1) \cap V(F)$ in $V(z-1)$ een horizontale raaklijn in een buigpunt van de grafiek van f heeft, dan mogen we door translateren langs de x -as en herschalen aannemen, dat het buigpunt $(0, 1)$ is. De lijn $y = 1$ snijdt de kromme gegeven door

$$-y^2 + x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$$

dan voor $x = 0$ met multipliciteit 3. Anders gezegd,

$$x^3 + ax^2 + bx = x^3,$$

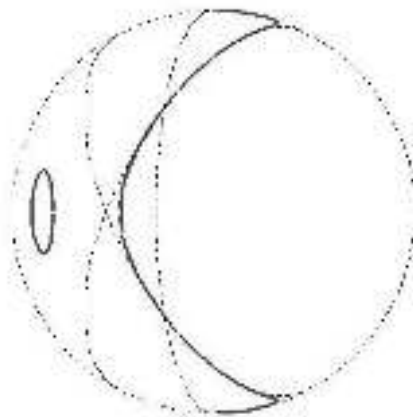
oftewel $a = b = 0$. De door translateren en herschalen verkregen veelterm is dus $x^3 + 1$, en die heeft één reëel en een paar complex geconjugeerde nulpunten. Dit geval kan dus alleen voor de parabola pura. Zoals $-y^2z + x^3 + z^3$ laat zien, komt het dan ook echt voor. Bij Möbius heet het Soort 5.



Soort 2 (punctata)

Wat overblijft, zijn de gevallen waarin de raaklijnen in de buigpunten van f en $-f$ elkaar op de x -as in een eindig punt snijden. Dit kan links van de x -coördinaat van het buigpunt zijn (hetgeen betekent, dat de raaklijn in het buigpunt van de grafiek van f een positieve helling heeft), of rechts daarvan (negatieve helling). Dit onderscheid laat zich helemaal in termen van de meetkunde op de bol B interpreteren. Namelijk, de raaklijn in het buigpunt van de grafiek van f , en die in het buigpunt van de grafiek van $-f$, en de lijn die de beide buigpunten verbindt, vormen een driehoek.

Vanaf het grootste reële nulpunt van f^2 is de grafiek van f eerst bol en na het buigpunt hol. Dit impliceert dat tot aan het buigpunt de grafiek van f onder de raaklijn aan de grafiek in het buigpunt ligt. En dus ligt deze grafiek binnen de gegeven driehoek, als de helling van die raaklijn positief is, en buiten de gegeven driehoek als de helling negatief is.

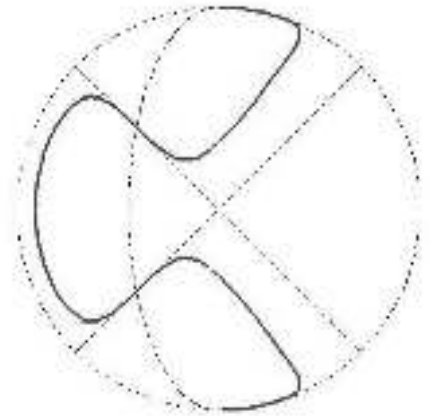


Soort 3 (campaniformis cum ovali)

In het geval van de parabola punctata kunnen we na translateren en herschalen aannemen $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2}$. Het buigpunt ligt dan bij $x = 4$, en de raaklijn aldaar wordt gegeven door $y = 3x - 8$. Voor $0 < x < 4$ ligt de grafiek van f dus binnen de driehoek begrensd door de lijnen met vergelijking $\pm y = 3x - 8$ en $x = 4$. De gezochte eigenschap verandert niet onder translaties of herschalingen van alle gegevens, dus elke parabola punctata heeft deze eigenschap. Möbius noemt dit Soort 2.

We behandelen vervolgens de parabola campaniformis cum ovali. Ook hier kunnen we translateren en herschalen, en daarmee veronderstellen dat

$$f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-\gamma)}$$



Soort 4 (pura-c)

voor zekere $\gamma > 1$. Er geldt

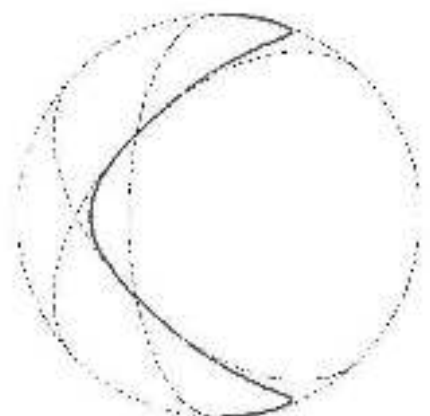
$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2(\gamma+1)x + \gamma}{2f(x)}.$$

Heeft f een buigpunt bij $x = \delta$, dan is $\delta > \gamma$. De grafiek van deze teller is een dalparabool waarvan de top ligt bij $x = (\gamma+1)/3 < \gamma$ (want $\gamma > 1/2$). Voor $x \geq \gamma$ is die teller dus stijgend, en in het bijzonder

$$3\delta^2 - 2(\gamma+1)\delta + \gamma \geq 3\gamma^2 - 2(\gamma+1)\gamma + \gamma = \gamma^2 - \gamma > 0,$$

waarin voor de laatste ongelijkheid wordt gebruikt dat $\gamma > 1$. Dus de helling in het buigpunt is positief. Hieruit volgt dat voor elke parabola campaniformis cum ovali, een deel van de figuur binnen de gegeven driehoek ligt. Bij Möbius heet dit Soort 3.

Er resteert nog slechts één type, namelijk de parabola pura. We hebben al gezien, dat het in dit geval mogelijk is dat de raaklijnen aan de buigpunten van f en $-f$ evenwijdig zijn. Maar er zijn meer mogelijkheden. Neem bijvoorbeeld $t \in \mathbf{R}$, en



Soort 1 (pura-a)

beschouw

$$y^2 - x^2 = (x - t)^3.$$

De lijnen gegeven door $y = \pm x$ snijden de kromme met deze vergelijking drievoudig in $(t, \pm t)$. Voor $t < 0$ is het punt $(t, -t)$ op de grafiek van $f: x \mapsto \sqrt{(x-t)^3 + x^2}$ dus een buigpunt, met bijbehorende raaklijn gegeven door $y = -x$. Deze raaklijn heeft een negatieve helling. Hieruit volgt in het bijzonder, dat $(x-t)^3 + x^2$ slechts één reëel nulpunt heeft als $t < 0$: waren het er drie, dan zou, zoals we eerder gezien hebben, f een positieve helling van de raaklijn in het buigpunt gehad hebben. En waren het er twee, dan zou ofwel f helemaal geen buigpunt gehad hebben (en dat heeft f wel), ofwel ook weer eentje met een positieve helling. We hebben hier dus een parabola pura waarvan geen stuk binnen de door de twee eindige buigpunten gegeven driehoek ligt. Möbius noemt dit Soort 4.

Is omgekeerd $t > 0$, dan is (t, t) een buigpunt van de grafiek van f . De helling van de bijbehorende raaklijn is positief. Nu zou het natuurlijk zo kunnen zijn, dat in dit geval $(x-t)^3 + x^2$ niet bij een parabola pura hoort. De afgeleide van deze uitdrukking is $3x^2 + 2(1-3t)x + 3t^2$. Hiervan is de discriminant $4 - 24t$, en deze is negatief voor $t > 1/6$. Voor deze t is dus de gegeven afgeleide overal positief, en dus heeft $(x-t)^3 + x^2$ slechts één reëel nulpunt, met multipliciteit 1. Dus in ieder geval voor $t > 1/6$ krijgen we een parabola pura, waarvan een deel binnen de door twee eindige buigpunten gegeven driehoek ligt. Möbius klassificeert deze figuur als Soort 1.

Meer mogelijkheden voor de nulpunten van f en voor de richting van de raaklijn in een buigpunt zijn er niet. Zo krijgen we dus in totaal zeven soorten, die een halve eeuw later aanleiding waren voor zeven draadmodellen, onze Möbiusstrings.

En verder?

In de twintigste eeuw is de theorie van de derdegraads krommen onderdeel geworden van de theorie van de elliptische krommen. Deze theorie bleek verrassend veel toepassingen te hebben, variërend van natuurkunde (zoals bij de vrije rotatie van een star lichaam, of bij de baan van een deeltje in een Schwarzschild ruimte-tijd) via differentiaalvergelijkingen (bijvoorbeeld eerste orde verge-

lijkingen met uitsluitend met beginvoorwaarden meebewegende singulariteiten) tot getaltheorie (elliptische krommen spelen een hoofdrol in het bewijs van de *Laatste Stelling van Fermat*) en cryptografie.

Een belangrijke invariant van een elliptische kromme is de j -invariant. Dit is een getal; er geldt dat twee krommen isomorf zijn over de complexe getallen precies dan, als ze dezelfde j -invariant hebben. (Voor homogene derdegraads vergelijkingen betekent dit, dat de ene in de andere wordt overgevoerd door een lineaire substitutie van de drie variabelen.) Ieder reëel getal komt voor als j -invariant van een over $\mathbf{R}$ gedefinieerde elliptische kromme. Voorbeeld: neem als vergelijking $-y^2 + x^3 + 2ax^2 + bx$.

(Na transleren in de x -richting, iets waarbij de j -invariant onveranderd blijft, is elke vergelijking van het soort dat we in deze tekst analyseerden tot deze gedaante terug te brengen.) De drie nulpunten van $x^3 + 2ax^2 + bx$ zijn onderling verschillend precies dan, als $\Delta := b^2(a^2 - b) \neq 0$. Is wel $\Delta = 0$, dan is overigens gemakkelijk na te gaan dat de vergelijking een parabola cuspidata (Soort 7) oplevert als $a = 0$, een parabola punctata (Soort 2) als $b = 0$ & $a < 0$ en ook als $b \neq 0$ & $a > 0$, en een parabola nodata (Soort 6) in de resterende gevallen. Voor $\Delta < 0$ krijgen we een parabola pura en voor $\Delta > 0$ een parabola campaniformis cum ovali (Soort 3). De j -invariant in dit voorbeeld is

$$64 \frac{(4a^2 - 3b)^3}{\Delta}.$$

Is $j = 0$, oftewel $b = 4a^2/3$, dan hebben we de vergelijking

$$-y^2 + (x + \frac{2}{3}a)^3 - \frac{8}{27}a^3.$$

$\Delta = 0$ & $a = 0$	Soort 7
$\Delta = 0$ & $a < 0$ & $b = 0$	Soort 2
$\Delta = 0$ & $a < 0$ & $b \neq 0$	Soort 6
$\Delta = 0$ & $a > 0$ & $b = 0$	Soort 6
$\Delta = 0$ & $a > 0$ & $b \neq 0$	Soort 2
$\Delta > 0$ ($\Rightarrow j > 0$)	Soort 3
$j = 0$ ($\Rightarrow \Delta < 0$)	Soort 5
$\Delta < 0$ & $j > 0$	Soort 1
$j < 0$ & $a < 0$ ($\Rightarrow \Delta < 0$)	Soort 4
$j < 0$ & $a > 0$ ($\Rightarrow \Delta < 0$)	Soort 1

Tabel 1 Klassificatie van $y^2 = x^3 + 2ax^2 + bx$ voor verschillende waarden van $a, b, \Delta := b^2(a^2 - b)$ en $j := 64(4a^2 - 3b)^3/\Delta$. Alle zeven soorten kunnen bij geschikte (a, b) worden geconstrueerd.

Dit geeft Soort 5. Om een kromme van Soort 4 te krijgen, moet behalve $\Delta < 0$ en $j \neq 0$ ook nog gelden, dat er een reëel punt op de kromme ligt waarvoor geldt, dat de raaklijn in dat punt horizontaal is. We zoeken dus een $x > 0$ met $3x^2 + 4ax + b = 0$, en die bestaat precies dan, als $4a^2 - 3b > 0$ en $\sqrt{4a^2 - 3b} > 2a$. Zo vinden we de voorwaarden $j < 0$ & $\Delta < 0$ & $a < 0$. In de resterende gevallen hebben we een kromme van Soort 1.

Het is zonder veel moeite na te gaan, dat alle in deze tabel weergegeven mogelijkheden daadwerkelijk voorkomen. In het bijzonder worden dus, voor geschikt gekozen (a, b) , alle zeven door Möbius beschreven soorten hier gevonden.

Bovenstaand voorbeeld laat al een beetje zien dat de klassificatie van Möbius zich niet louter in eigenschappen van de j -invariant laat uitdrukken: overgaan van a naar $-a$ bijvoorbeeld, kan een verandering van Soort 1 naar 4 (of omgekeerd) opleveren, terwijl het geen invloed op de j -invariant heeft.

Een ander voorbeeld: de vergelijking $x^3 + y^3 + 1 = 0$ hoort bij $j = 0$. Het punt $(0, -1)$ is in dit geval een buigpunt met bijbehorende raaklijn gegeven door $y = -1$. Evenzo is $(-1, 0)$ buigpunt met raaklijn gegeven door $x = -1$. Ook $y = -x$ levert een raaklijn aan een buigpunt, namelijk een buigpunt $(1, -1, 0)$ in de bijbehorende homogene coördinaten. Deze drie raaklijnen hebben geen punt gemeenschappelijk. Het is gemakkelijk na te gaan dat een deel van de hier beschreven kromme binnen de driehoek begrensd door de drie raaklijnen ligt, en dat de kromme niet uit twee componenten bestaat. Dit is er dus eentje van Soort 1. Al eerder zagen we ook krommen van Soort 5 met $j = 0$.

Mogelijk ligt in dit niet direct inpasbaar zijn in modernere theorie, een oorzaak waarom de klassificatie door Möbius na ruim anderhalve eeuw grotendeels vergeten is. Maar dankzij een tastbaar gegeven als de draadmodellen, gelukkig toch niet helemaal. 

Patrick Oonincx

Koninklijk Instituut voor de Marine
Postbus 10.000
1780 CA Den Helder
p.j.oonincx@kim.nl

Onderzoek

Een functionele blik onder water

Land- en zeekaarten zijn er in allerlei soorten en maten: sommige vertellen iets over de contouren van landsgrenzen, andere geven de diepte van zeeën aan en weer andere vertellen ons iets over bodemsoorten. Nieuw zijn kaarten natuurlijk ook niet, alhoewel de mogelijkheden voor details in kaarten door de voortschrijdende kennis natuurlijk wel gegroeid is. In dit artikel laat Patrick Oonincx zien hoe wiskundige analyse kan helpen real-time een aantal eigenschappen van een relatief onbekend stukje zee in kaart te brengen.

Hoe kunnen we er snel achter komen hoe een stuk zeebodem er uitziet? De wiskundige techniek die hiervoor gebruikt wordt, heet *Rapid Environmental Assessment* (REA). Op een snelle manier wordt geprobeerd parameters van een stukje zee(bodem) in kaart te brengen die invloed hebben op een plaatselijk akoestische profiel. Voor defensieve toepassingen is deze informatie onder andere van belang in onbekende kustgebieden, waar amfibische operaties plaats dienen te vinden. Samen met de *Université Libre* van Brussel en het *NATO Undersea Research Center* heeft de *Nederlandse Defensie Academie* een project opgezet om technieken te ontwikkelen in het kader van REA.

Een centrale techniek in het project is gebaseerd op de propagatie onder water van een sonarpuls. Na een bepaalde afstand in ondiep water te hebben afgelegd, zal deze aan een sensor onder water worden waargenomen. De ontvangen puls bestaat vooral uit reflecties van de sonarpuls op de zeebodem. Mathematisch gezien is de ontvangen puls te beschouwen als *Greense functie* van een systeem bestaande uit een niet-lineaire differentiaalvergelijking met randvoorwaarden. De coëfficiënten in de vergelijking alsmede de randvoorwaarden bestaan uit gezochte geo-akoestische parameters: zeediepte en bodemeigenschappen, zoals bodemsoort (steen/zand), korrelgrootte zand, kleisoort et cetera. Het inverse probleem bestaat uit het herleiden van de vergelijking (en dus de parameters) uit de aan de hydrofoon gemeten Greense functie. Natuurlijk gebruiken we hiervoor meerdere metingen (Greense functies) door bijvoorbeeld de hydrofoon aan een wegdrijvende boei te hangen en met een zekere regelmaat de ontvangen signalen uit te lezen. Tevens kunnen er meerder boeien in een gebied

uitgezet worden, zodat de metingen in een heel gebied waargenomen kunnen worden, met wellicht verschillende bodemsoorten. Een voorbeeld van een dergelijke boei, voorzien van gps-ontvanger om de exacte locatie te bepalen is te zien in figuur 1. De werkelijke sensor onder water is gefotografeerd in figuur 2.

Het idee lijkt eenvoudig maar het inverse probleem is dusdanig complex dat vereenvoudiging noodzakelijk is, zeker voor het geval de metingen real-time in de gewenste informatie omgezet dienen te worden. Een grote stap in deze richting zou het opdelen van het probleem zijn en wel in deelproblemen waarbij bodemparemeters niet of nauwelijks veranderen. Deze simplificatie vraagt dus om een soort van zwart-wit zeekaart waarbij de bestudeerde kustgebieden gesegmenteerd zijn, grofweg in zand en gesteente. De exacte structuur van het sediment laten we dus even buiten beschouwing, aangezien de structuur van het sediment de Greense functie in mindere mate beïnvloedt dan het type sediment. Een interessant vraagstuk is nu of er op een elegante manier segmentatie kan worden verkregen door slechts gebruik te maken van



Figuur 1 Een te water gelaten boei met ontvanger voor de ontvangst van gepropageerde pulsen en een GPS antenne ten behoeve van plaatsbepaling



Figuur 2 De geluidsbron voor onderwater propagatie van sonar pulsen

de gemeten responsies op de gepropageerde puls. Een mogelijke oplossing voor dit probleem is gebaseerd op twee observaties:

- De waargenomen Greense functies bestaan uit golfpakketjes, afkomstig van de op de zeebodem gereflecteerde puls;
- Gelijksortige sedimenten leiden tot golfpakketjes met sterk gelijkende karakteristieke kenmerken.

Het plan van aanpak is nu om de reeds gemeten Greense functies te ontbinden in karakteristieke golfpakketjes en deze met elkaar te vergelijken. Segmentatie zal dan gebaseerd zijn op het al dan niet verschillen in karakteristieke kenmerken. Deze kenmerken zijn vooral gebaseerd op amplitude, frequentie, schaling en tijdslokalisatie van de betreffende golven.

Matching Pursuit Algoritme

De besproken kenmerken zullen een wiskundige waarschijnlijk aanzetten tot de elegante theorie der wavelets voor de schalings-eigenschappen en tijdslokalisatie, wellicht gecombineerd met een vleugje Fourieranalyse voor de frequentie-aspecten. De elegantie van dit alles zal ik niet ontkennen maar helaas zijn deze concepten te veel gericht op hetgeen mathematisch wenselijk is, zoals het vormen van Rieszbases of orthonormale bases. Bij het segmentatie probleem staat de 'match' met de fysica op de eerste plaats. We zoeken een verzameling van functies, die lijken op de golfpakketjes in de Greense functie en die tevens de parameters van de wavelettransformatie bevatten. Een oplossing voor deze zoektocht werd voor het eerst beschreven door Mallat en Zhang [6] in de vorm van de zogenaamde *Matching Pursuit* (MP).

De MP-sigtaaldecompositie projecteert een signaal $s \in L^2(\mathbf{R})$ op een redundante set monofrequente geschaalde functies $h_\gamma \in L^2(\mathbf{R})$, atomen genoemd, die het resultaat vormen van schaling, frequentiemodulatie en translatie in tijd van een gegeven vensterfunctie h ,

$$h_\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{u-t}{a}\right) e^{-iu\omega}, \gamma = (a, t, \omega) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2. \quad (1)$$

Deze vensterfunctie heeft niet per definitie compacte drager, maar zal wel goed benaderd kunnen worden door een compact gedragen functie. Verder veronderstellen we $\|h\|_2 = 1$. In het bijzonder

bekijken we hier Gabor-atomen h_γ , beschreven door de Gaussfunctie $h(u) = 2^{1/4} e^{-\pi u^2}$. Deze functie genereert namelijk een bibliotheek aan functies die bijzonder goed passen bij de fysische responsies op de uitgezonden puls.

In het algemeen start de decompositie met het kiezen van een (redundante) aftelbare verzameling functies h_{γ_n} , de atomen, die volledig is in $L^2(\mathbf{R})$. Een dergelijke verzameling kan verkregen worden door een opdeling van het tijd-schaal-frequentie vlak (t, a, ω) , toegepast volgens (1) op een passende functie h . Torresani [8] toonde aan dat elke functie $f \in L^2(\mathbf{R})$ te ontbinden is in de functies uit een dergelijke verzameling. Wanneer de verzameling functies beschreven is, gaat een algoritme op zoek naar een functie, zeg h_{γ_0} die het best past bij het te decomponeerend signaal s , in de zin van

$$|\langle s, h_{\gamma_0} \rangle| \geq |\langle s, h_{\gamma_n} \rangle|, \forall n > 0, \quad (2)$$

met $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het gebruikelijke L^2 -inwendig product. Het zoeken en vinden van atoom h_{γ_0} dat voldoet aan (2) gebeurt door optimalisatie van een kostenfunctie, zie [6]. Het signaal s kan nu ontbonden worden in een deel in de 'richting' van h_{γ_0} en, zoals we zullen zien, een deel loodrecht hierop:

$$s = \langle s, h_{\gamma_0} \rangle h_{\gamma_0} + R_1 s, \quad (3)$$

met $R_1 s$ het residu. Het voordeel van ontbinding (3) is dat $\langle R_1 s, h_{\gamma_0} \rangle = 0$ en dus

$$\|s\|^2 = |\langle s, h_{\gamma_0} \rangle|^2 + \|R_1 s\|^2. \quad (4)$$

De procedure kan herhaald worden voor het residu $R_1 s$. Na optimalisatie van een nieuwe kostenfunctie vinden we wederom een best passende functie h_{γ_1} uit de verzameling overgebleven atomen. Deze voldoet aan

$$|\langle R_1 s, h_{\gamma_1} \rangle| \geq |\langle R_1 s, h_{\gamma_n} \rangle|, \forall n > 1.$$

Voortzetting van de decompositie levert nu

$$R_1 s = \langle R_1 s, h_{\gamma_1} \rangle h_{\gamma_1} + R_2 s,$$

met orthogonaliteit als tevoren:

$$\|R_1 s\|^2 = |\langle R_1 s, h_{\gamma_1} \rangle|^2 + \|R_2 s\|^2.$$

Iteratie van dit proces leidt uiteindelijk tot een volledige decompositie in alle functies van de gecreëerde verzameling. Een vermoeden van Huber [2] beschreef voor het eerst de convergentie van projectie pursuit algoritmen. Dit vermoeden werd later bewezen door Jones [4]. Dit convergentieresultaat valideert de volledige decompositie

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \langle R_n s, h_{\gamma_n} \rangle h_{\gamma_n}, \quad (5)$$

met $R_0 s = s$ per definitie. Verder hebben we door constructie een soort van relatie van Parseval verkregen

$$\|s\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle R_n s, h_{\gamma_n} \rangle|^2. \quad (6)$$

Resumerend, het MP-algoritme genereert een niet-lineaire decompositie van een functie s in een reeks zogenaamde atomen met enkele gewenste fysische eigenschappen. Verder krijgen we door constructie een energiebehoudswet erbij, die gebruikt kan worden om de kwaliteit van een approximatie met een eindig aantal functies uit de bibliotheek te meten. Praktisch gezien is resultaat (6) van belang om een stopcriterium voor het algoritme te kunnen gebruiken. De l^2 -norm van de coëfficiënten in een partiële som kan worden afgezet tegen de l^2 -norm van s . Op grond hiervan kan worden besloten het algoritme een volgende bijdrage aan de reeks te laten genereren of om met deze eindige reeks genoeg te nemen.

Coherentiedetectie

Nu we een manier hebben om functies te ontbinden in in tijd gelokaliseerde golfpakketjes met karakteristieke schalen en frequentie, volgt een tweede vraag, namelijk hoe de decomposities van verschillende signalen goed te vergelijken zijn. Immers we willen positieafhankelijke Greense functies met elkaar vergelijken en hiermee tot een segmentatie van de zeebodem komen. Een mogelijke oplossing voor deze vraagstelling kan gevonden worden in de beeldverwerking. Daar wordt om beelden met elkaar te kunnen vergelijken vaak gebruik gemaakt van zogenaamde *feature-vectoren*. Dit zijn vectoren waarvan de componenten getallen zijn die eigenschappen van het plaatje vertegenwoordigen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de variantie in een plaatje, oriëntatie van objecten in een plaatje en kleurings. Het komt niet zelden voor dat deze getallen gebaseerd zijn op coëfficiënten in een decompositie/transformatie van een plaatje, zoals de tweede generatie wavelettransformatie [3]. De identificatie van objecten met een vector zou idealiter een bijectieve afbeelding moeten zijn, echter een grote mate van discriminatie tussen de vectoren van verschillende beelden is reeds voldoende. In onze probleemstelling zouden oneindig dimensionale featurevectoren, bestaande uit de in (5) aanwezige parameters γ_n en $\langle R_n s, h_{\gamma_n} \rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$ een 1-1 representatie voor een signaal s vormen. Featurevectoren gebaseerd op een approximatie van s met behulp van de eerste N functies uit de bibliotheek geven welliswaar geen bijectieve afbeelding van s , maar bieden voor grote N wel genoeg discriminatie voor verschillende s .

We identificeren nu gemeten signalen $s_i \in L^2(\mathbb{R})$ met $4N$ -dimensionale featurevectoren $\vec{v}_i$, gegeven door

$$\vec{v}_i = (c_{i,1}, a_{i,1}, \omega_{i,1}, t_{i,1}, \dots, c_{i,N}, a_{i,N}, \omega_{i,N}, t_{i,N}), \quad (7)$$

met $c_{i,k} = \langle R_{k-1} s_i, h_{\gamma_{i,k-1}} \rangle$ en $\gamma_{i,k-1} = (a_{i,k-1}, t_{i,k-1}, \omega_{i,k-1})$, de verzameling van alle MP-parameters van $s_{i,N}$, de N -term MP-decompositie van s_i . Aangezien gebleken is dat de golfpakketjes in de geofysische signalen op de uit de bibliotheek gekozen geschaalde en gemoduleerde Gabor-atomen (Gaussfuncties) lijken, kunnen karakteristieke delen van de ontvangen signalen goed geïdentificeerd worden met steeds vier bij elkaar horende indices van $\vec{v}_i$. De dimensie van de featurevectoren ($4N$) wordt bepaald door het aantal mee te nemen functies (N) in de decompositie van

de signalen. Voor alle gemeten signalen s_i kan een N_i worden gevonden, zodanig dat de L^2 -approximatiefout in s_i met N_i atomen kleiner is dan een zekere $\delta > 0$. Feature vectoren met gelijke dimensie worden verkregen door voor elke s_i een decompositie met N atomen te nemen, met $N = \max_i(N_i)$.

De featurevectoren bieden nu de mogelijkheid coherentie van twee onderlinge signalen s_i en s_j te meten. Dit gebeurt door een gewogen Euclidische afstand tussen $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_j$ te bepalen. De wegingsfactoren in de afstandsmaat worden gegeven door de reciproke waarden van de variantie per decompositiecoëfficiënt, gemeten over alle signalen, dus

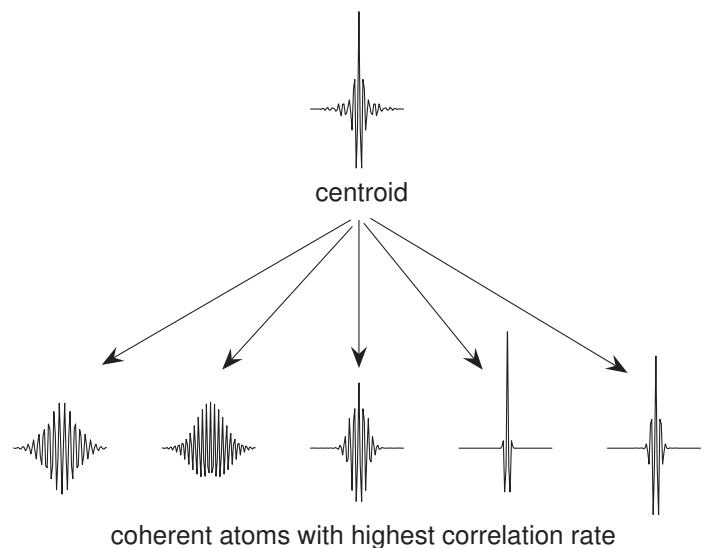
$$\text{var}(c_{\cdot,1})^{-1}, \text{var}(a_{\cdot,1})^{-1}, \dots, \text{var}(t_{\cdot,N})^{-1}.$$

Nemen we nu voor s_i de gemeten Greense functies van het propagatiemodel waargenomen op positie i , dan zullen grote schommelingen in de afstanden tussen $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_{i+1}$ geassocieerd worden met veranderingen in de structuur van de Greense functies. Dit laatste is dan weer te herleiden tot veranderingen in de probleemstelling, in dit geval de bodemstructuur.

Met het Franse onderzoekscentrum *l'Institut de Recherche de l'Ecole Navale* is gewerkt aan een verfijning van de aanpak gebaseerd op een adaptieve afstandsmaat. In plaats van het vergelijken van $4N$ -dimensionale vectoren $\vec{v}_i$ en $\vec{v}_j$, meten we alleen de gewogen afstand tussen de eerste $\max(4N_i, 4N_j)$ kentallen van de featurevectoren. Hiermee voorkomen we dat een decompositie die veel termen nodig heeft de dimensie onnodig hoog opschroeft. Hierdoor zouden bij signalen met 'sparse' representaties decompositietermen met zeer weinig energie-inhoud een relatief grote bijdrage aan de coherentieberekening hebben.

Tree-Based Pursuit

Voordat we bekijken of en hoe de gepresenteerde aanpak in praktijk van nut blijkt te zijn, merken we op dat een redundante bibliotheek van functies voor de decompositie een grote hoeveelheid rekenwerk oplevert bij het zoeken naar de zogenaamde



Figuur 3 Vijf atomen en hun centroide uit een set van geschaalde en gemoduleerde Gaussfuncties

'best passende' atomen. Hiervoor moeten namelijk de inwendige producten van alle aanwezige kandidaatfuncties met het te decomponeren signaal berekend en onderling vergeleken worden. Een aan het Zwitserse *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne* ontwikkeld idee [5] maakt gebruik van een ordening van de atomen met behulp van een boomstructuur, waarbij slechts berekeningen worden gemaakt in een klein aantal takken van de boom. In een dergelijke boomstructuur worden n atomen geïdentificeerd met n bladeren, allen op afstand 1 verbonden aan eenzelfde knoop. Deze knoop, die zelf ook weer blad is van een bovenliggende tak, representeert een atoom uit de bibliotheek met een hoge graad van correlatie ten opzichte van de onderliggende knopen en een lage graad van correlatie ten opzichte van alle andere bladeren (atomen) in de boom. Een dergelijke representatieve knoop noemen we een centroïde. Een voorbeeld van enkele atomen met bijbehorende centroïde is te zien in figuur 3.

De mate van correlatie tussen de bladeren onderling wordt berekend met behulp van de afstandsmaat

$$d(f, g) = \sqrt{1 - \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\|_2 \|g\|_2}}, \quad (8)$$

met $f, g \in L^2(\mathbf{R})$, twee atomen uit de bibliotheek. Idealiter zou een centroïde c in de boom moeten voldoen aan

$$\max d(c, h_{\gamma_m}) \leq \min d(c, h_{\gamma_n}), \quad (9)$$

waarbij h_{γ_m} de onderliggende bladeren van c zijn en h_{γ_n} alle overige functies in de bibliotheek. Als een dergelijke boomstructuur eenmaal gecreëerd is, kan het vinden van 'optimale' atomen $h_{\gamma_0}, h_{\gamma_1}, \dots$ beperkt worden door bijvoorbeeld in (2) alleen de knopen in de boom te beschouwen die door een direct pad met elkaar verbonden zijn. Uiteindelijk blijven er een beperkt aantal bladeren over om het beste atoom h_{γ_n} uit te kiezen. Natuurlijk levert het opzetten van een dergelijke boomstructuur het nodige rekenwerk, echter dit gebeurt slechts éénmalig per bibliotheek. Het totale rekenwerk dat nodig is om telkens weer voor een gegeven signaal een decompositie te verkrijgen, met dezelfde bibliotheek van atomen, wordt hiermee aanzienlijk verkleind [5]. Natuurlijk speelt hierbij wel het aantal bladeren per knoop een grote rol. Enerzijds resulteert een groot aantal bladeren per knoop in een boom met weinig diepte en dus weinig berekeningen voor (2) en volgende, anderzijds zal de kans toenemen dat we op suboptimale atomen $h_{\gamma_0}, h_{\gamma_1}, \dots$ uitkomen. Dit laatste is te wijten aan het feit dat centroïden die meer bladeren moeten vertegenwoordigen minder discriminerend van karakter zullen zijn. Hierdoor kan het gebeuren dat een atoom met de hoogste correlatiegraad ten opzichte van het aangeboden signaal niet bereikt wordt, omdat de bovenliggende knoop een lagere graad van correlatie met het signaal vertoont dan een collega knoop. Aanbevolen wordt een aantal van vier à acht bladeren (atomen) vertegenwoordigd door één centroïde [5].

Terug naar zee

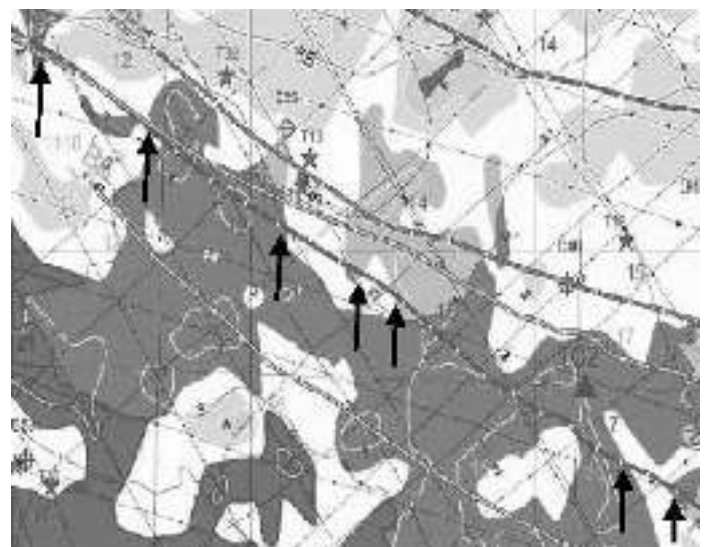
Het ontwikkelde algoritme wordt getoetst aan data verkregen uit experimenten in de buurt van Sicilië daterend van november 1997 verricht door het *NATO Undersea Research Center* (NURC). Geo-

akoestische impulsresponsies van een sonarpuls op vaste positie zijn gemeten aan acht van de bron wegdrijvende boeien voorzien van sensoren. Van 14:00 uur tot na 18:00 uur 's middags is elke minuut aan elke ontvanger de responsie van de puls geregistreerd, leidend tot 254 Greenease functies s_i per boei. Deze boeien volgen, gedreven door de zeestroom, ieder een eigen weg en bestrijken zo een heel gebied. Het algoritme is voor enkele boeien getest, echter we beperken ons hier voor het gemak tot de eerste boei. Deze passeerde diverse sedimenten en sedimentdikten (korrelgrootte zand). In figuur 4 is de route van deze boei te zien als donkere curve van linksboven (14:00 u) naar rechtsbeneden (17:30 uur). De witte punten op de curve representeren een eenheid van tien minuten. De ondergrond bestaat voor dit gebied uit klei/gesteente (donkergrijs) en zand (wit/lichtgrijs). De hier getoonde kaart met zeer hoge spatiale resolutie is verkregen door NURC in 1998 gebruik makend van moderne apparatuur zoals een *Swath multibeam systeem*. De uitgezonden pulsen waren langdurige chirp pulsen met een frequentieband van 0,8 tot 1,6 kHz en werden elke minuut herhaald.

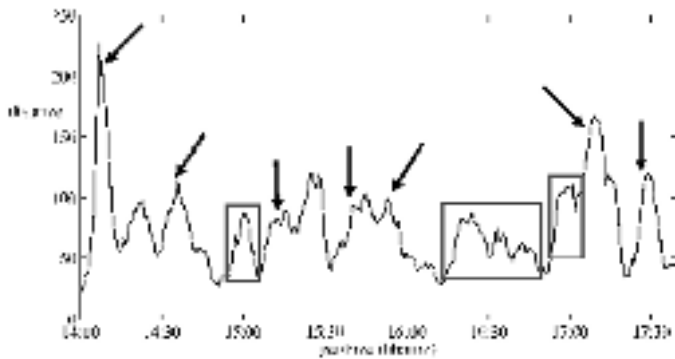
Voor de analyse van de ontvangen pulsen hebben we een verzameling van 450 Gabor-atomen aangemaakt, gebaseerd op de Gaussfunctie, door middel van combinaties van vijftig equidistant gekozen frequenties in het bereik van de pulsen en negen dyadische schalen ($a = 1, 2, 4, \dots, 2^8$). Na het creëren van een boomstructuur voor deze verzameling zijn alle waargenomen responsies s_i voor de betreffende boei geanalyseerd volgens het beschreven algoritme. Hierbij is een stopcriterium gehanteerd voor N_i atomen in de decompositie van elke s_i op basis van een 90% energiecriterium, dat wil zeggen, we nemen de kleinste N_i waarvoor geldt

$$\sum_{n=0}^{N_i-1} |\langle R_n s_i, h_{\gamma_{i,n-1}} \rangle|^2 \geq 0,9 \|s_i\|^2.$$

Voor elke s_i is de $4N_i$ -dimensionale featurevector $\vec{v}_i$ bepaald, die we volgens de adaptieve methode vergelijken met de featurevec-



Figuur 4 Route van boei 1 (donkere curve NW-ZO). De witte stippen op de curve duiden een tijdsinterval van tien minuten aan. De verschillende grijsinten duiden verschillende sedimenten aan, bijvoorbeeld zand (lichtgrijs-wit) en steen (donkergrijs). Dit is een bewerkt figuur uit [1].



Figuur 5 Gemiddelde afstanden tussen opeenvolgende featurevectoren. Pijlen corresponderen met intersedimentale passages in figuur 4.

toren $\vec{v}_j$, $j = i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$. We nemen de gemiddelde afstand van $\vec{v}_i$ tot deze vier burens als indicatie voor bodemsegmentatie, zodat mogelijke verstoringen in de metingen door bijvoorbeeld ruis of leven in zee uitgemiddeld worden. Dit komt de robuustheid van de methode ten goede.

In figuur 5 zijn de gemiddelde afstanden behorend bij de metingen volgens de curve in figuur 4 in de tijd uitgezet. De lokale maxima van de afstandsmaat der featurevectoren corresponderen met intersedimentale overgangen voor zover aangeduid met pijlen. In figuur 4 zijn deze pijlen te vinden op de betreffende overgangen. Verder zijn een aantal waarneembare pieken in de grafiek te herleiden tot intrasedimentale overgangen. Verschillen in

de structuur van een bepaalde bodemsoort leiden tot deze essentiële veranderingen in de Greense functie. Deze intrasedimentale overgangen zijn in figuur 4 terug te vinden als gesloten witte krommen, zoals bijvoorbeeld rechts van de tweede pijl. Het aantal valse alarmeringen in deze set-up bedraagt slechts twee, namelijk de twee pieken rond 14:20 uur en 15:25 uur. Deze pieken zijn wellicht het gevolg van rond de betreffende tijdstippen actieve omgevingsfactoren die ook invloed hebben op de ontvangen puls.

Voor de andere experimenten zijn met deze wiskundige techniek soortgelijke resultaten behaald, hetgeen een zekere mate van robuustheid van de methode garandeert. Natuurlijk is met deze aanpak het inverse probleem ter bepaling van locale structuren niet opgelost, echter het is wel dusdanig vereenvoudigd dat het numeriek sneller oplosbaar is, waardoor het grotere real-time mogelijkheden biedt. Verder is de hier gepresenteerde techniek in een breder kader toepasbaar, namelijk in allerlei soorten systemen waarbij impulsresponsies bekend zijn onder wisselende omstandigheden van het systeem.

Verantwoording De hier gepresenteerde resultaten zijn verkregen door samenwerking met Anthony Auger-Ottavi en Louis le Proux de la Riviere (*Ecole Navale* te Brest) en Jean-Pierre Hermand (*Université Libre de Bruxelles*) en deels ontleend aan [7]. Een bijzonder dankwoord geldt Jean-Pierre Hermand voor het beschikbaar stellen van data en illustratieve figuren, onder andere afkomstig uit [1].

Referenties

- 1 J.-P. Hermand, P. Boni, E. Michelozzi, P. Guerrini, M. Agate, A. Borroso, A. D'Argenio, D. Di Maio, C. Lo Iacono, M. Mancuso, M. Scannavino, 'Geoacoustic inversion with drifting buoys: EnVerse 1997-98 experiments', in: *Proceedings of the Workshop on Experimental Acoustic Inversion Methods for Exploration of the Shallow Water Environment* (A. Caiti, J.-P. Hermand, S. Jesus, M. B. Porter, eds.), Portuguese Foundation for Science and Technology, Kluwer Academic, Dordrecht, June 2000, pp. 263–286.
- 2 P.J. Huber, 'Projection pursuit', *Ann. Stat.* **13**(2) (1985), pp. 435–475.
- 3 M. Jansen, P. Oonincx, *Second Generation Wavelets and Applications*, Springer-Verlag, London, 1995.
- 4 L.K. Jones, 'On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression', *Ann. Stat.* **15**(2) (1987), pp. 880–882.
- 5 P. Jost, P. Vandergheynst, P. Frossard, 'Tree-Based Pursuit', *Technical Report EPFL* (2004.13) (July 2004).
- 6 S. Mallat, Z. Zhang, 'Matching pursuit with time-frequency dictionaries', *IEEE Trans. Sig. Proc.* **41**(12) (1993), pp. 3397–3415.
- 7 P. Oonincx, J.-P. Hermand, 'Gabor Atomic Decomposition of Green's functions for Geoacoustic Inversion', *Proc. IEEE Oceans '05 Europe* (cd-rom), Brest, 2005.
- 8 B. Torresani, 'Wavelets associated with representations of the affine Weyl-Heisenberg group', *J. Math. Phys.* **32** (1991), pp. 1273–1279.

Martinus van Hoorn

Noordersingel 12

9901 BP Appingedam

mc.vanhoorn@planet.nl

Column Lieve Maria

Realistische wiskunde versus abstract denken

Januari 2006 hebben de gezamenlijke studieverenigingen voor wiskunde, natuurkunde en informatica een open brief gestuurd aan minister Van der Hoeven, waarin zij hebben gepleit voor meer en bovendien een ander soort wiskunde op het vwo. De door deze actie ontstane beroering was genoeg aanleiding om op het Nederlands Mathematisch Congres 2006 een discussie te organiseren tussen Kees Hoogland, hoofd kenniscentrum APS, adviseur rekenen, wiskunde en Robbert Dijkgraaf, hoogleraar mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam. Martinus van Hoorn, oudhoofdredacteur van Euclides, hoorde het aan.

Op 28 maart werd tijdens het Mathematisch Congres te Delft een discussie gehouden tussen Robbert Dijkgraaf en Kees Hoogland. Het is goed dat deze discussie plaatsvond: het is goed dat er gepraat wordt tussen de universitaire wiskundigen en de leraren. Dat is in het verleden wel eens anders geweest.

Wat is het probleem?

We kunnen niet zeggen dat het met de wederzijdse interesse ook al goed is. Als het gaat om een geringe instroom bij de wiskundestudie, en om ernstige lacunes in kennis en inzicht van de (te weinige) studenten wiskunde, dan ligt er een gezamenlijk probleem, zou je zo zeggen. Op zijn minst zijn de zorgen gemeenschappelijk. Dat laatste blijkt niet overduidelijk als je argeloos getuige bent van de discussie tussen Dijkgraaf en Hoogland. Het zou zelfs kunnen dat je als argeloos bezoeker de zaal verlaat met het onbestemde gevoel dat er toch niets aan te doen is en dat ieder zijn eigen problemen maar moet zien op te lossen. Dat is natuurlijk jammer. Mag je van zo'n

discussie oplossingen verwachten? Joop Doorman, die de discussie leidde, sprak van een verkennende discussie. Stiekem hoop je toch op enige voorzichtige schreden naar een oplossing. Zelf had ik van de kant van de leraren op een duidelijke erkenning van het probleem gehoopt. (In hoeverre 'de' leraren werden vertegenwoordigd mag onbesproken blijven.) Ik vermoed dat de opstelling van Kees Hoogland wat dit betreft niet uniek was. Zo bezien was het goed dat hij voor de discussie gevraagd was.

Over abstracties en bewijzen

Ik denk dat een genuanceerdere weergave mogelijk was geweest van hoe kinderen wiskunde leren, met open gelaten de mogelijkheid dat oefenen een middel is om tot abstractie te komen. De zaal was per slot van rekening gevuld met mensen die én in hun schooltijd oefenopgaven hadden gemaakt, én tot abstracties waren gekomen. Waarmee een causaal verband weliswaar niet is aangetoond, noch het tegendeel. Abstract denken staat soms in een ongunstig daglicht. Abstraheren kan leerlingen blijkbaar ontmoedigen. Ik moest hierbij denken aan een klein maar fijn boekje, waarin prima uitgelegd wordt dat abstracties de zaken juist kunnen verhelderen [1]. Wat in dit boekje staat geldt mutatis mutandis toch ook voor het voortgezet onderwijs?

Over het bewijzen bleek verschil van opvatting te bestaan. Dijkgraaf wil het algoritmisch aspect van bewijzen benadrukken, met andere woorden vertrouwen opbouwen door de leerling te laten zien dat hij dit gewoon wel kan. Hoogland wees dit af, en benadrukte het belang van redeneren. Ik zou menen dat tussen deze twee opvattingen een brug geslagen kan worden.

Hoe programma's ontstaan

Ik had in de discussie ook wel iets willen horen over dat het wiskundeprogramma voor het voortgezet onderwijs ad hoc tot stand is gekomen, iets wat al meerdere jaren zo is, en waarvan de naamgeving: wiskunde A, wiskunde B, wiskunde C en nu ook wiskunde D op droeve wijze getuigt — wie weet nog wat zulke letters betekenen? Er bestaat blijkbaar geen coherente visie op het programma, over de opbouw die daarin moet zitten, over de didactiek, en dan speciaal over de didactiek van de algebra [2]. Ook hoorden we weinig over de groepen leerlingen om wie het gaat, noch over de vereiste vooropleiding van deze leerlingen. De leerlingen die later niet de bètakant opgaan moeten hierbij juist niet — zoals in de discussie — ongenoemd blijven.

Wat het programma betreft, wiskunde lijkt wel definitief een hulpvak geworden. Dan bepaalt dus ook de hulpvraag het wiskundeaanbod. Door deze oorzaak verdwijnt elke behoefte aan een coherente visie.

Over rekenmachines en software

In de discussie vond ik de uitspraken over het weg-automatiseren van rekenvaardigheden niet geheel bevredigend, om niet te zeggen defaitistisch. Ook hierbij kun je direct vaststellen dat in onderwijsprogramma's geen consensus zit, in dit geval over hoe je met rekenmachines en software zou moeten omgaan. Natuurlijk keren de tijden van weleer niet terug, dat begrijpt iedereen, maar tegen een longitudinale door-denking van de wiskundeprogramma's, inclusief het gebruik van nieuwe hulpmiddelen, kan toch geen bezwaar zijn?

Realistische wiskunde

Aanvankelijk had de term realistische wiskunde, in de aankondiging van de discussie, mij het meest gestoord. Ik weet namelijk niet wat realistische wiskunde in het voortgezet onderwijs is. Je kunt zeggen: dit is de wiskunde zoals die al jarenlang in Nederland wordt gegenereerd. Dit is wiskunde met een expliciete rol voor contexten en modelvorming. Ik ga nu niet in op de kritiek die gehoord wordt op de keuze van contexten. Ik richt mij op die term realistische wiskunde.

Ik ken de term realisme voor de nieuwe generatie methodes voor het basisonderwijs. Daaraan ligt een krachtige visie ten grondslag [3], een visie op het werken met de abacus en dus het bouwen aan het positiestelsel, met schematische bewerkingen die verkort worden tot algoritmen, met schattend rekenen uit het hoofd, met regelmatig zinnige oefeningen om routine te krijgen.

De vraag is interessant hoe het kan dat men in het voortgezet toch klaagt over het niveau van de basisschoolleerlingen. Ik vermoed dat veel leerlingen de leiding van doorgewinterde onderwijzers ontberen, een leiding die mijns inziens altijd nodig is. Ik vermoed heel sterk dat hier de schoen wringt. Rekenmethodes zijn niet *teacher proof*, dat was ook al veel langer bekend.

De rekenmethodes voor het basisonderwijs verdienen mijns inziens de ere naam *realistisch*. De wiskundeprogramma's voor het voortgezet onderwijs mogen van mij dan niet deze naam hebben, om de simpele reden dat zij niet gebaseerd zijn op een doorslaggevende coherente visie, terwijl een longitudinale doordenking ontbreekt. Het is de vraag of zij een andere naam verdienen dan wiskunde A t/m D.

Haast geboden

Het is zeker niet eenvoudig om voor het voortgezet onderwijs wiskundeprogramma's op te stellen die gebaseerd zijn op een aantal duidelijke, consequent aangehouden uitgangspunten. Het is sowieso gemakkelijker te bedenken wat er op de basisschool moet gebeuren, met name welke onderwerpen daar de revue moeten passeren. De leerlingen in het voortgezet onderwijs vormen bovendien een veel meer heterogene groep. De meesten van hen gaan geen bètavak studeren, en dat hoeven ze ook niet. Zeg dan maar eens wie welke wiskunde moet hebben. Maar universitaire wiskundigen en wiskundeleraars kunnen volgens mij heel goed met elkaar bespreken wat ze moeten bespreken. Wel is enige haast geboden, want de generatie van de leraren die de aloude algebra nog zelf op school hebben gehad is inmiddels vijftigplus [4].

Noten

1 Timothy Gowers, *De kortste introductie wiskunde*, Utrecht 2003 (vertaling Jan Willem Nienhuys). Oorspronkelijk: *Mathematics, a very short introduction*, Oxford 2002. Besproken, tegelijk met twee andere uitgaven, door Jan van de Craats in *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5(7) (maart 2006), pp. 57–59.

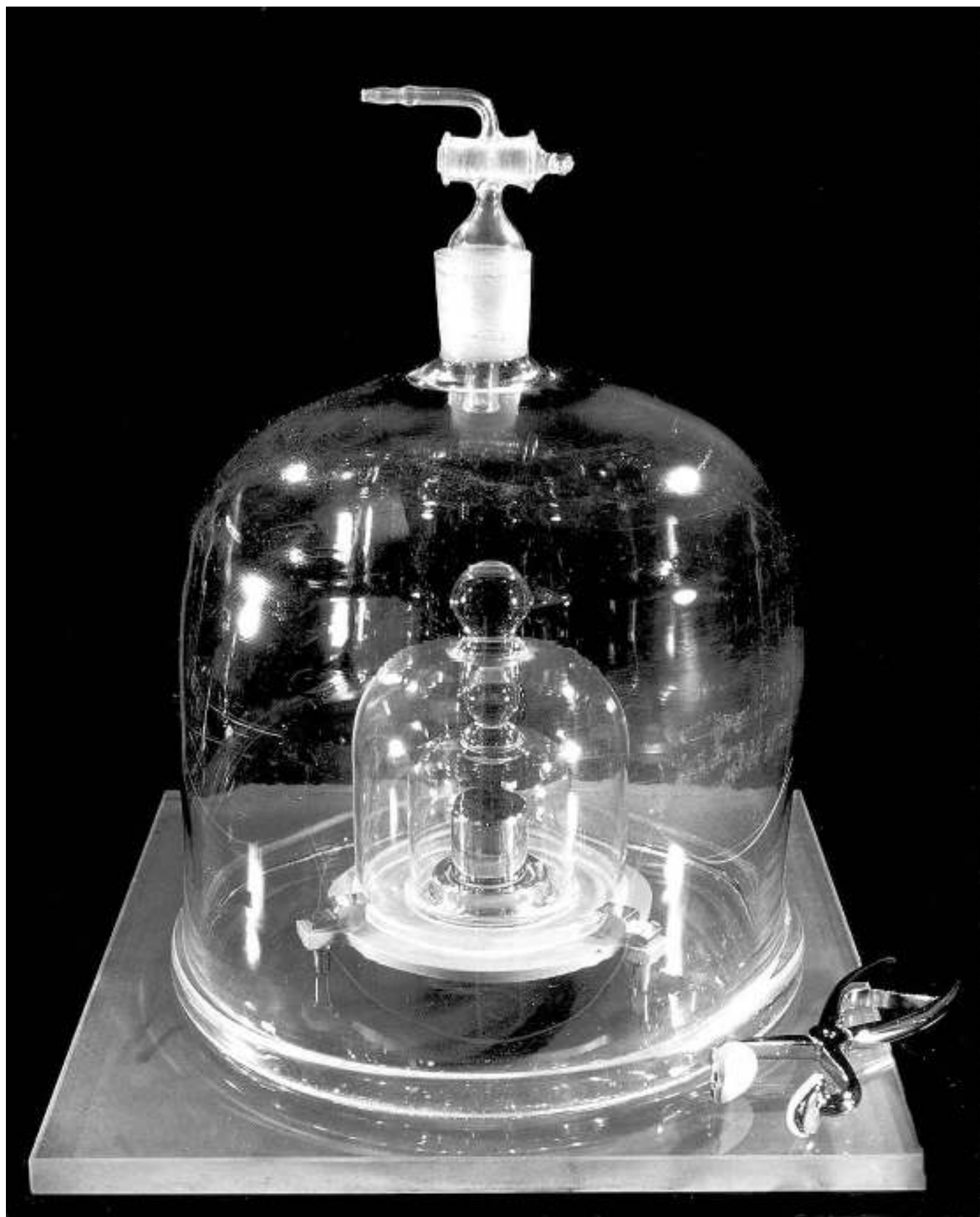
2 Een nuancering is hier nodig. Anne van

Streun toont een visie op het wiskunde-onderwijs, onder meer in de vorm van weloverwogen minimeisen. Zie zijn artikelenreeks "t Denken bevorderen" in *Euclides* 77 (2001–2002), pp. 348–349, en *Euclides* 78 (2002–2003), pp. 22–24, 106–107, 128–129, 226–227, 278–281.

3 Hetgeen in zeer sterke mate te danken is aan

Adri Treffers cum suis. Al vanaf de jaren zeventig werd een visie doordacht en geformuleerd, en (heel belangrijk) steeds geactualiseerd. Op de pabo's is zij echter genegeerd door aldaar vakinhoud en vakdidactiek als bijzaken te presenteren.

4 Deze observatie dank ik aan Swier Garst.



Sandjai Bhulai

Corresponderend auteur 'Weegschema's'
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
sbhulai@few.vu.nl

Marco Bijvank

Corresponderend auteur 'Drinkwater'
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
mbijvank@few.vu.nl

Misja Nuyens

Corresponderend auteur 'Selectie-effecten'
Faculteit der Exacte Wetenschappen
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081
1081 HV Amsterdam
mnuyens@few.vu.nl

Studiegroep wiskunde met de industrie

Brainstormen voor bruikbare wiskunde II

De studiegroep Wiskunde met de Industrie laat zien hoe bruikbaar wiskunde al dan niet is voor de samenleving. Hoe kunnen wiskundige disciplines commercieel worden ingezet, wat hebben we aan de nieuwste ontwikkelingen in de statistiek, wat is de betekenis van de steeds maar groeiende kennis van het modelleren met differentiaalvergelijkingen? Voor deze betekenis van wiskunde moet steeds opnieuw worden gestreden. Het kan zelfs voorkomen dat een oplossing wel bestaat, maar domweg te ingewikkeld is om door een bedrijf geaccepteerd te worden. In ieder geval levert wiskundige common sense een waardevolle alternatieve invalshoek aan bedrijven.

In dit tweede deel van het verslag van de studiegroep wiskunde met de industrie 2005 worden problemen aangeleverd door het Nederlands Meetinstituut, de KLM en het Forensisch Instituut besproken. Het eerste deel verscheen in het maartnummer.

Optimale weegschema's (Sandjai Bhulai)

De kilogram is de laatste fysische grootte die nog gedefinieerd is in termen van een tastbaar object: het is de massa van een platinum-iridium cilinder, vervaardigd in 1889, die bij het Bureau des Poids et des Mesures in Frankrijk bewaard wordt. Om precies te zijn is de kilogram gedefinieerd als de massa van dit object net nadat het gewassen is. Platinum-iridium absorbeert koolhydraten uit de atmosfeer, waardoor de cilinder regelmatig gewassen moet worden om het gewicht te verwijderen dat erop neergeslagen is.

In Nederland is het Nederlands Meetinstituut (NMI) in letterlijke zin verantwoordelijk voor de kilogram: de Nederlandse standaardkilogram, de platinum-iridium cilinder nummer 53, wordt op NMI terrein onder zorgvuldig gereguleerde omstandigheden bewaard.

De cilinder reist af en toe naar Parijs om daar vergeleken te worden met de internationale standaard. Uiteraard draagt het NMI zorg voor meer dan alleen de veilige opslag van de kilogram: de afdeling 'massameting' is, onder meer, ook verantwoordelijk voor zeer nauwgezette kalibratie van gewichten.

Figuur 1 De platinum-iridium cilinder die precies 1 kilogram definieert. De kilogram is opgeslagen bij het Bureau des Poids et des Mesures in Frankrijk.

Deze gewichten worden gebruikt om de massa's van gewichten van lagere standaarden te bepalen, die bijvoorbeeld door supermarkten gebruikt worden om hun weegschalen te kalibreren, of door doping laboratoria, waar zeer kleine massa's met grote nauwkeurigheid vastgesteld moeten worden.

Voor de kalibratie van gewichten gebruikt het NMI gewichten van roestvrij staal, waarvan de massa's met zeer grote nauwkeurigheid bepaald moeten worden. Om resultaten met voldoende precisie te verkrijgen, moeten de metingen gecorrigeerd worden voor effecten als de opwaartse luchtdruk en de verschillen in de positie van het massamiddelpunt voor verschillende gewichten!

Het probleem

De Nederlandse kilogram wordt gebruikt als startpunt in het bepalen van de massa's van de gewichten van de hoogste kwaliteit roestvrij staal: eerst wordt de massa van een roestvrij stalen kilogram bepaald door directe vergelijking met de nationale standaard. In de tweede stap wordt de twee roestvrij stalen kilogram gebruikt en niet de nationale platinum-iridium kilogram, opdat externe invloeden minimaal effect hebben op de nationale standaard. De roestvrij stalen kilogram wordt vervolgens gebruikt om een roestvrij stalen set van gewichten te kalibreren bestaande uit een gewicht met nominale massa van 500 gram, twee van 200 gram en twee van 100 gram, zodat de honderdvouden van 1000 gram naar 100 gram gedekt zijn. Het verschil tussen de nominale massa en de echte massa van de gewichten is extreem klein. De gewichten van deze set worden vervolgens gebruikt om massa's van andere sets met andere ranges te bepalen.

Om de massa van een individueel gewicht te bepalen, kunnen we het vergelijken met het standaardgewicht met gelijke nominale massa waarvan de feitelijke massa bekend is met voldoende nauwkeurigheid – tenzij we natuurlijk de massa op het hoogste niveau van precisie willen bepalen. Massa-metrologieinstituten gebruiken zogenaamde *weegschema's* om dit probleem op te lossen. Een weegschema voor de set van gewichten van 1000g naar 100g van het NMI bestaat uit paren van combinaties van gewichten uit de collectie van de 6 gewichten. Een schema kan bijvoorbeeld een vergelijking van een van de 200g gewichten met de twee

100g gewichten in zich hebben. Voor elk paar in het schema worden de verschillen in massa tussen de twee paren bepaald door middel van de STS-procedure, die hieronder beschreven zal worden. Om voldoende precisie te garanderen, worden de paren in een weegschema zo gekozen dat ze gelijke nominale massa hebben.

Het is in theorie mogelijk om de vijf onbekende massa's te bepalen door vijf geschikte metingen van massaverschillen uit te voeren. In de praktijk worden er echter meetfouten gemaakt en moeten er meer metingen —niet noodzakelijk allemaal met verschillende combinaties van gewichten— verricht worden om tot nauwkeurigere schattingen van de ware massa's te komen. De schattingen van de massa's van de gewichten en de onzekerheid in deze massa's kunnen verkregen worden uit een overbepaald stelsel met behulp van de kleinste-kwadratenanalyse.

Gedurende de 'Studiegroep Wiskunde met de Industrie', werd de volgende vraag door het NMI gesteld:

Wat is een optimaal weegschema voor de set van gewichten van het NMI, dat wil zeggen, een weegschema dat de onzekerheid in de geschatte massa's minimaliseert onder de voorwaarde dat het aantal metingen kleiner is dan een gegeven getal?

De STS-procedure

Zoals eerder vermeld is, wordt voor elk paar in een weegschema het verschil in massa bepaald door middel van de STS-procedure. Neem, om de STS-procedure te illustreren, twee sets van gewichten met ongeveer dezelfde massa. De balans om de massaverschillen te meten is een balans met enkelvoudige arm, waarmee het massaverschil tussen twee sets gewichten als volgt bepaald wordt. De eerste set, die we de standaardset (S) noemen, wordt geplaatst op de balans, die daarna op 0 wordt gesteld. De set S wordt verwijderd, en daarna nog eens op de balans geplaatst, waarna de eerste meting, x_0 , afgelezen wordt.

Helaas is x_0 in het algemeen niet gelijk aan nul; in de praktijk wordt er een drift geobserveerd tussen opeenvolgende metingen, ook worden er meetfouten gemaakt. Vervolgens wordt de set S verwijderd en de tweede set, die we de testset (T) noemen, wordt op de balans geplaatst, waarna de tweede meting, x_1 , afgelezen wordt. De metingen worden nu door S en T te alterneren voorgezet; dit verklaart de naam *STS-procedure*. Als de drift niet al te wild fluctueert tussen opeenvolgende metingen, dan kan dit geëlimineerd worden door gebruik te maken van de STS-procedure.

De metingen worden zo veel mogelijk herhaald om tot betrouwbare resultaten te komen. In de huidige opstelling die het NMI nu gebruikt, worden de gewichten handmatig op elkaar gestapeld, wat een tijdrovende procedure is. In de praktijk is het daarom zelden mogelijk om meer dan twintig metingen te verrichten zonder onderbrekingen.

Optimale weegschema's

Na het modelleren van de STS-metingen kunnen de optimale weegschema's voor de set van gewichten van het NMI bepaald worden. De balans in de STS-procedure kan gebruikt worden om nauwkeurig hele kleine verschillen in massa's te meten, maar kan niet met voldoende precisie voor grote massaverschillen gebruikt worden. Dit impliceert dat de test en de standaardmassa's in een STS-meting dezelfde nominale massa moeten hebben, wat een sterkte restrictie in het aantal mogelijke combinaties met zich

Het modelleren van STS-metingen

Stel dat we $k + 1$ STS-metingen verrichten met de sets S , met massa m_S , en T , met massa m_T . Laat x_i de i -de meting zijn, voor $0 \leq i \leq k$. We veronderstellen dat

$$x_i = 1_{\{i \text{ oneven}\}}(m_T - m_S) + D(i) + V_i,$$

waar V_i een meetfout is, die we proportioneel aan de totale massa op de balans veronderstellen. Om precies te zijn nemen we aan dat V_i normaal verdeeld is met parameters

$$V_i \sim N(0, \alpha^2 m_S^2),$$

waarbij $\alpha \in \mathbf{R}$ een onbekende constante is. De term $D(i)$ beschrijft de drift van de balans. We gaan er vanuit dat

$$\frac{D(i+1) + D(i-1)}{2} - D(i) \approx 0,$$

voor alle $1 \leq i \leq k-1$, wat consistent is met aannamen die doorgaans door het NMI gemaakt worden. Aan deze eis wordt natuurlijk voldaan wanneer D lineair is.

Definieer voor $1 \leq i \leq k-1$

$$\Delta\mu_i = \frac{(-1)^{i+1}}{m_S} \left(x_i - \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} \right) \approx \frac{m_T - m_S}{m_S} + E_i,$$

waarbij

$$E_i = \frac{1}{m_S} \left(V_i - \frac{V_{i+1} + V_{i-1}}{2} \right) \sim N(0, \alpha^2),$$

onafhankelijk van m_S . Observeer dat, gebruikmakend van (2), de drift geëlimineerd wordt.

In de procedure die nu door het NMI gebruikt wordt, wordt het gemiddelde van de $\Delta\mu_i$ gebruikt als een benadering voor $\frac{m_T - m_S}{m_S}$. We stellen een procedure voor die deze tussenliggende stap overbodig maakt.

meebrengt. In feite zijn er voor de set van gewichten van het NMI slechts tien mogelijke combinaties (of: *weegvergelijkingen*) mogelijk. Deze worden in tabel 1 weergegeven.

Bij een gegeven weegschema kan er een reeks van STS-metingen worden gedaan voor elke weegvergelijking in het schema. Zodoende krijgen we een reeks van $\Delta\mu_i$, zoals gedefinieerd in (3), voor elk van deze combinaties. De $\Delta\mu_i$ kunnen gecombineerd worden in een standaard lineair model. Met behulp van statistische technieken kan er een schatting gegeven worden van de ware massa's van de gewichten uitgedrukt in de gemeten waarden van de $\Delta\mu_i$, alsmede een schatting van de onzekerheid. In deze procedure worden de $\Delta\mu_i$ gebruikt, en niet het (ongewogen) gemiddelde, zoals in de huidige procedure bij het NMI gedaan wordt. Deze aanpassing leidt tot betere schattingen.

Veronderstel nu dat we een optimaal schema willen berekenen-

Weegvergelijking	Standaard	Test
1	1000	500, 200, 200●, 100
2	1000	500, 200, 200●, 100●
3	500	200, 200●, 100
4	500	200, 200●, 100●
5	200, 100	200●, 100●
6	200, 100●	200●, 100
7	200	200●
8	200	100, 100●
9	200●	100, 100●
10	100	100●

Tabel 1 Mogelijke combinaties van gewichten in nominale massa's genoteerd. De notatie 200 en 200● wordt gebruikt om het onderscheid tussen de twee gewichten met nominale massa 200g te maken. Analooft geldt dit ook voor de twee gewichten met nominale massa 100g.

en met een gegeven aantal weegvergelijkingen, die niet allemaal noodzakelijkerwijs verschillend zijn: een meting herhalen van dezelfde vergelijking in een weegschema kan nuttig zijn, omdat herhalingen extra, onafhankelijke informatie verschaffen. Als deze vergelijkingen uit tabel 1 moeten komen, dan is het aantal weegschema's bestaande uit N vergelijkingen begrensd door 10^N (deze grens is uiteraard niet scherp). Het gevolg hiervan is dat het mogelijk is om de onzekerheid in de massa's van de gewichten door te rekenen voor alle mogelijke weegschema's bestaande uit maximaal 14 vergelijkingen —het maximum aantal opgelegd door het NMI— met behulp van Matlab op een gewone computer.

Het huidige weegschema van het NMI kent acht weegvergelijkingen gelezen uit de tien mogelijkheden in tabel 1. De door het NMI gebruikte vergelijkingen zijn

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.$$

Het is onduidelijk hoe dit weegschema, dat dateert uit een tijd waarin alle mogelijke schema's doorrekenen niet mogelijk was, tot stand is gekomen. Met behulp van de hedendaagse moderne computers is het mogelijk om aan te tonen dat dit schema niet optimaal is. Dus het is mogelijk een ander weegschema met acht weegvergelijkingen te construeren zodanig dat de onzekerheid in

de geschatte massa's van de gewichten kleiner is. Tabel 2 geeft de optimale schema's bestaande uit N combinaties ($8 \leq N \leq 14$) weer, waarbij aangenomen wordt dat voor elke weegvergelijking er twintig STS-metingen verricht worden.

N	optimaal weegschema
8	1, 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10
9	1, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
10	1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
11	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10
12	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 10
13	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 9, 10, 10
14	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9, 10, 10

Tabel 2 Optimaal weegschema bestaande uit vergelijkingen uit tabel 1

De onzekerheid in het weegschema van het NMI is $1.1812\alpha^2$, waarbij α de constante is in (1), terwijl de onzekerheid in het optimale schema met 8 vergelijkingen $0.8468\alpha^2$ is. Dit betekent dus dat er een reductie van ongeveer 28% in onzekerheid bewerkstelligd kan worden zonder extra metingen te verrichten. Als het aantal weegvergelijkingen in het schema verhoogd wordt tot 14, wat overigens extra werk met zich meebrengt, dan kan de onzekerheid tot $0.4655\alpha^2$ teruggebracht worden, een reductie van ongeveer 63%. Zoals wel te verwachten is, neemt de onzekerheid af naarmate het aantal weegvergelijkingen in het schema toeneemt.

Het is opvallend dat in geen van de optimale schema's de vergelijkingen 5 en 6 voorkomen, de enige vergelijkingen waarbij de standaardset uit meer dan één gewicht bestaat. Het schema van het NMI bevat deze vergelijkingen wel. In feite bevat geen enkele oplossing binnen 1% van de optimale de vergelijkingen 5 en 6, wat impliceert dat dit geen effect van afrondingsfouten is. In plaats van de vergelijkingen 5 en 6, bevat het optimale schema vergelijkingen 7 en 10. Het is eenvoudig na te gaan dat deze samen dezelfde informatie verschaffen als de vergelijkingen 5 en 6 samen. In praktische situaties leidt dit tot een reductie in onzekerheid, vanwege het feit dat vergelijkingen 7 en 10 minder opstapelingen van gewichten vereisen.

Het verhogen van het aantal weegvergelijkingen is niet de enige manier om de onzekerheid te reduceren in de schattingen van de ware massa's. In de nabije toekomst stapt het NMI over op automatische balansen die de STS-metingen minder afhankelijk maken van handmatige procedures. Bovendien kunnen er zo ook meer metingen verricht worden in een STS-serie.

Het verhogen van het aantal STS-metingen per weegvergelijking kan effectiever zijn dan het verhogen van het aantal weegvergelijkingen: het optimale schema bestaande uit tien vergelijkingen met dertig STS-metingen per vergelijking heeft een kleinere onzekerheid ($0.4358\alpha^2$) dan het schema met twaalf vergelijkingen en 25 STS-metingen ($0.4458\alpha^2$). In beide gevallen is het aantal metingen in totaal driehonderd. Het verhogen van het aantal STS-metingen per weegvergelijking is echter niet altijd de beste aanpak: 10×28 STS-metingen leiden tot betere schattingen dan 8×35 metingen.

Andere sets van gewichten

Verschillende massa-metrologieinstituten gebruiken verschillende sets van gewichten. Het resultaat voor de set van ge-



Figuur 2 Het wassen van de platinum-iridium cilinder (uit: Davis R.S., Possible new definitions of the kilogram, Phil. Trans. Royal Soc. A, 2005, 363, 2249-2264)

wichten van het NMI, dat bestaat uit gewichten met nominale massa 1000g, 500g, 200g (tweemaal) en 100g (tweemaal), kan gegeneraliseerd worden naar sets die door andere massametrologieinstituten gebruikt worden. Het Duitse metrologieinstituut gebruikt bijvoorbeeld een set bestaande uit acht gewichten met 104 mogelijke combinaties. Het berekenen van de onzekerheid voor alle mogelijke schema's was te tijdrovend om binnen de studiegroep door te rekenen. Echter, gebaseerd op de inzichten met de Nederlandse weegschema's werd er besloten om alleen de weegvergelijkingen mee te nemen waarbij de testset uit een enkel gewicht bestond. Het optimale schema in deze vereenvoudigde setting had een onzekerheid die ongeveer 28% kleiner was dan die van het corresponderende schema in gebruik.

Conclusie

Het weegschema dat door het NMI gebruikt wordt is suboptimaal. Door over te gaan naar een ander weegschema, kan de onzekerheid in de massa's van de nationale standaardgewichten gereduceerd worden met ongeveer 63%. Dit weegschema gebruikt weliswaar meer metingen dan het huidige schema. Indien de hoeveelheid werk gelijk gehouden wordt, dan kan er een reductie van 28% gerealiseerd worden.

Het onderzoek waarover dit artikel rapporteert, is uitgevoerd door Sandjai Bhulai, Thomas Breuer, Eric Cator en Fieke Dekkers. Onze dank gaat uit naar Inge van Andel van het NMI voor de door haar geleverde informatie.

Selectie-effecten in de forensische wetenschap (Misja Nuyens)

Op het slachtoffer van een misdrijf treft men een rode vezel aan. Nadat de politie een verdachte heeft aangehouden, wordt er een rode trui in zijn klerenkast aangetroffen. De trui en de vezel worden vervolgens naar het forensisch laboratorium gebracht. Daar wordt gecontroleerd of ze van hetzelfde materiaal zijn en zo ja, hoe sterk dit bewijsmateriaal is. Een heel zeldzame trui zou namelijk als sterker bewijsmateriaal moeten gelden dan een die bij een grote kledingzaak is gekocht. Maar hoe hangt de sterkte van het bewijsmateriaal af van de omstandigheden waarin de trui is gevonden? Is het bewijsmateriaal bijvoorbeeld sterker als de verdachte geen andere truien in zijn kast had hangen, of maakt dat niet uit?

Dit is een voorbeeld van de volgende vraag die door het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) werd gesteld aan de Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2005: moet de forensisch expert weten op wat manier het bewijsmateriaal is geselecteerd? Deze vraag is ook relevant wanneer iemand verdacht wordt wanneer zijn of haar DNA in een DNA-database zit en overeenkomt met een stukje DNA dat op de plaats van een misdrijf is gevonden. Zulke DNA-databases bevatten natuurlijk niet het DNA van de hele bevolking, maar maakt dat wat uit?

Op dit moment wordt in zaken waar vezels als bewijsmateriaal worden gebruikt geen rekening gehouden met de manier waarop het bewijsmateriaal is verzameld. Dit is verontrustend, omdat het intuïtief duidelijk lijkt dat een match tussen de vezel en een verdachte die weinig truien heeft sterker bewijsmateriaal is dan een match met een 'truienzamelaar'. Als dit inderdaad waar is, dan zouden statistische correcties gemaakt moeten worden wanneer dit soort bewijsmateriaal in de rechtzaal wordt gepresenteerd. De NFI-expert die de zaak behandelt, is echter in het

algemeen geen statisticus. Hij heeft de mogelijkheid om de hulp van een statisticus in te roepen, maar doet dat alleen als hij dat noodzakelijk vindt. De vraag die aan de Studiegroep werd gesteld kan daarom gezien worden als een vraag om hulp in situaties die eenvoudig lijken, maar eigenlijk statistische correcties verlangen.

In dit stukje illustreren we hoe kansrekening gebruikt kan worden om de sterkte van bewijsmateriaal te beoordelen. We maken een heel simpel model voor een vezel-match, en trekken daar een aantal conclusies uit. Uiteraard is elk model ver verwijderd van de realiteit, en moet men erg oppassen met het toepassen van theoretische resultaten op situaties in de echte wereld. Het is helemaal gevaarlijk wanneer statistiek wordt gebruikt om te bewijzen dat een misdaad heeft plaatsgevonden, zie [3]. Desondanks geloven we dat ons simpele model ons iets kan vertellen over hoe de selectie van bewijsmateriaal de sterkte van dit bewijsmateriaal kan beïnvloeden.

De waarde van bewijsmateriaal beoordelen met kansrekening

Tijdens een rechtzaak moet de forensisch expert de sterkte van het bewijsmateriaal beoordelen. Een gedeelte van het bewijsmateriaal kan met de verdachte in verband worden gebracht (dit geven we aan met E). De vraag is of de verdachte dit materiaal zelf heeft achtergelaten (deze gebeurtenis geven we aan met H), of dat de relatie tussen de verdachte en het bewijsmateriaal toevallig is. Deze gebeurtenis is het complement van H : H^c . De forensisch expert wordt verzocht om een zogenaamd aannemelijkheidquotiënt (Engels: *likelihood ratio*) te rapporteren: de kans op het bewijsmateriaal gegeven dat de verdachte schuldig is, gedeeld door de kans op het bewijsmateriaal gegeven dat de verdachte onschuldig is:

$$LR = \frac{P(E|H)}{P(E|H^c)}.$$

Het is verleidelijk om te denken dat een groot aannemelijkheidquotiënt impliceert dat de verdachte schuldig is, maar dit is in het algemeen niet waar. We zijn dan ook niet geïnteresseerd in het aannemelijkheidquotiënt zelf, maar in de kans dat de verdachte schuldig is gegeven dat het bewijsmateriaal overeenkomt, $P(H|E)$. Natuurlijk hebben deze twee met elkaar te maken: met regel van Bayes kunnen we $P(H|E)$ als volgt uitrekenen in termen van het aannemelijkheidquotiënt:

$$P(H|E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)}.$$

Wanneer we de teller en noemer delen door $P(E|H)P(H)$, krijgen we

$$P(H|E) = \left(1 + \frac{P(H^c)}{P(H)} \frac{P(E|H^c)}{P(E|H)}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{P(H^c)}{P(H)} \frac{1}{LR}\right)^{-1}.$$

De kans $P(H|E)$ heet een *posteriori kans*, $P(H)$ en $P(H^c)$ heten *a priori kansen*. De rechter heeft schattingen van deze laatste nodig om een idee te krijgen van $P(H|E)$.

Het truiemodel

We gaan nu een heel simpel model bouwen voor de in de inleiding beschreven situatie van een gevonden vezel. Veronderstel

dat we weten dat er een gebeurtenis heeft plaatsgevonden waarbij een onbekend persoon (de *donor*) een vezel van zijn trui heeft achtergelaten op een andere persoon (het *slachtoffer*). Het moment waarop de vezel werd overgedragen heet het transfermoment. Het type vezel noemen we Y en er zijn geen andere vezels op het slachtoffer gevonden. Om de donor te vinden, onderzoeken we de truien in de kast van een willekeurig persoon (de *verdachte*). Daar vinden we een trui gemaakt van hetzelfde type vezel.

We willen nu de kans uitrekenen dat de verdachte daadwerkelijk de donor van de vezel op het slachtoffer is, gegeven het bewijsmateriaal. De vraag is nu hoeveel we moeten weten van het gevonden bewijsmateriaal: volstaat het om te weten dat een van de truien in de kast van de verdachte overeenkwam met de vezel op het slachtoffer? Of moeten we bijvoorbeeld ook weten hoeveel truien de verdachte in zijn kast had?

Om de kans uit te rekenen dat de verdachte de donor was, nemen we aan dat de relatieve frequentie waarmee de hele bevolking truien draagt die bestaan uit vezels van type Y geschat kan worden op g_Y ; de kans dat de verdachte een trui aanhad van dit type noemen we f_Y . Tenslotte nemen we aan dat niemand truien heeft verborgen of weggegooid en dat alle truien uit één vezeltype bestaan.

We schrijven E_1 voor de gebeurtenis dat de vezel op het slachtoffer van type Y is, en E_2 voor de gebeurtenis dat we een vezel van type Y in de kast van de verdachte vinden. De gebeurtenis dat de verdachte de donor van de vezel op het slachtoffer is noemen we H . We nemen ook aan dat E_2 en H onafhankelijk zijn. Zoals uitgelegd in de vorige paragraaf, kunnen we nu $P(H|E_1 \cap E_2)$ uitrekenen:

$$\begin{aligned} P(H|E_1 \cap E_2) &= \left(1 + \frac{P(H^c)}{P(H)} \frac{P(E_1 \cap E_2|H^c)}{P(E_1 \cap E_2|H)}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{P(H^c)}{P(H)} \frac{P(E_2|H^c)P(E_1|H^c \cap E_2)}{P(E_2|H)P(E_1|H \cap E_2)}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{P(H^c)}{P(H)} \frac{P(E_2)g_Y}{P(E_2)f_Y}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{P(H^c)}{P(H)} \frac{g_Y}{f_Y}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

We zien dat als g_Y klein is (type Y vezels zijn zeldzaam), dan is $P(H|E_1 \cap E_2)$ relatief groot. Verder, als f_Y klein is (de verdachte draagt zijn trui met type Y vezels niet vaak), dan is $P(H|E_1 \cap E_2)$ klein. In het speciale geval dat de verdachte k truien heeft en die even vaak draagt, krijgen we $f_Y = 1/k$. We zien dan dat hoe meer truien de verdachte heeft, hoe kleiner de kans is dat hij de donor is. Dat lijkt redelijk: een persoon die duizend truien heeft, loopt een grote kans dat een van zijn truien overeenkomt met de vezel op het slachtoffer, maar de sterkte van die match is natuurlijk niet erg groot.

Conclusies

In ons basale truimodel hebben we laten zien dat veel dingen gerapporteerd zouden moeten worden om het bewijsmateriaal goed te kunnen interpreteren. Niet alleen dat er een trui in de kast van de verdachte is gevonden die overeenkomt met een vezel op de plaats van de misdaad, maar bijvoorbeeld ook hoeveel truien hij in zijn kast had, en eigenlijk ook hoe vaak de verdachte die bepaalde trui draagt.

Hoewel ons model ver van realistisch was, is het duidelijk dat informatie over de manier waarop bewijsmateriaal is vergaard zo compleet mogelijk moet zijn. Alle informatie moet in een groot model gestopt worden, net als al het bewijsmateriaal dat gunstig is voor de verdachte. We realiseren ons dat we zelfs in dat geval slechts een model hebben, en dat elk model tot veel discussies aanleiding zal geven.

We concluderen dat selectie-effecten in de forensische wetenschap een belangrijke rol spelen en dat de moeite gedaan zou moeten worden om de statistische interpretatie van bewijsmateriaal in de rechtzaal te verbeteren.

Wiskundigen die aan dit onderzoek werkten: Geert Jan Franx, Yves van Gennip, Peter Hochs, Misja Nuyens, Luigi Palla, Corrie Quant en Pieter Trapman.

Planning van drinkwater voor vliegtuigen (Marco Bijvank, Maarten Soomer)

Tijdens een vlucht wordt er drinkwater gebruikt voor consumpties en voor het doorspoelen van de toiletten. Het management van de Nederlandse luchtvaartmaatschappij KLM wil dat er genoeg drinkwater aan boord is op hun vluchten. Daarentegen willen ze ook niet te veel water meenemen omdat dit, vanwege het gewicht, hogere kerosine kosten met zich meebrengt.

Voor een vlucht wordt de watertank van het vliegtuig gevuld. De apparatuur waar dit mee gebeurt, heeft alleen de mogelijkheid de tank te vullen tot een veelvoud van achtsten van de tank. De hoeveelheid water wordt van te voren bepaald aan de hand van de bestemming en het aantal passagiers van de vlucht. Overtollig water wordt na de vlucht uit de watertank geloosd. Het doel van dit onderzoek is om een optimale hoeveelheid water te bepalen waarmee het vliegtuig moet vertrekken. Er moet aan het eind van de vlucht zo weinig mogelijk water over zijn en tegelijkertijd moet de kans op een watertekort tijdens de vlucht erg klein zijn. Om het laatste vast te stellen moet er een geschikte definitie voor het serviceniveau worden gevonden.

Om een optimale hoeveelheid drinkwater te bepalen, maken we gebruik van historische data. Deze gegevens hebben helaas een aantal nadelen. Voordat het vliegtuig opstijgt, leest de purser het waterniveau van een display in de cabine. In de meeste vliegtuigen heeft deze display maar acht markeringen, waardoor het moeilijk is de exacte hoeveelheid water af te lezen. Daarom wordt deze waarde door de purser afgerond naar de dichtstbijzijnde markering. Omdat de tank ook gevuld wordt in achtsten beschouwen we deze waarde als exact. Na de landing wordt het watervolume weer genoteerd. Ook deze waarde is weer afgerond (en kan niet als exact worden beschouwd). Verder bevatten de datarecords gegevens over het type van het vliegtuig, het aantal passagiers, het vertrekpunt en de bestemming, de vertrektijd en vliegduur van de vlucht. De vraag is nu wat voor invloed de afgeronde data hebben en hoe dit verwerkt moet worden in het model.

Data-analyse

Op dit moment gebruikt de KLM de historische data van vluchten met hetzelfde beginpunt en dezelfde bestemming, om het waterverbruik op een bepaalde vlucht te schatten. Het is interessant om te onderzoeken of vluchten met een ander beginpunt of bestemming, toch een vergelijkbaar patroon in waterverbruik heb-

ben. Als dit het geval is, kunnen de data van vluchten geclusterd worden en kan er dus een betrouwbaardere schatting worden gegeven.

Voor de meeste bestemmingen is er een duidelijke correlatie tussen de bestemming en het waterverbruik per passagier. Dit betekent dat deze vluchten niet hetzelfde patroon in waterverbruik hebben. Vluchten met dezelfde vliegduur kunnen ook niet samengenomen worden. Alleen tussen een aantal vluchten naar dezelfde regio, zoals vluchten van Amsterdam naar Aruba en van Amsterdam naar Bonaire, kon geen onderscheid worden gemaakt. De data van deze vluchten kunnen dus gecombineerd worden om de waterhoeveelheid te bepalen.

Service Level

De huidige definitie van service level, die de KLM hanteert, is het percentage vluchten (met hetzelfde beginpunt en dezelfde bestemming) dat genoeg drinkwater aan boord heeft. Een service level van 95% betekent dus dat er op ten hoogste 5% van die vluchten een watertekort is. Dit betekent echter niet dat de kans voor een passagier om geconfronteerd te worden met een watertekort ook maar 5% is. Als een watertekort een structureel probleem is op vluchten met veel passagiers, dan heeft een passagier in een druk vliegtuig een grotere kans om met een watertekort geconfronteerd te worden. Dit is de reden dat wij een ander service level hebben gedefinieerd. Deze wordt hieronder besproken.

De totale waterconsumptie tijdens een vlucht met n passagiers, zal aangeduid worden met S_n . Op basis van de historische data hebben we alleen gegevens over afgeronde waarden van S_n . Om het bovenvermelde probleem te omzeilen, definiëren we nu het service level als de kans dat er genoeg water aanwezig is, gegeven dat er n passagiers aan boord zijn. Dit service level moet dan groter of gelijk zijn aan een vooraf (door het management van de KLM) gedefinieerde waarde α . Dit betekent dat aan de volgende voorwaarde voldaan moet worden:

$$\forall n \quad \mathbf{P} \left(S_n \leq \frac{j}{8} T \right) \geq \alpha, \quad j \in \{0, 1, \dots, 8\},$$

waarbij $j/8$, het percentage van de tank dat gevuld wordt is en T staat voor de capaciteit van de tank (in liters). Deze definitie van service level wordt ook wel *Quality of Service* (QoS) genoemd, omdat het geldt voor elk passagiersaantal. Het is gedefinieerd vanuit het perspectief van de consument, die heeft nu onafhankelijk van het aantal medepassagiers hetzelfde risico om met een watertekort te worden geconfronteerd. Deze definitie was een openbaring voor de KLM en bracht nieuw inzicht in het probleem.

Uiteraard is de volgende stap om een zo klein mogelijke hoeveelheid water te bepalen dat aan boord aanwezig moet zijn, zodanig dat aan het service level voldaan wordt (dat wil zeggen de kleinste waarde voor j in de vergelijking). Om dit te bepalen hebben we een kansverdeling voor de totale waterconsumptie S_n nodig. We hebben drie verschillende methoden ontwikkeld om deze kansverdeling te bepalen. De methoden gebruiken de historische data en moeten daarom rekening houden met de afrondingen. De methoden worden in de volgende drie paragrafen besproken.

Empirische Benadering

De kans dat j -achtste van de watertank wordt gebruikt als er n

passagiers aan boord zijn, wordt bij deze aanpak afgeleid uit de frequentie dat dit voorkomt in de data. Deze kansen kunnen worden gebruikt als een kansdichtheidsfunctie voor het watergebruik gedurende de vlucht. Om echter tot betrouwbare frequenties te komen, moeten er genoeg vluchten in de data zijn met precies n passagiers. Helaas is dat niet het geval. Dit kan worden opgelost door ook waarnemingen mee te nemen waarbij het aantal passagiers in de buurt van n ligt.

We kunnen een kansverdeling schatten door een continue functie door deze negen punten te construeren en dan de oppervlakte onder de functie te normaliseren. Dit betekent dat we een interpolatiemethode nodig hebben. De meest gebruikte methode is een benadering door polynomen. In dit geval lijkt *cubic spline interpolatie* (Press et al. [1]) beter geschikt, omdat dit stabiel is dan het gebruik van polynomen. Het doel van cubic spline is een interpolatie formule te krijgen die continu is in de tweede afgeleide. Als dit gebeurd is, moet de verkregen functie genormaliseerd worden. Hierna kan het minimum waterniveau, waarvoor het service level op zijn minst α is, worden bepaald. Voor praktische toepassing zorgen we ervoor dat dit waterniveau een monotoon stijgende functie is van het aantal passagiers. Omdat er weinig data beschikbaar zijn van vluchten met weinig passagiers, nemen we ook aan dat het gemiddelde waterverbruik per passagier per uur maximaal één liter is.

Normale Verdeling

De vorige aanpak gebruikte maar een gedeelte van de historische data om het waterverbruik te schatten (namelijk alleen de vluchten met ongeveer gelijke passagiersaantallen). In deze aanpak zal de totale waterconsumptie S_n voor een vlucht met n passagiers weergegeven worden door

$$S_n = \sum_{k=1}^n Y_k,$$

waarin Y_k staat voor de waterconsumptie van de k -de passagier (in liters). De aanname die nu gemaakt wordt is dat het waterverbruik per passagier onafhankelijk en hetzelfde verdeeld is. Aangezien het aantal passagiers groot is, kan de centrale limietstelling (Ross [2]) toegepast worden. Als we deze stelling generaliseren door een constante toe te voegen aan het gemiddelde en de variantie van het waterverbruik, dan krijgen we

$$S_n \stackrel{d}{\sim} N(\mu_0 + n\mu, \sigma_0^2 + n\sigma^2),$$

met μ en σ^2 het gemiddelde en de variantie van het waterverbruik per passagier en μ_0 en σ_0^2 het gemiddelde en variantie van de minimale hoeveelheid water die altijd gebruikt wordt. De waarden van deze vier parameters moeten geschat worden. Deze schatting wordt uitgevoerd met de maximum-likelihoodmethode (Ross [2]).

Binomiale Verdeling

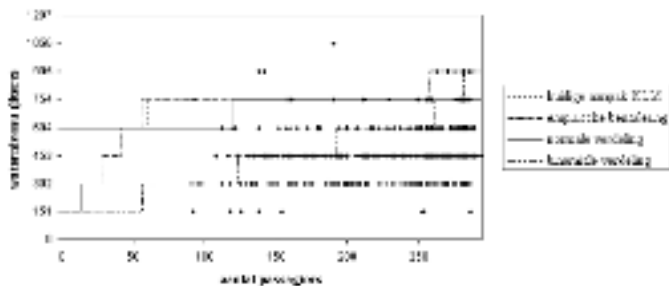
In de vorige aanpak werd geen aanname gemaakt over de exacte verdeling van het waterverbruik per passagier. Bij deze aanpak veronderstellen we dat een passagier een maximum hoeveelheid water (M) verbruikt met kans p of een minimum hoeveelheid wa-

waterniveau liters	Aantal passagiers (drempelwaardes voor het waterniveau)			
	huidige aanpak KLM	empirische benadering	normale verdeling	binomiale verdeling
151	-	0 - 13	-	0 - 56
302	-	14 - 27	-	57 - 122
453	-	28 - 41	-	123 - 191
604	0 - 59	42 - 55	0 - 118	192 - 260
754	60 - 281	56 - 256	119 - 294	261 - 294
905	282 - 294	257 - 294	-	-

Tabel 3 Aantal passagiers en aanbevolen waterhoeveelheid met een 95% *Quality of Service*, bepaald met de verschillende methodes, voor de vlucht AMS-BKK

ter (m) met kans $1 - p$. Dit betekent dat zowel het aantal passagiers dat de maximum hoeveelheid water verbruikt, als het aantal passagiers dat de minimale hoeveelheid verbruikt, binomiaal verdeeld is.

De waarden voor m , M en p moeten geschat worden om het gewenste waterniveau te bepalen. Dit kan op een intuïtieve manier gedaan worden, maar ook door meer geavanceerde methodes, zoals de maximum-likelihoodmethode.



Figuur 3 Aanbevolen waterhoeveelheid met een 95% *Quality of Service* met de verschillende methodes en de afgeronde data voor de vlucht AMS-BKK

Resultaten en Conclusies

In dit onderzoek hebben we een model ontwikkeld om de minimale hoeveelheid water te bepalen dat benodigd is tijdens een vlucht. Er moet echter wel aan een vooraf gesteld serviceniveau voldaan worden. Hierin is het serviceniveau gedefinieerd als de kans dat er genoeg water aanwezig is, gegeven het aantal passagiers aan boord. Het vaststellen van een kansverdeling, voor het totale watergebruik tijdens een vlucht, hebben we op drie verschillende manieren aangepakt. De grootste beperking waarmee rekening gehouden moest worden, was dat de data over het waterverbruik gegeven was in veelvouden van achtsten van de watertank.

Het gebruik van de empirische benadering is lastig omdat er in de praktijk voor veel vluchten niet genoeg data beschikbaar is voor een gegeven passagiersaantal. Daarom wordt ook de data met ongeveer gelijke passagiersaantallen gebruikt. Dit heeft tot gevolg dat de verdeling voor het totale waterverbruik dikkere staarten krijgt, waardoor het verkregen waterniveau te hoog ligt. Deze methode geeft dus eigenlijk een bovengrens voor de benodigde waterhoeveelheid.

De methoden met de normale en binomiale verdeling gaan er vanuit dat het gemiddelde en de variantie van het totale waterverbruik lineair toenemen met het aantal passagiers. Het eerste klopt inderdaad met de data, het tweede helaas niet. Het verschil tussen deze twee methodes ligt in de geschatte parameters voor het gemiddelde en de variantie. Het binomiale model heeft als eigenschap dat het minimum en maximum waterverbruik begrensd is.

Voor de vlucht van Amsterdam (AMS) naar Bangkok (BKK) zullen we de drie methodes numeriek toelichten. De resultaten zijn samengevat in tabel 3 en figuur 3.

Onze voorkeur gaat uit naar de methode met de normale verdeling, waarbij de empirische benaderingsmethode als bovengrens gebruikt kan worden. De binomiale methode kan gebruikt worden om de invloed van het wijzigen van parameters te evalueren. De resultaten van de huidige methode van de KLM, lijken op die van de methode met de normale verdeling. Deze laatste heeft echter een betere onderbouwing en gebruikt een betere definitie van het service level, daarom heeft deze methode ook de voorkeur van de KLM.

Aan het drinkwaterprobleem werkten de wiskundigen Marco Bijvank, Menno Dobber, Quentin Botton, Eléonore de le Court, Jean-Christophe Van den Schrieck, Moïra de Viron, Maarten Soomer, Myriam Cisneros-Molina, Klaus Schmitz, Remco van der Hofstad, Ellen Jochemsz, Tim Mussche, Martin Summer, Maroescha Hoekstra, Jeroen Mulder en Mark Paelinck

Referenties

- 1 W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York, 1988.
- 2 S.M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Eighth Edition, Academic Press, San Diego, 2003.
- 3 M. van Lambalgen and R. Meester, *On the (ab)use of statistics in the legal case against the nurse Lucia de B*, preprint, available from www.few.vu.nl/~rmeester/pre.html (2005).

Sanne Houweling

Instituut voor Fundamentele en Klinische
Bewegingswetenschappen
Vrije Universiteit
Van der Boechorststraat 9
1081 BT Amsterdam
s.houweling@fbw.vu.nl

Andreas Daffertshofer

Instituut voor Fundamentele en Klinische
Bewegingswetenschappen
Vrije Universiteit
Van der Boechorststraat 9
1081 BT Amsterdam
marlow@fbw.vu.nl

Onderzoek Niet-lineaire oscillatoren in de bewegingswetenschappen

Tussen beweging en ademhaling

Als je tijdens een wandeling opeens een stuk gaat hardlopen, verandert het ritme van je ademhaling. Het in- en uitademen zal zich echter spoedig synchroniseren met je lichaamsbeweging. Hoe verloopt dit proces? Sanne Houweling en Andreas Daffertshofer, beide onderzoekers aan de faculteit der Bewegingswetenschappen aan de Vrije Universiteit Amsterdam, beschrijven een dynamisch systeem dat hier aan ten grondslag kan liggen.

Ademhaling is een fysiologisch proces met het primaire doel op een min of meer continue manier een optimale hoeveelheid zuurstof of energie aan het lichaam toe te voegen. Ondanks de koppeling met het cardiovasculaire systeem kan de ademhaling willekeurig (of bewust) gemanipuleerd worden, wat de mogelijkheid biedt om de ademhaling flexibel onder wisselende omstandigheden aan te passen. Onder normale omstandigheden is ademhaling of respiratie een cyclisch proces waarvan amplitude en periode onder andere de hoeveel lucht bepalen die in de longen kan worden uitgewisseld. Hoe komt dit cyclische proces tot stand en hoe kunnen de eigenschappen daarvan worden aangepast om de beschikbare energie optimaal te verwerken? Een belangrijke stap die leidde tot inzicht in de periodieke aard van de respiratie werd genomen toen Del Negro en anderen lieten zien hoe een specifiek neuraal netwerk de ademhaling van zoogdieren zou kunnen reguleren [1, 2]. Kort gezegd wekt de structuur van dit ademhalingsnetwerk spontaan oscillatiegedrag op, ook in de afwezigheid van specifieke pacemakerneuronen. Dit geeft aan dat respiratie beschreven kan worden als een oscillatieproces dat zichzelf in stand houdt.

Elk biologisch systeem kan in principe beschreven worden in termen van zijn dynamica. Veranderingen in de tijd zijn immers dat wat deze systemen gemeen hebben. Zo'n beschrijving moet zich concentreren op de meest essentiële eigenschappen van het systeem. De beste kandidaten hiervoor zijn vaak zelforganiserende structuren die via wisselwerkingen tussen deelsystemen coherente macroscopische patronen laten zien [3, 4]. Hun (laagdimensionale) dynamica en in het bijzonder hun stabiliteitseigenschappen kunnen geformaliseerd worden met wiskundige concepten die patroonvorming bestuderen. Om deze concepten toe te passen op biologische bewegingen concentreren we ons hier op overgangen tussen gecoördineerde, macroscopische structuren omdat in het algemeen vlakbij zo'n overgang een laagdimensionale dynamica een goede benadering geeft (met behulp van het zogenaamde *center manifold theorem*) en omdat zulke veranderingen een wisselwerking tussen microscopische elementen impliceren. Deze wisselwerking brengt een aantal macroscopische entiteiten voort die de toestanden van het systeem weerspiegelen.

Bewegen vereist meestal het coördineren van zowel homogene als heterogene deelsystemen, toegespitst op een min of meer specifieke taak. Met bewegen bedoelen we enerzijds activiteit van spieren die hier bijvoorbeeld het in- en uitpompen van zuurstof bewerkstellingen maar ook het 'gewone' voortbewegen of de *locomotie*. Wandelen, lopen, fietsen, rolstoelrijden zijn allemaal cyclische bewegingen die evenals ademhaling ook kunnen worden beschouwd als (het resultaat van) zichzelf in stand houdende oscillatoren of stabiele verdichtingscycli (*stable limit cycles*) [5-9]. Dus hebben we met locomotie als vorm van een cyclische bewe-

De cirkelafbeelding

De *cirkelafbeelding* is de afbeelding van het interval $[0, 1)$ naar zichzelf, gedefinieerd door

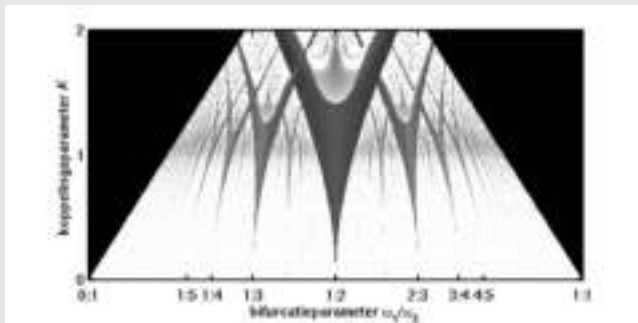
$$\theta \rightarrow \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta) \pmod{1}.$$

De parameter K , het *koppingsgetal*, bepaalt in welke mate de afbeelding niet-lineair is, en Ω is op te vatten als een constante hoekverschuiving. Iteratie van deze afbeelding geeft het dynamisch systeem

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1}, \\ \theta_0 = c, \end{cases}$$

met $n \geq 0$ en c een beginwaarde in $[0, 1)$. We kunnen de iteratie opvatten als een beweging langs een cirkelrand, waarbij $2\pi\theta_n$ de positie op de cirkel bepaalt.

Als Ω rationaal is en $K = 0$, dan bevat de rij $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ eindig veel verschillende punten. De afbeelding heeft dan een eindig *windingsgetal*: dit is het aantal rotaties om de oorsprong voordat voor de tweede keer hetzelfde punt wordt aangedaan. Dit aantal is aan Ω af te lezen: als $\Omega = \omega_1/\omega_2$ met ω_1 en ω_2 relatief priem, dan is het aantal rotaties gelijk aan ω_1 . Is Ω irrationaal, dan ligt $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ dicht op het interval $[0, 1)$. Als $K \neq 0$, dan kan het voorkomen dat $(\theta_n)_{n=0}^\infty$ voor zekere waarden van (K, Ω) periodiek is. In figuur 1 zijn deze gebieden te herkennen als scherpe V-vormige punten. Ze dragen de naam *Arnolddongen*, naar de pionier op het gebied van de dynamische systemen Vladimir Arnold. Elke Arnolddong benadert een rationaal getal $\Omega = \omega_1/\omega_2$, voor $K \downarrow 0$. Bijvoorbeeld, de grootste tong, midden in de figuur wijst naar de waarde $1/2$. Opmerkelijk is dit gedrag ongevoelig is voor verstoringen in θ_n . Dit verschijnsel noemt men *frequentievergrendeling*.



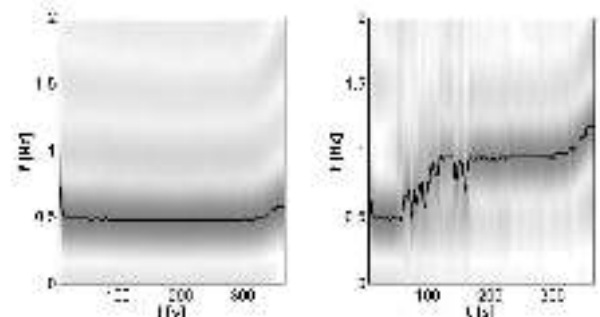
Figuur 1 Arnoldtongen in de sinus-cirkelafbeelding

ging én ademhaling twee zichzelf voortbrengende oscillatoren en duikt de vraag op of deze cyclische processen gesynchroniseerd zijn. Indien dat zo is gaan we op zoek naar de mechanismen die hun synchronisatie kunnen verklaren. We behandelen deze vraag door ons te concentreren op essentiële elementen die de interactie tussen locomotie en respiratie karakteriseren. Daartoe formuleren we uiteindelijk een dynamisch model dat behalve de zogenaamde frequentie- en fasevergrendelingen ook overgangen tussen vergrendeling laat zien. Deze overgangen worden gekenmerkt door

een verlies aan stabiliteit van de ene vergrendelde toestand tegelijk met een stabilisatie van de ander.

Ademhaling is zowel bij dieren als mensen vaak op dezelfde manier gekoppeld aan beweging. Bij verschillende vierpotigen is een koppeling tussen beweging en ademhaling waarneembaar. Hierbij zijn de verhoudingen 1:1 en 2:1 tussen de cyclische beenbewegingen en ritmisch ademhalen wijd verspreid [10-12]. Bij mensen is deze koppeling onder andere voor de activiteiten fietsen, hardlopen, roeien en rolstoelrijden bestudeerd. Naast een aantal verschillende constante frequentieverhoudingen, onder andere 1:1, 2:1, 3:1, 3:2 en 5:2, laten mensen regelmatig een overgang zien tussen verschillende soorten van vergrendeling [13-19].

Ondanks het grote aantal bevindingen is het achterliggende mechanisme bij lange na niet volledig begrepen. Gedurende de voorgaande jaren zijn wel verscheidene verklaringen voor de koppeling tussen beweging en ademhaling geopperd. In dit artikel doen we een wiskundig onderbouwde poging om de bontgekleurde verzameling van verschijnselen te verklaren [20, 21]. Tegelijkertijd behandelen we expliciet de mechanismen die bepaalde verschijnselen (of overgangen daartussen) selecteren. Omdat vooral de kwalitatieve eigenschappen van de oscillatoire processen hierbij belangrijk zijn, concentreren we ons daarbij op de aard van de koppeling. Ter illustratie van deze ideeën vatten we bovendien recente experimentele resultaten samen van locomotie-respiratiekoppeling tijdens het roeien en tijdens het hardlopen.

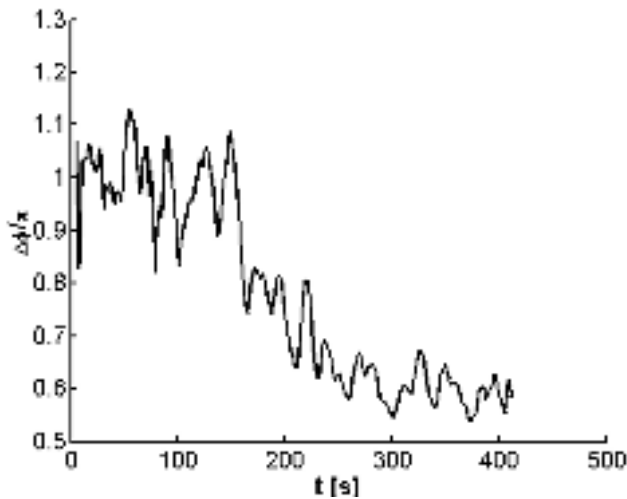


Figuur 2 Spectrogrammen van ademhaling (rechts) en beweging (links) onderzocht bij wedstrijdroeiers onder gesimuleerde wedstrijdcondities bij een race van twee kilometer op een roeiapparaat [18]. Naast verschillende ventilatieparameters werd de kracht die werd uitgeoefend op de handgreep van de ergometer geregistreerd. Zowel de voortgang van een stabiele frequentiekoppeling (meestal 1:2) als ook plotselinge veranderingen in de frequentievergrendelingen (hier van een 1:1 naar een 1:2 vergrendeling) worden waargenomen.

Koppeling

Een conventionele manier om multifrequentieprocessen te onderzoeken is een beschrijvend model toe te passen zoals de 'sinus-cirkelafbeelding' (zie inzet). Het blijft dan wel onduidelijk hoe deze iteratieve vorm tot stand komt en —voor ons meest belangrijk— wat de koppeling veroorzaakt.

Vanuit ergonomisch oogpunt echter lijkt de effectieve waarde van het zuurstofvolume in de longen cruciaal te zijn. Inderdaad blijkt een fysiologische maat, begrensd door mechanische factoren, bepalend te zijn in ons model. Voor we aan de beschrijving hiervan beginnen, illustreren we patroonvorming met experimentele resultaten van locomotie-respiratiekoppeling tijdens het roeien [18] (zie ook figuren 2 en 3) en tijdens het hardlopen (zie figuren 4 en 5). Om het voorbeeld van het roeien te verduidelijken bekijken we eerst welke aspecten van de roeibeweging bepalend



Figuur 3 Tijdens een stabiele frequentievergrendeling werden ook overgangen van rond de 90° in de relatieve fase tussen respiratie en cyclisch geleverde kracht waargenomen (gedefinieerd als $\Delta\phi = P\phi_{slag} - Q\phi_{resp}$ in het geval van een $Q:P$ frequentievergrendeling tussen ademhaling en roeisnelheid).

zijn voor de druk op de longen en dus de respiratiedynamica.

Tijdens elke roeislag (één keer heen en terug) worden er verschillende krachten uitgeoefend op de longen via de borstkas. Aan het begin van elke slag worden de longen samengedrukt wanneer de roeier de knieën tegen de borst houdt en de armen naar voren heeft uitgestrekt. De samendrukking verdwijnt zodra de benen gestrekt worden maar komt terug wanneer de buikspieren maximaal actief worden halverwege de slag. Tijdens de terugkeer verdwijnt de spiergerelateerde samendrukking weer. Op deze manier wordt het longvolume dus twee keer samengeperst tijdens één slag [23, 24].

Om ons tweede experimentele voorbeeld van een koppeling tussen locomotie en respiratie te motiveren merken we op dat Bramble en Carrier al zo'n twintig jaar geleden een uiteenzetting hebben geformuleerd in termen van mechanische krachten die werken op de borstkas en het middenrif [13, 14]. Volgens deze hypothese veroorzaakt de verticale impuls, die gepaard gaat met (bijvoorbeeld) een voetstap, resonante en mechanische vibraties van het middenrif. Op die manier zouden dan bepaalde ritmes uitgeoefend worden op de abdominale en thoracale volumes en krachten.

Koppeling en effectieve waarde

We stellen de respiratie (cyclus van het in- en uitademen) wiskundig voor met de tijdsafhankelijke variabele $R(t)$. De longdruk, afhankelijk van de beweging, wordt door $M(t)$ voorgesteld. Wanneer deze twee grootheden onafhankelijk zijn is hun invloed op het resulterende longvolume, voorgesteld met $VO_2(t)$, multiplicatief. Deze aanname kan geformaliseerd worden door

$$VO_2(t) = [R_0 - R(t)][M_0 - M(t)] \quad (1)$$

waar R_0 en M_0 eindige offsets voorstellen waaromheen de dynamische componenten $R(t)$ en $M(t)$ oscilleren. Hoewel dit tijdsafhankelijke zuurstofvolume een maat is voor de uitwisseling van energie, geeft de oscillatoire aard ervan aan dat de relevante (statistische) grootheid de effectieve waarde is. We definiëren de ef-

fectieve waarde van $VO_2(t)$ over een tijdsinterval $[0, T]$ als

$$E(T) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \{VO_2(t)\}^2 dt}. \quad (2)$$

De effectieve waarde blijkt van wezenlijk belang voor de specifieke vorm van de respiratie-locomotie-koppeling, omdat het de optimale verhoudingen van frequentie- en fasevergrendelingen tussen cyclische beweging en ademhalingsritme voorschrijft. Voor dat we een gedetailleerde discussie aangaan over zichzelf onderhoudende dynamica, schetsen we hier in het kort de onmiddellijke gevolgen van de multiplicatieve structuur van $VO_2(t)$. Om het eenvoudig te houden nemen we aan dat de onderliggende oscillaties volledig harmonisch zijn, dus we beschouwen

$$R(t) = A_R \sin(\omega_R t + \varphi_R) \text{ en } M(t) = A_M \sin(\omega_M t + \varphi_M) \quad (3)$$

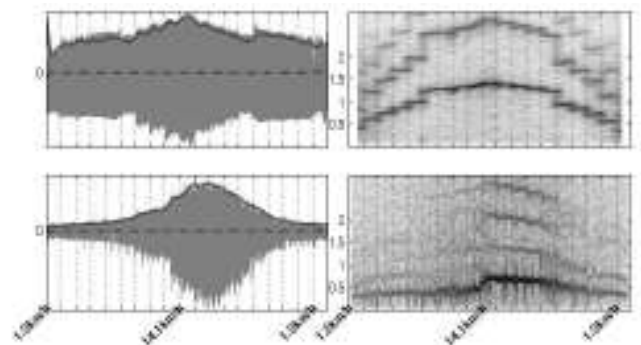
waarbij ω_R de respiratiefrequentie voorstelt, ω_M de bewegingsfrequentie en φ_R en φ_M eventuele faseverschuivingen. Wanneer we deze opstelling substitueren in (1) en bovendien de vergelijking voor $VO_2(t)$ herschalen door te stellen dat $R_0 = M_0 = 1$ en de faseverschuiving van de beweging $\varphi_M = 0$ te kiezen, krijgen we

$$VO_2(t) = [1 - A_R \sin(\omega_R t + \varphi_R)][1 - A_M \sin(\omega_M t)]. \quad (4)$$

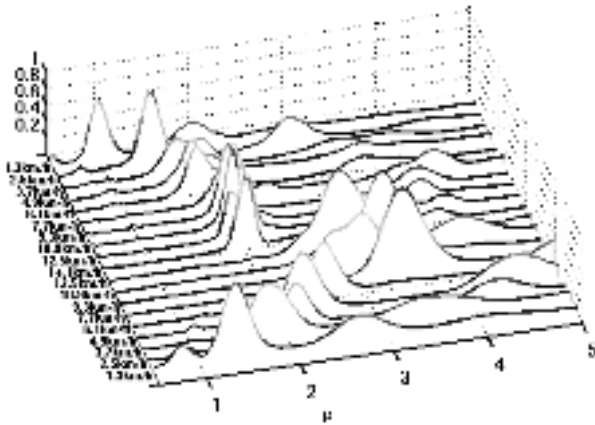
Vervolgens vinden we, na substitutie van $T = 2\pi\omega^{-1}$ en herdefiniëring van $E(T)$ naar $E(\omega)$, de volgende uitdrukking voor de effectieve waarde

$$E_{\omega_R, \omega_M}(\omega) = E(\omega) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} VO_2(t)^2 dt}, \quad (5)$$

waarbij we met het subscript ω_R, ω_M benadrukken dat deze uitdrukking zowel van ω_R als ω_M afhangt. Deze uitdrukking stelt de gemiddelde zuurstofuitwisseling in de longen voor waarbij de respiratiefrequentie is gegeven door ω_R en de frequentie van de druk in de longen gerelateerd is aan de beweging met ω_M . Om te



Figuur 4 Spectrogrammen en frequentievergrendelingen van sagittale onderbeenbeweging (boven) en respiratie (onder) opgenomen tijdens het hardlopen op een lopend band. Gedurende twintig minuten (abscissae) werd de loopsnelheid van 1.3 km/u tot 14.1 km/u verhoogd en vervolgens weer verminderd. Zowel de staplengte (de amplitude van het onderbeen) als de amplitude van de ademhaling wordt met toenemende loopsnelheid groter zoals te zien is in bovenstaande spectrogrammen. Evenzo nemen respiratie en stapfrequenties toe (zie ook figuur 5).



Figuur 5 Spectrale overlap $\psi(\rho)$ tussen de frequentieverdeling van respiratie en beenbeweging zoals geschetst in figuur 4 [25]. In de loop van de tijd (dus afhankelijk van de snelheid) wordt een breed spectrum van verschillende frequentievergrendelingen aangenomen, beginnend met $3:2 \rightarrow \dots \rightarrow 7:2 \rightarrow 3:1 \rightarrow 2:1 \rightarrow \dots$. De $2:1$ vergrendeling blijft min of meer constant vanaf de maximale inspanning (snelheid=14.1 km/u).

illustreren hoe $E(\omega)$ verandert onder invloed van ω_R en ω_M gebruiken we (5) en berekenen de effectieve waarde per slag, dat wil zeggen over het tijdsinterval $T_{slag} = 2T_M$. In figuur 6 is te zien dat deze effectieve waarde lokale maxima in de frequentievergrendelingen $\omega_M:\omega_R = 2:1, 1:1, 2:3$, enzovoort heeft. Zoals te zien is de plaats van het absolute maximum echter niet alleen afhankelijk van de frequentieverhouding maar ook van de verhouding van de bijbehorende amplitudes. Verschillen in amplitude kunnen natuurlijk altijd bestaan wanneer men verschillende proefpersonen of taken bestudeert. Wat minder vanzelfsprekend is zijn amplitudeverschillen bij één proefpersoon gedurende een sessie. Inderdaad kun je je afvragen wat de oorzaak is van een verandering in amplitude wanneer een frequentievergrendeling optreedt. We nemen aan dat beide amplitudes afhangen van hun frequentie, ofwel $A_R = A_R(\omega_R)$ en $A_M = A_M(\omega_M)$. Dit komt ook van pas in het model dat later uitgewerkt wordt en in termen van niet-lineaire oscillatoren geformuleerd is. Het is een feit dat hoe sneller de beweging is, hoe kleiner de amplitudes worden. Dit betekent dat de amplitudes afnemen wanneer de frequentie toeneemt. Nu hebben ervaren sporters (roeiers) zoals die bestudeerd door [18] een vrijwel constante bewegings-(slag)frequentie gedurende een sessie. Naast de afhankelijkheid van de frequentie kan men zich ook voorstellen dat in de loop van de sessie de vraag naar zuurstof toeneemt. We kunnen dan een afname in beide amplitudes introduceren in ons model die veroorzaakt wordt door een toename in de vraag naar energie wegens vermoeidheid. Deze afname zal echter op een andere tijdschaal plaatsvinden omdat de tijdschaal van de verandering in energiehuishouding verschilt van de tijdschaal van zowel respiratie als beweging. Zulke vermoeidheidseffecten kunnen dus bijvoorbeeld door een exponentiële afname worden geformuleerd, dat wil zeggen in de vorm van:

$$\begin{aligned} A_R^{(0)} &= A_R^{(0)}(\tau) = A_R^{(1)} - A_R^{(2)}[1 - e^{-\gamma_R \tau}], \\ A_M^{(0)} &= A_M^{(0)}(\tau) = A_M^{(1)} - A_M^{(2)}[1 - e^{-\gamma_M \tau}]. \end{aligned}$$

We gebruiken in deze notatie τ in plaats van t als tijdsparemet om het grote verschil in tijdschalen te benadrukken.

In figuur 7 zijn de vermoeidheidseffecten van de respiratie-

amplitude aangegeven voor de waarden

$$\begin{aligned} E_{1:1} &= \lim_{\omega_R \rightarrow \omega_M} E_{\omega_R, \omega_M}(\omega_M/2), \\ E_{2:1} &= \lim_{\omega_R \rightarrow \omega_M/2} E_{\omega_R, \omega_M}(\omega_M/2). \end{aligned}$$

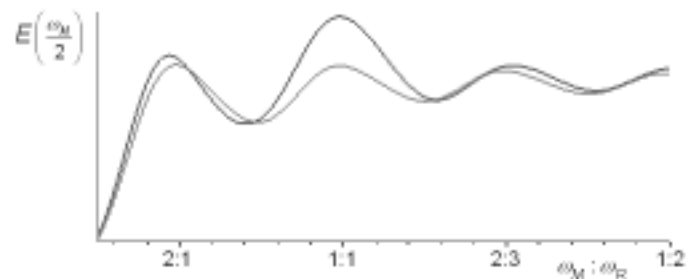
Hun verhouding

$$\Delta_M = \frac{E_{1:1}}{E_{2:1}} = \begin{cases} \geq 1 & \sim 1:1 \text{ frequentievergrendeling} \\ < 1 & \sim 2:1 \text{ frequentievergrendeling} \end{cases}$$

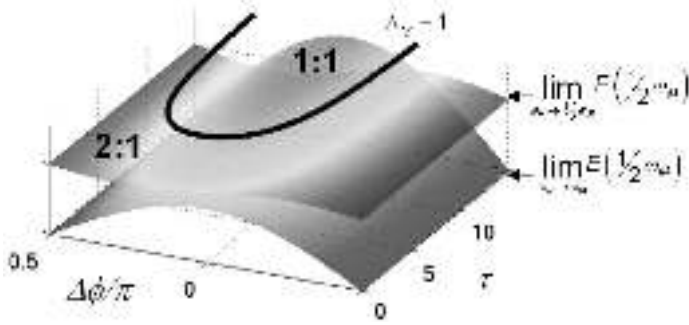
bedekt twee of meer verschillende gescheiden regimes (de grenslijn is $\Delta_M = 1$, de zwarte lijn bovenop de grafiek), waarbij elk van deze regimes een optimale frequentievergrendeling vertegenwoordigt, hier ook nog afhankelijk van het faseverschil $\Delta\phi$ tussen beweging en ademhaling. Voor de roeiers betekent dit dat het maximum van de effectieve waarde in één slag bij een verhouding $2:1$ of bij een verhouding $1:1$ ligt. Uit figuur 7 volgt dus, dat vermoeidheidsgerelateerde amplitudeveranderingen verschillende optimale effectieve waarden voor verschillende harmonischen van de bewegingsfrequentie. Samengevat levert de multiplicatieve contributie van de longdruk (gerelateerd aan de beweging) en de respiratie aan het longvolume lokale maxima in specifieke, rationale frequentievergrendelingen. Zowel amplitude- als faseverhoudingen kunnen bijdragen aan het globaal optimale synchronisatiepatroon.

Dynamica: gekoppelde niet-lineaire oscillatoren

We gaan verder in onze zoektocht naar mechanismen die frequentievergrendelingen kunnen genereren. Daarbij richten we ons op de kwalitatieve dynamische eigenschappen van de onderliggende dynamische deelsystemen en hun expliciete koppeling. We hebben in de inleiding verklaard dat respiratie gezien kan worden als de resultante van een zichzelf onderhoudende oscillator (in de vorm van een netwerk). Evenzo kunnen de bewegingsgerelateerde oscillaties opgevat worden als de resultante van een zichzelf onderhoudende oscillator, vooral omdat we de koppeling beschouwen in de context van ritmische bewegingen. Omdat we ons kunnen concentreren op de essentiële eigenschappen van frequentiekoppelingen, onthouden we ons van het beschrijven van de oscillatoren in fysiologische termen. In plaats daarvan



Figuur 6 Amplitude-effecten voor de effectieve waarde $E(\omega_M/2)$. Wat opvalt is nu dat de effectieve waarde maximaal is bij de verhoudingen $\omega_M:\omega_R = 2:1$ of $1:1$, afhankelijk van de amplitude van één van de oscillatoren. Hier is het de bewegingsamplitude A_M die indien ze klein is $\omega_M:\omega_R = 2:1$ als optimum levert (donkere lijn) en bij groot $\omega_M:\omega_R = 1:1$ (lichte lijn). In onze beschouwing is de bewegingsfrequentie gerelateerd aan de druk in de longen, die twee keer zo snel oscilleert als de greepkracht zoals beschreven in [18]; als zodanig kunnen de verhoudingen in figuur 2 omgezet worden naar $\omega_{slag}:\omega_R = 1:1, 1:2, 1:3$, enzovoort.



Figuur 7 De vermoeidheidseffecten voor de respiratieamplitude; de waarden $E_{1:1} = \lim_{\omega_R \rightarrow \omega_M} E(\omega_M/2)$ en $E_{2:1} = \lim_{\omega_R \rightarrow \omega_M/2} E(\omega_M/2)$

beschouwen we deze als generieke vormen van stabiele verdichtingscycli. Hun dynamica kan formeel beschreven worden door

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_R^2 R + n_R(R, \dot{R}) &= J_{R \leftarrow M} \\ \ddot{M} + \omega_M^2 M + n_M(M, \dot{M}) &= J_{R \rightarrow M}. \end{aligned} \quad (6)$$

Net als in de vorige sectie stelt $R = R(t)$ de ademhalingscomponent voor met eigenfrequentie ω_R , en $M = M(t)$ de oscillator gerelateerd aan de beweging met eigenfrequentie ω_M . Hierbij zijn n_R en n_M niet-lineaire functies die de oscillaties van de amplitudes stabiliseren; verderop is hun specifieke vorm beschreven. Zoals gebruikelijk is de notatie hier $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$.

Het meest belangrijke in deze dynamische structuur is het feit dat de twee oscillatoren in (6) aan elkaar gekoppeld zijn. Via de functie $J_{R \leftarrow M}$ beïnvloedt de beweging de respiratie, en via $J_{R \rightarrow M}$ wordt de laatste weer teruggeleid in de dynamica van de beweging. Om deze koppelingsfuncties nader te specificeren maken we gebruik van de resultaten in de vorige sectie. We veronderstellen dat respiratie zich aanpast aan de beweging om de effectieve waarde van zuurstof in de longen te optimaliseren. Anders gezegd voeren we een beperking in met behulp van de maximalisatie van de effectieve waarde van $VO_2(t)$ zoals gedefinieerd in (2). Voor het gemak gebruiken we E in zijn kwadratische vorm. Voor het vinden van extreme waarden stellen we de functionele afgeleide (ofwel Frechet afgeleide, zie [32]) van E^2 gelijk aan nul. Nu werd de bewegingsfrequentie eerder als vrijwel constant aangenomen, zodat we ons beperken kunnen tot het geval waarin respiratie zich aanpast, in tegenstelling tot de beweging. Vervolgens bekijken we de functionele afgeleide van E^2 naar $R(t)$. In het geval van een oplossing die een optimale energiehuishouding mogelijk maakt, moet deze nul naderen. Dus we gebruiken dat als

$$E^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \{VO_2(t)\}^2 dt$$

maximaal is, dan is $\frac{\delta E^2}{\delta R(t)} = 0$.

Dit levert na substitutie van de effectieve waarde (2) de volgende vergelijking:

$$\frac{\delta E^2}{\delta R(t)} \propto [R(t) - R_0][M(t) - M_0]^2 = 0. \quad (7)$$

Deze uitdrukking zal dienen als koppelingsfunctie tussen beweging en respiratie. De koppeling van respiratie naar beweging ne-

geren we, dus $J_{R \rightarrow M} = 0$, omdat de waargenomen bewegingsfrequentie vrijwel constant is. Het ademhalingsritme heeft slechts een zwakke invloed op de voortbeweging, als het überhaupt voorkomt. Nota bene: is $M(t)$ zoals gezegd een zichzelf onderhoudende, stabiele verdichtingscyclus, dan kunnen we de dynamica van de beweging weergeven bijvoorbeeld als $\ddot{M} + \omega_M^2 M + n_M(M, \dot{M}) = 0$; kiezen we verder $n_M(M, \dot{M}) = \varepsilon_M(\dot{M}^2 - v_M^2)\dot{M}$ dan hebben we voor de beweging een eerste orde benadering in de vorm van $M(t) \approx A_M(\omega_M) \sin(\omega_M t)$ met $A_M(\omega_M) = v_M/\omega_M$; dit betekent dat de beweging min of meer sinusoidaal oscilleert en dat zijn amplitude hyperbolisch afneemt bij toenemende frequentie (zie ook de discussie van formule (10) na de volgende alinea). Komen we terug naar de dynamica van de respiratie kunnen we de gehele koppeling voorzien van een constante schalingsparameter α (in feite een Lagrange-multiplicator) waarmee ons model zich uiteindelijk als volgt laat lezen

$$\ddot{R} + \omega_R^2 R + n_R(R, \dot{R}) = \alpha[R - R_0][M - M_0]^2. \quad (8)$$

Zoals gezegd onthouden we ons van het beschrijven van de oscillatoren in fysiologische termen, maar beschouwen de kwalitatieve aspecten van synchronisatie. Daarom nemen we aan dat de niet-lineariteit van n_R in slechts bestaat uit polynomen in R en $\dot{R}$ van lage orde. We gebruiken hiervoor een Rayleigh-oscillator. Deze wordt vaak gebruikt in onderzoek naar motorcontrole om de pieksnelheid van cyclische bewegingen te stabiliseren [6]. Toegepast op ons probleem ziet de Rayleigh-oscillator er als volgt uit

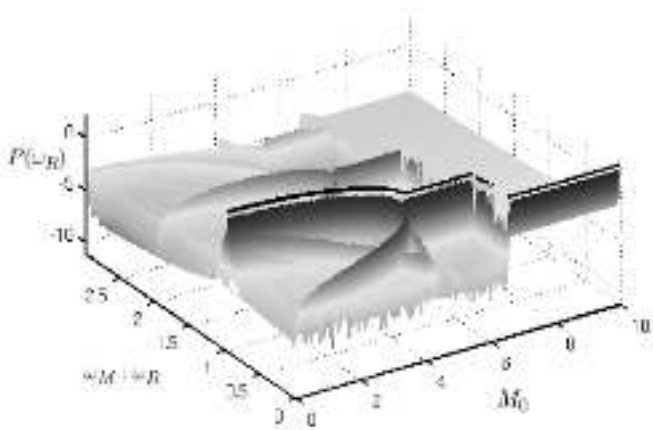
$$n_R(R, \dot{R}) = \varepsilon_R(\dot{R}^2 - v_R^2)\dot{R}. \quad (9)$$

Bij afwezigheid van elke vorm van drijvende kracht (dat wil zeggen, $\alpha = 0$) is het bekend dat deze oscillator stabiele amplitudes produceert die monotoon afnemen bij een stijgende frequentie. Na substitutie van in luidt de uiteindelijke vorm van de respiratiedynamica onder invloed van de bewegingsdynamica als volgt:

$$\ddot{R} + \omega_R^2 R + \varepsilon_R(\dot{R}^2 - v_R^2)\dot{R} = \alpha[R - R_0][M - M_0]^2. \quad (10)$$

Dit is de vergelijking van een zichzelf onderhoudende, niet-lineaire oscillator (aan de linkerzijde) die gedreven wordt door een externe kracht $M = M(t)$. Hoewel dit slechts één enkele kracht is, oefent deze een essentiële invloed uit op de dynamica van R . De twee factoren M en M^2 in de rechterterm drijven het systeem zowel gewoon als parametrisch. In het laatste geval is de invloed van de kracht versterkt door resonantie. Hieruit volgt dat de synchronisatie tussen R en M kan verschillen, afhankelijk van de relatie tussen de gewone en parametrische drijvende kracht. Dus speelt bovendien de verhouding van M en M^2 , bepaald door M_0 een belangrijke rol. Zoals figuur 8 illustreert kunnen mogelijke responsies op deze krachten een 1:1 frequentievergrendeling vertonen met verschillende faserelaties, bijvoorbeeld $|\omega_R - \omega_M| = 0^\circ$ of 90° (meer details over de faseverschuiving zijn in [20, 21] te vinden). Een andere mogelijkheid is een subharmonische respons waarmee we doelen op een frequentieverhouding van $\omega_M:\omega_R = 2:1$. Transitie tussen de verschillende oplossingen kunnen veroorzaakt worden op diverse manieren.

Wanneer we van start gaan met grote bewegingsamplitudes en -offsets nemen we een 2:1 frequentievergrendeling waar. Een afnemende offset van de beweging heeft een frequentieverdubbende bifurcatie als gevolg. En een afnemende amplitude van de beweging veroorzaakt een transitie van de relatieve fase tussen de twee oscillatoren terwijl de frequentieverhouding 1:1 blijft. Een frequentieverdubbende bifurcatie kan ook ontstaan wanneer de offset van de respiratie verhoogd wordt, zelfs in het geval van een grote bewegingsoffset [20, 21]. Voor een gedetailleerde discussie over Rayleigh-oscillatoren en hun bifurcatieroutes, in het bijzonder bij het betrekken van een totale koppelingskracht α en het gebruik van de verhouding tussen frequenties als bifurcatieparameters, zie [26, 27].



Figuur 8 In dit bifurcatiediagram werkt de bewegingsoffset M_0 als bifurcatieparameter. De kleur wordt bepaald door de sterkte van de vergrendeling (hier uitgedrukt door het spectrale vermogen P). Na een kritieke waarde waarna een frequentievergrendeling van 2:1 tot stand komt, zien we bij een afnemende M_0 een transitie naar de frequentievergrendeling 1:1. In het bijzonder komen hogere harmonischen tot uitdrukking in de zwakkere replicaties van de bifurcatie.

Discussie

Het komt regelmatig voor dat energieverbruik (ofwel zuurstofconsumptie) lager is gedurende periodes van inspanning dan periodes zonder inspanning. Dit wekt de suggestie dat de koppeling tussen ademhaling en beweging een functie is van het vereiste aërobische vermogen [28-30]. Eerdere pogingen om de werking van de koppeling te ontrafelen concentreerden zich meestal op het identificeren van mechanische oorzaken. Een goed voorbeeld daarvoor is het reeds genoemde onderzoek van Bramble en anderen dat aantoonde dat de mechanische krachten die uitgeoefend worden op het ademhalingssysteem onmisbaar zijn voor een volledige verklaring van de koppeling tussen locomotie en respiratie. Desalniettemin blijven stellingen aangaande het aërobische vereiste, mechanica en gekoppelde oscillatoren [16] slechts pogingen vanwege het ontbreken van een expliciete verklaring omtrent de doelmatigheid van de inspanning.

In onze beschouwing spelen meer generieke aspecten van dynamische systemen een centrale rol. Zo hebben wij laten zien dat de koppeling verklaard kan worden aan de hand van twee zichzelf onderhoudende oscillatoren die aan elkaar gekoppeld zijn via de maximalisering van de instantane effectieve waarde (geïnterpreteerd als de aanspreekbare hoeveelheid) van energie. Deze is uitgedrukt als een bilineaire functie van beide oscillerende componenten omdat deze koppeling zowel verschillende inspanningspatronen als overgangen hierin veroorzaakt. Het mo-

del dat we naar voren brachten heeft een rijk bifurcatiespectrum dat overeenkomt met het brede scala aan empirisch waargenomen patronen van frequentievergrendeling bij mensen en dieren [11]. Bij de analyses concentreerden we ons op de rijke, dynamische eigenschappen die ontdekt werden in de verschillende experimenten. Hiermee concentreerden we ons op de overgang tussen de frequentievergrendelingen van 2:1 naar 1:1 en de sprongen van 90° in de relatieve fase. Het is met name interessant dat de naar voren gebrachte bifurcatieparameters geïnterpreteerd kunnen worden in termen van fysiologie.

In ons model beschrijven de oscillaties van de bewegingen de inwendige abdominale druk. Deze druk beïnvloedt op zijn beurt de druk in de borstkas [31]. De oscillaties kunnen precies omschreven worden door 1) hun amplitudes die corresponderen met de maximale variatie van de spijsamentrekking en 2) de offset waar de oscillaties rond schommelen. Deze offset kan opgevat worden als de gemiddelde kracht die een spier levert en beïnvloedt volgens ons model de frequentieverhoudingen in de koppeling. Hoe groter de offset hoe groter de mogelijkheid een 2:1 synchronisatie te vinden. Wanneer de gemiddelde krachtlevering verlaagd wordt kan dit een overgang naar een 1:1 coördinatiepatroon veroorzaken. Hierna kan een sprong in de relatieve fase binnen het 1:1 patroon optreden als gevolg van een verandering in bewegingsamplitude. Naast effecten van een verandering van druk op de longen, kan ook de respiratieoscillator wezenlijke invloed uitoefenen op de optimale vergrendeling. Door het gemiddelde luchtvolume in de longen te verhogen verhoogt de ademhalingsgerelateerde druk en dus de ademhalingsoffset. En inderdaad kan deze offset frequentieverdubbende bifurcaties veroorzaken, ofwel een sprong van een 2:1 naar een 1:1 synchronisatie.

Het model wordt gevormd door een combinatie van zichzelf onderhoudende oscillatoren vanuit het oogpunt van een maximalisatie van de resulterende energieoverdracht. De precieze keuze van zowel de oscillatoren als de energiefunctie weerspiegelt mechanische beperkingen voor de effectieve waarde van energie. Vanzelfsprekend hangt de mate waarin deze beperkingen actief zijn af van de aard van de beweging. In de koppeling kunnen op deze manier verschillende (cascades van) frequentievergrendelingen worden waargenomen, afhankelijk van de manier van bewegen. In vergelijking met roeien kunnen veel meer verschillende vergrendelingen optreden tijdens hardlopen, wat uitgelegd kan worden door het verschil in frequentieregime waarin de bewegingsgerelateerde druk in de longen zich bevindt. De snelle oscillaties tijdens het hardlopen staan veel meer rationele verhoudingen toe, en volgens ons model zijn deze allemaal (sub)optimaal en neemt hun onderlinge verschil af naar mate de frequentie toeneemt. Niet alleen neemt het verschil tussen de optima van de werkzame waarde van energie in de verschillende verhoudingen af, de onderlinge afstanden worden ook kleiner. Dit zou kunnen verklaren waarom er meer observaties zijn van overgangen tussen synchronisatiepatronen tijdens hardlopen. Ongeacht de specifieke activiteit brengen synchrone oscillaties altijd een (sub)optimale energieoverdracht met zich mee. Om dus efficiënt te zijn moet de ademhaling zich altijd verhouden tot de cyclische beweging met een rationaal getal. Derhalve onderhouden goed getrainde personen vaker en langduriger een koppeling tussen ademhaling en beweging, zoals de beschikbare data ook laten zien.

Naast een verklaring voor de waarneming dat frequenties vaak vergrendeld zijn met een verhouding samengesteld uit gehele getallen, wijst het model verscheidene mechanismen aan die voor transitities tussen synchronisatiepatronen verantwoordelijk kunnen zijn: oscillatoroffset(s), amplitude(s) en globale frequentie. Tot op de dag van vandaag is het onderzoek naar de koppeling tus-

sen ademhaling en beweging beperkt. De studies die voorhanden zijn laten vaak na de precieze rol van bifurcatieparameters vast te stellen. Uit het hier gepresenteerde onderzoek komt naar voren dat behalve het tempo en de amplitude van ademhaling en beweging, ook de gemiddelde spierkracht en het gemiddelde luchtgehalte in de longen cruciale bifurcatieparameters kunnen zijn. <---

Referenties

- 1 C.A. Del Negro et al., 'Periodicity, mixed-mode oscillations, and quasiperiodicity in a rhythm-generating neural network'. *Biophys. J.*, **82**(1 Pt 1) (2002), pp. 206–214.
- 2 C.A. Del Negro, C. Morgado-Valle, J.L. Feldman, 'Respiratory rhythm: an emergent network property?' *Neuron*, **34**(5) (2002), pp. 821–830.
- 3 H. Haken, *Principles of Brain Functioning*, Springer, Berlin, 1996.
- 4 H. Haken, *Information and Self-Organization: A Macroscopic Approach to Complex Systems. Second enlarged edition*, Springer, New York, 2000.
- 5 W.L. Keith, R.H. Rand, '1:1 and 2:1 phase entrainment in a system of two limit cycle oscillators', *J. Math. Bio.*, **20** (1984), pp. 133–152.
- 6 B.A.K. Kay et al., 'Space-time behavior of single and bimanual rhythmic movements', *J. Exp. Psychol.: Human Percept. Perf.*, **13** (1987), pp. 178–192.
- 7 P.J. Beek, W.E.I. Rikkert, P.C.W. van Wieringen, 'Limit cycle properties of rhythmic forearm movements'. *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.*, **22** (1996), pp. 1077–1092.
- 8 L. Glass, 'Synchronization and rhythmic processes in physiology', *Nature*, **410**(6825) (2001), pp. 277–284.
- 9 J.A.S. Kelso, *Dynamic Patterns — The Self-organization of Brain and Behavior*, MIT Press, Cambridge MA, 1995
- 10 F.C. Hoppensteadt, *An Introduction to the Mathematics of Neurons: Modeling in the frequency domain*, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, 1997.
- 11 D.F. Boggs, 'Interactions between locomotion and ventilation in tetrapods'. *Comp. Biochem. Physiol. A Mol. Integr. Physiol.*, **133**(2) (2002), pp. 269–288.
- 12 I.S. Young, R.D. Warren, J.D. Altringham, 'Some properties of the mammalian locomotory and respiratory systems in relation to body mass'. *J. Exp. Biol.*, **164** (1992), pp. 283–294.
- 13 D.M. Bramble, F.A. Jenkins Jr., 'Mammalian locomotor-respiratory integration: implications for diaphragmatic and pulmonary design'. *Science*, **262**(5131) (1993), pp. 235–240.
- 14 D.M. Bramble, D.R. Carrier, 'Running and breathing in mammals', *Science*, **219**(4582) (1983), pp. 251–256.
- 15 P. Bernasconi et al., 'Running training and co-ordination between breathing and running rhythms during aerobic and anaerobic conditions in humans'. *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.*, **70**(5) (1995), pp. 387–393.
- 16 P.G. Amazeen, E.L. Amazeen, P.J. Beek, 'Coupling of breathing and movement during manual wheelchair propulsion'. *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.*, **27**(5) (2001), pp. 1243–1259.
- 17 D.A. Mahler et al., 'Ventilatory responses and entrainment of breathing during rowing', *Med. Sci. Sports. Exerc.*, **23**(2) (1991), pp. 186–192.
- 18 G.P. Siegmund et al., 'Ventilation and locomotion coupling in varsity male rowers'. *J. Appl. Physiol.*, **87**(1) (1999), pp. 233–242.
- 19 D.A. Mahler et al., 'Locomotor-respiratory coupling develops in novice female rowers with training'. *Med. Sci. Sports. Exerc.*, **23**(12) (1991), pp. 1362–1366.
- 20 R. Huys, A. Daffertshofer, P. Beek, 'Locomotion-respiration coupling: An account of the underlying dynamics'. *Journal of Sport & Exercise Psychology*, **26** (2004), p. S97.
- 21 A. Daffertshofer, R. Huys, P.J. Beek, 'Dynamical coupling between locomotion and respiration'. *Biological Cybernetics*, **90**(3) (2004), pp. 157–164.
- 22 M.H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, 'Complete Devils Staircase, Fractal Dimension, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map', *Physical Review Letters*, **50**(21) (1983), pp. 1637–1639.
- 23 R.J. Rodriguez et al., 'Electromyographic analysis of rowing stroke biomechanics'. *Journal of Sports Medicine and Physical Fitness*, **30**(1) (1990), pp. 103–108.
- 24 H. Wasjweller et al., 'Muscle action and stress on the ribs in rowing', *Physical Therapy in Sport*, **1** (2000), pp. 75–84.
- 25 A. Daffertshofer et al., 'Spatio-temporal patterns of encephalographic signals during polyrhythmic tapping', *Hum. Mov. Sci.*, **19**(4) (2000), pp. 475–498.
- 26 J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, Berlin, 1983
- 27 A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979.
- 28 M.R. Bonsignore et al., 'Ventilation and entrainment of breathing during cycling and running in triathletes', *Med. Sci. Sports Exerc.*, **30**(2) (1998), pp. 239–245.
- 29 F. Garlando et al., 'Effect of coupling the breathing and cycling rhythms on oxygen uptake during bicycle ergometry', *Eur. J. Appl. Physiol. Occup. Physiol.*, **54**(5) (1985), pp. 497–501.
- 30 P. Bernasconi, J. Kohl, 'Analysis of coordination between breathing and exercise rhythms in man', *J. Physiol.*, **471** (1993), pp. 693–706.
- 31 J. Cholewicki, P.C. Ivancic, A. Radebold, 'Can increased intra-abdominal pressure in humans be decoupled from trunk muscle co-contraction during steady state isometric exertions?' *Eur. J. Appl. Physiol.*, **87**(2) (2002), pp. 127–133.
- 32 M. Giaquinta, en S. Hildebrandt, *Calculus of Variations (Vol 1), Lagrangian Formalism, Mariano Giaquinta and Stefan Hildebrandt*, Springer, Berlin, 2004

Raoul Robert

Institut Fourier, 100 rue des Maths BP 74
38402 St Martin d'Heres
Frankrijk
robertr@fourier.ujf-grenoble.fr

Overzichtsartikel

Wiskunde en turbulentie

Ook aan het begin van het nieuwe millenium is de verklaring van het verschijnsel turbulentie nog steeds één van de grote fundamentele onderwerpen in de fysica. Daarnaast beschouwen vooraanstaande wiskundigen het analyseren van de Navier-Stokesvergelijkingen als één van de hoofdproblemen voor de toekomst van hun vakgebied. Wat is nu eigenlijk het verband tussen deze vergelijkingen en turbulentie. Raoul Robert, wetenschappelijk directeur van het Institut Fourier van de Universiteit Joseph Fourier te Grenoble, geeft een overzicht van huidige stand van het turbulentieonderzoek. Dit artikel verscheen eerder in de bundel 'Images des Mathématiques 2004' van het Centre national de la recherche scientifique. Vertaling: Reinie Ern  en Jaap Molenaar.

Aangezien niet iedereen vertrouwd zal zijn met vloeistofmechanica zal ik beginnen met een aantal begrippen te introduceren.

Het doel van de vloeistofmechanica

Het doel van de vloeistofmechanica is het beschrijven en berekenen van allerlei typen vloeistofstromingen. De moeilijkheden die hierbij opduiken worden al duidelijk bij een eenvoudig (en goedkoop) experiment. Bekijk eens de rook van een sigaret die opstijgt in een stille atmosfeer. De eerste paar tientallen centimeters stijgt de rook rustig op en lijkt het alsof de rookdeeltjes regelmatig en ongeveer evenwijdige banen volgen. Dan, ook gedurende zo'n tien centimeter, wordt deze regelmaat vervangen door kleine wervelingen waarvan de breedte vergelijkbaar is met die van de rookkolom; deze evolveren en vervormen al stijgend, om plotse-ling plaats te maken voor een beweging die zo rommelig is dat je met het oog niet meer de baan van een enkel deeltje kunt volgen.

De regelmatige beweging vlakbij de si-

garet heet *laminair*. Het verst van de sigaret vandaan heet de beweging *turbulent*, terwijl daar tussen in de overgangszone zit. De omstandigheden in deze drie zones lijken erg op elkaar, maar toch zijn de bewegingen erg verschillend. Als we aannemen dat de bewegingen door eenzelfde vergelijking beschreven worden, dan kunnen we vermoeden dat het oplossen van die vergelijking nog wel wat voeten in de aarde zal hebben.

In de studie van de stroming in de laminaire en de overgangszone zijn zoveel vorderingen gemaakt in de twintigste eeuw dat ze als begrepen beschouwd kunnen worden; het turbulente gedrag blijft daarentegen een raadsel.

De Euler- en Navier-Stokesvergelijkingen

De eerste vergelijking om de beweging van een vloeistof te beschrijven is door Euler opgesteld in 1755: het is de vergelijking (of beter: de vergelijkingen) voor de ideale vloeistof, oftewel een incompressibele vloeistof zonder inwendige wrijving.

In de meest gebruikelijke vorm luiden de bewegingsvergelijkingen van Euler in

een gebied Ω in de ruimte als volgt:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (\text{E})$$

waar $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ het snelheidsveld is van de vloeistof en $p(t, \mathbf{x})$ de druk. Bij deze vergelijkingen hoort een randconditie voor de snelheid op de rand $\partial\Omega$ van het gebied: bijvoorbeeld $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, waar $\mathbf{n}$ de naar buiten gerichte normaalvector is. Om de beweging van de vloeistof volledig vast te leggen is het ook nodig een beginprofiel $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ voor te schrijven.

Het is opvallend dat dit, samen met die voor de trillende snaar, de eerste partiële differentiaalvergelijking is uit de mathematische fysica die ooit opgeschreven werd, en dat de analyse ervan nog steeds weerstand biedt...

Het heeft enige tijd geduurd voordat men in staat was om de inwendige wrijving te modelleren. De vergelijking voor viskeuze vloeistof, de Navier-Stokesvergelijking, is in 1824 door Navier opgesteld. Onder de aanname dat de vloeistof incompressibel is met dichtheid 1 luiden deze:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (\text{N-S})$$

De parameter ν is de kinematische viscositeit van de vloeistof. Er moet natuurlijk een randvoorwaarde bij, waarvoor meestal de 'no slip'-voorwaarde van

Stokes genomen wordt: $\mathbf{u} = 0$ op $\partial\Omega$. Tevens moet er een beginprofiel $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ gespecificeerd worden.

Nu deze modellen geïntroduceerd zijn, gaan we verder met een belangrijk fysiek kenmerk van stromingen: het Reynoldsgetal. In de vergelijkingen (E) en (N-S) heet de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ de *convectieve term*: het is een niet-lineaire term die instabiliteit kan veroorzaken, en die verantwoordelijk gehouden wordt voor het mogelijk turbulente karakter van stromingen. De term $\nu\Delta\mathbf{u}$ is de viskeuze term; die heeft het tegenovergestelde effect, want deze strijkt namelijk de stroming glad en leidt tot het laminaire karakter ervan. Het is de orde van grootte van de verhouding tussen deze twee termen die het gedrag van de stroming zal bepalen. We definiëren het dimensieloze Reynoldsgetal van de stroming als volgt:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \approx \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\nu \Delta \mathbf{u}|},$$

waar L en U de karakteristieke lengteschaal, respectievelijk de karakteristieke snelheid van de stroming zijn.

Experimentele waarnemingen vertellen ons nu dat er een kritiek Reynoldsgetal Re^* bestaat, zodanig dat de stroming laminair is als $\text{Re} < \text{Re}^*$ en turbulent als $\text{Re} > \text{Re}^*$. Re^* is geen universele waarde; hij hangt onder andere af van de geometrie van het gebied en van het beginprofiel, maar grof gezegd ligt deze waarde in de orde van 100.

Aangezien de kinematische viscositeit van lucht ongeveer $0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$ is, kunnen we meteen de orde van grootte van Re voor een aantal gevallen opschrijven. Luchtstroming rond een auto:

$$\text{Re} \approx 10^7 \quad (U = 100 \text{ km/uur}, L = 4 \text{ m}).$$

Atmosferische luchtstroming:

$$\text{Re} \approx 10^{12} \quad (U = 10 \text{ m/s}, L = 1000 \text{ km}).$$

Vlucht van een vlieg:

$$\text{Re} \approx 300 \quad (U = 1 \text{ m/s}, L = 0,5 \text{ cm}).$$

We zien dus dat de meeste stromingen die voor ons waarneembaar zijn volledig turbulent zijn. De vlieg is een opmerkelijk ge-

val, omdat deze voortdurend pendelt tussen de laminaire en de turbulente fase, wat hem vast en zeker interessante problemen oplevert bij het onder controle houden van zijn vlucht. Hetzelfde geldt voor sigarettenrook, wat verklaart waarom we de drie fases tegelijkertijd kunnen zien.

Het is handig om de Navier-Stokesvergelijkingen dimensieloos op te schrijven door geschikte schalingen toe te passen. We krijgen dan:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\text{Re}}\Delta\mathbf{u} = -\nabla p.$$

Wiskundige aanpak

Het meeste dat we weten over het oplossen van het Cauchy probleem voor de Navier-Stokesvergelijkingen met beginprofiel $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ in een begrensde gebied Ω in $\mathbb{R}^3$ is afkomstig van het werk van Leray (1933-34).

Stelling. Als $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ voldoende glad is op $\overline{\Omega}$, $\text{div } \mathbf{u}_0 = 0$ en $\mathbf{u}_0 = 0$ op $\partial\Omega$, dan bestaat er een unieke gladde oplossing op een tijdsinterval $[0, T^*]$. Na T^* bestaat er een minder gladde oplossing (ook wel 'zwakke oplossing' genoemd), waarvan we de uniciteit niet kunnen aantonen.

De (expres) vage formulering van de stelling roept om opheldering.

- De term 'voldoende glad' (ook wel 'regulier' genoemd) betekent dat zowel $\mathbf{u}_0$ als zijn afgeleiden kwadratisch integreerbaar zijn (in de zin van distributies) op Ω .
- Het tijdstip $T^* > 0$ hangt natuurlijk af van $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$.
- De betekenis van een 'zwakke oplossing' is als volgt. Als $\mathbf{u}$ niet glad is, heeft de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ a priori geen betekenis. We kunnen er wel een betekenis aan toekennen: vanwege de voorwaarde $\text{div } \mathbf{u} = 0$ geldt er dat $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \partial_i(u_i \mathbf{u})$. Deze laatste term bestaat in de zin van distributies zodra $\mathbf{u}$ kwadratisch integreerbaar is. Het is dus voldoende om de term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ in deze vorm te schrijven en de vergelijking opgelost te beschouwen in de zin van distributies op Ω .
- Volgens Leray wordt de beweging turbulent op het ogenblik dat de reguliere oplossing plaats maakt voor een zwakke oplossing die oneindige vorticiëit $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ kan hebben in bepaalde punten.

- De vraag "Houdt de oplossing inderdaad op regulier te zijn na bepaalde tijd?" is één van de millenniumproblemen van Clay.

We zien dat deze stelling in feite het bestaan van laminaire stromingen behandelt, maar niet het turbulente geval, want het bestaan van een zwakke oplossing zonder uniciteit is fysisch inconsistent.

En de Eulervergelijking?

Het eerste belangrijke resultaat van de Eulervergelijking dat vergelijkbaar is met dat van Leray komt van Kato (1972).

Stelling. Als $\mathbf{u}_0$ voldoende glad is, met $\text{div } \mathbf{u}_0 = 0$ en $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ op $\partial\Omega$, dan bestaan er een tijdstip $T^* > 0$ en een unieke gladde oplossing van de Eulervergelijkingen op het interval $[0, T^*]$.

We kunnen hierbij de volgende opmerkingen maken:

- De gladheid komt hier terug in het feit dat er aan een Höldervoorwaarde voor de afgeleiden van $\mathbf{u}_0$ voldaan dient te zijn.
- We weten niets over het eventuele bestaan van zwakke oplossingen voor $t > T^*$.
- We kunnen eenvoudig nagaan dat voor een reguliere oplossing de kinetische energie $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^2 dx$ behouden is.

Samenvattend kunnen we zeggen dat ongeveer een eeuw verwoede inspanningen een raadsel uit de fysica heeft gekoppeld aan een uiterst zwaar wiskundig probleem. Het lijkt er dus op dat we op dit moment nog niet echt ver gekomen zijn. Om deze deprimerende constatering te verzachten zullen wij nu precieser uitwerken wat de fysicus verwacht.

Terug naar de fysica: wat willen we beschrijven?

We hebben gezien dat de turbulente situatie overeenkomt met grote waarden van het Reynoldsgetal Re .

Het aantal vrijheidsgraden

Alhoewel de beschrijving van het snelheidsveld van een stroming in principe een oneindig aantal vrijheidsgraden impliceert, suggereert een heuristische redenering van Kolmogorov dat een viskeuze stroming in feite maar van een eindig aantal vrijheidsgraden afhangt, in de orde van $\text{Re}^{9/4}$. Dit getal geeft de dimensie van de

ruimte aan waarin we het snelheidsveld dienen te approximeren om een redelijk nauwkeurige numerieke oplossing te verkrijgen.

We zien dat het aantal vrijheidsgraden in een turbulente stroming al snel gigantisch groot wordt: voor de atmosfeer, waarvoor we geschat hebben dat $Re = 10^{12}$, krijgen we een dimensie van 10^{27} ! Om deze reden levert turbulentie nu, maar ook in de toekomst, een groot probleem op voor effectieve numerieke berekeningen.

Er zij opgemerkt dat de redenering van Kolmogorov ervan uitgaat dat de oplossing van de Navier-Stokesvergelijkingen zo glad is dat op kleine schaal $\mathbf{u}$ constant genomen mag worden, hetgeen voor de wiskundigen juist de kern van het probleem is. Hoe kijken de fysici aan tegen turbulente stromingen? Hierbij dienen we twee gevallen te onderscheiden, al naar gelang de stroming in dimensie twee of drie plaatsvindt. Dit onderscheid is niet puur technisch, maar het weerspiegelt zeer uiteenlopende waargenomen verschijnselen. De tweedimensionale benadering, waarbij de stroming in een vlak of op een oppervlakte plaatsvindt, wordt in de praktijk vaak gebruikt als de vloeistof zich in een dun laagje beweegt. De dikte van de laag is dan verwaarloosbaar ten opzichte van de horizontale schaal van de laag. Bijvoorbeeld, de bewegingen van de atmosfeer of de oceanen kunnen als tweedimensionaal beschouwd worden.

De voornaamste eigenschappen van turbulentie in dimensie twee zijn het behoud van de kinetische energie en de neiging om grote, stabiele structuren te vormen. We noemen dit *coherente structuren*, zie figuur 1.

Ter vergelijking: in dimensie drie, denk bijvoorbeeld aan stroming in een windtunnel, is er een grote dissipatie van kinetische energie en ziet men over het algemeen geen coherente structuren. De metingen verschaffen informatie over het spectrum van de kinetische energie en de statistische verdeling van de snelheidsverschillen $\mathbf{u}(t, x) - \mathbf{u}(t, x')$ voor naburige punten x en x' op tijdstip t .

Turbulentie in dimensie twee

In dimensie twee is de grote vraag hoe het behoud van de kinetische energie en het ontstaan van coherente structuren te verklaren is. Volgens Onsager is de vergelijking van Euler hiervoor prima geschikt,

want deze behoudt energie. Volgens hem volgt het ontstaan van coherente structuren uit een statistisch evenwichtsmechanisme.

Laten we ter verduidelijking even teruggaan naar de Navier-Stokesvergelijkingen. In dimensie twee gebeurt er iets opmerkelijks: de problemen in de stelling van Leray verdwijnen:

- Voor glad beginprofiel $\mathbf{u}_0$ bestaat de reguliere oplossing van Navier-Stokes altijd.
- Als $\mathbf{u}_0$ niet glad is, bestaat er toch een unieke zwakke oplossing.

Voor de Eulervergelijking wordt de situatie ook een stuk aantrekkelijker. Door de rotatie van de Eulervergelijking (E) te nemen, krijgt men een vergelijking voor de vorticeit $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$ (in twee dimensies is dat een scalaire grootheid!):

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{div}(\omega \mathbf{u}) = 0, \\ \text{rot } \mathbf{u} = \omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ op } \partial \Omega. \end{cases} \quad (E_\omega)$$

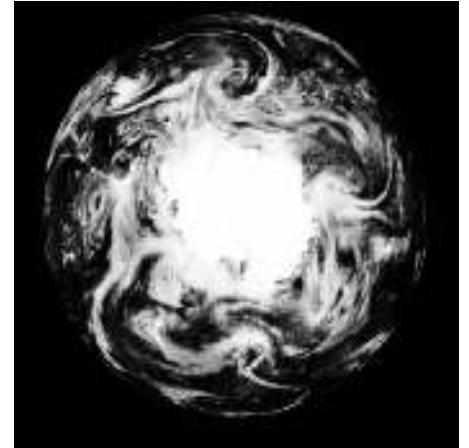
Dit is een transportvergelijking voor ω met daaraan gekoppeld een elliptisch probleem voor $\mathbf{u}$. Hiervoor geldt het volgende existentie- en uniciteitsresultaat:

Stelling. (Youdovitch 1963) *Voor ieder meetbaar en begrensd vorticeitsbeginprofiel ω_0 bestaat er een meetbare, begrensde, zwakke oplossing $\omega(t, x)$ voor het probleem (E_ω) . Deze oplossing is uniek.*

Opmerking

De situatie wordt een stuk ingewikkelder als ω_0 een maat mag zijn. Dit is bijvoorbeeld het geval als het initiële snelheidsveld discontinu is. Dit treedt op bij wervelwinden. Maar voor ons voldoet een begrensde initiële vorticeit.

In dimensie twee geldt de volgende geruststellende eigenschap: onder redelijke voorwaarden nadert de oplossing van de Navier-Stokesvergelijking met beginwaarde $\mathbf{u}_0$ tot de oplossing van de Eulervergelijking met diezelfde beginwaarde indien de viscositeit naar nul gaat. Onder redelijke voorwaarden verstaan we dat we ofwel te maken hebben met ruimtelijk periodieke oplossingen (stromingen op een torus), ofwel te maken hebben met een wrijvingsvoorwaarde op de rand die de Stokesconditie $\mathbf{u} = 0$ op de rand van het gebied vervangt. Zo'n wrijvingsconditie



Figuur 1 Op deze satellietfoto zien we een systeem van grote atmosferische wervels om de zuidpool. Dit zijn 'coherente structuren', die ontstaan door de karakteristieke zelforganisatie van tweedimensionale turbulente stromingen. (foto NASA, Galileomissie)

werd oorspronkelijk al door Navier voorgesteld en is in veel gevallen fysisch realistischer dan een no-slipconditie.

We concluderen uit het bovenstaande dat het legitiem is om turbulentie in dimensie twee te bestuderen aan de hand van de modelvergelijking van Euler, die opgesteld is om het gedrag van vloeistoffen in het geval van kleine viscositeit te beschrijven. Dit had Onsager inderdaad goed aangevoeld. Aangezien we aan kunnen tonen dat de oplossing die gegeven wordt door de stelling van Youdovitch energie behoudt, is de eerste eigenschap van turbulentie in dimensie twee gemodelleerd.

Het ontstaan van coherente structuren is een ingewikkelder vraagstuk. Wat gebeurt er met de oplossingen van de Eulervergelijking? Met behulp van numerieke simulaties is het bijvoorbeeld mogelijk de evolutie van een zogenaamde wervelvlek te bepalen, waarvoor geldt dat ω_0 constant is in een bepaald gebied en 0 daarbuiten. Aangezien de vorticeit ω vervoerd wordt door een incompressibel snelheidsveld, zal ω op ieder ogenblik een vlek blijven met dezelfde oppervlakte, maar deze vlek zal zich over het algemeen op een zeer ingewikkelde manier vervormen, bijvoorbeeld door draden uit te schieten die steeds dunner worden naargelang zij zich vervormen en oprollen. Met andere woorden, ω gaat variëren op een steeds kleiner wordende ruimteschaal. Als we de stroming op steeds kleinere schaal observeren, dan wordt het ω -profiel steeds ingewikkelder en convergeert het niet. We spreken dan over turbu-

lente chaos op kleine schaal. Echter, als we niet de details bekijken maar het lokale gemiddelde van ω nemen op een vastgelegde middelgrote schaal, dan zien wij dat dit gemiddelde wel convergeert. Met andere woorden, als t naar oneindig gaat, convergeert $\omega(t, x)$ in de zwakke topologie naar een zekere functie ω^* (zie figuur 2). Aan gezien de overdekking ($\omega \rightarrow \mathbf{u}$) compact is, volgt er dat $\mathbf{u}$ convergeert in de L^2 -norm naar een bijbehorend snelheidsveld $\mathbf{u}^*$. Deze $\mathbf{u}^*$ is het snelheidsveld dat de coherente structuur beschrijft.

Hoe kunnen wij in het algemeen laten zien dat dit mechanisme het juiste is voor de oplossing van de Eulervergelijkingen? Dat weten wij nu nog niet. Echter, voor een gegeven ω_0 kunnen wij wel een geschikte kandidaat voor de limiet ω^* vinden.

Bepaling van ω^*

Om dit te doen passen we het programma van Onsager toe, dat neerkomt op het toepassen van de statistische mechanica van Boltzmann op de Eulervergelijking. Gebruikmakend van de theorie van de 'large deviations', bestaat de eerste stap uit het opstellen van de functionele entropie. Dit is een maat voor de intuïtieve notie van wanorde in een turbulente stroming. De tweede stap is het oplossen van het variationale probleem van het maximaliseren van deze entropie onder de voorwaarden die horen bij de invarianten van de Eulervergelijking. Dit leidt tot ω^* .

Dan moet nog aangetoond worden dat ω inderdaad convergeert naar ω^* . Net als bij vele andere resultaten uit de statistische mechanica, geldt ook hier dat we de ergodiciteit van het dynamische systeem gedefinieerd door de Eulervergelijking in dimensie twee — dat is een oneindig dimensionaal Hamiltoniaans systeem — zouden moeten bewijzen. Helaas, dat kunnen wij (nog) niet. Wij kunnen daarentegen wel, door numerieke simulaties te vergelijken met laboratoriumexperimenten, controleren dat het gedrag correct beschreven wordt.

Turbulentie in dimensie drie

In dimensie drie zijn er veel waarnemingen gedaan in windtunnels. Dit heeft geleid tot het ontdekken van een aantal experimentele wetmatigheden. Overigens, in dimensie drie wordt over het algemeen niet het ontstaan van structuren zoals in dimensie twee waargenomen.

De energie-dissipatiwet

Een verbazend resultaat is als volgt: als de viscositeit naar nul gaat, gaat in een turbulente stroming de dissipatie van de kinetische energie per massa-eenheid naar een limiet die niet nul is:

$$\frac{dE}{dt} \rightarrow D,$$

waarin de factor D , die dimensie $L^2 T^{-3}$ heeft, een functie van de 'intensiteit' van de turbulentie is. dE/dt is hier een gemiddelde waarde, genomen over het gehele gebied. Hieruit blijkt dat de dissipatie van de energie in een turbulente stroming in dimensie drie niet afhangt van de viscositeit.

De 2/3-wet

Zij Ω een gebied in de turbulente stroming. Voor ieder vast tijdstip t geldt:

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\mathbf{u}(t, x + \xi) - \mathbf{u}(t, x)|^2 dx \approx K |\xi|^{2/3}.$$

De factor K hangt alleen van D af en niet van Ω . Deze tweede wet geeft belangrijke informatie over de regulariteit van het turbulente snelheidsveld.

De 4/5-wet

Deze wet komt voort uit de berekeningen van Von Kármán en Howarth (1938), die gecompleteerd zijn door Kolmogorov in 1941. Een erg interessante algemene versie, zonder isotropievoorwaarde, is door Monin in 1959 gegeven. Om deze wet op te schrijven nemen we aan dat het turbulente snelheidsveld gegeven wordt door een stochastische oplossing van de Navier-Stokesvergelijkingen $\mathbf{u}(t, x, a)$, met a een stochastische parameter. Dit betekent dat voor iedere vaste a $\mathbf{u}(t, x, a)$ een oplossing is van de Navier-Stokesvergelijkingen, en wel in de zwakke zin aangezien het veld volgens de 2/3 wet niet regulier kan zijn. We maken een aantal aannames:

- De gemiddelde waarde is nul: voor alle t en x geldt $\langle \mathbf{u}(t, x, a) \rangle = 0$, waar $\langle \cdot \rangle$ het ensemblagemiddelde voorstelt.
- Het veld is homogeen in de ruimte: voor alle t en ξ heeft $\mathbf{u}(t, x + \xi, a)$ dezelfde kansverdeling als $\mathbf{u}(t, x, a)$.
- Het veld is isotroop in de sterke zin: voor iedere reële unitaire matrix A

heeft $A^t \mathbf{u}(t, Ax, a)$ dezelfde kansverdeling als $\mathbf{u}(t, x, a)$.

Zij $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x + \xi, a) - \mathbf{u}(t, x, a)$. De 4/5-wet zegt dan:

$$\left\langle \left(\delta \mathbf{u} \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right)^3 \right\rangle = -\frac{4}{5} D |\xi|. \quad (4/5)$$

Opmerkingen

- D is hier de constante die ook voorkomt in de dissipatiwet. Deze formule verbindt dus op een verbazend eenvoudige manier de energiedissipatie van de turbulente stroming aan de statistiek van de snelheidsverschillen.
- We hebben niet aangenomen dat het veld $\mathbf{u}$ stationair is, en ook niet dat het invariant is onder schaalverandering.
- Er bestaat een niet-isotrope versie van dit resultaat (Monin) die als volgt luidt:

$$D = -\frac{1}{4} \operatorname{div}_{\xi} \langle (\delta \mathbf{u})^2 \delta \mathbf{u} \rangle_{\xi=0}.$$

- De 4/5-formule wordt verkregen met behulp van formele bewerkingen uit de Navier-Stokesvergelijking, gevolgd door het nemen van de limiet $\nu \rightarrow 0$. De wiskundige rechtvaardiging van de methode is niet duidelijk. Desalniettemin wordt deze wet algemeen geaccepteerd door alle fysici die zich met turbulentie bezig houden (cf. Frisch).

Een echte theorie zou op rigoureuze manier deze wetten moeten kunnen afleiden vanuit de bewegingsvergelijkingen, hetzij Navier-Stokes, hetzij Euler. Maar de keuze tussen deze twee modellen geeft direct al een probleem.

Viskeus of niet viskeus?

We hebben laten zien dat in dimensie twee het mogelijk is turbulentie in principe te beschrijven vanuit de Eulervergelijking, wat de zaak behoorlijk vereenvoudigt. Hoe zit het in dimensie drie? De nu bekende resultaten zijn nogal mager. Het feit dat de dissipatie van energie groot is brengt veel fysici ertoe te denken dat de viscositeit, zelfs al is die verdwijnend klein, altijd een rol speelt. We zouden dus de Navier-Stokesvergelijking moeten bestuderen in de limiet $\nu \rightarrow 0$. Zo dacht ook Leray erover. In feite wantrouwde hij de Eulervergelijking vanwege de paradox van d'Alembert, een paradox die men kan

beschouwen als het zichtbare stuk van de ijsberg aan problemen die deze vergelijking oplevert.

Een zekere versie van deze paradox zegt dat voor een stationaire, rotatievrije stroming rond een obstakel de resultante van de drukkrachten op het obstakel nul is. Kortom, het obstakel wordt niet meegesleurd door de stroming, wat duidelijk tegen de ervaring ingaat....

Ik ga nu een andere manier uiteenzetten om naar de zaken te kijken. Deze enigszins vergeten aanpak komt van Onsager. Het viel Onsager op dat de viscositeit geen rol speelt in de 4/5 wet; de dissipatie is slechts gekoppeld aan de irregulariteit van het snelheidsveld. We kunnen dus $\nu = 0$ nemen, dat wil zeggen met de Eulervergelijking werken. Het probleem is dan dat de Eulervergelijkingen een Hamiltoniaans systeem vormen, en deze systemen zijn energiebehoudend. Laten we eens kijken hoe je energiebehoud aantooit voor een oplossing van de Eulervergelijking. Ter vereenvoudiging nemen we aan dat de oplossingen periodiek in de ruimte zijn.

We beginnen met de vergelijking

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p.$$

We nemen het inproduct met $\mathbf{u}$ en integreren over de torus. Dit geeft

$$\int \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int u_i \partial_i u_k u_k \, dx = - \int \nabla p \cdot \mathbf{u} \, dx,$$

waar we de gebruikelijke sommatieconventie voor herhaalde indices volgen.

We merken op dat $u_i \partial_i u_k u_k = u_i \partial_i (\mathbf{u}^2 / 2)$ en we zien onmiddellijk door partiële integratie dat de twee laatste integralen nul zijn aangezien $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Dan hoeven we alleen nog maar op te merken dat de eerste integraal gelijk is aan de afgeleide van de kinetische energie naar de tijd.

Om deze berekening te verantwoorden, moeten op zijn minst alle uitdrukkingen die wij opgeschreven hebben zinvol zijn, wat een zekere regulariteit veronderstelt van het veld $\mathbf{u}$. Onsager realiseerde zich dat de turbulentie kennelijk beschreven wordt door oplossingen (in een gegeneraliseerde zin) van de Eulervergelijking, die zodanig irregulier zijn dat de energie niet behouden is. De oplossingen bedacht door Onsager zijn precies de zwakke oplossingen die wij eerder ingevoerd hebben. Bestaan dergelijke oplossingen?

Ja, Shnirelman heeft recent een voorbeeld van een zwakke oplossing gegeven die de kinetische energie dissipeert.

We hebben dus potentiële kandidaten om turbulente stroming te beschrijven: zwakke oplossingen van de Eulervergelijking die energie dissiperen. Jammer genoeg hebben we geen algemeen existentie-resultaat voor dergelijke oplossingen (we kunnen het Cauchy-probleem voor niet-gladde beginwaarden niet oplossen) en nog minder een uniciteitsresultaat. Toch kunnen we een kleine extra stap in deze richting zetten.

Het Onsager-vermoeden

Gebruikmakend van de 4/5-wet heeft Onsager in 1949 het vermoeden geopperd dat de zwakke oplossingen van Euler, die aan een voorwaarde van Hölder van orde strikt groter dan $1/3$ voldoen, energie moeten behouden. Dit vermoeden is in vergetelheid geraakt tot 1992, toen Eyink het belang van dit probleem weer belicht heeft en een bewijs gegeven heeft van een zwakkere probleemstelling. In 1994 hebben de drie wiskundigen Constantin, E (dat is zijn volledige naam) en Titi een esthetisch en eenvoudig bewijs gegeven van een sterker resultaat.

We kunnen echter meer bereiken en de dissipatie van lokale energie in geval van irregulariteit nauwkeurig expliciet maken.

Stelling. (Duchon en Robert, 2000) Zij $\mathbf{u}$ een zwakke oplossing van de Eulervergelijking op de torus Π^3 , zodat $|\mathbf{u}|^3$ integreerbaar is op $(0, T) \times \Pi^3$. Zij φ een oneindig differentieerbare functie met compact support op $\mathbf{R}^3$, die positief is, met integraal gelijk aan 1, en symmetrisch. Zij, voor $\varepsilon > 0$,

$$\varphi^\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right),$$

$$D_\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{4} \int \nabla \varphi^\varepsilon \xi \cdot \delta \mathbf{u} (\delta \mathbf{u})^2 d\xi.$$

Als ε naar 0 gaat, convergeert $D_\varepsilon(\mathbf{u})$, die een functie van t en x is, in de zin van distributies op $(0, T) \times \Pi^3$ naar een distributie $D(\mathbf{u})$ die onafhankelijk is van φ , en voldoet aan de volgende lokale energievergelijking:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + p \right) \mathbf{u} \right) + D(\mathbf{u}) = 0.$$

Opmerkingen

- Het bewijs volgt uit een aantal eenvoudige bewerkingen op een geregulariseerde versie van de Eulervergelijking.
- Uit dit resultaat volgt door het integreren van de lokale energievergelijking over het hele gebied een bewijs van het vermoeden van Onsager, onder de voorwaarde dat het snelheidsveld regulier is:

$$\int |\mathbf{u}(t, x + \xi) - \mathbf{u}(t, x)|^3 dx \leq c(t) |\xi| \sigma(|\xi|),$$

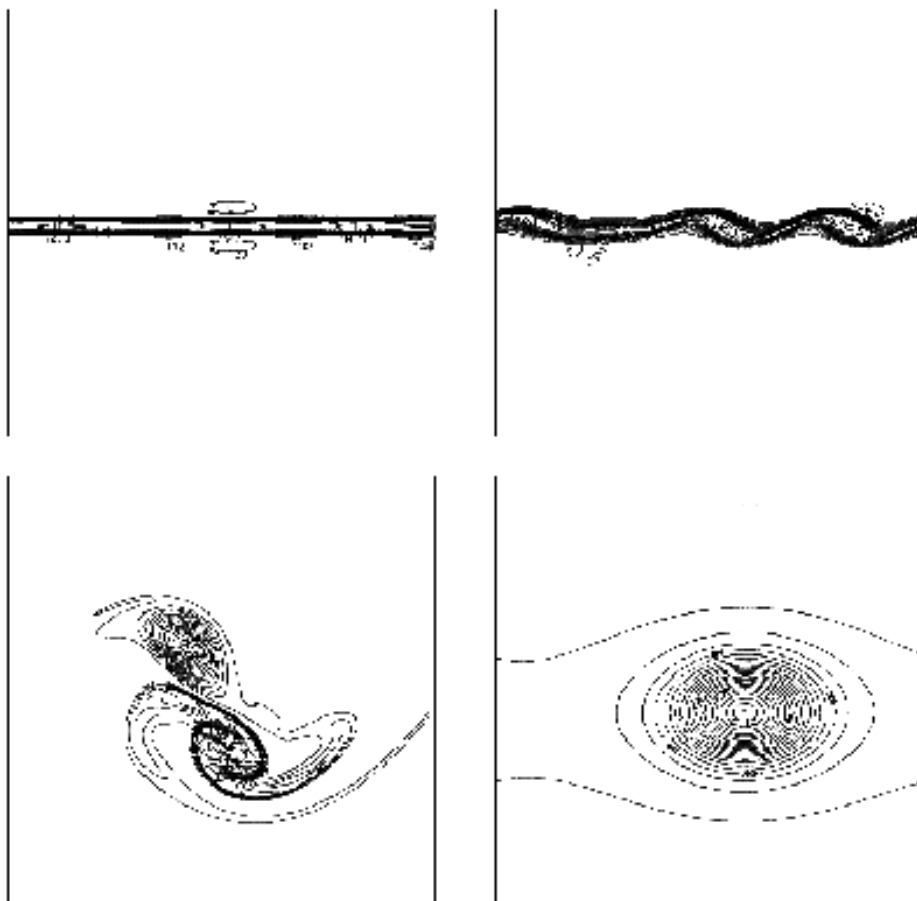
waarin $\sigma(r)$ naar 0 gaat als r naar 0 gaat en $\int_0^T c(t) dt < \infty$.

- De lokale energievergelijking legt een natuurlijke voorwaarde op: energie kan alleen gedissipeerd worden en niet ontstaan. We nemen daarom aan dat $D(\mathbf{u})$ positief is. Deze voorwaarde moet natuurlijk gezien worden in het licht van de entropievoorwaarden die voorkomen in de studie van niet-lineaire hyperbolische vergelijkingen. Wij komen daarop nog terug.
- Het is makkelijk om vanuit deze vergelijking een rigoureuus bewijs te geven van de 4/5-wet onder redelijke aannames over het snelheidsveld.

Een instructief model: de Burgersvergelijking in één dimensie

De betekenis van de voorwaarde $D(\mathbf{u}) \geq 0$ die wij zomaar opgelegd hebben kan verduidelijkt worden aan de hand van de Burgersvergelijking. Laten wij beginnen met een aantal bekende feiten over niet-lineaire hyperbolische vergelijkingen in het algemeen. Denk hier bijvoorbeeld aan vergelijkingen die de evolutie beschrijven van een compressibel niet-viskeus gas. Voor deze vergelijkingen zijn wij ook verplicht met niet-reguliere zwakke oplossingen te werken. De reden hiervoor is dat, als we vanuit een reguliere beginwaarde werken, de oplossing de neiging heeft om in eindige tijd schokken te ontwikkelen, dat wil zeggen, er ontstaan discontinuïteiten. Dit fenomeen is heel algemeen en kan expliciet beschreven worden met de meest eenvoudige vergelijking van dit type, namelijk de Burgersvergelijking in ruimtedimensie een:

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad (\text{B})$$



Figuur 2 Numerieke simulatie van de evolutie van een tweedimensionale stroming, waarvoor het beginsprofiel bestaat uit een dunne strook waar de vorticititeit constant en ongelijk nul is en met vorticititeit nul daarbuiten. De strook is instabiel en er ontstaan wervels. De krommen stellen hier isovorticititeitslijnen voor. Uiteindelijk komt er een stationaire toestand met een enkele wervel. De viscositeit, die, hoe klein ook, onmisbaar is voor de stabiliteit van de numerieke berekening, dempt de variaties in de vorticititeit onder een bepaalde ruimteschaal. Daarom treedt er convergentie op naar een stationaire toestand. Dit fenomeen is heel algemeen. Simulaties door J. Somméria, C. Staquet en R. Robert, op de CRAY 2 van het Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche (CCVR, Palaiseau, Frankrijk).

waar u nu een scalaire functie op de reële rechte is. Voor deze vergelijking tonen we eenvoudig aan dat als we van een reguliere beginwaarde uitgaan, bijvoorbeeld als u_0 oneindig differentieerbaar met compacte support is, er een unieke oplossing bestaat die regulier is op een eindig interval $[0, T^*)$. Op tijdstip T^* ontstaan er discontinuïteiten in de oplossing.

Als u_0 slechts integreerbaar verondersteld wordt, kunnen we aantonen dat er op ieder tijdstip een zwakke oplossing bestaat. Het probleem met zwakke oplossingen is dat we de uniciteit voor het Cauchy-probleem kwijtraken: er kunnen meerdere oplossingen zijn bij een gegeven beginwaarde. Er moet dan een extra voorwaarde bij om de 'goede' oplossing te selecteren: de entropievoorwaarde van Lax. In het geval van de Burgersvergelijking komt deze voorwaarde neer op de eis dat de discontinuïteiten van de oplossing neerwaartse sprongen hebben. De verklaring dat deze voorwaarde de fysisch toelaatba-

re oplossing selecteert heeft te maken met het feit dat de informatie bevat in de beginwaarde niet vernietigd of gecreëerd kan worden op het niveau van schokken.

Wij kunnen ook aantonen dat deze oplossing de limiet van de viskeuze oplossing is die verkregen wordt door een kleine viscositeit aan het systeem toe te voegen en deze naar nul te laten gaan. We kunnen dan aantonen dat er één zwakke entropische oplossing bestaat voor het Cauchy probleem (stelling van Kruzhkov).

De berekening van de lokale energievergelijking voor de zwakke oplossingen van de Eulervergelijking kan uitgebreid worden naar de zwakke oplossingen van de Burgersvergelijking. Dit geeft

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left(\frac{1}{3} u^3 \right) + D(u) = 0.$$

Als we aannemen dat u discontinu is in de punten x_i , met rechter en linker limieten

u_i^+ en u_i^- , dan kunnen we de distributie $D(u)$ expliciet maken:

$$D(u) = -\frac{1}{12} \sum_i (u_i^+ - u_i^-)^3 \delta_{x_i}.$$

De entropievoorwaarde van Lax betekent hier dus ook dat $D(u)$ positief is, en we zien dat de energiedissipatie op het niveau van de schokken plaatsvindt.

Statistische oplossingen

We hebben gezien dat in een turbulente stroming het aantal vrijheidsgraden gigantisch is. Hieruit volgt dat alle waarnemingen een statistisch karakter hebben. Vanuit wiskundig oogpunt leidt dit tot het probleem van het zoeken van statistische oplossingen.

A priori is het concept van een statistische oplossing van een evolutievergelijking eenvoudig: we nemen aan dat het beginprofiel van een stochastische parameter afhangt. De oplossing hangt dan daar ook van af en is daarmee stochastisch. Deze aanpak werkt goed als we het bijbehorende Cauchyprobleem kunnen oplossen.

Aangezien dit niet altijd het geval is, nemen we over het algemeen genoeg met bredere definities van de notie van statistische oplossing, definities die netelige problemen geven (zoals uniciteit) maar waarvan het interessant is om toch statistische oplossingen te zoeken voor vergelijkingen waarvan we het Cauchy-probleem niet op kunnen lossen (bijvoorbeeld Euler). Zelfs als we het bijbehorende Cauchyprobleem wel kunnen oplossen, is het overigens nog niet zo eenvoudig om de volledige oplossing op te schrijven als functie van het beginprofiel, en dus als functie van de stochastische parameter.

Laten we dit expliciet maken voor de Burgersvergelijking. We nemen als beginproces: $u_0(x, a)$, met a een stochastische parameter. De stroming beschreven door de Burgersvergelijking geeft op het tijdstip t een nieuw proces $u(t, x, a)$. Wat kunnen wij hierover zeggen?

De eerste stap voorwaarts bij dit vraagstuk is gezet door Sinai (1992): hij nam voor u_0 de Brownse beweging vanuit 0. Hij kan dan op het tijdstip t het proces $u(t, x, a)$ beschrijven: het is een zogenaamd *Lévyproces*, een welbekend proces dat sprongen kan hebben. Hiervoor gebruikte Sinai de klassieke constructie van Hopf-Cole, die het mogelijk maakt om de

zwakke entropische oplossing van de Burgersvergelijking als functie van de beginwaarde expliciet te maken.

De tweede stap voorwaarts is die van Carraro en Duchon (1994): deze auteurs bekeken het geval dat u_0 een proces van Lévy is, homogeen aan de rechterkant (dus translatie-invariant) en met negatieve sprongen. Zij tonen aan dat op het tijdstip t , $u(t, x, a)$ nog steeds een homogeen Lévyproces is met negatieve sprongen. Verder verkrijgen zij expliciet de evolutievergelijking, die de evolutie van de Lévy-exposant van het proces bepaalt (een homogeen Lévyproces wordt eenvoudig beschreven met een bepaalde functie die men de Lévy-exposant noemt).

De derde stap voorwaarts komt van Bertoin (1998): Bertoin behandelt het geval dat u_0 een Lévyproces is vanuit 0. In tegenstelling tot de vorige auteurs gebruikt Bertoin net als Sinai de Hopf-Coletransformatie, terwijl Carraro en Duchon die niet gebruiken en daarom de notie van intrinsieke statistische oplossing moeten invoeren. Dit is een zeer interessante notie want zij geeft een natuurlijke oplossing voor het probleem van de zo-

genaamde *infrarode divergentie* die overal aanwezig is in turbulentie.

De vierde stap voorwaarts komt van Chabanol en Duchon (2002): zij nemen deze keer voor u_0 een Markovproces, homogeen aan de rechterkant en met negatieve sprongen. Op ieder tijdstip blijft u een homogeen Markovproces met negatieve sprongen. Zij verkrijgen verder de evolutievergelijking die te maken heeft met de transitiekern van het proces.

Natuurlijk beweer ik hier niet alles te vertellen over de Burgersvergelijking. Er zijn nog veel andere vragen, zoals de rol van de homogeniteit en het vraagstuk van de uniciteit van de statistische oplossingen, plus het grote vraagstuk van het vinden van oplossingen van dit type voor andere vergelijkingen, zoals die van Euler.

Conclusie

Wat is het juiste model om turbulente stroming te beschrijven? Misschien zijn de zwakke oplossingen van het Eulerprobleem, zoals Onsager aankondigde, de sleutel, maar zeker is dat niet. Het kan ook zijn dat de juiste vergelijking niet die van Euler is, maar een ingewikkelder model

dat gebruikt maakt van de lokale variaties van het snelheidsveld.

In ieder geval lijkt het erop dat voor het turbulentieprobleem de Eulervergelijking relevanter is dan de Navier-Stokesvergelijking. Want als men het Cauchyprobleem voor de Navier-Stokesvergelijkingen adequaat zou kunnen oplossen, dan nog moet men de viscositeit naar nul laten gaan om turbulentie in dimensie drie te begrijpen. Er is weinig kans dat we iets kunnen zeggen over deze limiet, zonder informatie over het gedrag van een limietvergelijking. $\leftarrow$

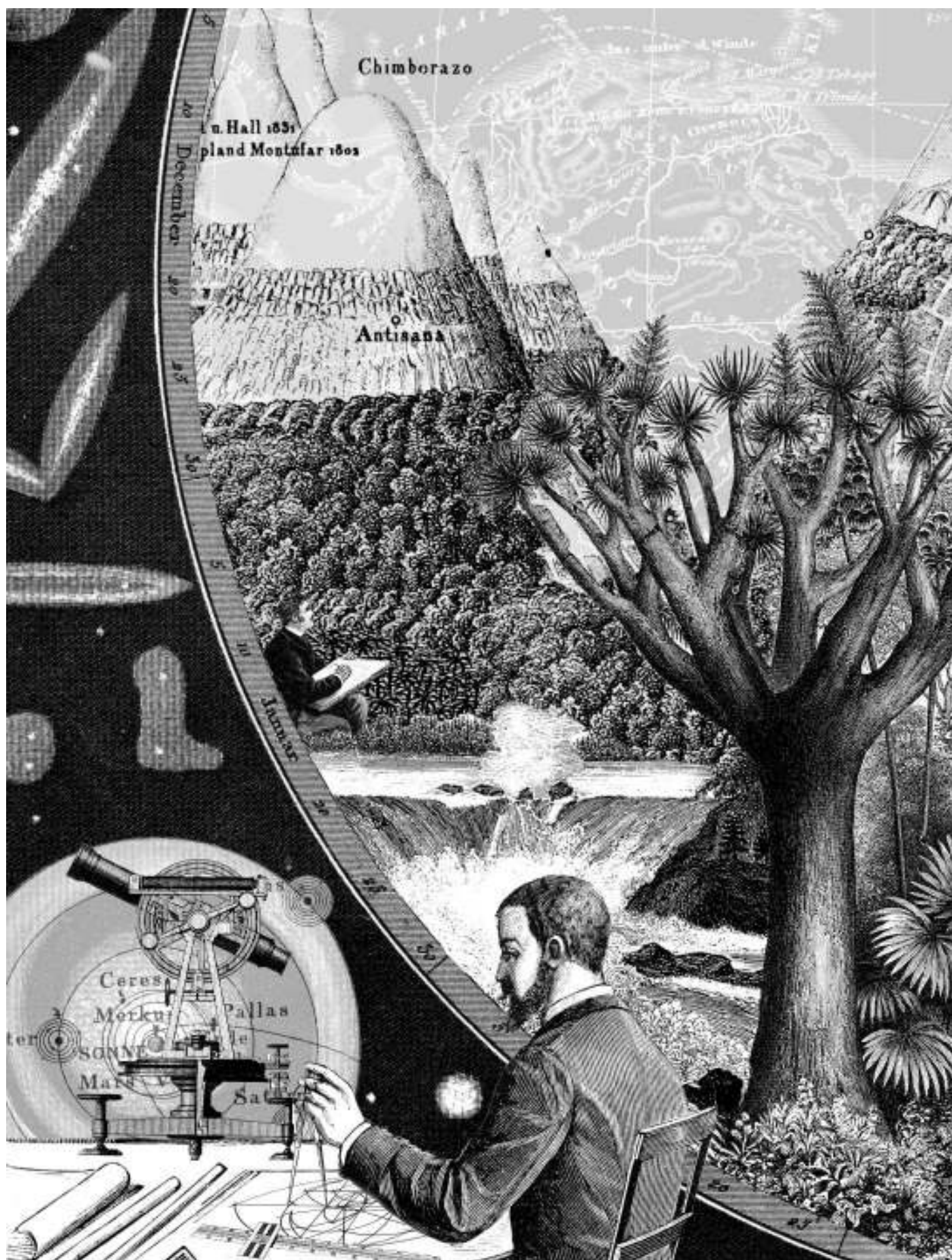
Aanvullende literatuur

Over het werk van Jean Leray verscheen in 2000 een artikel in de *Gazette des mathématiciens* [1]. Voor niet-lineaire hyperbolische vergelijkingen en de entropievoorwaarde verwijs ik naar [2]. Turbulentie gezien door een fysicus is te vinden in [3–4]. Over de resultaten die in dit artikel ter sprake kwamen en een aantal gevolgen, zie [5]. Over de Burgersvergelijking en Lévyprocessen kan men lezen in [6].

Referenties

- 1 Jean-Yves Chemin, *Gazette des mathématiciens*, bijlage bij nummer 84, geheel gewijd aan het werk van Jean Leray, 2000.
- 2 Denis Serre, *Systèmes de lois de conversation I*, Diderot éditeur, 1996.
- 3 Uriel Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, 1995.
- 4 Lars Onsager, 'Statistical hydrodynamics', *Nuovo Cimento*, (2), pp. 279–287, 1949.
- 5 Raoul Robert, *Statistical hydrodynamics. Handbook of mathematical fluid mechanics*, 2, Friedlander and Serre editors, 2003.
- 6 Laurent Carraro, Jean Duchon, 'Equation de Burgers avec conditions initiales à ac-

croissements indépendants et homogènes', *Annales de l'institut Henri Poincaré (C) Analyse non linéaire*, 15(4) (1998), pp. 431–458.



Ionica Smeets

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

smeets@math.leidenuniv.nl

Boekbespreking

Het meten van de wereld

Eind januari is 'Het meten van de wereld' in Nederland verschenen, een roman met als onwaarschijnlijke helden de ontdekkingsreiziger Alexander Von Humboldt en de wiskundige Carl Friedrich Gauss. Terwijl Von Humboldt de wereld over reist om alles te meten, verzint Gauss achter zijn bureau hele nieuwe werelden. Aan het einde van hun leven ontmoeten de mannen elkaar. Het boek is vertaald uit het Duits. Daar is het een ongekend succes: al meer dan 400.000 exemplaren zijn verkocht. De jonge schrijver Daniel Kehlmann heeft zelfs Dan Brown verslagen in de strijd om auteur én boek van het jaar. Ionica Smeets heeft hem geïnterviewd voor Kennislink.

Hoe kwam u op het idee om een boek te schrijven over deze twee mannen? "Ik kende Gauss door alle prachtige verhalen die op school werden verteld. Het verhaal over hoe hij als wonderkind zijn onderwijzer te slim af was, is misschien wel de bekendste wiskundige anekdote. [Gauss moest als straf de getallen 1 tot en met 100 optellen. Dat deed hij heel snel door te bedenken dat dit hetzelfde was als 50×101 . (IS)] Ik was altijd gefascineerd door deze man en wilde ook graag eens iets over hem schrijven, maar ik wist niet hoe."

"Een paar jaar geleden 'ontdekte' ik Von Humboldt toen ik in Mexico was. Ik vond hem

—onbedoeld— een erg komisch karakter. Hij is zo typisch Duits, neemt alles te serieus en is geobsedeerd door het meten van dingen."

"Toen ik ontdekte dat Gauss eens drie weken bij Von Humboldt op bezoek is geweest, vielen de stukjes voor mij op zijn plaats. Hun levens zijn volkomen tegengesteld en toch ook parallel. Von Humboldt reisde de hele wereld over, maar nam zijn Duits-zijn overal mee. Gauss reisde nooit, maar reisde in zijn hoofd langs nieuwe, onbekende werelden. Ook in allerlei kleine details klopten de tegenstellingen mooi: Von Humboldt was bijvoorbeeld een aristocraat, die wist hoe hij zich hoorde te gedragen. Gauss kwam juist uit een heel eenvoudig gezin en had lak aan alle omgangsregels."

Hoe heeft u het voorwerk voor deze roman gedaan? "Ik heb erg veel gelezen, een jaar lang heb ik alleen maar dingen gelezen die met deze roman te maken hadden. Ik moest veel verzinnen en wilde juist daarom de feiten kennen. Ik moest als schrijver weten wat wel en niet echt gebeurd was. Ik wilde geen dingen verzinnen alleen omdat ik niet wist hoe het eigenlijk gegaan was."

Heeft u zich ook verdiept in de wiskunde? "Zeker, dat was het moeilijkste deel. Ik ben geen wiskundige en het voelde een beetje

alsof ik terug moest naar school. Het kostte me veel moeite om te begrijpen wat het werk van Gauss inhield. Natuurlijk hoefde ik niet de hele Disquisitiones Arithmeticae te begrijpen, maar ik wilde wel weten wat de betekenis van zijn werk was voor de wiskunde."

Uw personages Gauss en Von Humboldt houden allebei niet van literatuur. U laat Von Humboldt zelfs zeggen dat "romans opgingen in leugenachtige sprookjes, omdat de



Ragnar Norberg, 1972

Daniel Kehlmann

Daniel Kehlmann studeerde filosofie en literatuurwetenschappen. Op zijn tweeëntwintigste debuteerde hij als schrijver. Inmiddels is hij dertig en Het meten van de wereld is zijn zesde roman.

Uit: Het meten van de wereld

“Ach, riep Humboldt, wat was wetenschap dan wel? Gauss trok aan zijn pijp. Een man alleen aan zijn schrijftafel. Een vel papier voor zich, eventueel een verrekijker, voor het raam de heldere hemel. Wanneer zo’n man niet opgaf voor hij het begreep. Dat was misschien wetenschap. En wanneer die man reizen ondernam? Gauss haalde zijn schouders op. Wat in de verte verborgen lag, in gaten, vulkanen of mijnen, was toeval en onbelangrijk. De wereld werd er op die manier niet duidelijker door.”

auteur zijn kletspraatjes met de namen van historische personen verbond.” Maar is dat niet precies wat u zelf doet? “Natuurlijk doe ik dat. Ik gebruik de personages Gauss en Von Humboldt als een soort poppen om mijn verhaal te kunnen vertellen. Ik vond dat zij op zijn minst de mogelijkheid moesten krijgen om daar tegen te protesteren.”

In uw roman komen heel wat misverstanden tussen alfa’s en bèta’s voor. Gauss heeft geen zin om Goethe te ontmoeten en bij een ontmoeting met Immanuel Kant begrijpen zij niets van elkaar. Zijn dit soort misverstanden typisch voor die tijd? “Nee, dat is juist veel meer iets van deze tijd. Zowel Goethe als Kant hadden veel contacten met de wetenschappers uit hun tijd. Nu is de communicatie bijna helemaal gestopt. Ik denk dat de fout niet bij de wetenschappers ligt, maar bij de ‘klassieken’ en het huidige beeld van een goede algemene ontwikkeling. Als iemand zegt, dat hij geen idee heeft wie of wat Hamlet is, dan is hij een idioot. Als iemand zegt, dat hij geen idee heeft wat de stelling van Pythagoras is, dan klinkt dat eerder leuk en artistiek dan dom. Ik vind dat raar, ik heb altijd van exacte wetenschap gehouden. Veel wiskundigen zijn heel blij dat een van hun grote namen nu in een succesvolle roman voorkomt. Dat was niet echt mijn bedoeling, ik wilde gewoon een goed boek schrijven over dingen die ik interessant vind.”

Wat vindt u zo interessant aan wetenschap? “De persoonlijkheid van wetenschappers, ik bewonder dat ze altijd dingen willen weten, hun nieuwsgierigheid. Ik maak mijn personages op veel manieren belachelijk, maar dit is het enige waar ik geen grappen over maak. Wat ik mooi vind aan wiskunde is dat er dingen zijn die altijd waar blijven. Daar

is geen discussie over mogelijk. Bij filosofie, literatuurwetenschappen en taalwetenschappen wordt over alles gediscussieerd – niets is echt waar.”

“Taalwetenschappen kan ik echt niet serieus nemen. Tijdens mijn studie literatuur moest ik er vakken in doen en ik haatte die. Wiskunde vond ik leuk, maar ik haatte taalwetenschappen echt. Alles is verzonnen, niets kan bewezen worden. Niets is ook maar waarschijnlijk. Een paar jaar geleden ontvingen een aantal belangrijke mensen in Oostenrijk bommen en dreigbrieven. De beroemdste taalwetenschapper van Oostenrijk onderzocht de brieven en kon ‘bewijzen’ dat de brieven door zeven verschillende personen geschreven waren. Het was taalkundig onmogelijk dat één persoon de verschillende brieven geschreven had. Uiteindelijk werd de dader gepakt en hij had alle brieven alleen geschreven. De enige test die ik ken voor hun wetenschap en wat hebben ze gefaald. Het ergste is, dat deze mensen denken dat wiskunde hetzelfde is. Dat ook daar niets vast staat. Ze begrijpen het verschil echt niet. Ik genoot er van, dat ik in Het meten van de wereld Gauss mijn ideeën kon laten uitspreken tegenover de broer van Von Humboldt, een belangrijke taalwetenschapper.”

Hoe reageerden wiskundigen op uw boek?

“Heel goed. Toen ik voorlas bij het Gaussgenootschap waren sommige mensen boos, dat ik Gauss lomper en onbeleefder had voorgesteld dan hij was. Maar ze waren heel redelijk, zij gaven toe dat elk beeld van Gauss maar een model was. En ook al waren ze het niet eens met mijn model, dan nog konden ze het boek wel waarderen. Wiskundigen doen niet aan heldenverering.”

“Het Von Humboldt-genootschap reageerde trouwens heel anders. Zij hielden een crisisberaad toen mijn roman uitkwam. Zij willen graag het beeld van Humboldt als een grote held in stand houden. Ze willen niets negatiefs over hem horen.”

Wat ik vooral onrealistisch vond aan uw Gauss, was dat hij continu intelligente dingen dacht. Voor elk probleem in zijn omgeving zag hij een oplossing. Geloof u echt dat hij zó slim was? “Aan de ene kant wel, Gauss was geen autist als *Rain man*. Hij was onvoorstelbaar veel intelligenter dan iedereen om hem heen. Daarom kon hij problemen op allerlei gebieden oplossen. Ik denk ook dat deze extreme intelligentie hem ongeduldig en onbeleefd maakte. Het moet lastig zijn als iedereen om je heen zo veel langzamer is.”

“Maar natuurlijk had Gauss vast ook dagen waarop hij niets deed en geen enkele slimme gedachte had. Maar die dagen laat je in een roman weg om hem zo karakteristiek mogelijk naar voren te laten komen.”

Het lijkt soms alsof wiskunde in Duitsland veel meer status heeft dan hier, is dat zo? “Ik weet niet hoe de situatie hier is, dus ik kan niet vergelijken. In Duitsland heeft wiskunde inderdaad toch wel veel aanzien, het wordt gezien als een hoge wijsheid. Je hoeft die zelf misschien niet te hebben, maar mensen die haar wel hebben, krijgen veel respect. Het invloedrijke tijdschrift *Der Spiegel* besteedt bijvoorbeeld veel aandacht aan wetenschap. Eens in de drie, vier weken gaat hun coverstory over wetenschap. Daarnaast hebben Duitse wetenschappers als Gauss en Einstein een enorme impact gehad. Misschien komt het succes van Het meten van de wereld ook wel daardoor.”



Die Vermessung der Welt, Daniel Kehlmann, Reinbek, Rowohlt, 2005, ISBN 3498035282. Nederlandse vertaling: *Het meten van de wereld*, Amsterdam, Querido, 2006, Vertaling: Jacq Vogelaar, ISBN 90-214-7030-6.

Derk Pik

Faculteit der Kunsten,
Universiteit Leiden
Postbus 9500,
2300 RA Leiden
drpik@math.leidenuniv.nl

Cultuur

Stochastiek in de vroege muziek van Xenakis

Wiskunde en muziek is opnieuw in snel tempo een levendig vakgebied geworden. Tot ver in de Renaissance hoorden wiskunde en arithmetiek eigenlijk bij elkaar, om daarna vanwege de steeds verdergaande specialisatie in de wetenschap uiteen te groeien. Eind negentiende eeuw heeft Helmholtz de twee inmiddels zeer verschillende gebieden weer bij elkaar gebracht en nog anderhalve eeuw later, in 2007, gaat het tijdschrift 'Journal of Mathematics and Music' van start met vertrouwenswekkende namen uit wiskunde en muziek. Ook heeft een aantal twintigste eeuwse componisten zich opnieuw laten inspireren door wiskundige theorieën. Met de komst van de computer zijn er zowel voor analyse als klanksynthese enorme mogelijkheden gecreëerd.

Iannis Xenakis was een pionier op dit terrein. Veel van zijn muziek is gestructureerd door toepassing van wiskundige technieken. Aan de hand van twee vroege, en door Xenakis zelf goed gedocumenteerde stukken, 'Herma' voor piano solo en 'Achorripsis' voor kamerorkest, wordt een aantal van deze technieken geïllustreerd. Derk Pik is als wiskundige verbonden aan de Faculteit der Kunsten van de Universiteit Leiden en verzorgt op het conservatorium in Den Haag een lezingencyclus 'Mathematical Structures in Music'. Dit artikel verscheen in maart 2006 in 'Mens en Melodie'.

Een goede live uitvoering van muziek van Xenakis is een indrukwekkende gebeurtenis. Zijn klanken roepen vaak natuurvoorstellingen op en lijken eerder bij de goden te behoren dan bij de mensen. Zonder bijbedoeling heeft zijn muziek een zeker onmenselijk karakter. Dit ligt slechts ten dele aan het genadeloze virtueuze karakter van zijn muziek. Wat maakt de kleur van zijn werk zo herkenbaar en bijzonder?

Het geluid van regen op bladeren, storm op zee, het geluid van een korenveld, maar ook van een drukke stad of van een schreeuwende menigte kan een diepe sensatie opwekken vanwege de associaties die het bij ons oproept. De klanken om ons heen vertellen ons vrijwel onmiddellijk waar we zijn: we hebben het vermogen om

zeer veel soorten ruis van elkaar te onderscheiden. Al deze geluiden hebben gemeen dat ze deels zijn voortgebracht door een of ander toevalsproces: in elk geval door een proces dat niet geheel deterministisch bepaald is. Het is daarom verwonderlijk dat stochastisch geluid zo weinig in muziek van voor 1950 voorkomt. Het was er overigens wel, bijvoorbeeld in strijkerstremoli. Een mooi voorbeeld is te vinden in het derde deel van de zesde symfonie van Beethoven waar het geluid van slagregens door zo'n tremolo wordt opgeroepen. Het geluid van een strijkerstremolo heeft door het feit dat niet alle strijkers precies op het zelfde moment hetzelfde geluid maken, een uitgesproken stochastisch karakter: een geluid dat door een toevalsproces wordt bepaald. Net als de regen.

Xenakis geeft zelf overigens andere redenen voor de introductie van stochastische processen in zijn muziek: "The serialists of the Vienna School, not having known how to master logically the indeterminism of atonality, returned to an organisation which was extremely causal in the strictest sense; more abstract than that of tonality" ([1], p. 5). Hij merkt de grote tegenstelling op die er bestaat tussen het (veronderstelde) gebrek aan functionaliteit van atonale muziek en de dwingende formele structuur van twaalftoonmuziek. Toch was de hoofdzaak voor hem het creëren en beheersen van klanktexturen: "In 1954, I [Xenakis] introduced probability theory and calculus in musical composition in order to control sound masses both in their invention and their evolution" ([1], p. 255). Hoe gebruikte Xenakis stochastische technieken om een klankveld te genereren?

Toonverzamelingen

Om deze vraag te beantwoorden, gaan we dieper in op twee van Xenakis' composities: *Herma* (1960-61) voor piano solo en *Achorripsis* (1958) voor kamerorkest. *Herma* (Grieks voor kiem) werd in opdracht van de pianist en componist Yuji Takahashi gecomponeerd. Hij verzorgde er in 1962 in Tokyo de eerste uitvoering van. Bij eerste kennismaking maakt het stuk een zeer heftige indruk. De pianist levert een enorm gevecht om alle ver uit elkaar gelegen tonen te spelen. Meestal zijn er twee dynamische niveaus: wolken tonen in forte en gelijktijdig wolken tonen in pianissimo. Na

Enkele termen uit de muziek

Crescendo, decrescendo: sterker wordend, zachter wordend.

Glissando: speelwijze waarbij de toonhoogte op gelijkmatige, continue manier stijgt of daalt.

Piano, forte: de sterkte waarmee een passage gespeeld moet worden, wordt aangegeven met zogenaamde dynamische tekens. Zeer zacht wordt aangegeven met *pp*, *pianissimo*, zacht wordt genoteerd door *p*, *piano*, *mezzo piano* (*mp*) en *mezzo forte* (*mf*) betekenen half zacht en half sterk en *f*, *forte* betekent sterk, *ff*, *fortissimo*, is zeer sterk. Er zijn nog meer veelvoorkomende gradaties, zoals *fff*, *fortississimo*: dit is nog sterker dan *ff*.

Pizzicato: getokkeld: speelwijze op een strijkinstrument waarbij de snaren niet gestreken worden, maar door het plukken met een vinger tot klinken worden gebracht.

Solfège: verzamelnaam van muziektechnische vaardigheden, zoals het van blad lezen van muziek, het opschrijven van een te beluisteren muziekfragment, het benoemen van akkoorden.

Tremolo: het snel herhalen van één of meerdere tonen, waardoor een specifieke ‘bevende’ klankkleur ontstaat.

een paar keer luisteren vallen er allerlei delen te onderscheiden, die vooral verschillen in klankdichtheid. Op twee momenten komen alle tonen uit het middenregister; dit zijn ook de enige echte akkoordfragmenten. Naar het einde toe neemt de dichtheid van de tonen toe.

Xenakis heeft zelf uitgebreid over dit stuk geschreven. Vanwege deze goede documentatie is het veel door analisten bestudeerd. Heel interessant is de statistische beschrijving van Robert Wannamaker, op internet te vinden op de site van de *Society of Music Theory* (zie [2]).

Voor het stuk definieert Xenakis drie verzamelingen *A*, *B* en *C* van tonen. Het stuk begint met een expositie van deze verzamelingen. Eerst klinkt er, ongeveer een minuut lang, een willekeurige keuze uit alle tonen van de piano; tonen van willekeurige duur, met een lengte variërend tussen van een snelle voorslag tot een halve seconde. De toonwolk begint zeer zacht en er begint meteen een lang crescendo, gedurende het hele fragment tot aan fortississimo. Het crescendo wordt ondersteund door de toename in dichtheid van de

tonen. Dan wordt de verzameling *A*, bestaande uit dertig tonen in het stuk geïntroduceerd. De tonen worden in twee wolken gepresenteerd: een forte-‘melodie’ van gemiddeld 0.8 tonen per seconde, door Xenakis *linéaire* genoemd, en een pianissimowolk van 3.3 tonen per seconde, door Xenakis *nuage* genoemd. De lineaire langzame random-melodie klinkt de hele tijd; de pianissimowolk verschijnt en verdwijnt.

Na weer een kleine minuut zijn er twee maten stilte en wordt het complement van de verzameling A geëxposeerd. We geven het complement van A aan door A^c . Het complement A^c bevat alle tonen die niet in A zitten: $88 - 30 = 58$ tonen. Dit zijn er dus veel meer: Xenakis plaatst de wolk fortissimo, 10 tonen per seconde, gedurende ongeveer een halve minuut in het stuk. De expliciete toonverzamelingen, door Wannamaker gereconstrueerd, kunnen op internet worden bekeken. Ze laten ook kleine inconsistenties zien; zo zit de toon C_2 zowel in A als in A^c . Dit was al langer bekend: in *Harley* ([3], p. 258) staat dat er zelfs een discussie is geweest of deze paar noten moeten worden gecorrigeerd of niet.

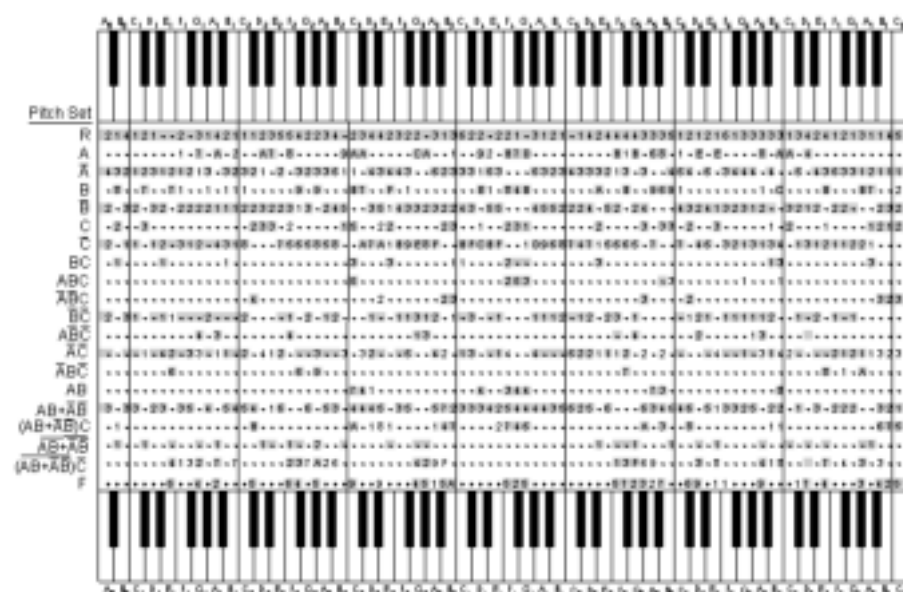
Op de zelfde wijze maakt de toehoorder kennis met de verzameling *B* (31 tonen) en haar complement, en *C* (29 tonen) en haar complement. Een dramatisch moment in de expositie van *B* wordt gevormd door een forte-akkoord, dat bij *B*-linéaire behoort, en verderop, in het complement van *C*, het geweld van tien akkoorden, snel achter elkaar, alles in het middengebiet van de piano. Het is duidelijk dat deze keu-

zes niet door het toeval zijn bepaald. We zijn inmiddels bij het midden, een keerpunt van het stuk beland.

Het herkennen van toonverzamelingen

Zijn de drie verschillende toonverzamelingen wel te herkennen? Ze verschillen in structuur niet echt van elkaar en lijken willekeurig samengesteld. Bij een informele proef voor studenten aan het Conservatorium in Den Haag bleken de verzamelingen verrassend snel van elkaar te onderscheiden. Met behulp van de computer, het rekenprogramma *Matlab* en samples van alle pianotonen werden tien klankwolken van elke soort samengesteld. De computer trok dus willekeurige tonen, met een dichtheid en een spreiding in de toonlengte die enigszins overeenkwam met de toonduur van de wolken in Herma. Eerst konden de studenten raden of de trekking uit een verzameling bestaande uit alle 88 tonen afkomstig was, of alleen uit de verzameling A . De meeste studenten onderscheidden beide al na drie keer. Dezelfde solfègeoefening met de drie verzamelingen A , B en C gaf nauwelijks meer problemen.

Als het er alleen maar om gaat verschillende wolken zo snel mogelijk te herkennen, zijn er allerlei trucs toe te passen, zoals het registreren van bepaalde tonen; iets wat gemakkelijk kan met een absoluut gehoor. Ook is het mogelijk om bepaalde akkoorden te onderscheiden die in de ene wolk wel voorkomen en in de andere niet. Al deze trucs zijn voor de gemiddelde conservatoriumstudent gemakkelijk toe te passen. De solfègeoefening wordt



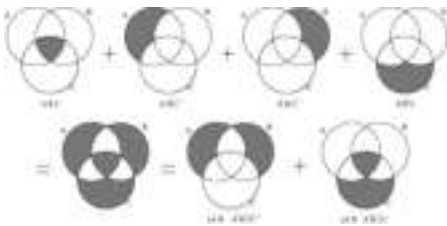
Figuur 1 De verzamelingen R , A , B en C , hun complementen, en de in Herma voorkomende samenstellingen van deze verzamelingen, volgens de reconstructie van Wannamaker. Het complement A^c van een verzameling A wordt in het stuk genoemd als $\bar{A}$.

moeilijker, als de studenten wordt gevraagd om alleen naar het globale kleurverschil te luisteren. Het is echter nog steeds niet onmogelijk. (De lezer die het zelf wil proberen kan terecht op de internetpagina [5].)

Een identiteit uit de verzamelingenleer

De tweede helft van Herma is eigenlijk een illustratie van de identiteit:

$$ABC \cup A^c B^c C \cup A^c B C^c \cup A B^c C^c \\ = (AB \cup A^c B^c)^c \cup (AB \cup A^c B^c)^c C^c.$$



Figuur 2

Er zijn, net als bij de expositie in het eerste deel van de verzamelingen A , B en C , twee niveaus van klanksterkte. Op het ene niveau worden ABC , $A^c B^c C$, $A^c B C^c$, $A B^c C^c$ geconstrueerd en fortississimo (*fff*) uitgevoerd; op het andere niveau worden de twee deelverzamelingen $(AB \cup A^c B^c)C$ en $(AB \cup A^c B^c)^c C^c$ gemaakt en fortissimo (*ff*) gespeeld. Daar zit in dynamiek dus een klein verschil in, dat echter erg belangrijk is voor de helderheid van de structuur van het stuk. Dit is waarschijnlijk het allermoeilijkst te realiseren voor de pianist: een gradueel verschil, dat op hetzelfde moment ook de structuur bepaalt. Omdat de identiteit van figuur 2 eigenlijk uiteenvalt in de gelijkheden

$$ABC \cup A^c B^c C = (AB \cup A^c B^c)C \\ A^c B C^c \cup A B^c C^c = (AB \cup A^c B^c)^c C^c,$$

passen de fortississimo gespeelde wolken ABC en $A^c B^c C$ precies in de gelijktijdig gespeelde fortissimo verzameling $(AB \cup A^c B^c)C$, en net zo zijn de wolken $A^c B C^c$ en $A B^c C^c$ terug te vinden in $(AB \cup A^c B^c)^c C^c$. Als je wat verder inzoomt op het stuk, worden de verzamelingen ABC , $A^c B^c C$, $A^c B C^c$, $A B^c C^c$, $(AB \cup A^c B^c)C$ en $(AB \cup A^c B^c)^c C^c$ ook nog eens geconstrueerd. Bijvoorbeeld ABC verschijnt vanuit de wolk BC , waar dus nog tonen in zitten die wel in BC en niet in A voorkomen. Spoedig verdwijnt deze 'verstoring' en verandert BC in ABC , fortississimo gespeeld en 'consonant' met de grote wolk $(AB \cup A^c B^c)C$, die op het andere plan raast. Het volledige schema van de tweede helft staat in [1], p. 176.

Luisteren

Op meerdere plaatsen is opgemerkt dat de constructie van Herma te snel gaat, niet te volgen is, en dat het effect van het stuk vooral gebaseerd is op de grote bergen geluid an sich. Bij eerste kennismaking zijn bovendien de stiltes tussen de verzamelingen vooral dramatisch. Dit leidt tot de filosofische vraag hoe belangrijk de structuur is voor de kwaliteit van een stuk. Waar is die structuur voor nodig, als je er niets van hoort? We moeten ons echter ook afvragen, of de structuur van Herma echt niet waar te nemen is.

Uit de solfègeoefeningen met toonverzamelingen blijkt dat de verzamelingen, in elk geval voor professionele musici, gauw te herkennen zijn. Een bijkomend effect van deze oefeningen is dat het stuk ook is veranderd nadat je deze verzamelingen hebt leren herkennen. Actief luisteren geeft het stuk meer betekenis.

Gaswetten

Het klankmateriaal, de textuur van Herma is eigenlijk abstracte gegenereerde ruis. Deze ruis kan op vele manieren tot stand komen. Met het rekenprogramma Matlab is vrij eenvoudig te testen dat de verdeling van de tonen in de meeste wolken van Herma homogeen is over alle tonen van een verzameling. Het is (mij) niet bekend of de tonen en hun duur daadwerkelijk afkomstig zijn uit een stochastisch proces; het lijkt in elk geval plausibel.

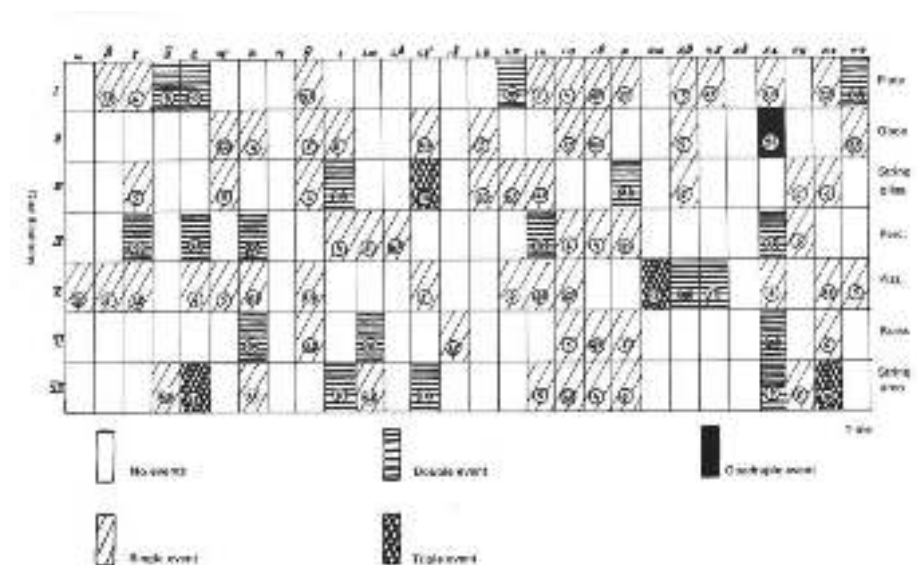
Er zijn echter nog vele andere verdelingen mogelijk dan de homogene. Een van de eerste stukken waar Xenakis doelbewust met een abstract gedefinieerd theoretisch raamwerk componeerde, is Achorripsis voor

een kamerorkest van 21 musici. Het werk is gedeeltelijk geïnspireerd op de bewegingen van een gas in de ruimte. Het is in die zin ook minder abstract dan Herma, waar geen sprake is van modellering naar een of ander fenomeen uit de natuur. Vanwege de transformatie van gaswetten naar klank heeft het werk zelfs een figuratief karakter.

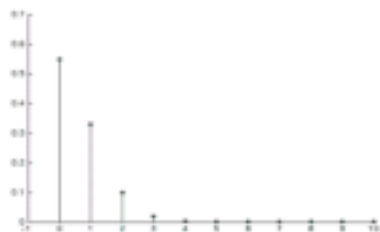
Het stuk moet worden gezien tegen een achtergrond van Xenakis' zoektocht naar abstracte basisprincipes voor het componeren. Zo beschouwd is het stuk een mogelijk antwoord op de vraag hoe je met relatief weinig regels, met een eenvoudig uitgangspunt een rijke interessante textuur krijgt (zie [1], p. 22). Het stuk is voor het eerst uitgevoerd in 1958 in Buenos Aires door het *Orchester der Oper Köln* onder leiding van Herman Scherchen. Het stuk werd daar veel beter ontvangen dan een jaar later, in 1959 in Parijs, tevens het locale debuut van Xenakis, waar Achorripsis zelfs onderwerp werd van een heftige controverse [1], p. 23. De titel betekent 'Geluidsstralen' in het Grieks. Hoe zit het stuk in elkaar?

De Poissonverdeling

Achorripsis is strak georganiseerd, zowel horizontaal in tijd, als verticaal in samenklanken. De totale tijdsduur van het stuk is onderverdeeld in 28 gelijke tijdsintervallen. Er zijn verticaal steeds dezelfde zeven verschillende instrumentale groepen, namelijk: hout-, riet- en koperblazers, slagwerk en een strijkersgroep die als in drieën onderverdeeld beschouwd moet worden: de strijkers spelen gewone gestreken tonen, glissandi en pizzicati. In de organisatie van het stuk worden deze speelwijzen eigenlijk opgevat als voortgebracht



Figuur 3 Schema voor Achorripsis



Figuur 4 De Poissonverdeling met verwachting 0.6. Xenakis koos deze parameter voor de verdeling van gebeurtenissen in een cel van het raamwerk voor Achorripsis. De kans dat er geen gebeurtenis plaatsvindt in een cel is 0.55; de kans dat er precies een gebeurtenis plaatsvindt is 0.33; de kans dat er twee gebeurtenissen plaatsvinden is 0.10, enz.

door aparte instrumenten. Zo krijgen we een raamwerk van 28 bij 7 cellen, waarin een of meer gebeurtenissen plaatsvinden. Een gebeurtenis is bijvoorbeeld het verschijnen van een pizzicatowolk, of een groep tonen uit een blazerssectie.

Voor het aantal gebeurtenissen in een cel gebruikt Xenakis de Poissonverdeling. Dit is een natuurlijke verdeling voor de kans, ge-

ven een tijdsinterval, dat een bepaalde gebeurtenis 0, 1, 2, 3, ... keer voorkomt. De voorwaarden voor de toepasbaarheid van de Poissonverdeling zijn ruim. Vele natuurverschijnselen, zoals het aantal aardbevingen op aarde in een jaar, of het aantal gasmoleculen in een gedeelte van de ruimte zijn Poisson verdeeld. (Voor tientallen andere uiteenlopende voorbeelden, zie [4].) In dit opzicht is het eigenlijk ook beter te zeggen dat Xenakis geïnspireerd was door natuurfenomenen in het algemeen, dan door gasmechanica.

Wat gebeurt er in één cel?

In Achorripsis zijn $196 = 28 \times 7$ cellen. Xenakis verdeelt over deze cellen de aantallen gebeurtenissen precies volgens de verhoudingen van de Poissonverdeling met verwachting 0.6. Dit komt neer op 107 cellen zonder gebeurtenis, 65 cellen met 1 gebeurtenis, 19 cellen met 2 gebeurtenissen, 4 cellen met 3 gebeurtenissen en 1 cel met 4 gebeurtenis-

sen. Het is opmerkelijk dat hij de aantallen zo precies verdeelt. Hij had het ook de uitkomst van een toevalsproces kunnen laten zijn. In dat geval was je met ongeveer deze aantallen uitgekomen. Ook eist hij dat de sommen van de rijen en de sommen van de kolommen weer een Poissonverdeling hebben. Bij de uitkomst van een toevalsproces was je daar automatisch op uitgekomen, maar als je zelf de cellen volgens bovenstaande verhouding zou invullen is dit niet a priori het geval.

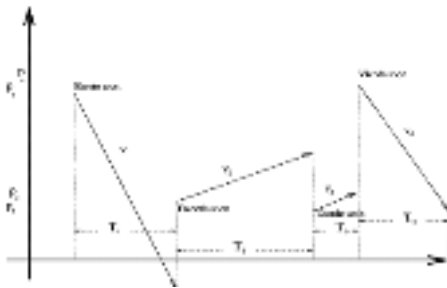
Dan definieert hij de globale dichtheid: hij wil gemiddeld 2.25 geluiden per seconde per gebeurtenis horen. Dus als er in een cel drie gebeurtenissen plaats moeten vinden, hoor je 6.75 geluiden per seconde.

Interessant zijn de glissandi. Deze zijn ontwikkeld naar analogie van gasdynamica. Ze hangen af van heel wat parameters: toonhoogte, toonduur en lengte van de glissandi. Laten we, net als Xenakis in [1], de cel met coördinaten (III, $\iota\zeta$) van dichtbij bekijken. Volgens de matrix in figuur 5 vindt er



De maten 104 tot en met 111 uit Achorripsis





Figuur 5 De snelheid v , de tijdsintervallen tussen de tonen T en de toonhoogte bepalen de curve van de glissandi volledig. De drie parameters zijn alle onderling onafhankelijk gekozen.

één gebeurtenis plaats in deze cel, en deze cel moet volgens het schema strijkersglissandi bevatten. Het gehele stuk heeft 182 maten, dus 6,5 maten per cel. Het ritme van het stuk is twee-tweede met metronoomcijfer 52 per halve noot (dus 52 halve noten in een minuut). Gemiddeld komt dit neer op 4,5 geluiden per maat, of 29,5 geluiden voor een cel.

Een glissando is in essentie geheel bepaald door het tijdstip waarop hij begint, de snelheid waarmee de toonhoogte stijgt of daalt, de duur van de glissando en de toonhoogte waarop de glissando begint. We zullen de verdelingen die Xenakis gebruikt kort bespreken.

Het moment waarop een glissando begint, bepaalt hij door een exponentiële verdeling. Dit is een verdeling die vaak gebruikt wordt voor het modelleren van de tijdsduur tussen gebeurtenissen waarvan de gemiddelde tijdsduur tussen de gebeurtenissen constant is. Typische voorbeelden zijn de tijdsduur tussen twee ongelukken of de tijdsduur dat een radioactief deeltje vervalst. De waarden die Xenakis gebruikt voor de tijdsduren zijn weer niet het resultaat van een random trekking; hij berekent precies: gegeven 29 tijdsduren, hoeveel tijdsduren zullen afgerond gelijk aan 0 zijn, hoeveel gelijk aan 0.10, hoeveel gelijk aan 0.2, enzovoort, bij exponentiële verdeling van de tijdsduren.

De toonhoogte modelleert Xenakis kwadratisch. Dit is de enige ongewone verdeling in het stuk: het komt erop neer dat er meer lage dan hoge tonen in het stuk voorkomen. De snelheid van de glissandi kiest hij normaal verdeeld, met gemiddelde 0 en een variantie die klein genoeg is om bijna nooit buiten het bereik van de instrumenten terecht te komen. De normale verdeling is voor positieve en negatieve getallen gedefinieerd: een positieve uitkomst bij een trekking resulteert in een glissando omhoog en een negatief resultaat in een glissando omlaag. In de natuur is dit eigenlijk de meest fundamentele verdeling: bijvoorbeeld de snelheid van een gasdeeltjes in een volume is normaal verdeeld. De normale verdeling heeft de eigenschap dat er in een steekproef weinig extreme waarden voorkomen. Dit is weerspiegeld in de grafiek van de verdeling: de staarten zijn erg dun.

Net als bij de snelheid van gasmoleculen de temperatuur de variantie bepaalt, maakte Xenakis de variantie van de verdeling evenredig aan de dichtheid van de geluiden. Dus als er veel geluiden zijn in een cel is de variantie hoog: er zijn veel snelle glissandi omhoog en omlaag. Nu ligt de inhoud van de cel, op sterkte na, geheel vast.

We vinden cel (III, $\iota\zeta$) terug in kolom $\iota\zeta$: dit betreft de maten 104 tot en met 111. We tellen inderdaad 29 glissandi, verdeeld over de vioolpartijen 1 en 3, celli 1 en 2, en contrabassen 1 en 2. Merk ook op, dat er nog twee andere cellen in de kolom $\iota\zeta$ staan die een gebeurtenis bevatten: in rij 1 een dubbele gebeurtenis voor de houtblazers en een enkele gebeurtenis voor de pizzicatogroep. Dit vinden we ook terug in de partituur.

Materie

De tonen van Herma en van Achorripsis zijn waarschijnlijk het resultaat van een trekking van een stochastisch proces. De plaats van de muzikale gebeurtenissen niet: deze heeft

Xenakis zelf gekozen en zijn dus deterministisch bepaald, geheel volgens ratio's afkomstig van de distributies. In die zin had Xenakis nog verder kunnen gaan. Wat is de zin voor de musici om al deze schijnbaar willekeurig bepaalde noten te spelen? Zowel het pianowerk als het stuk voor orkest zijn zeer moeilijk en duren bovendien maar kort. Het fascinerende aan deze muziek ligt waarschijnlijk juist in het onmenselijke aspect. Bij elke menselijke inmenging in het compositieproces, bij elke toon die je niet uitrekt, ligt menselijke interpretatie, gevoel en sentimentaliteit op de loer en wordt de textuur vervuild. Net als bij de beeldend kunstenaar Kounellis, die beelden maakt van delfstoffen zoals steenkool, van koperbuizen, staalplaten en van vlammen uit gasbranders, speelt de materie zelf de hoofdrol. De musici staan op gelijksoortige wijze in direct contact met materie, in feite zonder tussenkomst van een componist.

Abstracte muziek

Men kan in muziek, net als in beeldende kunst, een onderscheid maken tussen figuratief en abstract. Oppervlakkig gezien heeft alle muziek, en zeker instrumentale, een abstract karakter. Het is interessant om muziek waarbij de tonen, melodien, en wat globaler muzikale gebeurtenissen geheel door de componist zelf gestalte hebben gekregen, als figuratief te beschouwen, en muziek waar de textuur het belangrijkste is, bijvoorbeeld als resultaat van het abstraheren van een fysisch proces of als resultaat van een toevalsexperiment, als abstract. Ook al bestaat zo'n indeling alleen maar in grote lijnen; ze leidt wel tot de vraag hoe abstract Herma en Achorripsis eigenlijk zijn. Kan het nog abstracter? Hoe klinkt Herma als het compositieproces precies hetzelfde wordt gelaten, maar de berekening van de toonwolken niet? Lijken de verschillende Herma's dan nog op elkaar? ζ

Referenties

- 1 Xenakis, *Formalised Music*, 1992, Pendragon Press.
- 2 www.societymusictheory.org/mto/issues/mto.01.7.3/mto.01.7.3.wannamaker.frames.
- 3 James Harley, *Xenakis His Life in Music*, 2004, Routledge.
- 4 en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution
- 5 www.math.leidenuniv.nl/~drpik/mm/test

Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
 Dept. of Math. and Computer Science
 Technische Universiteit Eindhoven
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
 Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



R.P. Stanley
**Enumerative combinatorics
 volume 2**

Cambridge Studies in Advanced Mathematics
 62

Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001

585 p., prijs £27.99

ISBN 0-521-78987-7

This book is the final volume of what its preface calls “an introduction to enumerative combinatorics”. In fact it is much more than that, the two-volume work organises and provides a foundation for a large part of combinatorics centred around questions of counting. Although the subject is very old, its numerous results might seem to lack the formal structure present in other mathematical theories (it may be noted for instance that in all of Bourbaki one finds just a single section on combinatorial questions). However Stanley demonstrates that all these results fit into a logical framework, and that seemingly *ad hoc* arguments are often instances of general principles. Yet the power and generality of the methods does not change the practical flavour of the subject, and a large part of these books deals with solving very concrete problems.

The central theme of the work is counting the members of parametrised classes of combinatorial objects, and the study of the generating functions defined by such counting processes. The exposition alternates between providing motivation for the considered questions, developing general methods, and giving applications of those methods. The first volume treated methods related to partially ordered sets (inclusion-exclusion, Möbius inversion, incidence algebra), and studied problems leading to rational generating functions. This second volume starts with analysing the combinatorial significance of composition of generating functions, and applications thereof such as counting trees and Lagrange inversion. It then continues the study of generating functions by broadening the class from rational generating functions to those defined by algebraic or differential equations, with a brief excursion into non-commutative series, and closes with a chapter on symmetric functions. Despite the continuity in style and subject matter, there is a marked difference between the two volumes, doubtlessly due in part to the twelve year interval (1986–1998) between their dates of publication. Although the second volume has only three chapters where the first had four, it is almost twice as long (585 pages compared to 326). This increase is mostly due to the great number of exercises: altogether their statements fill more than 100 pages, and their solutions more than 150. It appears that the author has tried to include all results known to him in which the given theory applies, either as an application illustrating the theory, or for less central results as an exercise.

The text is lively and informal, without leading to lack of precision or detail. Plenty of time is taken for instance to place techniques and results into perspective, to provide illustrations, and to reconsider results given before in the light of new methods. The goal goes beyond finding enumerative formulae, to trying to interpret and understand them. One recurring theme is that when a result turns out to be particularly simple, or identical to that of another problem, a bijective proof is sought: an invertible transformation of the counted objects into another class of objects that

is more easily counted or has been studied before. In several cases multiple proofs with different flavours are given for the same results; for instance, the Lagrange Inversion formula gets three different proofs. An extreme case of different problems sharing the same solution is Exercise 6.17, which gives 66 counting problems, all solved by the Catalan numbers (and recent additions can be found at <http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/>, along with other addenda). Yet, the book does not make for light reading, due to the high level of detail inherent in the considered questions. A work that comes to mind for its comparable style and structure (but even more extreme) is Knuth's *The Art of Computer Programming*. To entirely assimilate this work, including the exercises, would be a very tough task; one understands the satisfaction of finally completing the book expressed by Stanley in the preface.

The final chapter, which fills about half of the book, differs slightly from the rest. It does not primarily study enumerative questions, but rather the algebraic structure of the ring of symmetric functions; the enumerative results that are given are combinatorial interpretations of numbers that arise in this study. About the same topics are covered as those in the well known first chapter of Macdonald's book on symmetric functions (for the generating function identities) and the first part of Fulton's book on Young tableaux (for the Robinson-Schensted-Knuth correspondence), but the treatment is more accessible than the former, and more thorough than the latter. In addition there are excursions treating specialisations, quasi-symmetric functions, plane partitions and Pólya theory. Also quite valuable is the appendix to this chapter written by Sergey Fomin, which gives complements concerning constructions on Young tableaux (jeu de taquin, and a proof of the Littlewood-Richardson rule), treated from a modern perspective.

A final mark of quality are the historical Notes included in each chapter. They trace the origins of the results presented in the book, but beyond that they often witness a detailed historical research. So we learn, for instance, that it was Cauchy who first studied the polynomials later called Schur functions, but that he did not formulate the 'Cauchy identity', although it can be deduced easily from other facts he did know. In summary, a fine introduction and an invaluable reference for the field of enumerative combinatorics.

M. van Leeuwen



C.M. Campbell, E.F. Robertson, G.C. Smith (eds.)

Groups St. Andrews 2001 in Oxford Volumes I & II

London Mathematical Society Lecture Note Series, 304 & 305

Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003

Volume I 306 p., prijs £38.00, Volume II 598 p., prijs £38.00

ISBN Volume I 0-521-53739-8, Volume II 0-521-53740-1

Sinds 1981 organiseren Colin Campbell en Edmund Robertson (University of St. Andrews) samen met hun collega Geoff Smith (University of Bath) elke vier jaar tijdens de zomer een fameuze

internationale groepentheorieconferentie.

Het verslag van deze conferentie wordt sinds het begin door de Cambridge University Press in de London Mathematical Society Lecture Note Series uitgebracht, waarbij met het oog op relevantie en kwaliteit, de diverse artikelen beoordeeld en geselecteerd zijn door ter zake deskundigen. Geheel in de geest van de conferentie dragen de voordrachten op invitatie niet alleen het karakter van een *overview*, *survey*, *short course*, enzovoort, maar proberen ze tegelijkertijd een studentenpubliek of jonge wiskundigen aan te spreken en te prikkelen. Voor uw recensent, die het academische leven bijna twee decaden geleden officieel vaarwel heeft gezegd, maar zijn vakgebied passief volgt, was het lezen van de beide volumina zeer aangenaam.

Als groepennoviet is het uitschrijven van vermenigvuldigingstabellen van eindige groepen een bekende bezigheid, misschien niet de meest enerverende. Reeds in dit stadium zijn er interessante observaties te maken: stel dat op een eindige verzameling G twee binaire operaties $*$ en $\circ$ te definiëren zijn die G tot een groep maken. Schrijf de vermenigvuldigingstabellen uit met betrekking tot $*$, respectievelijk, met betrekking tot $\circ$. Stel nu dat minstens 89% van de uitgerekenende producten in de beide tabellen overeenstemmen, dan moeten de groepen $(G, *)$ en $(G, \circ)$ isomorf met elkaar zijn! Dit werd voor het eerst bewezen in 1992 door Ales Drpal. Tevens sprak hij het vermoeden uit dat dezelfde uitspraak waar blijft als 89% vervangen wordt door 75%. Dit nu is het onderwerp van een van de artikelen van het eerste deel, waarbij het speciale geval van groepen van orde een 2-macht of 3-macht behandeld wordt. Je kunt er als beginnend groepentheoreticus zonder al te veel voorkennis zo je tanden inzetten. Het geformuleerde vermoeden blijft vooralsnog onopgelost ...

Het is slechts één van de 26 artikelen van Volume I en in Volume II bevinden zich nog eens 21 artikelen. Uiteraard is het ondoenlijk alle 47 hier te behandelen, maar toch wil ik u een aantal niet onthouden. Ten eerste enkele van de hoofdvordrachten. Marston Conder gaf een juweel van een korte cursus over de werking van groepen op objecten die een hoge mate van symmetrie bezitten. Immers daar zijn groepen op hun best, als ze symmetrieën of patronen moeten beschrijven! Niet alleen geeft Conder een historisch overzicht beginnend bij de zogenaamde Hurwitz groepen, die op een natuurlijke manier geassocieerd worden met het aantal automorfismen van Riemannoppervlakken — volgens Hurwitz (een stelling uit 1893) als lineaire functie van het geslacht gemaximeerd. Ook geeft hij een beeld welke computationele technieken zoals Magma of GAP de moderne groepentheoreticus ter beschikking staan om een en ander te staven dan wel kracht bij te zetten. Het artikel eindigt met een verzameling open problemen, waarvan een oproept om alle eindige enkelvoudige groepen te bepalen die Hurwitz zijn. Inmiddels werd door Wilson bewezen dat dit althans voor *Het Monster* het geval is (*The Monster is a Hurwitz Group*, J. Group Theory, 4 (2001), 367–374).

Een ander overzichtsartikel dat ook teruggrijpt op historisch werk van Hurwitz is *Random Walks on Groups: Characters and Geometry*, van de onder andere door het kaartschudden beroemde statisticus-goochelaar Persi Diaconis. Zoals de titel al verklapt, kansrekening en combinatoriek op eindige groepen, met als paradigma willekeurige transposities in de symmetrische groepen S_n , waarbij karaktertheorie om de hoek komt kijken. Het artikel eindigt met een zevental open problemen en 76 referenties.

Dan is er het artikel *Lie Methods in Group Theory*, van Mi-

chael Vaughan-Lee, in feite een minisyllabus van een viertal colleges die een overzicht geven van hoe Lie-algebratechnieken kunnen worden toegepast op groepentheoretische vraagstukken. Als voorbeeld wordt het berekenen van Burnsidegroepen van priemexponent onder gebruikmaking van de Baker-Campbell-Hausdorffcommutatorformule genoemd.

Tenslotte heeft uw commentator met veel genoegen en zonder verveling het artikel van de buitenissige Marcus du Sautoy (cf. zijn fantastische design website <http://www.maths.ox.ac.uk/~dusautoy/>) zitten lezen, dat de ietwat te pretentieuze titel *Zeta Functions of Groups: The Quest for Order versus the Flight from Ennui* draagt. Dit werk, dat zich op het grensvlak van analytische getaltheorie en groepentheorie beweegt, tracht analoog aan de manier waarop de klassieke Riemann-zetafunctie een telobject vertegenwoordigt dat informatie bevat over alle priemgetallen, een versie te introduceren die iets zegt over bijvoorbeeld het aantal ondergroepen van index een priemmacht van een eindig voortgebrachte nilpotente groep. En net zoals in het klassieke geval kan men zich dan afvragen of er dan ook een analytische theorie te formuleren is met meromorfe voorzettingen in het complexe vlak, met functionaalvergelijkingen, en uitspraken over nulpunten. Een en ander ook in analogie met wat de algebraïsche getaltheorie al lang heeft laten zien. Het exposé begint met de inzichten van Euler en eindigt via p -adische integralen met interessante resultaten en vermoedens voor bepaalde klassen van groepen.

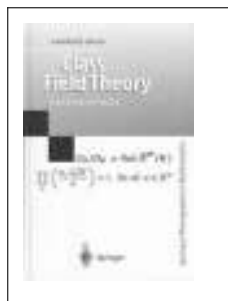
Een originele bijdrage is er te vinden van de diva van de on-eindige groepentheorie, de Pools-Russische Olga Macedonska. Zij verhaalt over *Groupland* (cf. <http://zeus.polsl.gliwice.pl/~olga/>), haar platte planeet waarop groepen leven in door hun eigenschappen bepaalde regio's. Op deze manier worden zowel bijvoorbeeld de klassen van residuaal eindige groepen, nilpotent-bij-locale groepen van eindige exponent, polycyclische groepen enzovoort, gevisualiseerd, maar ook onderlinge relaties, oude en nieuwe vermoedens tussen deze families in een enkel plaatje bijeengebracht.

Opvallend is dat na jaren van onbeduidendheid Spanje tegenwoordig een vooraanstaande rol speelt op groepentheoretisch gebied. Moreto figureert in Volume II met een buitengewoon aardig artikel, *Characters of p -Groups and Sylow p -Subgroups*, dat een overzicht en nieuwe inzichten verschaft over de relatie tussen enerzijds het aantal verschillende karaktergraden en anderzijds de afgeleide lengte (in het geval van oplosbare groepen) en de nilpotentieklass van de groep in kwestie. Voorts treffen we in dezelfde hoek een bijdrage aan van Lucia Sanus (*Character Correspondence and Perfect Isometries*, te maken hebbende met de bekende Glaubermann-Isaacs correspondentie), terwijl Josu Sangroniz (*Character Degrees of the Sylow p -Subgroups of Classical Groups*) ook in Volume II zijn opwachting maakt. A. Ballester-Bolinches heeft zelfs deel aan drie artikelen, die alle formatietheorie (een generalisatie van de Sylow- p -ondergroepentheorie, zoals opgezet door mensen als O. Kegel en T. Hawkes) betreffen.

Kortom, uw recensent, weliswaar bevooroordeeld door een voorliefde voor groepentheorie, las een tweetal bundels die naar zijn smaak zeer de moeite waard zijn. Enerzijds wordt een beeld geschetst van de stand van zaken van verschillende facetten van het vakgebied, anderzijds komt de boodschap over dat het onderwerp springlevend is, en gevoed wordt door een nieuwe generatie die naast de gevestigde orde van St. Andrews op originele en vernieuwende wijze de onderwerpen benadert. Ook zonder

een glas Glenmorangie een geweldige inspiratiebron voor naar ik mag hopen een handjevol Nederlandse studenten en professionele wiskundigen. Beter nog, probeer deze conferentie een keer bij te wonen!

N.S. Hekster



G. Gras

Class Field Theory From Theory to Practice

Springer Monographs in Mathematics

Berlijn: Springer Verlag, 2003

491 p., prijs €85,55

ISBN 3-540-44133-6

De klassenlichamentheorie is een geavanceerd onderdeel van de algebraïsche getaltheorie. Op een meer elementair niveau bestudeert men ideaalklassengroepen en eenhedengroepen van getallenlichamen en het splijtgedrag van priemen bij uitbreidingen van zulke lichamen. De klassenlichamentheorie beschrijft hoe het splijtgedrag van priemen een Abelse uitbreiding bepaalt en omgekeerd. Ik heb deze theorie altijd ervaren als krachtig, diep en van een grote schoonheid. In zo'n wiskundige wereld wil je wel vertoeven en hoe beter je er de weg kent, hoe mooier hij wordt. De eerste aanzet is geweest de kwadratische reciprociteitswet en een grote stap in de goede richting was de Stelling van Kronecker en Weber over Abelse uitbreidingen van de rationale getallen.

De betekenis van de hoofdstellingen van de klassenlichamentheorie is voor iemand met een basiskennis van algebraïsche getaltheorie niet moeilijk te begrijpen. Voor het bewijs van deze stellingen komt echter heel wat kijken. De auteur kent de wereld van de klassenlichamentheorie van alle kanten en dat is een uitstekend uitgangspunt voor een monografie over dit onderwerp. Hij heeft ervoor gekozen de hoofdstellingen niet te bewijzen, maar om te laten zien hoe ze functioneren, wat de gevolgen van deze stellingen zijn en hoe ze onderling samenhangen. Daarbij hanteert hij zowel de klassieke formuleringen van Artin en Takagi met gegeneraliseerde ideaalklassengroepen als de modernere formuleringen met idèles. Een hoogtepunt van het boek is het hoofdstuk over de structuur van de Abelse afsluiting van een getallenlichaam.

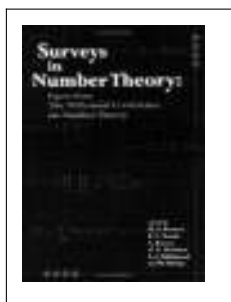
De auteur heeft met dit boek ook een bijdrage geleverd met conventies die orde moeten scheppen in de notatiejungle van de klassenlichamentheorie. De klassieke formuleringen wil je op het niveau van eindige uitbreidingen maar al te graag gebruiken, maar de vele parameters die er een rol spelen leiden snel tot barokke notaties. Het gebruik van scriptsize letters op regelhoogte kan ik niet waarderen, maar ik moet direct toegeven dat ik zelf ook nooit met bevredigende oplossingen voor notatieproblemen ben gekomen, ook niet nadat ik dit onderwerp een aantal keren heb gedoceerd.

Het niet bewijzen van de hoofdstellingen heeft voor- en nadelen. Een voordeel is dat het lekker opschiet. Dat is vooral een voordeel doordat de bewijzen van de hoofdstellingen je weinig vertellen over het gebruik ervan, ze vertellen je weinig meer dan dat het onmogelijk anders kan zijn. Als je een boek schrijft over het gebruik, dan hebben die bewijzen er weinig mee van doen. Ook voor de motivatie kan het helpen: waarom zijn die stellingen

met zulke krachtige gevolgen eigenlijk waar? Een nadeel is natuurlijk dat je nooit helemaal weet welk resultaat in de opbouw van de theorie een gevolg is van welk ander resultaat. Zo is in een niet ongewone opzet het Hasse-principe een bijproduct van het bewijs van een hoofdstelling en niet zozeer een gevolg van hoofdstellingen. Verder is er niet één mogelijke opbouw, maar zijn er verschillende. Uiteindelijk wil je toch wel één opbouw echt begrijpen.

Het boek is door zijn veelheid aan interessante thema's een zeer geschikt uitgangspunt voor een ieder die zich in de klassenlichamentheorie wil verdiepen. Het lijkt mij als basis voor een seminarium zeer geschikt. Doordat sommige onderdelen de vorm hebben van een opgave wordt de lezer aangezet tot activiteit en daar zal hij zeker zijn voordeel mee kunnen doen. Het originele manuscript was in het Frans. Niemand minder dan Henri Cohen heeft het voor Springer in het Engels vertaald.

F. Keune



M.A. Bennett et al. (eds)
**Surveys in Number Theory
 Papers from the Millennial Conference
 on Number Theory**

Natick, MA: A.K. Peters, Ltd., 2003
 368 p., prijs \$30,-
 ISBN 1-56881-162-4

The Millennial Conference on Number Theory was held in May 2000 on the campus of the University of Illinois at Urbana-Champaign. A total of 276 mathematicians from 30 countries were present at the meeting. The proceedings of this conference, containing 72 papers based on lectures given at the conference, have been published separately in three volumes under the title *Number Theory for the Millennium*. The present volume contains a selection of 14 of these and in its totality gives a broad survey of what is 'hot' these days in number theoretic research. In this light, the paper by (the late) Robert Rankin stemming from his desire to make a complete list of all the research students of G.H. Hardy is really a very odd one out in this volume. I read it with interest, but in my opinion it does not fit in this volume.

There are too many papers to be summed up here, so I restrict myself to mentioning just a few. M. Balazard discusses briefly 23 papers (in the form of an annotated bibliography) that are related to the Beurling-Nyman criterion for the Riemann Hypothesis. W.C. W. Li discusses recent developments in automorphic forms and applications (for example Ramanujan graphs).

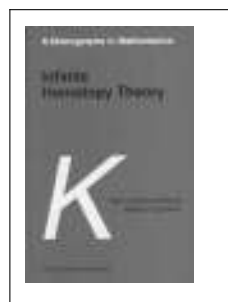
R. Tijdeman surveys Diophantine approximation, but also establishes some new results. He starts with reformulations of Baker-type lower bounds for linear forms in logarithms and Schmidt's Subspace Theorem. He gives applications to numbers composed of small primes and to Diophantine equations (with a special emphasis on recent results). He also considers the study of the non-vanishing and transcendence of infinite sums.

The article by Vaughan and Wooley is a fairly comprehensive survey of work on Waring's problem during the past century. Recall that the modern version of Waring's problem asks for upper bounds on $G(k)$, which is defined to be the smallest number m such that every sufficiently large integer can be written as the sum

of at most m positive integral k th powers. A method of Hardy and Littlewood as well as some refinements of Vinogradov and Davenport are described. Also some variations of Waring's problem are discussed.

The last, but definitely not least paper, is a beautiful survey of H.C. Williams regarding the Pell equation. It starts with the contributions of the Indians and Greeks and continues up to very recent work to which Williams and several of his pupils made an important contribution. For a somewhat shorter survey focusing more on Archimedes' cattle problem the reader can consult H.W. Lenstra's paper in the Notices of the American Mathematical Society (volume 49, 2002, pp. 182-192).

P. Moree



H.J. Baues, A. Quintero
Infinite Homotopy Theory

K-Monographs in Mathematics 6
 Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2001
 296 p., prijs €96,25
 ISBN 0-7923-6982-3

Most textbooks on algebraic topology and a substantial part of the research papers only deal with compact spaces and the associated combinatorial or algebraic structures, which are usually finite or at least finitely generated. Geometrical questions sometimes lead to problems which fall outside this realm, but these are often dealt with in a more or less ad hoc fashion by some kind of a limit process starting from the compact situation.

In this book the authors try to deal with more general spaces in a fundamental way by setting up algebraic topology in an abstract categorical context which encompasses not only the usual category of topological spaces and continuous maps, but also several categories related to proper maps. For this Quillen's theory of model categories can not be used, since these categories do not have all finite products. Instead, the authors use the notion of 'category with a cylinder functor', which is a functor which generalizes the construction on topological spaces given by taking the product with a unit segment. If one is interested in spaces equipped with a map from a given space B , then even this does not apply and one has to use the still more general theory of a 'category with cofibrations'. These notions were developed in the book *Algebraic Homotopy* by the first author.

The following two categories are studied in detail: a) The category of topological spaces with as morphisms the continuous maps which are closed and proper b) The 'Category of Ends' where the objects are tuples $(X, \hat{X}, E)$ such that $\hat{X}$ is compact and $X = \hat{X} - E$ is open, and where the morphisms are continuous maps of such tuples. In contrast to the usual category of topological spaces, which has the one point space as a final object, these categories have no final object. Thus where in ordinary algebraic topology only a choice of a base point is needed, e.g., in the definition of homotopy groups, one here has to compare the objects with a standard object T with more internal structure, preferably a so-called tree-like space. This has as consequence that the analogue of the n^{th} homotopy group is no longer a group, but something more subtle: a model for the theory of cogroups $S^n(T)$; this

is a generalization of the notion of additive category. These ideas build on the book *Homotopy type and Homology* by the first author, and of course on many other publications in category theory.

The first half of the book of about 160 pages is written in this style of a textbook, with detailed explanations and proofs. In it the above mentioned categories of spaces are analyzed and the necessary facts from topology are discussed. Substantially more from topology is needed than in ordinary algebraic topology, in particular when analyzing the possible homeomorphism types of a space of ends E . Although proofs are often not given, all concepts are carefully explained and detailed references for the proofs are given.

The last 60 pages are written more as a research paper, with much less detailed proofs. These discuss the analogue in the Category of Ends of local homology, and the homology of the universal covering. This culminates in a controlled version of the theory of simple homotopy type and Whitehead torsion.

The 60 pages in between are also in between in style. They discuss the analogues of basic tools of algebraic topology like the Van Kampen theorem and cellular homology; all using the language of theories of cgroups.

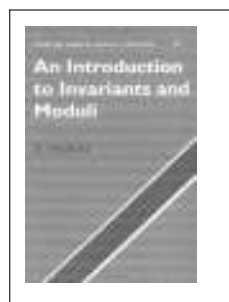
The book convinced me that these are the right tools in this subject. The level of abstraction makes it not always easy reading, but other than that a good understanding of the basics of ordinary homotopy theory is all that is needed to enjoy reading this book.

F. Clauwens

gulator afbeeldingen, de Hodge- en Tate-vermoedens, een door Beilinson geïntroduceerd analogon van deze vermoedens voor hogere Chowgroepen, en de bestudering van bovengenoemde invarianten via infinitesimale methoden (stellingen van Noether-Lefschetz, Green-Voisin en Nori).

De door de twee organisatoren verzorgde inleidende lezingen over Hodge theorie zijn niet in deze proceedings opgenomen, maar verwerkt in het boek *Carlson, Müller-Stach, Peters, Period mappings and period domains*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. In combinatie met dit boek biedt het materiaal in deze proceedings een heldere inleiding, gericht op niet-specialisten, tot enkele van de meest actieve onderzoeksgebieden gerelateerd aan de theorie van algebraïsche cycli.

J. Nagel



S. Mukai

An Introduction to Invariants and Moduli

Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 81

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

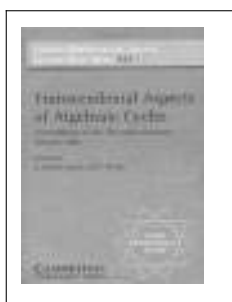
503 p., prijs £70,00

ISBN 0-521-80906-1

Het komt zelden voor dat een boek over een recent onderwerp zowel toegankelijk als diepgaand is. Maar het uit het Japans vertaalde *An Introduction to Invariants and Moduli* van Shigeru Mukai is er zo een. Als een ontspannen wandeling die je langs alle hoogten van een gebied voert, zonder meer te vragen van de lezer dan enthousiasme en doorzettingsvermogen, loopt Mukai door de commutatieve algebra, Riemannoppervlakken, algebraïsche meetkunde en invariantentheorie. Dat lijkt een fikse kluit, maar hij slaagt erin zonder ooit het doel uit het oog te verliezen. Er wordt zelden meer theorie ontwikkeld dan er in de toepassingen gebruikt wordt, en elke uitspraak wordt aan de hand van een (tegen-)voorbeeld of opgave verklaard. Invariantentheorie bestudeert groepsacties op variëteiten. Deze komen we vooral tegen in zogenaamde moduliproblemen, waar we variëteiten willen classificeren 'op symmetrie na'. Het idee is om in de functiering $k[X]$ van een variëteit X te zoeken naar functies die invariant zijn onder de werking van de groep. Onder de juiste voorwaarde geeft de ring opgespannen door deze invarianten een nieuwe variëteit Y , die zich op de gewenste manier als quotiënt gedraagt. Beschouw bijvoorbeeld kegelsneden: figuren in het vlak gegeven door een vergelijking van de vorm $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$. Door de coëfficiënten in de matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

te zetten zien we dat de ruimte van deze kegelsneden isomorf is aan de ruimte van symmetrische 2×2 -matrices. Deze ruimte van matrices vormt onze X . Hierop werkt $SL(2)$ rechts door het kiezen van een andere basis. De determinant $ac - b^2$ (in dit geval ook wel *discriminant* genoemd) is hiervan een invariant, en blijkt ook de enige te zijn. De quotiëntruimte Y wordt dan een lijn, en we vinden dat een kegelsnede op basiskeuze na bepaald wordt



Transcendental Aspects of Algebraic Cycles, Proceedings of the Grenoble Summer School 2001

London Mathematical Society Lecture Note Series, 313

Cambridge: Cambridge University Press, 2004

290 p., prijs £38,00

ISBN 0-521-54547-1

Dit boek bevat een verzameling lezingen van een zomerschool in Grenoble, gewijd aan de studie van algebraïsche cycli op complexe algebraïsche variëteiten met behulp van topologische en complex-analytische methoden. Het boek is verdeeld in drie delen.

Deel één (ik reken hiertoe ook de inleidende eerste twee hoofdstukken) is gewijd aan Chowvariëteiten en Lawsonhomologie, een homologietheorie die wordt verkregen door de homotopiegroepen van de topologische groep van algebraïsche cycli van gegeven dimensie te nemen.

In deel twee worden motieven en motivische cohomologie behandeld. De belangrijkste thema's die hier aan bod komen zijn Grothendieck's theorie van motieven ('pure' motieven, afkomstig van gladde projectieve variëteiten), het verband met de vermoedens van Bloch-Beilinson over filtraties op Chowgroepen via Murre's vermoedens over decompositie van Chowmotieven, en Bloch's hogere Chowgroepen (een kandidaat voor een motivische cohomologietheorie).

Deel drie gaat over Hodgetheoretische invarianten van algebraïsche cycli. Het bevat een bespreking van de klassieke invarianten (de cykelklassenafbeelding en Abel-Jacobi-afbeelding), re-

door zijn discriminant!

Dit is een geweldig boek voor iedereen die de invariantentheorie wil leren kennen. Ook als je de eindstreep niet helemaal haalt, zul je er toch heel veel uithalen: zowel over de deelgebieden als over de toepassingen van de theorie. Masterstudenten en promovendi zullen merken dat lacunes in de kennis snel worden opgevuld en dwarsverbanden inzichtelijk gemaakt. Gezegd moet worden dat het terugvinden van een definitie of stelling niet altijd even makkelijk gaat, dus als referentiewerk is dit boek minder geschikt. Maar in zijn heldere uiteenzetting en didactische schrijfwijze kent dit boek op dit gebied geen gelijke.

R. Swierstra



C. Christensen, G. Sundaram, A. Sathaye, C. Bajaj

Algebra, Arithmetic and Geometry with Applications

Papers from Shreeeram S. Abhyankar's 70th Birthday Conference

Berlijn: Springer Verlag, 2004

785 p., prijs €109,95

ISBN 3-540-00475-0

Dit is een dik boek, met bijna vijftig bijdragen, allemaal geschreven door mensen die de jarige kennen. Hij heeft de aandacht verdiend. Wat moeten anderen met het boek? Natuurlijk staat er hier en daar wel iets aardigs in. Zo is de bijdrage van onze landgenoot Van den Essen goed geslaagd, zeker voor wie wel eens van de Abhyankar-Mohstelling heeft gehoord. Ook is het leuk om Abhyankar's bekende gedicht *Polynomials and Power series* nog eens terug te zien. Maar de meeste lezers zullen al gauw zevenhonderd pagina's over willen slaan. Dan is het toch wel een zware last om mee te torsen. Waar gaat het over? Dat is nou precies het probleem. Over van alles en nog wat. Het varieert van de vraag hoe je veeltermen maakt met gegeven Galois groep, tot de vraag hoe de knopjes werken in de word processor *Scientific Workplace*. Mocht u al een telefoonboek hebben, dan zie ik geen reden om dit gewichtige werk aan te schaffen.

W.L.J. van der Kallen



J. Stopple

A Primer of Analytic Number Theory from Pythagoras to Riemann.

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

473 p., prijs £23,-

ISBN 0-521-01253-8

De schrijver pretendeert dat zijn boek een inleiding voor lagerejaars studenten wiskunde geeft in de analytische getaltheorie. Alleen kennis van reële analyse wordt bekend verondersteld, geen complexe analyse. Hij zegt verder leesbaarheid en eenvoud te verkiezen boven wiskundige strengheid.

De term analytische getaltheorie vereist hier wel toelichting. Het grootste deel van het boek gaat over elementaire getaltheorie. De analytische delen betreffen priemgetaltheorie, en dus bijvoorbeeld niet additieve getaltheorie, transcendentie of modulair

re vormen.

Om de gebreken in de voorkennis op te vangen zijn er intermezzo's over calculus, reeksen, complexe getallen en congruenties. Dat is irritant voor lezers die deze onderwerpen al kennen, want zomaar overslaan kun je deze delen niet. Sommige toepassingen in de getaltheorie worden meteen meegenomen.

De verdere getaltheorie is in dertien hoofdstukken verdeeld. De eerste hoofdstukken zijn heel eenvoudig: inductie, deelbaarheid, grootteorde en gemiddelde. De laatste vijf zijn nogal stevig: Riemann zeta-functie, L-functies en Siegel-nulpunten. Ik betwijfel zeer of lezers zonder deskundige begeleiding de brug van de driehoeksgetallen aan het begin tot de analytische klassegetalformule aan het eind aan de hand van het boek kunnen begaan. Ik zou aan het boek *Getaltheorie voor Beginners* van Frits Beukers (Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1999) de voorkeur geven, en voor wie meer analytische getaltheorie wenst: *Multiplicative Number Theory* van Harold Davenport (2e druk: Springer-Verlag, 1980).

Ik denk dat het boek van Stopple vooral interessant is voor docenten die een inleidend college getaltheorie geven. Er staan soms interessante historische feiten in, af en toe alternatieve bewijzen die minder voorkennis vereisen, maar dan wel bewerklijker worden, en ook wel wat toepassingen. Daarbij vind ik het soms lastig een bepaald resultaat te vinden, omdat de volgorde van de onderwerpen ongebruikelijk is. Ook vind ik het ongelukkig dat de hoofdstukken soms misleidende titels hebben. Zo bevat het hoofdstuk *Pell's equation* drie bladzijden over de vergelijking van Pell en tien over kwadratische reciprociteit en L-functies.

Kortom: geen boek om getaltheorie uit te leren, maar wel aardig om erbij te hebben.

R. Tijdeman



N. Hayashi, E. Kaikina

Nonlinear Theory of Pseudodifferential Equations on a Half Line

North-Holland Mathematics Studies, 194

Amsterdam: Elsevier Science, 2004

319 p., prijs €98,00

ISBN 0-444-51569-0

Dit boek behandelt problemen betreffende lokale existentie van oplossingen van niet-lineaire evolutievergelijkingen van het type $u_t + N(u) + Ku = f$, waar K een pseudo-differentiaaloperator op een halfrechte of een interval is, en $N(u)$ een niet-lineaire term die afhangt van u en zijn partiële afgeleiden. Na twee inleidende hoofdstukken met voorbereidingen en algemene theorie komen achtereenvolgens de volgende vergelijkingen aan bod: de niet-lineaire Schrödingervergelijking (NLS), de Whithamvergelijking en de Korteweg-De Vries-Burgersvergelijking (KDVB). Dan volgt een hoofdstuk over grote beginvoorwaarden voor de KDVB-vergelijking. Daarna volgt een hoofdstuk over een vergelijking met hetzelfde lineaire deel, maar een andere niet-lineariteit. De hoofdstukken 8 en 9 behandelen respectievelijk het Dirichlet-probleem en het Neumannprobleem voor de Korteweg-De Vriesvergelijking. Dan volgen twee hoofdstukken over de Landau-Ginzburg- en de Burgersvergelijking. Tenslotte zijn er nog twee hoofdstukken over de KDVB-vergelijking en de NLS op een interval, en een hoofdstuk over periodieke problemen.

Het boek is voor een flink deel een samenvatting van artikelen van de auteurs. Hier en daar is dat nog te merken, zoals bijvoorbeeld wanneer de auteurs spreken over “our results in this paper” (pagina 30). Maar over het geheel genomen hebben de auteurs hun best gedaan om hun artikelen om te werken tot een samenhangend en goed gestructureerd boek. Het boek is geschreven in een goed leesbare stijl, en ik heb slechts enkele typfouten gevonden, waarvan slechts een enkele wat hinderlijk is.

Het boek is ook erg prettig opgebouwd. De meeste hoofdstukken starten met een inleidende paragraaf waarin precies wordt uitgelegd wat het probleem is dat in het hoofdstuk aan de orde zal komen, en wat de belangrijkste resultaten zijn. De details volgen dan netjes in de volgende paragrafen. De opbouw van de hoofdstukken volgt daarbij ook vaak hetzelfde stramien: eerst wordt het lineaire probleem besproken, dan lokale existentie voor het niet-lineaire probleem, meestal voor kleine begindata, en vervolgens komt dan asymptotiek voor $t \rightarrow \infty$ aan de orde. Waar mogelijk wordt dan nog ingegaan op existentie van oplossingen voor grote begindata. Die opbouw betekent dat (bijna) alle resultaten van het boek te vinden zijn in de inleidende paragrafen van de hoofdstukken, en dat de lezer op elke plaats in het boek weet wat hem te wachten staat.

Wie snel op de hoogte wil raken van wat deze auteurs en de groep om hen heen op dit terrein verricht heeft, kan met dit boek heel goed uit de voeten. Dat het daarbij ook nog wel een overzicht geeft over andere literatuur is mooi meegenomen. Het boek past in die zin perfect in de serie waarin het is opgenomen, die immers tot doel heeft om technische monografieën te publiceren die diep ingaan op een (mogelijk beperkt) gebied, en geen overzichtsmo-
nografieën.

A.C.M. Ran

$|\nabla|f|^\alpha| = \alpha|f|^{\alpha-1}|\nabla f|$ with $\alpha = (n-1)p/(n-p)$.

So now the reader should be convinced that to extend Sobolev type inequalities and their consequences to noncompact manifolds a careful retracing of one's steps for the Euclidean case is necessary. Obviously the relation between (hyper)volume and (hyper)surface area is strongly dependent on the type of manifold.

Having tried to motivate the author's intention I should also try to give a small line-up of the subjects that are being addressed. After the introduction which describes the main ideas, Chapter 2 is concerned with weak solutions to elliptic differential equations and the application of a Sobolev type inequality in Moser's iteration technique. Chapter 3 starts with Sobolev inequalities on manifolds. The two applications mentioned in the title of Chapter 4 refer to Gaussian heat kernel estimates and the Rozenblum-Lieb-Cwikel inequality. The last one being an estimate for the number of negative eigenvalues of $-\operatorname{div}(\nabla) - V$ on M in terms of V_+ . In Chapter 5 so-called local-Sobolev inequalities are exploited for manifolds that do not satisfy an appropriate growth rate. The Riemannian manifold M is said to satisfy such (a family of) local inequalities if the following holds:

$$\left(\int_B |f|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C(B) \left(r(B)^p \int_B |\nabla f|^p d\mu + \int_B |f|^p d\mu\right)^{1/p},$$

for all $f \in C_0^\infty(B)$, with B a geodesic ball of radius $r(B)$ and where f_B is the average over B . Finally, Theorem 5.5.6 states the implications and equivalences between the local Sobolev inequality, an estimate for the growth rate of the volume of balls, a mean value inequality, an on-diagonal heat kernel upper, respectively lower bound and a Gaussian heat kernel estimate.

The book contains a wealth of information, is very well written, and is nevertheless pleasantly concise; it even has an excellent layout. Some obvious errors such as a missing positivity assumption for test functions should be forgiven. If my enthusiasm is not clear yet let me end with a punch line. It is one of those books that one is afraid to miss.

G.H. Sweers



Laurent Saloff-Coste

Aspects of Sobolev-Type Inequalities*London Mathematical Society Lecture Note Series, 289*

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

190 p., prijs £24,95

ISBN 0521006074

The name Sobolev inequality on $\mathbf{R}^n$ with $n \geq 2$ refers to the following result. For $1 \leq p < n$ and $q = np/(n-p)$ there exists a constant $C(n, p)$ such that $\|f\|_{L^q(\mathbf{R}^n)} \leq C(n, p)\|\nabla f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$ for all $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Saloff-Coste's main interests are such inequalities and related results on Riemannian manifolds.

The underlying phenomenon for Sobolev inequalities is the relation between volume and surface area. This relation is carefully explained in Section 1.3 and moreover, is supplied with the historical details. I will not dwell on the interesting history but please allow me to recall this relation here. Let μ_n denote the n -dimensional measure. The best constant C_n such that the estimate $(\mu_n(\Omega))^{(n-1)/n} \leq C_n \mu_{n-1}(\partial\Omega)$ holds for any compact set $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ with smooth boundary, is also the best constant such that the Sobolev inequality holds for $p = 1$: $\|f\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbf{R}^n)} \leq C_n \|\nabla f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)}$ for all $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Note that the Sobolev inequality for $p = 1$, which is in fact due to Gagliardo-Nirenberg, implies the one for $p \in (1, n)$ by using Hölder's inequality for



M. Ó Searcoid

Elements of Abstract Analysis*Springer Undergraduate Mathematics Series*

Berlijn: Springer Verlag, 2002

298 p., prijs €37,40

ISBN 1-85233-424-X

“This is not an analysis textbook ... It is rather an essay on the foundations of modern analysis.” (p.vii) Inderdaad, dit is geen gewoon analyseleerboek. Het boek is ‘self-contained’, in de zin dat alles wordt opgebouwd uit de axioma's van de verzamelingenleer. Zelfs de definitie van bijvoorbeeld commutativiteit wordt herhaald. Op deze manier krijgen we een dwarsdoorsnede van de abstracte analyse met een sterke nadruk op de verzamelingstheoretische constructies. Via bijvoorbeeld lineaire en metrische ruimten, topologie, convergentie, samenhangendheid en compactheid

komt het boek uiteindelijk uit bij de stelling van Gelfand en Naimark.

Het is prettig alle analyse nog eens na te lezen, maar alleen na de analyse goed begrepen te hebben uit andere boeken. Helaas worden verzamelingstheoretisch interessante onderdelen van de analyse, als bijvoorbeeld maattheorie, Fouriertheorie of niet-standaard analyse niet behandeld.

Als opstel over de grondslagen van de wiskunde is het boek erg beperkt. Het bevat een hoofdstuk over de axioma's van de verzamelingenleer en een hoofdstuk over ordinaal- en cardinaal-getallen. In andere hoofdstukken vinden we een beschrijving hoe de abstracte analyse in de verzamelingenleer gecodeerd kan worden. Dit coderen mag letterlijk genomen worden. De natuurlijke getallen worden bijvoorbeeld *gedefinieerd* als een deelverzameling van de reële getallen, zodat we mogen schrijven: $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. Net zo, $\mathbf{C} := \mathbf{R} \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \setminus \{0\})$. Toch wordt er op andere plaatsen weer gewoon de identificatie gemaakt tussen een injectie en een deelverzameling.

Het boek ziet er verzorgd uit, bevat veel opgaven (met uitwerkingen) en heeft een uitgebreide index. Het boek is vooral gericht op: de 'final year undergraduate' die al bekend is met de te behandelen wiskundige structuren.

B. Spitters

introduction to recent literature on CAGD. It is based on courses taught by the authors, and the book shows that the material has been thoroughly tested and revised in classrooms. Prerequisites are minimal: basic knowledge of multivariate and vector calculus will be sufficient for a successful reading of this book. The book contains a modest collection of exercises, which should probably be extended depending on the goals of an introductory course on CAGD. Especially programming assignments (using Mathematica, Maple or Matlab) could provide a useful extension to the current set of exercises. The book is highly recommended, both as a textbook for courses on geometric computing and as a self-contained introduction to the field of Computer Aided Geometric Design.

G. Vegter



P. Schuster et al. (eds)
**Reuniting the Antipodes
Constructive and Nonstandard Views
of the Continuum**

Synthese Library, 306
Kluwer, 2002
316p., prijs €123,-
ISBN 1-4020-0152-5

Onder deze ietwat hoogdravende titel publiceert Kluwer de bijdragen aan een congres uit 1999 — een congres dat gewijd was aan mogelijke parallellen tussen de niet-standaard analyse en constructieve (waaronder: intuïtionistische) denkbeelden over de reële getallen.

De editors schrijven in hun voorwoord: "The distance between constructive and nonstandard mathematics [...] is actually much smaller than it appears to be. Indications for this are that non-standard practice often looks rather constructive, and that very small numbers unknown to vanish are indispensable to distinguish constructive mathematics from its traditional counterpart". Ik weet niet zeker of ik precies begrijp wat hier bedoeld wordt (in de intuïtionistische wiskunde kent men de 'fleeing numbers' van Brouwer, waarvan onbekend is of ze gelijk zijn aan 0, maar die hebben niets te maken met de infinitesimalen van Leibniz, Euler en Robinson), maar het lofwaaardige doel was: onderzoekers bij elkaar brengen uit diverse richtingen van niet-klassieke grondslagen van de analyse.

Er zijn nogal wat van die richtingen: behalve niet-standaard analyse en constructieve analyse heb je smooth infinitesimal analysis (of synthetische differentiaalmeetkunde), de theorie van locales (of, in predicatieve vorm, Formal Topology), recursieve analyse, Conway surreal numbers en andere definities gebaseerd op spelen. Al deze richtingen zijn in de congresbundel vertegenwoordigd, maar zijn de tegenvoeters verenigd?

Eigenlijk heb ik maar twee artikelen (van de 25) kunnen vinden waarin zoiets wordt geprobeerd: een uiteenzetting van Erik Palmgren over een model voor intuïtionistische niet-standaard analyse (gebaseerd op Moerdijk), en een artikel van David Ross waarin enkele resultaten uit de constructieve maattheorie verkregen worden via niet-standaard argumenten.

Het overgrote deel van de auteurs blijft binnen het eigen specialisme, en met name de intuïtionistische club (Bridges, Ishihara, Kushner, Mines, Richman, Veldman, Vita; ze waren er allemaal)



H. Prautzsch, W. Boehm and M. Paluszny
Bézier and B-Spline Techniques

Mathematics and Visualization
Berlijn: Springer-Verlag, 2002
304 p., prijs €74,85
ISBN 3-540-43761-4

Computer Aided Geometric Design (CAGD) deals with the algorithmic aspects of curves and surfaces. The field has been developed since the advent of computers to support modeling of geometric objects like wings of air-planes, hulls of ships, and bodies of cars in the sixties. The planning of paths for numerically controlled milling machines also required the development of special classes of surfaces suitable for algorithmic manipulation by computer.

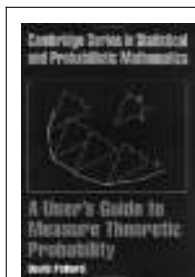
One of the earliest books on Bézier and B-Spline techniques is Farin's *Curves and surfaces for CAGD. A practical guide*, (Academic Press, Inc., Boston, 1993).

Since the appearance of this book the field has grown impressively. New surface representations and techniques have been developed, like multivariate splines and subdivision surfaces related to wavelets. These techniques have been successfully applied in multiresolution representations of curves and surfaces, which is especially useful in computer graphics when a single object should be represented at various levels of detail.

The book by Prautzsch, Boehm and Paluszny contains many of the older surface techniques of CAGD, especially related to Bézier and B-Spline representations of piecewise polynomial surface patches. These techniques are also presented by Farin, but the book also covers some of the more recent techniques of multivariate splines and subdivision surfaces. The treatment is far from complete, but the book definitely serves as a solid in-

is bijzonder hecht (een blik op de referenties zegt boekdelen). De niet-standaard analyse-artikelen (Albeverio/Wu, Di Nasso, Gordon/Rezvoa, Ng/Render, Keisler/Sun) zijn zeer technisch en hadden ook in analysetijdschriften gepast.

Er is een interessant historisch artikel van Detlef Laugwitz over een voorloper van Robinson's niet-standaard model, en een voor mij moeilijk te taxeren wijsgerig artikel van Julia Zink over Peirce's ideeën over het continuüm. Dit soort artikelen hoort natuurlijk thuis in een bundel als deze; maar wat de bijdragen van Negri, Seisenberger (twee keer pure bewijstheorie) en Von Plato (constructieve traliëtheorie) hier doen, ontgaat me. *J. van Oosten*



D. Pollard
A User's Guide to Measure Theoretic Probability

Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 8
Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

351 p., prijs £20,95
ISBN 0-521-00289-3

Traditioneel wordt de maattheorie ontweken bij inleidende cursussen kansrekening, vooral voor niet-wiskundigen. Door de wiskundige precisie enigszins op te offeren, kan men dan met betrekkelijk weinig moeite kennismaken met enkele basisconcepten uit de kansrekening. Echter, de grenzen zijn vrij snel bereikt met deze aanpak. In het boek van Pollard ligt juist de maattheorie ten grondslag aan de opbouw van de kansrekening.

In het eerste deel van het boek worden de nodige begrippen en resultaten uit de maattheorie, in de vorm van een gebruikersgids, op een beknopte en elegante wijze gepresenteerd. Hierbij wijkt de auteur af van de traditionele aanpak: in de maattheoretische constructies wordt de integraal geïdentificeerd met een lineaire functionaal gedefinieerd op de ruimte van meetbare functies. Dankzij de doordachte keuze en strakke opbouw van het materiaal legt dit deel van het boek de benodigde wiskundige basis voor de kansrekening.

Voorzien van het maattheoretische gereedschap, gaat de auteur vervolgens in op de klassieke onderwerpen van de waarschijnlijkheidsrekening: onafhankelijkheid, voorwaardelijke verdelingen, verwachtingen, de wet van de grote aantallen, martingalen, convergentie in verdeling, centrale limietstelling en Fourier transformaties. Bovendien komen nog een paar geavanceerdere onderwerpen aan bod, waaronder Brownse beweging, koppelingen, en desintegraties en de wet van de geïtereerde logaritme. Ook hier besteedt de auteur veel aandacht aan een zorgvuldige bewijsovervoering en aan subtiele meetbaarheidskwesities.

Zoals twee vorige boeken van Pollard hebben laten zien (vooral het populaire boek uit 1984: *Convergence of stochastic processes*), beschikt de auteur over bijzondere didactische kwaliteiten. De presentatie van de stof kenmerkt zich door een eigenzinnige stijl. Hoewel de wiskundig rigoureuze behandeling een duidelijke prioriteit heeft, vermijdt de auteur ingewikkelde notaties en voorziet vele abstracte beschouwingen van zijn inzichtelijke commentaar. Waar mogelijk, geeft de auteur korte en elegante bewijzen. Veel aanvullend materiaal is op een handige wijze verborgen in voorbeelden en opgaven. Zodoende bevat het boek relatief veel mate-

riaal in verhouding tot zijn grootte.

Het onderhavige boek richt zich klaarblijkelijk op mensen die de kansrekening op een wiskundig rigoureuze manier willen bestuderen. Als zodanig is het boek bijzonder duidelijk en met veel zorg geschreven. Desalniettemin is een bepaald niveau van wiskundige cultuur van de lezer vereist. Bovendien is een elementaire voorkennis van de kansrekening wenselijk. Het boek van D. Pollard is dus minder geschikt als leerboek kansrekening voor beginners zonder gedegen wiskundige achtergrond: veel verfijnde maattheoretische beschouwingen kunnen verwarrend zijn voor lezers die voor het eerst kennismaken met de kansrekening.

Al met al is het boek van harte aanbevolen, zowel als leerboek voor lezers met affiniteit voor wiskunde als naslagwerk voor experts. *E.N. Belitser*



Stephen Senn
**Dicing with Death
Chance, Risk and Health**

Cambridge: Cambridge University Press, 2003
251 p., prijs £15,99
ISBN 0-521-54023-2

De enigszins morbide titel van dit boek reflecteert twee voorliefdes van de auteur: medische statistiek en toveren met taal. De auteur begint met een frustratie die een aantal statistici zal herkennen: "Look at that miserable student in the corner at the party. What are you studying? ... statistics". Statistiek wordt niet door iedereen als volwaardig vakgebied beschouwd, omdat het enerzijds 'te wiskundig' is voor toegepaste wetenschappers en 'niet wiskundig genoeg' voor wiskundigen. De schrijver doet een poging beide groepen te overtuigen van de schoonheid van de (medische) statistiek. Omdat deze twee doelgroepen ver uit elkaar liggen, gebruikt hij hoofdstukken met en zonder ster om meer en minder wiskundig georiënteerde onderwerpen aan te duiden. In sommige gevallen zal de wiskundige zich storen aan de overdreven uitgebreide uitleg van simpele begrippen zoals de binomiale coëfficiënt, maar gezien de spagaat die de auteur moet maken, zij dit hem vergeven. Het boek is rijklijk voorzien van voetnoten waarin sommige onderwerpen ook nog verder uitgediept worden. Een aantal onderwerpen is erg specifiek gericht op medische toepassingen zoals Cox' levensduurmodellen, gerandomiseerde klinische studies en ziekteverspreiding. Meer fundamentele statistische kwesties komen echter ook aan bod. Zo schetst de auteur het ontstaan van hypothesetoetsen, de verschillen tussen de Bayesiaanse en frequentistische school en fenomenen zoals regressie naar het gemiddelde. Het boek blijkt daarbij een rijke geschiedkundige bron te zijn met carrièrebeschrijvingen van vele beroemde statistici en kansrekenaars, waarbij de onhebbelijkheden van de beroemdheden niet vergeten worden. Dit laatste geeft het boek een aangenaam smeugig karakter.

Het boek is gelardeerd met (soms te lange) volzinnen en citaten, waarmee de schrijver het boek wellicht een literair karakter wil geven, hetgeen onnodig is. De kracht van Senn ligt in het illustreren van statistische begrippen. Voorbeelden zijn de trigonome-

trische analogie voor het begrip 'meetfout' en het proportionele denken als basis voor het Cox regressiemodel. Voeg daarbij een dosis paradoxen die de revue passeren (zoals de Lindley paradox) met gedegen verklaringen en het boek ontvouwt zijn grootste waarde voor de docerende statisticus. De auteur leunt wellicht teveel op het verleden en laat helaas na de tegenwoordig belangrijke rol van de statisticus in de analyse van genetische data te beschouwen. Dit boek geeft wel duidelijk een bewijs voor de relevantie van de statistiek in de maatschappij, hetgeen een steun in de rug voor 'that miserable student' moet zijn. *M. van de Wiel*



T. Bedford, R. Cooke
**Probabilistic Risk Analysis
Foundations and Methods**

Cambridge: Cambridge University Press, 2001
393 p., prijs £45.00
ISBN 0-521-77320-2

De auteurs van dit boek behandelen de concepten en mathematische fundamenteën die ten grondslag liggen aan het kwantificeren en interpreteren van risico. Dat de term risico niet meer weg valt te denken uit de huidige samenleving wordt zeer goed geïllustreerd in het eerste hoofdstuk van het boek: voorbeelden van incidenten in de lucht- en ruimtevaart, de nucleaire sector en de chemische sector hebben er onder andere toe geleid dat de (kwantitatieve) risicoanalyse zijn intrede heeft gedaan bij de *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) en de *US Nuclear Regulatory Commission* (NRC). Ook de Nederlandse overheid heeft het concept risico geaccepteerd en vereist van installaties die te maken hebben met gevaarlijke stoffen een *Extern Veiligheid Rapport* (EVR) en daarmee zijn normstellingen geïntroduceerd voor het risico.

Het 393 pagina's tellende boek is opgedeeld in vier delen. Het eerste deel bestaat uit slechts één hoofdstuk waarin naast een historisch overzicht kort en algemeen wordt ingegaan op risico en de analyse daarvan. Het tweede deel van het boek behandelt de theoretische kant van risico, waarin in eerste instantie op filosofische wijze wordt uitgeweid over onzekerheid, haast ten spijt van de auteurs zo lijkt het: "Our focus in this book is practical. Unfortunately, in order to be practical, one must occasionally dabble in philosophy". Het derde hoofdstuk begint, met het voorgaande hoofdstuk nog in gedachten, glashard met een review van de elementaire waarschijnlijkheidsrekening, waarmee de wiskundige doorgaans meer vertrouwd is. De meest voorkomende verdelingen (binomiaal, normaal, exponentieel, poisson, gamma, beta, lognormaal) worden kort, maar zuiver belicht. De in risicoanalyses veel gebruikte Weibullverdeling wordt in een apart hoofdstuk tot in detail bekeken: de auteurs bespreken de toepasbaarheid van verschillende methoden (grafisch, maximum likelihood, Bayesiaans, Kaplan-Meier) om de Weibullparameters te schatten. Daarnaast wordt in het tweede deel van het boek aandacht besteed aan statistische inferentie. De twee meest voorkomende principes (Bayesiaanse inferentie en klassieke inferentie) worden beide besproken. Naast de uitgebreide beschrijving worden de voor- en nadelen van beide methoden belicht.

Het derde en vierde deel van het boek vormen de praktische invulling en toepasbaarheid van het geheel. Het derde deel bestaat uit zeven hoofdstukken die betrekking hebben op de analyse van systemen. De hoofdstukken zijn grotendeels onafhankelijk te lezen (elk hoofdstuk belicht op tamelijk summiere wijze een component uit het geheel van de probabilistische risicoanalyse). Er wordt aandacht besteed aan (de analyse van) foutenbomen en gebeurtenisbomen, verschillende modellen met betrekking tot zogenaamd 'afhankelijk falen' worden besproken en ook worden wiskundige gereedschappen aangereikt om zo goed mogelijk faaldata te collecteren. Daarnaast wordt in het derde deel ingegaan op het gebruik van experts om expert-afhankelijke kansverdelingen te verkrijgen (expert judgement), hetgeen met name van belang is in het geval bepaalde parameters en de bijbehorende onzekerheden niet te schatten zijn met behulp van 'echte data'. In het voorlaatste hoofdstuk van het derde deel wordt een aantal beschikbare modellen en technieken met betrekking tot menselijk falen beschouwd. In het laatste hoofdstuk van het derde deel wordt aandacht besteed aan de problemen omtrent het beoordelen van de kwaliteit en betrouwbaarheid van software. Het vierde en laatste deel van het boek heeft betrekking op onzekerheidsmodellering en het meten van risico. Het bestaat uit een zestal hoofdstukken die wederom grotendeels onafhankelijk zijn. In dit deel wordt aandacht besteed aan beslissingstheorie, hetgeen als belangrijke toepassing kan worden gezien van de risicoanalyse. Tevens wordt aandacht besteed aan meerdimensionale verdelingen en beslissingsproblemen (in veel beslissingsvraagstukken is er meer dan één factor die van invloed is) en wordt kort ingegaan op zogenaamde projectrisico's (dat naast het risico van systemen op de omgeving een steeds belangrijkere rol gaat spelen in allerlei takken van de industrie). Tamelijk uitgebreid wordt er stilgestaan bij onzekerheidsanalyse; er wordt in dit hoofdstuk niet alleen gekeken naar de wiskundige verhandeling, ook wordt ingegaan op het visualiseren van onzekerheden middels zogenaamde 'cobweb plots'. Het laatste hoofdstuk van het vierde deel gaat in op het meten van risico en zegt kort iets over de heersende regelgeving omtrent risico's.

Dit fraai uitgevoerde boek beschikt over een index van illustraties en een index van tabellen. Bijna elk hoofdstuk wordt besloten met een reeks opgaven. Het boek is geschreven voor een ieder met enige kennis van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Voor degenen die geïnteresseerd zijn in de concepten en mathematische fundamenteën van risico, en alles wat daaromheen speelt, is het een aanrader. *G.R. Kuik*



Frank Deutsch
**Best Approximation in Inner Product
Spaces**

CMS Books in Mathematics
Berlin: Springer Verlag, 2001
338 p., prijs €64,95
ISBN 0-387-95156-3

In dit boek worden theorie en toepassingen behandeld van beste benaderingen in vectorruimten met een inwendig product $\langle x, y \rangle$. Standaard voorbeelden van deze problematiek zijn: de kleinste-

kwadratenbenadering van een metingentabel met behulp van een polynoom, en de beste invulling voor een overbepaald systeem van vergelijkingen.

Wie niet vertrouwd is met inwendig-productruimten en beste benadering kan die achterstand goedmaken met de hoofdstukken 1 en 2. De beste benadering van een element p in een verzameling K is een element $x \in K$ dat de uitdrukking $\|p - x\|$ minimaal maakt. Natuurlijke vragen die daarbij opduiken, geven reeds een ruwe indeling van het boek. Voor welke typen verzamelingen K bestaan er beste benaderingen en is de oplossing uniek (hoofdstuk 3)?

Hoe herken je een beste benadering (hoofdstuk 4)? Hangt de beste benadering continu af van p (hoofdstuk 5)? Hoe groot is de 'fout' $\|p - x\|$ (hoofdstuk 7)? Hoe bereken je de beste benadering (hoofdstuk 9)?

Verzamelingen K die unieke beste benaderingen bezitten voor iedere p noemt men *Chebyshevverzamelingen*. Zonder de uniciteitsvoorwaarde spreekt men van *proximale verzamelingen*. Vrijwel alle existentiële stellingen zijn bevat in het ene resultaat, dat 'bijna-compacte' verzamelingen proximaal zijn en dat complete convexe verzamelingen Chebyshevverzamelingen zijn. Hoofdstuk 4 opent met het centrale resultaat rond de karakterisering van een beste benadering $x \in K$ van p : $\langle p - x, y - x \rangle \leq 0$ voor alle $y \in K$. Via Gram-Schmidtorthogonalisatie en enige Fourieranalyse worden meteen enkele klassieke beste-benaderingsproblemen opgelost.

In hoofdstuk 5 wordt de metrische projectie p_K (die aan een punt p zijn beste benadering in een Chebyshevverzameling K toekent) behandeld. Deze functie is altijd niet-expansief: $\|p_K(p) - p_K(q)\| \leq \|p - q\|$. Onder extra voorwaarden op K worden nog andere resultaten verkregen over p_K . Hoofdstuk 6 bevat de Fréchet-Rieszrepresentatiestelling in Hilbertruimten, die zegt dat elke begrensde lineaire functionaal $f(x)$ van de vorm $\langle x, p \rangle$ is voor een of ander element p . Veel resultaten in dit hoofdstuk (rond beste benaderingen in deelruimten, halfruimten, en polyhedra) zijn aanmerkelijk eenvoudiger aan te tonen in complete ruimten met deze representatiestelling.

De benaderingsfout is de afstand $d(p, K)$. Naast algemene 'formules' voor $d(p, K)$ worden in hoofdstuk 7 ook bruikbare formules gegeven voor bijzondere K , zoals eindig (co-)dimensionale deelruimten. In hoofdstuk 8 worden beste benaderingen voor het oplossen van een vergelijking $Ax = y$ behandeld, waar A een begrensde lineaire operator is.

In hoofdstuk 9 wordt van Neuman's methode van alternatieve projectie bij het berekenen van beste benaderingen behandeld, met bijzondere aandacht voor de convergentiesnelheid. Hoofdstuk 10 gaat over interpolatie onder nevenvoorwaarden betreffende de interpolerende functie. In hoofdstuk 11 wordt een algemenere formulering van interpolatie bestudeerd. Hoofdstuk 12 gaat over het belangrijkste onopgeloste probleem van de theorie van beste benaderingen: is elke Chebyshevverzameling in een Hilbertruimte convex?

Meetkundige voorstelling en dualiteitsprincipes spelen een belangrijke rol in de ontwikkeling van de theorie. Door de theorie niet te beperken tot *volledige* inwendig product ruimten (dat wil zeggen, Hilbertruimten) komen ook voor de toepassingen belangrijke onvolledige ruimten (zoals $C_2[a, b]$) binnen bereik.

Elk hoofdstuk eindigt met 'historical notes'. Hier vind je veel aanvullende informatie over sommige resultaten, hun ontstaan,

en hun toepassing. Deze monografie, geschreven met zeer veel zorg voor detail, is uitzonderlijk omdat ze vertrekt vanuit een minimale voorkennis van calculus en lineaire algebra en eindigt op onderzoeksniveau.

M. van de Vel



Frédéric Hélein

Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps and Integrable Systems

Lectures in Mathematics. ETH Zürich

Basel: Birkhäuser, 2001

128 p., prijs €23,-

ISBN 3-7643-6576-5

As indicated by the title, these lectures are about the connection between differential geometry and integrable systems. Integrable systems came up, although they were not recognized as such, in the study of embedded surfaces in, for example, Riemannian geometry. When the theory of integrable systems started to develop, it was realized that many integrable equations (with the Korteweg-de Vries equation as the most famous example) could be expressed as compatibility conditions between linear equations, and that they could be viewed as obstructions to zero curvature.

The present monograph starts out describing surfaces with prescribed mean curvature and conformal maps from a two-dimensional domain to $\mathbb{R}^3$. The discussion is on an elementary level and one does not need to be a differential geometer to be able to follow it, which is a good thing since it should also be readable for those working in integrable systems. Harmonic maps are introduced next and the variational point of view is discussed. Via the Gauss-Codazzi condition we arrive at the structure equations. It is explained how these arise and how they can be integrated. From the point of view of integrable systems, this integration is the trivial part, since it can always be done, so one cannot expect to find anything remarkable, like an integrable system. The remarkable thing is now that if one can deform the imbedding by a one-parameter family (this is the so-called spectral parameter) then one is on the right track towards integrability.

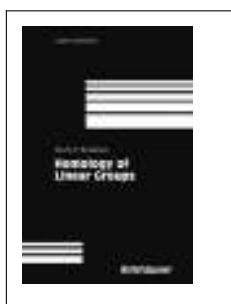
The theory is now getting more modern, loop groups are introduced. Using the techniques from integrable systems to solve the equations obtained from the structure equations, one then tries to go back to differential geometry and obtain geometric objects with prescribed properties. Wente tori are discussed, which are immersed constant mean curvature tori. These came as a complete surprise when they were discovered.

Let me add a few personal remarks to this description. I read these lectures in the hope of obtaining some answers, but in this I was disappointed. One question I had was: Why zero curvature? It seems that the whole thing works much better with constant curvature, and, moreover, I cannot follow the derivation of the zero curvature condition from the existence of a moving frame. In the derivation of the zero curvature equation one relies on the concept of integrability. This requires the mixed derivatives to be equal. But despite the common name and the fact that the zero curvature concept has been very successful in integrability theory, there is really no mathematical argument that enforces this. One

may argue that zero curvature is a special case, but what happens is that at some point one obtains an expression of the form $H_1 + \kappa H_2$, where $H_i, i = 1, 2$ are compatible Hamiltonian operators and κ the value of the constant curvature. Thus by taking $\kappa = 0$ one loses the bi-Hamiltonian character and thereby automatic integrability. To retrieve it is a nontrivial problem.

A second doubt I have is the following. It appears that one can only see that the structure equations lead to integrable systems and infinite dimensional geometry when one starts with the right connection. For instance, if for curves one chooses the Frenét frame, the equations become very messy and it takes the Hasimoto transformation to see that things are very well organized. But the Hasimoto transformation is nothing but a gauge transformation to the parallel frame, so this parallel frame gives the right connection. This choice of connection is never discussed and it seems to me that this way the connection between geometry and integrability will always be a bigger mystery than it should be.

J. Sanders



K.P. Knudson
Homology of Linear Groups
Progress in Mathematics, Vol. 193
Basel: Birkhäuser, 2001
XII, 192 p., prijs €88,-
ISBN 3-7643-6415-7

This book presents an overview of recent work on homology of linear groups. No special knowledge concerning algebraic group theory is needed to read the book, since only matrix groups like GL_n and SL_n are discussed. Spectral sequences are abundant, therefore knowledge of algebraic topology and group cohomology is required. Most chapters contain a short section discussing the relation of the presented results to K-theory.

The approach of this monograph is more or less chronological. The starting point is the work of Quillen on linear groups over finite fields and the work of Borel on arithmetic groups over the real field.

Both are treated in the first chapter. In the second chapter stability results are discussed. The theorem of W. van der Kallen is stated, and the proof is given for a special case (that of rings with many units). These results are then applied to general linear groups over local rings with infinite residue field.

The focus in the third chapter is on known results for low dimensional cohomology groups, especially $H_3(GL_2)$. Here the methods of proof involve concepts as scissors congruence groups for the full group of isometries of hyperbolic n -space and Bloch groups.

The subject of Chapter 4 is groups that act discretely on locally finite trees. Many of these groups are discrete subgroups of the groups GL_2 and SL_2 over a complete p -adic field K with finite residue field. In these cases the tree is the Bruhat-Tits tree of $PGL_2(K)$, defined using R -lattices in K^2 . Here R is the ring of integers of K . This chapter contains many very explicit results concerning the homology of such groups.

The fifth and final chapter treats the Friedlander-Milnor con-

jecture concerning the cohomology of algebraic groups made discrete. There are three appendices containing background material. The subjects are classifying spaces, spectral sequences, K-theory and étale cohomology.

The main focus of the book is on results and theorems. As a consequence proofs tend to be short and sketchy. For example, one of the essential steps in the proofs in Chapter 4 concerning groups acting transitively on trees is the result that such a group has a description as an amalgamated product (as the product of the stabilisers of the vertices of an edge amalgamated along the stabiliser of the edge). For a complete proof of this result one is referred to the book of Serre on trees, even though the proof is short and essential for understanding the results of this chapter.

For the non-specialist this book is hard to read. In most cases proofs are short, often merely outlines and sometimes even only a reference is given for an essential step in the proof. Even though the fact that each chapter ends with some exercises suggests otherwise, this book is not well suited as a study book.

For the specialist it gives a clear overview of results, even though for proofs he is not familiar with he will have to go back to the original research articles. However, the list of references consists of a mere 134 items and is very short compared to the broad range of results presented in the book.

H.H. Voskuil



H.-O. Kreiss and H. Ulmer Busenhardt
Time-dependent Partial Differential Equations and Their Numerical Solution

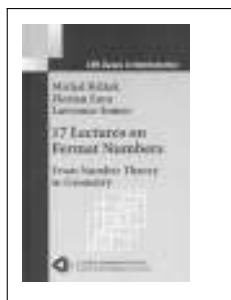
Lectures in Mathematics. ETH Zürich
Basel: Birkhäuser, 2001
82 p., prijs €21,-
ISBN 3-7643-6125-5

The book by Kreiss and Busenhardt, based on lectures given by the first author at the Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, highlights the main ideas contained in two well-known classics in the numerical analysis literature, the first by Kreiss and Lorenz and the second by Gustafsson, Kreiss, and Oliger. It provides a concise and unifying perspective on the well-posedness of initial boundary value problems and the stability of their finite difference discretization.

Starting from the simplest hyperbolic equation, the prototypical scalar first-order one-dimensional wave equation with constant coefficients, Chapter 1 precisely introduces the concept of well-posedness of the Cauchy problem. This concept then naturally extends to hyperbolic systems with constant coefficients, first in one and then in multiple space dimensions. Necessary and sufficient conditions for the well-posedness of general (hyperbolic, parabolic, and mixed) systems with constant coefficients are presented; their usefulness is illustrated by applying them, for instance, to the linearized compressible Navier-Stokes equations. Chapter 2 addresses the delicate issue of well-posedness in the presence of boundary conditions, often avoided in other texts. While the method of characteristics can be used in one space dimension, multiple space dimensions are typically analyzed by Fourier transform in space and Laplace transform in time. Chapter 3 discusses the stability of finite difference approx-

imations where the partial differential equation is discretized in space, but with time kept continuous. Again, first periodic and then half-plane problems are treated. As in the continuous case, a practical test which guarantees stability in the generalized sense is obtained by introducing the concept of boundary stability. Non-linear problems are briefly discussed in Chapter 4, where both energy methods and perturbation techniques are used to derive a priori estimates and prove convergence of difference methods.

This nice little book is intended for graduate students and researchers interested in the theory and numerical analysis of partial differential equations. It contains many carefully chosen examples, is self-contained, and as such a pleasure to read. The expected mathematical background of the reader is familiarity with linear algebra, Fourier and Laplace transformations, difference and differential equations, Gronwall's lemma, etc. At the end of each chapter specific references to the two books mentioned above are given to facilitate a more detailed study of the material. Thus I strongly recommend this book as a starting point to anyone interested in the stability theory of finite difference methods applied to time-dependent partial differential equations. *M.J. Grote*



M. Krížek, F. Luca, L. Somer
**17 Lectures on Fermat Numbers
From Number Theory to Geometry**

CMS Books in Mathematics

New York: Springer, 2002

257 p., prijs €46,95

ISBN 0-387-95332-9

This book was written by the three authors to celebrate the 400th anniversary of Pierre de Fermat's birth (1601). It is a series of 17 lectures on the Fermat numbers $F_n = 2^{2^n} + 1$ for $n = 0, 1, 2, \dots$

The assumed technical background is minimal, and a (mathematically inclined) high school student should be able to read this book with little difficulty. The majority of the book uses little more than congruences and a few appeals to *Fermat's Little Theorem*. The authors even supply the definition of a *field* before using the concept in Chapter 15. Nonetheless, they demonstrate that a large number of interesting properties can be proven with these modest tools.

After a couple of introductory chapters, the book turns to the famous divisibility properties of these numbers. Fermat thought that all the F_n are prime. In fact all of $F_5, \dots, F_{30}$ are composite, the first one being proven composite by Euler in 1732. Congruence based methods for proving compositeness and finding factors of Fermat numbers take the reader to the end of Chapter 7.

There then follows a series of chapters giving miscellaneous results (including a chapter called *miscellaneous results*) and theorems in which Fermat numbers play a role. There are discussions on irrationality properties of various sums of Fermat numbers and an application to signal processing called the Fermat Number Transform. The climax is the classical result that a regular n -gon is constructible by ruler and compass if and only if $n = 2^i p_1 p_2 \dots p_j$ where $n \geq 3, i \geq 0, j \geq 0$, and $p_1, p_2, \dots, p_j$ are distinct Fermat primes.

A notable fact about this book is the lengths to which the au-

thors have gone to force the book to have dimensions related to the Fermat numbers. The three authors have written a book with 17 chapters covering 257 pages. Finally (and maybe I am becoming paranoid) I estimate that the book contains about 65537 words!?

The downside of playing around like this is that a tradeoff has to be made between these extra requirements and more common editorial considerations. I found that the book would have been more readable if it were shorter. In normal circumstances this could have been achieved by relegating some of the results to exercises.

J. Edwards



W. Sieg, R. Sommer, C. Talcott
**Reflections on the Foundations of
Mathematics**
Essays in Honour of Solomon Feferman

Antick, MA: A.K. Peters Ltd., 2002

450 p., prijs \$45,00

ISBN 1-56881-170-5

Dit is een feestbundel, uitgegeven ter gelegenheid van de zeventigste verjaardag van Solomon Feferman in 1998. Feferman is een eminent mathematisch logicus, vooral bekend door zijn bijdragen aan de grondslagen van de wiskunde, in het bijzonder de bewijstheorie. In 2003 ontving hij van de Koninklijke Zweedse Akademie van Wetenschappen de tweejaarlijkse *Rolf Schock Prize* op het gebied van logica en wijsbegeerte "for his work on the arithmetization of metamathematics, transfinite progressions of theories, and predicativit".

De bundel bevat twintig bijdragen van de hand van leerlingen, naaste collegae en vakgenoten van Feferman, geordend naar vier thema's: *Proof theoretic analysis*, *Logic and computation*, *Applicative and self-applicative theories*, en *Philosophy of modern mathematical and logical thought*. De bijdragen onder de eerste drie thema's zijn vrij technisch van karakter, en mede daardoor vooral interessant voor vakgenoten. De vijf artikelen onder het laatste thema lijken mij voor een breder publiek interessant, en ik laat ze daarom hieronder kort de revue passeren.

De bijdrage van Paolo Mancosu gaat over een discussie tussen Bernays, Carnap, Gödel en anderen in 1930, over het constructieve karakter van bewijzen: is het altijd mogelijk om uit een bewijs van een uitspraak $\exists x A(x)$ de definitie van een wiskundig object a te destilleren waarvoor $A(a)$ geldt?

Charles Parsons behandelt het debat (geopend door Weyl in 1918) over impredicatieve definities in de wiskunde, dat wil zeggen definities van een object a met gebruikmaking van entiteiten waar a onderdeel van is. Rechtvaardiging hiervan is in het algemeen gebaseerd op het Platonisch-realistisch uitgangspunt: a bestond al voordat we het definieerden.

In *Calculations by man and machine: conceptual analysis* gaat Wilfried Sieg in op diverse definities van het begrip *berekenbaar* (door mens en/of machine) die voorgesteld zijn door Gödel, Church, Hilbert, Bernays, Turing, Post and Gandy. Een aantal hiervan wordt geaxiomatiseerd en nader geanalyseerd.

William Tait's bijdrage gaat over finitisme ofwel finitistische wiskunde. De oorsprong van dit begrip ligt in het door Hilbert ge-

formuleerde doel waarvan Gödel de onbereikbaarheid aantoonde: het bewijzen van de consistentie van de wiskunde met finitistische middelen. Tait gaat in op kritiek op een eerder artikel van zijn hand, waarin hij verdedigde dat finitisme overeenkomt met PRA, de theorie van de rekenkunde die alle primitief recursieve functies bevat en waar inductie alleen toegelaten is voor kwantorvrije formules.

Johan van Benthem (de enige Nederlander in deze bundel) heeft het over het begrip *logicaliteit*: wanneer is een constante/operator/begrip logisch? Verschillende perspectieven (semantiek, bewijstheorie, algoritmië, speltheorie) leveren verschillende antwoorden; de nadruk ligt hier op het semantisch perspectief. Bij de beantwoording van de logicaliteit-vraag spelen permutatieinvariantie, homomorfismeinvariantie en bisimulatiepreservatie een rol.

G. Renardel de Lavalette

weten niet noodzakelijk welke matrix ze precies aan het spelen zijn. Al spelende kunnen ze daar informatie over verkrijgen. Zo kan het bijvoorbeeld zijn dat, volgens een voor beide spelers bekende kansverdeling, één van de matrices gekozen wordt, maar dat alleen speler 1 verneemt welke matrix dat is. Op elk van de tijdstippen horen de spelers wel de actiekeuzen, maar niet de uitbetaling. Onder deze omstandigheden probeert speler 1 weer zijn inkomsten te maximaliseren, terwijl speler 2 die weer probeert te minimaliseren. In een andere variant heeft elk van de spelers privé-informatie over de matrix die gespeeld wordt, maar weet geen van beiden welke matrix het precies is.

Sorin bespreekt de basismodellen en resultaten in detail, waarbij hij tevens ruim aandacht heeft voor de grote variatie in benaderingswijzen en gebruikte wiskundige gereedschappen. Ook komen recente ontwikkelingen en diverse uitbreidingsmogelijkheden aan de orde. Voor de volledigheid is het boek voorzien van diverse appendices, die bijna een kwart van het boek beslaan. Ondanks de vele voorbeelden is een gedegen wiskundige voorkennis nodig om de materie goed te kunnen bevatten. Dit boek is daarom vooral geschikt voor onderzoekers die zich in deze richting willen gaan verdiepen.

F. Thuijsman



S. Sorin

A First Course on Zero-Sum Repeated Games

Mathématiques & Applications 37

Berlijn: Springer Verlag, 2002

204 p., prijs €39,54

ISBN 3-540-43028-8

In dit boek behandelt de auteur verschillende varianten van nul-som herhaalde spelen. Dergelijke spelen zijn tweepersoons spelen die gekarakteriseerd worden door een matrix R . Op tijdstip $t \in \{1, 2, 3, \dots\}$ kiest speler 1 een rij i en kiest speler 2 een kolom j . Speler 1 ontvangt dan het bedrag r_{ij} van speler 2. Op tijdstip $t + 1$ herhaalt zich dit gebeuren wanneer de spelers opnieuw acties kiezen. De spelers kiezen deze acties telkens gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar. In het spel met volledige informatie neemt men aan dat beide spelers de matrix R kennen en dat zij, telkens wanneer de spelers acties gekozen hebben, de actiekeuze van hun tegenstander direct vernemen. Bij het kiezen van acties op volgende tijdstippen kunnen zij dus reageren op de historie van actiekeuzen zoals ze die hebben waargenomen. Speler 1 probeert zijn (limietgemiddelde of verdisconteerde) inkomsten te maximaliseren, terwijl speler 2 probeert om de inkomsten van speler 1 te minimaliseren.

In plaats van op elk tijdstip het matrixspel R te spelen, zou men ook op elk tijdstip t één van eindig veel matrixspelen $R_1, R_2, \dots, R_z$ kunnen spelen, waarbij de overgang van matrixspel tot matrixspel op stochastische wijze afhangt van de daadwerkelijk gekozen acties. Wanneer aangenomen wordt dat de spelers zowel de uitbetalingsmatrices als de overgangsstructuur kennen, dan noemt men dit type spelen stochastische spelen. Men kan dergelijke spelen ook beschouwen als tweepersoons Markov beslissingsprocessen. Hoofdstuk 5 van dit boek is geheel aan deze klasse van spelen gewijd. Het afsluitende hoofdstuk 6 bespreekt het verband tussen deze stochastische spelen en de spelen met onvolledige informatie die in de hoofdstukken 1 tot en met 4 uitgebreid besproken worden.

Bij een herhaald spel met onvolledige informatie is de uitbetalingsmatrix één van eindig veel matrices $R_1, R_2, \dots, R_z$, die alle dezelfde afmeting hebben. De spelers kennen deze matrices, maar



I.R. Shafarevich

Discourses on Algebra

Universitext

Berlijn: Springer Verlag, 2002

276 p., prijs €34,95

ISBN 3-540-42253-6

Dit boek gaat uit van de klassieke tweedeling van het wiskundeonderwijs in meetkunde aan de ene, en algebra aan de andere kant. Waar de meetkunde haar Euclides heeft, is er eigenlijk geen boek dat systematisch de onderwerpen van de schoolalgebra behandelt en in een breder wiskundig kader plaatst; in deze leemte probeert de schrijver te voorzien.

Zoals Shafarevich zelf al in het voorwoord opmerkt, gaat het boek in feite over meer dan wat wiskundigen tegenwoordig onder algebra verstaan: elementaire getaltheorie, rekenen met polynomen, verzamelingenleer en de beginselen van de kansrekening zijn de belangrijkste onderwerpen. De schrijver begint op het nulpunt en geeft vrijwel complete bewijzen van alle elementaire eigenschappen van getallen, polynomen en verzamelingen. Aan de orde komen onder andere Eulers bewijs dat de som van $1/p$, waarbij p de priemgetallen doorloopt, divergent is (stelling 26 op blz. 124), de stelling van Sturm over nulpunten van polynomen (stelling 39 op blz. 179), en Cantors bewijs dat de reële getallen overaftelbaar zijn (stelling 41 op blz. 190).

De stijl is woordenrijk en niet erg beeldend, daarentegen wel compleet, met een goed oog voor waar de moeilijkheden zitten. Dat maakt het boek geschikt voor geconcentreerde zelfstudie. De samenhang van het boek is uitstekend: vele resultaten, en ook vele in de bewijzen gebruikte ideeën, worden verderop in het boek weer op organische wijze gebruikt. Daardoor ontstaat inderdaad het beeld van algebra als een samenhangend geheel, waaraan volgens Shafarevich behoefte is.

Dit boek kan al interessant zijn in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (hoewel daar de term algebra misschien al lang verdwenen is). Een voorwaarde daarvoor lijkt me wel dat het boek vertaald wordt in het Nederlands, aangezien het Engels van dit boek, dat overigens uitstekend vertaald is, voor velen te moeilijk zal zijn. Voor wiskundeleraars is het een goede manier eens wat 'hogere wiskunde' tot zich te nemen en een garantie voor interessante uren.

C. van de Woestijne



H.A. van der Vorst
Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems

Cambridge: Cambridge monographs on applied and comp. Maths.13, Cambridge University Press, 2003

221 p., prijs £37,50

ISBN 0-521-81828-1

Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen $Ax = b$, waarbij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een ijle matrix is, dat wil zeggen overwegend nullen bevat. Dergelijke stelsels zijn veelal het resultaat van een discretisatie van een randwaardeprobleem in twee of drie dimensies. Als A een zeer grote matrix is, dan zijn directe methoden ter oplossing van $Ax = b$ inefficiënt wat betreft computertijd en -geheugen.

Een alternatief zijn iteratieve methoden, waarbij uitgaande van een startvector x_0 opeenvolgende benaderingen x_m , $m = 1, 2, \dots$, worden berekend. In iteratieve Krylovmethoden geldt $x_m \in K^m(A, r_0) = \text{span}\{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\}$ met $r_0 = b - Ax_0$. Als A symmetrisch positief definit is, dan kan de methode der geconjugeerde gradiënten (CG) worden afgeleid. Deze methode is in detail geanalyseerd.

Als A niet symmetrisch is, dan verdwijnen nagenoeg alle mogelijkheden tot analyse. Varianten van CG worden gebruikt, zoals Generalized Minimal Residual Method GMRES en Bi-Conjugate Gradient-Stable Algorithm (BiCGSTAB). Inzicht in deze methoden bestaat uit een mengsel van enige analyse en geobserveerde ervaringen.

Iteratieve Krylovmethoden ter oplossing van $Ax = b$ zijn veelal te traag. Vandaar dat het stelsel wordt gepreconditioneerd, dat wil zeggen een Krylov-methode wordt gebruikt ter oplossing van $K^{-1}Ax = K^{-1}b$ met K een goede benadering van A . Preconditioning is meer kunst dan kunde, analyse ontbreekt geheel. Van der Vorst is zo'n dertig jaar actief op het gebied van Krylovmethoden. Belangrijke bijdragen zijn de incomplete LU-preconditioning van M -matrices, de analyse van het convergentiegedrag van CG, de uitvinding van BiCGSTAB en vectorisatie/parallelisatie van Krylovmethoden. Tezamen met anderen heeft Van der Vorst enkele overzichtartikelen geschreven.

Op het gebied van iteratieve methoden voor stelsels lineaire vergelijkingen zijn reeds indrukwekkende boeken verschenen. Ik noem hier de boeken *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (1996) van Saad en *Computer Solution of Large Sparse Linear Systems* (1999) van Meurant. In beide boeken wordt veel aandacht besteed aan Krylov-methoden. Hoe verhoudt de monografie van Van der Vorst zich tot deze standaardwerken?

In de eerste plaats is zijn boek dunner, en daadwerkelijk geschikter om een eerste indruk te krijgen van Krylovmethoden.

Indien een lezer gesteld is op rigide afleidingen van Krylovmethoden en hun eigenschappen, kan hij beter de boeken van Saad en Meurant raadplegen, echter voor zover de eigenschappen van deze methoden bewijsbaar zijn.

Voor niet-bewijsbare inzichten kan men uitstekend terecht in het boek van Van der Vorst. In zijn bekende verhalende stijl wordt een schat aan observaties en ervaringen geëxposeerd. Zo wordt de lezer ingewijd in de mysteriën van Krylovmethoden voor niet-symmetrische matrices, en preconditioning. Ook worden vectorisatie en parallelisatie van de gepreconditioneerde methoden besproken.

Het boek leest lekker weg. Ik kan het van harte aanbevelen.

E.F. Kaasschieter



J. Jacod, A. Shiryaev
Limit Theorems for Stochastic Processes

Berlin: Springer Verlag, 2003

288 p., prijs €99,95

ISBN 3-540-43932-3

Two important cornerstones in probability theory are the theory of semi-martingales and the theory of weak convergence of processes. Semi-martingales provide a very natural tool to study stochastic differential equations that are key tools in, e.g., financial mathematics. Process convergence results are useful in a large variety of problems ranging from large sample theory in statistics to scaling limits for probabilistic models stemming from (for example) mathematical physics and stochastic networks.

The 'classical' method to prove a limit theorem is to prove (i) convergence of the finite-dimensional distributions and (ii) tightness. The present book is devoted to a different method, which focuses on the convergence of the *characteristics* of a process. The characteristics can be seen as the infinite dimensional analogue of the three characteristics (drift, Levy measure and diffusion coefficient) of a Levy process.

This is well explained in the introduction. The first part of the book is devoted to the theory of semi-martingales and related subjects. I found this part very technical and hard to read and a reader who is not acquainted with stochastic processes on the level of Karatzas and Shreve should make no attempt to read this book.

The first link with limit theorems is given in Chapter 5. Chapter 6 treats the Skorokhod topologies and convergence of processes in such topologies. The remaining chapters are then devoted to a wealth of limit theorems. Throughout the book (except for the first chapter) a considerable amount of space is spent on examples.

The 1987 version of the book was a landmark in probability theory. The same can be said about the second edition. I can recommend this book to every reader who is sufficiently experienced and willing to spend some effort on the often very technical issues. Also, I think the book is very useful as a reference.

The difference between the second edition and the first becomes clear when reading the preface to the second edition, where the authors first argue that it may have been appropriate to write

a completely new book, but instead write that 'our natural laziness prevented us to do that, but we felt compelled to fill in the most evident holes in this book'. When looking at the list of references in the back of the book one gets a better indication of the amount of effort undertaken: the list of newer references has just been concatenated to the old list. Of course, the authors did correct a number of errors and misprints.

Apart from this, three new topics have been added to the second edition. The first topic is stochastic calculus with a view towards financial mathematics, resulting in new sections in Chapters II (stochastic exponentials) and III (vector-valued extensions of sde's). The second topic concerns predictive uniform tightness criteria for semi-martingales (resulting in updates of Chapters VI and IX). Finally, the authors included several results on limit theorems for discretized martingales (See Chapter IX.7).

To conclude, this book is still the reference in this domain and as such I can definitely recommend it to both pure and applied probabilists who are interested in this topic. However, I hesitate to recommend the book to researchers already owning the first edition.

A.P. Zwart

klassieke randwaardeproblemen voor de Laplaciaan aan de orde.

Het boek biedt, ook en juist voor lezers met voorkennis op de besproken gebieden, een groot aantal ideeën, verbanden en inzichten, meestal geïnspireerd door de natuurkunde en geformuleerd op een 'niet-technische', vaak verbazingwekkend eenvoudige manier. Dit is de zeer sterke kant van het boek en maakt het lezen de (soms wel degelijk nodige!) moeite zeker waard. Aan de andere kant is het niet bepaald een boek voor beginners, want de bewijzen zijn vaak schetsmatig of worden geheel of gedeeltelijk aan de lezer overgelaten. Verder maken de (vaak geenszins triviale) problemen en oefeningen een essentieel deel van het boek uit.

G. Prokert



V.I. Arnold

Lectures on Partial Differential Equations

Berlijn: Springer Verlag, 2004

157 p., prijs €39,95

ISBN 3-540-40448-1

De auteur verwierf eerder naam met onder meer zijn boeken over gewone differentiaalvergelijkingen en geometrische methoden in de klassieke mechanica. Het hier te bespreken boek deelt een aantal kenmerken met deze eerdere werken. Het meest opvallend hierbij is, dat er relatief weinig formules maar veel figuren ter verduidelijking van meetkundige situaties in de tekst opgenomen zijn. De gekozen opzet is meestal geïnspireerd door natuurkundige problemen en concepten, en de auteur laat zich, in zijn eigen woorden, leiden door het "principle of minimal generality, according to which every idea should first be clearly understood in the simplest situation".

Desalniettemin ligt het niveau van het boek, naar de mening van de recensent, duidelijk boven dat van gangbare inleidende boeken over partiële differentiaalvergelijkingen. In het bijzonder zijn enige kennis van en bekwaamheid in de differentiaalmeetkunde en de complexe functietheorie nodig. In een appendix wordt ook ingegaan op verbanden tussen de theorie van sferische harmonischen en algebraïsche topologie.

Het boek begint met een consequent coördinaatvrije discussie van de theorie van eerste orde partiële differentiaalvergelijkingen (met behulp van jets), en het principe van Huygens (voor golfvronten) wordt geformuleerd in het kader van contactstructuren. Vervolgens wordt de eendimensionale golfvergelijking op een meer conventionele manier behandeld (methodes van d'Alembert en Fourier). Verder komen in het boek – steeds met het oog op de fysische achtergronden – variationele methoden, potentiaaltheorie, sferische harmonischen en (zonder volledige bewijzen) de



H.G. Dales, P. Aiena, J. Eschmeier, K.B. Laursen and G.A. Willis

Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

336 p., prijs £27,99

ISBN 0-521-53584-0

Dit boek bevat de uitgewerkte tekst van vijf recent gegeven voordrachtsreeksen, van elke auteur een. De onderwerpen zijn onderling verwant, maar ieder deel kan onafhankelijk bestudeerd worden. Deel I (Dales), getiteld *Banach algebras*, verschaft onder meer achtergrondinformatie. Deel II (Willis), *Harmonic analysis and amenability*, sluit hier goed op aan. De overige delen gaan over continue lineaire operatoren op een Banachruimte. Eschmeier schrijft over invariante deelruimten, Laursen over lokale spectraaltheorie en Aiena over SVEP (*Single Valued Extension Property*) en Fredholmtheorie. De auteurs kennen elkaar goed en werken al tientallen jaren veelvuldig samen, waarbij de universiteit van Leeds het centrale punt is.

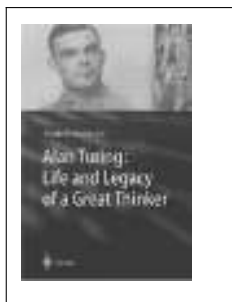
Het boek is overzichtelijk uitgevoerd met 28 doorlopend genummerde hoofdstukken die elk zijn onderverdeeld in secties. Mede hierdoor oogt het boek toegankelijk. En dat is het ook: met niet te veel en helder geformuleerde tekst voel je je al gauw thuis in het onderwerp. Toch wordt zeker niet volstaan met een conventionele behandeling van wat basistheorie. Een van de charmes van het boek is juist dat al gauw meer geavanceerde onderwerpen ter sprake komen. In deel I bijvoorbeeld zijn er secties over automatische continuïteit (een specialiteit van Dales), derivaties en cohomologie. Willis behandelt het belangrijke geval van de groepalgebra van een lokaal compacte groep. De amenabele groepen vormen een belangrijke deelklasse (de term *amenable* (handelbaar) berust op een woordspeling: zulke groepen hebben een *invariant mean* en zijn dus 'ameanable'). Voor meer informatie over de inhoud van het boek verwijs ik naar de beknopte samenvatting die in het voorwoord te vinden is.

Bij oppervlakkige lezing krijgt men een panoramisch beeld van het vakgebied, en wie dieper op een onderwerp wil ingaan kan zijn krachten beproeven op de *Exercises* aan het eind van ieder hoofdstuk. Daar vindt men tevens *Additional Notes* die samen met de literatuurlijst aan het eind van ieder deel de weg wijzen naar de vakliteratuur. In dit verband is van belang dat in 2000 bij Oxford University Press vier boeken over nauw verwante onderwer-

pen zijn verschenen, waaronder van Dales over *Automatic Continuity* en van Laursen (samen met Michael Neumann) over *Local Spectral Theory*. Het onderhavige boek zal bij de bestudering van deze beide standaardwerken een nuttig hulpmiddel zijn. Ook lijkt het mij geschikt voor een geavanceerd college of seminarium, omdat alleen enige basiskennis van de functionaalanalyse wordt voorondersteld.

Samenvattend: een waardevolle aanvulling op de bestaande literatuur.

J.D. Stegeman



Christof Teuscher, Ed.

**Alan Turing:
Life and Legacy of a Great Thinker**

Berlin: Springer Verlag 2004

542 p., prijs \$59,95

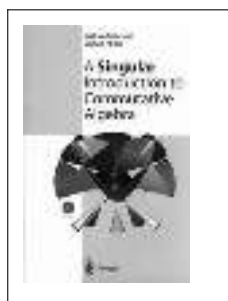
ISBN 3-540-20020-7

Naar aanleiding van de negentigste verjaardag van de geboorte van Alan Turing (1912-1954) vond 23 juni 2002 te Lausanne (Zwitserland) een symposium plaats. Als eerbetoon aan deze bijzondere wiskundige, bracht Springer Verlag de neerslag van dit symposium in boekvorm uit. Het boek is veel meer dan een wetenschappelijk congresverslag: beginnend bij een symbolisch toneelspel, waarin Turings bekenden en fictieve personages fungeren, wordt de lezer meegevoerd door vijf delen en 21 hoofdstukken, inclusief een gevoelige analyse van de nieuwste bevindingen over de Pools-Britse connectie van crypto-analisten en wiskundigen voorafgaand aan de Tweede Wereldoorlog. De 25 auteurs zijn erin geslaagd om de betekenis van de bedenker van de Turing-machine zo compleet mogelijk weer te geven. Douglas Hofstadter schreef het voorwoord.

Een greep uit de bijdragen: mathematisch logicus Michael Beeson (San José University, California) plaatst Turings oeuvre in historisch perspectief. De axiomatisering van de logica en rekenkundige onderbouwing van de gehele wiskunde vertoont een historische evolutie vanaf Leibniz en Frege tot Russell en Hilbert. Nagenoeg gelijktijdig met Gödel en Alonzo Church zal Turing in de jaren dertig die evolutie afsluiten met de oplossing van het *Entscheidungs*-vraagstuk. Maar deze negatieve oplossing, het niet volledig herleidbaar zijn van wiskunde tot computation, krijgt ook een positieve wending, meent Beeson: het wijst de weg naar nieuwe loopholes in de mathematische logica, zoals partiële mechanisaties. In deze summiere bespreking verdient ook Dennetts bijdrage *Can Machines Think?* bijzondere aandacht. Daniel Dennetts (Tufts University, Massachusetts) publiceerde dit essay reeds in 1985, maar bracht het hier opnieuw uit met naschriften uit 1985 en 1997. Een bijkomende reden hiervoor vormen de ervaringen met de sinds 1991 georganiseerde Loebner-prijscampetitie. Hierbij wordt de uitdaging van de Turing Test — het ontwerpen van een computer(programma) dat door een interviewer niet kan worden onderscheiden van een reëel persoon — als concreet, maatschappelijk experiment ten uitvoer gebracht. Alle pogingen tot dusver om de *Unrestricted Turing Test* positief te laten uitvallen, faalden, merkt Dennett op, maar het sociale experiment is des te leerzamer. Hoewel Turings (in 1950) voorgestelde test geens-

zins een psychologische test beoogde, is de praktijk hier toch op uitgedraaid. Maar het belangrijkste nadeel, volgens Dennett, is dat de maatschappelijke commotie die Turing teweegbracht de aandacht heeft afgeleid van het echte probleem: het overschatten van de mogelijkheden van computers, het niet herkennen van beperkingen noodzakelijk om combinatorische explosies uit te sluiten of het miskennen van de façades (Dennett noemt het voorbeeld van de Potemkindorpen) waarachter programma's en sommige *expert systems* schuilgaan. Terwijl Turing er op uit was het vruchteloze gefilosofeer een halt toe te roepen, heeft deze miskenning van het reële, technologische vraagstuk tot een sociale ramp geleid. 'De beste AI-labs ter wereld wagen zich niet (meer) aan de Loebnerprijs-competitie; de Turing Test is te moeilijk voor de echte wereld', verzucht Dennett, die zich daarom in 1995 als voorzitter terugtrok. Andere bijdragen gaan in op de bijzondere band tussen Alan Turing en de filosoof Ludwig Wittgenstein. Anders dan Andrew Hodges in zijn Turingbiografie uit 1983 aangeeft, blijken volgens nieuwe bronnen de contacten tussen Wittgenstein en Turing toch belangrijker te zijn geweest voor beider werk, meldt Diane Proudfoot (University of Canterbury, Christchurch, New Zealand). De vraag of elk wiskundig probleem oplosbaar is, komt in beider werk aan de orde, en notities in Wittgensteins *Lectures on the Foundations of Mathematics* (1939) vermelden lange discussies met Turing. Proudfoot verwijst ook naar een mogelijke invloed van Turing op aspecten van Wittgensteins theoretische psychologie. Turings werk over de biologische morfogenese, zijn minder bekende werkterrein dat op één artikel uit 1952 na postuum werd uitgegeven, wordt door Jonathan Swinton (Cambridge, UK) op geactualiseerde wijze weergegeven.

W. Allaerts



G.-M. Greuel, G. Pfister

A Singular Introduction to Commutative Algebra

Berlin etc.: Springer-Verlag, 2002

588 p., prijs €48,10 (met CD-Rom)

ISBN 3-540-42897-6

In de jaren tachtig stonden de auteurs met enkele anderen aan de basis van het computeralgebrapakket *Singular*, gericht op berekeningen in de commutatieve algebra. Het boek is het resultaat van jarenlange onderwijservaring in de commutatieve algebra verweven met en ondersteund door Singular om de algoritmische aspecten te belichten. De computeralgebrakant geeft het boek een eigen karakter.

Uiteraard staan aan polynoomringen verwante objecten centraal en niet zozeer abstracte ringen en modulen zoals bijvoorbeeld in het klassieke boek van Atiyah en MacDonald. Begrippen en resultaten gaan vergezeld van de bijbehorende constructies en berekeningen in Singular (op de bijgeleverde cdrom staat Singular zelf, maar zijn ook alle relevante spullen zoals voorbeelden opgenomen).

De algebra staat centraal en voorop: de auteurs hebben de bijbehorende algebraïsche meetkunde verplaatst naar een dikke appendix, haast een boek op zichzelf. Die scheiding maakt het wel wat moeilijker om de motivatie erin te houden en om een goe-

de voorstelling van zaken te krijgen. In dit opzicht verschilt het boek van bijvoorbeeld dat van Eisenbud (*Commutative algebra with a view towards algebraic geometry*), waarin juist algebra en meetkunde hand in hand gaan. Maar misschien gaan er met algebra, computeralgebra en meetkunde ook wel teveel lijnen door elkaar lopen.

Het boek bevat een schat aan zorgvuldig uitgewerkt materiaal (ringen, idealen, Gröbner bases, modulen, Noetherse normalisatie, primaire decompositie, Hilbert functies, locale ringen, homologische algebra; soms zijn ook bijdragen aan het vakgebied van de auteurs zelf of van mensen uit hun onmiddellijke omgeving verwerkt), zoveel dat je als docent wel heel bewust een plan moet trekken om met een inspirerende collegereeks voor de dag te komen. Er worden enkele suggesties gedaan voor mogelijke cursussen. Allemaal beslaan ze een beperkt deel van de behandelde stof. Dat is geen ramp, want je kunt uit de hoofdstukken die volgen op de basishoofdstukken over ringen en modulen tot op zekere hoogte naar eigen inzicht iets bij elkaar zoeken. Die latere hoofdstukken kunnen ook dienen om studenten aan projecten te zetten.

Het boek lijkt ook een weerslag geworden te zijn van wat Singular zoal kan, en heeft enigszins het karakter van een naslagwerk gekregen op het gebied van berekeningen in de commutatieve algebra. Mede in die rol zal het boek zeker nuttig blijken. *H. Sterk*



Rienk Vermij
**Christiaan Huygens
De mathematisering van de
werkelijkheid**

Diemen: Veen Magazines, 2004
160 p., prijs €32,50
ISBN 90-76988-358

Christiaan Huygens is de Nederlandse bijdrage aan een internationale reeks wetenschappelijke biografieën bestemd voor een breed publiek. Rienk Vermij heeft zich uitstekend van zijn taak gekweten: hij koppelt in dit rijkelijk geïllustreerde boek een vlotte schrijfstijl aan historische degelijkheid. Christiaan Huygens (1629–1695) was een zeventiende-eeuwse geleerde die zich bezighield met vrijwel alle takken van de toenmalige wiskunde. Wiskunde was de leer van grootheden: abstracte in de meetkunde en rekenkunde, concrete in allerlei takken van ‘gemengde wiskunde’ zoals astronomie, muziek en optica. Huygens’ prestaties zijn talrijk: van de uitvinding van het slingeruurwerk tot het beginsel van golfvoortplanting, van de ontdekking van de maan en ring van Saturnus tot de theorie van slingerbeweging, van de botsingswetten tot de regels ‘in spelen van geluck’, van de kwadratuur van parabolen tot het huygense oculair, van het 31-toons-stelsel tot speculaties over de beschavingen op andere planeten. Puur, gemengd, praktisch liepen bij Huygens naadloos in elkaar over: de theorie van evoluten leerde hem welke de isochrone slingerbaan was waarmee je een perfect lopend uurwerk kon maken. Huygens was enorm veelzijdig maar ontbeerde, in vergelijking met tijdgenoten als Galilei, Descartes en Newton, een overkoepelende gedachte of een richtinggevend programma. Daarmee heeft de biograaf een compositieprobleem. Vermij heeft dat opgelost door als leidraad ‘de mathematisering van de werkelijk-

heid’ te kiezen en dat thema intellectueel, cultureel en sociaal uit te werken. Aan het begin van de zeventiende eeuw introduceerden Galilei en Descartes de revolutionaire gedachte dat filosofie wiskundig beoefend kon en moest worden. Toen Huygens rond 1650 op het geleerde toneel verscheen was het idee dat wiskunde de sleutel tot inzicht in de natuur vormt nog vooral een filosofisch programma. Huygens maakte het realiteit. Hij liet zien hoe je natuurverschijnselen wiskundig kunt analyseren en terugbrengen tot elementaire mathematische wetmatigheden. Hij liet ook zien hoe je dergelijke basisinzichten vervolgens uit kunt werken naar complexe concrete vraagstukken. Zijn ‘pièce de resistance’ was de slingerbeweging. Hij vond niet alleen de elementaire slingerwet maar zocht tevens uit hoe een fysische slinger zich wiskundig gedraagt: niet de ideale van een puntmassa aan een gewichtloos koord, maar een tastbaar gewicht aan een even tastbaar koord. Het briljante resultaat vond zijn weerslag in Huygens’ meesterwerk *Horologium Oscillatorium*, in het rampjaar opgedragen aan Lodewijk XIV. Huygens’ slingertheorie is voor ons lastig te doorgronden vanwege het prenewtoniaanse denken in termen van beweegkrachten. Huygens keek naar centrifugale tendenties – de kracht waarmee een rondgeslingerde steen aan het koord trekt – in plaats van centripetale krachten – waarmee mijn hand aan het koord trekt. Vermij geeft een heldere uitleg waarbij de oorspronkelijkheid van Huygens’ gedachtengang niet verloren gaat. Met zijn slingertheorie kon Huygens de versnelling van de zwaartekracht afleiden: $9,79 \text{ m/s}^2$. Een voor die tijd buitengewoon nauwkeurige waarde die bovendien exact verkregen was in plaats van met rommelige experimenten. Het zou niet lang duren voordat Huygens er achter kwam dat die waarde varieerde op aarde. Vermij vermijdt de wiskundige details van Huygens’ analyse, maar ziet desondanks kans het wiskundige karakter van diens denken invoelbaar te maken. Wie in de wiskunde van Huygens wil duiken, kan terecht bij *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens*, Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschap, 22 delen, Den Haag: Martinus Nijhoff, 1888–1950. In veel bibliotheken te vinden en tegenwoordig online bij de Franse Nationale Bibliotheek: gallica.bnf.fr; kies ‘rechercher’ en zoek op auteur ‘Huygens’; de afzonderlijke delen zijn gescand, ze kunnen worden doorgebladerd of gedownload.

Huygens was een wiskundig knutselaar en Vermij weet overtuigend te laten zien dat hij een elegante oplossing en een gedegen bewijsvoering eigenlijk belangrijker vond dan het resultaat. *F.J. Dijksterhuis*



Piergiorgio Odifreddi
**Geschiedenis van de Wiskunde in de
Twintigste Eeuw**

Utrecht: Epsilon, 2005
146 p., prijs €14,-
ISBN 90-5041-088-X
Vertaling: J.C. van den Berg

Het boek begint met twee interessante inleidingen van Henk Broer en Gian-Carlo Rota, die beide, maar vooral die van Rota, pleidooien zijn om het slagveld te betreden waarop de wiskunde ten onder dreigt te gaan.

Het boek zelf beschrijft de stand van zaken van de wiskunde in de twintigste eeuw. In die zin is het minder een geschiedenisboek dan een overzicht van de stand van zaken (dat overzicht past ook beter bij de oorspronkelijke titel: *La Matematica del Novecento*). De hoofdstukken gaan achtereenvolgens over grondslagen, zuivere wiskunde, toegepaste wiskunde, wiskunde met de computer. Tenslotte is er een hoofdstuk met zogenoemde open problemen.

De referentiepunten die Odifreddi gebruikt bij zijn beschrijving van de thema's zijn de 23 problemen van Hilbert uit 1900, de Fieldsmedaille, ingesteld in 1936 en dé wiskundeprijs voor jonge wiskundigen en de Wolfprijs, die in 1978 voor het eerst werd uitgereikt. De onderwerpen die bij die referentiepunten aan de orde zijn gebruikt hij in zijn beschrijving van de wiskunde in de twintigste eeuw. Daarmee richt het boek zich op de grote resultaten, waardoor een collage ontstaat van redelijk onafhankelijk van elkaar en in eigen tempo te lezen gedeelten.

Vervolgens ontrolt zich een kaleidoscoop van wiskundige ontwikkelingen. Ten aanzien van de grondslagen van de wiskunde komen ook de ontwikkelingen vanaf de Grieken aan de orde en natuurlijk de verzamelingenleer van Cantor, en daarbij Russell en Gödel, de structuren van Bourbaki en de categorietheorie. Toch is dit vooral een logisch-filosofisch hoofdstuk geworden, dat helder is maar als eerste 'écht' hoofdstuk misschien wat afschrikt. Hoofdstuk 3 bevat de zuivere wiskunde en is zeer informatief, vooral voor diegenen die de moderne ontwikkelingen recent niet meer zo gevolgd hebben. Het boek gaat vanzelfsprekend niet erg in op details en blijft daarmee een redelijk abstracte beschrijving geven. Daar wrekt zich ook het door de uitgeverij geformuleerde ingangsniveau: basiskennis wiskunde. Ik denk niet dat je er daarmee komt, maar goed, uitgevers doen dat zo. In het bewijs van de laatste stelling van Fermat komen veel van de ontwikkelingen bijeen en worden vanuit dat perspectief beschreven. Maat- en integratietheorie, theorie van lichamen, dekpuntstelling van Brouwer, transcendente getallen, stelling van Gödel, distributies, differen-

tiaaltopologie, kortom teveel om op te noemen, maar stuk voor stuk boeiende en belangrijke onderwerpen die op een toegankelijke manier worden beschreven. Het taalgebruik is daarbij soms wat stug en de bronverwijzing eigenlijk afwezig en dat is lastig voor iemand die snel wat verder met een bepaald onderwerp wil. Daarmee blijft het voorgestelde ingangsniveau een storende factor.

In het hoofdstuk over toegepaste wiskunde (hoofdstuk 4) komen allerlei raakvakken in beeld zoals via het gebruik van wiskunde in de kristallografie, relativiteitstheorie, speltheorie, de kwantummechanica, kansspelen, lineaire programmering, taalwetenschap. Dit is uit de aard der zaak een wat fragmentarischer hoofdstuk, maar illustreert de rijkheid aan toepassingen van de wiskunde. De inhoud van wiskunde met de computer (hoofdstuk 5) is wat bekender, maar daarmee zeker niet eenvoudiger, dan de andere. Het gaat vooral over computerondersteunde wiskunde, als de vierkleurenstelling, choastheorie, kunstmatige intelligentie.

Dat er nog veel opgelost moet worden laat hoofdstuk 6 zien, dat zich begeeft op en over de rand van de vorige naar de huidige eeuw en een doorkijk geeft naar de actuele en toekomstige problemen, bijvoorbeeld de Riemannhypothese, het vermoeden van Poincaré, de executietijd bij NP-problemen, maar bijvoorbeeld ook het probleem van de perfecte getallen. Jammer dat de literatuurverwijzingen heel globaal zijn. Het boek zou aan kracht winnen als bij elk onderwerp een lezenswaardig 'verder lezen' werd geboden. Nu staat er wel een erg eenvoudige en eenzijdige bibliografie genoemd, met vooral ook boeken en boekjes uit de epsilonuitgaven.

Ondanks de paar genoemde onvolkomenheden is naar mijn idee weer een waardevol boek aan de Epsilonreeks toegevoegd.

Het is een buitengewoon positief boek over de wiskunde, dat haar bestaansrecht als deelnemer in de opbouw van de huidige maatschappij heel duidelijk laat zien, maar vooral ook de kracht van de wiskunde laat zien als cultuuroverdrager. *H. Krabbendam*

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

The *Universitaire Wiskunde Competitie* (UWC) is a ladder competition for students. Others may participate 'hors concours'. The problems and results can also be found on the UWC website www.nieuwarchief.nl/uwc.

This issue contains three problems A, B and C. A total of 12 points can be obtained for each problem: 8 for a complete and correct answer, at most 2 points for elegance, and at most 2 points for possible generalisations. To compute the overall score, the totals for each problem are multiplied by a factor 3, 4 and 5, respectively.

The three best contributions will be honoured with a Sessions Prize of respectively 100, 50 and 25 Euro. The points of the winners will be added to their total after multiplication by a factor of respectively 0, $1/2$ and $3/4$. The highest ranked participant will be given a prize of 100 Euro, after which he starts over at the bottom of the ladder with 0 points.

Twice a year there is a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will also receive a prize of 100 Euro.

Group contributions are welcome. Submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred; participants should repeat their name, address, university and year of study at the beginning of each problem/solution. The submission deadline for this session is September 1, 2006. The Universitaire Wiskunde Competitie is sponsored by *Optiver Derivatives Trading*, and the *Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen in Delft*.



Problem A (Proposed by Matthijs Coster)

Prove or disprove the following:

In a 9×9 Sudoku-square one randomly places the numbers $1 \dots 8$. There is at least one field such that if any of the numbers $1 \dots 9$ is placed there, the Sudoku-square can be filled in to a (not necessarily unique) complete solution.

Problem B (Proposed by Jaap Spies)

Imagine a flea circus consisting of n boxes in a row, numbered $1, 2, \dots, n$. In each of the first m boxes there is one flea ($m \leq n$). Each flea can jump forward to boxes at a distance of at most $d = n - m$. For all fleas all $d+1$ jumps have the same probability.

The director of the circus has marked m boxes as special targets. On his sign all m fleas jump simultaneously (no collisions).

1. Calculate the probability that after the jump exactly m boxes are occupied.
2. Calculate the probability that all m marked boxes are occupied.

Problem C (Proposed by Klaas Pieter Hart)

We are given two measurable spaces $(X, \mathcal{A})$ and $(Y, \mathcal{B})$ plus a sub- σ -algebra $\mathcal{C}$ of $\mathcal{A}$. We are also given a real-valued function f on $X \times Y$ that is measurable with respect to the σ -algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ generated by the family $\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. Furthermore, each horizontal section f_y is measurable on X with respect to $\mathcal{C}$. Prove or disprove: f is measurable with respect to $\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}$.

Problem * (Proposed by B. Sury)

Prove or disprove that if $\binom{2n+1}{n} \equiv 1 \pmod{n^2 + n + 1}$ where $n^2 + n + 1$ is a prime, then $n = 8$.

Edition 2005/4

For Session 2005/4 we received submissions from Peter Vandendriessche, Vladislav Frank, Arne Smeets, Jan van de Lune, en P.G. Kluit.

Problem 2005/4-A We have $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Consequently partial sums must satisfy

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k(k+1)} < 1.$$

Show that for every $q \in \mathbb{Q}$ satisfying $0 < q < 1$, there exists a finite subset $K \subseteq \mathbb{N}$ so that

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k(k+1)} = q.$$

Solution This problem was solved by Peter Vandendriessche, Vladislav Frank and Arne Smeets. The solution below is based on that of Vladislav Frank.

First note that $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Hence $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}$. Consequently it suffices to represent every rational number between 0 and 1 as $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \dots - \frac{1}{a_{2k}}$, where $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \dots \leq a_{2k}$. If two consecutive numbers are equal, they simply cancel out, so we allow equal numbers. This will be useful in final step of proof.

Let $\frac{a}{b}$ be our rational number. There is a natural number n such that $\frac{1}{n+1} < \frac{a}{b} \leq \frac{1}{n}$. Consider $x = \frac{1}{n} - \frac{a}{b} = \frac{b-an}{bn}$. The numerator of this fraction is non-negative because $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{n}$, but less than a , the numerator of $\frac{a}{b}$, because $b - a(n+1) < 0$.

We have $\frac{a}{b} = \frac{1}{n} - x$. We now apply the same algorithm to x . Let m be a natural number such that $\frac{1}{m+1} < x \leq \frac{1}{m}$. The claim is that $m \geq n$. Namely, $x = \frac{b-an}{bn} < \frac{a}{bn} \leq \frac{1}{n^2}$, hence $m \geq n^2 + 1 > n$.

If we continue this algorithm, we obtain $\frac{a}{b} = \frac{1}{a_1} - (\frac{1}{a_2} - (\frac{1}{a_3} - (\dots - (\frac{1}{a_x}) \dots)))$. Notice that the algorithm can only be repeated finitely many times, as the numerator decreases at each step. We now have $\frac{a}{b} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots \pm \frac{1}{a_x}$. If x is even we are done.

In other case we may assume that $a_x > a_{x-1}$ and change $\frac{1}{a_x}$ into $\frac{1}{a_x-1} - \frac{1}{a_x(a_x-1)}$. Here $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{x-1} \leq a_x - 1 \leq a_x(a_x - 1)$ and we are done. Of course $a_x \neq 1$, as otherwise $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$ which is impossible.

As a generalization, V. Frank shows that for any irrational number in the interval $[0,1]$ there exists an infinite sum.

Problem 2005/4-B We consider the progressive arithmetic and geometric means of the function sequence $f_n(x) = x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $x \neq 1$. These are

$$A_n = A_n(x) = \frac{1}{n}(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \frac{x^n - 1}{n(x - 1)}$$

and

$$G_n = G_n(x) = (x^{1+2+\dots+(n-1)})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n-1}{2}}.$$

The *Martins-property* reads $A_{n+1}/A_n \geq G_{n+1}/G_n$. In our case this gives

$$\frac{n}{n+1} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n - 1} \geq \sqrt{x}.$$

Prove, more generally, that

$$\frac{a}{a+1} \frac{x^{a+1} - 1}{x^a - 1} \geq \sqrt{x} \text{ for } a > -\frac{1}{2}, x > 0, x \neq 1.$$

Solution This problem was solved by Jan van de Lune, Peter Vandendriessche, Vladislav Frank and Arne Smeets. The solution below is based on that of Peter Vandendriessche.

Let $f(t)$ be a (smooth) non-negative function that is convex on $[a, b]$ and let $[x, y] \subset [a, b]$ such that $x + y = a + b$. We then have

$$\frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \geq \frac{\int_x^y f(t) dt}{y-x}.$$

To prove this, consider, for given $f(t)$, x , and y , the function $g(t)$ defined by

$$g(t) = f(x) + \frac{(f(y) - f(x))(t - x)}{y - x}.$$

$g(t)$ is the line through the points $(x, f(x))$ and $(y, f(y))$. Notice that the convexity of f gives $\int_x^y g(t)dt \geq \int_x^y f(t)dt$. Let

$$h(t) = g(t) - \int_x^y g(t)dt + \int_x^y f(t)dt,$$

then

$$\int_x^y h(t)dt = \int_x^y f(t)dt.$$

By convexity we have $f(t) \geq g(t) \geq h(t)$ for $t \in [a, x] \cap [y, b]$. Since $h(t)$ is the equation of a line and $x + y = a + b$, we have

$$\frac{\int_a^b h(t)dt}{b - a} = \frac{\int_x^y h(t)dt}{y - x}.$$

Combining these results we find:

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b f(t)dt}{b - a} &= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_y^b f(t)dt}{b - a} + \frac{\int_x^y f(t)dt}{y - x} \\ &\geq \frac{\int_a^x h(t)dt + \int_y^b h(t)dt}{b - a} + \frac{\int_x^y h(t)dt}{y - x} \\ &= \frac{\int_a^b h(t)dt}{y - x} = \frac{\int_a^b f(t)dt}{y - x}. \end{aligned}$$

Problem B is a special case of this result. For $x \in \mathbf{R}_0^+$, $x \neq 1$, let $f(t) = x^t$. Then $f''(t) = x^t \log^2(x) \geq 0$. Therefore $f(t)$ is convex. We have to distinguish two cases:

- $a \in (-\frac{1}{2}, 0)$. Then $0 < a + \frac{1}{2} < a + 1$. Apply the lemma to the interval $[a + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset [0, a + 1]$.
- $a \in (0, \infty)$. Then $0 < \frac{1}{2} < a + \frac{1}{2} < a + 1$. Apply the lemma to the interval $[\frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}] \subset [0, a + 1]$.

Notice that in the first case the sign in both numerator and denominator changes on the right side of the equation:

$$\frac{\int_0^{a+1} x^t dt}{a + 1} \geq \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} x^t dt}{a},$$

from which we can deduce

$$\frac{a}{a + 1} \cdot \frac{x^{a+1} - 1}{\sqrt{x} \cdot (x^a - 1)} \geq 1.$$

It is easy to prove the generalization

$$\frac{z - y}{a - b} \cdot \frac{x^{b-a} - 1}{x^{z-y} - 1} \geq x^{y-a},$$

where $y + z = a + b$ and $-\frac{1}{2} < a < y < z < b$.

Problem 2005/4-C A *finite geometry* is a geometric system that has only a finite number of points. For an *affine plane geometry*, the axioms are as follows:

1. Given any two distinct points, there is exactly one line that includes both points.
2. The parallel postulate: Given a line L and a point P not on L , there exists exactly one line through P that is parallel to L .
3. There exists a set of four points, no three collinear.

We denote the set of points by $\mathbf{P}$, and the set of lines by $\mathbf{L}$. Let σ be an automorphism of $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$ (meaning that three collinear points of $\mathbf{P}$ are mapped onto three collinear points of $\mathbf{P}$ and three non-collinear points of $\mathbf{P}$ are mapped onto three non-collinear points of $\mathbf{P}$). Prove that there exists a point $P \in \mathbf{P}$ with $\sigma(P) = P$ or a line $L \in \mathbf{L}$ with $\sigma(L) = L$ or $\sigma(L) \cap L = \emptyset$.

Solution This problem has been solved by Leendert Bleijenga and Peter Vandendriessche. The solution below is based on their solutions.

First we will prove the following lemma:

Lemma. Let $M, L \in \mathbf{L}$, then $|M| = |L|$.

Proof. Suppose that $|M \cap L| > 1$ then $M = L$. Therefore we may assume that $|M \cap L| = 1$. Let $|M| = m$ and $|L| = l$. By Axiom 3 we know that there exists a $P \in \mathbf{P}$ such that $P \notin L$ and $P \notin M$. Through P we can construct 1 line parallel to L and l lines that intersect L in its l points. In the same way we can construct, through P , 1 line parallel to M and m lines that intersect M in its m points. Let us now determine the number of lines through P ; this equals $l + 1$ and $m + 1$. If $|M \cap L| = 0$, pick points $a \in L$ and $b \in M$. Let N be the line through a and b . Then by the previous argument $|L| = |N|$ and $|M| = |N|$. $\square$

We conclude that all lines consist of an equal number of points, say s .

Lemma. $|\mathbf{P}| < |\mathbf{L}|$.

Proof. Let $|\mathbf{P}| = p$ and $|\mathbf{L}| = l$. Every two points define a line, and there are $\frac{1}{2}p(p-1)$ pairs of points. Each line has s points and is counted $\frac{1}{2}s(s-1)$ times. Therefore $l = \frac{p(p-1)}{s(s-1)}$. In order to show that $p < l$ we have to prove that $s(s-1) < p-1$ or $p > s^2 - s + 1$. The third axiom tells us that there exist three non-collinear points $a, b, c \in \mathbf{P}$. Let L be the line through a and b , M the line through a and c . By the parallel postulate, through every point on L there is exactly one line parallel to M . Starting with s points on L , we find s lines, all consisting of s points. Therefore $p \geq s^2$. $\square$

Suppose that $\sigma(p) \neq p$, for all $p \in \mathbf{P}$, and that $\sigma(L) \neq L$ and $\sigma(L) \cap L \neq \emptyset$ for all $L \in \mathbf{L}$. Consider the function $\mu : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{P}$ given by $\mu(L) = \sigma(L) \cap L$. μ is well defined since $\sigma(L) \cap L$ is always a unique point. Now suppose that $\mu(L) = \mu(M)$ or $\sigma(L) \cap L = \sigma(M) \cap M = p$, and $\sigma(q) = p$. Then $q \in L$ and $q \in M$. We know that $q \neq p$. Therefore $L = M$ and μ is injective. However, if μ is injective, then $|\mathbf{P}| \geq |\mathbf{L}|$, which contradicts the previous lemma.

Problem 2005/4-* We have $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k^2 = (\pi^2/6) - 1$. Consequently partial sums must satisfy

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Given any $q \in \mathbf{Q}$ satisfying $0 < q < (\pi^2/6) - 1$, does there exist a finite subset $K \subseteq \mathbf{N} \setminus \{1\}$ so that

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k^2} = q?$$

Solution This problem was solved by P.G. Kluit. The solution below is based on his solution.

Let $q = \sum k_i^{-2}$, where k_i are different integers. Let m be the least common multiple of all k_i in the sum. For each such k_i a number k'_i exists such that $k_i k'_i = m$. Then $q = \frac{1}{m^2} \cdot \sum (k'_i)^2$, that is, q can be written as a fraction with denominator m^2 and the numerator a sum of squares of different divisors of m . This raises the question: given m , which numbers can be written as sums of squares of different divisors of m ? We will show that for highly composite numbers m , more specifically $m = n!$, the answer will be that sufficiently many integers can be written as sums of squares to prove the problem.

Lemma. Let $n \geq 5$ be an integer and let $3 = d_1 < d_2 < \dots < d_m = n!/3$ be all divisors of $n!$ between 3 and $n!/3$. Then $2d_k^2 > d_{k+1}^2$ for $1 \leq k < m$.

Proof. Let us prove this by induction. For $n = 5$ the divisors $d_1, \dots, d_{12}$ are 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, and 40. It is easy to verify the lemma.

We assume the lemma is true for n . We have to prove that the Lemma holds for the divisors of $(n+1)!$. The divisors of $(n+1)!$ that are less than $n!/3$ clearly satisfy the lemma. Even though there may be more divisors, this cannot influence the inequality. Suppose that d_k and d_{k+1} are two successive divisors of $(n+1)!$, with $n!/3 \leq d_k < d_{k+1} \leq (n+1)!/3$. Let $d_k d'_k = d_{k+1} d'_{k+1} = (n+1)!$. Then d'_{k+1} and d'_k are two successive divisors of $(n+1)!$ with $3 \leq d'_{k+1} < d'_k \leq 3(n+1)$. As for $n \geq 5$ we have $3(n+1) < n!/3$, this suffices to conclude the proof. $\square$

Lemma. Let $n \in [129, 256]$ be an integer. Then n can be represented as a sum of different squares $d_1^2 + \dots + d_k^2$, where $1 \leq d_1 < \dots < d_k \leq 10$.

Proof. The proof can be found by the enumeration of 128 representations. There is a slightly shorter proof which will be left to the reader. $\square$

Lemma. Let $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 11$. Then every integer $x \in [129, \sigma_2(n!) - n!^2 - 129]$ can be represented as $x = \sum d_k^2$, where the d_k are different divisors of $n!$. Here $\sigma_m(x) = \sum_{d|x} d^m$.

Proof. Let $L_{kn} = [129, t]$ be the longest interval in $[129, \infty)$ whose integers can all be represented as a sum of different squares of some of the first k divisors of $n!$. Let $l_{kn} = |L_{kn}|$, the length of the interval. In the proof the notation will be abbreviated to $l_k = |L_k|$ if it is clear which n is meant.

In the second lemma we saw that $l_{10} = 128$. Notice that $l_{11} = 249 (= 128 + 121)$. Any $x \leq 256$ is represented by the divisors lesser than or equal to 10, while the integers $257 \leq x \leq 377$ are represented using 11^2 .

We will show in general that $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$ by induction, as long as $d_{k+1} < n!/2$. The proof will be given in two steps. In the first step we prove that $2d_{k+1}^2 < l_{k+1}$ given $2d_k^2 < l_k$ and $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$. In the second step we will prove that $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$ given $2d_k^2 < l_k$. Using these two steps and the basic assumption ($k = 11$) we can prove for arbitrary k that $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$.

First step

Given $2d_k^2 < l_k$ and $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$ we find that $2d_{k+1}^2 < l_{k+1}$.

Proof. The first lemma tells us that $d_{k+1}^2 < 2d_k^2$. Therefore we have $2d_{k+1}^2 < d_{k+1}^2 + 2d_k^2 < d_{k+1}^2 + l_k < l_{k+1}$. $\square$

Second step

Given $2d_k^2 < l_k$ we find that $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$.

Proof. The proof is comparable to the proof above. $\square$

For $x \in L_k$, it is clear that $x \in L_{k+1}$ as well, while for the numbers $x \in L_{k+1} \setminus L_k$ notice that $l_k + 128 < x \leq l_k + d_{k+1}^2 + 128$. If we use the number d_{k+1}^2 to represent the sum, we find for the rest $y = x - d_{k+1}^2$ that $l_k - d_{k+1}^2 + 128 < y \leq l_k + 128$. Using Lemma 1 again we have $l_k - d_{k+1}^2 + 128 > l_k - 2d_k^2 + 128 > 128$. Therefore $y \in L_k$.

We can rewrite the results $l_{k+1} = l_k + d_{k+1}^2$ as

$$l_k = \sum_{i=1}^k d_i^2 - 128,$$

for $k \leq m$, where $d_m = n!/3$.

In order to complete the proof of Lemma 3 we need to prove that $l_{(m+1)n} = l_{mn} + d_{n!/2}^2$, where $d_{m+1} = n!/2$. Notice that $\frac{1}{4} < \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$. Therefore for arbitrary $x \in L_{(m+1)n}$, we find either $x \in L_{mn}$ or $x - \frac{1}{4}n!^2 \in L_{mn}$. Now we find

$$l_k = \sum_{i=1}^k d_i^2 - 128,$$

for $k \leq m+1$, where $d_{m+1} = n!/2$. This concludes the proof of this lemma. $\square$

Theorem. For every $q \in \mathbb{Q}$ such that $0 < q < \frac{\pi^2}{6} - 1$, a finite subset $K \in \mathbb{N}$ exists, such that

$$\sum_{k \in K} k^{-2} = q$$

Proof. Let $q \in \mathbb{Q}$ with $0 < q < \frac{\pi^2}{6} - 1$. We can find an $n \in \mathbb{N}$ fulfilling each of the three following properties by choosing n sufficiently large. Moreover each of these properties is monotonic, meaning that if it is true for some n_0 , it will be true for all $n > n_0$

- $n \geq 11$,
- If $q = a/b$, where a and b have no common divisors, then b divides $n!^2$,
- If $q = x/(n!)^2$, then n is chosen such that $128 < x < \sigma_2(n!) - (n!)^2 - 128$

To prove the existence of 3) notice that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2(n!) - (n!)^2 - 128}{n!^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Now Lemma 3 may be applied, showing that x can be represented as sum of squares of different divisors of $n!$. This gives us the sought for representation of q . $\square$

Remark

A solution of the Star Problem turns out to have been published in Ron Graham's 'On Finite Sums of Unit Fractions', *Proc. London Math. Soc.* (14), 1964, pp. 193–207. The basic ideas behind the two solutions are similar. Graham starts with a multiplicative set S , which in the Star Problem is the set of squares. Graham then defines $P(S)$, the set of sums of elements of S . Using the notation S^{-1} for the set of inverses of the elements of S , Graham shows that if $P(S)$ contains all positive integers, up to a finite number, $|S|$ is finite, and s_{n+1}/s_n is bounded, then $\frac{p}{q} \in P(S^{-1})$ whenever $q|s$ for some $s \in S$. Moreover, for every $\epsilon > 0$ there is an $s \in P(S^{-1})$ such that $s - \frac{p}{q} < \epsilon$.

Results of Session 2005/4

	Name	A	B	C	Total
1.	Vandendriessche	8	10	8	104
2.	Smeets	8	8	–	72
3.	Frank	8	6	–	64

Final Table after Session 2005/4

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

	Name	Points
1.	Smeets	48
2.	Syb Botma	42
3.	DESDA	38