

# Inhoud | Contents

- 2 Colofon
- 3 Van de voorzitter *Jan van Mill*
- 4 Agenda
- 6 Nieuws
- 9 Van het KWG

---

## Oratie | Inaugural lecture

- 18 Veranderingen *Joost Hulshof*

---

## Onderzoek | Research

- 27 Niet-commutatieve meetkunde niet-communicabel? *Walter van Suijlekom*
- 33 Googling maths *Nelly Litvak*
- 39 Diophantische vergelijkingen: kunnen we het echt? *Gunther Cornelissen*
- 44 Studiegroep wiskunde met de industrie *Rob Bisseling, Alistair Vardy, Mark Peletier, Natacha Severens*

---

## Onderwijs | Education

- 52 Card games with ideals *Birgit van Dalen*

---

## Boeken | Books

- 57 Wiskunde is mensenwerk! *Jan van de Craats*
- 60 Boekbesprekingen

---

## Rubrieken | Departments

- 17 Lieve Maria: doorbraak en nieuwe kansen *Jan van de Craats*
- 32 Oud Archief *Wijnand Rekers*
- 66 Problemen/UWC

## Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

### Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121, fax 071-5277101  
<http://www.nieuwarchief.nl>

### Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)  
Jaap Top (top@math.rug.nl)

### Eindredactie

Derk Pik (dpik@math.leidenuniv.nl)

### Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@nieuwarchief.nl)  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

### Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)  
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)  
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)

### Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid (naw@nieuwarchief.nl)  
Arno Kret (naw@nieuwarchief.nl)

### Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.) Jan van de Craats (UvA), Hans Cuyper (TUE), Yves van Gennip (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (UvA)

### TEX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)  
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

### Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)  
Uitgeverij Ten Brink  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

### Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

### Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library  
Centrum voor Wiskunde en Informatica  
Postbus 94079  
NL-1090 GB Amsterdam

### Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)  
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

### Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

### Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

### Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

## Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap. De contributie voor leden van het KWG bedraagt    70 per jaar. Gepensioneerden betalen    35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor    25 per jaar.

Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van    50.

Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay    50 instead of the full membership fee of    70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of    5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of    7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor    90 respectievelijk    105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

### Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)  
Uitgeverij Ten Brink  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

### Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan van Mill (VU, voorzitter), Herman te Riele (CWI, secretaris), Fieke Dekkers (UU, penningmeester), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL).

## Informatie voor auteurs

### Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

### Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

### Volgende nummers

| nummer | verschijningsdatum | deadline kopij |
|--------|--------------------|----------------|
| 1      | 17-06-2006         | –              |
| 2      | 16-09-2006         | 08-05-2006     |
| 3      | 03-12-2006         | 07-08-2006     |
| 4      | 03-03-2007         | 06-11-2006     |

## Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde  
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit  
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit  
Nijmegen

## Op het omslag

Wat is het verschil tussen een differentiaalvergelijking die een zeepbel beschrijft en de vergelijking van een bal die over een oppervlak rolt? Lees de oratie van Joost Hulshof op pagina 18.

# Lieve Maria

Toen mijn dochter Marije zich zo'n vijf jaar geleden voorbereidde op haar eindexamen vwo (eerste lichting tweede fase), nam ik het volgende waar. Bij elke moeilijk ogende wiskundesom raadpleegde ze haar formulekaart en zocht de formule met de in haar ogen meeste kans op succes. Omdat mij dit tijdrovend en omslachtig leek, merkte ik op dat zij zich veel tijd kon besparen door de formules even uit het hoofd te leren. Maar dat viel niet in goede aarde en zij keek mij aan als ware ik een fossiel uit een achterhaald en donker verleden. Marije slaagde met een mooi cijfer voor wiskunde en schreef zich in voor de studie Geneeskunde.

Het zou belachelijk zijn te stellen dat de grafische rekenmachine en de formulekaart Marijes ontwikkeling nadelig hebben beïnvloed. Maar het had heel anders kunnen lopen als zij Wiskunde was gaan studeren, of bijvoorbeeld Lucht- en Ruimtevaarttechniek. De constatering dat de huidige studenten onvoldoende voorbereid zijn op een studie in een bètarichting, techniek, informatica, econometrie en aanverwante studierichtingen, is inmiddels verworpen tot het intrappen van een open deur. Het schort onder meer aan reken- en formulevaardigheid en aan parate kennis op het gebied van elementaire functies (zie onder andere het artikel *Algebra: verloren zaak of uitdaging?* van Metha Kamminga, Euclides, juni 2004, pp. 358–361). Bovendien komt door de focus op 'realistische wiskunde' de abstracte kant van de wiskunde op het vwo onvoldoende aan bod. Je wordt nooit concertpianist als je niet op zeer jonge leeftijd begint met pianolessen. Zo is het ook met de abstracties waar je op de universiteit bij de bètastudies mee te maken krijgt. Oorzaken van de geschetste problemen zijn naar de mening van vele betrokkenen onder meer de beklagenswaardige toestand van het rekenonderwijs in het primair onderwijs en de fragmentarische behandeling van belangrijke technieken op het vwo. Ook is het wiskundeonderwijs een stuk taliger geworden, waardoor taalzwakke leerlingen meer moeite hebben met wiskunde dan voorheen. De situatie op de hogescholen is niet beter: ook daar zijn forse aansluitingsproblemen.

De universiteiten klagen steen en been. Enkele zien zich genoodzaakt de aanstaande eerstejaars aan een diagnostische instaptoets te onderwerpen en bijspijkertrajecten aan te bieden (zie het informatieve artikel *Mathematics on the threshold* van André Heck en Leendert van Gastel, <http://staff.science.uva.nl/~heck>). Gelukkig lijken er geen aansluitingsproblemen te zijn op-

getreden bij sociale en aanverwante studies (Jan van der Craats, *Basiswiskunde, wat moet erin en waarom?*, <http://staff.science.uva.nl/~craats>).

Een groot aantal studieverenigingen voor wiskunde, natuurkunde en informatica heeft in een open brief aan minister Maria van der Hoeven bepleit het verplichte deel van het wiskundeonderwijs op het vwo te verzwaren in plaats van te verlichten. Inmiddels weten we dat het verplichte wiskundevak in het vakkenpakket Natuur & Techniek minder uren kwijt raakt dan de minister eerst voorstelde. Het is hartverwarmend dat de studenten zelf gemerkt hebben dat er iets in hun onderwijs heeft ontbroken; dat ze blijkbaar door hebben dat de wiskunde zich niet aan haar beoefenaars zal aanpassen. Problemen worden niet uit zichzelf gemakkelijker omdat degene die ze wil oplossen minder gereedschap tot zijn beschikking heeft. De studenten zijn er met hun actie *Lieve Maria* in geslaagd de geschetste aansluitingsproblematiek op ludieke wijze prominent op de politieke agenda te krijgen. Het is aan ons dit nu niet meer van die agenda te laten verdwijnen. Universiteiten en vakverenigingen dienen daartoe meer nog dan voorheen hun diensten aan te bieden aan vernieuwingscommissies, schrijversteams, et cetera. Wellicht zal nascholing van leraren een belangrijker plaats moeten gaan innemen dan nu het geval is. Een rol voor KWG en NVvW? Ik complimenteer de studenten van harte met hun actie. Prima gedaan!

Ik weet nog precies waarom ik indertijd wiskunde ben gaan studeren. De hoeken van een driehoek zijn samen 180 graden. Dat was gisteren waar, vandaag, en ook morgen zal dat waar zijn. Dat kun je namelijk bewijzen en als dat eenmaal is gedaan dan hoeft je je er nooit meer druk over te maken. Dat gaf mij houvast en ik werd erdoor gefascineerd. Ik vermoed dat de wiskunde die vandaag de dag op het vwo wordt gedoceerd mij minder had aangesproken. Het is niet ondenkbaar dat ik, geconfronteerd met de 'realistische wiskunde', de kant van de Geneeskunde was opgegaan. Ik ben blij dat dit een gedachte-experiment is, want ik zou dan nooit hebben geweten hoe mooi, uitdagend en nuttig de wiskunde is.

**Jan van Mill**  
voorzitter van het Koninklijk Wiskundig Genootschap

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit  
De Boelelaan 1081–1087, 1081 HV Amsterdam  
[vanmill@cs.vu.nl](mailto:vanmill@cs.vu.nl)

# Agenda

Upcoming Events

## maart 2006

6 – 8 maart

### ☐ Risk Measures & Risk Management for High-Frequency Data

Workshop over statistiek van data met hoge frequentie

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl](http://www.eurandom.tue.nl)

6 – 10 maart

### ☐ The World a Jigsaw: Tessellations in the Sciences

Geometrische verdelingen van de ruimte met biologische en fysische toepassingen

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

8 maart

### ☐ Grote Rekendag

Landelijke rekendag voor leerlingen op basisscholen met als thema 'spelen met getallen'

**plaats** deelnemende basisscholen

**info** [www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag](http://www.fi.uu.nl/rekenweb/groterekendag)

9 maart

### ☐ Conferentie 'Wiskundevoorkennis voor het hoger onderwijs'

Aansluitingsproblematiek van startende studenten

**plaats** Jaarbeurs, Utrecht

**info** [www.surf.nl](http://www.surf.nl)

14 maart

### ☐ Pi-dag

Internationale dag in het teken van wiskunde, wiskundeonderwijs en  $\pi$  in het bijzonder, ter ere van de driehonderste verjaardag van  $\pi$

**plaats** internationaal

**info** [www.mobot.org/education/megsl/pi.html](http://www.mobot.org/education/megsl/pi.html)

16 – 17 maart

### ☐ Tenth Rhine Workshop on Computer Algebra (RWCA 2006)

Jaarlijkse workshop over alle deelgebieden van de computeralgebra. Voorzitter: Jan Draisma

**plaats** Basel, Zwitserland

**info** [www.math.unibas.ch/~draisma/rwca06](http://www.math.unibas.ch/~draisma/rwca06)

16 – 17 maart

### ☐ Nationale Rekendagen 2006

Door het *Freudenthal Instituut* georganiseerde conferentie over rekenen en rekenonderwijs

**plaats** De Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

**info** [www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen](http://www.fi.uu.nl/rekenweb/rekendagen)

17 maart

### ☐ Europese Kangoeroe wiskundewedstrijd

Europese wiskundewedstrijd voor leerlingen van de bovenbouw van basisscholen en middelbare scholen

**plaats** deelnemende scholen door heel Europa

**info** [www.math.ru.nl/kangoeroe](http://www.math.ru.nl/kangoeroe)

20 – 24 maart

### ☐ YEP 2006 Workshop

Bijeenkomst gewijd aan *large deviations*, *random media*, and *random matrices* georganiseerd door de *Young European Probabilists* (YEP)

**plaats** EURANDOM, Eindhoven

**info** [www.eurandom.tue.nl](http://www.eurandom.tue.nl)

20 – 24 maart

### ☐ International Workshop on Mathematics of Constraint Satisfaction

Workshop over algebra, logica en grafentheorie, toegespitst op *constraint satisfaction* georganiseerd door het *Isaac Newton Institute*

**plaats** University of Oxford, Engeland

**info** [www.cs.rhul.ac.uk/home/green/mathscsp](http://www.cs.rhul.ac.uk/home/green/mathscsp)

27 – 28 maart

### ☐ 42e Nederlands Mathematisch Congres

Congres met onder andere lezingen en een forum-discussie over 'realistisch rekenen versus abstract denken'. De hoofdsprekers zijn H.A. van der Vorst, H.W. Lenstra, J.T. Chayes en R.J. O'Malley.

**plaats** Technische Universiteit Delft

**info** [ta.twi.tudelft.nl/nw/nmc2006](http://ta.twi.tudelft.nl/nw/nmc2006)

28 – 29 maart

### ☐ FEMLAB Benelux Meeting

Conferentie over het softwarepakket FEMLAB

**plaats** CWI, Amsterdam

**info** [www.cwi.nl/events](http://www.cwi.nl/events)

31 maart

### ☐ Symposium Delft Center for Computational Science and Engineering

*Multiphysics, multiscale en grid computing*

**plaats** Technische Universiteit Delft

**info** [pcse.tudelft.nl](http://pcse.tudelft.nl)

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.  
Email: [naw@math.leidenuniv.nl](mailto:naw@math.leidenuniv.nl)

## april 2006

10 – 13 april

### □ New Directions in Proof Complexity

Conferentie georganiseerd door het *Isaac Newton Institute* over logica en in het bijzonder complexiteit van bewijzen

**plaats** Cambridge, Engeland

**info** [www.newton.cam.ac.uk/programmes/LAA](http://www.newton.cam.ac.uk/programmes/LAA)

20 – 22 april

### □ Logic, Models and Computer Science

*Computability and computational complexity en uncertainty logic*, georganiseerd door de *Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni* (AILA)

**plaats** Camerino, Italië

**info** [dmi.unicam.it/merelli/LMCS06](http://dmi.unicam.it/merelli/LMCS06)

28 april

### □ EIDMA/DIAMANT Cryptography Working Group

Bijeenkomst gewijd aan bedrijfsmatige toepassingen

**plaats** Vergadercentrum La Vie, Utrecht

**info** [www.win.tue.nl/math/eidma/cwg.html](http://www.win.tue.nl/math/eidma/cwg.html)

## mei 2006

1 – 5 mei

### □ Limit problems in Analysis

Formele oplossingen, zonder beschouwing van achterliggende limietprocessen, en wiskundig strenge oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen worden tegenover elkaar gezet.

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

2 – 24 en 29 – 31 mei

### □ Spring School: Abelian Varieties

Abelse variëteiten en hun toepassingen

**plaats** Universiteit Utrecht en Universiteit van Amsterdam

**info** [mri.math.uu.nl](http://mri.math.uu.nl)

12 mei

### □ Leve de Wiskunde!

Wetenschappelijke voordrachten, lezingen over populariseren van wiskunde en informatiemarkt voor vwo docenten en andere belangstellenden. Vierde editie

**plaats** Universiteit van Amsterdam

**info** [www.science.uva.nl/math/home.cfm](http://www.science.uva.nl/math/home.cfm)

15 – 19 mei

### □ Computational and topological aspects of dynamics

Workshop op het gebied van topologie, dynamische systemen en computationele homologie

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

20 mei

### □ HKRWO-symposium XII

Symposium van de *Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs* (HKRWO) met als thema 'boeken die hun sporen hebben nagelaten'

**plaats** Hogeschool Domstad, Utrecht

**info** [www.fi.uu.nl/hkrwo](http://www.fi.uu.nl/hkrwo)

28 – 31 mei

### □ International Conference on Computational Science 2006

International conferentie met workshops over het thema *Advancing Science through Computation*

**plaats** University of Reading, Engeland

**info** [www.iccs-meeting.org/iccs2006](http://www.iccs-meeting.org/iccs2006)

## juni 2006

6 – 9 juni

### □ Stieltjes Onderwijsweek: Rings of Low Rank

Een introductie in de theorie van ringen met lage rang

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

12 – 16 juni

### □ Rings of Low Rank

Een workshop over het werk van Manjul Bhargava over ringen van lage rang en de impact daarvan op computationele getaltheorie

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

14 – 17 juni

### □ Conference on Game Theory and Applications

Zowel een Spaans-Italiaans-Nederlandse conferentie over speltheorie (SING 2) als een Italiaanse bijeenkomst over speltheorie en toepassingen (XVI IMGTA)

**plaats** Foggia, Italië

**info** [www.dsems.unifg.it/sing2](http://www.dsems.unifg.it/sing2)

27 juni – 3 juli

### □ Challenging Mathematics in and beyond the Classroom

Conferentie over wiskunde-onderwijs georganiseerd door de *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI)

**plaats** Trondheim, Noorwegen

**info** [www.amt.edu.au/icmis16.html](http://www.amt.edu.au/icmis16.html)

## juli/augustus 2006

10 – 14 juli

### □ Asymptotics, particles, processes and inverse problems

Workshop voor statistici en kansrekenaars over stochastische processen ter gelegenheid van de vijfenzestigste verjaardag van Piet Groeneboom

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

18 – 21 juli

### □ 13th ILAS Conference

Conferentie van de International Linear Algebra Society over verscheidene themas in de lineaire algebra als lineaire algebra in de statistiek en numerieke lineaire algebra

**plaats** Vrije Universiteit, Amsterdam

**info** [staff.science.uva.nl/~brandts/ILAS06](http://staff.science.uva.nl/~brandts/ILAS06)

31 juli – 11 augustus

### □ 18th European Summer School in Logic, Language and Information

Cursussen en workshops in drie interessegebieden: *Language and Computation*, *Language and Logic* en *Logic and Computation*

**plaats** Malaga, Spanje

**info** [esslliz2006.lcc.uma.es](http://esslliz2006.lcc.uma.es)

22–30 augustus

### □ International Congress of Mathematicians 2006 (ICM 2006)

Drie prijsuitreikingen: de *Fields medal* (wiskundig onderzoek), de *Nevanlinna prize* (theoretische informatica), de *Gauss prize* (toegepaste wiskunde)

**plaats** Madrid, Spanje

**info** [www.icm2006.org](http://www.icm2006.org)

# Nieuws

## News

## Boze studenten, lieve Maria

De Nederlandse studenten wiskunde, natuurkunde en informatica zijn boos. Het wiskundeonderwijs op de middelbare school is namelijk geen voldoende voorbereiding op de bètastudies in het wetenschappelijk onderwijs. Daarom hebben enkele studenten van *De Leidse Flesch*, de Leidse studievereniging voor natuurkunde, sterrenkunde, wiskunde en informatica, namens bètastudieverenigingen uit het hele land een brief aan minister van OCW, Maria van der Hoeven, aangeboden, om haar op te roepen de nieuwe plannen voor de wiskunde op de middelbare school te herzien.

Het nieuwe wetsvoorstel behelst ondermeer een forse afname van het aantal uren wiskundeles (Wiskunde B) in het Natuur & Techniek-profiel. Wel komt er een nieuw wiskundevak, Wiskunde D, waarin meer diepgang geboden kan worden. Middelbare scholen zullen echter niet verplicht gesteld worden om dit vak aan te bieden in de huidige plannen en hierdoor zal dit vak ook niet als ingangseis voor universitaire bètastudies gesteld kunnen worden.

Voor het kamerdebat over de voorgestelde veranderingen in het voortgezet onderwijs van 24 januari jongstleden hebben de studenten van *Lieve Maria* hun brief aangeboden aan minister Van der Hoeven en zij hebben enkele kamerleden een bijspijkerkursus wiskunde gegeven. Tijdens dit debat is besloten om het aantal uren Wiskunde B te verminderen tot 600 in plaats van de in eerste instantie voorgestelde 520. Momenteel bedraagt het aantal uren nog 760.

Met hun brief en de bijbehorende website [www.lievemaria.nl](http://www.lievemaria.nl) laten nu ook de Nederlandse studenten van zich spreken in het wiskunde-onderwijsdebat.

*Bron: [www.lievemaria.nl](http://www.lievemaria.nl)*

Bron: [www.lievemaria.nl](http://www.lievemaria.nl)



De website van de actiegroep van studenten

## Epsilon uitgeverij nu in bezit van genootschap

Uitgeverij van Nederlandstalige wiskundeboeken *Epsilon Uitgaven* is eigendom geworden van de *Stichting Epsilon*. Tijdens een feestelijke bijeenkomst in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht werd de koop gesloten.

Zo'n dertig betrokkenen woonden op 26 januari de ceremonie bij waarin Ferdinand Verhulst zijn uitgeverij Epsilon Uitgaven overdroeg aan de Stichting Epsilon. Stichting Epsilon is vorig jaar door het KWG en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) in het leven geroepen met als voornaamste doel Epsilon Uitgaven over te nemen.

Verhulst (66) verklaarde met gevoelens van grote tevredenheid zijn handtekening onder het koopcontract te hebben geplaatst: “Voor mij is de continuïteit van de uitgeverij ontzettend belangrijk. Ik heb ook

*Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland.  
Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbijge gane activiteiten wordt verslag gedaan.*

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

*Stuur dan uw bijdrage (± 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar [naw@math.leidenuniv.nl](mailto:naw@math.leidenuniv.nl). De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.*

Redacteur: Yves van Gennip

het gevoel dat het in heel goede handen is.”

Ook voor andere aanwezigen was de overname meer dan een pen-nenstreek. Henk Broer, redactielid van Epsilon Uitgaven en auteur van twee ‘epsilons’, benadrukte het succes van de uitgeverij die Verhulst in 1984 oprichtte. Velen geloofden toen niet dat het Nederlands als wetenschapstaal nog bestaansrecht had. Marian Kollenveld van de NVvW zei in haar toespraak verheugd te zijn dat het voortbestaan van de goedlopende Zebra-reeks gewaarborgd is. Het KWG greep de gelegenheid aan om Verhulst te eren met de oorkonde van het genootschap.

Guido Schmeits



Ferdinand Verhulst tekent het contract onder toezicht van Geertje Hek

### Installatie vernieuwingscommissie voor wiskunde

Op dinsdag 29 november 2005 heeft Maria van der Hoeven de vernieuwingscommissie voor wiskunde cTWO ingesteld. Deze commissie richt zich op vernieuwingen in het wiskundeonderwijs in de tweede fase van havo en vwo. Taken zijn: examenprogramma's voorstellen per 2010 voor wiskunde A, B, C en D van havo en vwo, betrokken zijn bij ontwikkelingen rond wiskunde C van vwo en wiskunde D voor havo en vwo per 2007, adviseren over doorlopende leerlijnen wiskunde en over didactische vernieuwingen.

Rainer Kaenders

### Opleidingsniveau van docent van groot belang

Volgens een onderzoek van het Centre for Education and Employment Research (CEER) aan de University of Buckingham in Engeland, is de afname van het aantal leerlingen op middelbare scholen in Engeland dat *A-level* natuurkunde kiest direct gerelateerd aan het gebrek aan hoog opgeleide docenten en een afnemende mogelijkheid om natuurkunde te studeren.

In het onderzoek, dat werd uitgevoerd door Alan Smithers en Pamela Robinson op 432 scholen en bleek, op de aanleg van de leerlingen na, het opleidingsniveau van de docent de grootste invloed op de resultaten van de leerlingen te hebben.

In Nederland is het merendeel van de docenten opgeleid op hbo-niveau.

Bron: [www.buckingham.ac.uk/news/newsarchive2005](http://www.buckingham.ac.uk/news/newsarchive2005)

### Leerling overtreft de meester

Uit een onderzoek van toetsdeskundigen G. Straetmans en T. Eggen van de Cito-groep blijkt dat meer dan de helft van de eerstejaars pabo-studenten rekentoetsen slechter maakt dan een goede basisschool-leerling uit groep 8.

Tijdens het onderzoek hebben bijna 800 leerlingen uit de laat-

ste klas van het basisonderwijs rekenopgaven gemaakt. De resultaten van de beste twintig procent werden als norm gebruikt voor de pabo-leerlingen. Van de groep bestaande uit meer dan duizend eerstejaars van vijftien pabo's wist 53 procent de norm niet te halen. Vrouwelijke studenten scoren slecht met een slagingspercentage van slechts 43 procent. Bijna driekwart van de getoetste eerstejaars die van het mbo afkomen zakten.

Minister Van der Hoeven van Onderwijs heeft in april 2005 met de opleidingen afgesproken dat er in 2006 een verplichte toets met bindend studieadvies gaat komen in het eerste jaar van de pabo. Het niveau van deze toets mag elke opleiding zelf bepalen.

Bron: [www.trouw.nl/deverdieping/](http://www.trouw.nl/deverdieping/)

### Taal telt!

In haar proefschrift *Taal telt!* heeft Joanneke Prenger de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in het realistisch wiskundeonderwijs onderzocht. Sinds de invoering van de *Realistische Wiskunde* in het Nederlandse wiskundeonderwijs moeten alle opgaven in contexten aangeboden worden en bevatten de lesboeken daarom meer taal dan voorheen. Ook moeten de leerlingen meepraten in de klas en zo al pratend kennis van de wiskunde opdoen.

Prenger toonde in haar onderzoek aan dat taalzwakke leerlingen door hun geringe tekstbegripvaardigheden en taalvaardigheid belemmerd worden bij wiskunde. Bijvoorbeeld in het tweede jaar van het vmbo presteerden de allochtone leerlingen slechter op het punt tekstbegrip bij wiskunde dan de autochtone leerlingen.

Bron: [www.let.rug.nl/prenger](http://www.let.rug.nl/prenger)



Joanneke Prenger: taalzwakke leerlingen hebben problemen met talige wiskunde

### Fluctuerend fytoplankton

Door opwarming van de bovenlaag van de oceanen worden minder voedingsstoffen aangevoerd uit de diepere lagen, wat leidt tot chaos in het plankton. Dit is het resultaat van een onderzoek van Jef Huisman van het Instituut voor Biodiversiteit en Ecosysteem Dynamica (IBED) van de Universiteit van Amsterdam in samenwerking met Nga Pham Thi en Ben Sommeijer van het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) en David Karl van de Universiteit van Hawaii.

De warme bovenlaag van oceanen drijft op de koudere dieperer lagen. Hoe groter het temperatuurverschil tussen de lagen, des te minder voedingsstoffen worden uit de diepere lagen aangevoerd naar de hogere lagen, waarin het plankton leeft. In computersimulaties ontwikkeld door de onderzoekers bleek dat de planktongroei sterk gaat fluctueren als deze aanvoer vermindert. Dit in tegenstelling tot de gangbare opvatting dat het plankton een stabiel systeem vormt. De resultaten van een onderzoek naar de planktongroei in de Stille Oceaan bij Hawaii, uitgevoerd door David Karl, blijken goed overeen te komen met de computer-

simulaties. Het onderzoek werd op 19 januari jongstleden gepubliceerd in het artikel 'Reduced mixing generates oscillations and chaos in the oceanic deep chlorophyll maximum' in *Nature*. *Bron: www.cwi.nl*

### Helmholtz kan sneller

Op 22 december is Yogi Ahmad Erlangga geïmagineerd op een proefschrift waarin een rekenmethode gepresenteerd wordt om de Helmholtzvergelijking vele malen sneller numeriek op te lossen dan tot dusver mogelijk was. De Helmholtzvergelijking is te verkrijgen door scheiding van variabelen toe te passen op de golfvergelijking en is dan ook van groot belang bij golfverschijnselen. Wegens het belang dat deze vergelijking heeft voor de interpretatie van akoestische meetgegevens bij het zoeken naar olie, zijn ook oliemaatschappijen geïnteresseerd in het snel oplossen van deze vergelijking in driedimensionale situaties. Ook toepassingen op het gebied van lasers en radarmetingen liggen in de lijn der verwachting.

Toegevoegd promotor Kees Vuik onderstreept het belang van het onderzoek. "Wij denken, gezien de reacties uit de industrie en van buitenlandse universiteiten, dat er in dit werk een dertig jaar oud probleem is opgelost." *Bron: www.tudelft.nl/live*

### Chaos in de Orde van de Nederlandse Leeuw

Op 11 november 2005 is Floris Takens benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw. Hij is emeritus-hoogleraar op het gebied van de dynamische systemen aan de Rijksuniversiteit Groningen en is een van de grondleggers van de chaostheorie.

Binnen dit vakgebied heeft Takens belangrijke bijdragen geleverd aan de theorie van vreemde attractoren en turbulentie alsook de naar hem vernoemde *Takens-reconstructiestelling* opgesteld, die zegt dat een dynamisch systeem gereconstrueerd kan worden uit een reeks waarnemingen van de toestand van het systeem. Takens heeft zich bekwaamd in chemische en vooral medische toepassingen van de chaostheorie. Zo hebben zijn bijdragen aan de wiskunde mede geleid tot de ontwikkeling van *early warning systems* in het epilepsieonderzoek.

Floris Takens werd in 1940 in Zaandam geboren, studeerde wiskunde en promoveerde in 1969 aan de Universiteit van Amsterdam, waarna hij als gastonderzoeker aan het *Institut des Hautes Etudes Scientifiques* te Bures sur Yvette in Frankrijk. In 1972 werd hij benoemd tot hoogleraar Zuivere Wiskunde, in het bijzonder de differentiaaltopologie, dynamische systemen en chaostheorie aan de Rijksuniversiteit Groningen, waar hij tot zijn emeritaat in 1999 heeft gewerkt.

*Bron: www.rug.nl/wiskunde/nieuws/actueel/fwnActueel/archief/archief2005*

### Semantische congruentie bij apen

Mensen en rhesusapen vertonen een opmerkelijke overeenkomst in de manier waarop ze hoeveelheden ordenen. Dat is de conclusie van een onderzoek uitgevoerd door neurowetenschappers Jessica Cantlon en Liz Brannon van Duke University te Durham (VS). Zowel mensen als rhesusapen blijken *semantische congruentie* te vertonen, het verschijnsel dat we bij het vergelijken van twee hoeveelheden uit twee kleine hoeveelheden makkelijker de kleinste van de twee vinden en uit twee grote hoeveelheden sneller de grootste. Zo geven mensen sneller antwoord op de vraag 'Wat is kleiner, een mier of een rat?', dan op de vraag 'Wat is groter, een mier of een rat?' en op soortgelijke wijze is de vraag 'Wat is groter, een koe of een olifant?' voor ons makkelijker te beantwoorden dan 'Wat is kleiner, een koe of een olifant?'

In de tests, gebruikt om dit verschijnsel bij apen aan te tonen, worden twee groepen stippen aan rhesusapen op een scherm getoond en afhankelijk van de achtergrondkleur van het scherm, moeten ze de grootste (blauw) of kleinste (rood) groep aanwijzen.

Omdat het effect van semantische congruentie ook bij de apen aanwezig bleek, concludeerden de onderzoekers dat het geen taalgebonden effect is, hoewel dit voorheen wel gedacht werd. *Bron: www.kennislink.nl*

### Deltawis website

Op vijf november 2005 is de website van *DeltaWis* geopend. Deltawis is een samenwerkingsverband dat initiatieven op reken- en wiskundegebied wil genereren en coördineren. Tot dit doel brengt ze actief groepen bijeen zoekt ze naar projecten die de visie van het *Platform Beta Techniek* ondersteunen. Zowel Deltawis als dit platform zijn van mening dat wiskunde essentieel is voor de ontwikkeling van peuter en kleuter tot volwassene. Zeer belangrijk hierbij is dat kinderen al vroeg kennismaken met bèta en techniek, dat het wiskunde- en rekenonderwijs en ook de wiskundestudie aantrekkelijk zijn, maar ook dat het niveau, de kwaliteit van opleiding en de betrokkenheid bij het vervolgniveau van docenten goed is, alsmede dat het carrièreperspectief in de maatschappij of wetenschap duidelijk is. *Bron: www.fi.uu.nl/deltawis*

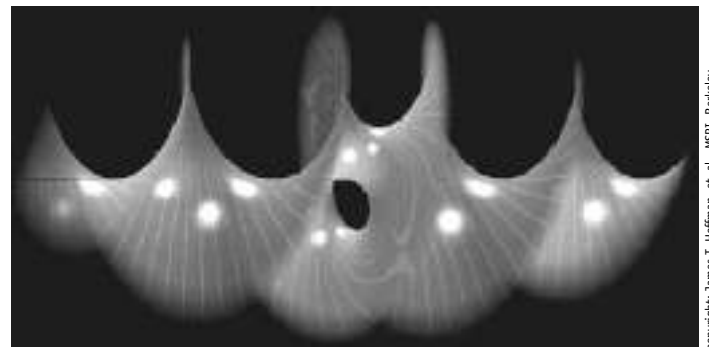
### Minimaal met een handvat

Wiskundigen Matthias Weber, David Hoffman en Michael Wolf hebben aangetoond dat er een oneindige familie bestaat van volledige ingebedde oppervlakken van geslacht één met eindige topologie en oneindige kromming. Dit zijn dus oppervlakken met gemiddelde kromming gelijk aan nul, ook wel minimale oppervlakken genoemd, zonder rand of zelfdoorsnijdingen, homeomorf aan een compact oppervlak minus een eindig aantal punten, met oneindige kromming en één handvat.

Een bekend voorbeeld van minimale oppervlakken in de natuur, is een zeepfilm tussen ijzerdraadjes. Sinds Meusnier (1776) waren het platte vlak, de catenoïde en de helicoïde de enige bekende volledige ingebedde minimale oppervlakken. Deze zijn allen van geslacht nul. Afgezien van het sinds de jaren tachtig bekende Costa-oppervlak bestond er nog geen dergelijk oppervlak van geslacht één. Het resultaat van Weber, Hoffman en Wolf opent nieuwe mogelijkheden voor toekomstig onderzoek naar exotische minimale oppervlakken.

Een grote website met veel grafische representaties en animaties van minimale oppervlakken is [www.msri.org/about/sgp/jim](http://www.msri.org/about/sgp/jim).

*Bron: www.sciencenews.org/articles/20051217/bob9.asp*



Een helicoïde van geslacht één

# Van het KWG

| KWG activities

## Algemene Ledenvergadering van het KWG

De 229ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap zal worden gehouden op dinsdag 28 maart 2006 tijdens het 42ste Nederlands Mathematisch Congres te Delft.

### 1 Agenda

- 1 Opening
- 2 Verslag van de 228ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap
- 3 Mededelingen
- 4 Besprekingen van de jaarverslagen over 2005. De hier ontbrekende verslagen worden ter vergadering uitgereikt.
  - a. Verslag van de Secretaris
  - b. Verslag van de Penningmeester
  - c. Verslag van de Kascommissie
  - d. Verslag van het Nederlands Mathematisch Congres
  - e. Verslag van de Inspecteur der Boekerij
  - f. Verslag van de Publicatiecommissie
  - g. Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde
  - h. Verslag van de Archivaris
  - i. Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen
  - j. Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde
- 5 Begroting 2006
- 6 Vaststelling contributie voor 2007
- 7 Samenstelling Kascommissie 2006
- 8 Samenstelling van het Bestuur  
Drs. M. Kamminga treedt statutair af als bestuurslid en prof.dr. J. van Mill als voorzitter. Het bestuur stelt prof.dr. H.W. Broer voor als opvolger van Van Mill. Van Mill wordt ondervoorzitter.  
De overige leden van het bestuur zijn:
  - dr. W. Bosma (RU), webmaster
  - dr. S.A.J. Dekkers (UU), penningmeester
  - dr. K.P. Hart (TU Delft), publicaties
  - dr.ir. H.J.J. te Riele (CWI), secretaris, archivaris en inspecteur der boekerij
  - dr. V. Rottschäfer (UL), contacten met studenten en ITW
- 9 Stichting Epsilon
- 10 Digitalisering NAW
- 11 Rondvraag
- 12 Sluiting

### 2 Ad punt 2 van de Agenda

Hieronder volgen de notulen van de 228ste Algemene Ledenvergadering, tezamen met de bijbehorende verslagen die niet eerder gepubliceerd zijn: het financieel verslag over 2004 en begroting 2005, en het verslag van de kascommissie over 2004.

#### 2.1 Notulen van de 228ste Algemene Ledenvergadering van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, gehouden tijdens de 'Joint BeNeLuxFra Conference in Mathematics' te Gent, op zaterdag 21 mei 2005.

De vergadering werd bijgewoond door 19 leden.

##### 1. Opening

De voorzitter opent de vergadering om 13.30 uur en heet de aanwezigen welkom, in het bijzonder het erelid Cor Baayen. De secretaris heeft bericht van verhindering ontvangen van de (uitgenodigde) ereleden Van der Blij, De Bruijn en Korevaar.

##### 2. Mededelingen

*Data Nederlands Mathematisch Congres* De voorzitter deelt mee dat NMC2006 in Delft zal worden gehouden [inmiddels vastgestelde data: 27

*Rubriek met mededelingen van het Koninklijk Wiskundig Genootschap. Tevens worden hier de notulen van de Algemene Ledenvergadering gepubliceerd.*

en 28 maart 2006], en NMC2007 in Leiden. Delft en Leiden werken samen bij de organisatie van deze twee congressen. KP (Hart) deelt mee dat tijdens NMC2006 aandacht zal worden besteed aan het vijftigjarig bestaan van de opleiding wiskunde en het vijftientwintigjarig bestaan van de opleiding informatica aan de TU Delft. In 2008 zal het NMC, met de dan op het programma staande Brouwer- en Beegerlezingen, worden ondergebracht in het Fifth European Congress of Mathematics, dat van 14–18 juli 2008 in de RAI te Amsterdam zal worden gehouden.

*Digitaliseren NAW* Het bestuur onderzoekt mogelijkheden om het Nieuw Archief voor Wiskunde te digitaliseren.

*Uitreiking 'Zaalbokaal'* Jaap Top (een van de twee hoofdredacteuren van het NAW) deelt mee dat de redactie van het NAW in overleg met het bestuur heeft besloten een wisselprijs in te stellen voor het beste artikel dat in een bepaalde jaargang van het NAW is verschenen, te beginnen in 2004. Als naam is gekozen: 'Zaalbokaal', als eerbetuiging aan Chris Zaal voor zijn rol bij het opzetten en vormgeven van de zo succesvolle vijfde serie van het NAW. De Zaalbokaal voor 2004 is gewonnen door Marjan Sjerps van het Nederlands Forensisch Instituut in Rijswijk voor haar artikel *Forensische statistiek* (NAW 5/5, nr. 2, p. 106–111). De prijs is een sculptuur van een Pythagoreïsche boom, ontworpen door Koos Verhoeff uit Valkenswaard (zoals afgebeeld op het programmaboekje van NMC2001, gehouden aan de VU te Amsterdam). Omdat de auteur verhinderd was de prijsuitreiking bij te wonen, werd de bokaal symbolisch aan Chris Zaal overhandigd, die plechtig beloofde hem door te zullen geven aan de eerste winnaar. Hij beschouwt de vijfde serie van het NAW als een initiatief om goede artikelen over ontsluiting van de wiskunde te publiceren. Hij citeert uit het jury-rapport over het artikel van Sjerps: "Nu steeds meer sporentechnieken, van DNA-analyse tot oorafdruk, beschikbaar komen, en ook vaker verschillende vormen van bewijs beschikbaar zijn, neemt het belang van dit vakgebied toe, haakt Sjerps aan bij de actualiteit. [...] Volgens de auteur en anderen is juist in de forensische statistiek een grote rol weggelegd voor Bayesiaanse statistiek, met een nadruk op bewijskracht van gegevens, en niet op absolute kansen. In het artikel legt Sjerps de basis uit, benoemt ze essentiële vragen, en geeft ze veel voorbeelden, mogelijke redeneerfouten, en zelfs een kader met een lezersvraag."

3. *Verslag van de 227ste Algemene Ledenvergadering*  
Dit verslag wordt goedgekeurd.

#### 4. *Bespreking van de jaarverslagen over 2004*

De verslagen over 2004 worden besproken en goedgekeurd (de verslagen van de secretaris, van het 40ste NMC te Tilburg, van de Inspecteur der Boekery, van de Publicatiecommissie, van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, van de Archivaris, van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen en van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde zijn gepubliceerd in het Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, jaargang 6, nummer 1, p. 13–16; de verslagen van de penningmeester (uitgereikt ter vergadering) en van de Kascommissie (tijdens de vergadering getoond op een overhead sheet) zijn hieronder opgenomen.

#### 5. *Financieel jaarverslag 2004 en Begroting 2005*

De penningmeester licht de stukken toe. Het grote aantal debiteuren aan het begin van 2004 wordt veroorzaakt door de betalingen die dan nog voor de december 2003-uitgave van het NAW moeten worden gedaan. De inkomsten uit contributies zijn ongeveer € 8000 lager dan begroot. Dit heeft de volgende technische oorzaak: tot 2003 werden deze inkomsten geboekt in het jaar waarop ze betrekking hadden. Omdat de beheerder van het abonneebestand, die ook de contributies int, niet kan garanderen dat de hiervoor benodigde cijfers tijdig vóór de jaarvergadering beschikbaar zijn, zullen met ingang van 2004 de contributies worden geboekt in het jaar waarin ze binnenkomen. Dit leidt eenmalig tot € 9000 lagere inkomsten uit contributies.

Het aantal leden op 1 mei 2005 bedroeg 1303, een vermindering van 28 ten opzichte van ongeveer een jaar geleden. Daar staat tegenover dat in die periode een aantal aio's/oio's/studentleden (die korting genieten) gewoon lid (zonder korting) zijn geworden. Terugloop van ledenaantallen is een bekend verschijnsel en schijnt bij het KWG betrekkelijk laag te zijn, vergeleken met andere beroepsverenigingen.

De resultatenrekening 2004 laat een positief saldo zien van ruim € 13.000. Deze, en de begroting voor 2005, worden goedgekeurd.

#### 6. *Vaststelling contributie voor 2006*

De contributie voor 2006 wordt als volgt vastgesteld (dat wil zeggen, de contributie voor 2006 blijft ongewijzigd ten opzichte van 2005, maar er wordt een categorie 'werkloze leden' toegevoegd):

|                                   |      |
|-----------------------------------|------|
| gewone leden:                     | € 70 |
| gepensioneerde en werkloze leden: | € 35 |
| aio/oio's en studenten:           | € 25 |

KWG-leden betalen slecht € 20 voor het lidmaatschap van de European Mathematical Society.

Voor KWG-leden die buiten Nederland maar in Europa wonen wordt € 5 portokosten in rekening gebracht; zij die buiten Europa wonen betalen € 7,50 portokosten.

#### 7. *Samenstelling Kascommissie 2005*

De vergadering gaat akkoord met het voorstel om de samenstelling van de Kascommissie 2005 ongewijzigd te laten ten opzichte van die van de Kascommissie 2004 (dr. L. Florack (UU) en dr. M. Knaap (Shell)).

#### 8. *Samenstelling van het Bestuur*

Drs. A.C. Kik treedt af als bestuurslid. De voorzitter dankt mevrouw Kik (verhinderd aanwezig te zijn) voor het vele werk dat zij als PR-commissaris voor het genootschap heeft verricht. Als nieuw lid draagt het bestuur voor: dr. W. Bosma (RU). Dit voorstel wordt bij acclamatie aangenomen. De samenstelling van het bestuur is nu als volgt:

dr. W. Bosma (RU), lid  
prof.dr. H.W. Broer (RUG), vice-voorzitter  
dr. S.A.J. Dekkers (UU), penningmeester  
dr. K.P. Hart (TU Delft), publicaties  
drs. M. Kamminga (Noordelijke Hogeschool Leeuwarden), contacten met leraren  
prof.dr. J. van Mill (VU), voorzitter  
dr.ir. H.J.J. te Riele (CWI), secretaris, archivaris en inspecteur der boekerij  
dr. V. Rottschäfer (UL), contacten met studenten

#### 9. *Epsilon uitgeverij*

Het bestuur onderzoekt de mogelijkheden voor nauwere samenwerking met de Epsilon uitgeverij.

#### 10. *Statutenwijzigingen*

Er zijn geen op- of aanmerkingen binnengekomen over de voorgenomen statutenwijzigingen. Na enige discussie over de zittingstermijn van de voorzitter (twee jaar) keurt de vergadering de statutenwijzigingen goed. De secretaris zorgt voor bekrachtiging bij een notaris. Samenstelling commissie: dr. S.A.J. Dekkers (UU), dr.ir. H.J.J. te Riele (CWI), mr.drs. M.Y. van der Heijden (CWI).

#### 11. *Rondvraag*

Mevrouw N.C. Verhoef vraagt wat het KWG doet om leraren als lid te werven. Geantwoord wordt dat het KWG bij een aantal bijeenkomsten voor wiskunde-leraren een informatiestand heeft (zoals bij het Jaarcongres en de Nationale Wiskunde Dagen van de NVvW, en bij het Wintersymposium van het KWG) en dat is overwogen om alle leraren wiskunde een brief te sturen met daarbij een presentie-exemplaar van het NAW, maar dat dat idee als te duur is verworpen. Als alternatief wordt voorgesteld zo'n brief aan alle *secties wiskunde van de scholen* te sturen. Chris Zaal raadt aan om in die brief nog eens duidelijk de mogelijkheden voor (reciprociteits-)korting op de lidmaatschapsbijdrage voor leraren uit de doeken te doen. Het bestuur neemt deze suggesties over.

#### 12. *Sluiting*

De voorzitter sluit de vergadering om circa 14.30 uur.

## 2.2 Financieel verslag 2004 en begroting 2005

Het jaarverslag over 2004 is op dezelfde manier tot stand gekomen als dat over 2003. Dit jaarverslag heeft betrekking op de financiën van het KWG en, daarbinnen, het Nieuw Archief voor Wiskunde (NAW).

Anders dan eerder aangekondigd is het financieel overzicht van Pythagoras

| ACTIVA                         | €          | PASSIVA                    | €          |
|--------------------------------|------------|----------------------------|------------|
| <b>Vlottende activa</b>        |            | <b>Vreemd vermogen</b>     |            |
| <i>Vorderingen:</i>            |            | <i>Crediteuren:</i>        |            |
| Vorderingen op Pythagoras      | 16.453,10  | Pythagoras                 | 21.154,61  |
| Overige debiteuren totaal      | 24.084,40  | Overige crediteuren totaal | 56.533,50  |
| Deelname Epsilon Uitgaven      | 7.021,26   |                            |            |
| <i>Liquide middelen:</i>       |            | <b>Eigen vermogen</b>      |            |
| Postbank                       | 40.344,03  | Algemene reserve           | 19.966,32  |
| ABN AMRO                       | 11.778,19  |                            |            |
| <b>Vaste activa</b>            |            |                            |            |
| <i>Financiële vaste activa</i> |            |                            |            |
| Aandelen                       | 3.028,59   |                            |            |
| Postbank Kapitaalrekening      | 86.372,43  |                            |            |
| ABN AMRO Kapitaalmarktindex    | 64.443,49  | Kapitaal begin 2004        | 155.871,06 |
|                                | 253.525,49 |                            | 253.525,49 |

Tabel 1 Beginbalans 2004

| ACTIVA                          | €          | PASSIVA                    | €          |
|---------------------------------|------------|----------------------------|------------|
| <b>Vlottende activa</b>         |            | <b>Vreemd vermogen</b>     |            |
| <i>Vorderingen:</i>             |            | <i>Crediteuren:</i>        |            |
| Pythagoras                      | 6.474,51   | Pythagoras                 | 4.701,51   |
| Debiteuren                      | 12.004,45  | Overige crediteuren totaal | 55.086,85  |
| Deelname Epsilon Uitgaven       | 6.762,17   |                            |            |
| <i>Liquide middelen:</i>        |            | <b>Eigen vermogen</b>      |            |
| Postbank                        | 41.683,34  | Algemene reserve           | 19.966,32  |
| ABN AMRO                        | 23.700,14  |                            |            |
| <b>Vaste activa</b>             |            |                            |            |
| <i>Financiële vaste activa:</i> |            |                            |            |
| Aandelen                        | 3.097,40   |                            |            |
| Postbank Kapitaalrekening       | 88.467,79  |                            |            |
| ABN AMRO Kapitaalmarktindex     | 66.586,07  | Kapitaal eind 2004         | 169.021,19 |
|                                 | 248.775,87 |                            | 248.775,87 |

Tabel 2 Eindbalans 2004

niet met dat van het KWG geïntegreerd. Dit zal ook in de nabije toekomst niet gebeuren.

#### Balans begin 2004

Tabel 1, de beginbalans 2004, is identiek aan de eindbalans 2003 zoals gepubliceerd in het financieel jaaroverzicht 2003.

#### Balans eind 2004

Tabel 2 geeft de balans over 2004.

#### Resultatenrekening

Het eigen vermogen van het KWG is in 2004 met € 13.150,13 toegenomen, zie tabel 3. Dit resultaat is gedeeltelijk terug te voeren op eenmalige baten, ter hoogte van € 3.310,36. Voor een gedetailleerd overzicht, zie tabel 4. Hier staat tegenover dat door een verandering in de wijze waarop inkomsten uit contributies geboekt worden, de inkomsten uit contributies in 2004 eenmalig circa € 9.000 lager uitvallen, zie de toelichting bij de baten over 2004. Na correctie hiervoor bedraagt het resultaat over 2004 circa € 18.800.

#### Toelichting bij de balansposten deelname Epsilon Uitgaven en aandelen

1. Epsilon Uitgaven betaalde in 2004 € 259,09 aan aflossing (en 10% daarvan,

€ 25,91, aan rente), waardoor de deelname in Epsilon Uitgaven gedaald is tot € 6.762,17, zie tabel 5. De eindafrekening over 2004 is begin 2005 binnengekomen, en zal worden verrekend op de eindbalans 2005.

2. De aandelenportefeuille is per ultimo 2004 samengesteld uit 172,0777 aandelen Rolinco à € 18,00, met een totale waarde van € 3.097,40, zie tabel 6.

#### Begroting en kosten 2004 en begroting 2005

Tabel 7 toont de begrote en werkelijke kosten over het boekjaar 2004, en de begrote kosten voor 2005.

Ad 4125: In het boekjaar 2004 werden ten bate van het NAW de volgende betaalde functies vervuld:

- Eindredacteur, 0,2 fte
- Bureauredactie, twee maal 0,2 fte
- Bladmanager, 0,3 fte

Ad 4151: Het betreft hier het netto door het KWG aan portokosten bestede bedrag. De door het CWI betaalde porti voor ruilabonnementen bedroegen in 2004 € 2.569,67. Daarnaast kwam in 2004 eenmalig het door het CWI verschuldigde bedrag voor portokosten in de tweede helft van 2002 binnen. Het ging hierbij om € 807,80.

Ad 4154: Dit bedrag is besteed aan het opnieuw ontwerpen van de poster. Dit was nodig na de naamsverandering van WG naar KWG.

|                         | €          |
|-------------------------|------------|
| Kapitaal eind 2003      | 155.871,06 |
| Resultaat boekjaar 2004 | 13.150,13  |
| Kapitaal eind 2004      | 169.021,19 |

Tabel 3 Resultatenrekening 2004

|                                     | €        |
|-------------------------------------|----------|
| Bijdrage CWI in portokosten 2002    | 807,80   |
| Sponsoring Brouwer plaque 2003      | 1.000,00 |
| Vrijval reservering salarissen 2001 | 1.502,59 |
| Totaal                              | 3.310,36 |

Tabel 4 Eenmalige baten in 2004

|                                      | €        |
|--------------------------------------|----------|
| Deelname Epsilon Uitgaven begin 2004 | 7.021,09 |
| Af: afgelost door Epsilon Uitgaven   | -259,09  |
| Deelname Epsilon Uitgaven eind 2004  | 6.762,17 |

Tabel 5 Mutaties deelname in Epsilon Uitgaven

|                                | €        |
|--------------------------------|----------|
| Aandelen begin 2004            | 3.028,59 |
| Bij: dividend en herwaardering | 68,81    |
| Aandelen eind 2004             | 3.097,40 |

Tabel 6 Mutaties aandelenportefeuille

Ad 4155: Dit betreft het netto aandeel van het KWG in de vergaderkosten. De UU vergoedt, als onderdeel van het instituutslidmaatschap, een deel van de vergaderkosten, te weten € 600,00. Het KWG heeft het afgelopen jaar een aantal keren in Zwolle vergaderd, om de reistijd voor bestuursleden uit Friesland en Groningen te beperken. Deze kosten worden niet vergoed door de UU. Dit verklaart de stijging van de vergaderkosten in 2004.

Ad 4160: Voor 2005 is de aanschaf van twee nieuwe computers voor het NAW voorzien. Daarnaast is in 2005 de post declaraties onder overige kosten ondergebracht.

Ad 4161: In 2004 heeft een afvaardiging namens het KWG de vergadering van de EMS voorafgaand aan het *European Congress of Mathematics* bijgewoond. Daarnaast zijn onkosten gemaakt bij de inventarisatie van de mogelijkheden van een overname van Epsilon Uitgaven door het KWG. Per 2005 is de post declaraties ondergebracht onder overige kosten (4160).

Ad 4170, 4725, 4726: Het KWG heeft in 2004 de volgende sponsorbijdragen verstrekt:

- Nationale Wiskunde Dagen: € 200
- Stichting Vierkant: € 10.000
- Kaleidoscoopdag Abacus: € 500,00
- NMC 2004: € 1.284,00
- Wintersymposium 2004: € 2.017,39
- Najaarssymposium 2004: € 240,00

Voor 2005 worden vergelijkbare uitgaven voorzien. Voor het Belgisch-Nederlands-Luxemburgs-Frans congres is € 2.500 toegezegd. Daarnaast draagt het KWG bij aan de aanstelling van de nationale PR medewerker wiskunde, en ondersteunt het KWG de dit jaar voor het eerst te houden Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade.

In 2004 is € 1.000,00 binnen gekomen aan sponsoring voor de in 2003 geplaatste plaque op het graf van Brouwer.

De sponsoring voor Stichting Vierkant wordt gedekt door een tweetal insti-

tuutslidmaatschappen.

De kosten voor het wintersymposium zijn in verband met de vernieuwde opzet van het symposium hoger dan in voorgaande jaren.

Ad 4200: De premie voor de bestuursverzekering voor de periode 1 december 2002 – 1 december 2004 is ten laste gebracht van het boekjaar 2004, zoals begroot.

Ad 4251: De factuur betreffende de afdracht aan de EMS over 2005 is begin 2005 gearriveerd.

### Begroting en baten 2004 en begroting 2005

Ad 5150: Het KWG had op 1 mei 2005 1303 leden, tegenover 1331 leden op 1 april 2004. De inkomsten uit contributies zijn aanzienlijk lager dan begroot. Dit heeft een technische oorzaak: tot 2003 werden deze inkomsten geboekt in het jaar waarop ze betrekking hadden. Omdat de beheerder van het abonneestbestand, die ook de contributies int, niet kan garanderen dat de hiervoor benodigde cijfers voor de jaarvergadering beschikbaar zijn, zullen met ingang van 2004 contributies worden geboekt in het jaar dat deze bij het KWG binnenkomen. Dit leidt eenmalig tot lagere inkomsten uit contributies. Uit de ledenadministratie blijkt dat het gaat om ongeveer € 9000. De op basis van het ledenbestand per 1 mei 2005 berekende inkomsten uit contributies bedragen € 89.100 per jaar.

Ad 5151: Alleen de structurele inkomsten uit het structurele Godefroy-legaat zijn begroot.

Ad 5153: De werkelijke advertentie inkomsten zijn hoger dan begroot, en hoger dan in 2003 (2003: € 6.546,59). De begroting voor 2005 is gebaseerd op reeds afgesloten contracten en een schatting voor nog af te sluiten contracten.

Ad 5154, 5155, 5160: In 2001 is een hoger bedrag voor salarissen begroot dan nodig. Het verschil (€ 1.502,59) is in 2004 vrijgevallen. Een tweede belangrijke post binnen de rubriek overige baten zijn vergoedingen door recensenten van de kosten van niet voor de recensie rubriek in het NAW besproken boeken (€ 527,00).

Ad 5156: Deze contributies worden aangewend voor sponsoring van stichting Vierkant. Contributies van instituutsliden die ten goede komen aan Pythagoras en bijdragen in natura komen op deze begroting niet voor. In 2004 waren instituutslid: het CWI, EURANDOM, Technische Universiteit Delft, Rijksuniversiteit Groningen, Technische Universiteit Eindhoven, Universiteit van Amsterdam, Universiteit Leiden, Universiteit Utrecht, Vrije Universiteit. Katholieke Universiteit Nijmegen en Universiteit Twente.

Ad 9090: De rente wordt geboekt in het jaar waarin deze binnenkomt, niet in het jaar waarop deze betrekking heeft.

### Samenvatting

Hoewel in 2004 de inkomsten door een wijziging in de verwerking van inkomsten uit contributies eenmalig lager uitvielen dan begroot, is nog steeds sprake van een structureel positief resultaat. Voor 2005 wordt dan ook opnieuw een positief resultaat voorzien. Dit biedt de vereniging de komende jaren financiële ruimte voor het ontplooiën van nieuwe initiatieven.

*Utrecht, 8 mei 2005*

*Dr. S.A.J. Dekkers, penningmeester*

### 2.3 Verslag van de Kascommissie 2004

De kascommissie verklaart hierbij het financiële verslag van de penningmeester over het boekjaar 2004 te hebben gecontroleerd. Na inzage van de boeken en verdieping in de gevoerde boekhouding kon worden geconstateerd dat het verslag een getrouw beeld geeft van de financiële situatie van het Koninklijk Wiskundig Genootschap.

*Utrecht, 17 mei 2005*

*De Kascommissie 2004, L.M.J. Florack, M.C. Knaap*

## 3 Ad punt 4 van de Agenda

### 3.1 Verslag van de Secretaris

**3.1.1 Leden** Het genootschap had op 1 januari 2006 vijf ereleden (P.C. Baayen, F. van der Blij, N.G. de Bruijn, J. Korevaar en J.A.C. de Rijk) en 1248 leden,

| grootboekrek. nr. | omschrijving       | begroot 2004 (€) | werkelijk 2004 (€) | begroot 2005 (€) |
|-------------------|--------------------|------------------|--------------------|------------------|
| 4125              | Salarissen         | 33.000           | 33.678,47          | 34.000           |
| 4151              | Porti              | 6.000            | 5.024,18           | 6.000            |
| 4152              | Drukkosten         | 21.000           | 20.875,13          | 21.500           |
| 4153              | Ontwerpkosten      | 6.600            | 6.415,76           | 6.600            |
| 4154              | PR/Reclame         | 1.500            | 1.052,70           | 1.000            |
| 4155              | Vergaderkosten     | 150              | 1.386,91           | 1.500            |
| 4158              | Ledenadministratie | 2.500            | 2.338,35           | 2.500            |
| 4160, 4725        | Overige kosten     | 3.250            | 1.957,98           | 4.500            |
| 4161              | Declaraties        | 2.500            | 2.315,60           | 0                |
| 4170, 4727        | Sponsoring         | 20.000           | 13.241,39          | 20.000           |
| 4200              | Verzekering        | 400              | 401,25             | 400              |
| 4251              | Afdracht EMS       | 1.100            | 1.080,00           | 1.150            |
| 4252              | Afdracht IM        | 1.900            | 1.636,38           | 1.700            |
| 4253              | Afdracht IMU       | 750              | 750,00             | 750              |
| 4980, 9152        | Bankkosten         | 100              | 116,92             | 100              |
|                   | Totaal             | 100.750          | 92.271,02          | 101.700          |

Tabel 7 Resultatenrekening 2004 en begroting 2005: kosten

| grootboekrek. nr.      | omschrijving                | begroot 2004 (€) | werkelijk 2004 (€) | begroot 2005 (€) |
|------------------------|-----------------------------|------------------|--------------------|------------------|
| 5150, 5121, 5251, 5252 | Contributies KWG-leden      | 88.300           | 80.399             | 88.000           |
| 5151                   | Legaten en donaties         | 200              | 222,12             | 200              |
| 5153                   | Advertenties                | 6.500            | 7.778,20           | 7.500            |
| 5154, 5155, 5160       | Overige baten               | 0                | 2.225,64           | 0                |
| 5156                   | Contributies instituutleden | 10.000           | 10.000             | 10.000           |
| 5157                   | Contributies bedrijfsleden  | 1.000            | 500                | 1.000            |
| 9052, 9090             | Rente                       | 5.000            | 4.296,19           | 4.500            |
|                        | Totaal                      | 111.000          | 105.421,15         | 111.200          |

Tabel 8 Resultatenrekening 2004 en begroting 2005: baten

van wie 171 gebruik maakten van het tarief voor gepensioneerden, 156 van het reciprociteitstarief, en 97 van het studenttarief. Eén lid had een introductielidmaatschap en veertig leden waren lid van de European Mathematical Society.

**3.1.2 Epsilon uitgeverij** In de loop van 2004 is het genootschap bij monde van de voorzitter en de penningmeester onderhandelingen gestart met de eigenaar van Epsilon Uitgaven, prof.dr. F. Verhulst, die in mei 2005 hebben geleid tot de beslissing van het bestuur om per 1 januari 2006 over te gaan tot aankoop van de uitgeverij. Bij deze onderhandelingen werd het bestuur bijgestaan door twee adviseurs, namelijk prof.dr. J. Oosterhoff en dr.ir. A.H.P. van der Burgh. Voor de aankoop is op 5 juli 2005 de Stichting Epsilon opgericht. In het bestuur hiervan zijn het KWG met drie personen en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars met één persoon vertegenwoordigd. Een vijfde persoon heeft verder zitting als vertegenwoordiger van *beide* besturen. Doel van deze stichting is het "bevoornden van de belangstelling voor, en de beoefening van, de exacte wetenschappen, in het bijzonder de wiskunde en haar toepassingen". De belangrijkste activiteit om dit doel na te streven is "het uitgeven van laaggeprijsde boeken, tijdschriften en andere publicaties als regel in de Nederlandse taal". Op 28 juli 2005 heeft de Stichting Epsilon een voorlopige koopovereenkomst gesloten met de uitgeverij. Het voornemen van het bestuur om tot aankoop van de uitgeverij over te gaan is tijdens een extra Algemene Ledenvergadering op 5 oktober 2005 in Utrecht met grote meerderheid (27 stemmen vóór en 1 stem tegen) door de leden bekrachtigd.

**3.1.3 Digitalisering Nieuw Archief voor Wiskunde** Het bestuur heeft in het verslagjaar de mogelijkheden onderzocht om oude delen van het Nieuw Archief voor Wiskunde te gaan digitaliseren. Wegens de hieraan verbonden kosten zijn

hier nog geen concrete plannen uit voortgekomen.

**3.1.4 Verslag van het Najaarssymposium** Zie hiervoor het verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde, paragraaf 3.9.2.

**3.1.5 Verslag van de Kaleidoscoopdag** De Kaleidoscoopdag werd gehouden op 13 mei 2005 aan de TU Delft en werd georganiseerd door de Wiskunde en Informatica Studievereniging *Christiaan Huygens*. Het thema was: *Risk Analysis*. Het programma zag er als volgt uit:

- R.M. Cooke (toegepaste beslissonde, Technische Universiteit Delft), *Probabilistic Inversion and Microbiological Risk*
- M.R. Spalburg (Shell International Exploration and Production), *Some Examples of Oil Industry Risk Analysis*
- W. Aspinall (Aspinall & Associates), *Applications of Quantative Risk Analysis in the Four Elements*
- M. Kok (HKV Lijn in water), *Flood Risk Reduction*
- J.S. Evans (Harvard School of Public Health), *Public Health Impacts of Iraq's 1990 Invasion of Kuwait: Perspectives from Risk Assessment and Epidemiology*

**3.1.6 Verslag van het Wintersymposium** Het Wintersymposium werd gehouden op 7 januari 2006 in het Academieggebouw bij de Dom in Utrecht. Het thema was 'Financiële Wiskunde'. Sprekers waren:

- Michel Vellekoop (UT), *Opties, aandelen en een snuffe FC Twente*
- Herbert Rijken (VU), *Het nut van modelvorming in het gammavak financiering*
- Svetlana Borovkova (TU Delft), *Van exotische opties naar exotische onderlig-*

*genden: derivaten op het weer, catastrofes en elektriciteit*

Het symposium trok ongeveer tachtig belangstellenden. Een met foto's geïllustreerd verslag is te vinden op de website van het KWG onder 'wat doet het KWG'.

**3.1.7 Wiskunde Persdienst** Deze dienst, in 2002 gelanceerd door de wiskunde-webmasters en het KWG, is onderdeel van de website van het KWG en verzamelt en verspreidt wiskundig georiënteerd nieuws ([www.wiskgenoot.nl/wpd](http://www.wiskgenoot.nl/wpd)). Andere wiskundige websites in Nederland maken gebruik van deze informatie (bijvoorbeeld: [www.kennislink.nl](http://www.kennislink.nl) en de sites van Pythagoras en van het Freudenthal Instituut). In 2005 verschenen 52 berichten.

**3.1.8 PR-activiteiten** Het Genootschap heeft bij verschillende gelegenheden PR-activiteiten ontplooid, zoals tijdens het 41ste Nederlands Mathematisch Congres dat ondergebracht was in de 'Joint BeNeLuxFra Conference in Mathematics' te Gent (20–22 mei), bij evenementen zoals de Jaarvergadering/Studiedag en de Nationale Wiskunde Dagen van de NVvW, het Wintersymposium, de vakantiecurssussen van het CWI, de Wetenschapsdag en de Kaleidoscoopdag. Dit gebeurde veelal in samenwerking met het Nieuw Archief voor Wiskunde en Pythagoras. De bestaande WG-poster werd aangepast in verband met het verwerven van het predikaat 'Koninklijk'.

Ter ondersteuning van de PR-activiteiten werd promotiemateriaal gebruikt bestaande uit de KWG-poster, WG-folder, en WG-ansichtkaarten.

**3.1.9 Landelijke taakgroep wiskunde PR** Deze groep bestaat uit Jan van de Craats (OU en UvA), Vincent Jonker (Freudenthal Instituut, UU), Tom Koornwinder (UvA), Mark Peletier (TUE) en Chris Zaal (tot 1/9/05 Freudenthal Instituut, UU en daarna UvA) en opereert onder auspiciën van het KWG. De groep beschikt sinds 1 december 2004 over een parttime (0.2) PR-medewerker (Ionica Smeets) die tot taak heeft actief nieuws te vergaren op het gebied van wiskunde en haar toepassingen, en dit nieuws te redigeren en onder te brengen bij de website van Kennislink, de Wiskunde Persdienst en andere nieuwskanalen (kranten, tijdschriften, media). De aanstelling wordt voor tenminste twee jaar financieel mogelijk gemaakt door de onderzoekscholen Stieltjes en MRI, de Nederlands Vereniging van Wiskundeleraren, het Freudenthal Instituut, het STW-EW programma Wiskunde Toegepast, en het KWG.

### 3.2 Verslag van de Penningmeester

### 3.3 Verslag van de Kascommissie

### 3.4 Verslag van het 41ste Nederlands Mathematisch Congres

Het 41ste Nederlands Mathematisch Congres was in het verslagjaar ondergebracht in de 'Joint BeNeLuxFra Conference in Mathematics' te Gent, van 20–22 mei. Dit congres werd gehouden onder auspiciën van de nationale wiskundige genootschappen uit België (BMS), Nederland (KWG), Luxemburg en Frankrijk (SMF).

Tijdens dit congres vond de driejaarlijkse Brouwerlezing plaats. Deze werd verzorgd door Lucien Birgé van het Laboratoire de Probabilité, Université Paris VI. Na afloop van de lezing kreeg de spreker de Brouwermedaille overhandigd van de voorzitter van het KWG.

De overige plenaire sprekers waren: Frederic Campana (Université de Nancy), Yves Benoist (Ecole Normale Supérieure, Paris), Jan Willem Klop (Vrije Universiteit Amsterdam), en Françoise Point (FNRS en Université de Mons-Hainaut). Er waren daarnaast speciale sessies, getiteld: *Geometry*, *Applied Mathematics*, *Analysis*, *Miscellaneous* (*Computer Science* en *History of Mathematics*) en *Algebra*. Voorts was er een speciale sessie voor leraren, gewijd aan het OESO-project PISA (*Program for International Student Assessment*). In de avond waren er recreatieve voordrachten door Jean Doyen (Université Libre de Bruxelles) en Burkard Polster (Monash University, Melbourne).

Het aantal deelnemers bedroeg ongeveer honderdvijftig.

### 3.5 Verslag van de Inspecteur der Boekerij

In 2005 is een totaal van 26 nieuwe werken aan de boekencollectie toegevoegd,

voornamelijk bestaande series monografieën, dissertaties en rapporten. Deze werken werden als geschenk of in het kader van ruil ontvangen.

In 2005 is één tijdschrift ruil gestart:

- *Analele din Craiova Seria Mecanica* is ruil met: University of Craiova
- De volgende tijdschrift-ruilovereenkomsten zijn in het verslagjaar afgesloten. Enkele ruilpartners hebben aangegeven dat de afnemende wetenschappelijke inhoud en vooral het toenemend gebruik van de Nederlandse taal in het NAW een reden was de ruil te annuleren.
- *Computer Science Monographs* (nu online op [www.ism.ac.jp/editsec/csm](http://www.ism.ac.jp/editsec/csm)) was ruil met: Institute of Statistical Mathematics, Japan
- *Far East Journal of Mathematical Sciences* was ruil met: Far East Journal of Mathematical Sciences (ed.)
- *Latvijas Universitātes Zinātniskie Raksti* was ruil met: Latvian University Library
- *Mathematische Semesterberichte* was ruil met: Westfälische Wilhelms Universität
- *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences – Engineering* was ruil met: Estonian Academic Library
- *Publicaciones Matemáticas del Uruguay* was ruil met: Rodrigo Arocena (Editor PMU)
- *The Punjab University journal of mathematics* was ruil met: University of the Punjab, Department of mathematics
- *Webs & Quasigroups* was ruil met: Tver State University, Department of Mathematics
- *Uchenye Zapiski* was ruil met: Erevan State University – Central Library

*Herman te Riele, Inspecteur der Boekerij*

### 3.6 Verslag van de Publicatiecommissie

De publicatiecommissie werd in de herfst van 2000 ingesteld. Zij adviseert het bestuur inzake het publicatiebeleid en de aanstelling van hoofdredacties, en zij adviseert de hoofdredacties inzake alle organisatorische, financiële en technische aspecten betreffende de totstandkoming van de publicaties. De hoofdredacties zijn verantwoordelijk voor de inhoud van de publicaties; het bestuur draagt de algehele en in het bijzonder financiële verantwoordelijkheid.

De commissie bestond op 1 januari 2005 uit Fieke Dekkers, Klaas Pieter Hart (voorzitter), Jan van Mill, Rob Schrauwen en Chris Zaal. De commissie vergaderde twee maal met de hoofdredacteur van *Pythagoras* en de bladmanager (Reinie Ern ) van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en heeft tussentijds vele malen als aanspreekpunt of vraagbaak gediend.

Het instandhouden van de voorwaarden die nodig zijn voor het voortbestaan van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* in de huidige opzet en van *Pythagoras* blijft een belangrijke en soms moeilijke taak van de commissie. Net als vorige jaren dragen diverse wiskunde-instituten in het land via instituutslidmaatschappen in natura bij aan de personele lasten en enkele andere grote kostenposten bij met name de productie en verzending van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

Een blijvend punt van zorg is dat we als KWG alles tot aan de druk en de verzending zelf (willen) doen en dat het hele proces leunt op een paar goede, enthousiaste krachten die dit ieder jaar weer op basis van een tijdelijk contract doen. De commissie wil onderzoeken of er andere manieren zijn de medewerkers in dienst te houden en te betalen.

Van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* verscheen in 2005 deel 6 van de vijfde serie. De hoofdredactie, bestaande uit Jaap Molenaar en Jaap Top, heeft samen met de enthousiaste en bekwame eindredacteur Derk Pik en een zeer actieve bureauredactie en bladmanager ook vorig jaar weer vier fraaie nummers van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* weten uit te brengen.

Van *Pythagoras* verschenen in 2005 zes nummers, drie in de jaargang 44 en drie in de jaargang 45. Hoofdredacteur Marco Swaen en eindredacteur Alex van den Brandhof hebben samen met hun redactie een mooie jaargang met als thema *Topologie* (gastredacteur: Jan Aarts) afgesloten; jaargang 45 heeft als thema *Open problemen*, met Jan van de Craats als gastredacteur. In verband met het in 2006 aflopen van het contract van Marco Swaen en om na vijf jaar een frisse kijk op het blad te krijgen is een nieuwe hoofdredacteur gezocht en gevonden. Arnout Jaspers trad op 1 januari toe tot de redactie en zal na een inwerkperiode

op 1 september het hoofdredacteurschap overnemen. *Pythagoras* is financieel gezond, mits derden bereid blijven in de vorm van instituutslidmaatschappen bij te dragen in de kosten van hoofd- en eindredactie.

De vorig jaar genoemde overeenkomst met [www.kennislink.nl](http://www.kennislink.nl) is nog steeds van kracht; men kan aldaar een redelijk aantal artikelen uit het *Nieuw Archief voor Wiskunde* en *Pythagoras* raadplegen. *K.P. Hart, voorzitter Publicatiecommissie*

### 3.7 Verslag van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde

De Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde is een commissie van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. De leden zijn afkomstig uit het Wetenschappelijk Onderwijs, het Hoger en Middelbaar Beroepsonderwijs, het Voortgezet Onderwijs, de Inspectie van het Onderwijs en de Instituten binnen de Onderwijsverzorging.

**3.7.1 Samenstelling Commissie** De samenstelling van de NOCW is in 2005 veranderd. Vanaf medio 2005 bestaat de commissie uit de volgende leden (in alfabetische volgorde): F. Beukers, H. Broer, J.G.M. Donkers, F. Goffree, T. Goris, C.P. Hoogland, C.J. de Jonge, R. Kaenders, M. Kamminga, W. Kleijne, M. Kollenveld, J.M. Notenboom (penningmeester), D. Siersma (voorzitter), M. Steentjes (per 1-5-2005 secretaris), A. van Streun, T. Verhoeff, B. Zwaneveld.

**3.7.2 Activiteiten in het algemeen** De NOCW wil fungeren als platform voor alles wat met de rol van wiskunde in het onderwijs te maken heeft. Zo heeft de inhoud van het wiskundecurriculum in de verschillende profielen van het voorbereidend onderwijs ook in 2005 veel stof tot overleg gegeven. Mede door toedoen van de NOCW is een commissie van deskundigen samengesteld, de commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs (cTWO). Deze cTWO is onder andere in het leven geroepen om het contact tussen het ministerie, de profielcommissies (onder voorzitterschap van Veldhuis) en de wiskundewereld te verstevigen. Inmiddels is de commissie omgevormd tot een formele vernieuwingscommissie wiskundeonderwijs (zoals deze ook bestaan voor biologie, natuurkunde en scheikunde) en zal in overleg een gedetailleerde curriculumbeschrijving voor 2010 samenstellen. Daarnaast is er aandacht geschonken aan participatie in Deltapunt. Deltapunt heeft als doelstelling om 15% meer studenten in bètavakken te hebben in 2010. Enkele leden van de NOCW zijn aangesloten bij de commissie (DeltaWis) die zich daarmee bezig houdt.

**3.7.3 Nederlandse Wiskunde Olympiade** In 2005 is het aantal deelnemers aan de Wiskunde Olympiade nagenoeg gelijk gebleven aan dat van 2004: meer dan 2200 leerlingen. Op honderdvijftig scholen hebben de leerlingen in januari meegespeeld aan de eerste ronde. De scholenprijs die daarbij hoort, is gewonnen door het St. Ignatiusgymnasium in Amsterdam. Ruim honderd leerlingen hebben meegedaan aan de tweede ronde die, zoals gebruikelijk, in september in Eindhoven is gespeeld. De prijsuitreiking heeft op 11 november plaatsgevonden in Eindhoven. Naast de betaling van de kosten van deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade door OC&W zijn er verder bijdragen geleverd door het tijdschrift *Natuurwetenschap en Techniek*, het KWG, de TUE, het Cito, de NVvW en de Stichting Compositio Mathematica.

**3.7.4 Internationale Wiskunde Olympiade** In 2005 zijn bij de Internationale Wiskunde Olympiade in Mexico twee bronzen medailles en twee eervolle vermeldingen gewonnen.

**3.7.5 Wiskunde A-lympiade en Wiskunde-B-dag** De voorronde van de 17de A-lympiade is eind november. De belangstelling blijft groeien. Ook uit het buitenland groeit de deelname nog steeds. Bijna alle prijzen zijn bij de 16de A-lympiade door buitenlandse scholen gewonnen. In dezelfde geest als de A-lympiade is de wiskunde-B-dag opgezet: een wedstrijd tussen schoolteams door middel van internet. Eind november 2005 is de zevende editie.

**3.7.6 Kangoeroe Wedstrijd** In 2005 deden ruim 60.000 leerlingen mee aan de Kangoeroe Wedstrijd. De wedstrijd wordt georganiseerd voor het voortgezet onderwijs en de hoogste groepen van het basisonderwijs met drie verschillende

versies opgaven. De logistieke organisatie en administratie zijn in handen van Cito.

**3.7.7 Bevordering reken-/wiskundeonderwijs in Nederland** In haar mei-vergadering heeft de NOCW gesproken met vertegenwoordigers van diverse groeperingen, die tot doel hebben reken-/wiskundeonderwijs in Nederland te bevorderen (Vierkant, Kangoeroe, Wiskunde Olympiade, Universitaire Wiskunde Competitie, A-lympiade, Wiskunde B-dag, Wiskunde Scholenprijs, Nationale Wiskunde Dagen, Pythagoras en Ratio). Een gemeenschappelijke vraag is hoe voldoende middelen ter beschikking te krijgen voor het uitvoeren van hun verdienstelijke taken. De NOCW, die door diverse universiteiten wordt ondersteund, kan met haar beperkte budget slechts incidenteel bijdragen. Belangrijk is om meer structurele bronnen van inkomsten aan te boren.

**3.7.8 Vertegenwoordiging in ICMI** Het KWG wordt door het NOCW-lid W. Kleijne vertegenwoordigd in de International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), een commissie van de International Mathematical Union.

**3.7.9 PISA** Door de voorzitter van de NOCW werd tijdens de Joint BeNeLuxFra Conference in Mathematics in Gent een sectie georganiseerd over PISA (Programme for International Student Assessment) met bijdragen uit de diverse landen.  
*M. Steentjes, secretaris NOCW*

### 3.8 Verslag van de Commissie voor Persoonlijke Archieven van Wiskundigen

**3.8.1 Algemeen** De archieven onder beheer bij de CPAW, zijn, met uitzondering van Arch. 1 en Arch. 13, geplaatst bij het Rijksarchief in de Provincie Noord-Holland te Haarlem. Aldaar zijn zij voor onderzoek beschikbaar.

Het betreft de volgende archieven: Arch. 2 H.B.A. Bockwinkel (1881–1960); Arch. 3 R. Lijsdman; Arch. 4 G. Röhrman; Arch. 5 W.H.J. van der Stok; Arch. 6 H. Nyon; Arch. 7 L.W. Nieland (1901–1945); Arch. 8 T. van Aardenne-Ehrenfest (1905–1984), C.C.J. de Ridder en P. Ehrenfest jr. (1880–1933); Arch. 9 D.N. van der Neut (1904–1985); Arch. 10 een 60-tal foto's van wiskundigen; Arch. 11 C.G.G. van Herk (1900–1982); Arch. 12 J.H. Wansink (1894–1985); Arch. 14 H. Freudenthal (1905–1990); Arch. 15 D. van Dantzig (1900–1959); Arch. 16 N.H. Kuiper (1920–1994).

Arch. 1 W. Kapteyn (1849–1927), berust bij de bibliotheek van het Museum Boerhaave in Leiden (onder nr. Arch. 371).

Arch. 13 M.J. van Uven (1878–1959) berust nog bij het CWI.

**3.8.2 Activiteiten** De commissie is in het verslagjaar één keer bijeengeweeest, en wel op 24 februari 2005.

**3.8.3 Samenstelling van de CPAW per 31 december 2005** T. Koetsier (VU) voorzitter, M. Bakker (CWI) secretaris, G. Alberts (RU), D. Beckers (VU), G.J.A.M. Bolten (Rijksarchief Noord-Holland, Haarlem), H.W. Lenstra, jr. (UL en University of California, Berkeley)  
*Miente Bakker, secretaris CPAW*

### 3.9 Verslag van de Sectie Industriële en Toegepaste Wiskunde ([www.itw.nl](http://www.itw.nl))

**3.9.1 Bestuur** Eind 2005 heeft drs. A.T. Langeveld het voorzitterschap neergelegd. Het bestuur is nu als volgt samengesteld: prof.dr.ir. E.R. Fledderus (TNO ICT, TUE) voorzitter, prof.dr. J.M. Schumacher (UvT), dr. C. Kraaikamp (TU Delft), dr. R.M.J. van Damme (UT), prof.dr. R.D. van der Mei (CWI, VU), dr. F.P.H. van Beckum (UT) secretaris en penningmeester. Contactpersoon vanuit het KWG-bestuur is dr. V. Rottschäfer.

**3.9.2 Symposia** ITW organiseert jaarlijks twee symposia. Een is het Najaarssymposium van het KWG, dit jaar gehouden op 4 november onder de titel *Wiskunde in beweging* aan de VU in samenwerking met de Faculteit Bewegingswetenschappen. In zeven voordrachten zagen de circa veertig deelnemers behalve zorgvuldig gebruik van de klassieke mechanica ook toepassingen uit diverse gebieden van de wiskunde, waaronder bifurcaties, stochastische differentiaalvergelijkingen, optimalisatie en zelfs periodeverdubbeling. Het tweede symposium, *Wiskunde*

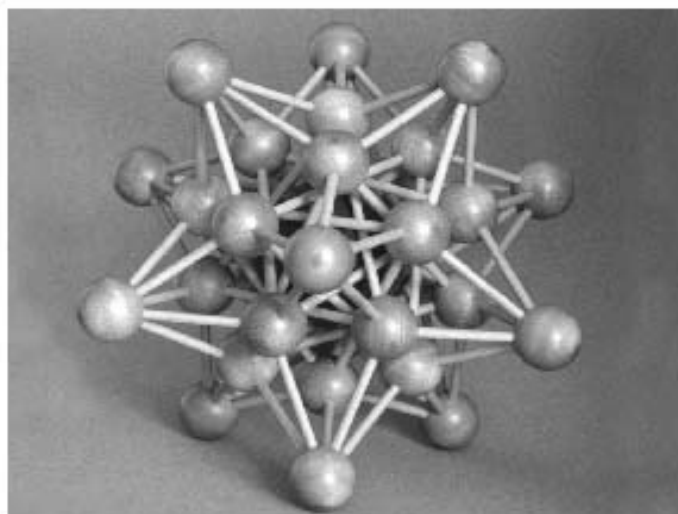
in documentbewerking, vond plaats bij Océ in Venlo, op vrijdag 27 mei. Het bestuur is hiermee de weg ingeslagen om voortaan het voorjaarssymposium de vorm te geven van een bedrijfsbezoek. Op de eerste plaats worden hierdoor de contacten met wiskundigen in industrie en dienstverlening aangehaald, wat een van de doelstellingen is van ITW. Maar tevens biedt een dergelijk bedrijfssymposium kansen voor studenten en aio's die zich willen oriënteren op een werkkring na afstuderen, respectievelijk promotie, voor docenten die hun lesstof willen verrijken met praktijkvoorbeelden, en voor onderzoeksgroepen die geïnteresseerd zijn in meer samenwerking met het bedrijfsleven.

**3.9.3 ITW-Nieuws** De redactie is versterkt. Naast wisseling in samenstelling betreft dit het aantrekken van personen die vanuit een tweede lijn aanvoer van kopij

verzorgen. Ook bestuursleden nemen hieraan deel. Doel is de verschijningsfrequentie van het blad spoedig weer op peil te brengen.

**3.9.4 SWI** De studiegroep Wiskunde met de Industrie (de zevende in Nederland) werd dit jaar gehouden aan de Vrije Universiteit, van 31 januari tot 4 februari, waar een aantrekkelijke verzameling vraagstukken werd gepresenteerd en onder handen genomen ([www.math.vu.nl/swi2005](http://www.math.vu.nl/swi2005)). ITW is de wiskundigen van de VU erkentelijk voor de organisatie van deze geslaagde activiteit, en voor de bijdrage die dit levert aan de beeldvorming van wiskunde in Nederland. In 2006, eveneens in week 5, heeft de SWI plaatsgevonden aan de TUE ([www.win.tue.nl/swi2006](http://www.win.tue.nl/swi2006)), en voor 2007 zal de Universiteit Utrecht de organisatie op zich nemen.

*F.P.H. van Beckum, secretaris Sectie ITW*



## Een intelligent (relatie)geschenk?

Deze Kepler-Poinsot ster van Aijen is een van de vele bijzondere objecten, puzzels en spellen gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica uit de Arabesk collectie. U vindt de volledige catalogus op internet:

**[www.arabesk.nl](http://www.arabesk.nl)**

ADRIUS CONDOYRIK 17 B - 3062 - SCHIEDAM  
TELEFOON: (010) 214 03 01 - FAX: (010) 214 03 60 - E-MAIL: [ARABESK@ARABESK.NL](mailto:ARABESK@ARABESK.NL)



## Het Paard

Haarlemmerdijk 173  
1013 KH Amsterdam  
tel 020-6241171  
[paard@xs4all.nl](mailto:paard@xs4all.nl)  
<http://www.xs4all.nl/~paard>

*De meest complete denksportwinkel*

Het Paard heeft:

- boeken, spellen en software op het gebied van Go, Schaken en Bridge.
- Vele andere denksporten, waaronder Shogi, Gipl, Set, Kantamino.
- Puzzels, zoals Rubik's cube, houten constructiepuzzels, breinbrekers, legpuzzels.
- Boeken over mathematische puzzels.
- Gezelschapspellen, zoals Kolonisten, Machiavelli, Kochandel.

Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidersgracht 24

1018 TV Amsterdam

craats@science.uva.nl

Column Lieve Maria

# Doorbraak en nieuwe kansen

**Vrijdag 13 januari hebben de gezamenlijke studieverenigingen voor wiskunde, natuurkunde en informatica een open brief gestuurd aan minister Van der Hoeven, waarin zij hebben gepleit voor meer en bovendien een ander soort wiskunde op het vwo. Wat de universiteiten en wiskundeleraren niet voor elkaar kregen, lukt de studenten wel: uitgebreide aandacht in de landelijke pers en een minister die luistert.**

We schrijven twee dagen voor de tweede termijn vergadering over de voorstellen tot de aanpassing van de vwo-profielen in 2007. Het vak wiskunde heeft bij de discussies in eerste termijn een belangrijke rol gespeeld, vooral dankzij de impoerende studentenactie *Lieve Maria*. In eerste instantie richtten de studenten hun pijlen vooral op de urenreductie in het voorstel: van 760 studielasturen (slu) in de huidige situatie voor wiskunde B12 naar 520 slu voor wiskunde B in het voorstel van de minister: "Wij zijn boos. Wij merken dat wij het universitaire niveau eigenlijk niet aankunnen. Er treden dagelijks situaties op waarbij we merken dat we te weinig wiskunde op de middelbare school hebben gehad. Daarom moeten wij nu bijspijkerscursussen volgen, of zelfs stoppen met onze studie. Wij horen het geklaag van onze docenten, maar wat kunnen wij eraan doen? Wij zouden willen dat we meer wiskunde hadden gehad op de middelbare school."

Zij drongen daarom aan op méér uren wiskunde in plaats van minder. Allengs werd echter duidelijk dat het werkelijke probleem vooral zit in de inhoud van het wiskunde-onderwijs. Zelfs met 760 slu is er de afgelopen jaren een levensgroot aansluitingsprobleem ontstaan, dat in de vele reacties op de website [www.LieveMaria.nl](http://www.LieveMaria.nl) breed werd uitgemeten. Waar het vooral aan schort, is elementaire reken- en formulevaardigheid en kennis van wiskundige basistechnieken. Instaptoetsen op de universiteit laten een schokkend gebrek aan vaardigheden op dit terrein zien, dat zich niet gemakkelijk door bijspijkerscursussen laat repareren. Bovendien is het natuurlijk van de gekke dat een vwo-diploma (waar staan die letters vwo ook al weer voor?) met wiskunde B1 of B12 geen adequate vooropleiding blijkt te zijn voor een universitaire studie in de bètavakken, de techniek, de econometrie en aanverwante richtingen.

De ongekend brede steun die de studentenactie binnen korte tijd verwierf, maakte indruk. De minister zegde een brief toe en raadpleegde een groot aantal vakdeskundigen en organisaties. De reductie naar 520 slu werd teruggebracht tot 600 slu,

maar belangrijker was dat zij in haar brief een uitgebreide probleemanalyse presenteerde alsmede voorstellen die ongekend gedetailleerd ingaan op de aansluitingsproblematiek. Zij benadrukte dat het wiskundeprobleem eerder een inhoudelijk probleem is dan een urenprobleem, en een van haar voorstellen luidt: "In wiskunde B zal, ook expliciet in het centraal examen, weer meer aandacht worden besteed aan formele wiskunde, wiskunde zonder context, en (mede daardoor) aan de basisvaardigheden en concepten op dit niveau. Daardoor zal er ook meer ruimte zijn voor de nodige ontwikkeling van het abstracte denken."

Ook stelt zij voor nieuwe globale kerndoelen te ontwerpen voor de onderbouw van havo en vwo, met als toelichting onder meer: "De bezwaren die naar voren worden gebracht over de wiskundekennis van studenten blijken voor een groot deel betrekking te hebben niet op stof van de examenprogramma's bovenbouw, maar op (algebraïsche) basisvaardigheden die eigenlijk zouden moeten behoren tot de stof van de onderbouw."

De brief van de minister mag zonder meer een doorbraak genoemd worden. Voor het eerst zijn de werkelijke problemen bij het wiskunde-onderwijs in de schijnwerpers geplaatst. De studenten van *Lieve Maria* kunnen hiervoor niet genoeg worden geprezen. De bal ligt nu duidelijk bij de wiskundegemeenschap. Het zou een goede zaak zijn als studentenvertegenwoordigers als ervaringsdeskundigen bij uitstek betrokken worden bij de realisatie van de voorstellen van de minister. Neem ze op in de vernieuwingscommissie!

De opgave om het roer om te gooien, mag overigens niet onderschat worden. De nadruk die thans ligt op zogenaamde contextrijke opgaven (verhaaltjessommen waar een getal uit komt) moet verdwijnen. De luchtballonnen van goedwillende didactici en examenontwerpers zonder kennis van de manier waarop wiskunde in het vervolgonderwijs wordt gebruikt, moeten worden doorgeprikt. Eindexamens moeten worden omgebogen in de richting van de instaptoetsen, zodat die (en de daarop volgende bijspijkerscursussen) zo snel mogelijk overbodig worden. Grafische rekenmachine en formulekaart kunnen het raam uit. Bij speciale projecten kan ICT worden ingezet, maar, zoals iedere echte gebruiker van computeralgebra weet, je kunt daar alleen met vrucht mee werken als je over een degelijke wiskundige basiskennis beschikt. Kortom, kansen te over voor nieuw en uitdagend wiskunde-onderwijs. Grijpen we ze, of moeten we opnieuw op een studentenactie wachten?



## Joost Hulshof

Divisie Wiskunde en informatica

Faculteit der Exacte Wetenschappen, Vrije Universiteit

De boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam

jhulshof@few.vu.nl

## Inaugurele rede

# Veranderingen

De theorie van differentiaalvergelijkingen is een eeuwenoud onderzoeksgebied, dat de laatste decennia een grote verandering heeft doorgemaakt. Klassiek vinden differentiaalvergelijkingen hun oorsprong in de fysica: zodra een proces waar sprake is van verandering in de tijd wordt gemodelleerd, komt men tot een dergelijke vergelijking. Aanvankelijk heeft men vooral exacte oplossingen voor speciale vergelijkingen gezocht, maar spoedig werd duidelijk dat dergelijke oplossingen vaak niet te vinden zijn. Vanaf het begin van de vorige eeuw werden kwantitatieve theorieën ontwikkeld, die dikwijls gebaseerd waren op een lokale lineaire benadering van het probleem. Tegelijkertijd kwamen er steeds meer fundamenteel verschillende niet-lineaire differentiaalvergelijkingen vanuit diverse deelgebieden in de fysica, zoals het beroemde drie lichamenprobleem. Voor dit soort vergelijkingen schoot een dergelijke benadering volledig tekort. Onder andere door het werk van Poincaré is de studie naar niet-lineaire differentiaalvergelijkingen breed uitgewaaierd naar andere wiskundige disciplines zoals de meetkunde, algebra en topologie. In de zestiger jaren zijn overal in de wereld onderzoeksgroepen voor niet-lineaire analyse ontstaan; in Nederland onder andere rond Bert Peletier in Leiden. Joost Hulshof is een van zijn promovendi. Nu aanvaardt hij het ambt van hoogleraar aan de Vrije Universiteit Amsterdam op 16 september 2005 met het uitspreken van onderstaande rede.

Maak je nou de hele dag *sommen*? Of *verzin* je sommen, die je daarna weer aan anderen geeft om te maken? Vragen die je als wiskundige nogal eens krijgt. Op school maakte je bij wiskunde immers de ene som na de andere, en de uitblinkers gingen vaak wiskunde studeren.

Inderdaad, ik verzin sommen en ik maak sommen. Niet zomaar sommen, maar sommen die te maken hebben met *veranderingen*, veranderingen in de wereld om ons heen. Beter gezegd, met wiskundige modellen voor

*verschijnselen* in die wereld. Modellen die bestaan uit *differentiaalvergelijkingen*. Voor bijvoorbeeld een trillende snaar, een standaard-som in het college *partiële* differentiaalvergelijkingen. Met als bijproduct  $\frac{\pi^2}{6}$  als oneindige som van de omgekeerde kwadraten

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

Een wonderlijke formule die allerlei theoretische vragen oproept. U ziet: zuivere en toegepaste wiskunde gaan hand in hand.

## Dimensies

Soms hebben veranderingen te maken met het streven van een systeem om een *minimum* te bereiken. U kunt denken aan een balletje dat, rollend over een landschap, een laagste punt zoekt. In een versimpelde wiskundige beschrijving heeft het balletje op elk tijdstip vier coördinaten, twee voor de positie en twee voor de snelheid. Die coördinaten veranderen in de tijd. Het rollende balletje is zo een voorbeeld van een *eindig*-dimensionaal dynamisch systeem, waarbij *punten* zich door een in dit geval 4-dimensionale ruimte bewegen.

Bij een *zeepbel* ligt dit anders. De *vorm* van een zeepbel kan niet worden vastgelegd door maar eindig veel coördinaten. Om te beschrijven hoe die vorm verandert, moeten we de stap maken van eindig naar *oneindig*-dimensionaal. Die stap is enorm, *ook* voor wiskundigen. Laat ik dat proberen uit te leggen.

Onze dagelijkse perceptie van de werkelijkheid is die van de 3-dimensionale ruimte om ons heen, zoals beschreven door *Euclides*. Snijden we die ruimte in twee stukken, dan is het *snijvlak* een voorbeeld van een 2-dimensionale ruimte. Snijden we een *vlak* in twee stukken, dan is de *snijlijn* een voorbeeld



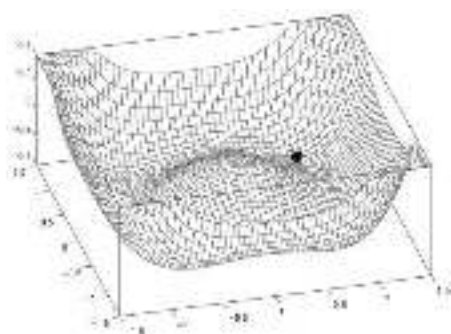
Christiaan Krouwels

Joost Hulshof

van een 1-dimensionale ruimte. Zo tellen we van 3 naar 2 naar 1.

Tel ik de *andere kant* op, dan gaat het na 3 gewoon verder. Een wiskundige ziet een *lijnstuk*, een *vierkant*, en een *kubus*, als de eerste drie leden van een *familie* van objecten, genummerd door hun dimensie. Net zoals methanol, ethanol en propanol, de eerste drie alcoholmoleculen zijn, genummerd door het aantal koolstofatomen in het molecuul. Alleen ethanol staat hiernaast in proefopstellingen klaar.

Na 3 komt 4, na propanol komt butanol, en na de 3-dimensionale kubus komt de 4-dimensionale kubus. Het is aardig om te laten zien hoe je stap voor stap een voorstelling



Het bepalen van een minimum: een balletje in een heuvel-landschap zoekt het laagste punt.

kunt maken van kubussen in hogere dimensies.

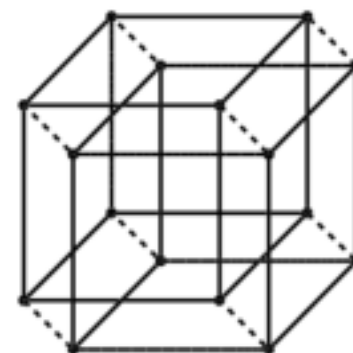
Ik begin met een lijnstuk. Uit twee lijnstukken ontstaat een plaatje van het vierkant door de overeenkomstige hoekpunten te verbinden. Op dezelfde manier maak ik met twee vierkanten een plaatje van een kubus, en met twee kubussen een plaatje van een 4-dimensionale kubus. Van 1 naar 2, van 2 naar 3, van 3 naar 4, elke volgende stap is in feite *hetzelfde*.

Punten in eindigdimensionale ruimten worden vastgelegd door hun *coördinaten*. In het vlak genereert een *vierkant* op natuurlijke manier een *rooster*, en daarmee een coördinatensysteem. Elk *punt in het vlak* heeft twee coördinaten, de eerste voor de horizontale richting, de tweede voor de verticale richting. Beide coördinaten zijn nul in de oorsprong.

Met deze coördinaten kunnen we in het vlak *wiskunde* bedrijven. De *optelling* en de *scalaire* vermenigvuldiging maken van het vlak een 2-dimensionale *vectorruimte*. Daarbij zien we een punt ook als een *pijl*, een vector. De *norm* van een punt is zijn afstand tot de oorsprong, de *lengte* van het pijltje dus. Met Pythagoras is de vergelijking voor een cirkel met straal 5 en middelpunt in

de oorsprong, gegeven door  $x^2 + y^2 = 5^2$ . Evenzo genereert een *vier-dimensionale kubus* een rooster in de *vier-dimensionale* ruimte, waarin punten *vier* coördinaten hebben, zeg  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Alle punten met afstand 5 tot de oorsprong worden gegeven door de vergelijking  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 5^2$ .

*Eindigdimensionale dynamische systemen* komen in overvloed voor als *wiskundige modellen*. Zo kan een reactie in een homogeen mengsel worden beschreven met een *bewegend punt*: de coördinaten van het punt zijn dan de concentraties van de reagerende stoffen.



Gedachtenexperiment: construeer een vierdimensionale kubus door vanuit elk hoekpunt van een driedimensionale kubus een extra ribbe te trekken naar een tweede driedimensionale kubus.

De dimensie van de *ruimte* waardoor het punt zich beweegt is gelijk aan het *aantal* stoffjes in de reactie. Uit de reactiekinetiek volgt een *bewegingsvergelijking*. Die zegt hoe de positie  $\mathbf{x}$  de snelheidsvector  $\mathbf{v}$  vastlegt. Ik kom daar straks nog op terug. Deze bewegingsvergelijking nu bepaalt hoe punten zich bewegen. De positie bepaalt de snelheid, en de snelheid bepaalt weer hoe de positie verandert. Dit is wat we een eindig-dimensionaal dynamisch systeem noemen.

In het 4-dimensionale systeem voor het rollende balletje zijn het de krachten die op het balletje werken, die bepalen hoe de vier coördinaten veranderen. Omdat door *wrijving* energie verloren gaat komt het balletje, als het tenminste niet uit ons gezichtsveld verdwijnt, uiteindelijk tot *rust* in een laagste punt.

Deze uitspraak is een *voorbeeld* van een antwoord op een vraag die bij elk dynamisch systeem gesteld wordt. Convergeert een punt, waarvan de baan begrensd is, naar een evenwicht? En zo nee, wat doet het dan wel?

Bij de Lorenzvergelijkingen, een dynamisch systeem in dimensie 3, afgeleid als een *uiteraard* onbetrouwbaar wiskundig model voor de verandering van het weer, kunnen banen er uitzien zoals in dit plaatje. De baan springt op een *onvoorspelbare* manier heen en weer tussen de linker- en de rechtervleugel van de vlinderfiguur. Een mooi voorbeeld dat een *slecht* wiskundig model toch zijn nut kan hebben: de ontdekking, dat simpele goedgestelde deterministische modellen zo'n onverwacht chaotisch gedrag kunnen genereren, heeft tot vele nieuwe inzichten geleid.

Met goedgesteldheid bedoel ik dat, gegeven de begintoestand, de door het punt doorlopen baan uniek bepaald wordt door de bewegingsvergelijking. Bij eindigdimensionale



Een baan van een deeltje in een vectorveld. Een bewegingsvergelijking koppelt aan een positie  $\mathbf{x}$  een snelheidsvector  $\mathbf{v}$ .

systeem is dat, onder milde voorwaarden, *altijd* het geval, zowel voor- als achterwaarts in de tijd. Het *enige* dat er mis kan gaan is dat het punt in eindige tijd uit het zicht verdwijnt.

### Ooneindige dimensies

Het *verschil* tussen eindig- en oneindig-dimensionaal wil ik illustreren met een wiskundige *stelling* die iedere wiskunde student in zijn eerste jaar te zien krijgt. Ik introduceer die stelling vaak met het volgende verhaal.

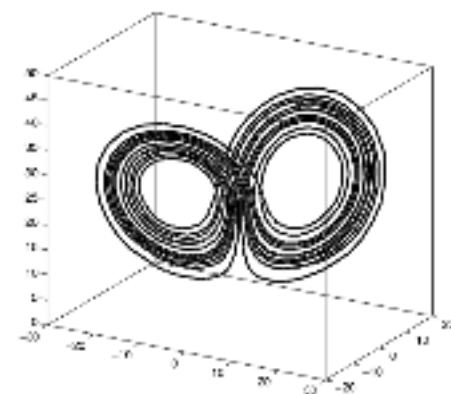
*Stel* dat ik de *waarde* van een of andere fysische grootheid wil meten. Als *gedachten-experiment* neem ik aan dat het gaat om een grootheid die ligt tussen 0 en 1, en dat ik bij elke *volgende* meting de meetnauwkeurigheid kan opvoeren, met tenminste één cijfer extra achter de komma bijvoorbeeld. Als de te meten grootheid *inderdaad* een constante is verwacht ik een *willekeurig* goede benadering, als ik de meting maar vaak genoeg herhaal.

Wat er in dit natuurlijk niet echt uitvoerbare experiment *mis* kan gaan is dat, net als bij echte practica, niet gebeurt wat je verwacht. Bijvoorbeeld omdat de te meten grootheid helemaal geen constante is. Met in het vooruitzicht een *deadline* voor het inleveren van een verslag, of erger, het publiceren van een ar-

tikel, lonkt de verleiding om door het *weglaten* van meetresultaten *toch* een waarde voor de grootheid te presenteren. Bezwijkend voor deze verleiding hoop ik, in mijn gedachten-experiment, zo een rij meetwaarden over te houden die wél steeds dichter bij een vaste waarde komen te liggen.

Als wiskundige vertel ik u dat dit altijd kan: de rij heeft een *deelrij* met de eigenschap dat de onderlinge verschillen vanaf de eerste meetwaarde hoogstens 1 zijn, vanaf de tweede hoogstens een *half*, vanaf de derde hoogstens een *kwart*, vanaf de vierde hoogstens een *achtste*, enzovoort, enzovoort. Het *bewijs* van deze bewering is gebaseerd op het herhaaldelijk in twee *stukken* hakken van het lijnstuk tussen 0 en 1.

*Deze deelrij* nu neem ik als rij van meetwaarden voor mijn verslag want ver genoeg in deze rij worden alle onderlinge verschillen zo klein als ik maar wil. Cauchy was er al van overtuigd dat een rij met deze eigenschap wel *moet* convergeren naar een limiet.



De baan van een oplossing van het Lorenzstelsel. De baan heeft links en rechts onregelmatige aantallen lussen.

Hij concludeerde dat het *bestaan* van de limiet verifieerbaar was *zonder* expliciete informatie over de limietwaarde. Tegenwoordig heten rijen met deze eigenschap Cauchyrijen, en is het een wiskundige *stelling* die zegt dat Cauchyrijen naar een unieke limiet convergeren.

Het woord limiet moet u hier niet in verband brengen met snelheidslimieten, of andere in het dagelijks leven aan ons gestelde beperkingen. De limiet waar ik het over heb, is niets anders dan de unieke waarde die door de rij willekeurig goed benaderd wordt, maar niet daadwerkelijk hoeft te worden aangenoemen.

De uitspraak dat elke begrensde rij zo'n convergente deelrij heeft, staat bekend als de Stelling van Bolzano-Weierstrass. Deze stelling geldt niet alleen voor punten op een lijn, maar ook voor punten in het vlak, en in al-



De vorm van een zeepbel kan niet worden vastgelegd met eindig veel coördinaten.

foto: iStockphoto.com

le eindigdimensionale ruimten. Het bewijs is gebaseerd op het herhaaldelijk verdelen van een lijnstuk in 2 lijnstukken, een vierkant in 4 vierkanten, een kubus in 8 kubussen, etc.

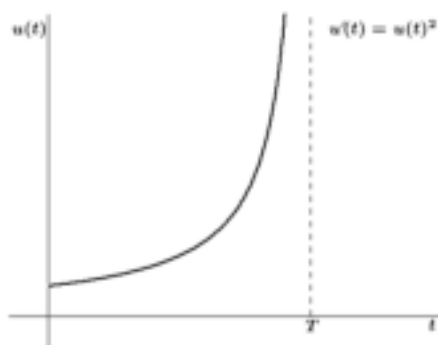
Deze stelling is de *hoeksteen* van de eindigdimensionale analyse. In de context van *dynamische systemen* volgt eruit dat begrensde banen *limietverzamelingen* hebben, zoals de vlinder bij de Lorenzvergelijkingen. Uit de stelling van Bolzano-Weierstrass volgt ook dat het eindig-dimensionaal niet uitmaakt welke norm je gebruikt. Als maar voldaan is aan drie basis axioma's: afstanden zijn positief, afstanden laten zich schalen, en omlopen is niet voordeliger. Eindig-dimensionaal zijn alle normen equivalent.

### De Navier-Stokesvergelijking

Hoe anders is het bij *oneindigdimensionale* systemen. Ik noem in dit verband de Navier-Stokes vergelijkingen. Dit zijn de bewegingsvergelijkingen voor de stroming in een afgesloten volle bak water.

Gegeven een *beginsnelheidsveld* met eindige totale bewegingsenergie, zou je, met zogenaamde slipvrije randvoorwaarden aan de rand van de bak, verwachten dat voor alle tijd daarna het snelheidsveld *vast* ligt. De *vraag* of dit begin-randwaarde probleem voor de Navier-Stokes vergelijkingen in *deze* zin goed gesteld is, staat op de lijst van zeven *one million dollar millenniumproblems* van het Clay Instituut.

Om in de prijzen te vallen moet de vraag beantwoord worden wat er gebeurt met grootheden zoals de bewegingsenergie, en de hoeveelheid interne draaiing in de stroming, de *enstrofie*. Deze twee grootheden zijn gerelateerd aan *normen* in van elkaar verschillende oneindigdimensionale vectorruimten. De energienorm is de wortel uit de totale hoeveelheid bewegingsenergie en voldoet, net als de enstrofienorm, aan *dezelfde* axioma's als de Pythagorasnorm. De vraag hoe het in



Oplossingen van de differentiaalvergelijking  $u'(t) = u(t)^2$  blazen op: ze gaan naar oneindig in eindige tijd.



Turbulentie: Gegeven een beginsnelheidsveld en een gegeven totale bewegingsenergie, ligt het snelheidsveld in de toekomst dan volledig vast?

deze normen zit met convergentie van Cauchyrijen, sla ik nu maar even over.

Het *werkelijke* probleem is dat de ruimte met de *ene* norm beter is voor het *bestaan* van oplossingen, terwijl de ruimte met de *andere* norm beter is voor *uniciteit*. Tussen deze twee *niet-equivalente normen* zit een gat, waardoor het gewoon niet lukt om de stelling over goedgesteldheid te bewijzen. Misschien is de stelling wel niet waar. De grote vraag is of de enstrofie een explosieve groei kan vertonen. Zoals dat bijvoorbeeld kan gebeuren met oplossingen van *gewone* differentiaalvergelijkingen. Daarmee zou de oplossing in de ruimte die is uitgerust met de enstrofienorm uit het zicht verdwijnen, en de door de oplossing beschreven stroming *spontaan* turbulent worden.

### Veranderende vormen

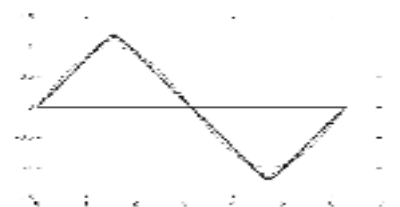
Anders dan om bewegende punten bij *eindigdimensionale* systemen gaat het bij *oneindigdimensionale* systemen om veranderende vormen. Een eenvoudig voorbeeld is een ongedempt trillende snaar. De *grondtoon* van de snaar heeft op het moment van maximale uitwijking dezelfde vorm als de grafiek van de sinusfunctie. De snaar is het stuk van de grafiek tussen 0 en  $\pi$ . De verticale eenheid van lengte is hier natuurlijk veel kleiner dan de horizontale eenheid, anders knapt de snaar. Ik *schaal* nu de grafiek in horizontale richting met een factor *twee*. Dat geeft het profiel van de *eerste boventoon*, waarin de snaar *twee keer* zo snel trilt als in de grondtoon. De *tweede boventoon* correspondeert met schalings-

factor *drie*, de derde met vier, enzovoorts.

In een trillende snaar kunnen *al deze* tonen met een bepaalde amplitude en een bepaalde fase voorkomen, en heeft de snaar op elk tijdstip een profiel, dat wordt gegeven door een *combinatie* van geschaalde sinusfuncties.

$$y = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots$$

De oneindige som in het rechterlid heet een Fourierreeks, en wordt vastgelegd door de Fouriercoëfficiënten,  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , die ik kan zien als de coördinaten van een *punt*. De formule legt zo een *verband* tussen enerzijds, de vorm van de snaar, en anderzijds, punten in een, middels de juiste keuze van een norm, nog nader te specificeren *oneindigdimensionale* ruimte.



We zien hier de grafiek van de functies  $\sin x, \sin x - 1/3^2 \sin 3x, \sin x - 1/3^2 \sin 3x + 1/5^2 \sin 5x$ , enz. Er ontstaat een zaagtand. Deze vorm van de snaar is kenmerkend gekoppeld aan het punt  $(1, 0, -1/3^2, 0, 1/5^2, 0, \dots)$ .

### Complexe getallen op de middelbare school

Ik keer terug naar het begin. Zoals ik al opmerkte maakten we op school bij wiskunde vooral *sommen*. In de bovenbouw van het voorbereidend wetenschappelijk onder-



*Complexe getallen* van Bert Nijdam en Hans Freudenthal. Het boek, dat in de tachtiger jaren gebruikt werd bij het vak Wiskunde 2, bevat tal van toepassingen van complexe getallen, zoals de hierboven afgebeelde elektronische schakeling.



wijs had ik *twee* wiskundevakken, Wiskunde 1 en Wiskunde 2. Bij Wiskunde 1 gingen de sommen veelal over functies en over differentiaalrekening. Wiskunde 2 was abstracter. Buiten het eindexamenprogramma om hadden we een keuzeonderwerp over *complexe getallen*, uit een boekje van Freudenthal en Nijdam. Ik heb het boekje nog even ingekeken. Anders dan bij de schoolboeken van nu kan dat zonder zonnebril. Het bevat een prachtige combinatie van *abstracte* wiskunde en *concrete* toepassingen. Rekenen met het imaginaire getal  $i$  waarvoor geldt dat

$$i^2 + 1 = 0$$

en dat voorkomt in deze verbazingwekkende, maar onvermijdelijke formule voor de vijf belangrijkste getallen in de wiskunde:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Maar ook: toepassingen op elektrische schakelingen en gedempte trillingen. Die toepassingen snapte ik toen nog niet allemaal maar dat ik *wiskunde* ging studeren was inmiddels zeker.

De datum van mijn oratie heb ik vastgelegd *voordat* ik wist dat vandaag in Utrecht Freudenthal zou worden herdacht. Een van de leraren op school zei regelmatig dat Freudenthal voorspeld had dat rond het jaar 2010 wiskunde als zelfstandig vak uit de schoolcurricula verdwenen zou zijn. In verband met deze voorspelling kreeg ik via Chris Zaal, van Rainer Kaenders het volgende citaat van Freudenthal uit 1973:

“Unter all den Argumenten für das Unterrichten einer von den Anwendungen isolierten Mathematik kann ich nur das eine verstehen: das der Inkompetenz.”

Het schoolvak Wiskunde 2 bestaat inmiddels niet meer, en ook het genoemde boekje wordt niet meer op het VWO gebruikt.

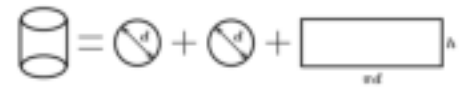
In plaats van het vak Wiskunde 1 zijn de Wiskunde B varianten gekomen. Bij Wiskunde B leren scholieren nog steeds wat een *functie* is, een woord dat in wiskundige context te herleiden is tot het Latijnse werkwoord *fungor*, ik voer een taak uit, bij Leibniz. Op de rekenmachine is het knopje  $x^2$  de kwadraatfunctie die, bij elke invoer, als uitvoer het kwadraat van de invoerwaarde teruggeeft. Ook de *sinusfunctie* is een voorbeeld van een wiskundige functie, op de rekenmachine het knopje  $\sin$ .

De grafiek van de sinusfunctie bestaat uit alle punten in het  $(x, y)$ -vlak, waarvoor  $y = \sin x$ . In deze gelijkheid is  $x$  de *onafhankelijke*, en  $y$  de *afhankelijke* variabele. Standaard

bij Wiskunde 1 waren sommen waarin, zonder elektronische hulpmiddelen, de grafiek van een gegeven functie moest worden geschetst.

### Schaling

Zoals bijvoorbeeld de functie in de grafiek hiernaast, die voorkomt in de uitwerking van een sommetje waarvan de praktische relevantie evident is: welke *afmetingen* moet een cilindervormig blik hebben opdat, gegeven het volume, de oppervlakte minimaal is?



Het materiaal voor het blikje

Met hoogte  $h$  en diameter  $d$  wordt de totale oppervlakte  $A$  van onder-, boven- en zijkant gegeven door

$$A = \frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d^2}{4} + \pi dh.$$

Het volume  $V = \frac{\pi d^2}{4} h$  stel ik voor het gemak gelijk aan 1. Daaruit volgt dan dat de hoogte uitgedrukt kan worden in de diameter, en dat geeft me als nieuwe formule voor de oppervlakte

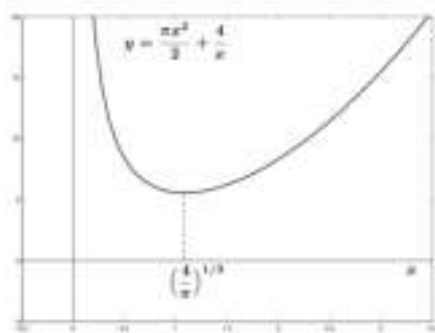
$$A = \frac{\pi d^2}{2} + \frac{4}{d}.$$

als functie van de diameter  $d$ . De oppervlakte is minimaal als de diameter gelijk is aan  $\frac{4}{\pi}$  tot de macht  $\frac{1}{3}$ , hetgeen voor de hoogte *dezelfde* waarde geeft omdat het volume gelijk is aan 1. Het qua oppervlakte *zuinigste* blikje heeft dus de *verhouding* tussen diameter en hoogte gelijk aan 1.

Deze conclusie hangt *niet* af van de aanname over het volume. Door de eenheid van lengte te schalen kan ik  $V$  immers veranderen in *elke* waarde die ik wil. De verhouding tussen diameter en hoogte is een *getal* waarin geen fysische eenheden voorkomen, en *ziet* de keuze van de lengte-eenheid niet.

Dit schalingsargument is van dezelfde aard als de redenering waarmee de beroemde Engelse toegepaste wiskundige Sir Geoffrey Ingram Taylor de Amerikaanse legertop in verlegenheid bracht, door uit te rekenen *hoeveel energie* er was vrijgekomen bij de eerste nucleaire proefexplosie in New Mexico. Dat deed hij door op te merken dat de juiste combinatie van straal, tijd, luchtdichtheid en energie *niet* van de keuze van de fysische eenheden afhangt.

Schalingsargumenten zagen we ook al bij



Welke afmetingen moet een cilindervormig blik hebben opdat, gegeven het volume, de oppervlakte minimaal is?

de trillende snaar. In de *differentiaalrekening* betekent differentieerbaarheid dat inzoomen, schalen dus, *recht* moet maken wat krom is. Als ik, inzoomend op een punt van de grafiek van een functie, een *rechte lijn* zie verschijnen, dan is terug uitzoomend deze lijn de *raaklijn* aan de grafiek.

In de grafiek ziet u de functie van het blikje, samen met zijn afgeleide functie. De afgeleide functie is *alleen* nul als  $x$  gelijk is aan  $\frac{4}{\pi}$  tot de macht een derde. Dat is de *waarde* van de diameter zojuist die de oppervlakte van het blikje met volume gelijk aan 1 minimaliseert.

### Niet-lineair gedrag

Tot nu toe heb ik het gehad over functies *gegeven* door een formule. Vergelijkingen waarin *onbekende* functies samen met hun afgeleiden voorkomen heten *differentiaalvergelijkingen*. Bij eindigdimensionale systemen is de snelheidsvector van het door de ruimte bewegend punt de afgeleide van  $\mathbf{x}(t)$  naar  $t$ . De bewegingsvergelijking, die de snelheidsvector  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t)$  uitdrukt in de positie van het punt, is een differentiaalvergelijking

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t)),$$

voor de onbekende functie  $\mathbf{x}(t)$ .

Bij mechanische systemen is het niet de *snelheid* die vastgelegd wordt door de positie, maar de *versnelling*. Sinds Newton weten we dat het zwaartekrachtsveld van de zon de snelheden van de planeten beïnvloedt. Het was daarom dat Newton de differentiaalrekening bedacht, waarmee de *versnelling*, ofwel de acceleratie, gedefinieerd kon worden als de afgeleide van de snelheid, de *tweede* afgeleide van de positiefunctie dus.

Zo kon hij zijn wetten voor zwaartekracht en versnelling formuleren als bewegingsvergelijkingen. Voor een zonnestelsel met maar één planeet leidde hij af dat de planeetbaan inderdaad een ellips is, in overeenstemming



De eerste experimentele nucleaire proefexplosie in New Mexico

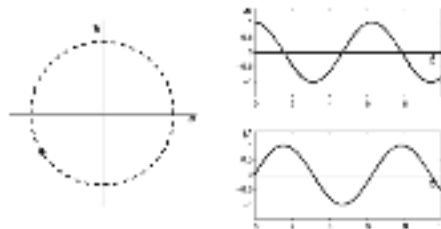
met Kepler's eerder empirisch bepaalde wetten. Een klein wonderdje want de vergelijkingen zijn uiterst niet-lineair.

Niet-lineair betekent *niet linear*. De slingervergelijking

$$x''(t) = -x(t),$$

is een *lineaire* differentiaalvergelijking omdat het verband tussen de onbekende functie en zijn afgeleiden lineair is. De onbekende functie  $x(t)$  wordt hier gezien als de *uitwijking* ten opzichte van een evenwichtstoestand. Deze *tweede* orde differentiaalvergelijking zegt dat op elk moment de versnelling in grootte gelijk is aan de uitwijking, maar *tegengesteld* in richting.

Door de *eerste* afgeleide van  $x$  gelijk te stellen aan  $-y$ , wordt de eerste afgeleide van  $y$  gelijk aan  $x$ . Zo ontstaat uit een *tweede* orde differentiaalvergelijking een *systeem* van twee gekoppelde eerste orde differentiaalvergelijkingen  $x'(t) = -y(t)$  en  $y'(t) = x(t)$ . Oplossingen van dit systeem bewegen over *cirkels* met middelpunt de oorsprong in het  $(x, y)$ -vlak. De oplossing die begint in het punt  $(1, 0)$  ziet u hier.

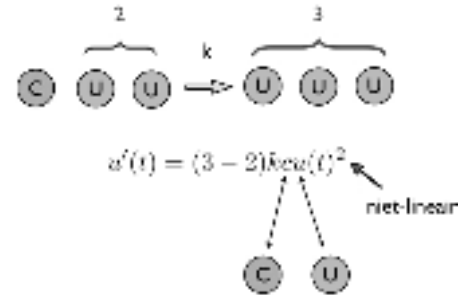


Als we de cirkel doorlopen met hoeksnelheid 1, dan is de uitwijking van de  $x$ -coördinaat gegeven door  $\cos t$  (bovenste grafiek) en van de  $y$ -coördinaat gegeven door  $\sin t$  (onderste grafiek).

Deze oplossing doorloopt de eenheidscirkel met hoeksnelheid gelijk aan 1. De functies  $\cos t$  en  $\sin t$  kunnen *gedefinieerd* worden als respectievelijk de eerste en de tweede coördinaat van deze oplossing. Het *eerste* positieve nulpunt van  $\sin(t)$  is het getal  $\pi$ , de *tijd* benodigd voor het doorlopen van de bovenkant van de cirkel.

U ziet dat we van lineaire differentiaalvergelijkingen veel weten. Differentiaalvergelijkingen in wiskundige modellen zijn echter bijna *nooit* lineair. Ik kom terug op de chemische reacties. Als in een reactie 1 molecuul  $C$  en 2 moleculen  $U$  samen 3 moleculen  $U$  maken, waarbij stof  $C$  in overvloed aanwezig is, dan leidt dat tot een differentiaalvergelijking voor de concentratie  $u(t)$  van molecuul  $U$ .

Hier is  $c$  de constant veronderstelde concentratie van molecuul  $C$ , en  $k$  de reactieconstante. U ziet hoe de *reactiekinetiek* de differen-



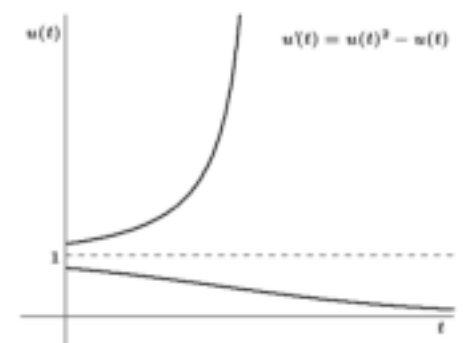
In een reactie maken één molecuul  $C$  en twee moleculen  $U$  samen drie moleculen  $U$ . De stof  $C$  is in overvloed aanwezig.

tiaalvergelijking *maakt*, die niet-lineair is vanwege het kwadratische rechterlid. Na schaling van de tijd met een factor  $kc$  om de coëfficiënt van  $u(t)^2$  gelijk aan 1 te maken, zien we het volgende: het beginwaardeprobleem is nog steeds uniek oplosbaar maar in eindige tijd blaast de oplossing op, een *drastisch* verschijnsel, veroorzaakt door de kwadratische term in de vergelijking.

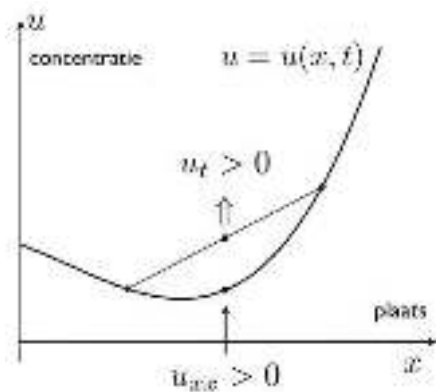
Ook bij de Navier-Stokes vergelijkingen voor de stroming van water zijn het de *kwa*-*drastische* termen die de boel in het honderd zouden kunnen sturen. Voor een snelheidsveld met een relatief *lage* enstrofie, dat wil zeggen *weinig* inwendige rotatie, blijft de enstrofie begrensd, en is het beginwaardeprobleem *goedgesteld*. Een *kari*-*katuur* hiervan is te zien in het gedrag van oplossingen van de differentiaalvergelijking in de figuur hieronder. De kwadratische term krijgt *geen* kans als de beginwaarde kleiner is dan 1, maar *alle* oplossingen boven 1 blazen op in eindige tijd.

### Verspreiding van een concentratie

De Navier-Stokes vergelijkingen zijn geen gewone maar *partiële* differentiaalvergelijkingen. Het gaat te ver om deze Navier-Stokes vergelijkingen hier in detail te bespreken, maar ik wil u toch wat over partiële differentiaalvergelijkingen vertellen. Ik ga daarom



Het al dan niet opblazen van de oplossing kan afhangen van de beginwaarde.



Als de tweede afgeleide van een functie in een punt groter dan 0 is, is het gemiddelde van de functiewaarden in de omgeving van dat punt hoger dan de functiewaarde in dat punt zelf. De functie is daar convex.

verder in de context van chemische reacties. De concentratie van een chemische stof, die ik nog steeds  $u$  noem, hangt over het algemeen *niet alleen* van de tijd maar *ook* van de plaatscoördinaten af, meestal drie. Als het reactievat een *dunne* lange buis is dan is  $u$  als functie van  $x$  en  $t$  een voor de hand liggende aanname, maar *één* plaatsvariabele dus.

$$u = u(x, y, z, t)$$

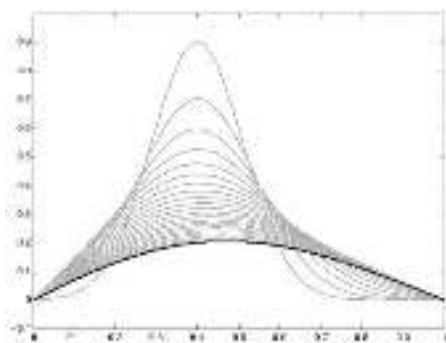
3 plaatsvariabelen

$$u = u(x, t)$$

1 plaatsvariabele

Laat ik in deze context door middel van een *heuristische* afleiding uitleggen wat het betekent dat een concentratie zich door *diffusie* verspreidt. Ik zet de concentratie  $u$  uit tegen de plaats  $x$ . In het plaatje is de gemiddelde concentratie *in de buurt* van het aangegeven punt hoger dan in het punt zelf. We hebben gezien dat dit betekent dat de tweede afgeleide van  $u$  naar de plaatsvariabele  $x$  positief is. Deze tweede afgeleide noteer ik nu niet met twee accenten maar met twee subscripten  $x$ .

Intuïtief is duidelijk dat de concentratie in dit punt *omhoog* moet gaan, hetgeen zich ver-



De concentratie verspreidt zich; de grafiek wordt egalier in de loop van de tijd.

taalt in het *positief* zijn van de afgeleide van  $u$  naar de *tijd*svariabele, aangeduid met subscript  $t$ . Ik concludeer dat in elk punt en op elk moment beide afgeleiden *hetzelfde* teken moeten hebben: allebei positief of allebei negatief. In het *simpelste* wiskundige model dat dit voor elkaar krijgt zijn *beide* afgeleiden gelijk:

$$u_t = u_{xx}.$$

De afgeleiden in deze vergelijking worden *partiële* afgeleiden genoemd, de vergelijking zelf is een *partiële* differentiaalvergelijking, en staat bekend als de lineaire *diffusievergelijking*, of ook wel *warmtevergelijking*, omdat ook warmte zich via diffusie verspreidt.

Ik los deze vergelijking op voor  $x$  tussen 0 en 1, onder de lineaire randvoorwaarde  $u = 0$ . Daarbij denk ik aan een geïsoleerde staaf waarvan de uiteinden op temperatuur nul worden gehouden. Net als bij de trillende snaar is de algemene oplossing een *combinatie* van geschaalde sinusfuncties:

$$u(x, t) = a_1(t) \sin \pi x + a_2(t) \sin 2\pi x + a_3(t) \sin 3\pi x + \dots$$

Hiernaast ziet u hoe de grafiek verandert in de tijd. Horizontaal staat weer  $x$  uit en verticaal  $u = u(x, t)$ . Elke component van de Fourierreeks dooft uit, maar de *eerste* het langzaamst en al snel is dat de *enige* component die we nog zien. Er gaat dus informatie verloren. Lopen we terug in de tijd dan wordt elke component juist *groter*, en gaat het onmiddellijk fout. De termen in de Fourierreeks zijn nu simpelweg *te groot* om de oneindige som *betekenis* te kunnen geven. We kunnen de warmtevergelijking dus alleen maar *vooruit* en *niet achteruit* in de tijd oplossen, een belangrijk verschil met wat we eerder gezien hebben bij de eindigdimensionale systemen gedefinieerd door *gewone* differentiaalvergelijkingen.

### Reactie-diffusievergelijkingen

Zodra een partiële differentiaalvergelijking *niet-lineair* gemaakt wordt, bijvoorbeeld door diffusie met reactie te combineren zoals in deze reactie-diffusievergelijking hiernaast, is het wat betreft exact oplossen in het algemeen einde verhaal. Reactie-diffusievergelijkingen hebben een totaal *andere* achtergrond dan de Navier-Stokes vergelijkingen maar de wiskundige vraagstelling is deels hetzelfde, zoals bijvoorbeeld de vraag naar opblazen in eindige tijd of ander, zoals we zeggen, sin-



gulier gedrag. Hierbij is er competitie tussen twee mechanismen: reactie en diffusie. Reactie stookt op, diffusie strijkt glad. De *combinatie* zorgt ervoor dat het opblazen *gelokaliseerd* blijft.

Numerieke simulaties laten zien wat er gebeurt. De oplossing in beide plaatjes is hetzelfde maar *rechts* is de concentratie *geschaald*. In eindige tijd, namelijk als  $t \rightarrow T$ , blaast de oplossing op. Dat gebeurt slechts in *één* punt.

In het rechterplaatje ziet u de oplossing in gelijkvormigheidscoördinaten. Horizontaal staat nu

$$\tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{T-t}},$$

en verticaal

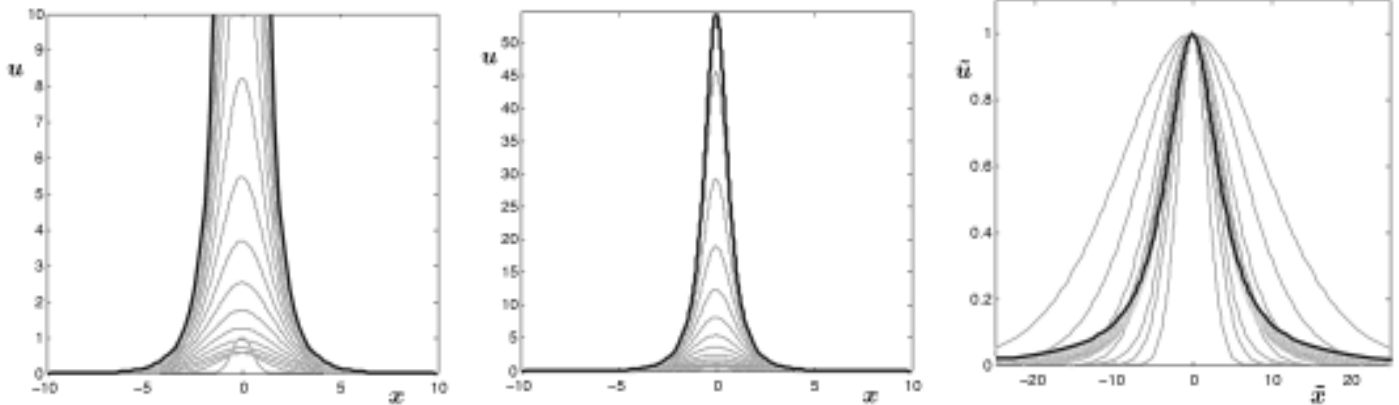
$$\tilde{u} = (T-t)u(x, t).$$

In deze coördinaten varieert de oplossing nog wel maar dat gebeurt zo langzaam dat je het bijna niet ziet. Om precies te beschrijven wat de oplossing doet moet de informatie uit *meerdere* coördinaatsystemen aan elkaar geplakt worden. Dit maakt het *onmogelijk* om in één goedgekozen oneindigdimensionale ruimte de oplossingen te beschrijven.

### Diffusie zonder reactie op een bol

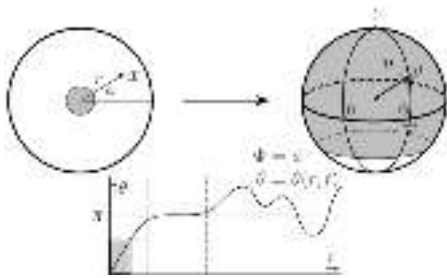
Ook *zonder* reactie kan diffusie tot singulier gedrag leiden. De afhankelijke variabele  $u$  in het volgende voorbeeld is 3-dimensionaal maar als restrictie leg ik op dat de lengte van  $u$  gelijk is aan 1.  $u$  kunt denken aan  $u$  als een pijltje dat een oriëntatie vastlegt in een vloeibaar kristal, of in een ferro-magneet.

Ik leg  $u$  vast door twee hoekcoördinaten, net als op de globe. De eerste hoek  $\Phi$  komt overeen met de lengtegraad die 0 is in Greenwich en oploopt in oostwaartse richting. De tweede hoek is  $\theta$ , de poolhoek, die 0 is in de Noordpool en oploopt in zuidwaartse richting. Deze hoek is op de evenaar 90 graden en in de Zuidpool 180, ofwel  $\pi$  in radialen. Als ik door de Zuidpool heenloop laat ik  $\theta$  gewoon doorlopen. De onafhankelijke variabele  $x$  neem ik



Reactie stookt op; diffusie strijkt glad. Blijft het opblazen gelocaliseerd? Links: ongeschaald; midden:  $u$  geschaald; rechts: in gelijkvormigheidsvariabelen

in het vlak, en leg ik vast door de afstand  $r$  tot de oorsprong en de hoek  $\phi$  die  $\mathbf{x}$ , gezien als vector, maakt met de eerste coördinaat-as. We kijken nu naar afbeeldingen die de disk op het boloppervlak afbeelden. Daarbij komt bijvoorbeeld het relatief kleine grijze gebied links terecht op het relatief grote grijze gebied rechts.

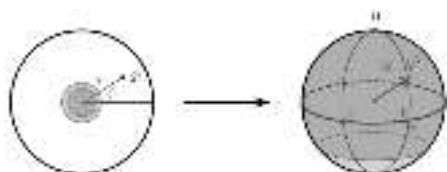


Diffusie zonder reactie op een bol

Als we de hoek  $\Phi$  op de bol gelijk nemen aan de hoek  $\phi$  in de disk dan laat de diffusievergelijking voor  $u$  oplossingen toe die corresponderen met een functie  $\theta$  die alleen van  $r$  en van  $t$  afhangt. In deze coördinaten moet de oplossing voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$\theta_t = \theta_{rr} + \frac{\theta_r}{r} - \frac{\sin(2\theta)}{2r^2}.$$

Michiel Bertsch en zijn groep in Rome, in samenwerking met Rein van der Hout die bij



De partiële differentiaalvergelijking voor  $\theta(r, t)$  vertoont singulariteiten in eindige tijd. Dit betekent dat het beeld van de steeds kleinere disk links, de bol rechts nog geheel overdekt, terwijl in eindige tijd de oppervlakte van het schijfje links naar 0 gaat.

AKZO-Nobel dit probleem als wiskundig model voor nematische vloeibare kristallen heeft geformuleerd, hebben laten zien dat oplossingen van deze vergelijking *in eindige tijd* singulariteiten kunnen ontwikkelen. In het plaatje hieronder betekent dat dat een disk links, waarvan het beeld het boloppervlak rechts precies één keer overdekt, *ineenkrimpt* tot een punt. Een hele overdekking van de bol, en daarmee het stuk van de grafiek met  $\theta$  tussen 0 en  $\pi$  in het  $(r, \theta)$ -vlak, verdwijnt zo in het niets.

Generiek gaat het ontstaan van deze singulariteit gepaard met maar liefst *drie* schalen waarin de oplossing verschillend gedrag vertoont.

De middelste en de buitenste schaal (rechts) zijn hetzelfde als bij de reactie-diffusievergelijking, maar binnenin (links) zit nog een derde schaal. Als we daarop inzoomen, zien we dat de oplossing convergeert naar een evenwichtoplossing die meeschaalt naar binnen met  $R(t)$ . In de middelste schaal convergeert de oplossing naar  $\pi$ . In de buitenste schaal (rechts) zien we het  $\theta$ -profiel ontstaan dat overblijft na de vorming van de singulariteit, en dat vervolgens verder evolueert.

In werk met John King en Jan Bouwe van den Berg, is het gelukt dit *quasi-stationaire* gedrag in zoverre te begrijpen dat we hebben kunnen uitrekenen dat

$$R(t) \sim \frac{T - t}{\ln^2(T - t)}.$$

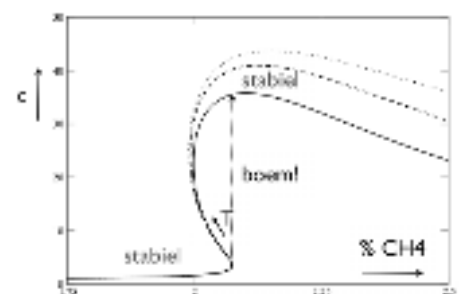
Het vermoeden bestaat dat het zojuist beschreven singuliere gedrag in wezen *de enige manier* is voor oplossingen om singulier te kunnen worden. Met  $\theta$  en  $\Phi$  allebei afhankelijk van  $r$ ,  $\phi$  en  $t$ , maar  $\Phi$  wel in de buurt van  $\phi$ , lijken numerieke simulaties dat te bevestigen. Het lijkt of oplossing symmetrisch wordt in de buurt van de singulariteit; recent werk

van Jan Bouwe van den Berg en JF Williams weerspreekt dit echter.

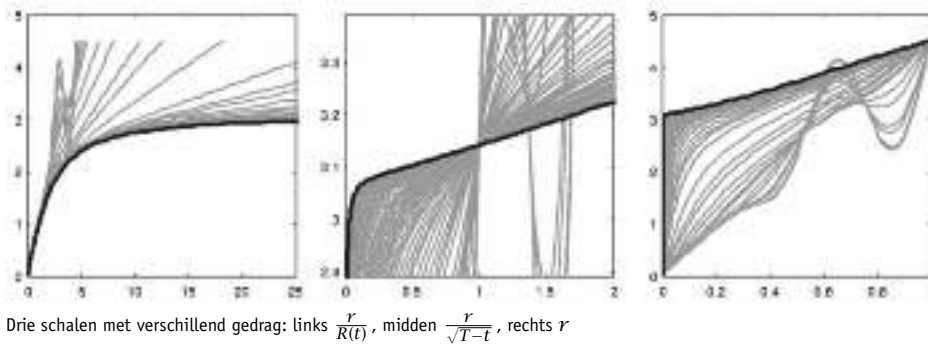
### Alles is variabel

Veel partiële differentiaalvergelijkingen leven *niet* op een gebied met een *vaste* rand. Smeltend ijs in water, groeiende kankercellen, vlamballen, vloeibaar glas, verdruppels, stromingen in poreuze media, al deze processen leiden tot wiskundige modellen waarbij *de rand* van het gebied waarin de vergelijkingen zijn gesteld *een van* de onbekenden van het systeem is. Met Jan Bouwe van den Berg en twee promovendi, Vincent Guyonne en Hala Elrofai, werken we aan vrije randproblemen die vlammen modelleren in gasmengels. Bijvoorbeeld een lopend vuurtje in een buis.

De vlam beweegt van rechts naar links, met snelheid  $c$  en temperatuur  $T$ . Als het gasmengsel vervuild is met stof dan vindt er via straling een herverdeling van warmte plaats die de snelheid en de temperatuur van de vlam aanzienlijk kan beïnvloeden.



Een vlam beweegt van rechts naar links door een buis met snelheid  $c$  en temperatuur  $T$ . Door vervuiling van het gasmengsel met stof, vindt er via straling een herverdeling van warmte plaats die de snelheid en de temperatuur van de vlam beïnvloedt. Voor verschillende waarden van de opaciteit van het mengsel is het verband tussen de fractie brandbaar gas in het mengsel, de snelheid waarmee de vlam zich voortplant in de buis, en de temperatuur van de vlam die oploopt langs de S-vormige krommen getekend. Waar de krommen naar rechts bewegen met toenemende  $T$ , zijn de vlammen stabiel. Als de fractie brandbaar gas toeneemt, bewegen we over de kromme naar rechts. Aangekomen in het onderste keerpunt van de S-vorm verliest het vlammetje zijn stabiliteit en ontstaat er een overgang naar een veel hetere en snellere vlam.



Hier ziet u in één figuur, voor verschillende waarden van de opaciteit van het mengsel,

het verband tussen de fractie brandbaar gas in het mengsel, de snelheid waarmee de vlam zich voortplant in de buis, en de temperatuur van de vlam die oploopt langs de S-vormige krommen. Waar de krommen naar rechts bewegen met toenemende  $T$ , zijn de vlammen stabiel. De fractie brandbaar gas zie ik nu als controleparameter, bij wijze van spreken een knop waaraan ik kan draaien. Beginnend bij het stabiele vlammetje dat correspondeert met een punt linksonder op de kromme, draai ik de knop omhoog en loop ik over de kromme naar rechts. Aangekomen in het onderste keerpunt van de S-vorm verliest het vlammetje zijn stabiliteit, en is er een overgang naar een veel heterere en snellere vlam, met alle gevolgen van dien.

Herverdeling van warmte via *straling* speelt ook een rol bij de verklaring van experimenten in de Space Shuttle. Die hebben aange-

toond dat bolvlammen, anders dan vermoed sinds Zel'dovich, wel degelijk stabiel kunnen zijn. Met Claude-Michel Brauner in Bordeaux en de groep van Alessandra Lunardi in Parma werken we aan de stabiliteitsanalyse.

Vrije randen kunnen ook ontstaan als een diffusie-achtige vergelijking in bijvoorbeeld  $u = 0$  van karakter verandert. Dit komt voor bij de modellering van stromingen in poreuze media, een veelbeoefende tak van sport in Nederland, met Hans van Duijn als voortrekker. Wiskundig gezien ben ik als beginnend onderzoeker opgegroeid met een gedegeneerde diffusievergelijking die er in 2 ruimtedimensies zo uitziet:

$$u_t = (u^m)_{xx} + (u^m)_{yy}.$$

Met  $m = 2$  modelleert deze vergelijking de hoogte van het grondwater in een zandbodem, rustend op een vlakke rotsgrond. Met  $m = 4$  is  $u$  de dikte van een olie- of verlaagje op een vlakke plaat. Droge plekken omringd

door vloeistof worden in eindige tijd volledig gevuld. Pas onlangs is uit werk van onder andere Sigurd Angenent gebleken dat de droge plek *niet*, zoals je zou verwachten, *rond* wordt tijdens het verdwijnen.

In een artikel met Don Aronson en Jan Bouwe van den Berg is bewezen dat de relevante component in een Fourierachtige expansie, die verstoringen van ronde oplossingen beschrijft, inderdaad altijd groeit. Blijkbaar is de natuur *niet altijd* bezeten van symmetrie. Wanneer wel en wanneer niet, en waarom, blijft een intrigerende vraag.

### Vanuit de werkelijkheid en terug

In het voorafgaande heb ik een indruk gegeven van het vakgebied van de niet-lineaire partiële differentiaalvergelijkingen, zoals die voorkomen in wiskundige modellen voor verschijnselen in de werkelijkheid. Als wiskundige houden we ons bezig met het oplossen van deze vergelijkingen.

Dit betekent dat we het bestaan en het gedrag van oplossingen vanuit de vergelijkingen willen begrijpen en verklaren. Uitrekenen wat er gebeurt, op wat voor manier dan ook, en vervolgens bewijzen dat het antwoord goed is; dus op een manier waar aan de wiskundige zuiverheid recht wordt gedaan en waarbij tegelijkertijd gecontroleerd wordt of de oplossingen aan het werkelijke gedrag beantwoorden. Precies dat zijn de sommen waar we ons mee bezighouden.



Walter van Suijlekom

Max-Planck-Institut für Mathematik

Vivatsgasse 7, 53111 Bonn

Duitsland

waltervs@mpim-bonn.mpg.de

## Onderzoek

# Niet-commutatieve meetkunde niet-communicabel?

Niet-commutatieve meetkunde is een snelgroeiend wiskundig vakgebied, met steeds meer interactie met andere delen van de wiskunde. Wat zijn de ideeën die ten grondslag liggen aan dit gebied? Walter van Suijlekom, van oorsprong natuurkundige, is postdoc aan het Max Planck Instituut voor Wiskunde in Bonn. Hij werkt op het gebied van de niet-commutatieve meetkunde in interactie met kwantumveldentheorie.

Alhoewel de niet-commutatieve meetkunde een centrale plaats inneemt binnen de moderne wiskunde, blijkt dat er weinig voor een breder (wiskundig) publiek toegankelijke teksten zijn geschreven. Laat ik hierbij een poging wagen een tipje van de sluier op te lichten. Naast elementaire topologie, lineaire algebra en analyse, zal ik slechts enkele basisconcepten van representatietheorie gebruiken.

Laten we beginnen met het basisidee van de niet-commutatieve meetkunde, zoals rond 1980 uiteengezet door Alain Connes. Zijn ideologie berustte deels op een veel ouder resultaat van Gelfand en Naimark. Zij bewezen in 1943 een stelling die aangeeft hoe een topologische ruimte kan worden geconstrueerd uit een commutatieve ( $C^*$ -) algebra, zodanig dat deze algebra isomorf is met de algebra van continue functies op de bewuste topologische ruimte. De topologische eigenschappen van de onderliggende ruimte zijn dus geheel gecodeerd in de algebra van continue functies op deze ruimte. Vergelijk dit met de dualiteit in de algebraïsche meetkunde tussen variëteiten en polynoomringen.

Op grond van deze stelling, zou men dus een virtuele niet-commutatieve ruimte kunnen beschrijven door middel van een niet-commutatieve ( $C^*$ -) algebra. Zo'n algebra wordt beschreven door een onderalgebra van de algebra van begrensde operatoren in een Hilbertruimte.

We zullen hier zien dat niet-commutatieve meetkunde ook bijzonder geschikt is om bepaalde exotische commutatieve ruimtes te beschrijven. Als voorbeeld nemen we hier de zogeheten bladenruimte van de Kroneckerfoliatie van de torus en associëren met deze niet-Hausdorff topologische ruimte op natuurlijke wijze de

niet-commutatieve torus.

We generaliseren zijn constructie naar een grote klasse van gladde ruimtes en beschrijven in het bijzonder de niet-commutatieve vier-dimensionale sfeer.

## Commutatieve meetkunde anders belicht

We beginnen met een beschrijving van de commutatieve meetkunde vanuit een niet-commutatief perspectief. Een belangrijk resultaat in de functionaalanalyse, dat een drijvende kracht is achter de constructie van Connes' niet-commutatieve meetkunde, is de Gelfand-Naimark stelling. Deze stelling geeft een dualiteit tussen enerzijds bepaalde topologische ruimtes en anderzijds een zekere klasse van commutatieve algebra's. We brengen eerst in herinnering wat een (irreducibele) representatie van een algebra is. We werken steeds met de complexe getallen  $\mathbb{C}$  als grondlichaam.

## Definities.

1. Een (eindig-dimensionale) *representatie* van een (mogelijk niet-commutatieve) algebra  $A$  op een vectorruimte  $\mathcal{C}^n$  is een homomorfisme  $\pi$  van  $A$  naar de algebra  $M_n(\mathbb{C})$  van  $n \times n$  matrices.
2. Een representatie heet *irreducibel* als de enige deelruimtes van  $\mathcal{C}^n$  die invariant zijn onder de werking van  $\pi(A)$ , de triviale deelruimtes  $\{0\}$  en  $\mathcal{C}^n$  zijn.
3. Twee representaties  $\pi_1, \pi_2$  op respectievelijk  $\mathcal{C}^n$  en  $\mathcal{C}^m$ , heten *unitair equivalent* als er een unitaire matrix  $U \in M_{nm}(\mathbb{C})$  bestaat zodat  $\pi_1(a) = U\pi_2(a)U^*$  voor elke  $a \in A$ .

Als de algebra  $A$  een involutie heeft (zoals complexe conjugatie), dan verlangen we dat de representatie  $\pi$  deze structuur respecteert. In het geval van oneindig-dimensionale representaties vervangen we  $\mathcal{C}^n$  door een Hilbertruimte en  $M_n(\mathbb{C})$  door de begrensde operatoren op deze Hilbertruimte.

Merk op dat een irreducibele representatie van een commutatieve algebra altijd 1-dimensionaal is. Hieruit volgt dat de notie van unitaire equivalentie in het geval van commutatieve algebra's triviaal is.

Laat  $X$  een compacte Hausdorff topologische ruimte zijn, en definieer  $C(X)$  als de algebra van continue functies op  $X$  met puntsgewijs product:  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  en involutie  $f^*(x) = \overline{f(x)}$ . Gelfand en Naimark bewezen de volgende stelling, hier in iets uitgekleden vorm,<sup>1</sup> die een mijlpaal vormt in de functionaalanalyse.

**Stelling.** *De ruimte van irreducibele representaties van  $C(X)$  vormt in een geschikte topologie een compacte Hausdorff topologische ruimte homeomorf aan  $X$ . Elk punt  $x \in X$  induceert een irreducibele representatie  $\text{ev}_x$  in  $\mathbf{C}$  gegeven door evaluatie in het punt  $x$ :*

$$\text{ev}_x(f) = f(x).$$

De bedoelde topologie op de ruimte van 1-dimensionale irreducibele representaties is gegeven als volgt. Voor eindige verzamelingen van elementen  $f_1, \dots, f_n$  in  $C(X)$  en  $\epsilon > 0$  definieert

$$U(\pi, f_1, \dots, f_n; \epsilon) = \{\pi' : |\pi'(f_i) - \pi(f_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\}$$

een open omgeving van  $\pi$ .

#### Voorbeelden.

- $X$  bestaat uit één punt. Een continue functie op  $X$  is gegeven door een complex getal, zodat  $C(X) \cong \mathbf{C}$ . Een irreducibele representatie is gegeven door een homomorfisme  $\pi : \mathbf{C} \rightarrow M_1(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$  zodat  $\pi(\lambda 1) = \lambda \pi(1) = \lambda$ . Dit legt  $\pi$  volledig vast en er is dus één irreducibele representatie, corresponderend met het punt in  $X$ .
- $X$  bestaat uit  $n$  punten. Een continue functie op  $X$  is nu gegeven door  $n$  complexe getallen, met puntsgewijs product zodat  $C(X)$  de onderalgebra  $D_n(\mathbf{C})$  van diagonaalmatrices in  $M_n(\mathbf{C})$  vormt. Er zijn  $n$  irreducibele representaties en wel de projecties op het  $k$ -de diagonaalelement:  $\pi_k(M) = M_{kk}$  met  $M$  een diagonaalmatrix en  $k = 1, \dots, n$ . De topologie op de ruimte van irreducibele representaties zoals gedefinieerd door de open verzamelingen  $U$ , is de discrete topologie op  $X$ .
- Een iets interessanter voorbeeld is gegeven door de cirkel  $S^1$ . Het is bekend dat een continue functie op  $S^1$  kan worden geschreven als een Fourierexpansie:

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k z^k$$

waar  $z(t) = e^{2\pi i t}$  voor  $t \in [0, 1[$  en  $\{a_k\}$  een snel dalende rij. Voor een representatie  $\pi$  van  $C(S^1)$  geldt nu dat  $\pi(f) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi(z)^k$  zodat een representatie volledig is gekarakteriseerd door de waarde die hij aanneemt op het polynoom  $z$ . Hier is  $\pi(z)^{-1} = \pi(z^{-1})$ . Omdat een irreducibele representatie van een commutatieve algebra 1-dimensionaal is, geldt dat  $\pi(z)\pi(\overline{z}) = \pi(z\overline{z}) = \pi(1) = 1 \in \mathbf{C}$ , en dus is  $\pi(z)$  een complex getal met modulus 1: een punt op de cirkel! We zien dat de verzameling van irreducibele representaties van  $C(S^1)$  is gegeven door de cirkel. Het is dan niet moeilijk in te zien dat de topologie zoals gedefinieerd door de open verzamelingen  $U$ , wordt gegenereerd door de intervallen op  $S^1$ .

De stap van commutatieve naar niet-commutatieve meetkunde bestaat uit het toelaten van niet-commutatieve algebra's. Gemo-

tiveerd door de stelling van Gelfand en Naimark, beschrijft een niet-commutatieve ( $C^*$ -)algebra  $A$  een onderliggende, virtuele niet-commutatieve topologische ruimte, waarop  $A$  de algebra van continue functies vormt.

Een motiverend voorbeeld hiervan komt uit de natuurkunde. In de overgang van de klassieke naar de kwantummechanica worden de coördinaten plaats en impuls van de klassieke faseruimte vervangen door elementen  $x$  en  $p$  van een niet-commutatieve algebra. Zij voldoen aan de beroemde Heisenberg-relatie:  $[x, p] = i\hbar$ , met  $\hbar$  de constante van Planck. Deze niet-commutatieve algebra geeft een beschrijving van de virtuele niet-commutatieve faseruimte.

Nu is meetkunde meer dan alleen topologie zodat we meer data nodig hebben om een (compacte) gladde ruimte te beschrijven. Connes heeft daartoe zogeheten *spectraaltipels* ingevoerd, die bestaan uit een (onderalgebra van een)  $C^*$ -algebra  $A$  die gerepresenteerd is in een Hilbertruimte, samen met een zelfgeadjungeerde onbegrensde operator  $D$  op deze Hilbertruimte, onderhevig aan een aantal condities [1]; één van de meest belangrijke is dat de commutator  $[D, a] = D \circ a - a \circ D$  een begrensde operator is voor alle  $a \in A$ . Voor meer details verwijzen we naar Connes' boek [2] en naar [12].

In het geval van een compacte (Riemannse spin) gladde ruimte  $X$ , neemt men als algebra  $C^\infty(X)$  bestaande uit de gladde (oneindig differentieerbare) functies op  $X$  en voor  $D$  de zogeheten Dirac-operator, beide gerepresenteerd op een geschikte Hilbertruimte. (Dit is de Hilbertruimte bestaande uit kwadratisch integreerbare secties van een spinorbundel op  $X$ .) Het is mogelijk vanuit deze drie objecten de gehele Riemannse gladde ruimte  $X$  met al zijn structuur – metriek, atlas van kaarten – te reconstrueren. We zullen dit illustreren aan de hand van een eenvoudig voorbeeld: de cirkel.

**Voorbeeld.** Zoals beschreven in voorbeeld (c) hierboven, beschrijft de algebra  $C(S^1)$  van continue functies op  $S^1$  de topologische ruimte  $S^1$ . Als eerste ingrediënt van het spectraaltipel nemen we de dichtliggende onderalgebra  $C^\infty(S^1)$  in  $C(S^1)$  van gladde functies op  $S^1$ . Als Hilbertruimte nemen we de ruimte  $L^2(S^1)$  bestaande uit kwadratisch integreerbare functies  $\psi$  op  $S^1$ . De representatie van  $C^\infty(S^1)$  op deze Hilbertruimte is gegeven door middel van het puntsgewijs product:  $(f\psi)(t) = f(t)\psi(t)$ . De definitie van het spectraaltipel wordt voltooid door de onbegrensde operator:  $D = -\frac{i}{2\pi} \frac{d}{dt}$ . Voor een gladde functie  $f$  is de commutator  $[D, f]$  zeker een begrensde operator op  $L^2(S^1)$ .

We reconstrueren de gebruikelijke metriek op  $S^1$ , gegeven als de afstand  $(s - t) \bmod 1$  tussen twee punten  $s, t \in [0, 1)$  op de cirkel. We confronteren Connes' afstandsfunctie voor een spectraaltipel met deze natuurlijke metriek op de cirkel. De afstandsfunctie tussen twee punten op de cirkel (herinner dat de topologie van  $S^1$  al is gereconstrueerd, zie voorbeeld (c)) is gedefinieerd als

$$d(s, t) = \sup_{f \in C^\infty(S^1)} \left\{ |f(s) - f(t)| : \sup_{t' \in S^1} [D, f](t') \leq 1 \right\}.$$

Dit supremum is gegeven door

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{e^{2\pi i n s} - e^{2\pi i n t}}{2\pi n} \right|,$$

daar  $\{e^{2\pi i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  een basis vormt voor  $C^\infty(S^1)$ . Met enige analyse volgt dat het supremum wordt bereikt voor  $n = 0$ , zodat  $d(s, t) = (s - t) \bmod 1$ .

In de volgende paragraaf zullen we laten zien hoe we de technieken van de niet-commutatieve meetkunde ook kunnen gebruiken voor het beschrijven van niet-Hausdorff ruimtes. In het bijzonder zijn we geïnteresseerd in de zogenaamde bladenruimte van de Kroneckerfoliatie van de torus; we zullen zien dat deze wordt beschreven door de ruimte van equivalentieklassen van irreducibele representaties van de *niet-commutatieve torus*. Hoewel de unitaire equivalentie niet aan de orde was in het commutatieve geval, is het natuurlijk equivalentieklassen van representaties te beschouwen.

### Foliatie van de torus

Een voorbeeld van een niet-Hausdorff ruimte wordt gegeven door de *bladenruimte* (leaf space) van een foliatie van een gladde variëteit. Om een goede beschrijving te geven van continue functies op zulke ruimtes, moeten we weer een niet-commutatieve algebra toelaten. We beperken ons tot het illustratieve voorbeeld van de zogenaamde Kroneckerfoliatie van de torus en zullen zien dat de niet-commutatieve algebra de niet-commutatieve torus is. We beperken de volgende definitie tot het 1-dimensionale geval (zie bijvoorbeeld Moerdijk & Mrčun [17] voor het algemene geval).

**Definities.** Een 1-dimensionale *foliatie* van een gladde variëteit  $V$  is gegeven door een vectorveld  $\chi$  op  $V$ . Een *blad*  $L$  van deze foliatie is een curve die door dit vectorveld wordt gegenereerd en de *bladenruimte* is de partitie van  $V$  in bladen:  $V = \cup_\alpha L_\alpha$ .

De Kroneckerfoliatie van de torus is gedefinieerd als volgt. We beschouwen de torus  $\mathbf{T}^2$  als  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  zodat we een vectorveld lokaal kunnen schrijven in de coördinaten  $(x, y)$  van  $\mathbf{R}^2$ . Zij  $\chi = \partial/\partial x + \theta \partial/\partial y$  met  $\theta$  een reëel getal. Een blad  $L$  van deze foliatie is gegeven door de curve op  $\mathbf{T}^2$  geïnduceerd door de lijn  $y = \theta x + c$  in  $\mathbf{R}^2$ .

Hierin is  $c$  een reële constante tussen 0 en 1. Twee constanten  $c$  en  $c'$  definiëren hetzelfde blad als  $c = c' + \theta N \pmod{1}$  voor een geheel getal  $N$ . We concluderen dat de bladen worden geparametriseerd door de cirkel modulo  $\theta\mathbf{Z}$ , zodat de ruimte van bladen  $X = \mathbf{R}/(\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z})$ . Als  $\theta$  een rationaal getal is, is dit een bepaald interval op de cirkel. Echter, als  $\theta$  een irrationaal getal is, is  $S^1/\theta\mathbf{Z}$  een veel exotischer ruimte en bevat de algebra van continue functies op de bladenruimte  $X$  weinig interessante functies. Omdat

$\theta\mathbf{Z}$  in dit geval dicht ligt in  $S^1$ , is  $C(X) \simeq \mathbf{C}$ . Met de stelling van Gelfand en Naimark in ons achterhoofd concluderen we dat deze algebra duidelijk niet fijn genoeg is om de (niet-Hausdorff) topologie van  $X$  te beschrijven. We zullen zien dat dit probleem kan worden opgelost door een niet-commutatieve algebra toe te laten.

We beginnen met een motiverende beschouwing van de bladenruimte  $S^1/\theta\mathbf{Z}$  in het geval dat  $\theta$  een rationaal getal is en schrijven  $\theta = \frac{p}{q}$ , met  $p$  en  $q$  copriem. Laat  $A_\theta$  de algebra zijn die bestaat uit Fourierexpansies

$$a = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_{nm} u^n v^m$$

met  $a_{nm}$  een snel dalende rij en  $u, v$  twee unitaire elementen die voldoen aan

$$uv = e^{2\pi i \theta} vu.$$

**Stelling.** Er bestaat een één-op-één verband tussen eindig dimensionale irreducibele representaties van  $C(S^1/\theta\mathbf{Z})$  en van  $A_\theta$  voor  $\theta$  irrationaal.

De essentiële stap in het bewijs is om aan te tonen dat elke irreducibele representatie unitair equivalent is aan de representatie  $\pi$  gedefinieerd door de volgende twee  $q \times q$  matrices,

$$\pi(u) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i t} & & & \\ & e^{2\pi i(t+\theta)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{2\pi i(t+(q-1)\theta)} \end{pmatrix},$$

$$\pi(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt dat de irreducibele representaties van  $A_\theta$  zijn gegeven door een element  $t \in [0, 1)$ , een punt op de cirkel. Uit de vorm van deze matrices leest men af dat twee verschillende  $t, t' \in S^1$  unitair equivalente representaties  $\pi, \pi'$  definiëren slechts in het geval dat  $t' = t + k\theta \pmod{1}$ , voor een geheel getal  $k$ . Inderdaad kan dan de representatie  $\pi'$  worden verkregen door een 'shift' in de diagonaalelementen in  $\pi(u)$ ; met andere woorden, de shiftmatrix  $U$  gedefinieerd door  $Ue_i = e_{i+k}$  geeft de unitaire equivalentie tussen  $\pi'$  en  $\pi$ :

$$\pi' = U\pi U^*.$$

Zodoende zijn de equivalentieklassen van irreducibele representaties van  $A_\theta$  gelabeld door een element  $t \in S^1/\theta\mathbf{Z}$ , hetgeen ook geldt voor de equivalentieklassen van irreducibele representaties van  $C(S^1/\theta\mathbf{Z})$ .

Als  $\theta$  een irrationaal getal is, is de ruimte  $S^1/\theta\mathbf{Z}$  niet meer Hausdorff. We zagen al dat  $C(S^1/\theta\mathbf{Z}) \simeq \mathbf{C}$  en dus weinig informatie bevat over de quotiëntruimte. Maar de stelling van hierboven geldt nu niet meer en de topologie van  $S^1/\theta\mathbf{Z}$  is veel beter gevat door de algebra  $A_\theta$ . Hier definiëren we  $A_\theta$  net als hierboven door



**Figuur 1** Definitie van het blad  $y = \theta x$  en een Kroneckerfoliatie van de torus

weer twee unitaire elementen  $u$  en  $v$  te introduceren die voldoen aan  $uv = e^{2\pi i\theta}vu$ , met nu  $\theta$  irrationaal. Laat  $A_\theta$  dus bestaan uit Fourierexpansies:

$$a = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} a_{nm} u^n v^m$$

met  $a_{nm}$  een snel dalende rij. Gemotiveerd door het voorbeeld voor rationale  $\theta$ , kunnen we concluderen dat de niet-commutatieve algebra  $A_\theta$  een fijnere beschrijving geeft van de continue functies op de niet-Hausdorff ruimte  $S^1/\theta\mathbb{Z}$  dan  $C(S^1/\theta\mathbb{Z})$ .

In de literatuur staat de algebra  $A_\theta$  bekend onder de naam *niet-commutatieve torus*. De oorsprong van deze naamgeving is dat de algebra  $A_\theta$  in de klassieke limiet  $\theta \rightarrow 0$  een algebra vormt die bestaat uit Fourierexpansies in twee onderling commuterende unitaire elementen  $u$  en  $v$ . Inderdaad kan zowel  $u$  als  $v$  worden opgevat als het genererend polynoom op een cirkel zodat  $A_{\theta=0} = C(\mathbb{T}^2)$ .

De niet-commutatieve torus kan ook worden begrepen als een *kwantisatie* van de torus  $\mathbb{T}^2$ . De kwantisatietheorie geeft een wiskundige beschrijving van het aan het eind van de vorige paragraaf beschreven vervangen van de grootheden plaats en impuls van een fysisch deeltje door elementen in een niet-commutatieve algebra. In het geval van de torus is er door Rieffel in [18] een *kwantisatieafbeelding*  $Q_\theta: C(\mathbb{T}^2) \rightarrow A_\theta$  geconstrueerd; deze afbeelding voegt aan iedere continue functie op de torus  $\mathbb{T}^2$  een element in  $A_\theta$  toe:

$$Q_\theta \left( \sum_{nm} f_{nm} e^{2\pi i(ns+mt)} \right) = \sum_{nm} f_{nm} u^n v^m,$$

met  $(s, t) \in \mathbb{T}^2$  en  $u, v$  de unitaire generatoren van  $A_\theta$ . Het nemen van de klassieke limiet  $\theta \rightarrow 0$  kan dan worden begrepen als een inverse van de kwantisatieafbeelding.

Tot slot van deze paragraaf merken we op dat de *meetkunde* van de niet-commutatieve torus kan worden beschreven door middel van een spectraaltripel, geïntroduceerd in [1]. Er zijn verschillende toepassingen van de niet-commutatieve torus te vinden in de natuurkunde; onder andere in de beschrijving van het kwantum Hall-effect.

### Recente ontwikkelingen

Recentelijk is er door Connes en Landi in [6] een veelomvattende generalisatie gevonden van de niet-commutatieve torus  $A_\theta$  naar compacte gladde ruimtes die een actie dragen van de torus  $\mathbb{T}^2$ . Dit geeft een veelomvattende uitbreiding van de schaarse lijst met voorbeelden van niet-commutatieve meetkundige ruimtes.

Een interessant voorbeeld dat we hier willen uitlichten is de niet-commutatieve vierdimensionale sfeer  $S^4_\theta$ . We definiëren eerst de (commutatieve) vier-sfeer  $S^4$  door middel van twee complexe getallen  $a, b$  en één reëel getal  $x$ , die voldoen aan de relatie van de sfeer

$$aa^* + bb^* + x^2 = 1$$

waarin  $*$  staat voor complexe conjugatie. We nemen nu de volgende parametrisatie van deze coördinaten,

$$\begin{aligned} a &= e^{2\pi is} \cos \phi \cos \psi, \\ b &= e^{2\pi it} \sin \phi \cos \psi, \\ x &= \sin \psi, \end{aligned}$$

waarbij de hoeken  $\phi, \psi$  domein  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  en  $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  hebben en  $s, t \in [0, 1)$ .

Het voorkomen van de twee fasefactoren  $e^{2\pi is}$  en  $e^{2\pi it}$  staat ons toe een niet-commutatieve algebra te introduceren, door deze fasefactoren te vervangen door twee unitaire elementen  $u, v$  die voldoen aan  $uv = e^{2\pi i\theta}vu$ , met  $\theta \in \mathbb{R}$ . We introduceren drie elementen  $\alpha, \beta$  en  $\chi$  als

$$\begin{aligned} \alpha &= u \cos \phi \cos \psi, \\ \beta &= v \sin \phi \cos \psi, \\ \chi &= \sin \psi. \end{aligned}$$

De relatie tussen  $u$  en  $v$  induceert  $\alpha\beta = e^{2\pi i\theta}\beta\alpha$  terwijl  $\chi$  met  $\alpha$  en  $\beta$  commuteert. Verder is er nog steeds de sfeer-relatie:

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + \chi^2 = 1.$$

De niet-commutatieve algebra gegenereerd door  $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*$  en  $\chi$  wordt vaak genoteerd met  $C(S^4_\theta)$ , suggererend dat deze algebra bestaat uit functies op de niet-commutatieve ruimte  $S^4_\theta$ . In de klassieke limiet  $\theta \rightarrow 0$ , reduceert  $C(S^4_\theta)$  tot de algebra  $C(S^4)$  van continue functies op  $S^4$ .

Het blijkt dat er weer een spectraaltripel kan worden geconstrueerd dat een complete beschrijving geeft van de meetkunde van de niet-commutatieve vier-dimensionale sfeer  $S^4_\theta$ .

In hetzelfde artikel [6] is hiervan een veelomvattende generalisatie geconstrueerd naar gladde ruimtes waarop een torus werkt door middel van diffeomorfismes. Men gebruikt hier de actie van de torus om als het ware een niet-commutatieve torus in de gladde ruimte te voegen. De meetkunde van al deze niet-commutatieve ruimtes kan weer worden beschreven met behulp van een spectraaltripel.

### Conclusie

We concluderen dat de alledaagse meetkunde niet altijd goed te beschrijven is met behulp van commutatieve algebra's. Wanneer de topologische ruimte onder beschouwing niet Hausdorff is, bevat de algebra van continue functies op deze ruimte niet alle topologische informatie over deze ruimte.

Het toelaten van een niet-commutatieve algebra kan een uitweg bieden om zulke ruimtes toch (algebraïsch) te kunnen beschrijven. We hebben laten zien dat de niet-commutatieve torus een beschrijving geeft van de bladenruimte van de Kroneckerfoliatie van de torus.

Met het bespreken van de niet-commutatieve torus en de niet-commutatieve vier-sfeer hebben we geprobeerd te illustreren dat meetkunde een veel groter speelveld omvat; hierin zijn niet-commutatieve ruimtes net zo goed te beschrijven als commutatieve ruimtes.

Er zijn nog vele uitbreidingen denkbaar van de niet-commutatieve meetkunde van Connes. Zo is het mogelijk niet-commutatieve vectorbundels en hoofdvezelbundels met daarop connecties te definiëren, en zelfs een niet-commutatieve Chern-Weiltheorie te construeren. We zullen hier niet verder op in gaan (zie hiervoor het boek [1]). In plaats daarvan geven we een aantal toepassingen van niet-commutatieve meetkunde of de technieken daarvan in andere delen van de wiskunde.

Eén toepassing is al genoemd, en is het beschrijven van mogelijk niet-Hausdorff topologische ruimten, in het bijzonder foliaties van gladde ruimtes. Naast een effectieve beschrijving van deze ruimtes met behulp van een spectraaltripel, zijn er ook belangrijke resultaten geboekt in de indextheorie, hetgeen meteen een andere toepassing levert. Zo is er een verrijkende generalisatie van de indexstelling van Atiyah en Singer in de vorm van de Connes-Moscovici-indexstelling [10]. Deze laatste stelling drukt de index van een bepaalde operator uit in eenvoudigere uitdrukkingen, zodat de index gemakkelijker te berekenen is. Een grote motivatie voor Connes en Moscovici in het bewijzen van deze indexstelling, was het uitbreiden van de Atiyah-Singer-indexstelling naar niet-Hausdorff ruimtes, zoals de bladenruimte van een foliatie. De Connes-Moscovici-indexstelling gaat veel verder dan dat en is toepasbaar op willekeurige spectraaltripels, en dus willekeurige niet-commutatieve gladde ruimtes.

Daarnaast is een belangrijke toepassing te vinden in de theorie van Hopfalgebra's. Kort gezegd is een Hopfalgebra een niet-commutatieve generalisatie van een groep waarbij de groepsstructuur wordt vertaald op het niveau van de algebra van (polynome, continue of gladde) functies op de groep. De niet-commutatieve groepen worden vaak aangeduid met de naam *kwantumgroepen*; zie voor meer details over kwantumgroepentheorie onder andere de boeken [14–15].

De rijke interactie tussen (commutatieve) differentiaalmeetkunde en Liegroepen motiveert de studie naar de interactie tussen de theorie van spectraaltripels (niet-commutatieve gladde ruim-

tes) en Hopfalgebra's (kwantumgroepen). Lange tijd leek het onmogelijk de twee theorieën op een consistente manier te combineren, er waren zelfs enkele *no-go* stellingen. Recentelijk is er een manier gevonden om deze problemen te overwinnen aan de hand van een voorbeeld [11]. Hierin wordt een kwantisatie van de Liegroep  $SU(2)$  bestudeerd. De meetkunde van deze niet-commutatieve ruimte, genoteerd met  $SU_q(2)$ , wordt beschreven door middel van een spectraaltripel, terwijl de groepsstructuur is gecodeerd in een Hopfalgebrastructuur op de algebra die hiervan onderdeel uitmaakt.

Tot slot merken we op dat er de laatste vijf jaar verschillende toepassingen zijn gevonden van niet-commutatieve meetkunde in de getaltheorie. Als voorbeelden noemen we het verschijnen van modulaire vormen in de classificatie van niet-commutatieve driedimensionale sferen [4–5] en in de berekening van de cyclische cohomologie<sup>2</sup> van de hierboven genoemde kwantumgroep  $SU_q(2)$  [3]. Nog recentere interacties tussen niet-commutatieve meetkunde en getaltheorie zijn te vinden in het werk van Connes en Marcolli [7] (zie ook de review artikelen [8–9, 16]). Hierin wordt de structuur achter renormalisatie van kwantumveldentheorie bestudeerd. Het blijkt dat de vier-cyclotomische gehele getallen  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  ten grondslag liggen aan de niet-commutatieve structuur van renormalisatie.  $\square$

**Dankwoord** Ik wil Klaas Landsman bedanken voor zijn commentaar, en Michel Ferrero en Giovanni Landi voor de uitgebreide discussie.

## Noten

- 1 De volledige stelling luidt: De ruimte van irreducibele representaties van een commutatieve  $C^*$ -algebra  $A$  vormt een compacte Hausdorff topologische ruimte  $X$  zodat  $A \cong C(X)$ . Een  $C^*$ -algebra is een genormeerde algebra met involutie, compleet in de norm topologie, waarbij de norm  $\| \cdot \|$  voldoet aan  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  voor elke  $a \in A$ . Voor  $A = C(X)$  is de norm gedefinieerd door  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ , welke voldoet aan de bovenstaande eigenschap zodat  $A$  een  $C^*$ -algebra vormt. Zie voor meer details bijvoorbeeld [13].
- 2 Cyclische cohomologie is een niet-commutatieve generalisatie van de Rham cohomologie

## Referenties

- 1 A. Connes, *Noncommutative Geometry*. Academic Press, San Diego, 1994.
- 2 A. Connes, 'Noncommutative geometry and reality', *J. Math. Phys.*, **36** (11) (1995), pp. 6194–6231.
- 3 A. Connes, 'Cyclic cohomology, quantum group symmetries and the local index formula for  $SU_q(2)$ ', *J. Inst. Math. Jussieu*, **3** (2004), pp. 17–68.
- 4 A. Connes and M. Dubois-Violette, 'Noncommutative finite-dimensional manifolds I. Spherical manifolds and related examples', *Commun. Math. Phys.*, **230** (2002), pp. 539–579.
- 5 A. Connes and M. Dubois-Violette, 'Moduli space and structure of noncommutative 3-spheres', *Lett. Math. Phys.*, **66** (2003), pp. 91–121.
- 6 A. Connes and G. Landi, 'Noncommutative manifolds: The instanton algebra and isospectral deformations', *Commun. Math. Phys.*, **221** (2001), pp. 141–159.
- 7 A. Connes and M. Marcolli, 'Renormalization and motivic Galois theory', *International Math. Research Notices*, **75**, pp. 4073–4092.
- 8 A. Connes and M. Marcolli, 'Q-lattices: Quantum statistical mechanics and Galois theory', *Journal of Geometry and Physics*, **56** (2006), pp. 2–23.
- 9 A. Connes and M. Marcolli, 'Quantum fields and motives' *Journal of Geometry and Physics*, **56** (2006), pp. 55–85.
- 10 A. Connes and H. Moscovici, 'The local index formula in noncommutative geometry', *Geom. Funct. Anal.*, **5** (1995), pp. 174–243.
- 11 L. Dabrowski, G. Landi, A. Sitarz, W. van Suijlekom, and J. C. Várilly, 'The Dirac operator on  $SU_q(2)$ ', *Commun. Math. Phys.*, **259** (2005), pp. 729–759.
- 12 J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston, 2001.
- 13 R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol.1: Elementary theory*, Academic Press, 1983.
- 14 C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer, Berlin, 1995.
- 15 S. Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge, UK: University Press, 1995.
- 16 M. Marcolli, *Arithmetic noncommutative geometry*, University Lecture Series, 36. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- 17 I. Moerdijk and J. Mrčun, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, Cambridge, UK: University Press, 2003.
- 18 M. A. Rieffel, 'Deformation quantization of Heisenberg manifolds', *Commun. Math. Phys.*, **122** (1989), pp. 531–562.

## Wijnand Rekers

Afdeling Wiskunde  
Vrije Universiteit  
De Boelelaan 1081a  
1081 HV Amsterdam  
w.rekers@few.vu.nl

# Oud Archief

Het Nieuw Archief voor Wiskunde, inmiddels alweer vijf jaar bezig met haar vijfde serie, bestaat sinds 1875. In dat jaar is het tijdschrift ontstaan vanuit de behoefte om bij te blijven met de nieuwste ontwikkelingen op het vakgebied. Wijnand Rekers, aio in de geschiedenis van wiskunde aan de Vrije Universiteit Amsterdam, vertelt hoe dit is gegaan.

“Slechts door krachtige samenwerking van allen toch zal het mogelijk zijn, in ons land een orgaan voor de Wiskunde met levensvatbaarheid staande te houden. En dan zal het blijken, naar ik hoop, dat het werkelijk aan eene bestaande behoefte zal voldoen.”

Deze woorden schreef David Bierens de Haan in 1875 in het voorwoord van het kort daarvoor opgerichte *Nieuw Archief voor Wiskunde*. De prominente Leidse hoogleraar in de wiskunde was de eerste redacteur van dit tijdschrift van het Wiskundig Genootschap. Maar aan zijn benoeming is wel het een en ander vooraf gegaan. Toen de redacteur van het tot dan toe uitgegeven *Archief van het Wiskundig Genootschap* vertrok, en naar goed gebruik

was besloten de titel van het tijdschrift te veranderen, bleek niemand bereid om het redacteurschap van het enigszins ouderwetse blad op zich te nemen.

### Een nieuwe inhoud

Daarom werd door het genootschapsbestuur besloten de inhoud van het tijdschrift aan te passen. De al eerder benaderde Bierens de Haan raakte nu geïnteresseerd, en hij werd al snel aangesteld. Hij bedong daarbij dat hij zich niet bezig zou hoeven te houden met het nakijken van ingestuurde antwoorden op prijsvragen, wat tot dan toe de belangrijkste taak van de eerste redacteur was geweest. Samen met lijvige verhandelingen hadden de prijsvragen de hoofdmoot van het *Archief* uitgemaakt.

Bierens de Haan verfijnde de plannen voor verandering die het bestuur had gemaakt, en plaatste het publiceren van deze ingezonden oplossingen op de achtergrond. Er kwam ruime aandacht voor de zogenaamde *Kleinere Mededeelingen*: artikelen van slechts enkele pagina's waarin problemen werden besproken of korte nieuwe bewijzen gegeven.

### Een nieuwe titel

Behalve deze inhoudelijke aanpassingen, deed Bierens de Haan ook een belangrijke cosmetische ingreep. Het bestuur had als titel in gedachten “Nieuw Archief, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: ‘Een onvermoeide arbeid komt alles te boven’”. Dat leek Bierens de Haan echter geen geschikte titel voor het tijdschrift dat hem voor ogen stond, dus koos hij voor de titel *Nieuw Archief voor Wiskunde*. Daarmee liet hij zien dat dit niet een van de traditionele genootschapspublicaties was — alleen interessant voor de leden — maar een modern tijdschrift dat zich bezig hield met wiskunde die voor alle wiskundigen interessant was. Het

feit dat het werd uitgegeven door het Wiskundig Genootschap was van ondergeschikt belang geworden. Daar kon niet iedereen zich in vinden. Een aantal bestuursleden vond dat de nieuwe titel suggereerde dat het Wiskundig Genootschap helemaal geen rol meer speelde, terwijl het genootschap voor de financiering van het tijdschrift garant stond. Na drie delen werd een compromis gevonden door in het voorwoord op te nemen dat het tijdschrift werd uitgegeven door het Wiskundig Genootschap.

### Een nieuw publiek

De uiteindelijke opzet van het *Nieuw Archief* bleek in een behoefte te voorzien, want in korte tijd konden vierenvierig nieuwe leden worden toegevoegd aan het ledental dat gedurende de negentiende eeuw vrij statisch was geweest. Het totale ledental kwam daarmee op 171. We weten dat deze groep nieuwe leden weinig activiteiten heeft ontplooid binnen het Wiskundig Genootschap, en dat ze dus maar om één reden lid werden: het ontvangen van het *Nieuw Archief*.

En niet alleen voor het ledental bleek het *Nieuw Archief* een gouden greep. Ook het aantal aangeboden artikelen steeg tot grote hoogte. In de notulen van de Algemene Vergadering van 5 mei 1875 lezen we:

“De Heer prof. D. Bierens de Haan het woord hebbende gevraagd, deelt aan de vergadering mede dat het hem aangenaam is te kunnen verklaren, dat aanvankelijk het *Nieuw Archief* veel kans van slagen heeft. Reeds is kopie genoeg voorhanden voor het tweede stuk dat in September as. verschijnen zal, ook reeds voor het derde stuk gedeeltelijk. Hij beveelt de zaak in de krachtige medewerking van alle leden van het Genootschap aan.”

En dat die medewerking er kwam, zal niemand verbazen: het tijdschrift bestaat nu nog.



Inhoudsopgave van het eerste nummer van het NAW

## Nelly Litvak

Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Afdeling Toegepaste Wiskunde  
Universiteit Twente, Postbus 217, 7500 AE Enschede  
n.litvak@ewi.utwente.nl

### Onderzoek

# Googling Maths

It is common belief that two arbitrary persons are linked by a chain of at most six acquaintances. This idea was coined in 1929 by the Hungarian writer Frigyes Karinthy in a short story called *Chains*. Later it made it into a romantic play, and a movie called *'Six Degrees of Separation'*, both by playwright John Guare. The World Wide Web has a far more complicated structure, and contains many more web pages, than there are humans on the planet. What can be said about its structure and its connectivity? Nelly Litvak, assistant professor in the field of Stochastic Operations Research at the Universiteit Twente, gives an account of what is currently known about the World Wide Web and its search engines.

In our informational society, the *World Wide Web* has quickly become one of the most important media. Given the gigantic size of the Web and its uncontrollable random expansion, the structure of the Web may seem completely chaotic, and the high performance of modern search engines looks almost like a magic. This note addresses two topics. First, we attempt to highlight some well-known structural properties of the World Wide Web and show how they can be modeled mathematically. Second, we will explain the principal scheme of a Web search engine and discuss important ranking algorithms used for listing the search results in an appropriate order.

The common viewpoint in the literature is to present the Web as a *graph*, with the web pages regarded as vertices and the links as *directed* edges. This simplified representation suffices to answer many important questions such as: What is a typical number of in- and out-going links? Does the Web consist of one giant knot of pages and links (the graph is

connected) or is it more like several separate 'islands'? What is the average path length between two connected pages? These extremely important questions have been partly answered in the famous paper by Broder et al. [7] that is discussed later in this article.

Several typical properties of the Web can also be observed in other complex stochastic networks such as network of collaborations, airline routes networks, biological networks, scientific citations, children's friendships, and many others [12]. This suggests that a network structure builds up in a certain way, which is similar for various large systems. Understanding how this structure appears enables one to predict the developments in a highly dynamic environment such as the World Wide Web. Currently, *growing network* models with *preferential attachment* are widely accepted as a possible mathematical explanation for many empirically discovered properties of complex networks. The main idea in these models is that the observed structure is a result of a

network growth driven by a 'rich get richer' mechanism. That is, a newly created node is more likely to link to nodes that are already well-connected. We will address the growing network models in more detail in this paper.

For a user, the practical availability of the enormous amount of information offered by the Web depends greatly on the efficiency of search engines. At the end of this paper we will briefly explain how a search engine works and focus on the hyperlink-based techniques used for listing the search results in a user-friendly order. In particular, we will explain the relatively simple mathematical model behind the *Google PageRank*.

### Graph Structure in the Web

As mentioned before, we view the Web as a set of vertices (pages, nodes), and directed edges (links) between them. We say that there is an edge from page  $i$  to page  $j$  if  $i$  has a hyperlink to  $j$ , i.e., a user can go from  $i$  to  $j$  by just one click.

Given the spontaneous chaotic development of the Web, one can hardly expect any regularity in its structure. From the first sight, it looks like the Web graph may have any shape you please. However, the fundamental research by Broder et al. [7] revealed several robust structural properties of the Web. The experiments in [7] were carried out on two large crawls each containing about 200 million pages and 1.5 billion links. To indi-

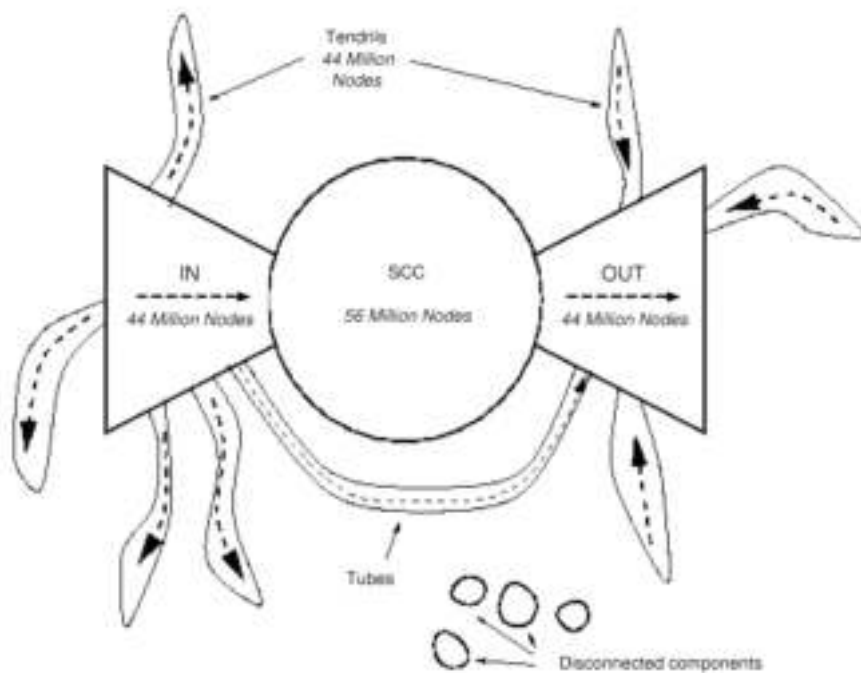


Figure 1 Graph Structure of the Web (from [7])

cate the importance of the Broder et al. paper, we just mention that it was cited in about 500 articles! Strikingly, most typical traits discovered in the World Wide Web have also been observed in other complex networks such as social networks, networks of scientific citations, biological networks, etc.

In Figure 1 we depict the structure of the Web as discovered in [7]. We see that the majority of the pages are united in one connected component, which has a shape of a 'bow tie'. For any two pages  $i$  and  $j$  in the 'bow tie', there is a hyperlink path either from  $i$  to  $j$  or from  $j$  to  $i$ . In the middle, there is a *Strongly Connected Component* (SCC) containing more than one quarter of all pages. SCC as used in graph theory stands for a set of nodes where each node can be reached from any other node by traversing directed edges. For the Web, it means that in the SCC, each page can be reached from any other page by clicking on hyperlinks. Next, there are large IN and OUT components. The pages in IN (OUT) have a path to (from) the SCC, but not back. There are also smaller groups such as *Tendrils* branching from IN or leading directly to OUT, and *Tubes* offering a path from IN to OUT. The little 'islands' represent the *Disconnected components*, which amount to less than 10% of the Web.

From the above, one may have the impression that the Web is greatly connected, and that for two random pages  $i$  and  $j$ , a hyperlink

path from  $i$  to  $j$  is likely to exist. However, a closer look suggests that this is not the case. Roughly speaking, a hyperlink path exists only if page  $i$  belongs to IN+SCC, and page  $j$  is in SCC+OUT. As both IN and OUT contain slightly less than 1/4 of all pages, the probability that the path exists is (only!) about 24%.

Assuming that a path from one page to another exists, one may ask what the average path length is? Despite the enormous size of the Web, the average path turns out to be relatively short. Experiments in [7] report about 16 clicks only! Moreover, if links can be traversed in both ways, the average path length reduces to the value of about 7.

This phenomenon — a short average distance between the nodes in large networks — has been known for a long time as a *small-*

*world effect*. One of the most famous experiments in this respect was carried out by Stanley Milgram in the sixties in a context of social networks. The participants were asked to pass a letter to their first-hand acquaintances so that it would finally reach the assigned targets individual. About 1/4 of the letters reached the target passing, on average, through the hands of only about 6 people! [12]

While looking quite astonishing, the small-world effect actually has a simple mathematical explanation. Here is a greatly simplified argument, which is far from being rigorous but helps to grasp the main idea. For a given node, assume that the number of nodes within a distance  $r$  is roughly  $a^r$ , where  $a > 0$  is a constant. This assumption is true for many real-life networks. Now, let  $l$  be the maximal distance from one node to another. Then it follows from geometric series that the total number of nodes  $N$  is

$$N = 1 + a + a^2 + \dots + a^l = (a^{l+1} - 1)/(a - 1) \approx a^{l+1}/(a - 1).$$

Hence, for large  $N$ , the value  $l$  turns out to be of the order  $\log(N)$ . For example, in a network of one billion nodes, this number is of the order 10, which is exactly the small-world effect observed in experiments. For more detail on the small-world effect, we refer to the brilliant survey by Mark Newman [12] and references therein.

### Power laws

Let us consider the number of in- and outgoing links, called, respectively, *in-degree* and *out-degree*, of a Web page. The question is, for instance, what is the fraction  $p_k$  of pages whose in-degree is exactly  $k$ ? The experiments carried out in different times on different crawl sizes agree that  $p_k$  is approximately proportional to  $k^{-2.1}$ . In Figure 2 (left side), we present the experimental results on the in-

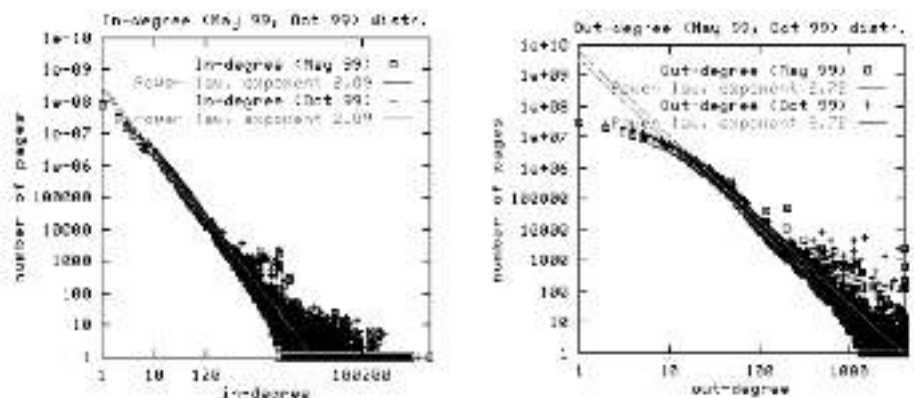


Figure 2 In- and out-degree (May99, Oct99) in the log-log scale (from [7])

degree distribution [7].

Plotted in the log-log scale, for each in-degree  $k$ , the values of  $p_k$  concentrate around a straight line:  $\log(p_k) = -2.09 \log(k) + \text{const}$ , which signals the power law:  $p_k \approx \text{const} \cdot k^{-2.09}$ .

Put in words, the power law means that the majority of the pages have a relatively small in-degree but there is a noticeable group of pages whose in-degree is high. To see that, let us evaluate the number of pages with in-degree 1000. According to the power law distribution, the fraction of such pages is of the order  $1000^{-2.1} \approx 10^{-6}$ . Hence, for a net of one billion pages, the number of pages whose in-degree is one thousand is of the order  $10^9 \cdot 10^{-6} = 1000$ . A group of this magnitude can not be neglected in any reasonable network analysis.

To demonstrate a difference with, for instance, the exponential law, assume that  $p_k$  is of the order  $10^{-k}$ . Then for  $k = 1000$ , the proportion  $10^{-1000}$  results in a negligible group of pages, even in a truly giant network. As we know that *there are* well-connected nodes (think for instance of the homepage of Google or CNN), the power law seems to be a more realistic model for the in-degree distribution. As we see in the right plot in Figure 2, the out-degree also obeys a power law but it has an exponent of about  $-2.7$ . Thus, for large  $k$ , the probability of in-degree  $k$  is larger than the probability of out-degree  $k$ .

Clearly, the Web can be subdivided into large logically united components, for instance, by domain or by topic. Surprisingly, it turns out that such large components have a structure similar to the Web as a whole, which is a result of many essentially independent stochastic processes evolving in the Web at various scales.

This phenomenon, called *self-similarity*, was observed in a number of experiments on different crawl sizes, and analyzed in detail in [8]. There it was shown that a Web-like structure is present in so-called *thematically unified clusters*, i.e. sets of pages that share some common feature, for instance, content, domain, or geographical location.

The authors also note that in a purely random set of pages the structure will be lost. Indeed, assume that a sample of one million pages out of possible one billion is chosen at random. Then the probability that both ends of some edge belong to the chosen sample is  $(10^6/10^9) \cdot (10^6/10^9) = 10^{-6}$ . Since the average number of links per page is just about 8, we get on average  $8 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} = 8000$  links in the random collection of one million

nodes. With such a small amount of links one can hardly expect any interesting graph-theoretic structure.

### Mathematical models of the Web: preferential attachment

Currently, growing network models with preferential attachment are widely accepted as a possible mathematical explanation of many empirically discovered properties of the Web. In these models, a newly created page is more likely to link to pages that are already well-connected. The most famous model of this sort was suggested in 1999 by Barabasi and Albert [3], and many modifications have appeared since then. We will closely follow Newman [12] in explaining how the model works and why it leads to the power law in-degree distribution.

In [3], a network starts with one node. When a new node appears, it has  $m \geq 1$  *undirected*, or, equivalently, *bi-directed* links to distribute among the existing nodes. In doing so, a node follows the ‘rich get richer’ strategy, meaning that the probability that some node  $v$  gets a new link is proportional to the current in-degree of  $v$ . Thus, if the fraction of nodes with in-degree  $k$  is  $p_k$ , then the probability that a new link goes to this group is

$$\frac{k p_k}{1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + \dots + k p_k + \dots} = \frac{k p_k}{2m}, \quad k \geq 1.$$

The denominator on the left-hand side is first defined so that the sum of the probabilities equals 1; we then notice that it equals the average number of links per page, which is  $2m$  since each node brings  $m$  bi-directed edges.

Now, with each new node, the group of in-degree  $k$  receives on average  $m \cdot k p_k / (2m) = (1/2) k p_k$  links, which is independent of  $m$ . Thus, the number of vertices with in-degree  $k$  *decreases* by this amount since these nodes join the group of in-degree  $k+1$ . On the other hand, on average  $(1/2)(k-1)p_{k-1}$  nodes of in-degree  $k-1$  will also receive a new link, so the number of vertices with in-degree  $k$  will *increase* by this number. If the total number of nodes is very large then the proportion of nodes with in-degree  $k$  almost does not change (in fact, this proportion converges to a constant when the number of nodes goes to infinity). So, when the  $n$ th new node is added and  $n$  is large enough, the number of nodes with in-degree  $k$  changes approximately by  $n p_k - (n-1) p_k = p_k$ . Equating the incre-

ments in the number of nodes with in-degree  $k$ , we can write so-called master equations, which hold when the number of vertices in the graph goes to infinity:

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(k-1)p_{k-1} - \frac{1}{2}k p_k, & \text{for } k > m \\ 1 - \frac{1}{2}m p_m, & \text{for } k = m \end{cases}$$

Here the last equation reflects that there is always one new node with exactly  $m$  links, and at the same time the group of such nodes decreases by  $(1/2)m p_m$ , as happens for any other value of  $k$ . Writing the equation for  $p_m$  we get  $p_m = 2/(m+2)$ , and for  $k \neq m$  we obtain  $p_k = p_{k-1} \cdot (k-1)/(k+2)$ . Recursively, we arrive at

$$p_k = \frac{(k-1)(k-2) \cdots m}{(k+2)(k+1) \cdots (m+3)} p_m = \frac{2m}{(k+2)(k+1)k}.$$

Thus, for large  $k$ , we have  $p_k \sim k^{-3}$ , which is a power law with exponent 3. We note that the present model deviates from the experimental results suggesting  $p_k \sim k^{-2.1}$ . However, this deviation was resolved in later generalizations by other authors.

The significance of the Barabasi and Albert model is that besides modeling the growing random graph that exhibits the power law in-degree distribution, it also aims to explain *why* such distribution appears. We note that this model is in the spirit of the earlier model developed in 1965 by Derek de Solla Price in his work on scientific citations. Even before that in the 1950s, Herbert Simon showed that the power law distributions arise from the ‘rich get richer’ mechanism, also referred to as the *Matthew effect* [12] in sociology. As an example, we note that something like the power law can be observed in a group of school children: a few boys and girls are very popular while others have only one or two friends. Is it not natural to explain this by the tendency of the children to make friends with popular, or ‘well-connected’ classmates?

The models with preferential attachment have received much attention in the network literature. There is a lot of research on generalizing these models in such a way that they better reflect complicated features of the Web such as directed links, the hierarchical structure, appearing and disappearing of links and even the willingness of users to link to highly ranked pages [16]. The other research direction concerns a rigorous mathematical

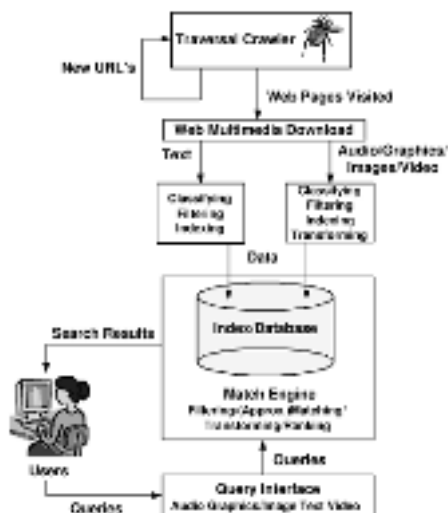


Figure 3 General scheme of a search engine

analysis of (generalized) preferential attachment models, based on the theory of random graphs. In particular, the power law distributions were rigorously derived, and it was also shown that the models with preferential attachment exhibit a small-world effect [4–5]. The ‘rich get richer’ mechanism appears to be responsible for many typical developments in complex networks.

### Search Engines

Studying and modeling Web structures is one of the main challenges for designing Web search engines [9], which are of extreme importance for navigating the Web. Here, we briefly discuss the working of a search engine, and consider two prominent hyperlink-based ranking techniques (in particular, the Google PageRank) for selecting important and interesting Web pages. The general scheme of a so-called crawler-based search engine is presented in the above figure.

Using this scheme we highlight essential components of the Web search, using a nice paper by Galliano Cosme published in Search Engine Guide in May 2005 ([www.searchengineguide.com](http://www.searchengineguide.com)). According to that paper, a crawler-based search engine consists of three main parts: the spider (also known as crawler or robot), the index, and the software.

The *spider* is a program that visits pages and follows hyperlinks to move from one page to another. The main goal is to obtain the most recent copy of each page but, as we will see later, it may be also important for recording the hyperlink structure. The spiders start their journey from the pages that are already in the search engine database. The most active spiders on the Web are Googlebot

(Google), Slurp (Yahoo!) and MSNBot (MSN Search).

The copies of crawled pages are stored in the *index*, which is essentially a giant catalogue or database where the pages are classified, filtered, indexed, transformed (if needed) and grouped according to some rules, for instance, according to the topic. The size of the index is truly enormous. Just to give an idea, the latest figure revealed by Google is 8 billion pages! In practice, both crawling and indexing require significant computing time and capacity.

When a user inserts a query in a query interface (like a famous white page of Google), the search engine finds relevant pages in its database using software based on sophisticated algorithms and state-of-art information retrieval techniques. In Figure 3 this software tool is denoted as Match Engine. It is beyond the scope of this paper to discuss the methods for retrieving relevant pages from the database. We observe only that, in one way or another, the query is compared with the key-words related to a Web page. Naturally, these are mainly the keywords and the text included in the page itself. However, curiously enough, the text of the hyperlinks connecting to a page is also taken into account, at least by Google. That is why the query ‘*miserable failure*’ returns a biography of G.W. Bush although these words have never been mentioned in this document! The relevant pages are then ranked in some order that the search engine finds most appropriate, and the results are presented to the user. The ranking algorithm is a well-kept secret, and it depends on many factors, for instance, on geographical location of the user and maybe even on his/her last searches.

We would like to emphasize that the main structural feature of a search engine is that crawling and indexing happen without involving the user, who ‘only’ needs to consult a database and receive the results from the *index* rather than from the Web itself. Search engines are equipped with modern software and powerful processors that scan the index extremely fast so that the search results appear on a screen almost instantaneously. As a minor drawback of this scheme, the user may access only the pages listed in the index, which is not complete and not entirely up-to-date. For instance, new pages that have been crawled but have not yet been added to the index, will *not* be available to those searching with the search engine. This is the reason why Web site owners have to make sure that their sites are timely indexed and highly

ranked. In business, there is a whole branch of marketing called Search Engine Optimization that develops techniques for increasing the Web site’s ranking performance.

In the end, the main goal of any search engine is to satisfy the user, so we may trust that the vastly expanding index is frequently updated, and matching/ranking algorithms are steadily improving to provide us with the desirable results. Note, by the way, that the index and the matching/ranking mechanisms are different for different search engines, and therefore it is not uncommon to use several search engines for the same query.

### Node ranking based on the hyperlink structure

We claimed that the knowledge of the hyperlink structure is important for search engines. Obviously, such knowledge helps to optimize the spider’s crawl, and it can be used for matching as well. However, some search engines, and particularly Google, also use hyperlinks for ranking the Web pages according to their importance.

Suppose, a search engine has received a query and found relevant pages in its index. Then another problem arises. Namely, thousands of pages may match the query, leaving the question how to define the *most important* page. In the beginning, this problem was solved solely by finding pages with best-matching text. However, with fast expansion of the Web, such methods soon became inefficient. Two innovative path breaking approaches were presented in 1998: one belongs to a well-known academician Jon Kleinberg [11], and another came from two PhD students from Stanford, Sergey Brin and Larry Page [6] known as the ‘founding fathers’ of Google. Although the two approaches are different, the main idea is similar: the page should be ranked high and listed high if many other good pages have a hyperlink to this page, and thus the page is recognized by the Web community as an important source of information. In contrast to the previously used methods, these novel ranking techniques are based not on the content of the pages but on the most fundamental feature of the Web – the hyperlink structure. Naturally, both methods require the knowledge of who is linking to whom. This information is recorded in the *adjacency matrix*  $A$  defined as follows:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{there is a link from } i \text{ to } j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Such a matrix can be obtained by the spider while crawling the Web.

In his work [11], Kleinberg considers two sorts of pages: hubs and authorities. A hub serves as a reference giving many links to important authorities. The authorities, on the other hand, contain important information and thus receive many links from the hubs. Formally, let  $a_i$  and  $h_i$  be respectively the authority and the hub score of page  $i = 1, \dots, n$ . Then

$$a_i = \sum_j A_{ji} h_j, \quad h_i = \sum_j A_{ij} a_j.$$

The HITS algorithm suggested by Kleinberg, is as follows:

1. Retrieve a set of relevant pages from the database.
2. Extend this set by adding all pages that have links to and from the selected pages.
3. For the extended set, compute the hub and authority scores.
4. Since the user is mostly interested in authoritative sources, list the search results according to the authority score.

If we want to include this ranking algorithm into the scheme of Figure 3, we should add an *Authority Score Computation* block between the Database and the User (this option is depicted in Figure 4 with dashed arrows).

Fortunately, the authority scores can be computed very fast because the number of pages involved in the computations is not very large, which results in a well solvable linear algebra problem.

The approach of Brin and Page is different. In their work [6], they introduce a universal popularity measure – the PageRank. The PageRank  $PR(i)$  of page  $i$  depends on how many other pages link to  $i$  and how important these pages are. The original formula is as follows:

$$PR(i) = c \sum_j \frac{A_{ji}}{d_j} PR(j) + (1 - c), \quad (1)$$

where  $i = 1 \dots n$ ,  $d_j$  is the number of outgoing links from page  $j$ ,  $n$  is the number of pages in the Web, and  $c$  is a constant between zero and one (Google originally used  $c = 0.85$ ). Brin and Page's algorithm works as follows:

1. Right after crawling the Web, retrieve and store the matrix  $A$ .
2. Compute the PageRank score for each page and store the PageRank vector.
3. For each query, list the matching pages ac-

cording to their PageRank.

In order to reflect this procedure in Figure 3, we have to add a chain that is depicted in Figure 4 by solid arrows: there is a large computation block right after crawling but there is no computation involved after consulting the database, which in general helps to deliver search results faster.

Let us now take a closer look at the famous PageRank formula (1). We see that two factors are taken into account: the quality and the quantity of incoming links. The idea is that if we view a link as a vote, then pages with many links deserve attention. Moreover, if a page has only a few links but these links come from important sites, then this page is also worth browsing.

PageRank has an insightful probabilistic interpretation. The  $PR(i)$  in (1) can be normalized so that they sum up to one. We denote the normalized PageRank values by  $\pi_i$ 's:

$$\pi_i = \frac{PR(i)}{PR(1) + PR(2) + \dots + PR(n)}, \quad (2)$$

for  $i = 1, \dots, n$ . The vector  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  is a probability distribution that can be interpreted via the so-called *easily bored surfer* model. Consider a random surfer who starts navigating the Web from a random page. At each page, with probability  $c$ , the surfer follows a randomly chosen hyperlink, and with probability  $1 - c$  he gets 'bored' and jumps to a random page. To keep the model equivalent to (1), we have to make a natural assumption that the user always jumps to a random page when reaching a page which does not have out-going links. Such pages, called *dangling nodes*, should not influence the ranking.

The described surfing process can be modeled as an *irreducible Markov chain* [10], since there is a possibility to make a random jump, and thus, any two pages (states) can be reached from each other. Hence, it follows from the theory of

Markov chains that  $\pi_i$  is nothing else but the long-run probability, or long-run fraction of time, that a random surfer spends on page  $i$ . Moreover, this probability is uniquely defined for all  $i = 1, \dots, n$ . Naturally, the higher the probability, the more popular the page is. It follows from the description of the surfing process that all  $\pi_i$  satisfy

$$\pi_i = c \sum_j \frac{A_{ji}}{d_j} \pi_j + c \frac{1}{n} \sum_{j \in D} \pi_j + \frac{1 - c}{n},$$

$$\sum_i \pi_i = 1,$$

with  $i = 1 \dots n$  and  $D$  a set of dangling nodes. The last equation is equivalent to (1) and (2).

The 'dumping factor'  $c < 1$  is needed in particular because the random jump option guarantees that the unique distribution  $\pi$  exists. With  $c = 1$ , it is quite likely that some pages can not be reached from each other, and then according to the Markov chain theory, the PageRank vector is not well defined.

The PageRank citation ranking technique is very efficient and is actually used by Google, although maybe not in its original form. The disadvantage of this method is however obvious. Equation (1) must hold for each  $i = 1, \dots, n$ , with  $n$  the number of pages in the index. This means that we have a huge linear system with  $n$  equations and  $n$  variables, where  $n$  is of the order of billions. Solving such linear system directly is practically unfeasible. Google originally proposed to use a *power iteration method* that works as follows. First, put  $\pi^{(0)} = (1/n, \dots, 1/n)$ . Then for each  $k \geq 1$  compute

$$\pi^{(k)} = c \sum_j \frac{A_{ji}}{d_j} \pi_j^{(k-1)} + c \frac{1}{n} \sum_{j \in D} \pi_j^{(k-1)} + \frac{1 - c}{n}.$$

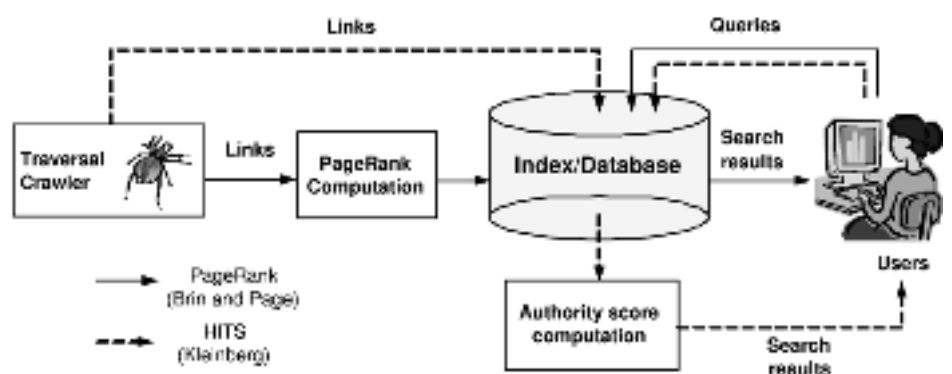


Figure 4 Ranking computation: HITS versus PageRank

The algorithm stops when  $\pi^{(k)} \sim \pi^{(k-1)}$ . In their first work, Brin and Page reported convergence in 50-100 iteration.

It can be shown using Perron-Frobenius theory that the difference between the approximation  $\pi^{(k)}$  and the real PageRank value  $\pi$  is of the order  $c^k$  (see e.g. [13]). Thus, the power iterations converge exponentially, while smaller values of  $c$  ensure an even faster convergence, which is a valid reason to keep  $c$  not too close to 1. On the other hand, in (1), the term that depends on hyperlinks decreases with  $c$ , so small  $c$  results in an almost uniform PageRank. Hence, a reasonable compromise has to be found, and Google's original choice was  $c = 0.85$ . We refer to the interesting and extremely well written survey [13] for more detail on this respect.

The present value of  $c$  and the actual algorithm used by Google nowadays is not known to the public but nevertheless, the PageRank distribution still plays an important role in defining the order of search results. Moreover, according to the publicly available information, power iterations are still used for the

PageRank computation. There are a lot of intelligent techniques developed for making the power method more efficient, such as parallel computing, block iteration methods, rearranging, two-stage methods, and many others [13–15].

Alternative algorithms that allow to compute the PageRank on-line while crawling the Web also exist. One of the methods that works surprisingly well is a *Monte Carlo* algorithm [2]. In a nutshell, this algorithm runs a random surfing process from each page. If a random jump has to be made, the simulation stops and then starts from the next page. At the end, the PageRank of page  $i$  is computed as the number of visits to this page divided by the total number of steps performed. Surprisingly, it is sufficient to run such simulation only *once* from each page to obtain a reasonable estimate of the PageRank.

Another intelligent on-line method is proposed in [1]. Initially, each page receives an equal amount of cash, and whenever a page is crawled, it distributes all its cash among its outgoing links. After several crawls, the

importance of a given page is evaluated as a fraction of cash spent by this page compared to the total amount spent by all pages together. The algorithm converges very fast, does not require any storage of the hyperlink matrix, and quickly adopts to the changes in the Web. Besides, analytical studies of this algorithm give rise to many interesting mathematical problems.

Although the PageRank is not directly related to the number of incoming links there is an intimate connection between these two measures of page popularity. For instance, it turns out that the fraction of pages whose PageRank is about  $k/n$  is roughly proportional to  $k^{-2.1}$  [16], exactly the fraction of pages with  $k$  incoming links! Since the models with preferential attachment explain the power law phenomenon for the in-degree, it is interesting to study the PageRank and its evolution in these models. This leads to a whole class of challenging research problems in the novel exciting area of complex stochastic networks. ◀

## Referenties

- 1 S. Abiteboul, M. Preda and G. Cobena, 'Adaptive on-line page importance computation', in: *The Twelfth International World Wide Web Conference WWW2003*, 2003.
- 2 K. Avrachenkov, N. Litvak, D. Nemirovsky and N. Osipova, *Monte Carlo methods in PageRank computation: When one iteration is sufficient*, Technical Report 1754, University of Twente, 2005.
- 3 A.-L. Barabási, and R. Albert 'Emergence of scaling in random networks', *Science* **286** (1999), pp. 509–512.
- 4 B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer and G.E. Tusnády, 'The degree sequence of a scale-free random graph process', *Random Struct. Algorithms* **18**(3) (2001), pp. 279–290.
- 5 B. Bollobás and O. Riordan, 'The diameter of a scale-free random graph', *Combinatorica* **4** (2004), pp. 5–34.
- 6 S. Brin, L. Page, R. Motwami and T. Winograd *The PageRank citation ranking: bringing order to the web*, Stanford University Technical Report, 1998
- 7 A.Z. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins and J.L. Wiener, 'Graph structure in the Web', *Computer Networks* **33** (2000), pp. 309–320.
- 8 S. Dill, R. Kumar, K. McCurley, S. Rajagopalan, D. Sivakumar, and A. Tomkins, 'Self-similarity in the Web', *ACM Trans. Internet Technology* **2**(3) (2002), pp. 205–223.
- 9 M.R. Henzinger, 'Algorithmic challenges in Web search engines', *Internet Mathematics* **1**(1) (2003), pp. 115–126.
- 10 S. Karlin and H.M. Taylor, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, San Diego, (1998).
- 11 J. Kleinberg, 'Authoritative sources in a hyperlinked environment', *Journal of the ACM* **46** (1999), pp. 604–632.
- 12 M.E.J. Newman, 'The structure and function of complex networks', *SIAM Rev.* **45**(2) (2003), pp. 167–256.
- 13 A.N. Langville and C.D. Meyer, 'Deeper inside PageRank', *Internet Mathematics* **1**(3) (2005), pp. 335–380.
- 14 A.N. Langville and C.D. Meyer, *A reordering for the PageRank problem*, NCSU CRSC Technical Report CRSC-TR04-16, 2004.
- 15 C.P.-C. Lee, G.H. Golub and S.A. Zenios, *A fast two-stage algorithm for computing PageRank*, Stanford University Technical Report, 2004.
- 16 G. Pandurangan, P. Raghavan and E. Upfal, 'Using PageRank to characterize Web structure', *8th Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON)*, 2002.

Gunther Cornelissen

Universiteit Utrecht  
Mathematisch Instituut  
Postbus 80.010  
3508 TA Utrecht  
cornelis@math.uu.nl

## Diophantische vergelijkingen

# Kunnen we het echt?

Hoe moeilijk is het oplossen van een polynoomvergelijking in breuken? Kan de computer een handje helpen? Is het probleem algoritmisch beslisbaar? Recente ontwikkelingen onthullen de theorie van diophantische vergelijkingen als een in zijn eigen staart bijtende slang: als we voldoende begrijpen over één dergelijk probleem, kunnen we aantonen dat het algemene probleem bijzonder complex is.

We zullen de term *diophantische vergelijking* gebruiken voor een polynoomvergelijking in meerdere veranderlijken, met rationale breuken als coëfficiënten. We zoeken naar oplossingen in gehele getallen, of in rationale breuken. Dit vraagstuk staat al heel lang in de wiskundige belangstelling, getuige bijvoorbeeld de naamgeving naar Diophantus van Alexandrië (derde eeuw n.Chr.) en zijn boek de *Arithmetica*, waarin een grote verzameling van dergelijke problemen wordt genoemd en met ad-hoc methoden opgelost.

De volgende 'meetkundige' terminologie is voor deze vraagstukken ondertussen standaard [1]: noem een stelsel polynoomvergelijkingen in meerdere veranderlijken met gehele coëfficiënten een *variëteit*  $V$

$$V: \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

We schrijven  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$  en  $\mathbf{R}$  voor de verzameling van alle gehele, rationale en reële getallen, respectievelijk. Stel dat  $R = \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \dots$  en schrijf vervolgens  $V(R)$  voor de verzameling oplossingen van het stelsel in  $R$ :

$$V(R) := \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : \forall i: f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

In plaats van oplossingen van het stelsel  $V$  praten we ook over *R-rationale punten van de variëteit*  $V$ . Dan wordt de centrale vraag: Wat zijn  $V(\mathbf{Z})$  en  $V(\mathbf{Q})$ ? Is er een algemene methode om dit soort problemen aan te pakken? David Hilbert formuleerde de vraag op het Internationale Wiskundecongres van 1900 in Parijs als volgt:

"Eine diophantische Gleichung mit irrendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt: man soll ein Verfahren angeben, nach welchen sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist."

Hilbert zelf geloofde waarschijnlijk wel in het bestaan van zo'n 'Verfahren' (in onze interpretatie is dit een algoritme in de zin van Turing), getuige een radiotoespraak uit 1930 waarin hij fulmineerde tegen het relativisme van fysioloog DuBois-Reymond:

"Statt des törichten Ignorabimus heiße im Gegenteil unsere Lösung: Wir müssen wissen, Wir werden wissen." [2]

In zijn algemeenheid overstijgt de vraag naar een mechanische oplossingsmethode voor zulke problemen de getaltheorie. Heel veel bekende wiskundige problemen zijn *expliciet* herschreven als de vraag of een diophantische vergelijking een oplossing heeft of niet, zo onder andere: de Riemannhypothese, het bepalen of een integraal over  $(-\infty, +\infty)$  van een algebraïsche functie convergeert of niet, de laatste stelling van Fermat [3]. . . Meestal helpt dit niet om het oorspronkelijke probleem op te lossen, maar laat wel zien hoe universeel het oplossen van diophantische vergelijkingen is [4].

Hilbert stelt de vraag naar gehele oplossingen, maar het is net zo zinvol te vragen naar rationale oplossingen. Hoewel we voor gehele oplossingen sinds 1970 het antwoord op zijn vraag kennen (zie wat verder), weten we niet veel over de vraag in breuken. In dit stukje willen we wat recente ontwikkelingen over dit probleem behandelen op het grensgebied van logica, topologie en getaltheorie. Daarvoor zullen we elliptische krommen nodig hebben, en die zullen we invoeren aan de hand van een concreet getaltheoretisch probleem.

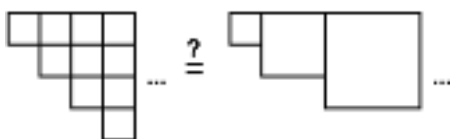
### De Utrechtse elliptische kromme

De computer heeft de praktijk van het

oplossen van diophantische vergelijkingen dramatisch beïnvloed. Veel klassieke problemen kunnen bijna mechanisch worden aangepakt. Tijdens mijn college *Elliptische Krommen* in 2002 vroeg derdejaarsstudent Wouter Waalewijn het volgende: voor welke natuurlijke getallen  $x$  en  $y$  is de som van de eerste  $y$  getallen gelijk aan de som van de eerste  $x$  kwadraten:

$$1 + 2 + \dots + y = 1^2 + 2^2 + \dots + x^2?$$

De lezer kan misschien proberen een paar waarden voor  $x$  en  $y$  te vinden zodat dit klopt. Zijn er eindig of oneindig veel oplossingen?

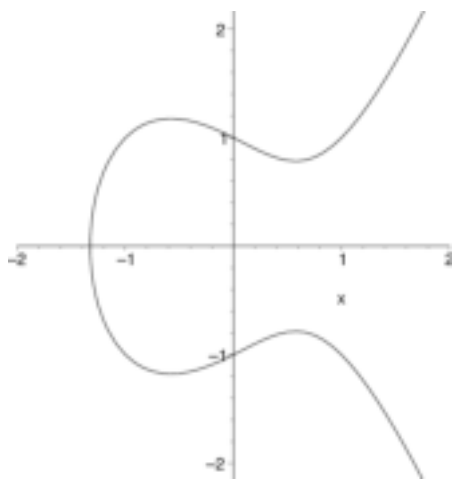


Het probleem van Wouter Waalewijn

Gesloten formules voor linker- en rechterlid van deze vergelijking herleiden het vraagstuk tot: bepaal de positieve gehele punten op de kromme  $E$  van graad drie gegeven door

$$E : \frac{y(y+1)}{2} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Dit is een zogenaamde elliptische kromme (in het algemeen van de vorm 'kwadratisch in  $y$  = kubisch in  $x$ ' en glad). In zijn kleine scriptie loste derdejaarsstudent Marius de Leeuw dit probleem op aan de hand van elliptische logaritmen [5]. Het vreemde aan de methode is dat eerst alle oplossingen in breuken worden 'bepaald', en dan gekeken wordt welke daarvan geheel zijn. Kort door de bocht gegaan werkt



De elliptische kromme  $y^2 = x^3 - x + 1$

dit als volgt. De rationale punten  $E(\mathbb{Q})$  vormen een eindig voortgebrachte torsievrije abelse groep van rang twee (die twee is trouwens heel uitzonderlijk, er wordt verwacht dat een elliptische kromme over  $\mathbb{Q}$  rang  $\leq 1$  heeft met waarschijnlijkheid één). Dit betekent dat er twee oplossingen  $P$  en  $Q$  zijn zodat elke oplossing te schrijven is als  $aP + bQ$  met  $a, b$  gehele getallen, waarbij de 'som' + gedefinieerd is door het feit dat drie collineaire punten op  $E$  bij definitie som 0 hebben.

Als vrije voortbrengers van die groep kunnen we volgende twee punten kiezen:  $P = (1, 1)$  en  $Q = (-9/8, -1/16)$ . Dit kan door de zogenaamde methode van 2-descent met het computerprogramma *MWrank* van John Cremona onvoorwaardelijk worden bewezen binnen luttele seconden. Een resultaat uit de diophantische approximatie van Sinou David, aan de praktijk aangepast door Stroeker en Tzanakis, levert een methode voor het bepalen van alle combinaties  $aP + bQ$  die geheel zijn.

In het voorbeeld vindt men dat alle gehele punten  $|a|, |b| < 2,1 \cdot 10^{38}$  hebben — maar niet alle dergelijke combinaties zijn geheel,  $Q$  zelf bijvoorbeeld niet. De methode levert in elk geval eindig veel mogelijke punten, maar wel met meer cijfers dan er atomen zijn in het melkwegstelsel. Gelukkig kan de bovengrens op  $|a|$  en  $|b|$  met het roosterreductiealgoritme van Lenstra-Lenstra-Lovász (bijvoorbeeld in *Mathematica*) worden gereduceerd tot 7, en aldus vindt men alle oplossingen voor het probleem:

$$(x, y) \in \{(1, 1), (5, 10), (6, 13), (85, 645)\}.$$

Op een voorlichtingsdag in Utrecht vond het publiek, bestaande uit 6-vwo leerlingen en hun ouders, de eerste drie oplossingen, dacht eerst dat er oneindig veel zouden zijn ("omdat er zoveel kleine oplossingen zijn"), en dan dat die drie de enige waren ("omdat we er niet meteen nog meer vinden").

Een ander meer klassiek voorbeeld: de computer bewijst ook bijna ogenblikkelijk dat  $W(\mathbb{Q}) = \{(12, \pm 36)\}$  voor de elliptische kromme  $W : y^2 = x^3 - 432$ . Dit onschuldige probleem is via een eenvoudige variabelensubstitutie equivalent met de bewering dat  $U(\mathbb{Q}) = \{(1, 0), (0, 1)\}$  voor  $U : x^3 + y^3 = 1$ ; het Fermatprobleem voor exponent drie, dat voor het eerst door Euler werd opgelost! Ook het

Fermatprobleem voor exponent vier ' $x^4 + y^4 = 1$ ' en zeven ' $x^7 + y^7 = 1$ ' kunnen worden herleid tot het bepalen van rationale punten op elliptische krommen ( $y^2 = x^3 - x$  en  $y^2 = 4x^3 + 21x^2 + 28x$ , respectievelijk) [6].

### Kleuren en projecteren

Bekijken we nu kort de vraag of er een relatie is tussen  $V(\mathbb{Q})$  en  $V(\mathbb{R})$ . We kunnen  $V(\mathbb{R})$  in de  $n$ -dimensionale ruimte  $\mathbb{R}^n$  tekenen en daarop  $V(\mathbb{Q})$  inkleuren. Op een kegelsnede (graad 2 vergelijking in 2 veranderen) liggen ófwel géén rationale punten, ófwel liggen de rationale punten willekeurig dicht bij de reële punten; de  $\mathbb{R}$ -topologische afsluiting van  $V(\mathbb{Q})$  is dus de hele  $V(\mathbb{R})$ . Op een elliptische kromme (graad 3 in twee veranderen) gebeurt dat soms, en soms ook niet: op  $W$  liggen maar eindig veel rationale punten, terwijl de rationale punten op  $E$  dicht liggen in de reële punten.

Barry Mazur stelde in 1990 het volgende vermoeden op dat beide gevallen dekt [7].

**Vermoeden van Mazur.** De topologische afsluiting van  $V(\mathbb{Q})$  in  $V(\mathbb{R})$  heeft maar eindig veel samenhangingscomponenten.

Dit lijkt een heel elementaire uitspraak over de ligging van rationale punten in variëteiten. Maar niemand weet of dit vermoeden klopt. Het kan worden bewezen voor een handjevol speciale  $V$ 's (van lage dimensie of bepaalde soorten vezelingen). Om er iets zinvol over te kunnen zeggen gaan we de tekeningen nu nog wat vereenvoudigen en komen zo vanzelf op een begrip uit de logica.

We zullen eerst  $V(\mathbb{R})$  en de ingekleurde  $V(\mathbb{Q})$  vanuit de  $n$ -dimensionale ruimte  $\mathbb{R}^n$  op een coördinaatas projecteren: een soort cartografische aanpak van het diophantische probleem. Voor de elliptische kromme  $E$  krijgen we schematisch:

Projectie van  $E(\mathbb{Q})$  op de  $x$ -as: dicht in een halfrechte

en voor de kromme  $W$ :

Projectie van  $W(\mathbb{Q})$  op de  $x$ -as: één punt

Dit soort plaatjes worden nu de centrale objecten in onze studie.

**Definitie.** Het beeld van  $V(\mathbf{Q})$ , respectievelijk  $V(\mathbf{Z})$  onder een projectie op een coördinaat heet een **Q**-, respectievelijk **Z**-*diophantische verzameling*.

We kunnen ook meer algemeen een projectie op een coördinaat(hyper)vlak toelaten en noemen dit dan nog steeds een diophantische verzameling. Een diophantische verzameling  $D$  is dus een verzameling van gehele (of rationale)  $\mathbf{x}$  waarvoor gehele (of rationale)  $(x_2, \dots, x_n)$  bestaan die aan een stel vergelijkingen voldoen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in D &\iff (\exists x_2, \dots, x_n) \\ (f_1(\mathbf{x}, x_2, \dots, x_n) = 0 \wedge \dots \\ \dots \wedge f_m(\mathbf{x}, x_2, \dots, x_n) = 0). \end{aligned}$$

Zonder het te merken zijn we een stukje dichter bij een logica-probleem gekomen: terwijl de oorspronkelijke variëteit door een stelsel polynoomvergelijkingen is gedefinieerd, is een diophantische verzameling, als projectie, gedefinieerd als de verzameling punten  $\mathbf{x}$  waarvoor een formule met *existentiële kwantoren* waar is.

### De DMPR-stelling

Voor we iets zeggen over **Q**-diophantische verzamelingen, bekijken we eerst verzamelingen  $V(\mathbf{Z})$  en hun projecties. Zijn **Z**-diophantische verzamelingen misschien *zelf de verzameling gehele oplossingen van een niet-nulpolynoom in één veranderlijke*? Dat zou wel heel makkelijk zijn, want polynomen in één veranderlijke kunnen we makkelijk in gehele getallen oplossen. Maar neen, voor  $V : y - x = 0$  is de projectie van  $V(\mathbf{Z})$  op de  $x$ -as de *oneindige* aftelbare verzameling  $\mathbf{Z}$ , maar een niet-nul polynoom heeft maar eindig veel nulpunten (en dit is géén pathologisch voorbeeld).

Als **Z**-diophantische verzamelingen zelf niet van de vorm  $W(\mathbf{Z})$  zijn voor een zekere variëteit  $W$ , wat zijn ze dan wel? Hoe ‘complex’ kunnen ze zijn? Kunnen we ze berekenen? Hiervoor maken we volgende definitie:

**Definitie.** Een verzameling  $V \subseteq \mathbf{Z}$  is *recursief opsombaar* als er een computerprogramma bestaat dat de elementen van  $V$  opsomt.

In deze wat vage definitie betekent ‘computerprogramma’ eigenlijk een Turingmachine. Men stelt zich een gewone computer voor zonder beperkingen op het ge-

heugen en de precisie van de hardware, met daarop een C++-programma, waarvan de snelheid irrelevant is.

**Bewering.** *Diophantische verzamelingen zijn recursief opsombaar.*

Voor het bewijs, doorloop alle mogelijke  $x_1, \dots, x_n$  in één of andere volgorde en kijk of ze een oplossing zijn. Zo ja, output  $x_1$ . Recursief opsombare verzamelingen kunnen heel ingewikkeld zijn; omdat de lezer die het tot dit punt heeft gehaald moe is geworden nu het net spannend wordt, is het de hoogste tijd voor een opgave.

**Opgave.** Laat zien dat de verzameling priemgetallen recursief opsombaar is, en laat zien dat de verzameling gehele niet-priemgetallen diophantisch is [8].

Het opmerkelijke feit is dat de omkering van bovenstaande bewering ook waar is; dit is de zogenaamde stelling van Davis, Matijasevich, Putnam en Robinson (bewezen tussen 1950 en 1970) [9].

**DMPR-stelling.** *Recursief opsombare verzamelingen zijn diophantisch (en omgekeerd).*

Uit de DMPR-stelling volgt op niet-triviale wijze een onbeslisbaarheidsresultaat: er bestaat géén computerprogramma dat van een willekeurige diophantische vergelijking kan bepalen of er een gehele oplossing is of niet — en dat is dan weer het beroemde negatieve antwoord op de vraag van Hilbert.

Over het bewijs van de DMPR-stelling kunnen we alleen zeggen dat een centrale plaats wordt ingenomen door de studie van de oplossingen van één specifiek soort diophantische vergelijking (namelijk een Pell-vergelijking). Van Martin Davis zelf komt in een wat andere context de uitdrukking dat er “One Equation to Rule Them All” lijkt te bestaan.

De DMPR-stelling heeft trouwens allerlei onfrisse bijwerkingen: zo volgt eruit dat men een spel met twee spelers kan bedenken, zodat één van de spelers bij elke beginzet van de andere speler een winnende strategie heeft, maar die nooit door een algoritme zal kunnen bepalen. Maar aan de positieve kant betekent het bijvoorbeeld ook dat er een polynoom is dat de verzameling der priemgetallen oplevert (zie de opgave hierboven).

### Q-diophantische verzamelingen en Mazur

De lezer denkt nu misschien dat **Q**-diophantische verzamelingen op een soortgelijke manier te beschrijven zijn. Maar de waarheid tot op heden is weerom: niemand weet het! Het feit dat het vinden van **Q**-oplossingen hetzelfde is als het vinden van **Z**-oplossingen van homogene vergelijkingen lijkt niet te helpen.

Er is wel een verband met het vermoeden van Mazur: dat heeft tot gevolg dat de verzameling  $\mathbf{Z}$  géén **Q**-diophantische verzameling is. Als namelijk  $\mathbf{Z}$  de projectie is van  $V(\mathbf{Q})$ , dan heeft de afsluiting van  $V(\mathbf{Q})$  oneindig veel componenten omdat  $\mathbf{Z}$  discreet is in  $\mathbf{Q}$ . Dit is in contrast met de volgende opgave.

**Opgave.** Gebruik de DMPR-stelling om aan te tonen: als de verzameling  $\mathbf{Z}$  der gehele getallen **Q**-diophantisch is, dan is er geen algoritme dat beslist of een diophantische vergelijking *rationale* oplossingen heeft of niet [10].

We weten echter niet of er een computerprogramma bestaat dat beslist of een diophantische vergelijking een rationale oplossing heeft of niet ... Moeten we dus het vermoeden van Mazur geloven of niet?

### Intermezzo: Orakels

We kunnen niet beslissen of een diophantische vergelijking een oplossing heeft in gehele getallen of niet, laat staan die oplossingen mechanisch vinden. Maar hoeveel moeilijker is het écht vinden van oplossingen vergeleken met het beslissen of er een oplossing bestaat of niet?

Bekijk voor een ring  $R$  volgende problemen voor een willekeurige variëteit  $V$ :

- $\text{Ex}(R)$ : is  $V(R)$  leeg of niet?
- $\text{Fin}(R)$ : is  $V(R)$  eindig of niet?
- $\text{Sol}(R)$ : als  $V(R)$  eindig is, bepaal de verzameling  $V(R)$ .

De DMPR-stelling zegt dat  $\text{Ex}(\mathbf{Z})$  onbeslisbaar is. Maar men kan ook vragen wat de relatie tussen de onbeslisbaarheid van deze problemen is. Davis, Matijasevich en Robinson vermoeden dat, zelfs als er een orakel is dat  $\text{Ex}(\mathbf{Z})$  kan beslissen, het probleem  $\text{Fin}(\mathbf{Z})$  nog steeds onbeslisbaar is.

Stel dat  $V$  een kromme is, gegeven door één polynoomvergelijking in twee veranderlijken  $f(x, y) = 0$ . Als  $V$  geen kegelsnede is en geen elliptische kromme, dan volgt uit een stelling van Faltings (ook wel bekend als het Vermoeden van Mordell) dat  $V(\mathbf{Q})$  eindig is. Minhyong Kim [11]

beweest in 2003 dat voor dit soort krommen het  $\text{Sol}(\mathbf{Q})$ -probleem oplosbaar is als  $\text{Ex}(\mathbf{Q})$  oplosbaar is (bijvoorbeeld door een orakel). Anders gezegd: als er een methode bestaat die van een willekeurige dergelijke kromme kan beslissen of er een rationaal punt op ligt of niet, dan kunnen van een willekeurige dergelijke kromme alle oplossingen ook écht gevonden worden.

Als de eerste methode een orakel vereist, dan ook de tweede. Merk wel op dat om alle oplossingen van een gegeven kromme te vinden er van eindig veel *andere* krommen moet worden beslist of ze een rationaal punt hebben of niet. Het is dus niet voldoende om van een specifieke  $V$  te kunnen beslissen of  $V(\mathbf{Q})$  leeg is of niet om  $V(\mathbf{Q})$  te kunnen berekenen.

### Diophantische en andere modellen

Het meest recente werk aan  $\mathbf{Q}$ -diophantische verzamelingen maakt gebruik van het concept 'diophantisch model van  $\mathbf{Z}$ '. Dit is een aftelbare diophantische verzameling  $D$  in  $\mathbf{Q}^N$  met een bijectie  $\iota : \mathbf{Z} \rightarrow D$  zodat de grafen van de bewerkingen  $+$  en  $\times$  in  $\mathbf{Z}^{3N}$  door  $\iota$  naar diophantische verzamelingen in  $\mathbf{Q}^{3N}$  worden gestuurd.

Het idee is dat zo'n diophantisch model een manier oplevert om, in het bijzonder onbeslisbare, uitspraken over  $\mathbf{Z}$  te vertalen naar, in het bijzonder onbeslisbare, uitspraken over  $\mathbf{Q}$ . Als zo'n diophantisch model bestaat, dan is het antwoord op Hilbert's probleem in breuken nog steeds negatief: zie de vorige opgave. Het vermoeden van Mazur is ook nog steeds fout [12].

Een eventueel dergelijk geconstrueerd 'logisch' tegenvoorbeeld voor het vermoeden van Mazur zou geen bijzondere meetkundige structuur hebben en dus precies aan de andere kant van het spectrum variëteiten liggen dan de meetkundig bijzondere exemplaren waarvoor het antwoord op het vermoeden positief is.

Goed, we weten niet of  $\mathbf{Z}$  een diophantisch model heeft in  $\mathbf{Q}$ , dus gaan we dit probleem op twee manieren afzwakken: door de ring  $\mathbf{Q}$  te vervangen door een kleinere ring  $R$ , en door de definitie van 'diophantisch model' af te zwakken. In elk van de gevallen worden de beste resultaten bekomen door het inzetten van al onze kennis over: elliptische krommen!

Voor  $R \subseteq \mathbf{Q}$  een deelring van  $\mathbf{Q}$  kan de lezer nu vast zelf bedenken wat 'een diophantisch model van  $\mathbf{Z}$  in  $R$ ' betekent. Alle ringen  $R$  tussen  $\mathbf{Z}$  en  $\mathbf{Q}$  zijn van



Julia Robinson rond 1985

de vorm  $\mathbf{Z}[S^{-1}]$ , dat wil zeggen, bestaan uit breuken waarvan de noemers alleen deelbaar zijn door priemen in een gegeven verzameling  $S \subseteq \mathbf{Z}$ . Voor  $S = \{\text{alle priemgetallen}\}$  is  $\mathbf{Z}[S^{-1}] = \mathbf{Q}$ . Bjorn Poonen gebruikte in 2003 elliptische krommen om aan te tonen dat  $\mathbf{Z}$  een diophantisch model heeft in  $\mathbf{Z}[S^{-1}]$  voor een 'grote' verzameling priemgetallen (namelijk, van dichtheid 1) [13].

We kunnen ook vragen of  $\mathbf{Z}$  überhaupt te definiëren is door een formule in de *eerste orde taal* van de ring  $\mathbf{Q}$ . Het antwoord is gelukkig ja, en werd gegeven door Julia Robinson in 1949 [14].

Dit resultaat ziet er als volgt uit: een rationaal getal  $x \in \mathbf{Q}$  is een geheel getal precies dan als

$$\begin{aligned} &(\forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(\exists y_1, y_2, y_3, y_4) \\ &(\forall z_1, z_2, z_3)(\exists u) \\ &(P(x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, \\ &\quad y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, u) = 0) \end{aligned}$$

met  $P$  een expliciet polynoom dat de lezer bespaard zij. In het algemeen heet een verzameling  $D \subseteq \mathbf{Q}^N$  *definiëerbaar* als  $x \in D$  equivalent is met een formule van deze vorm (met eventueel meer kwantoren en veranderlijken).

Een definiëerbare verzameling kan best ingewikkeld te begrijpen zijn als er heel veel kwantorenwisselingen in staan. Een formule met alleen  $\exists$ -kwantoren zegt iets over het bestaan van oplossingen van een diophantische vergelijking. Een formule met  $\forall$  gevolgd door  $\exists$  zegt iets over het bestaan van oplossingen in een familie van diophantische vergelijkingen. Hartley Rogers Jr. schrijft: "The human mind seems limited in its ability to understand and visualize beyond four or five alternations of quantifier." [15]

Nu is  $\mathbf{Z}$  een  $\mathbf{Q}$ -diophantische verzameling precies als er een soortgelijke formule bestaat zonder  $\forall$ -kwantoren. Men kan zich afvragen of we een formule kunnen bedenken met alvast minder  $\forall$ -kwantoren, of met minder kwantorenwisselingen (hier zijn er drie). Hiertoe nog een veralgemenisering van de notie 'diophantisch model': de verzameling  $D \subseteq \mathbf{Q}^N$  is een *model* van  $\mathbf{Z}$  over  $\mathbf{Q}$  als  $D$  een definiëerbare verzameling is in  $\mathbf{Q}^N$  en er een bijectie  $\iota : \mathbf{Z} \rightarrow D$  bestaat die de grafen van  $+$  en  $\times$  in definiëerbare verzamelingen omzet. In recent werk van de auteur met Karim Zahidi [16] wordt aangetoond dat er een model is van  $\mathbf{Z}$  over  $\mathbf{Q}$  dat gedefinieerd kan worden door een formule met maar één  $\forall$ -kwantor en twee kwantorenwisselingen, tenminste als (bijvoorbeeld) volgend vermoeden over elliptische krommen waar is.

**Vermoeden.** Bekijk op de elliptische kromme

$$y^2 = x^3 + 12x^2 + 11x$$

de veelvouden  $nP$  van het punt  $P = (1/4, 15/8)$  in de groep  $E(\mathbf{Q})$  en schrijf

$$nP = ((A_n/B_n)^2, A_n C_n/B_n^3)$$

met  $A_n, B_n, C_n$  onderling ondeelbare gehele getallen; dan heeft voor elke  $n \in \mathbf{Z}_{>0}$  het getal  $C_n$  een priemdelers  $p = \pm 2 \bmod 5$ , zodat  $p$  geen deler is van  $C_n/p$  en van  $C_i$  voor alle  $i < n$ .

Hieruit zou dan volgen dat er een onbeslisbare zin is in de eerste-orde theorie van  $\mathbf{Q}$  met maar één  $\forall$ -kwantor, dat wil zeggen één kwantor weg van een negatief antwoord op Hilbert's probleem in breuken.

Men kan het vermoeden 'heuristisch bewijzen'. De redenering lijkt op de heuristiek voor het aantal Mersenne-priemgetallen van Wagstaff: men berekent de waarschijnlijkheid dat een random getal dat even groot is als het primitieve deel van  $C_n$  (dat men kan afschatten via diophantische approximatie) enkel delers  $p = \pm 1 \bmod 5$  heeft. Men kan het vermoeden ook 'in dichtheid bewijzen': we hebben bijvoorbeeld voor een andere elliptische kromme laten zien dat voor tenminste 95.5% van alle priemgetallen  $n$ , een soortgelijk vermoeden waar is voor  $B_n$ .

## Conclusie

Het valt op dat de meeste hedendaagse ontwikkelingen vlijtig gebruik maken van moderne arithmetische meetkunde (vooral elliptische krommen). In zekere zin is de

getaltheorie dus een slang die in zijn eigen staart bijt: als we maar genoeg weten over de oplossingen van één diophantische vergelijking (de Pell-vergelijking voor  $\mathbf{Z}$ , en misschien elliptische krommen voor

$\mathbf{Q}$ ), kunnen we aantonen dat we in het algemeen géén algoritme hebben om diophantische problemen op te lossen.  $\Leftarrow$

## Noten en referenties

- 1 De kenners vergeven bij deze de auteur dit misbruik van terminologie.
- 2 Hier staat wel degelijk "Lösung" en niet "Lösung"; de lezer die het verschil niet kent wordt aangeraden meteen naar het woordenboek te grijpen. De radiotoespraak met vertaling en geluidsfragment (met Hilbert's hoge stem en Oostpruisisch accent) is te vinden via [math.sfsu.edu/smith](http://math.sfsu.edu/smith).
- 3 Let op: de laatste stelling van Fermat zegt niet dat één diophantische vergelijking enkel triviale oplossingen heeft, maar oneindig veel, namelijk  $x^n + y^n = z^n$  voor alle  $n > 2$ . De bewering is dat dit equivalent is het bestaan van een oplossing van één andere diophantische vergelijking.
- 4 Als een probleem eenmaal geformaliseerd is als uitspraak  $P$ , wordt de vraag of  $P$  dan wel  $\exists P$  bewijsbaar is equivalent met de vraag of het Gödelgetal van  $P$  of  $\exists P$  behoort tot de recursief opsombare verzameling van bewijsbare formules; via de DMPR-stelling (zie later) wordt dit equivalent met het beslissen of een diophantische vergelijking een oplossing heeft. Natuurlijk willen we niet alleen weten of  $P$  of  $\exists P$  bewijsbaar zijn, maar of ze waar zijn...
- 5 M. de Leeuw, *Gehele punten op elliptische krommen*, kleine scriptie, Utrecht (2003), [www.phys.uu.nl/~leeuw](http://www.phys.uu.nl/~leeuw). Vergelijk: R.J. Stroeker en N. Tzanakis, 'Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms', *Acta Arith.* LXVII.2 (1994), 177–196.
- 6 Exponent vier is klassiek, voor exponent zeven, zie: Noam D. Elkies, 'The Klein

quartic in number theory', in: The eightfold way, p. 51–101, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* vol. 35, CUP (1999) [www.msri.org/publications](http://www.msri.org/publications). De rationale punten van de (projectieve) kromme  $x^7 + y^7 = z^7$  worden nl. afgebeeld op rationale punten van de Kleinse kwartiek  $x^3y + y^3z + z^3x$ , die op hun beurt afgebeeld worden op de punten van de vermelde elliptische kromme.

- 7 B. Mazur, The Topology of Rational Points, *Experiment. Math.* 1 (1992), no. 1, 35–45. [www.expmath.org](http://www.expmath.org)
- 8 Priemgetallen zijn recursief opsombaar als volgt: doorloop de natuurlijke getallen in stijgende volgorde en kijk met het euclidisch algoritme of het getal  $n$  deelbaar is door  $1 < d < n$  of niet. Zoniet, output  $n$ . De verzameling niet-priemgetallen is de projectie op de  $x$ -as van de oplossingen van

$$\begin{aligned} y &= (A^2 + B^2 + C^2 + D^2), \\ z &= (E^2 + F^2 + G^2 + H^2), \\ [x - (y + 2)(z + 2)] \cdot \\ &\quad \cdot [x + (y + 2)(z + 2)] = 0 \end{aligned}$$

in de  $(x, y, z, A, \dots, H)$ -ruimte. Volgens Lagrange is namelijk een geheel getal groter of gelijk aan nul, precies als het de som van vier kwadraten is, en  $x$  is niet-priem precies als het plus/min het product is van twee positieve getallen  $\geq 2$ .

- 9 zie Y. Matiyasevich, *Hilbert's Tenth Problem*, MIT Press (1993) voor een volledig bewijs van de DMPR-stelling en meer informatie.

- 10 Stel dat  $\mathbf{Z} = \pi(V(\mathbf{Q}))$  voor een variëteit  $V$  en een projectie  $\pi$ . Voor willekeurige  $W$  in  $N$  veranderlijken is dan

$$x \in W(\mathbf{Z}) \iff x \in W(\mathbf{Q}) \cap \pi(V(\mathbf{Q}))^N.$$

Zo'n algoritme kan van de rechterkant van deze equivalentie beslissen of zo'n  $x$  bestaat, dus ook van de linkerkant. Maar dat kan niet volgens de DMPR-stelling.

- 11 M. Kim, 'Relating Decision and Search Algorithms for Rational Points on Curves of Higher Genus', *Arch. Math. Logic* 42 (2003), no. 6, 563–568.
- 12 Het bewijs is niet meer zo elementair en gebruikt de DMPR-stelling, zie: Cornelissen-Zahidi, 'Topology of Diophantine sets: remarks on Mazur's conjectures', in: Hilbert's Tenth Problem: Relations with Arithmetic and Algebraic geometry (Ghent, 1999), p. 253–260, *Contemp. Math.* vol. 270, AMS (2000).
- 13 B. Poonen, 'Hilbert's Tenth Problem and Mazur's Conjecture for Large Subrings of  $\mathbf{Q}$ ', *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), no. 4, 981–990.
- 14 Julia Robinson, 'Definability and Decision Problems in Arithmetic', *J. Symb. Logic* 14, 98–114 (1949).
- 15 *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill (1967), p. 322.
- 16 G. Cornelissen en K. Zahidi, 'Complexity of undecidable formulae in the rationals and inertial, Zsigmondy theorems for elliptic curves', *preprint math.NT/0412473* (2004).

**Rob Bisseling**

Corresponderend auteur 'Softwarepartitionering'  
*Mathematisch Instituut  
 Universiteit Utrecht  
 Postbus 80010  
 3508 TA Utrecht  
 rob.bisseling@math.uu.nl*

**Alistair Vardy**

Corresponderend auteur 'Spieren'  
*Faculteit der Bewegingswetenschappen  
 Vrije Universiteit  
 Van der Boerhorststraat 9  
 1081 BT Amsterdam  
 a.vardy@fbw.vu.nl*

**Mark Peletier, Natacha Severens**

Corresponderende auteurs 'Hart-longmachine'  
*Faculteit Wiskunde en Informatica  
 Technische Universiteit Eindhoven  
 Postbus 513  
 5600 MB Eindhoven  
 m.a.peletier@tue.nl*

**Studiegroep wiskunde met de industrie**

# Brainstormen voor bruikbare wiskunde

Op de studiegroep Wiskunde met de Industrie in 2005 in Amsterdam was de medische wetenschap prominent aanwezig. Het woord 'industrie' in de naam van de workshop moet dan ook al sinds vele jaren ruim worden opgevat. De studiegroep is daarmee tevens een test hoe bruikbaar wiskunde eigenlijk is voor de samenleving. Hoe kunnen wiskundige disciplines commercieel worden ingezet, wat hebben we aan de nieuwste ontwikkelingen in de statistiek, wat is de betekenis van de steeds maar groeiende kennis van het modelleren met differentiaalvergelijkingen? Soms valt dit tegen, maar wiskundige common sense geeft de bedrijven ook dikwijls een andere blik op hun probleem. En de wiskundigen kunnen met hun neus bovenop een open-hartoperatie komen te staan.

Bij de bedrijven die de zes problemen van de studiegroep hadden aangeleverd, zaten twee bekenden: het *Forensisch Instituut* en de *KLM*. Nieuw waren het *Nederlands Meetinstituut*, *Software Improvement Group*, het *Institute for Fundamental and Clinical Movement Sciences* en het *Academisch Medisch Centrum*. De onderzoeksresultaten van de laatstgenoemde drie bedrijven worden in dit artikel besproken, de eerste drie komen in het volgend nummer aan bod.

**Wiskundig neuromusculair onderzoek (Alistair Vardy)**

Binnen de neurowetenschappen zijn er tegenwoordig ontzettend veel manieren om onderzoek te doen. Ethische en praktische factoren beperken echter de toepasbaarheid van veel technieken bij onderzoek naar het zenuwstelsel. In veel spieronderzoek is het niet wenselijk en soms zelf vervelend voor de proefpersoon om direct aan het zenuwstelsel zelf metingen te verrichten. Metingen aan de buitenkant van het lichaam geven een ratjetoe van alle informatie die zich onder de huid afspeelt. Het ontrafelen van deze informatie is waar we in dit artikel op uit zijn.

*Alpha-motorneuronen en motoreenheden*

We gebruiken onze spieren om te bewegen. Ons zenuwstelsel activeert onze spieren door er elektrische pulsen naartoe te sturen. Deze elektrische pulsen gaan over het spieroppervlak waardoor de spier samentrekt. Als we beter kijken, zien we dat spieren zijn opgebouwd uit kleinere eenheden, spiervezels genaamd. Eén spier wordt aangestuurd door een heleboel zenuwen. Deze zenuwen heten alpha-motorneuronen. Elk van deze zenuwen stuurt een aantal spiervezels aan. Een alpha-motorneuron en zijn spiervezels vormen een geheel, dat we een motoreenheid zullen noemen. Kleine spieren hebben 10 van deze motoreenheden. In grote spieren kan dit aantal oplopen tot 300.

Als we onze spieren aanspannen, zijn er motoreenheden actief. Niet alle motoreenheden zijn tegelijk actief. Als we onze spieren vrijwillig aanspannen worden eerst de kleinere motoreenheden geactiveerd en pas bij zwaardere inspanning ook de grotere. Bij vrijwillige inspanning is de recruiteringsvolgorde dus van klein naar groot. Op deze manier kunnen we op verschillende inspanningsniveaus de kracht goed doseren.

Naast vrijwillige inspanning is het ook mogelijk een spier kunstmatig te activeren. Door kleine elektrische schokjes toe te dienen, zal de spier samentrekken. Als er op deze manier inspanning wordt geleverd, dan is de recruiteringsvolgorde van groot naar klein. Bovendien worden bij kunstmatige stimulatie van een spier alle motoreenheden op hetzelfde moment geactiveerd, terwijl bij vrijwillige inspanning de motoreenheden op verschillende tijdstippen worden geactiveerd.

Bij spierziekten zoals polio of Duchennespierdystrofie verzwakken de spieren. Bij polio komt dit doordat de verbindingen tussen de alpha-motorneuronen en de spiervezels afsterven. Als een verbinding afsterft, dan raakt de spier een motoreenheid kwijt. Bij Duchennespierdystrofie zorgt het ontbreken van een

specifiek spiereiwit ervoor dat spiercellen afsterven. Ook dit leidt tot een vermindering van motoreenheden. Om de progressie van spierziekten bij te kunnen houden, zouden we graag weten hoeveel motoreenheden een spier bevat.

In dit artikel bekijken wij een techniek om het aantal motoreenheden in een spier te bepalen. Een veelgebruikte techniek bij neurologisch onderzoek naar spieren is het meten van de elektrische activiteit op de huid. Een probleem hierbij is dat de gemeten signalen niet alleen van de spieren komen. Elektrische signalen van het hart en de andere organen worden ook door de huid geleid. De geleidende eigenschappen van de huid worden ook benut door bijvoorbeeld leugendetectors. Het totaal dat we meten, is een combinatie en vervorming van signalen. Gelukkig is de activiteit van spieren krachtig. Als we vlak boven een spier meten, is dit signaal krachtig genoeg om de overige signalen te overstemmen. Het meten van de elektrische activiteit van de spieren wordt elektromyografie (EMG) genoemd.

Onze interesse gaat uit naar het meten van de activiteit van de motoreenheden. Om nauwkeurige metingen te verrichten, worden de spieren bedekt met een matje van elektroden. Bij een vrijwillige of (met elektrische schokjes) gestimuleerde inspanning zien we activiteit die is opgebouwd uit de activiteit van verschillende motoreenheden. Helaas liggen de spiervezels van motoreenheden niet netjes gebundeld, maar kriskras door elkaar. Dit betekent dat de elektrische activiteit die binnenkomt bij elke elektrode op het matje een mengelmoe van signalen is.

Om het probleem te illustreren, voeren we een gedachtenexperiment uit. Stel we zouden elk van de motoreenheden één voor één kunnen activeren. Elke motoreenheid zou dan zijn eigen 'vingerafdruk' achterlaten. Als we elke vingerafdruk zouden kennen, dan is het probleem gereduceerd tot het bepalen van het aantal verschillende vingerafdrukken in de gemeten signalen. Helaas geven de motoreenheden hun vingerafdrukken niet zomaar prijs. Een manier om dit probleem te omzeilen, is om een serie van elektrische schokjes toe te dienen in oplopende sterkte. Bij de eerste schokjes is slechts de grootste motoreenheid actief. Daarna komen één voor één de kleinere motoreenheden erbij. We zien op deze manier de optelsom van de vingerafdrukken. Door van het gemengde signaal de vorige af te trekken, krijgen we de individuele vingerafdrukken. Deze aanpak werkt mits het totaal aan signalen niet te vervuild is. De vervuiling die optreedt, noemen we ruis. Het is noodzakelijk dat de activiteit van de motoreenheden groter is dan de ruis om ze nog te kunnen onderscheiden. Op dit moment wordt dit proces met de hand uitgevoerd. Dit is echter een tijdrovende bezigheid die moet worden uitgevoerd door een expert, en waarvoor geavanceerde apparatuur nodig is. Ons doel is een manier te vinden om het aantal motoreenheden te bepalen op een automatische, eenvoudig uit te voeren wijze. Als we aannemen dat alle vingerafdrukken uniek zijn, hoeven we alleen te weten hoeveel verschillende componenten er aanwezig zijn in het totaal van signalen. Hierbij biedt wiskunde een uitkomst.

#### Bepaling van principale componenten voor data met vertragingen

Gegeven een verzameling data  $X \in \mathbf{R}^{m,n}$  is het een klassieke taak om het aantal principale componenten te bepalen. Over de gemeten data wordt typisch aangenomen dat ze van de vorm

$$(1) \quad X_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ik} v_k(t_j) + \eta_{ij}$$

zijn, waar  $X, \eta \in \mathbf{R}^{m,n}$ ,  $C \in \mathbf{R}^{m,N}$ , en  $\{t_j\}_{j=1}^m$  zijn de tijdstippen waarop het signaal gesampled is. Dat wil dus zeggen dat de  $n$  signalen kunnen worden uitgedrukt als lineaire combinaties van een klein aantal  $N$  ( $N \ll n$ ) basisvectoren, plus ruis  $\eta_{ij}$ . In dit probleem is het voornamelijk van belang om de dimensie  $N$  van de opspannende verzameling  $\{v_k\}$  te bepalen, corresponderend met het aantal actieve motoreenheden.

Bij afwezigheid van ruis kan het probleem worden opgelost door de data te ontbinden in hun *principale componenten* door middel van een *singuliere-waardendecompositie*: we vinden matrices  $U \in \mathbf{R}^{m,m}$ ,  $V \in \mathbf{R}^{n,n}$ ,  $\sigma \in \mathbf{R}^m$  zodat

$$U^T X V = [\text{diag}(\sigma) \ 0_{m,n-m}].$$

Bovendien zijn  $U$  en  $V$  orthogonale matrices en  $\sigma_i \geq \sigma_{i+1} \geq 0$ . Van belang hierbij is dat als de matrix rang  $N < n$  heeft, dan  $\sigma_{N+1} = \dots = \sigma_m = 0$ . In dat geval zijn er precies  $N$  principale componenten. In het algemeen zijn echte meetgegevens niet zo netjes, en experimentele afwijkingen zorgen ervoor dat  $\sigma_i > 0$  voor alle  $i$ . Maar de relatieve grootte van de principale waarden  $\sigma_i$  kan ons nog steeds veel informatie geven. In het bijzonder is  $\sigma_{k+1}$  gelijk aan de afstand van  $X$  tot de verzameling van matrices met rang  $k$ :

$$\sigma_{k+1} = \min_{\text{rang}(Y)=k} \|X - Y\|_2.$$

Gegeven een drempelwaarde  $\varepsilon$  kunnen we de  $\varepsilon$ -rang  $r_\varepsilon$  van een matrix te definiëren door te eisen dat

$$\sigma_{r_\varepsilon} > \varepsilon \geq \sigma_{r_\varepsilon+1}.$$

In het voorliggende probleem kunnen we deze ideeën niet direct toepassen omdat er *twee* verschillende bronnen van fouten zijn:

1. Experimentele fouten van onbekend type en grootte *in* elk kanaal ('ruis').
2. Vertragingen van onbekende grootte *tussen* alle paren van signalen.

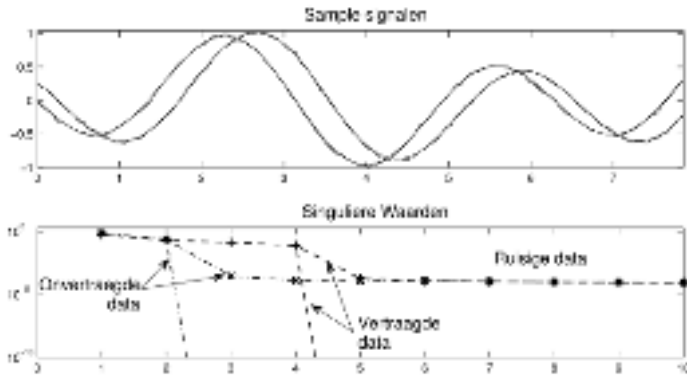
Fouten van de eerste soort zijn wijdverbreid en niet bijzonder problematisch; fouten van het tweede type moeten we nader bekijken. De metingen beginnen niet allemaal op hetzelfde tijdstip in relatie tot het begin van het signaal in de spieren. Hierdoor zijn de metingen ten opzichte van elkaar enigszins vertraagd. Laten we aannemen dat het tijdvertraagde signaal gegeven wordt door (cf. (1))

$$\hat{X}_{ij} = \sum_{k=1}^N C_{ik} v_k(t_j + s_i) + \eta_{ij},$$

waarbij  $s_i$  de tijdsvertraging in de  $i$ -de meting is. Dan

$$\begin{aligned} \hat{X}_{ij} &= \sum_{k=1}^N C_{ik} \left( v_k(t_j) + s_i v'_k(t_j) + \frac{s_i^2}{2} v''_k(t_j) + \dots \right) + \eta_{ij} \\ &\simeq \sum_{k=1}^N C_{ik} \left( v_k(t_j) + s_i v'_k(t_j) \right) + \eta_{ij} \quad (\text{bij kleine vertragingen}) \\ &= \sum_{k=1}^N C_{ik} v_k(t_j) + \sum_{k=1}^N \tilde{C}_{ik} \tilde{v}_k(t_j) + \eta_{ij}. \end{aligned}$$

De functies  $\tilde{v}_k$  kunnen nu niet als lineaire combinaties van de  $v_k$  geschreven worden, dus zelfs zonder ruis zouden we de rang van de matrix en de ogenschijnlijke dimensie van de basis van principale componenten hebben verdubbeld.



**Figuur 1** Boven: voorbeeldsignaal met typische vertraging en kleine ruis. Onder: de singuliere waarden voor de data zonder ruis nemen af tot  $\sigma_i = 10^{-40}$  na  $N = 2$  respectievelijk  $N = 4$  voor de onvertraagde en vertraagde data. Kiezen we in dit voorbeeld  $\varepsilon = 10^{-3}$  dan doet de toevoeging van ruis niets af aan de bepaling van de  $\varepsilon$ -rang, maar de vertragingen verdubbelen de schatting voor het aantal principale componenten.

We geven een klein voorbeeld om dit te illustreren. Beschouw matrices van de vorm

$$X_{ij} = \alpha_i \sin(t_j) + \beta_i \sin(2t_j) \\ \hat{X}_{ij} = \alpha_i \sin(t_j + s_i) + \beta_i \sin(2t_j + s_i), i = 1, \dots, 10, t_j \in [0, 5\pi]$$

waar  $\alpha_i, \beta_i, s_i$  willekeurig gekozen zijn in  $[-1, 1]$ , en  $\varepsilon = 10^{-3}$ . In dit voorbeeld hebben we  $N = 2$  en  $n = 10$  genomen. In figuur 1 tonen we een signaal met en zonder vertragingen en ruis en daar- onder de bijbehorende singuliere waarden.

Dit voorbeeld toont dat we de singuliere-waardendecompositie niet zomaar kunnen toepassen, zelfs niet met een drempelwaarde, om een goede schatting te krijgen voor de dimensie van de basis van principale componenten voor de vertraagde data met ruis. Om het aantal principale componenten te bepalen gaan we in twee stappen te werk. Eerst nemen we aan dat we de dimensie van de basis weten en zoeken we de beste/juiste verschuivingen, die de tijdsvertragingen ‘opheffen’. Daarna zullen we proberen de juiste dimensie te bepalen.

Het komt er dus op neer dat we de verschuivingen zo zouden willen kiezen dat ze  $\sigma_{N+1}$  minimaliseren, even aannemende dat we  $N$  weten. In de praktijk blijkt dat echter een zeer gede- genereerd en moeilijk probleem. In plaats daarvan bekijken we

$$(2) \quad V = -\frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i}{\sum_{i=1}^n \sigma_i} = -\sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (\text{door normalisatie}).$$

Hierbij nemen we dus aan dat  $N$  een vast getal is. Als de singuliere waarden snel afnemen voor  $i > N$  dan

$$-\sum_{i=1}^N \sigma_i \simeq -\sum_{i=1}^n \sigma_i + \sigma_{N+1} \simeq -1 + \sigma_{N+1},$$

en in zulke gevallen is de minimalisatie van (2) een goede bena- dering voor  $\sigma_{N+1}$ .

Het is goed om hier op te merken dat singuliere-waarden- decompositie een *linear* probleem is, terwijl het vinden van de beste verschuivingen (om de vertragingen te compenseren) een essentieel *niet-linear* probleem is. We hebben drie methoden ge- test om de functionaal in (2) te minimaliseren met betrekking tot de verschuivingen:

- A1. Een pseudo-Newton methode voor het vinden van een nul- punt van  $\nabla V$  met behulp van `minunc` in de *Optimalisatie Tool- box* van Matlab.
- A2. Een gradiëntevoortje van  $V$  met betrekking tot een artificiële tijd door middel van

$$\frac{ds_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial s_i}$$

via de code `ode113` in Matlab.

- A3. Direct zoeken met de Matlab routine `fminsearch`.

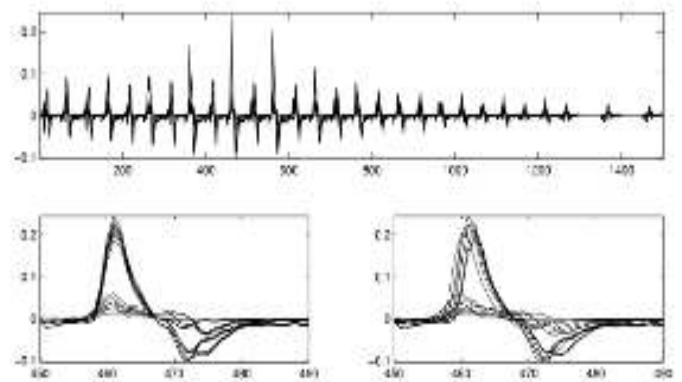
De resultaten van de algoritmes A1 en A2 zijn vrijwel identiek, maar A2 kost ongeveer tien keer zoveel tijd. De resultaten van A3 zijn minder bevredigend en zijn tien keer zo langzaam als A2.

We nemen nu aan dat we redelijke schattingen hebben voor het minimale aantal  $N_{\min}$  en het maximale aantal  $N_{\max}$  principale componenten. Dan voeren we de minimalisatie procedure uit met betrekking tot de verschuivingen. Dit leidt, voor vaste  $N$ , tot de beste teruggeschoven data.

In het ideale geval zouden we graag een duidelijk stap willen zien van grote naar kleine singuliere waarden (zoals in het voor- beeld in figuur 1), zodat we een duidelijke  $\varepsilon$ -rang kunnen bepalen. Helaas lijkt het niet mogelijk om op goede gronden een waarde van  $\varepsilon$  te kiezen. In plaats daarvan bepalen we voor elke (vaste)  $N \in [N_{\min}, N_{\max}]$  de maximale verhouding tussen opeenvolgen- de singuliere waarden:

$$(3) \quad m(N) = \max_k \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}.$$

Laat  $N_r(N)$  de waarde van  $k$  zijn waarvoor dit maximum wordt aangenomen.  $N_r(N)$  is dan de schatting voor het aantal principa- le componenten als we de verschuivingen geoptimaliseerd heb- ben voor de  $N$  grootste componenten. Voor consistentie is duide- lijk vereist dat voor het werkelijke aantal principale componen- ten geldt dat  $N_r(N) = N$ . Natuurlijk kunnen er meerdere waar- des van  $N$  zijn waarvoor aan deze consistentie-eis is voldaan. Als beste schatting voor het werkelijk aantal principale componenten, kiezen we de  $N$  die de verhouding  $m(N)$  maximaliseert. Concep- tueel vindt deze benadering de dimensie waarin er de duidelijk- ste stap van ‘grote’ naar ‘kleine’ componenten is. Aan de andere kant, dit sluit niet uit dat de data in elke meting bestaat uit één hele grote component en verscheidene kleinere. In dat geval blijkt



**Figuur 2** Artificiële data; boven: het complete signaal in alle kanalen; linksonder: detail van de onvertraagde data; rechtsonder: detail van de vertraagde data. Na optimalisatie van de verschuivingen zijn de originele data en de teruggeschoven data in essentie niet te on- derscheiden.

het erg moeilijk om de kleine signalen van de ruis te onderscheiden omdat de vertragingen het klassieke signaal-versus-ruis probleem versterken. Samenvattend is het totale algoritme als volgt:

1. Minimaliseer  $V$  in (2) met betrekking tot verschuivingen,  $N \in [N_{\min}, N_{\max}]$ .
2. Bepaal  $m(N)$  in (3) voor de teruggeschoven data.
3. Maximalisatie van  $m(N)$  met betrekking tot  $N$  leidt tot de schatting van het aantal principale componenten.

In figuur 2 laten we een test met artificiële data zien. Deze zijn ‘gesimuleerd’ door een van de experimentatoren. De resultaten van het algoritme zijn samengevat in tabel 1.

| $N$ | $N_r$ | $\sigma_{N_r} / \sigma_{N_r+1}$ | Rekentijd (s) |
|-----|-------|---------------------------------|---------------|
| 6   | 6     | 125                             | 47            |
| 5   | 5     | 98                              | 45            |
| 4   | 4     | 2731                            | 33            |
| 3   | 4     | 113                             | 39            |
| 2   | 4     | 31                              | 31            |

**Tabel 1** Resultaten van het algoritme met verschaft ‘gesimuleerde’ data. We concluderen hieruit terecht dat er vier principale componenten zijn.

### Conclusies

We hebben gezien dat het algoritme succesvol is in het reduceren van het effect van de vertragingen in de data, zodat het een betrouwbare schatting voor het aantal principale componenten geeft. Na voltooiing van dit verslag zijn we voorzien van ‘echte’ data, en onze voorlopige conclusie is dat de benadering met het beschreven algoritme hierbij ook goed lijkt te werken, maar dat de gradiëntevoortgang (algoritme A2) het meest geschikt is. Hier moet nog diepgaander naar gekeken worden. Er is nog een punt waarop progressie kan worden geboekt. We hebben namelijk geen informatie gebruikt over de structuur van de signalen, terwijl dat ons toch zou moeten kunnen helpen bij het ontrafelen van het juiste aantal principale componenten.

De vraag die we hier bekeken hebben bestaat eigenlijk uit twee componenten. Hoe kunnen we de data terugschuiven zodat de vertragingen worden opgeheven? En hoe kunnen we daarna het aantal principale componenten bepalen? We denken dat we de eerste vraag beter kunnen beantwoorden. Dat is niet verrassend, want de tweede vraag is een oud probleem dat niet volledig is opgelost in veel praktische situaties.

Een andere manier om inzicht te krijgen in het werken van motoreenheden is te kijken naar het gedrag van de zenuwen die de spieren aansturen, de alpha-motorneuronen. In ditzelfde onderzoek hebben we ook een stochastisch model voor een alpha-motorneuron opgesteld om het activatiegedrag te onderzoeken. Een zenuw krijgt invoer van andere zenuwen in de vorm van elektrische pulsjes. De zenuw reageert op het totaal van deze pulsen door zelf ook pulsen te genereren. Een alpha-motorneuron krijgt zijn invoer van het centrale zenuwstelsel en stuurt zijn pulsen naar zijn spiervezels. Het model is ontworpen om pulsen van het centrale zenuwstelsel op te vangen en daarop zelf pulsen te sturen. Simulaties van het model geven een realistisch beeld van het pulsgedrag van een alpha-motorneuron.

Wiskundigen die aan het neuromusculair onderzoek werkten: JF Williams, Geertje Hek, Alistair Vardy, Vivi Rottschäfer, Jan Bouwe van den Berg en Joost Hulshof.

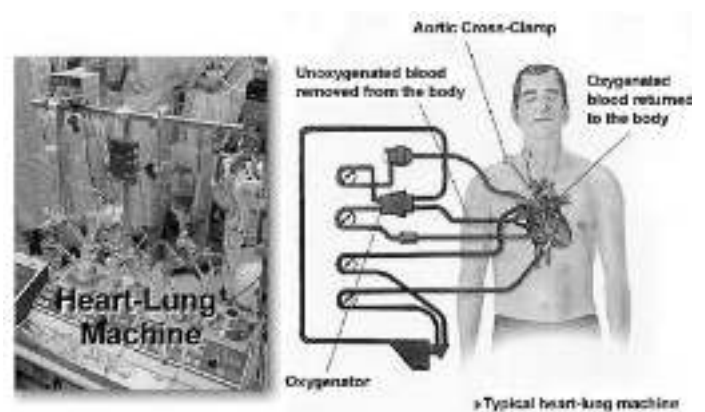
### Modelvorming van het koel- en opwarmproces van patiënten tijdens openhartoperaties (Natacha Severens en Mark Peletier)

Voor hen die het leven te kort vinden is *cryogene suspensie* — conservering van het lichaam door bevriezing — altijd een fascinerende gedachte geweest. Voor de meeste wetenschappers en medici is het ook niet meer dan dat: tot nu toe is suspensie en opwarming alleen geslaagd bij de simpelste organismen, zoals nematode wormen. Dit weerhoudt sommige optimisten er niet van om tegen torenhoge kosten afspraken te maken met organisaties als de Alcor Life Extension Foundation, in de hoop over duizenden jaren te ontwaken in een betere wereld — of op z’n minst in een wereld waar de ouderdom succesvol verlengd kan worden.

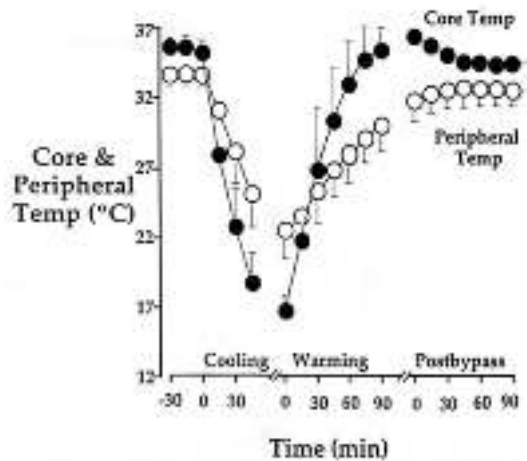
Weinigen beseffen dat afkoeling en opwarming routine is in hedendaagse ziekenhuizen. Tijdens *cardiopulmonaire bypass* operatie, een type operatie waarbij de functie van het hart en de longen tijdelijk door een *hart-longmachine* wordt overgenomen, wordt de patiënt vaak vijf of tien graden gekoeld, en soms zelfs tot twintig graden toe — tot een temperatuur van 17 graden Celsius. Vergelijk dit met de ervaring dat onderkoelde bergbeklimmers bij een kerntemperatuur van 25 graden al nauwelijks te reanimeren zijn. Zonder *life-support system* was bij dergelijke onderkoeling de patiënt al dood geweest.

Een deel van de afkoeling tijdens zo’n open-hartoperatie is niet eens opzettelijk. De patiënt verliest alleen al warmte door de vaatverwijding die de toegediende anesthetica met zich meebrengen, door de koude operatiekamer, door de opening van de borstkas, waardoor een groot, nat oppervlak vrijkomt, en doordat het bloed in contact komt met de koude hart-longmachine. De hart-longmachine bevat daarom een warmtewisselaar waarmee de perfusionist — de specialist verantwoordelijk voor de buitenlichamelijke bloedsomloop — de temperatuur van het bloed kan regelen.

Als de temperatuur van het bloed toch geregeld kan worden, waarom wordt de patiënt dan zo ver afgekoeld? Dat heeft te maken met risicobeperking. Bij een open-hartoperatie leidt een onverwachte situatie (een gesprongen slagader, bijvoorbeeld) al snel tot een onderbreking van de bloedsomloop. De hersenen zijn de grootste zuurstofverbruiker van het lichaam, en bij gebrek aan zuurstof ontstaat snel hersenbeschadiging. De zuurstofbehoefte van cellen neemt echter sterk af als de temperatuur daalt. Door het lichaam te koelen heeft de chirurg veel meer tijd om een mogelijke crisis te bezweren.



Hart-longmachine



Temperatuurverloop tijdens een operatie (dichte bollen: kern, open bollen: periferie) [1]

Zolang de patiënt aan de hart-longmachine verbonden is gaat dit proces goed. De vitale organen, vooral de hersenen, zijn zeer goed doorbloed, en nemen de temperatuur van het bloed snel over. De problemen ontstaan pas wanneer de hart-longmachine wordt afgekoppeld, en de patiënt weer zijn eigen temperatuur moet gaan regelen. Dit leidt altijd tot een snelle daling van de kerntemperatuur met soms wel enkele graden, de zogeheten *afterdrop*.

Die afterdrop is erg ongelukkig, vooral bij een hartoperatie. De patiënt krijgt het koud en begint te rillen, waardoor veel energie en zuurstof verbruikt wordt, en dat betekent een grotere belasting voor het hart. Hoe kleiner de afterdrop, hoe beter het genezingsproces, zo is de ervaring, en de centrale vraag aan de Studiegroep was om deze afterdrop beter te begrijpen.

De oorsprong van de afterdrop ligt in het verschil in doorbloeding tussen de 'kern' van het lichaam, de romp en de hersenen, en de 'periferie', bestaande uit de armen en benen. Tijdens de urenlange operatie koelt de periferie af; na opwarming door de hart-longmachine is de temperatuur van de goed doorbloede kern wel weer op niveau, maar die van de minder goed doorbloede periferie loopt een paar graden achter. Na afkoppeling wordt de warmte verdeeld: de kern warmt de periferie op, en wordt daardoor zelf kouder.

### Modelvorming

Aan de basis van modelvorming staan de transportvergelijkingen die de warmtewisselingsprocessen beschrijven die plaatsvinden binnen het lichaam van de patiënt en tussen patiënt en omgeving. Tijdens de narcose spelen actieve regelmechanismen zoals zweten, rillen en vasoconstrictie geen rol; het lichaam gedraagt zich, wat warmte betreft, als passieve materie. Weefsels veranderen dan op twee manieren van temperatuur: door warmteuitwisseling met het bloed (perfusie) of door warmtegeleiding met naburige weefsels.

Waar alle weefsels warmte ongeveer even goed geleiden — we bestaan tenslotte voornamelijk uit water — zijn er grote verschillen in doorbloeding van verschillende typen weefsel. De 'kern' van het lichaam, de hersenen en de romp, is uitstekend doorbloed, zodat er nauwelijks verschil in temperatuur is tussen het hersenweefsel en het bloed dat na de warmtewisselaar het lichaam weer ingaat. Het 'perifeer' weefsel, voornamelijk de armen en benen, heeft een veel zwakkere bloedvoorziening, en is voor

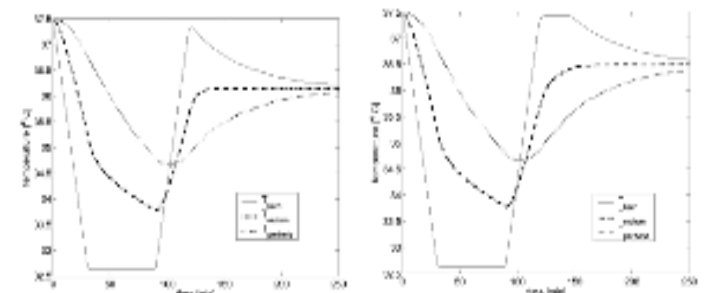
temperatuurveranderingen deels op geleiding aangewezen.

Het simpelste model voor de temperatuurveranderingen tijdens een operatie bevat dan twee compartimenten, kern en periferie. We hebben daar een derde compartiment aan toegevoegd; het rectum, het gebied rondom de anus, is belangrijk omdat tijdens de operatie de chirurg beslissingen neemt over opwarming en afkoeling op basis van de rectale temperatuur.

### Resultaten

Met dit model is geprobeerd het verloop van experimenteel gemeten kern en rectale temperatuur te reproduceren. De operatie wordt opgesplitst in vier delen: afkoelen, constante (lage) temperatuur, opwarmen, en de periode na afkoppelen van de hart-longmachine; de vier delen zijn in de grafieken hieronder te herkennen. Dit model blijkt in staat te zijn om typische kenmerken van het temperatuurverloop tijdens een operatie te voorspellen, zoals de langzame reactie van de periferie ten opzichte van de kern en rectum en het optreden van afterdrop. Het blijkt dat de periferie zich in de afkoelfase als een warmtebron gedraagt en in de opwarmfase als een warmteput; deze warmteput is verantwoordelijk voor de afterdrop. Uit simulaties met het model blijkt dat de chirurg de afterdrop kan verkleinen door bijvoorbeeld

1. de periode van lage temperatuur zo kort mogelijk te maken (niet getoond), of
2. de patiënt aan het eind van de opwarmperiode wat langer aan de hart-longmachine gekoppeld te laten (zie grafieken in onderstaande figuur).



Snel afkoppelen betekent hoge afterdrop: als patiënt meteen na het opwarmen van de hart-longmachine aan zichzelf wordt overgelaten, is de eindtemperatuur (uiteindelijke waarde in de grafiek links, 36.1°C) lager dan wanneer de patiënt een tijdje aangekoppeld blijft (rechts, uiteindelijke waarde 36.5°C).

### Conclusie

Wat is de medische stand met dit model opgeschoten? Sommige resultaten komen overeen met de ervaringen van de chirurgen. Dat is wel eens frustrerend ('ja, maar dat wisten we allang!') maar het is een bevestiging van de voorspellende kwaliteit van het model, en betekent daarom dat er goede kansen zijn om met dit model verder te kunnen komen dan menselijke ervaring en intuïtie. Vooral wijzen de resultaten de weg naar uitgebreider onderzoek: een goed begrip van perifertemperatuur, bijvoorbeeld, en hoe die verandert met de tijd en met de kerntemperatuur, blijkt essentieel te zijn in het beheersen van afterdrop.

In een samenwerking tussen het AMC, de TU Eindhoven, en de Universiteit Maastricht is inmiddels een promotieproject gaande dat zich richt op precies dit verdere onderzoek. Hierin zullen allerlei effecten nauwkeuriger bestudeerd en beschreven worden, zoals de verdeling van de temperatuur over de verschillende ledematen, het verlies aan warmte door de open borstkas, en het

effect van simpele maatregelen zoals kruiken en warme dekens over de benen. Wie weet blijkt na een uitgebreide wiskundige analyse dat grootmoeder altijd al het beste wist hoe je je voeten weer warm krijgt? 

Aan het afkoelingsprobleem werkten de wiskundigen Joyce Aitchison, Christina Giannopapa, Vincent Guyonne, Miroslav Kramar, Simon van Mourik, Jasmina Panovska, en Marcus Tindall. Met dank aan Dirk-Jan Veldman en Bas de Mol van het AMC.

**Automatische partitionering van softwaresystemen** (Rob Bisseling, Jarosław Byrka, Selin Cerav-Erbas, Nebojša Gvozdenović, Mathias Lorenz, Rudi Pendavingh, Colin Reeves, Matthias Röger en Arie Verhoeven)

De afgelopen jaren heeft de vooruitgang in de informatietechnologie een enorme invloed gehad. Steeds meer organisaties, zoals banken en overheidsinstellingen, zijn afhankelijk van immer groeiende softwaresystemen om hun taken te kunnen uitvoeren. De grote complexiteit van deze systemen maakt het systeemonderhoud erg duur. Een mogelijke oplossing voor dit probleem bestaat in het opsplitsen van deze systemen in kleinere minder complexe modules. Iedere module wordt dan onderhouden door een kleine groep systeembeheerders.

Zo'n gepartitioneerd systeem heeft echter een *interface* nodig voor de communicatie tussen de modules. Dit betekent dat ieder programma dat door andere modules gebruikt wordt, ook wel een interfaceprogramma genoemd, voorzien wordt van extra communicatiefaciliteiten. De kosten voor het extra onderhoud van deze interface zijn evenredig met de grootte van de interface ofwel het totaal aantal interfaceprogramma's. Voor een goede partitionering is de omvang van de interface minimaal en zijn de modules voldoende klein. In de praktijk zijn voor het vinden van zo'n splitsing ervaren deskundigen nodig. Voor erg grote softwaresystemen is het echter bijzonder handig om gebruik te maken van automatische partitioneer algoritmen, die een goede suggestie kunnen geven. Het bedrijf Software Improvement Group, (SIG, [www.sig.nl](http://www.sig.nl)) gevestigd in Amsterdam, ontwikkelt dit soort hulpmiddelen.

#### Partitioneringsprobleem van een call-graaf

Een *graaf* is een bekend wiskundig concept voor het representeren van een netwerk. Een graaf bestaat uit een aantal punten, *knoopen* genaamd, die verbonden zijn door lijnen. Als de verbindingen ook een richting hebben, worden deze *pijlen* genoemd en spreken we van een *gerichte graaf*.

Een softwaresysteem kan worden gemodelleerd door een call-graaf, waarvan de knopen de programma's voorstellen. Als programma  $v$  programma  $w$  aanroept (een call) is dit equivalent met een pijl van knoop  $v$  naar knoop  $w$ . Een korte notatie hiervoor is  $v \rightarrow w$ . Een module kan nu worden gerepresenteerd door een deelverzameling van de knopen van de call-graaf. Dit betekent dat de omvang van een module gelijk is aan het aantal knopen van de bijbehorende deelverzameling.

We noemen knoop  $v$  een *interfaceknoop* als hij een inkomende pijl heeft vanuit een knoop in een andere module. De grootte van de interface is nu gelijk aan het aantal interfaceknoopen. Zodoende kan het vinden van een goede splitsing voor het softwaresysteem worden geformuleerd als het volgende partitioneringsprobleem van een call-graaf.

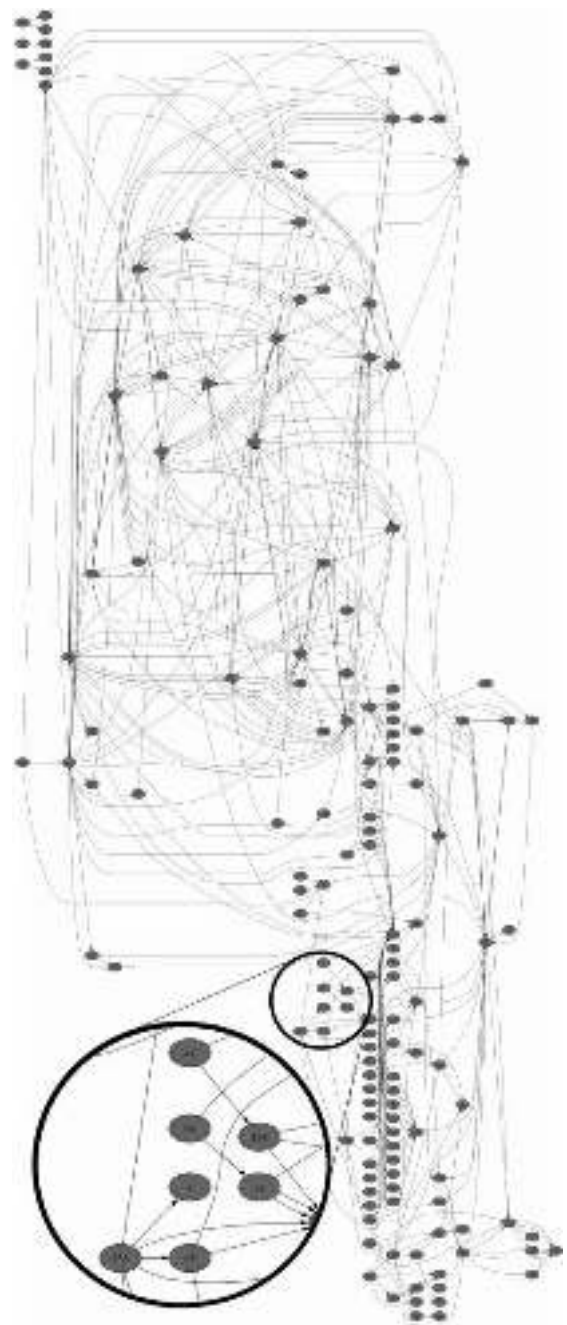
**Gegeven** een call-graaf en de gehele getallen  $K, L$ .

**Vind** een partitionering van de knopen van de call-graaf in  $L$  deelverzamelingen zodat iedere deelverzameling maximaal  $K$  knopen heeft en het totaal aantal interfaceknoopen minimaal is.

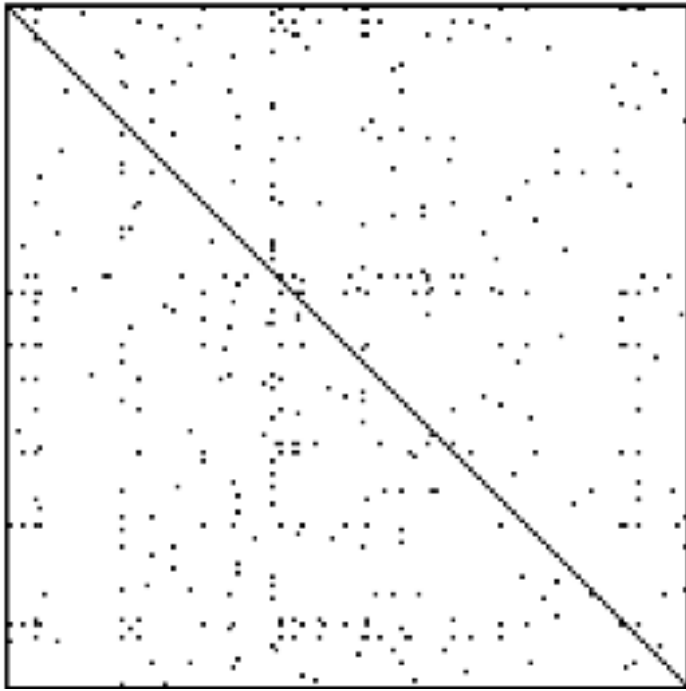
Figuur 3 laat een call-graaf zien van een softwaresysteem uit de praktijk met de naam *Java1*.

#### Verskillende oplosmethoden

Twee verschillende probleemformuleringen blijken veelbelovend voor het probleem van SIG. Allereerst modelleren we het probleem als een *geheeltallig lineair programmeringsprobleem* (in het Engels: *Integer Linear Programming*, ILP). We gebruiken daarbij be-



**Figuur 3** Call-graaf van het softwaresysteem Java1 met 158 knopen (programma's). De inzet links onder geeft een gedetailleerde blik op een deel van de graaf waar de pijlen tussen de programma's duidelijk zichtbaar zijn.



Figuur 4 Verbindingsmatrix (158 × 158) van het probleem Java1.

slissingsvariabelen  $y_{vl}$  en  $x_{vl}$ , waarvan een waardering als volgt moet worden opgevat:

$$y_{vl} = \begin{cases} 1 & \text{knoop } v \text{ zit in deelverzameling } l \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$x_{vl} = \begin{cases} 1 & \text{knoop } v \text{ is een interfaceknoop} \\ & \text{bevat in deelverzameling } l \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De eis dat module  $l$  niet meer dan  $K$  knopen mag bevatten kan dan geformuleerd worden als een lineaire ongelijkheid:

$$y_{v_1l} + y_{v_2l} + \dots + y_{v_Nl} \leq K.$$

En evenzo kan met lineaire vergelijkingen worden afgedwongen dat elke knoop in precies één module zit, etc. Het doel om zo min mogelijk interfaceknopen te gebruiken komt neer op het minimaliseren van de som van alle  $x_{vl}$ .

Deze formulering is een goede eerste stap naar een praktische oplossing. Een ILP probleem heeft een sterk meetkundig karakter, en er is een effectieve oplossingsmethode die de meetkundige aard van dit probleem uitbuit. Zodoende kan ook ons partitioneringsprobleem exact worden opgelost, maar de rekentijd loopt snel op als de grootte van het softwaresysteem toeneemt. Efficiënte herformuleringen en slimme hulpalgoritmen worden cruciaal om de oplossing te vinden binnen een redelijke tijd.

Als alternatief hebben we het probleem ook geformuleerd als een *hypergraafpartitioneringsprobleem*. Een hypergraaf is een generalisatie van een gewone ongerichte graaf met netten in plaats van lijnen. Een *net* verbindt een willekeurig aantal knopen, terwijl een lijn slechts twee knopen verbindt. Net  $n_j$  bestaat uit knoop  $j$  en alle knopen  $i$  met  $i \rightarrow j$ . Als de knopen in net  $n_j$  in verschillende deelverzamelingen vallen, is het net *gebroken*. Na toevoeging van de pijl  $j \rightarrow j$  voor alle knopen  $j$ , blijkt het aantal interfaceknopen gelijk te zijn aan het aantal gebroken netten. Het call-

graafpartitioneringsprobleem kan dus ook worden geformuleerd als een hypergraafpartitioneringsprobleem (HP).

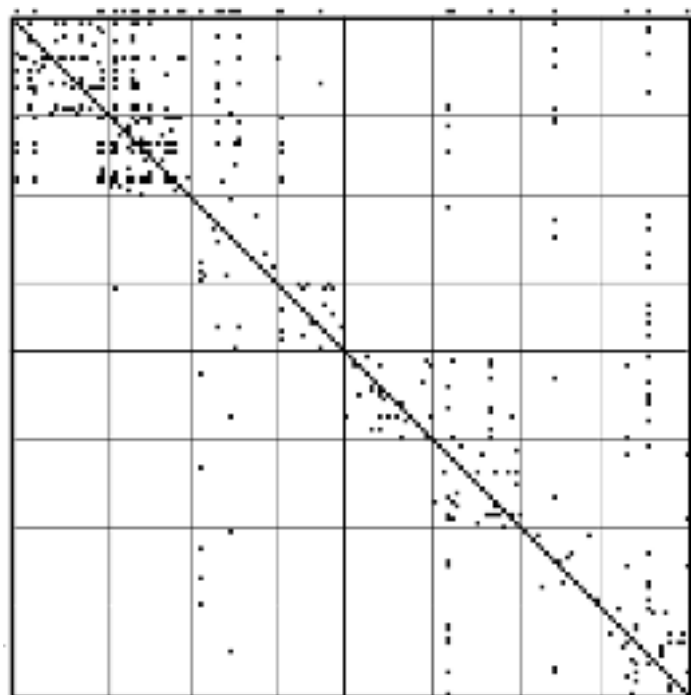
Een gerichte graaf met  $N$  knopen wordt gewoonlijk beschreven door haar verbindingsmatrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ , gedefinieerd door

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i \rightarrow j, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Figuur 4 laat de verbindingsmatrix (met toegevoegde hoofddiagonaal) zien die hoort bij de call-graaf Java1. De verbindingsmatrix kan worden gepartitioneerd door zogenaamde multilevelmethoden, zoals het matrix-partitioneringsprogramma Mondriaan. Dit programma werd aangepast, zodat het toegepast kon worden op de voorbeelden van SIG. Het is *heuristisch* van aard, maar desondanks bleek het erg snel en betrouwbaar zodat de resultaten dicht bij de optimale oplossing liggen.

#### Vergelijking van de twee algoritmen

We hebben twee methoden ontwikkeld voor het probleem, namelijk een optimaal ILP- en een heuristisch HP-algoritme. Het is een interessante vraag hoe de kwaliteit en rekentijd zich verhouden tussen deze twee varianten. Daarom zijn voor een aantal praktijkproblemen, geleverd door SIG, de beide methoden gebruikt om een optimale partitionering in  $L = 8$  modules te vinden, waarbij de maximale omvang van een module gelijk is aan  $K = 1.2 \frac{N}{L}$ . Het softwarepakket CPLEX is gebruikt op een 400 MHz Sun Ultra-Sparc II computer om de optimale oplossing te vinden, terwijl Mondriaan is gebruikt op een 867 MHz Apple PowerBook G4 computer. Figuur 5 laat het resultaat van het hypergraafpartitioneringsalgoritme zien voor het probleem Java1. Elke kolom correspondeert met een net; gebroken netten zijn bovenaan gemarkeerd.



Figuur 5 Gepartitioneerde verbindingsmatrix (158 × 158) van het probleem Java1. De rijen en kolommen zijn zodanig gepermuterd dat ieder rij-blok bij één module hoort.

| Probleem | N    | A    | K   | L | opt.  I | I /N (%) | rekentijd (s)       |
|----------|------|------|-----|---|---------|----------|---------------------|
| Java1    | 144  | 422  | 23  | 8 | 26      | 16.5     | 103                 |
| Java3    | 837  | 5252 | 127 | 8 | 242     | 28.4     | 246456 <sup>a</sup> |
| Java4    | 15   | 39   | 2   | 8 | 11      | 68.8     | 0.22                |
| Cobol1   | 947  | 1900 | 209 | 8 | 13      | 0.9      | 118                 |
| Cobol2   | 449  | 659  | 81  | 8 | 6       | 1.1      | 351                 |
| Cobol3   | 1145 | 2686 | 203 | 8 | 51      | 3.8      | 6452                |
| Cobol4   | 1100 | 2951 | 167 | 8 | 32      | 2.9      | 742172 <sup>a</sup> |

**Tabel 2** Resultaten met geheeltallig lineair programmeren. De met 'a' gemarkeerde tijden zijn afkomstig van een andere computer.

| Probleem | N    | A    | beste  I | gem.  I | I /N (%) | rekentijd (s) |
|----------|------|------|----------|---------|----------|---------------|
| Java1    | 158  | 580  | 30       | 30.7    | 19.0     | 0.06          |
| Java3    | 851  | 6103 | 275      | 283.2   | 32.3     | 0.54          |
| Java4    | 16   | 55   | 11       | 11.2    | 68.8     | 0.001         |
| Cobol1   | 1398 | 3298 | 17       | 22.4    | 1.2      | 0.33          |
| Cobol2   | 545  | 1204 | 10       | 11.5    | 1.8      | 0.12          |
| Cobol3   | 1357 | 4043 | 69       | 74.6    | 5.1      | 0.34          |
| Cobol4   | 1116 | 4067 | 52       | 56.5    | 4.7      | 0.41          |

**Tabel 3** Resultaten met hypergraafpartitionering

In tabellen 2 en 3 is de interfaceomvang  $|I|$  en de rekentijd weergegeven voor beide methoden. De verschillende call-grafen hebben  $N$  knopen en  $|A|$  pijlen. Als we de resultaten vergelijken zien we dat de heuristische methode hele goede resultaten levert. De ILP methode leidt tot de optimale interface; de interface verkregen door de heuristische HP methode is groter, echter hoogstens een factor 1.63. Aan de andere kant is de rekentijd van de HP methode veel kleiner en lineair evenredig met  $|A|$ . De rekentijd van de ILP methode is over het algemeen veel hoger en heeft een onvoorspelbaar karakter.

### Conclusie

Het splitsen van een groot softwaresysteem in kleinere eenheden is voor veel organisaties een uitdaging geworden. Tijdens de studiegroep maakten we kennis met dit probleem, waar het werd geïntroduceerd door SIG. Tijdens de week van de studiegroep en erna hebben we gewerkt aan een duidelijke wiskundige formulering van het probleem. Tevens hebben we twee verschillende aanpakken gevonden, die beide erg geschikt en waardevol kunnen zijn voor de bedoelde toepassingen. De wiskundige formu-

leringen reduceerden het probleem tot standaardproblemen uit de discrete optimalisering. Zodoende konden moderne algoritmen gebruikt worden om de praktijkproblemen van SIG op te lossen. Onze twee methoden kunnen het relatieve aantal interfaceprogramma's drastisch verlagen. Voor Cobol-systemen is het zelfs mogelijk dat de omvang van de interface minder dan 5% wordt.

Voor kleine problemen bevelen wij aan de optimale ILP methode te gebruiken. Voor grote problemen, met duizenden knopen in de call-graaf, is multi-level hypergraafpartitionering de enige realistische optie. Het bedrijf SIG waardeerde de voorgestelde oplossingen, evenals het inzicht dat verkregen kon worden door middel van ons onderzoek. Aan de andere kant hebben wij geprofi-teerd van dit goed gestelde probleem wat ons leidde tot nieuwe interessante vragen zoals de vergelijking tussen een exacte en een heuristische methode in een realistische situatie.  $\Leftarrow$

Aan dit probleem werkten de wiskundigen Rob Bisseling, Jarosław Byrka, Selin Cerav-Erbas, Nebojša Gvozdenović, Mathias Lorenz, Rudi Pendavingh, Colin Reeves, Matthias Röger en Arie Verhoeven.

### Referenties

- 1 A. Rajek, R. Lenhardt, D.I. Sessler, M. Grabenwöger, J. Kastner, P. Mares, U. Jantsch,

E. Gruber, 'Tissue Heat Content and Distribution During and After Cardiopulmonary

Bypass at 17°C', *Anesth. Analg.*, **88** (1999), pp. 1220–5.

Birgit van Dalen

Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
dalen@math.leidenuniv.nl

## Onderwijs

# Card games with ideals

**Een kaartspel als illustratie voor een identiteit over tweezijdige idealen? Het bestaat, en het laat zien hoe met inventiviteit en fantasie een abstracte variant van de Chinese reststelling tot leven komt. Birgit van Dalen, student wiskunde aan de Universiteit Leiden, legt uit.**

*Lenstra's Wondrous Card Game* is a mathematical card game for two players. It was invented by Hendrik Lenstra in order to solve a problem in ring theory. To play the game you need a mathematical stack of cards, consisting of infinitely many cards that are coloured at both sides. There is a finite number  $n \geq 2$  of colours, and the two sides of each card have different colours. As many cards as needed are available of each of the different types of cards, corresponding with the different pairs of colours. In addition to that, there is exactly one joker, which has only one side and can assume any of the  $n$  colours.

All else you need for this game is a pencil and a piece of paper. Before the start of the game, the two players agree on a certain number of colour sequences, and they write these sequences down. Each sequence should contain every colour exactly once, and the order of the colours in each sequence is determined by the players. These sequences, as well as their number, can change with every game that is played and can be used to vary the difficulty of the game. The first player's objective is to create one of these sequences with the cards, so the more sequences, the easier the game is for the first player.

When the sequences have been written down, the game starts. The first player, whom we will call player *A*, takes any finite number of cards and lays them in a long row. When he is finished, the second player, player *B*, for every card decides on a side to turn up. Only the colour on the side turned up will matter for the creation of the sequences.

After player *B* has finished, the winner is determined. If the row of cards, when read from left to right, contains one of the colour sequences agreed on in advance, player *A* wins the game. In matching these sequences, cards in the row may be skipped, as long as the relative order of the colours is preserved. The joker may be part of a sequence and will in that case assume any colour

player *A* assigns to it. If there is no such sequence available in the row of cards, player *B* wins the game.

Before giving an example, we shall introduce some notation. The collection of colours will henceforth be called  $V$ . We had already agreed that  $V$  contains  $n$  elements. The collection of colour sequences will be called  $T$ . Rather than using the full names of the colours, we will use the numbers  $1, 2, \dots, n$  to indicate the colours.

**Example 1.**  $n = 4$ ,  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $T = \{1234, 4231, 1342\}$ . Player *A* lays down the following row of cards. Each card is represented by a column containing the two colours on the card. The joker is represented by  $J$ .

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & J & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 & & 2 & 2 \end{array}.$$

Player *B* may now choose the sides of the cards that will be turned up. If he chooses, for example, the row

$$1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 1 \ J \ 3 \ 1,$$

player *A* wins, since this row contains the sequence 4231 (with the joker as 2). If, on the other hand, player *B* chooses

$$2 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ J \ 3 \ 2,$$

he wins: the row contains neither colour 4 nor colour 1, and as the joker can only assume one of those colours and each sequence in  $T$  contains all four colours, this row can never contain a sequence.

### A condition on $T$

We would now like to know which of the players can win this game. This depends heavily on the set  $T$ . Suppose, for example, that  $T$  is empty. Then it follows directly from the rules that player *B* wins the game. On the other hand we can also easily construct a  $T$  such that player *A* wins the game.

**Example 2.**  $T = \{123 \dots n, n \dots 321\}$ . For  $n = 2$  we have  $T = \{12, 21\}$  and we see immediately that player  $A$  wins with the row of cards

$$J_2^1.$$

We now use induction to  $n$  to show that player  $A$  can always win in this case. Suppose  $Z_{n-1}$  is a winning row of cards for  $T = \{123 \dots (n-1), (n-1) \dots 321\}$ . Now take  $T = \{123 \dots n, n \dots 321\}$  and observe the following row of cards:

$$\begin{array}{ccccccc} n & n & n & \cdots & n & & n & \cdots & n & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & Z_{n-1} & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

First note that  $Z_{n-1}$  contains the joker: if it did not, player  $B$  could pick one colour and turn that to the bottom on each card it appears on, so this colour would not be visible in the row and therefore none of the sequences would appear.

Now look at the left side of the row of cards. If player  $B$  chooses the colours  $1\ 2\ 3 \dots n-1$ , the joker can assume colour  $n$  and player  $A$  will win with the sequence  $123 \dots n$ . So player  $B$  is forced to choose colour  $n$  at least once on the left side of  $Z_{n-1}$ . In the same way, player  $B$  is forced to choose  $n$  at least once on the right side of  $Z_{n-1}$ . Now we know that  $Z_{n-1}$  is a winning row for  $T = \{123 \dots (n-1), (n-1) \dots 321\}$ , meaning that at least one of those sequences appears in  $Z_{n-1}$ , regardless of what player  $B$  does. Together with the  $n$  left and right, we now see that either  $123 \dots n$  or  $n \dots 321$  appears in the full row of cards. So player  $A$

always wins.

Let's have a closer look at the argument used here to show that player  $A$  always needs the joker. If player  $B$  chooses one colour, say 1, and turns all cards with this colour so that the side with 1 is not visible, then player  $A$  is forced to make the joker assume colour 1. This is a severe restriction, since to construct a sequence  $\tau$  every colour to the left of 1 in  $\tau$  will now have to appear to the left of the joker in the row of cards, and every colour to the right of 1 in  $\tau$  will now have to appear to the right of the joker in the row.

We introduce a notation for this. Suppose we view  $\tau$  as a function that assigns a colour to every place number of the sequence, such that  $\tau(1)$  is the first colour in the sequence,  $\tau(2)$  the second, and so on, with  $\tau(n)$  the final colour. The colours left of 1 in the sequence  $\tau$  (or rather, the sequence  $\tau(1)\ \tau(2)\ \dots\ \tau(n)$ ) we can now write as  $\tau(i)$  for each  $i < \tau^{-1}(1)$ . Similarly, the colours right of 1 in  $\tau$  are  $\tau(i)$  for each  $i > \tau^{-1}(1)$ .

If player  $B$  could force  $A$  to use the joker for two different colours, he would win, since that is impossible. Unfortunately for player  $B$ , things are not that easy. As long as each type of the cards occurs at least once in the row, player  $B$  cannot let two different colours vanish. However, he can split the row in two halves and let one colour vanish in each half. The most natural way to do this is obviously to split the row at the joker.

What happens if player  $B$  turns colour 1 to the bottom of all cards to the left of the joker and does the same to colour 2 to the right of the joker? In order to construct a sequence, player  $A$  will have



to pick either the joker or a card to the right of the joker for colour 1, and either the joker or a card to the left of the joker for colour 2. This means that whatever player  $A$  does, colour 1 will always be to the right of colour 2 in the sequence he constructs. In other words, player  $A$  can only win if there is a sequence  $\tau$  that satisfies  $\tau^{-1}(2) < \tau^{-1}(1)$ .

Player  $B$  has a huge advantage here. He can analyse the collection of sequences  $T$  and pick two colours he likes to execute the above trick with. So for player  $A$  to stand a chance,  $T$  needs to satisfy the following condition:

**Condition (\*).** For all colours  $v, w \in V$  with  $v \neq w$  there exists a  $\tau \in T$  such that  $\tau^{-1}(v) < \tau^{-1}(w)$ .

### How player $A$ can win

In example 2 we have seen a set  $T$  for which player  $A$  can win. It is immediately obvious that this  $T$  satisfies condition (\*). In fact, this  $T$  is the smallest collection of sequences that satisfies the condition. This means of course that this  $T$  has special properties, but intuitively we feel that the bigger  $T$ , the easier player  $A$  can win. Therefore, we hope to find a way for player  $A$  to win every game with a  $T$  that satisfies condition (\*).

Let us look carefully at the way player  $A$  wins in example 2. We notice that an important special property of  $T$  in example 2 is that colour  $n$  occurs both at the start of a sequence and at the end of a sequence. This allows player  $A$  to force player  $B$  to choose  $n$  both to the left and to the right of the joker. We can generalise this a little.

Suppose  $a \in V$  is a colour for which there exists a  $\tau$  such that  $\tau(1) = a$ . Then player  $A$  can make sure that either he wins or player  $B$  chooses colour  $a$  right of the joker at a point in the row of cards determined by player  $A$ . In other words, player  $A$  can make sure colour  $a$  appears wherever he wants, as long as it is to the right of the joker.

Player  $A$  can do this by inserting the following set of cards in the place he likes to the right of the joker:

$$\begin{array}{cccc} a & a & \cdots & a \\ \tau(2) & \tau(3) & \cdots & \tau(n) \end{array}$$

If player  $B$  does not choose colour  $a$  anywhere in these cards, he has to choose  $\tau(2), \tau(3), \dots, \tau(n)$ . Since these cards are lying somewhere to the right of the joker, the sequence  $\tau$  is formed, with the joker assuming colour  $a = \tau(1)$ . So in order to prevent player  $A$  from winning, player  $B$  has to choose colour  $a$  at least once.

As we see, player  $A$  can win if he is able to execute the above trick with every colour. After all, in that case he can simply force player  $B$  to choose each of the colours to the right of the joker in the order they appear in one of the sequences. Unfortunately, there are numerous sets  $T$  for which this does not work, like the one from example 2.

However, we can generalise a bit more. Suppose colour  $a$  does not appear on the first place of a sequence  $\tau$ , but on the second:  $\tau(2) = a$ . Then we can put the following cards to the right of the joker:

$$\begin{array}{cccc} a & a & \cdots & a \\ \tau(3) & \tau(4) & \cdots & \tau(n) \end{array}$$

Now we are nearly there. If player  $B$  does not choose  $a$ , the se-

quence  $\tau$  will nearly appear; only  $\tau(1)$  and  $\tau(2) = a$  are not there yet. Colour  $a$ , of course, can be made by the joker. All we now need to complete the sequence is colour  $\tau(1)$ , say  $b$ , to the left of the joker. If we can force player  $B$  to choose  $b$  to the left of the joker, he will also have to choose colour  $a$  to the right.

This is where condition (\*) comes in. We know that there is at least one sequence in  $T$  in which  $a$  appears to the left of  $b$  and at least one in which  $a$  appears to the right of  $b$ . Clearly,  $\tau$  satisfies the latter. We also pick a sequence  $\sigma$  that satisfies the former. Let's call  $\sigma^{-1}(a) = m$ . Now put

$$\begin{array}{cccc} a & a & \cdots & a \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(m-1) \end{array}$$

to the left of the joker and

$$\begin{array}{cccc} a & a & \cdots & a \\ \sigma(m+1) & \sigma(m+2) & \cdots & \sigma(n) \end{array}$$

to the right of the joker next to the cards we already had there. Note that all of these cards exist: as  $\sigma(m) = a$ , none of the colours  $\sigma(i)$  with  $i > m$  is equal to  $a$ , and as  $\sigma^{-1}(b) > \sigma^{-1}(a) = m$ , none of the colours  $\sigma(i)$  with  $i < m$  is equal to  $b$ .

Now if player  $B$  chooses neither  $a$  to the right of the joker nor  $b$  to the left of the joker, the sequence  $\sigma$  will appear. If player  $B$  chooses  $b$  to the left of the joker but not  $a$  to the right of the joker, the sequence  $\tau$  will appear. So the only thing left for player  $B$  to do is to choose  $a$  to the right of the joker.

We now see that if all  $n$  colours occur in either the first or the second position in a sequence of  $T$ , player  $A$  can force player  $B$  to choose them all to the right of the joker in the order of one of the sequences of  $T$ . Then player  $A$  can win.

This is an encouraging result. Not only have we been able to generalise a useful principle that we may be able to generalise even further, we have also explicitly used the condition we imposed upon the set  $T$ . We may now hope that this condition is not only necessary, but also sufficient for player  $A$  to win the game.

So what to do if a colour  $a$  occurs not on the first or second position in a sequence  $\tau$ , but even further to the right, say on the  $k$ th position? We then have  $k-1$  colours left of  $a$  in  $\tau$ . Let's call them  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ . We now want to use condition (\*) and find a sequence  $\sigma$  that has all of these colours to the right of  $a$ . Unfortunately, this is not always possible. All condition (\*) says is that for each of these colours  $b_i$  there exists a sequence  $\sigma_i \in T$  such that  $\sigma_i^{-1}(b_i) > \sigma_i^{-1}(a)$ , but these sequences are not necessarily all the same.

We are in luck, however. With a few more cards, we can still make it work. Let's call  $\sigma_i^{-1}(a) = m_i$ . We now do for each of the  $b_i$  exactly the same thing as we did above for  $b$ . We use the following sets of cards:

$$H_i = \begin{array}{cccc} \sigma_i(1) & \sigma_i(2) & \cdots & \sigma_i(m_i-1) \\ b_i & b_i & \cdots & b_i \end{array} \quad \text{for } k < i \leq n,$$

$$K_i = \begin{array}{cccc} \sigma_i(m_i+1) & \sigma_i(m_i+2) & \cdots & \sigma_i(n) \\ a & a & \cdots & a \end{array} \quad \text{for } k < i \leq n.$$

Note that we have chosen  $\sigma_i$  such that all of these cards exist.

If we lay down  $H_i$  to the left of the joker and  $K_i$  to the right of the joker, player  $B$  will be forced to choose either  $b_i$  to the left of the joker or  $a$  to the right of the joker. We do this for each  $i, i < k$ ,

where  $k = \tau^{-1}(a)$ . If player  $B$  refused to choose  $a$  to the right of the joker, the first half of  $\tau$  would appear to the left of the joker. Now we just need to add the other half of  $\tau$  at the right side:

$$L = \begin{array}{cccc} \tau(k+1) & \tau(k+2) & \dots & \tau(n) \\ a & a & \dots & a \end{array}.$$

The complete row of cards now looks like the following.  $J$  represents the joker.

$$H_1 \ H_2 \ \dots \ H_{k-1} \ J \ K_1 \ K_2 \ \dots \ K_{k-1} \ L.$$

If player  $B$  does not choose  $a$  to the right of the joker, player  $A$  will win, either because one of the  $\sigma_i$  appears, or because player  $B$  chooses  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$  to the left and  $\tau(k+1), \tau(k+2), \dots, \tau(n)$  to the right, forming the sequence  $\tau$ .

This can be done for each colour as long as  $T$  satisfies  $(*)$ , so by putting the blocks of cards on the right side of the joker in a certain order player  $A$  can make sure one of the sequences of  $T$  appears in the row of cards.

It may seem as though this method requires huge numbers of cards. It is not nearly as bad as it seems, however. Each pair  $H_i$  and  $K_i$  consists of at most  $n-1$  cards, and there are at most  $n-1$  of these pairs. The final set of cards  $L$  also contains at most  $n-1$  cards, so for one colour you need fewer than  $n^2$  cards (not counting the joker). Since there are only  $n$  colours, the total number of cards will never exceed  $n^3$ . In practice you need even fewer cards, as the following example illustrates.

**Example 3.** Take  $n = 5$  and  $T = \{12345, 45132, 21354, 42315\}$ . This  $T$  satisfies condition  $(*)$ , so player  $A$  can win. To do so, we first take  $a = 3$  and  $\tau = 12345$ . To the left of 3 in this sequence are 1 and 2. Colour 1 appears to the right of colour 3 in sequence  $\sigma_1 = 42315$ ; colour 2 appears to the right of colour 3 in sequence  $\sigma_2 = 45132$ . Player  $A$  can now force player  $B$  to choose colour 3 to the right of the joker by laying down the following row of cards:

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 2 & 4 & 5 & 1 & J & 1 & 5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

It is much easier to let 1 and 2 appear to the right of the joker, as both of these colours occur at the beginning of a sequence:

$$J \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad J \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}.$$

On the other side of the joker we can do the same with 4, as that colour occurs at the end of a sequence:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} J.$$

Now we are already done. We can construct the sequence 45132 by using all of the above and making the joker assume colour 5. So player  $A$  can win this game with the following row of cards:

$$\begin{array}{cccccccccc} 4 & 2 & 4 & 5 & 1 & 2 & 1 & 3 & 5 & J & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 5 & 1 & 5 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}.$$

### The connection with algebra

Now that we know exactly what condition  $T$  must satisfy to allow player  $A$  to win, we can easily solve a certain algebraic problem. Let  $R$  be an arbitrary ring and let  $I, J$  be two-sided ideals of  $R$  that are coprime. This means that we can find elements  $x \in I$  and  $y \in J$  such that  $x + y = 1$ . We now wish to find a relation between the intersection  $I \cap J$  and the products  $IJ$  and  $JI$ . This is quite easy. Suppose  $i \in I$  and  $j \in J$  are arbitrary elements. One of the main properties of ideals says that  $ir \in I$  for all  $r \in R$ ; in particular,  $ij \in I$ . Similarly,  $rj \in J$  for all  $r \in R$ , hence  $ij \in J$ . So  $ij \in I \cap J$  for all  $i \in I$  and  $j \in J$ ; in other words,

$$IJ \subset I \cap J.$$

Similarly,

$$JI \subset J \cap I = I \cap J,$$

and from this it follows that

$$IJ + JI \subset I \cap J. \quad (1)$$

Now let  $z$  be an arbitrary element in  $I \cap J$ . Now

$$z = 1 \cdot z = (x + y)z = xz + yz \in IJ + JI$$

since  $xz \in IJ$  and  $yz \in JI$ . So

$$I \cap J \subset IJ + JI$$

and hence

$$I \cap J = IJ + JI.$$

Now we can ask ourselves: is there a shorter way to write  $I \cap J$  in terms of the products? Perhaps  $I \cap J = IJ$ ? We want this to hold for all rings  $R$  and all ideals  $I$  and  $J$ , however, so one counterexample is sufficient to disprove this claim. Such a counterexample indeed exists.

**Example 4.** Let  $n = 2$ . As ring  $R$  we take a subring of the ring of  $2 \times 2$ -matrices with entries in  $\mathbf{Z}$ :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}.$$

It is easy to verify that this is indeed a subring. Now we define two two-sided ideals of  $R$ :

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : b, c \in \mathbf{Z} \right\}.$$

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{Z} \right\}.$$

These ideals are coprime, since  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I$  and  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$

and therefore  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I + J$ , which means that  $I + J = R$ .

Now for  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in I$  and  $\begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$  it holds that

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

so  $IJ = \{0\}$ . However,

$$I \cap J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbf{Z} \right\} \neq \{0\}.$$

We conclude that  $I \cap J \neq IJ$ .

We have now satisfactorily solved this problem with two ideals. Things become more interesting, however, if we look at  $n$  ideals. So let  $R$  once again be an arbitrary ring and let  $I_1, I_2, \dots, I_n$  be pairwise coprime two-sided ideals. How can we express  $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$  in terms of the products of the ideals?

This time we have many more possibilities. There are  $n!$  ways to order the  $n$  ideals in a product, and we may have to add two or more of them. In other words, we are looking for a subset  $T \subset S_n$  (with  $S_n$  the permutation group) such that

$$I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)} \quad (2)$$

for all rings  $R$  and all pairwise coprime two-sided ideals  $I_1, I_2, \dots, I_n$  of  $R$ .

Using (1), we can show by induction that

$$I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n \supset \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)} \quad (3)$$

for all subsets  $T \subset S_n$ .

We named the subset of permutations  $T$  on purpose. If we view the permutations as orders rather than as functions, we will see that  $T$  is a collection of sequences of ideals: the permutation  $\tau$  corresponds with the sequence  $I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$ . So this  $T$  looks very similar to the  $T$  we used in the card game, and we will in fact prove that the condition (2) on  $T$  is equivalent to (\*).

For the first step, we need example 4. Suppose there exist  $v, w \in \{1, 2, \dots, n\}$  such that for each  $\tau \in T$  it holds that  $\tau^{-1}(v) < \tau^{-1}(w)$ . Then (2) is not true for all rings  $R$  and all pairwise coprime two-sided ideals  $I_1, I_2, \dots, I_n$  of  $R$ .

We can prove this claim as follows. Take  $R$  as in the above example. The assumption on  $T$  implies that in each product on the right-hand side of (2), the ideal  $I_v$  appears left of the ideal  $I_w$ . Now take  $I_v = I$  and  $I_w = J$  as in the above example, and  $I_i = R$  for all other  $i$ . The right-hand side of (2) is now reduced to  $IJ$  while the left-hand side is reduced to  $I \cap J$ . We already knew that  $I \cap J \neq IJ$ , and this proves our claim.

So now we know that condition (\*) is a necessary condition on  $T$  for (2) to hold. All that is left to prove is that it is also a sufficient condition. We will not prove this directly, but instead use the card game. If we can show that player  $A$  being able to win the card game means that (2) holds, we are done, since condition (\*) is a sufficient condition for player  $A$  being able to win the card game. Rather than proving this formally, we use an example to illustrate the way it should be proved.

**Example 5.** Take  $n = 3$  and  $T = \{123, 312, 231\}$ . By using the techniques we have developed, we can easily construct a winning row of cards:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} J \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}.$$

The fact that this is a winning row of cards means that regardless of the choices player  $B$  makes, there will always appear a sequence of  $T$ .

Now we take an arbitrary ring  $R$  and three pairwise coprime two-sided ideals  $I_1, I_2, I_3$ . Since each pair of them is coprime, we can find elements  $x_1, y_1 \in I_1, x_2, y_2 \in I_2, x_3, y_3 \in I_3$  such that

$$y_1 + x_2 = 1, y_2 + x_3 = 1, y_3 + x_1 = 1.$$

Now we go back to the row of cards and replace each card by 1: instead of  $\frac{2}{3}$  we write  $(y_2 + x_3)$ , instead of  $\frac{2}{1}$  we write  $(x_2 + y_1)$ , and so on. We replace the joker by an arbitrary element  $r \in I_1 \cap I_2 \cap I_3$ . So the row of cards now looks like a product:

$$(y_2 + x_3)(x_2 + y_1)r(y_1 + x_2)(x_1 + y_3).$$

All sums between parentheses are equal to 1, so the entire expression is equal to  $r$ . On the other hand, multiplying out the parentheses is the same as picking a side of each card except the joker, so the resulting products all contain a sequence of  $T$ . Similar to the way we can let the joker assume colour  $i$  in the card game if we wish, we can view  $r$  as an element of  $I_i$  for any  $i$ .

Now we use the fact that  $xI \subset I$  and  $Ix \subset I$  for all elements  $x \in R$  and two-sided ideals  $I$  of  $R$ . So if in a product the sequence  $\tau \in T$  appears, we can disregard any elements in the product not contributing to  $\tau$  and conclude that the product is an element of  $I_{\tau(1)}I_{\tau(2)}I_{\tau(3)}$ . Since each product contains a  $\tau \in T$ , the entire expression is an element of  $\sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)}I_{\tau(2)}I_{\tau(3)}$ . So

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \subset \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)}I_{\tau(2)}I_{\tau(3)}.$$

On the other hand, it follows from (3) that

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \supset \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)}I_{\tau(2)}I_{\tau(3)}.$$

This proves

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)}I_{\tau(2)}I_{\tau(3)}.$$

It is clear that the same argument can be used for all  $n$  and  $T$  for which there exists a winning row of cards. We have obtained the following result:

Let  $n \geq 2$  and  $T \subset S_n$ , which we can view as a set of sequences. Then the following claims are equivalent:

- (i) for all rings  $R$  and all pairwise coprime two-sided ideals  $I_1, \dots, I_n$  of  $R$  the identity:  $\bigcap_{i=1}^n I_i = \sum_{\tau \in T} I_{\tau(1)} \cdots I_{\tau(n)}$  holds;
- (ii) player  $A$  can win the cardgame defined by  $T$ ;
- (iii) for all  $v, w \in \{1, 2, \dots, n\}$  with  $v \neq w$  there exists  $\tau \in T$  such that  $\tau^{-1}(v) < \tau^{-1}(w)$ . ◀

## Jan van de Craats

Korteweg-De Vries Instituut

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergracht 24

1018 TV Amsterdam

craats@science.uva.nl

### Boekbespreking

# Wiskunde is mensenwerk!

Er is tegenwoordig geen gebrek aan boeken over wiskunde voor een breed publiek. Daarbij worden moeilijke onderwerpen niet geschuwd: zo zijn er bijvoorbeeld al heel wat popularisering van cryptografie, de Laatste Stelling van Fermat of het Riemannvermoeden. Maar ook algemene boeken over wiskunde vinden gretig aftrek. Jan van de Craats bespreekt drie recente titels.

Wiskunde als wetenschap oefent een magische aantrekkingskracht uit op een relatief groot publiek. Boeken over wiskunde halen verrassend hoge oplagecijfers. Deels is dat de verdienste van vermaarde popularisatoren als Ian Stewart, Keith Devlin, Simon Singh en James Gleick. Maar van tijd tot tijd duiken er nieuwe namen op, zelfs van actieve topwiskundigen van wie je niet zou verwachten dat ze de kunst beheersen om voor een algemeen publiek te schrijven. Zo iemand is de Brit Timothy Gowers die in 1998 een *Fields Medal*, de hoogste onderscheiding voor jonge wiskundigen, won voor zijn werk op het gebied van de functionaalanalyse en de combinatoriek. Gowers leverde een verrassende bijdrage aan de serie *Very Short Introductions* van Oxford University Press. Een ander voorbeeld is de Amerikaan Barry Mazur van Harvard University, een autoriteit op het ge-

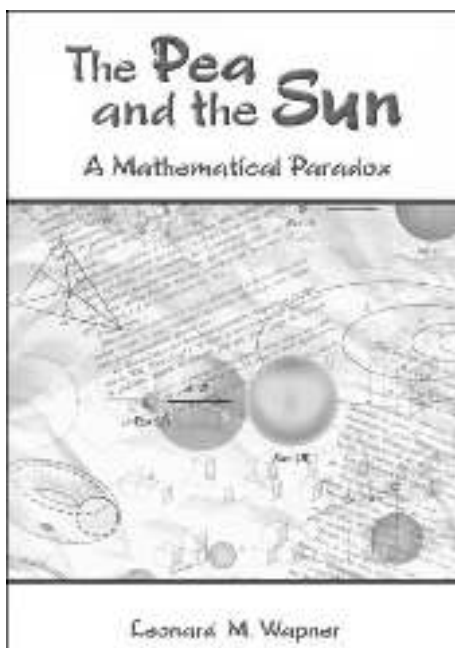
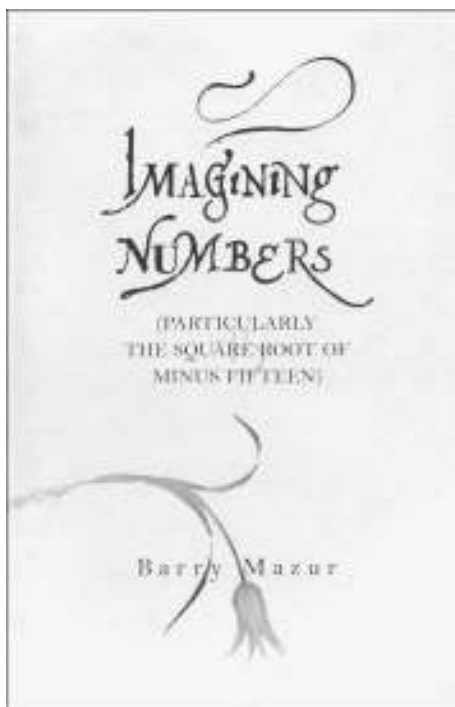
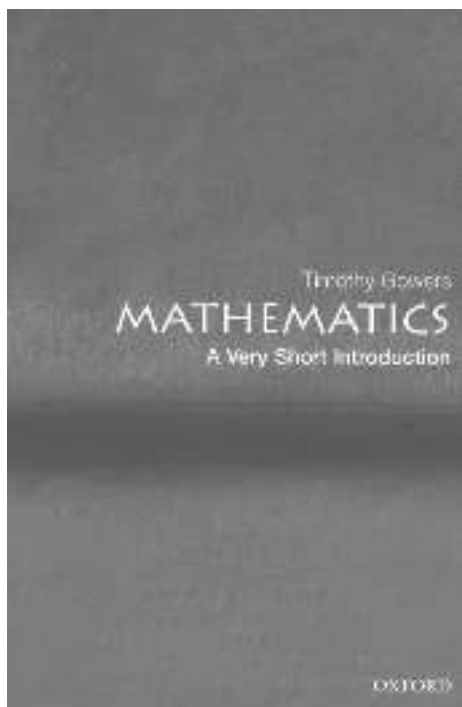
bied van de algebraïsche meetkunde en de getaltheorie. Velen zullen zich zijn rol herinneren in de BBC-documentaire over het bewijs van de Laatste Stelling van Fermat door Andrew Wiles. Mazur schreef een poëtische inleiding voor niet-wiskundigen over reële en complexe getallen onder de titel *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*. Leonard Wapner, de derde auteur die ik hier zal bespreken, is als researchwiskundige niet van dit torenhoge niveau, maar zijn succesvolle boek *The Pea and the Sun*, dat gaat over de Banach-Tarskiparadox (oftewel de wonderbaarlijke balverdubbeling), sluit heel mooi aan bij een thema dat ook door Gowers en Mazur nadrukkelijk aan de orde wordt gesteld, namelijk de relatie tussen wiskunde en werkelijkheid.

#### Mathematics, A Very Short Introduction

Het leek een volstrekt onmogelijke opgave waarvoor Timothy Gowers zich gesteld zag: schrijf voor een intelligent lekenpubliek een algemene inleiding in de wiskunde met een omvang van niet meer dan zo'n honderdveertig bladzijden op zakagendaformaat. Tegelijkertijd was het ook een geweldige uitdaging: de serie *Very Short Introductions* is een ambitieus, succesrijk en zeer omvangrijk project; het deel *Mathematics* is al nummer 66 in de

reeks. Zonder enige reserve kan gezegd worden dat Gowers zich op een bewonderenswaardige wijze van zijn taak gekwetend heeft. Sterker nog, ik ken geen beter boek voor lezers met een algemene culturele bagage die willen weten wat wiskunde nu eigenlijk is.

Natuurlijk heeft Gowers keuzes moeten maken: geen sexy toepassingen, geen anekdotes, cartoons, Mandelbrot sets, chaostheorie of Gödelstellingen. Wat dan wel? Om te beginnen een prachtig hoofdstuk over modelvorming. Hoe bereken je onder welke hoek je een steen moet gooien die zo ver mogelijk weg moet komen? Gowers laat zien dat die vraag veel ingewikkelder is dan je op het eerste gezicht zou denken, zelfs als je over voldoende natuurkundige en wiskundige voorkennis beschikt. Welke nauwkeurigheid wil je bereiken? Welke veronderstellingen maak je? Welke factoren neem je mee? Modelvorming betekent vereenvoudigen en verstandige keuzes maken voordat je ook maar kunt beginnen wiskunde als instrument in te zetten om enige greep op de werkelijkheid te krijgen. Gowers weet binnen zestien bladzijden de complexe relatie tussen wiskunde en werkelijkheid duidelijk te maken aan de hand van een serie welgekozen voorbeelden. Alleen al dit hoofdstuk zou verplichte kost moeten zijn voor alle gelovigen in het evan-



gelie van het zogenaamde realistische wiskundeonderwijs, waarbij kritische modelvorming zelden enige aandacht krijgt en waarbij er maar al te vaak geen duidelijke scheiding wordt aangebracht tussen werkelijkheid en wiskundig model.

Ook het tweede hoofdstuk, *Numbers and abstraction*, is een fraai staaltje van heldere expositie. Gowers legt uit dat het niet de vraag is wat getallen zijn, maar wat je ermee kunt

doen. Het gaat erom wat de wetten zijn waaraan ze gehoorzamen, net zoals het bij schaken alleen maar gaat om de regels van het spel en niet om de vraag wat het bord en de stukken nu eigenlijk zijn. Filosofische en existentiële vragen over getallen zijn voor de wiskunde weinig relevant. Vanuit dit abstracte gezichtspunt, namelijk de spelregels waaraan getallen moeten voldoen, behandelt Gowers de natuurlijke getallen, de breuken, de

reële getallen en de complexe getallen. Alles op een summiere, maar tegelijkertijd lucide en inzichtelijke wijze.

Daarna volgen hoofdstukken over bewijzen, limieten en oneindigheid, dimensie, meetkunde, benaderingen en schattingen. Het laatste hoofdstuk geeft antwoorden op acht veelgestelde vragen, zoals de vraag waarom er zo weinig vrouwen in de wiskunde zijn, de vraag of wiskundigen computers gebruiken en de vraag waarom zoveel mensen een hekel aan wiskunde hebben. Die antwoorden zijn soms verrassend, meestal heel evenwichtig en in alle gevallen goed beargumenteerd.

Conclusie: *Mathematics, A Very Short Introduction* is een prachtig boekje voor iedere wiskundige, zowel om te hebben als om cadeau te geven. De in hetzelfde formaat uitgegeven Nederlandse vertaling van Jan Willem Nienhuys is uitstekend, alleen vind ik de Nederlandse ondertitel *De kortste introductie* wat te apodictisch. Maar daar kan Nienhuys niets aan doen; het is de algemene Nederlandse titel die uitgeverij Het Spectrum voor de serie heeft bedacht.

#### Imagining Numbers

"This book, then, is written for people who have no training in mathematics and who may not have actively thought about mathematics since high school, or even during it, but who may wish to experience an act of mathematical imagining and to consider how such an experience compares with the imaginative work involved in reading and understanding a phrase in a poem." Deze zinnen uit het voorwoord van het boek van Barry Mazur geven aan hoe het ontstaan is en wat hij ermee wil bereiken. Het is begonnen als een korte tekst voor bevriende alfa's die hadden aangegeven dat ze wel eens iets van wiskunde wilden weten. Mazur wilde ze uitleggen wat imaginaire getallen en wiskundige objecten in het algemeen zijn, en hoe je ze in je verbeelding kunt oproepen. Want dat is in dit boek het sleutelwoord: *imagination*, oftewel verbeeldingskracht. Mazur gebruikt daarbij voortdurend beelden uit de poëzie en de literatuur om de verbeelding van zijn gehoor te prikkelen. Neem bijvoorbeeld een uitdrukking als 'Het geel van een tulp'. Wat voor beeld roept dat op? En is zoiets vergelijkbaar met het beeld dat een wiskundige voor zijn geestesoog ziet verschijnen als hij het heeft over wortel twee, of over de wortel uit min vijftien?

In zekere zin lijkt Mazur een totaal andere houding aan te nemen dan Gowers voor wat betreft de vraag wat getallen zijn. Gowers

schuift die vraag als zinloos terzijde, maar bij Mazur is de titel van de zevende paragraaf in het tweede hoofdstuk *What is a square root?* Desondanks bevat die paragraaf (en de rest van dat hoofdstuk) niet het antwoord op de vraag wat een wortel nu eigenlijk is, maar een historisch aangekleed exposé over wortels, de vierkantsvergelijking, de *abc*-formule en de allereerste verschijningsvormen van imaginaire getallen in het Italië van de zestiende eeuw.

Verbeelding en verbeeldingskracht zijn ook de hoofdthema's in hoofdstuk drie, waarin de Nederlandse lezer op bladzijde 55 tot zijn verbazing het bekende leesplankje (aap, noot mies, ...) ziet opduiken als illustratie van de rol van de verbeelding bij het leren lezen. Ook de getallenrechte en de reële getallen komen in die context te voorschijn. Meer in lijn met Gowers getallenbeeld en diens nadruk op spelregels is hoofdstuk 4, getiteld *Permissi-on and laws* en de twee daarop aansluitende hoofdstukken.

Daarna treden imaginaire en complexe getallen meer op de voorgrond. Eerst in historisch verband als hulpmiddel bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen, en daarna in een meer meetkundige zin, als punten in het complexe vlak. In het algemeen ligt de nadruk ook hier op de historische ontwikkeling. Het boek begint dan ook steeds meer het karakter te krijgen van een historische monografie over complexe getallen. Zeer goed gedocumenteerd en prachtig beschreven met tal van erudiete uitwijdingen. Maar intussen lijkt Mazur zijn oorspronkelijke doelgroep van geïnteresseerde leken toch wel definitief achter zich te hebben gelaten. Wat rest is een mooi verzorgd en goed geïllustreerd boek dat echter voor de zelfgekozen doelgroep naar mijn inschatting slechts tot ongeveer halverwege toegankelijk is. Voor wiskundig iets beter ingevoerde lezers (vwo-B-niveau) met een literaire belangstelling blijft het tot het einde toe zeer de moeite waard.

### The Pea and the Sun

Hoe abstract ook, de wiskunde in de boeken van Gowers en Mazur is in zekere zin toch nog tastbaar, of in elk geval voorstelbaar. Voorstelbaarheid, *imagination*, is zelfs het hoofdthema bij Mazur. Onvoorstelbare wiskunde lijkt haast een *contradictio in terminis* te zijn. Toch is onvoorstelbare wiskunde precies het onderwerp van het boek van Wapner. Het heeft dan ook als ondertitel *A Mathematical Paradox*. Die paradox is de *Banach-Tarskiparadox* die wel eens volgt geparafraseerd wordt. Neem een (gevlude) bal en ver-

deel die op een bepaalde manier in eindig veel stukken. Die stukken kun je vervolgens als puzzelstukken zo weer in elkaar passen dat er twee ballen uit ontstaan die elk het oorspronkelijke formaat hebben. Het is goed om even te pauzeren om wat hier staat goed tot je te laten doordringen. Dat is namelijk niets minder dan een soort wonderbare balvermenigvuldiging (vergelijk Mattheus 14:19–21). Als dit wonder eenmaal aanvaard is, is het hek van de dam: een gevolg van deze stelling zegt dat een lichaam van welke vorm dan ook, zeg een erwt, in eindig veel stukken kan worden verdeeld die, anders samengevoegd, elke andere van te voren bepaalde vorm en inhoud, zeg die van de zon, kunnen aannemen. Hiermee is de titel van het boek van Wapner verklaard, maar de paradox natuurlijk nog niet. En voordat we besluiten om in het kader van de ondernemende universiteit een eigen bedrijfje op te gaan zetten om deze truc grootschalig met goudstaven te gaan uitvoeren, is het goed om nog even de kleine lettertjes te lezen, oftewel hoofdstuk 5 van het boek waarin alle details van de desbetreffende stelling worden verklaard en bewezen.

Een preciezere vorm van de stelling van Banach en Tarski luidt als volgt:

*De eenheidsbal*

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

kan worden verdeeld in eindig veel onderling disjuncte delen  $C_1, \dots, C_n, D_1, \dots, D_m$  op zo'n manier dat er rotaties  $\rho_1, \dots, \rho_n, \sigma_1, \dots, \sigma_m$  bestaan zo dat  $B = \rho_1 C_1 \cup \dots \cup \rho_n C_n$  en  $B = \sigma_1 D_1 \cup \dots \cup \sigma_m D_m$ .

De crux van de zaak is natuurlijk dat het hier om een existentiële stelling gaat. Bewezen wordt dat er zo'n verdeling is, maar er wordt niet constructief aangegeven hoe je zo'n verdeling tot stand kunt brengen. Daar gaat ons businessplan! Sterker nog, de delen waarin de eenheidsbal verdeeld wordt, zijn *onmeetbaar*, dat wil zeggen dat het onmogelijk is er op een redelijke manier een volume (maat) aan toe te kennen. Bij het bewijs van de stelling is dan ook gebruik gemaakt van Zermelo's *keuzeaxioma* dat zegt dat er bij elke collectie verzamelingen  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  een verzameling  $W$  is die uit elke  $V_\alpha$  precies één element bevat.

Wie precies wil weten hoe dit allemaal in zijn werk gaat, moet Wapner lezen. *The Pea and the Sun* veronderstelt geen wiskundige voorkennis. Het is voortreffelijk geschreven, met een uitgebreide historische inleiding waarin eerst de hoofdfiguren: Cantor, Hausdorff, Banach, Tarski, Gödel en Paul Cohen ten

tonele worden gevoerd. Vervolgens behandelt Wapner een aantal curieuze legpuzzelparadoxen en drogredeneringen als smaakmakers voor de eerste serieuze gang van de maaltijd die onder meer bestaat uit verzamelingenleer, de begrippen aftelbaarheid en overaftelbaarheid, isometrieën en het keuzeaxioma. Daarna kan het echte werk beginnen: het bewijs van de grote stelling. Verbazingwekkend is dat dit bewijs inderdaad zonder voorkennis gevolgd kan worden: een compliment voor Wapner als docent!

Wapner sluit zijn boek af met een aantal behartigenswaardige beschouwingen over de betekenis van dit soort paradoxale resultaten. Paul Cohen heeft in 1963 bewezen dat het keuzeaxioma onafhankelijk is van het Zermelo-Fraenkelaxiomastelsel (ZF) voor de verzamelingsleer: als ZF zonder het keuzeaxioma consistent is, is ZF met het keuzeaxioma dat ook, en omgekeerd. Dat betekent dat je als wiskundige de vrijheid hebt om het keuzeaxioma te accepteren of niet. Als je het verwerpt, is er geen Banach-Tarskiparadox en dan zijn er ook geen onmeetbare verzamelingen. Maar voordat je zo'n radicale stap zet, moet je je toch een paar dingen realiseren. Wat zijn de argumenten tegen het gebruik ervan? Dat ze leiden tot paradoxale resultaten? Paradoxaal in welke zin dan? Dat ze strijdig zijn met de dagelijkse ervaring of de intuïtie? Maar het gaat hier om wiskunde, een vrije schepping van de menselijke geest. Trouwens, hoe reëel zijn de reële getallen? Komen die in de werkelijkheid voor? Of zelfs de natuurlijke getallen? Bestaan die in de natuur? "God heeft de natuurlijke getallen geschapen, de rest is mensenwerk." schijnt Kronecker gezegd te hebben. Maar dat is nu juist helemaal bezijden de waarheid. De natuurlijke getallen zijn, net zoals alle getallen, een schepping van de menselijke geest. Waarom zouden we onszelf beperkingen opleggen? Er is al heel wat prachtige wiskunde geschapen die gebaseerd is op het keuzeaxioma. Het is een van de verdiensten van Wapners boek dat het ons over deze vragen aan het denken zet. 

*Mathematics, A Very Short Introduction*, Timothy Gowers, Oxford, Oxford University Press 2002, ISBN 0-19-285361. Nederlandse vertaling: *Wiskunde, de kortste introductie*, Utrecht, Uitgeverij Het Spectrum, 2003, Vertaling: Jan Willem Nienhuys, ISBN 90-274-7994-1.

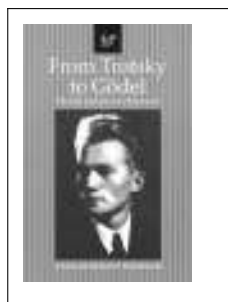
*Imagining Numbers (Particularly the Square Root of Minus Fifteen)*, Barry Mazur, London, Allan Lane The Penguin Press, 2003, ISBN 0-713-99630-7.

*The Pea and the Sun, A Mathematical Paradox*, Leonard M. Wapner, Wellesley MA, A.K. Peters Ltd., ISBN 1-56881-213-2.

# Boekbesprekingen

| Book Reviews

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk  
 Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93  
 Dept. of Math. and Computer Science  
 Technische Universiteit Eindhoven  
 Postbus 513, 5600 MB Eindhoven  
 e-mail: wgreview.win@tue.nl



A. Burdman Feferman  
**From Trotsky to Gödel,  
 The Life of Jean van Heijenoort**

A.K. Peters, 2001  
 432 p., prijs \$ 25,-  
 ISBN 1-56881-148-9

As one commentator said, this book is 'stranger than fiction'. This well-written biography about the cultured logician van Heijenoort was first published under a different title: 'Politics, Logic and Love', with the same subtitle and content. Indeed, Jean van Heijenoort (1912–1986) was active in these three fields in memorable ways. He was for seven years secretary and bodyguard of Trotsky; he was a logician having a wide-angle view, resulting among other things in his publication *From Frege to Gödel*, a source book of the fundamental papers of modern mathematical logic with a fine choice of topics; and finally he was enchanted by women in such a way that it finally became fatal.

When Jean van Heijenoort was two years old his father died, because of the lack of medical care during World War I. This resulted in the separation from his mother, who had to provide for a living, and he was raised by his (very catholic) aunt and two older (female) cousins. Later his mother remarried a man whom he did not like. This situation has given him an unhappy youth. After World War I young Jean was very painfully struck by the endless fields of crosses at a war cemetery. He 'rejected—totally rejected—the system that caused the war. "I wanted something else." During his school years van Heijenoort was impressed by the autobiography of Trotsky, both for its contents and style and he became a left-winged idealist.

During his undergraduate years (1930–1932) at the Lycée Saint-Louis in Paris van Heijenoort not only excelled, but became seriously involved with a group of Trotskyites. He transformed from a left-winged idealist into an activist. Being able to read Russian his political work started with making translations for the group. He did this so well that he was asked in 1932 to join Trotsky as secretary in his exile in Turkey. For van Heijenoort this was like joining the staff of World Revolution and he accepted. He left Paris and also his scholarly career in mathematics just about to start at the École Normale Supérieure. Later, Trotsky and his followers had to flee, at first to France, then to Norway and finally to Mexico. There the group stayed in a home provided by the painters Diego Ribera and Frida Kahlo. During his seven years with Trotsky van Heijenoort's devotion, intelligence and modesty made him a central figure around the authoritarian politician in exile. At some point Comrade Van, as van Heijenoort used to be called, started seeing human shortcomings in his idol, notably in the form of uncontrolled emotional outbursts of anger. In 1939 he left Trotsky and went to the USA with his second wife. When Trotsky was murdered in 1940 van Heijenoort felt guilty not having been around him at the time. At a later stage he realized that had the movement been successful, Trotsky could have become an unpleasant dictator, with he (JvH) himself possibly involved.

In 1945 van Heijenoort continued his studies of mathematics and after graduating he held faculty positions, first at New York University and in 1965 until his retirement at Brandeis University.

His greatest attraction for mathematics was based on its precision and certainty and that he found in its foundations: mathematical logic. In the book under review Sol Feferman has provided an appendix about the value of van Heijenoort's work in logic. We just want to mention that he worked for seven years meticulously on his main work *From Frege to Gödel: A Source Book on Mathematical Logic (1879–1931)*, Harvard University Press (1967). The papers that are brought together in this volume translated in English had appeared in several languages and in difficult to find journals. But van Heijenoort's contribution was more than that of a mere editor: he provided valuable introductions and precise notes. As a result, the book has been praised by many. His scholarship in editing also showed towards the end of his life in his contribution to *Kurt Gödel. Collected Works*, Volume I and II, Oxford University Press, New York, for which he set the example.

Jean van Heijenoort was a man that could neither live without women nor with them. He married five times; marriage 1, 2 and 4 ending in a divorce, marriage 3 in an annulment and marriage 5 by being assassinated by wife 4 and 5 (being the same person). In the meantime he had amorous engagements with graduate and undergraduate students and other women, including the painter Frida Kahlo. Often the pattern of his relationships was the same. He would fall in love; with his flegmatic appearance the woman would be attracted and get involved; after some time his strongest feelings subdued; he would leave the woman; she would get involved with another man; he would be jealous and beg her to come back; she would do this; etcetera, until the women had learned not to come back any longer. His last wife usually got what she wanted and had her own way of dealing with the situation.

Anita Feferman went into some psycho-analytical terminology in order to provide an understanding of her subject. She uses phrases such as 'missing father figure', 'role model', 'longing for a mother'. In the reviewer's opinion this is done convincingly. In fact, during the last years of his life van Heijenoort did work with her husband Sol Feferman on the collected works of Gödel. This enabled her to meet and interview van Heijenoort several times for this biography, thus justifying the mentioned psychological terms. Slightly more daring is the interpretation of emotions that occurred in some other figures in the book. For example, Gaby Brausch, who was van Heijenoort's first wife and also a political activist, delivered their baby in absence of her husband, because he was called for some duty by Trotsky. Anita Feferman raises the hypothesis that this may have been a motive for Gaby's turning away from Trotsky when there were competing fractions within the group. But the author does this in style by preceding this passage by "It is difficult to resist the thought that".

The reviewer has met van Heijenoort at several occasions in the 1970s. He had an aloof but not unfriendly dignity that he always radiated. When attending a summerschool in Cambridge, England, I told him that I stayed as a guest in a private house rather than in a college. He remarked: 'How aristocratic.' Not long after he was staying in a tastefully furnished apartment of a friend in Manhattan Village and this time I was impressed. At another occasion he did ask me what kind of vitamins my PhD supervisor Kreisel took, in order to stay healthy. While attending lectures he often was eating a mixture of raisins and nuts. A professional interaction occurred when van Heijenoort had found an error in a draft of my paper for the *Handbook of Mathematical Logic*, North

Holland (1977), edited by Jon Barwise. It was before the email era and I received his letter in time to change the text and thank him. His past life with politics and women was quite a surprise to me, as it was to most of his colleagues. One of the virtues of the book is that it makes the tragic ending of his life more understandable, making it seem almost inevitable.

H. Barendregt



F. Verhulst

### **Chaos en orde**

*Zebrareeks, deel 16*

Utrecht: Epsilon, 2003

60 p., prijs €9,-

ISBN 90-5041-080-4

Wat is dat, chaos? Waar treedt het op? Hoe lokaliseer je chaos? Vragen die bestudeerd en zo goed als kan beantwoord worden in dit Zebraboekje voor het voortgezet onderwijs van de hand van Ferdinand Verhulst, hoogleraar wiskunde en in het bijzonder expert op het gebied van dynamische systemen aan de Universiteit van Utrecht. Uitleg en opgaven over de stof worden in vriendelijk tempo afgewisseld. Zware materie is voorzien van een sterretje.

Met de toenemende interesse in de bewegingsleer, gewekt door bijvoorbeeld slingeruurwerken en hemellichamen, werd er meer en meer geprobeerd de specifieke bewegingen te verklaren. Wetenschappers zoals Copernicus en Kepler initieerden, Newton verwezenlijkte rond 1700 de eerste algemene wetten betreffende de bewegingsleer (dynamica). De oplossingen van die vergelijkingen worden evenwichtoplossingen genoemd. Via voorspelling en verificatie uit de praktijk bleken deze wiskundige vergelijkingen zeer goed te kloppen.

Ook al lijken sommige dynamische systemen vrij eenvoudig, hun gedrag (het gedrag van de evenwichtoplossingen) kan soms onvoorspelbaar zijn in de toekomst. Dit onvoorspelbare gedrag wordt chaos genoemd. Henri Poincaré was een van de eerste wetenschappers die er onderzoek naar deed. In het boekje wordt met leuke voorbeelden en verduidelijkende plaatjes getoond dat een proces als bevolkingsgroei flink uit de klauwen kan lopen. Of wat te denken van de uiteindelijke hoogte van een blaadje papier van oorspronkelijk 1mm dikte dat je om de minuut dubbel vouwt?

Bij onderzoek naar chaos speelt stabiliteit een grote rol. Of een oplossing van een wiskundige vergelijking stabiel is hangt onder andere af van de gekozen beginwaarde. Bij stabiliteit leidt een kleine verstoring van de beginwaarde niet tot een verstoring van de evenwichtoplossing, bij instabiliteit wel. Verhulst illustreert dit via webgrafieken en rekenvoorbeelden op een duidelijke manier.

Vervolgens passeren de tentafbeelding (een samengestelde lineaire functie) en de logist (een kwadratische afbeelding) de revue en wordt aangegeven dat gevoelige afhankelijkheid van beginwaarden een belangrijk kenmerk is van chaos. Echt een stuk voor de die-hards. Zeker de gevalsonderscheidingen die moeten worden gemaakt in combinatie met het laten doordringen van de begrippen kunnen de lezer voor een muur zetten.

Aan het einde wordt het model van een stuiiterende bal aan analyse onderworpen, evenals de precisie bij het doorrekenen

met onafgeronde getallen, waarbij de schaduwstelling wordt geïntroduceerd. Tot besluit zijn er enkele praktijkvoorbeelden zoals het voorspellen van het weer. Ondanks de grilligheid van het weertype in Nederland komt het KNMI er volgens de auteur goed vanaf!

C. Resing



S. Xambo-Descamps, S. Zarzuela (eds.)

**Video and Multimedia at 3ecm**

Berlin: Springer Verlag, 2000

prijs €40,54

ISBN VHS/NTSC: 3-540-92643-7, ISBN

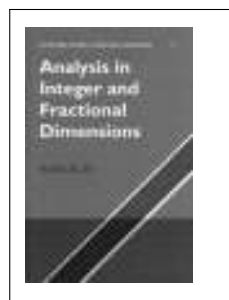
VHS/PAL: 3-540-92644-5, ISBN DVD: 3-540-14875-2

Het onderwerp van bespreking is nu eens geen boek, maar een VHS videoband met revenuen van het 3rd European Congress of Mathematics te Barcelona in juli 2000.

De circa 90 minuten durende band bevat een vijftiental filmfragmenten over onderwerpen uit de wiskunde en dan met name natuurlijk computersimulaties van bijbehorende plaatjes. Het kortste stukje duurt 42 seconden, het langste 24 minuten. Elk filmpje is meer of minder educatief bedoeld, maar in alle gevallen zeer illustratief. U kijkt achtereenvolgens naar: *Multicoloured Fractals* (4'00", geen gesproken commentaar, de Mandelbrotverzameling met modificaties en fraaie beelden van andere figuren met een fractale structuur), *Quadro — a Compact Soap Bubble of Genus 4* (1'12", geen tekst of gesproken commentaar, numerieke constructie van een compact oppervlak met constante gemiddelde kromming), *The Optiverse* (6'43", gesproken tekst met formules in beeld, eversies van de bol via een minimax-principe), *Distorted Space* (1'58", alleen muziek, Escher-achtige onmogelijke ruimtelijke constructies met lopende figuurtjes, vanuit verschillende richtingen gezien), *From 'Platonic Solids'* (2'34, gesproken tekst, de vijf platonische lichamen met tekst volgens Plato en beelden volgens Kepler, gedeelte van een langere film over deze materie), *Polytope Sections* (2'00", tekst in beeld en begeleidende muziek, doorsneden van regelmatige 'ster' polytopen, samen met vlakke doorsneden van niet-convexe veelvlakken), *Geodesics and Waves* (4'45", gesproken tekst, geodeten op veelvlakken, geconstrueerd via centrale golven), *Numerical Simulations of Unstable Detonations* (3'58", gesproken tekst, schokgolven in beeld gebracht), *CMC-Pictures of Constant Mean Curvature Tori* (5'24", constructie van drie recente voorbeelden, begeleid door futuristische muziek), *On Gergonne's Problem* (0'42", alleen muziek, over een gemengd randwaardeprobleem voor een minimaal oppervlak in een kubus), *Knot Energies* (3'20", gesproken tekst, elektrische lading op knopen geeft aanleiding tot canonieke configuraties ervan), *From 'Soap Bubbles'* (2'34", gesproken tekst en begeleidende muziek, zeepvliesoppervlakken in de wiskunde, kunst en architectuur), *Interpolation of Triangle Hierarchies* (7'14", gesproken tekst, continue interpolatie van triangulatie-roosters op lichamen), *Surfaces, Flows & Holonomy* (18'00", gesproken tekst, oude en nieuwe voorbeelden van oppervlakken met constante gemiddelde kromming), *The Dynamics of the Rabbit* (24'00", gesproken tekst en begeleidende muziek, schitterende en heldere presentatie van eigenschappen van Julia-verzamelingen).

De band gaat vergezeld van een inhoudsopgave met informatie bij elk stukje film. Bovendien wordt per item aangegeven waar verdere informatie te halen valt en wordt het emailadres van een contactpersoon vermeld. Al met al een aanwinst voor elke instituutbibliotheek, ik heb er in elk geval zelf tenminste al enige keren dankbaar gebruik van gemaakt.

W.H.V. de Goede



R. Blei

**Analysis in Integer and Fractional Dimensions**

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

556 p., prijs £70,-

ISBN 0-521-65084-4

This is a fascinating book! The author calls it a mix of probability theory, harmonic analysis and functional analysis. To this I would add that the book shows how intimately related these subjects really are, a feature that specialization tends to hide.

A central theme is Grothendieck's inequality. One of the equivalent ways to formulate it is expressed in the factorization theorem. Given compact Hausdorff spaces  $X$  and  $Y$  and probability measures  $\mu$  on  $X$  and  $\nu$  on  $Y$ , let  $B$  be a continuous bilinear form on  $L^2(X, \mu) \times L^2(Y, \nu)$ . Then obviously its restriction to  $C(X) \times C(Y)$  is a continuous bilinear form on that product, the spaces  $C(X)$  and  $C(Y)$  of continuous functions on  $X$  respectively  $Y$ , being equipped with their respective sup-norms  $\|\cdot\|_\infty$ . Grothendieck's factorization theorem is the converse of this: Given a continuous bilinear form  $B$  on  $C(X) \times C(Y)$  with norm  $\|B\|$ , there exist probability measures  $\mu$  and  $\nu$  on  $X$ , respectively  $Y$ , such that  $B$  extends continuously to  $L^2(X, \mu) \times L^2(Y, \nu)$ , and such that the norm of the extension is at most  $\kappa_G \|B\|$ , that is, we have the inequality  $|B(f, g)| \leq \kappa_G \|B\| \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\nu)}$ , where the expressions  $\|f\|_{L^2(\mu)}$  and  $\|g\|_{L^2(\nu)}$  denote the  $L^2$  norms of the functions  $f \in C(X)$  and  $g \in C(Y)$ , respectively. The remarkable fact is that  $\kappa_G$  is a universal constant, independent of the spaces under consideration.

One of the ways in which the factorization theorem recurs in the book is negatively: the analogous result for trilinear and other multilinear maps is false, but it takes an excursion into harmonic analysis, with the emphasis on Rademacher functions, and the properties of Sidon sets, to prove that.

An important role is played by the so-called mixed norms for matrices and higher dimensional arrays. A well-known instance of this for matrices is the supremum of the  $\ell^1$ -norms of the columns. One can also take the  $\ell^p$ -norm of the sequence of  $\ell^q$ -norms of the columns (or lines) of a matrix. For instance, in Theorem 10 of the prologue we see Littlewood's mixed  $(\ell^1, \ell^2)$  inequality. Such mixed norm inequalities recur throughout the book.

It is well known that continuous linear forms on a space  $C(X)$ , with  $X$  compact, correspond bijectively to regular measures on  $X$ . Another theme in the book concerns the fact that, while measures on the product  $X \times Y$  define continuous bilinear forms on  $C(X) \times C(Y)$ , the converse is false: in general, a continuous bilinear map does not define a measure on the product. Bi-measures,

and generally multi-measures, in the book usually defined as set functions and called  $F_n$ -measures, or Fréchet measures, do not, in general, define measures on the product. So a good deal of space is devoted to multidimensional measure theory, the theory of integrals with respect to such Fréchet measures.

This distinction between measures on a product and Fréchet measures is, by duality, related to the properties of the projective tensor products of linear spaces, in this book denoted with the letter  $V$ , in honour of N. Varopoulos who seems to have been the first to emphasize the link between harmonic analysis and topological tensor products.

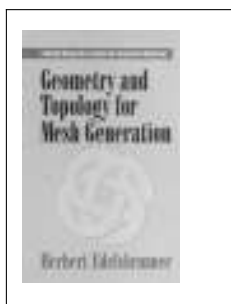
The middle part of the book brings probability theory, the Wiener integral, the Wiener-Ito multiple integral, random series, and the notion of Integrators, which is shown to be a powerful tool.

The last chapters are about fractional, combinatorial, dimension, not to be confused with Hausdorff dimension. Dimensionality is in fact the ultimate goal of the book. It is shown, surprisingly, to be related to the mixed norm inequalities and Fréchet measure theory from the previous chapters.

The book is well-organized, given the complexity of the material which prevents a strictly linear ordering, although we have to guess at some obvious notations such as  $||\hat{\beta}||_p$ . There is a good index, the historical backdrops are helpful.

One thing I regret is the author's introduction of algebraic tensor products as formal expressions, sometimes identifying them to concrete objects in one way, sometimes in another way (p. 73, p. 81), without emphasizing the uniqueness of tensor products up to isomorphism through the universal property that gives the correspondence between multilinear maps and linear maps on the tensor product. This might have resulted in a greater concision of certain sections, especially given the author's care in explicitly writing out all the required sums for the description of  $n$ -fold tensor products.

*E.G.F. Thomas*



H. Edelsbrunner  
**Geometry and Topology for Mesh Generation**

Cambridge University Press, 2001,  
Cambridge Monographs on Applied  
and Computational Mathematics 7  
177 p., prijs £30,00  
ISBN 0-521-79309-2

Mesh generation is a basic problem in many areas of Computational Science, like Computational Fluid Dynamics, Computer Aided Geometric Design, Computer Graphics and Computational Geometry. It incorporates aspects of Numerical Analysis on the one hand and of Combinatorial Topology on the other. In many applications a region in the plane is subdivided into triangles, or a region in space is subdivided into tetrahedra. These triangulations or tetrahedrizations are combinatorial objects, that can be represented in a computer and manipulated by combinatorial geometric algorithms. Furthermore, the quality of the triangles, like the smallest angle, or tetrahedra is crucial for the robustness of numerical calculations.

The book starts with two chapters on triangulations in the

plane. The Delaunay triangulation of a point set has both a rich combinatorial structure and optimal quality with regard to numerical robustness. It can be constructed using a simple, randomized algorithm. The complexity of this algorithm, as well as some nice geometric properties of the Delaunay triangulation are analyzed. In many situations constrained Delaunay triangulations provide a mesh that conforms to the geometry of the input: here, some of the edges of the triangulation are fixed as part of the input to the algorithm. A refinement algorithm is presented, which enhances the quality of the triangles in the mesh by adding well-chosen points as vertices of new triangles.

The third chapter introduces the rudiments of Combinatorial Topology, basically providing a language for the discussion of algorithms for higher dimensional meshes. Simplicial complexes are introduced as the key model for tetrahedrizations, and some topology preserving operations like barycentric subdivision and edge contraction are presented.

Chapter 4 applies these basic notions from Combinatorial Topology to the problem of surface simplification, where the goal is to obtain a coarser mesh by topology preserving operations like edge contraction.

In Chapters 5 and 6 Delaunay triangulations are generalized to three-dimensional Delaunay tetrahedrizations. The 3D version of the randomized algorithm for the constructions of the Delaunay tetrahedrization is presented and analyzed. The complexity of the problem clearly increases with dimension, and the use of a formal setting described in the language of Combinatorial Topology pays off. Improvement of the quality of the mesh is also an issue here, and is in fact much harder to establish than in the planar case. Here we meet the state of the art in computational geometry.

I very much enjoyed reading this book. Herbert Edelsbrunner is an expert in the field of Computational Geometry and its applications to areas like molecular modeling and biogeometry. Moreover, he is an excellent teacher and presenter. This shows in the current book, which grew out of notes for graduate courses on mesh generation. Edelsbrunner combines his taste for beautiful mathematics with a sense for applicability. I highly recommend this book to mathematicians who like to learn how basic geometric and topological structures support the design of efficient computational techniques, and to researchers in computational science and geometric computing who like to learn how to design fast algorithms based on sound mathematical principles. Furthermore, the book is very well suited for graduate seminars on geometric computing.

*G. Vegter*

J. Ivanova, F. Pastrone

**Geometric Method for Stability of Nonlinear Elastic Thin Shells**

Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002  
244 p., prijs €48,-  
ISBN 0-7923-7524-6

Het doel dat de auteurs voor ogen hadden bij het schrijven van dit boek is vanaf het begin volledig helder. A.V. Pogorelov heeft, naar de mening van de auteurs, een zeer belangrijke meetkundige methode voor het bestuderen van vervormingen van dunne elastische materialen ontwikkeld. In hun enthousiasme schrijven ze zelfs (op de achterflap van het boek), "The geometric method by

Pogorelov is one of the most important analytical methods developed during the last century", zonder daar meteen expliciet aan toe te voegen dat deze methode alleen waarde heeft in de context van dunne elastische materialen ... Het werk van Pogorelov is alleen in het Russisch verschenen. De auteurs willen met dit boek de meetkundige methode van Pogorelov toegankelijk maken voor een groter publiek. Het is zeer de vraag of ze daarin geslaagd zijn.

Hoewel het boek (wederom volgens de achterflap) geschikt zou zijn voor 'post-graduate students' (?) in de toegepaste wiskunde wordt er geen enkele inleiding gegeven in het vakgebied. De —gecompliceerde— functionalen die de energie van een vervormd dun elastisch oppervlak beschrijven, worden in essentie zonder enige uitleg geponeerd. Het gevolg hiervan is dat een lezer die niet al thuis is in dit toch behoorlijk gespecialiseerde vakgebied meteen in Hoofdstuk I grotendeels moet afhaken. Daar komt bij dat het deze lezer om dezelfde reden ook niet duidelijk wordt wat er nu zo belangrijk is aan Pogorelov's methode. Men zou hieruit kunnen concluderen dat het boek alleen maar geschikt is voor lezers met een flinke kennis van de behoorlijk geavanceerde wiskunde van niet-lineair elastische materialen. Maar deze lezer wordt op meerdere plaatsen verrast door tot in het detail uitgewerkte triviale wiskundige exercities. Zo besteedt het boek bijvoorbeeld bijna drie pagina's (pp. 84–86) aan het uitwerken van een simpele iterative methode waarmee een  $n$ -de graads vergelijking van de vorm  $x^n + ax + b = 0$  kan worden opgelost.

Het boek is geschreven in een moeilijk leesbaar Engels, de (vele!) lange formules zijn mede door het gebruik van een pre-text editor moeilijk te doorgronden, de illustraties zijn soms van een bedroevende kwaliteit. Dit alles bij elkaar roept de vraag op waarom dit boek eigenlijk uitgeven is.

A. Doelman

brown. Each of the terms in the equation has its own characteristic properties, and good discretizations of the individual terms respect these properties. Simply adding them together may lead to contradicting demands on the coupled discretization. Delicate trade-offs need to be made, and the resulting schemes should be used with extreme caution. As if that is not enough already, also the interplay between space- and time-discretization *an sich* needs to be kept in mind. All this makes the discretization of time-dependent advection-diffusion-reaction equations into one of the most challenging problems in computational mathematics. The authors have accepted this challenge, and, based on roughly twenty years of internationally recognized research experience and collaboration, written a book in which this trade-off, caution, and interplay are well accounted for. It is a valuable contribution to the Springer Series in this field of research.

After the introductory chapter, there is a chapter solely on time discretization. The third chapter concentrates on the difficulties that already arise in the coupling of advection and diffusion. The next chapter, on operator splitting, is a logical choice, since this seems to provide a paradigm to deal with difficulties arising from coupling in general on a more abstract level. The final, rather short chapter returns again to time integration methods, in particular to some promising recent developments in this area.

J. Brandts



W. Hundsdorfer, J.G. Verwer  
**Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations**

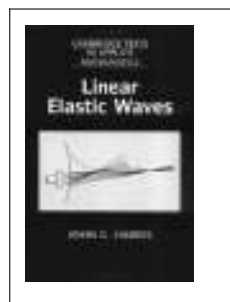
Berlijn: Springer Verlag, 2003

471 p., prijs €79,95

ISBN 3-540-03440-4

Even though the authors of this book can not have aimed at presenting a complete treatment of the topic, as a relatively unexperienced reader in the field you get the impression that they did. The information, densely packed on roughly 450 pages, is abundant though well-structured, smoothly readable, and with emphasis on explanation of key concepts by means of examples that are stripped from unnecessary complications. There are no exercises, but for the reader it is not too hard to take any of the numerous examples, do the coding, study the results, and to check validity of theory. As such, and particularly valid for the first introductory chapter of 138 pages, a serious student with a hands-on attitude finds in this book an excellent source for self-studies and investigation.

The discretization of advection-diffusion-reaction equations is rather hazardous in the sense that, metaphorically, it is like mixing red, green and blue while preventing that the result turns



J.G. Harris

**Linear elastic waves**

Cambridge : Cambridge University Press, 2001,

Cambridge Texts in Applied Mathematics 26

178 p., prijs £19,99

ISBN 0-521-64383-X

De theorie van propagatie van kleine verstoringen (golven) in een elastisch medium vormt een klassiek en vruchtbaar toepassingsgebied van de wiskunde. Bovendien laten bijna alle resultaten zich vertalen naar en van elektromagnetische golven, terwijl een deelverzameling ervan (namelijk die te beschrijven zijn door middel van een scalaire potentiaal) direct te vertalen is naar akoestische golven.

Het huidige boekje geeft een beknopte doorsnede van een aantal kernverschijnselen en begrippen.

Het boekje heeft veel goede kanten. Het geeft in een wonderlijk beknopte en toch heldere stijl een aantal van de bekende begrippen met ontzettend leuke doorkijkjes en dwarsverbanden die je niet opmerkt of vergeten bent als je te lang in een bepaald deelgebied bent blijven hangen. Mij trof bijvoorbeeld de vertaling van een volkomen ondoorzichtige representatie in het frequentiedomein van het veld van een herhaald gereflecteerde puls in een staaf van eindige lengte naar een heldere en compacte beschrijving in het tijddomein door middel van een simpele Poisson transformatie. Adequaat worden behandeld het verschil tussen verstrooiing- en reflectie/transmissiematrices, dispersie en groepssnelheid, het belang van de tak en sneden van de complexe wortel  $(\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ , het principe van *phase matching* bij reflectie en transmissie op een materiaalovergang (de wet van Snellius, die

overigens niet wordt genoemd), evenals diffractie en uitstralingsproblemen waarbij integraalasymptotiek in de uitwerking een rol speelt. Niet onaardig was ook het hoofdstuk over kanaalmodes, vooral met betrekking tot enige fysische inzichten. Wel had ik iets meer nadruk willen zien op de rol van het onderliggende eigenwaardeprobleem en de eigenfunctie ( $\sim$  mode)-ontwikkeling van het complete veld. Volledigheid tussen randvoorwaarden van de modes en randvoorwaarden van het veld komt niet aan bod.

Wat meer aandacht hadden wel de *scherpe-randvoorwaarde* en de *causaliteitsvoorwaarde*, notoire bronnen van verwarring, mogen hebben. Beide staan niet in de index. De scherpe-randvoorwaarde komt wel in de tekst voor (met een minimum aan toelichting), maar causaliteit staat verstopt als *radiation condition*; see *limiting absorption* en verder zonder de relatie met het tijdsprobleem.

Het boekje heeft ook minder goede kanten. Tamelijk hinderlijk (voor wie een andere achtergrond heeft natuurlijk) blijft het feit dat alle resultaten geheel zijn gebracht in de taal van elastische golven (zoals de titel belooft). Zoals gezegd, erg veel laat zich zo overbrengen naar andere golfproblemen, maar dan moet je je niet teveel hoeven afvragen wat een *antiplane shear wave* ook al weer was.

Verder maakt de auteur er een slechte gewoonte van alle problemen dimensievol te presenteren. Dit gaat goed (afgezien van wat extra nomenclatuur) zolang geen benaderingsmethoden worden gebruikt. Echter, als bijvoorbeeld de stralenbenadering wordt afgeleid (waarbij gebruik wordt gemaakt van een groot typisch Helmholtzgetal  $kL$ ), is het een heel gehannes hoe in woorden moet worden uitgelegd waarom zekere termen al dan niet verwaarloosbaar zouden zijn ten opzichte van andere. In een kennelijke poging ook een grenslaagprobleem op te nemen, geeft de auteur de oplossing van het probleem van diffractie aan een halfoneindig breukvlak behalve exact (met Wiener-Hopf) ook benaderd met *matched asymptotic expansions*. Ik betwijfel of de auteur hier wel helemaal boven staat. Omdat er geen andere lengteschaal in het probleem is dan de golflengte, is dit geen echt grenslaagprobleem. De auteur meent dat het omgekeerde van het golfgetal,  $k^{-1}$ , een 'kleine parameter' is, maar je kunt deze geheel uit het probleem schalen.

Het is jammer te moeten constateren dat het gebrek aan strakheid met betrekking tot de dimensieloze parameters de auteur parten speelt zodra hij zich begeeft in de storingsmethoden. Voor het overige heeft het boekje me toch wel het een en ander geleerd, en ik kan het met een slag om de arm uiteindelijk wel aanbevelen.

S.W. Rienstra

M.R. Grossinho and S. Tersian

### **An Introduction to Minimax Theorems and their Applications to Differential Equations**

Kluwer Academic Publishers, 2001

269 p., prijs €124,95

ISBN 0-7923-68-320

The book is an introduction to critical point theory and its applications to differential equations. The material has been organized in seven chapters.

Chapter I is an introductory chapter. It presents the variational principles of Ekeland and of Borwein-Preiss on the existence of  $\varepsilon$ -minimum points. It introduces a number of deformation lemmas,

which are subsequently used to provide proofs of the mountain-pass theorem of Ambrosetti-Rabinowitz and some of its extensions. It also shows how mountain-pass theorems can be derived from the variational principle of Ekeland.

Chapter II starts with a discussion of the well-known minimax theorem of von Neumann. It also presents the saddle-point theorems of Rabinowitz and their extensions due to Lazer-Solimini on the one hand and Schechter on the other and shows how these results are connected to critical point theory. It formulates the critical point theorems of Brezis-Nirenberg and Li-Willem, and a number of linking theorems due to Silva.

Chapter III studies applications of critical point theorems to elliptic problems in bounded domains. The Neumann problem is studied, as well as the Hammerstein equations on a bounded domain with smooth boundary. The existence of solutions to the Hammerstein integral equations is shown using the Ambrosetti-Rabinowitz mountain-pass theorem discussed in Chapter I and the Lazer-Solimini saddle point theorem treated in Chapter II.

Chapter IV applies variational methods to prove the existence of periodic solutions of some second-order non-linear differential equations. Existence results are established using the Ambrosetti-Rabinowitz mountain-pass theorem of Chapter I, and the Silva saddle-point and Li-Willem linking theorems of Chapter II.

The dual variational method is presented in Chapter V, as well as its applications to some problems for fourth-order differential equations with continuous and discontinuous nonlinearities.

The goal of Chapter VI is the presentation of a number of minimization and mountain-pass theorems for non-differentiable functionals. It is assumed that the functionals are locally Lipschitz, which implies that it is possible to define their generalized gradients. The mountain-pass theorems of Chang, Ghoussoub-Preiss and Brezis-Nirenberg are obtained as special cases of a general mountain-pass theorem.

Chapter VII concludes the book with an application of variational methods to study the existence of homoclinic and heteroclinic solutions of second-order equations, fourth-order equations and Schrödinger type equations.

The book is designed for graduate and postgraduate students as well as for specialists in the fields of differential equations, variational methods and optimization. Although there is scope for improvement of the book, in particular with regard to the use of English and the exposition of the general intuition behind the results obtained, I have enjoyed reading the book for its mathematical clarity and rigor. I am convinced that any specialist in the field will use the book as a valuable reference manual, and I would therefore like to highly recommend it.

P. Herings

# Problemen/UWC

## Universitaire Wiskunde Competitie

The Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is a ladder competition for students. Others may participate 'hors concours'. The results can also be found on internet at: <http://www.nieuwarchief.nl/uwc>

This issue contains four problems A, B, C, and D. A total of 12 points can be obtained for each problem: 8 for a complete and correct answer, at most 2 points for elegance, and at most 2 points for possible generalisations. To compute the overall score, the totals for each problem are multiplied by a factor 3, 4, 5, and 5, respectively.

The three best contributions will be honoured with a Sessions Prize of respectively 100, 50 and 25 Euro. The points of the winners will be added to their total after multiplication by a factor of respectively 0,  $1/2$  and  $3/4$ . The highest ranked participant will be given a prize of 100 Euro, after which he/she starts over at the bottom of the ladder with 0 points.

Twice a year there is a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will also receive a prize of 100 Euro.

Group contributions are welcome. Submission by email (in  $\text{\LaTeX}$ ) is preferred; participants should repeat their name, address, university and year of study at the beginning of each problem/solution. The submission deadline for this session is June 1, 2006.

The Universitaire Wiskunde Competitie is sponsored by Optiver Derivatives Trading, and the Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen in Delft.

### Rectification

In Session 2005/4 of the UWC, the names of the proposers of the resolved problems and those of the new problems were inverted.

The problems of Session 2005/2 placed with solutions were proposed by: Unknown (2005/2-A), Matthijs Coster (2005/2-B,D), and Roger Hendrickx and Rob van der Waall (2005/2-C). The new problems were proposed by: Matthijs Coster (2005/4-A,D), Jan van de Lune (2005/4-B), and Leen Bleijenga (2005/4-C).

In addition to the 5 solutions mentioned for problem 2005/2-C, we also received a very detailed solution by the two proposers, with a reference to the Ph.D. thesis of E. Barbette (Paris, 1910); p. 23 of this thesis contains a theorem equivalent to parts 1 and 2 of the proposed problem.



### Problem A (Proposed by Jurjen Bos)

We are given a lamp and a sufficiently large number of synchronised time switches that can be turned on or off by the quarter of an hour and have a revolution time of 24 hours. We are going to mount a finite number of switches on top of each other, and put the lamp on top of the result. At the beginning, all time switches are synchronised at 24:00 hours. We define a *period* to be a time span in which the lamp is on for at least one quarter of an hour, and is off for at least one quarter of an hour, and which repeats itself. Which periods, shorter than 4 days, can be constructed?

### Problem B (Proposed by Matthijs Coster)

Let  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (3, 4)$ . Find all points  $T = (x, y)$  such that

- $x$  and  $y$  are integers,
- the lengths of line segments  $PT$  and  $QT$  are integers.

### Problem C (Proposed by Johan Bosman)

Let  $n \geq 1$  be an integer and  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  be a polynomial with real coefficients. Suppose that  $f$  satisfies the following condition:

$$|f(\xi)| \leq 1 \quad \text{for each } \xi \in [-1, 1].$$

Consider the polynomial

$$g(x) = a_0x^n + \cdots + a_n,$$

the reciprocal polynomial of  $f$ . Show that  $g$  satisfies

$$|g(\xi)| \leq 2^{n-1} \quad \text{for each } \xi \in [-1, 1].$$

---

**Problem D** (Proposed by Michiel Vermeulen)

This problem was proposed as Problem 2005/3-B(2). Since no solutions were submitted, the editors of the problem section have decided to reformulate this part.

Let  $G$  be a group such that the maps  $f_m, f_n : G \rightarrow G$  given by  $f_m(x) = x^m$  and  $f_n(x) = x^n$  are both homomorphisms.

- Show that  $G$  is Abelian if  $(m, n)$  is one of the pairs  $(4, 11)$ ,  $(6, 17)$ .
- Show that there are infinitely many pairs  $(m, n)$  such that  $G$  is Abelian.
- Show that for every  $m$  there are infinitely many  $n$  such that  $G$  is Abelian.
- Given a pair  $(m, n)$ , how are we able to predict whether  $G$  is Abelian?

---

**Edition 2005/3**

For Session 2005/3 of the Universitaire Wiskunde Competitie we received submissions from DESDA (Nijmegen), Ruud Jeurissen, the team A.P.M. Kupers en J.W.T. Konter, and Jaap Spies.

---

**Problem 2005/3-A** In what follows  $f, g$  are two continuous functions.

1) Determine  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  and  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  such that  $f \circ g(x) = x + 1$  and  $g \circ f(x) = x - 1$ .

2) Determine  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  and  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  such that  $f \circ g(x) = x + 1$  and  $g \circ f(x) = 2x$ .

As usual, the symbol ' $\circ$ ' denotes the composition of functions and  $\mathbf{R}^+$  the set of all strict positive real numbers.

**Solution** This problem was solved by DESDA (Nijmegen), Ruud Jeurissen and the team A.P.M. Kupers en J.W.T. Konter. The solution below is based on that of Ruud Jeurissen.

1)  $f(x) + 1 = f \circ g \circ f(x) = f(x - 1)$ , so there is an  $a$  such that  $f(x) = -x + a$ .  $g(x) - 1 = g \circ f \circ g(x) = g(x + 1)$ , so there is a  $b$  such that  $g(x) = -x + b$ . Then  $f \circ g(x) = f(-x + b) = x - b + a$ , so we must have  $a - b = 1$ , in which case  $g \circ f(x) = g(-x + a) = x - a + b = x - 1$ , as desired.

2) Since  $f \circ g$  is defined,  $g$  can only take positive values. For  $x > 0$  we have  $f(x) + 1 = f \circ g \circ f(x) = f(2x)$ , so there is a  $b$  such that  $f(x) = 2 \log x + b$ . For all  $x$  we have  $2g(x) = g \circ f \circ g(x) = g(x + 1)$ , so there is an  $a$  such that  $g(x) = 2^{x+a}$ . Then  $f \circ g(x) = f(2^{x+a}) = x + a + b$ , so we must have  $a + b = 1$ , in which case  $g \circ f(x) = g(2 \log x + b) = x \cdot 2^{b+a} = 2x$ , as desired.

---

**Problem Generalisation** The team A.P.M. Kupers en J.W.T. Konter considered the following generalisation of part 2):

Determine  $f$  and  $g$  such that  $f \circ g(x) = x + 1$  and  $g \circ f(x) = ax + b$ . They found that  $f$  and  $g$  must satisfy

$$f(x) = \frac{\text{Log} \left( \frac{(ax+b)(a-1)+b}{b+ca-c} \right)}{\text{Log}(a)}, \quad g(k) = \frac{(a^k - 1)b}{a - 1} + c \cdot a^k$$

---

**Problem 2005/3-B**

1. Let  $G$  be a group and suppose that the maps  $f, g : G \rightarrow G$  with  $f(x) = x^3$  and  $g(x) = x^5$  are both homomorphisms. Show that  $G$  is Abelian.

2. In the previous exercise, by which pairs  $(m, n)$  can  $(3, 5)$  be replaced if we still want to be able to prove that  $G$  is Abelian.

**Solution** This problem was solved by Jaap Spies and the team A.P.M. Kupers en J.W.T. Konter. The solution below is based on that of Jaap Spies.

By assumption we have  $(ab)^5 = a^5b^5$  for all  $a, b \in G$ . We easily see that  $(ba)^4 = a^4b^4$ . Likewise,  $(ab)^3 = a^3b^3$  for all  $a, b \in G$  and hence  $(ba)^2 = a^2b^2$ . So  $(a^2b^2)^2 = a^4b^4$  and  $b^2a^2 = a^2b^2$ . Hence squares commute in  $G$ . Now  $a^4b^4 = b^4a^4 = (ba)^4$  and so  $b^3a^3 = (ab)^3 = a^3b^3$ . Hence cubes also commute in  $G$ . In the solution of Problem 2003/4-B of the UWC, it was proved that in this case  $G$  is Abelian.

---

**Problem 2005/3-C** For  $s > 1$  define

$$\psi_1(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \text{ with } p \text{ over all primes } \equiv 1 \pmod{4}$$

and

$$\psi_3(s) = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{-1} \text{ with } q \text{ over all primes } \equiv 3 \pmod{4}.$$

Describe how  $\lim_{s \downarrow 1} \frac{\psi_3(s)}{\psi_1(s)}$  can be computed to ‘any’ degree of (high) accuracy (precision). (The use of an algebra-package is permitted.)

**Solution** This problem has been solved by the team A.P.M. Kupers en J.W.T. Konter. The solution below is based on their solution. It has been shortened for publication; the complete text, with references and calculations, can be found on the UWC website.

*The relation between  $\psi_1$ ,  $\psi_3$  and the  $\zeta$ -function*

The Riemann-Zeta function is given by

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

It can also be written as a product over the prime numbers:

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)^{-1}$$

where  $p_n$  is the  $n$ -th prime number. As all odd prime numbers are either 1 or 3 modulo 4, we can rewrite this as:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)} \psi_1(s) \psi_3(s).$$

*Is the ratio  $\psi_3(1)/\psi_1(1)$  a real number?*

Both  $\psi_3(1)$  and  $\psi_1(1)$  are infinite. Is the ratio  $\psi_3(1)/\psi_1(1)$  a real number? Using the number theoretic character  $\chi_4$ , we can prove that this ratio is equal to  $(4/\pi)\psi_3(2)$ , which is indeed a real number.

*The ratio  $\psi_1(1)/\psi_3(1)$*

Likewise, we can show that  $\psi_1(1)/\psi_3(1)$  is equal to  $(2/\pi)\psi_1(2)$ .

*The idea behind the approximation*

If we divide the expression that we found for  $\psi_3(1)/\psi_1(1)$  by the one we found for  $\psi_1(1)/\psi_3(1)$ , we obtain

$$\left(\frac{\psi_3(1)}{\psi_1(1)}\right)^2 = 2 \frac{\psi_3(2)}{\psi_1(2)}, \quad \frac{\psi_3(1)}{\psi_1(1)} = \sqrt{2 \frac{\psi_3(2)}{\psi_1(2)}}.$$

The idea behind the approximation is that  $\psi_3(2)/\psi_1(2)$  can again be written as the square root of a constant times  $\psi_3(4)/\psi_1(4)$ , etc. This turns out to be correct.

### The Dirichlet L-Series

The Dirichlet L-series is defined as

$$L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_k(n)}{n^s}.$$

We can show that

$$L_4(s, \chi_4) = \prod_n \left(1 - \frac{\chi_4(p_n)}{p_n^s}\right)^{-1}$$

Now  $L_4$  is equal to the Dirichlet  $\beta$ -function, that is,

$$L_4(s, \chi_4) = \beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

In particular, the sum in the  $\beta$ -function is over all integers, and not just the primes.

### The ratios $\frac{\psi_3(2^n)}{\psi_1(2^n)}$ and $\frac{\psi_1(2^n)}{\psi_3(2^n)}$

If we divide the ratio  $\psi_3(2^n)/\psi_1(2^n)$  for  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  by  $\psi_3(2^{n+1})$ , then through calculations as above, we obtain

$$\frac{\psi_3(2^n)}{\psi_3(2^{n+1})\psi_1(2^n)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{2^n}}\right) \prod_q \left(1 + \frac{1}{q^{2^n}}\right).$$

The result is equal to  $[L_4(2^n, \chi)]^{-1}$ , which in turn is equal to  $\beta(2^n)^{-1}$ . For  $\psi_3(2^n)/\psi_1(2^n)$  we therefore find the expression  $\psi_3(2^{n+1})/\beta(2^n)$ . Let us now consider  $\psi_1(2^n)/\psi_3(2^n)$ :

$$\frac{\psi_1(2^n)}{\psi_1(2^{n+1})\psi_3(2^n)} = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^{2^n}}\right) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2^n}}\right).$$

We can again recognise the Dirichlet L-series in here, and after some calculation, we find

$$\frac{\psi_1(2^n)}{\psi_3(2^n)} = \frac{\beta(2^n)}{\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right) \zeta(2^{n+1})} \psi_1(2^{n+1})$$

### A recursive formula

If we now divide the expression we found for  $\psi_3(2^n)/\psi_1(2^n)$  by the one we found for  $\psi_1(2^n)/\psi_3(2^n)$ , we find

$$\left(\frac{\psi_3(2^n)}{\psi_1(2^n)}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right) \zeta(2^{n+1})}{\beta(2^n)^2} \frac{\psi_3(2^{n+1})}{\psi_1(2^{n+1})}$$

$$\frac{\psi_3(2^n)}{\psi_1(2^n)} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right) \zeta(2^{n+1})}{\beta(2^n)^2} \frac{\psi_3(2^{n+1})}{\psi_1(2^{n+1})}}.$$

This is recursive formula that allows us to deduce the ratio  $\psi_3(2^n)/\psi_1(2^n)$  from the ratio  $\psi_3(2^{n+1})/\psi_1(2^{n+1})$ . Each time this recursive formula is applied to a ratio  $\psi_3(s)/\psi_1(s)$ ,  $s$  is divided by 2. This way we can approximate the ratio  $\psi_3(1)/\psi_1(1)$ . We do not need to use sums or products over primes because both  $\zeta$  and  $\beta$  can be approximated without these, for example using an algebra-package such as *Mathematica* or *Matlab*. Consider the following limits:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \psi_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \psi_3(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \prod_q \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)} = 1$$

Consequently the following limit also tends to 1:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\psi_3(s)}{\psi_1(s)} = 1$$

We can therefore approximate  $\psi_3(1)/\psi_1(1)$  as follows:

- Choose a positive integer  $n$ .
- Approximate  $\frac{\psi_3(2^n)}{\psi_1(2^n)}$  by supposing that  $\frac{\psi_3(2^n)}{\psi_1(2^n)} = 1$ .
- Use the recursive formula a number of times to obtain  $\frac{\psi_3(1)}{\psi_1(1)}$ .

The ratio  $\psi_3(1)/\psi_1(1)$  can thus be approximated by the following limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \zeta(2)}{\beta(1)^2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \zeta(4)}{\beta(2)^2}} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \zeta(8)}{\beta(4)^2}} \dots \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2^{2^n}}}\right) \zeta(2^{n+1})}{\beta(2^n)^2}} * 1$$

The precision of the approximation depends on three factors:

- The number  $n$ : the larger  $n$  is, the better the approximation.
- The precision used in the approximation of the  $\zeta$  and  $\beta$ -functions: the more precise these are, the better the approximation of the ratio. Nowadays, with algebra-packages such as *Mathematica* and *Maple*, this is no problem.
- The precision used in calculation the square root: don't forget that the square root is also an approximation. *Mathematica* and *Maple* have no problem with this.

*A trial approximation with Mathematica*

The following functions approximate  $\psi_3(s)$  and  $\psi_1(s)$  by only considering the first  $n$  primes.

```
p1[s_, n_] :=
Module[{x = 1}, {pmo1 =
DeleteCases[
Table[If[Mod[Prime[i], 4] == 1, Prime[i], 0],
{i, 1, n}], 0];
Product[(1 - pmo1[[i]]$hat{ }$(-s))$hat{ }$-1,
{i, 1, Length[pmo1]}]]][[1]]

p3[s_, n_] :=
Module[{x = 1}, {pmo3 =
DeleteCases[
Table[If[Mod[Prime[i], 4] == 3, Prime[i], 0],
{i, 1, n}], 0];
Product[(1 - pmo3[[i]]$hat{ }$(-s))$hat{ }$-1,
{i, 1, Length[pmo3]}]]][[1]]
```

Let us consider the ratio for the first 10000 primes. Timing[] determines the time it takes *Mathematica* to compute this.

```
p3p1 = Timing[N[p3[1, 100000]/p1[1, 100000], 20]]
37.594 Second, 1.4871655814206811459
```

*Mathematica* takes about 37,5 seconds to do this.

The  $\beta$ -function is a sum, as is the  $\zeta$ -function, but it is not standard in *Mathematica*. We must first define it:

```
DB[x_, k_] := Sum[(-1)$hat{ }$n/(2n + 1)$hat{ }$(x), {n, 0, k}]

BLIM[n_] :=
Module[{x = n, expr = 1},
while[x != -1,
expr = Sqrt[(1 - 2$hat{ }$(-2$hat{ }$(x + 1))) *
Zeta[2$hat{ }$(x + 1)]/(DB[2$hat{ }$x,
$setminus$[Infinity]])$hat{ }$2*expr]; x = x - 1]; expr]
```

Let us first make a table with the approximations for  $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , then with the differences between the approximations and the value computed above with 10000 primes.

```
approximation = Table[Timing[N[BLIM[i], 20]], {i, 1, 5}]
{{0.032 Second, 1.4830557664224863250}, {0.046 Second,
1.4872121328716638225}, {0.094 Second,
```

1.4872400244256083148}, {0.125 Second,  
1.4872400265843418256}, {0.188 Second, 1.4872400265843418507}}}

Even the best approximation only takes 0,2 seconds. But how large is the deviation?

Table[approximation[[i]][[2]] - p3p1, {i, 1, 5}]

-0.0041098149981948210, 0.0000465514509826766,  
0.0000744430049271689, \ 0.0000744451636606797,  
0.0000744451636607048

This approximation is so much better than the brute-force method with the prime numbers that even for  $n = 2$  it is already very close. And it is almost 150 times faster.

#### Possible generalisations

For this case we worked with the number theoretic character  $\chi_4$  and the corresponding  $L$ -series. It is possible to generalise the solution to other number theoretic characters. For example, for the functions  $\psi_5$  and  $\psi_1$ , for which we would use the character  $\chi_6$ , the following holds:

$$\psi_1(s) = \prod_p \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

where  $p$  runs over all primes that are 1 modulo 6.

$$\psi_5(s) = \prod_q \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q^s}\right)}$$

where  $q$  runs over all primes that are 5 modulo 6.

We can therefore approximate the ratio  $\psi_5(1)/\psi_1(1)$  as follows:

- Choose a positive integer  $n$ .
- Approximate  $\frac{\psi_5(2^n)}{\psi_1(2^n)}$  by supposing that  $\frac{\psi_5(2^n)}{\psi_1(2^n)} = 1$
- Use the following recursive formula a number of times to obtain  $\frac{\psi_5(1)}{\psi_1(1)}$ :

$$\frac{\psi_5(2^{n-1})}{\psi_1(2^{n-1})} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right) \left(1 - \frac{1}{3^{2^n}}\right) \zeta(2^n) \psi_5(2^n)}{L_6(2^{n-1}, \chi_6)^2 \psi_1(2^n)}}$$

The extra term with 3 is due to the fact that the character  $\chi_6$  excludes 2 and 3, which are not coprime with 6, while  $\chi_4$  only excludes 2.

#### Results of Session 2005/3

| Name                              | A  | B | C | Total |
|-----------------------------------|----|---|---|-------|
| 1. A.P.M. Kupers en J.W.T. Konter | 10 | 6 | 8 | 94    |
| 2. DESDA                          | 6  | - | - | 18    |

#### Final Table after Session 2005/3

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

| Name                 | Points |
|----------------------|--------|
| 1. Hendrik Hubrechts | 90     |
| 2. Syb Botma         | 42     |
| 3. DESDA             | 38     |