

# Inhoud | Contents

- 266 Colofon
- 267 Redactioneel *Derk Pik*
- 268 Agenda
- 270 Nieuws
- 273 In memoriam Albert Grootendorst *Jan Aarts*
- 276 In memoriam Willem van Spiegel *Pieter Zandbergen*

## Oratie | Inaugural lecture

---

- 280 Geschenken uit het oosten *Jan P. Hogendijk*

## Freudenthal 100 symposium | Freudenthal 100 symposium

---

- 287 Amsterdamse jaren *Dirk van Dalen*
- 294 Realistic Mathematics Education, past and present *Erich Ch. Wittmann*

## Recreatieve wiskunde | Recreational Mathematics

---

- 297 Profinite Fibonacci Numbers *Hendrik Lenstra*
- 302 Voorstellingen van het projectieve vlak *Jan Aarts*

## Geschiedenis | History

---

- 312 Met drieënzestig symbolen *Willem van der Poel*

## Boekbesprekingen | Reviews

---

- 317 Turks fruit der natuurkunde *Gunther Cornelissen*
- 320 Interview met Klaas Landsman over Requiem voor Newton *Chris Zaal*
- 326 Boekbesprekingen

## Rubrieken | Departments

---

- 301 Oud Archief *Danny Beckers*
- 310 Homeland Security *Peter Steenhagen*
- 324 Brieven
- 332 Problemen/UWC

## Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

### Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121, fax 071-5277101  
<http://www.nieuwarchief.nl>

### Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)  
Jaap Top (top@math.rug.nl)

### Eindredactie

Derk Pik (dpik@math.leidenuniv.nl)

### Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@nieuwarchief.nl)  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden  
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

### Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)  
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)  
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)

### Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid (naw@nieuwarchief.nl)  
Arno Kret (naw@nieuwarchief.nl)

### Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.) Jan van de Craats (UvA), Hans Cuyper (TUE), Yves van Gennip (TUE), Geertje Hek (UvA), Teun Koetsier (VU), Ger Koole (VU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (UvA)

### TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)  
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

### Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)  
Uitgeverij Ten Brink  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

### Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

### Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library  
Centrum voor Wiskunde en Informatica  
Postbus 94079  
NL-1090 GB Amsterdam

### Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)  
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

### Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

### Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

### Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

## Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap. De contributie voor leden van het KWG bedraagt    70 per jaar. Gepensioneerden betalen    35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor    25 per jaar. Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van    50.

Members of the *Soci  t   Math  matique de France*, the *Gesellschaft f  r Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay    50 instead of the full membership fee of    70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of    5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of    7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor    90 respectievelijk    105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

### Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)  
Uitgeverij Ten Brink  
Postbus 41, 7940 AA Meppel  
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

### Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan van Mill (VU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottsch  fer (UL).

## Informatie voor auteurs

### Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

### Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

### Volgende nummers

| nummer | verschijningsdatum | deadline kopij |
|--------|--------------------|----------------|
| 1      | 04-03-2006         | –              |
| 2      | 17-06-2006         | 06-02-2006     |
| 3      | 16-09-2006         | 08-05-2006     |
| 4      | 03-12-2006         | 06-08-2006     |

## Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde  
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit  
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit  
Nijmegen

## Op het omslag

De doof-blinde wiskundige Gerrit van der Mey communiceerde met de buitenwereld door middel van een zogenaamde spreekmachine. Hij stond aan de wieg van vele implementaties van computertalen. Lees op pagina 312 over zijn leven.

# Wiskunde BV

Wiskunde is nuttig en belangrijk voor onze economie. Achter deze doodoener verschuilt de wiskundige gemeenschap zich maar al te vaak: het is een uitstekende en bovendien politiek correcte motivatie, waar iedereen het wel mee eens moet zijn. Er is dus ook helemaal geen reden om dit te veranderen: vanaf de jaren negentig wordt er door bestuurders in de media bijna alleen nog maar over wiskunde gesproken in economische termen. Bovendien blijkt uit diverse visitatierapporten en onderzoeken dat Nederlands wiskundig onderzoek internationaal nog steeds goed meedoet en in vergelijking met andere landen komt ook het onderwijs er goed vanaf. De overheid leunt tevreden achterover en wij hoeven ons verder geen zorgen maken. Of wel?

In de *Studentenmonitor* van 2005 (bron: *de Volkskrant*, 22 november) is onderzoek gedaan naar de gedrevenheid van studenten in het hbo en vwo. De *gedrevenheid* van een student wordt gemeten aan de hand van onder andere studievoortgang, tijdsbesteding, motivatie, inzet en tentamencijfers. Het resultaat van het onderzoek is verrassend.

Met kop en schouders steken de kunstopleidingen (hbo) er bovenuit; op de conservatoria en kunstacademieën is 57% van de studenten gedreven. Onder de universitaire studies voert geneeskunde de lijst aan (43%). Op de zevende plaats staat 'Natuur' (23%), waar wiskunde onder valt. Hbo-techniek (19%) staat op de negende plaats en universitaire technische studies (15%) staan bijna onderaan op de twaalfde plaats. Dat is natuurlijk heel raar voor deze als zwaar bekend staande studies.

Dat de kunstopleidingen de lijst aanvoeren is niet zo verwonderlijk. Deze opleidingen kennen allemaal in een of andere vorm een toelatingsexamen, en het werkveld wordt gekenmerkt door moordende concurrentie. Voor geneeskunde valt de hoge gedrevenheid van de studenten ook wel te verklaren; voor een beginnende geneeskundestudent is het helder waar hij aan begint en ook het beroepsperspectief, dat uitwaaiert van huisarts tot zeer geavanceerde super-specialisaties, biedt alle ruimte voor verschillende ambities. Waarom staan Natuur en de technische studies zo vreselijk laag? Weten de studenten eigenlijk wel waar ze aan beginnen?

Op pagina 49 van ditzelfde rapport is een onderzoek te vinden naar de redenen waarom studenten die de mogelijkheid hebben om een bètastudie te doen, hier toch niet voor kiezen. Dit is een zeer interessante vraag. De wijze waarop deze vraag onderzocht wordt, is jammer genoeg een schoolvoorbeeld van manipulatie met meerkeuzevragen. De student kan kiezen uit de mogelijkheden: onaantrekkelijk beroepsperspectief, onvoldoende maatschappelijk gericht, te theoretisch, te moeilijk, sfeer spreekt niet aan, weinig vrouwelijke studenten, en nog een aantal keuzes in de financiële sfeer. Het komt niet bij de vraagstellers op dat het theoretische karakter van deze studies ook wel eens aantrekkelijk zou kunnen zijn.

Dit geldt met name voor de studies in de groep Natuur en in het bijzonder voor wiskunde. Deze vakken hebben eigenlijk veel gemeen met kunstvakken: je moet er echt talent voor hebben; het

zijn zware studies waar de studenten hun eigen grenzen zullen opzoeken. Wat is er tegen op een toelatingsexamen, net als op de conservatoria? Het zou best wel eens kunnen zijn dat zo'n examen juist een *positief* effect heeft op het aantal eerstejaars. Het maakt het diploma meer waard en het reduceert de frustrerende grote uitval van eerstejaars studenten. Van de geneeskundestudenten zouden we kunnen leren dat het beroepsperspectief duidelijk moet worden. Er zijn weliswaar bijna geen werkloze wiskundigen, maar het zou heel goed zijn, zowel voor het onderwijs als voor de wiskundestudenten, wanneer zij allemaal de universiteit verlaten met een eerstegraads onderwijsbevoegdheid.

Het belangrijkste is echter dat door de al decennia aanwezige vooringenomenheid met economische toepasbaarheid de abstractie als kenmerk van wiskunde, of het nu toegepast of fundamenteel is, naar de achtergrond is verdronken. Dat dit ook fnuikend zal zijn voor de technologische ontwikkeling, is mooi beschreven in het laatste hoofdstuk van *Het toeval van de werkelijkheid* (1983) van de fysicus en Natlab-directeur Hendrik Casimir. Het is echt de hoogste tijd om de bètavakken en in het bijzonder wiskunde te presenteren als culturele verworvenheid. Fundamentele bètavragen zijn: hoe werkt iets; hoe zit iets in elkaar. En niet: hoe gaan we hier geld mee verdienen. De maatschappij bestaat niet alleen maar uit ondernemingen, maar ook uit een nieuwsgierig publiek, dat antwoorden wil krijgen op de fundamentele vragen over natuur en wereld.

In feite is er maatschappelijk nog nooit zo'n grote belangstelling geweest voor bèta-onderwerpen. Het programma *Zomergasten*, waar Robbert Dijkgraaf een avond lang werd geïnterviewd over allerlei onderwerpen, zoals zwarte gaten en fractals, had een grote publieke respons. De ideeënroman *Requiem voor Newton* van Klaas Landsman beleefde in korte tijd drie drukken. Ook in allerlei radio- en televisieprogramma's zoals *HoeZo* en *Noorderlicht* vormen bèta-onderwerpen eigenlijk de hoofdmoot.

In 2008 zal in Nederland het vijfde *Europese Wiskundecongres* plaatsvinden. Naar verwachting zullen vijftienhonderd wiskundigen, afkomstig vanuit de hele wereld Amsterdam aandoen om zich te informeren over de *state of the art*. Voor de Nederlandse wiskundige is dit een grote feestelijke gebeurtenis, en het is te hopen dat velen gebruik zullen maken van dit evenement, bijvoorbeeld door het organiseren van workshops en andere satellietbijeenkomsten. Richting bestuurders en politiek is het ook goed dat er een dergelijk evenement zal plaatsvinden; vooral omdat de Nederlandse wiskunde zich aan een breed publiek kan presenteren. Als we dit goed aanpakken mogen we verwachten dat de conferentie een groot positief effect zal hebben op de plaats van de wiskunde in onze samenleving.

**Derk Pik**  
eindredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden  
drpik@math.leidenuniv.nl

# Agenda

Upcoming Events

## december 2005

19 december

### Processes, terms, and cycles: steps on the road to infinity

Symposium ter ere van de 60ste verjaardag van Jan Willem Klop en zijn 25 dienstjaren bij het CWI.

**plaats** CWI, Amsterdam

**info** [www.cwi.nl/events/2005/jwklop](http://www.cwi.nl/events/2005/jwklop)

19 – 21 december

### 15th Amsterdam Colloquium

Colloquium voor taalkundigen, filosofen, logici en informatica over de formele studie van de semantiek en pragmatiek van natuurlijke en formele talen

**plaats** Universiteit van Amsterdam

**info** [www.illc.uva.nl/AC05](http://www.illc.uva.nl/AC05)

20 – 22 december

### Workshop Fast Numerical Solution of Partial Differential Equations

Workshop over nieuwe ontwikkelingen op het gebied van numerieke oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen

**plaats** Universiteit Utrecht

**info** [www.math.uu.nl/fast solvers](http://www.math.uu.nl/fast solvers)

## januari–februari 2006

7 januari

### Wintersymposium

Thema: Financiële wiskunde; organisatie: Metha Kamminga

**plaats** Academiegebouw, Utrecht

**info** [webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium](http://webserv.nhl.nl/~kamminga/wintersymposium)

23 – 25 januari

### 5th Winter school on Financial Mathematics

Cursussen en lezingen over *risk management* en *risk measures*

**plaats** CongresHotel De Werelt, Lunteren

**info** [staff.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winter-school.html](http://staff.science.uva.nl/~spreij/stieltjes/winter-school.html)

30 januari – 3 februari

### Multivariate Statistiek en Missing Data Analyse in de Praktijk

Cursus gericht op mensen die onderzoeksgegevens willen analyseren met behulp van multivariate technieken zoals multi-pele en logistische regressie, variantie-analyse en *repeated measurement analysis*. Tevens zal er aandacht zijn voor *missing data analysis*

**plaats** De Uithof, Utrecht

**info** [www.fss.uu.nl/ms/hhoijtink/cursus.htm](http://www.fss.uu.nl/ms/hhoijtink/cursus.htm)

30 januari – 3 februari

### Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006

Wiskundigen werken in groepsverband aan industriële problemen

**plaats** Technische Universiteit Eindhoven

**info** [www.win.tue.nl/swi2006](http://www.win.tue.nl/swi2006)

3 – 4 februari

### Nationale Wiskunde Dagen

Lezingen en werkgroepen over alle gebieden van de wiskunde voor wiskundeleraren. Twaalfde editie

**plaats** Congrescentrum de Leeuwenhorst, Noordwijkerhout

**info** [www.fi.uu.nl/nwd](http://www.fi.uu.nl/nwd)

## maart–april 2006

6 – 10 maart

### The World a Jigsaw: Tessellations in the Sciences

Workshop over tessellaties

**plaats** Lorentz Center, Leiden

**info** [www.lc.leidenuniv.nl](http://www.lc.leidenuniv.nl)

9 maart

### Mathematical Structures in Music

Serie van zes lezingen over wiskundige structuren in muziek. Onderwerpen: consonantie, harmonieleer, stemmingsystemen, ruis. Spreker: Derk Pik; organisatie: Faculteit der Kunsten, Leiden

**plaats** Koninklijk Conservatorium, Den Haag

**info** [www.math.leidenuniv.nl/~drpik](http://www.math.leidenuniv.nl/~drpik)

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,  
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,  
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.  
Email: [naw@math.leidenuniv.nl](mailto:naw@math.leidenuniv.nl)

16 – 17 maart

**10th Rhine Workshop on Computer Algebra (RWCA 2006)**

Tweejaarlijkse workshop over alle deelgebieden van de computeralgebra. Voorzitter: Jan Draisma

**plaats** Basel, Zwitserland**info** [www.math.unibas.ch/~draisma/RWCAo6](http://www.math.unibas.ch/~draisma/RWCAo6)

17 maart

**Europese Kangoeroe wiskundewedstrijd**

Europese wiskundewedstrijd voor leerlingen van de bovenbouw van basisscholen en middelbare scholen

**plaats** Deelnemende scholen door heel Europa**info** [www.math.ru.nl/kangoeroe](http://www.math.ru.nl/kangoeroe)

27 – 28 maart

**41e Nederlands Mathematisch Congres**

Gast sprekers: H.A. van der Vorst (UU), H.W. Lenstra (UL), T. Chayes (Microsoft Research), R.J. O'Malley (U Washington), M. Agrawal (Kanpur, India)

**plaats** Technische Universiteit Delft**info** [ta.twi.tudelft.nl/nw/nmc2006](http://ta.twi.tudelft.nl/nw/nmc2006)

28 – 29 maart

**FEMLAB Benelux Meeting**

Conferentie over het softwarepakket FEMLAB

**plaats** CWI, Amsterdam**info** [www.cwi.nl/events](http://www.cwi.nl/events)**mei–juni 2006**

2 – 24 en 29 – 31 mei

**Spring School: Abelian Varieties**Spring School over *Abelian varieties* en hun toepassingen**plaats** Universiteit Utrecht resp. Universiteit van Amsterdam**info** [mri.math.uu.nl](http://mri.math.uu.nl)

12 mei

**Leve de Wiskunde!**

Wetenschappelijke voordrachten, lezingen over populariseren van wiskunde en informatiemarkt voor vwo-docenten en andere belangstellenden. Vierde editie

**plaats** Universiteit van Amsterdam**info** [www.science.uva.nl/math](http://www.science.uva.nl/math)

28 – 31 mei

**International Conference on Computational Science 2006**International conferentie met workshops over het thema *Advancing Science through Computation***plaats** University of Reading, Engeland**info** [www.iccs-meeting.org/iccs2006](http://www.iccs-meeting.org/iccs2006)

25 juni – 2 juli

**7th Junior Mathematical Congress**

Een congres voor jongeren van 15 tot 25 jaar, met de nadruk op de groep tussen 15 en 20 jaar, met lezingen en seminars gegeven door de jongeren zelf en enkele uitgenodigde sprekers

**plaats** Tg-Mures, Roemenië**info** [www.uni-miskolc.hu/matjun7](http://www.uni-miskolc.hu/matjun7)**juli–augustus 2006**

2 – 7 juli

**7th International Conference on Teaching Statistics**Conferentie met als thema *working cooperatively in statistics education***plaats** Salvador, Brazilië**info** [www.maths.otago.ac.nz/icots7](http://www.maths.otago.ac.nz/icots7)

18 – 21 juli

**13th ILAS Conference**Conferentie van de *International Linear Algebra Society*. Thema's: statistiek en numerieke wiskunde**plaats** Amsterdam**info** [staff.science.uva.nl/~brandts/ILASo6](http://staff.science.uva.nl/~brandts/ILASo6)

31 juli – 11 augustus

**18th European Summer School in Logic, Language and Information**Cursussen en workshops in drie interessegebieden: *Language and Computation*, *Language and Logic* en *Logic and Computation***plaats** Malaga, Spanje**info** [essllizoo6.lcc.uma.es](http://essllizoo6.lcc.uma.es)**september–december 2006**

22–30 augustus

**International Congress of Mathematicians 2006 (ICM 2006)**Drie prijsuitreikingen: de *Fields medal* (wiskundig onderzoek), de *Nevanlinna prize* (theoretische informatica), de *Gauss prize* (toegepaste wiskunde)**plaats** Madrid, Spanje**info** [www.icm2006.org](http://www.icm2006.org)

27 – 31 augustus

**27th Annual Conference of the International Society for Clinical Biostatistics**

Internationale conferentie over theorie, methoden en toepassingen van biostatistiek

**plaats** Geneve, Zwitserland**info** [www.iscb2006.info](http://www.iscb2006.info)

28 augustus – 1 september

**17th European Conference on Artificial Intelligence**

Een conferentie om nieuwe trends en uitdagingen te identificeren in alle deelgebieden van Kunstmatige Intelligentie en om een forum te bieden voor potentiële gebruikers van innovatieve KI technieken

**plaats** Riva del Garda, Italië**info** [eca2006.itc.it/cda/aree](http://eca2006.itc.it/cda/aree)

25 – 29 september

**EIDMA minicourse door prof. Cheryl Praeger**

Een minicursus van vijf dagen over permutatiegroepen in algebra en combinatoriek

**plaats** Vrije Universiteit Brussel, België**info** [www.win.tue.nl/math/eidma/courses](http://www.win.tue.nl/math/eidma/courses)

2 – 4 november

**Pioneering Software in the 1960s**

Conferentie over de ontwikkeling van software in de jaren zestig van de vorige eeuw

**plaats** CWI, Amsterdam**info** [www.cwi.nl/events](http://www.cwi.nl/events)

# Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien?

Stuur dan uw bijdrage ( $\pm 350$  woorden, zo mogelijk met illustratie) naar [naw@math.leidenuniv.nl](mailto:naw@math.leidenuniv.nl). De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

## Oog in oog met wiskunde

Voorzitter van de Universiteit Utrecht, Yvonne van Rooy, heeft 14 september jongstleden het kunstwerk *Het Oog* onthuld. Dit kunstwerk van Jaap de Jonge, bevestigd aan de buitenmuur van het *Freudenthal Instituut* in Utrecht is een display waarop oplossingen te zien zullen zijn van rekenkundige en wiskundige opgaven, die rechtstreeks door bezoekers van de websites *RekenWeb* en *WisWeb* doorgegeven kunnen worden. *Het Oog* is bedoeld om kinderen, treinreizigers (het kunstwerk is goed zichtbaar vanaf NS-station Utrecht Overvecht) en andere voorbijgangers uit te dagen wiskundige opgaven op te lossen. Het zal tevens dienen om een van de belangrijkste doelen van het *Freudenthal Instituut* uit te dragen, namelijk 'kinderen confronteren met rekenen en wiskunde als een spannende bezigheid, die bovendien door bijna iedereen te leren is en die voor iedereen van essentieel belang is in het dagelijks leven.'

Kunstenaar Jaap de Jonge werkte bij de ontwikkeling van *Het Oog* nauw samen met het *Freudenthal Instituut*, led-producent *Alenco* en *SKOR* (Stichting Kunst en Openbare Ruimte). Bron: [www.fi.uu.nl](http://www.fi.uu.nl)



Het Oog aan de muur bij het Freudenthal Instituut in Utrecht

## Meer eerstejaars bedrijfswiskunde aan HBO

In september zijn er 95 studenten begonnen aan een opleiding Bedrijfswiskunde aan een van de hogescholen in Nederland, volgens de aanmeldingscijfers van de HBO-raad. Vorig jaar waren dit er 71.

De grootste opleiding is die aan de *Hogeschool van Amsterdam*, waar dit jaar 32 nieuwe studenten verwelkomd werden, tegen 22 studenten vorig jaar. De grootste stijging in eerstejaars vond plaats bij de opleiding aan de *Haagse Hogeschool* (tot voor kort was deze aan de *Technische Hogeschool Rijswijk*). Zij ging van 9 naar 24 eerstejaarsstudenten en neemt daarmee qua omvang de tweede plaats in.

De *Fontys Hogeschool Tilburg* heeft te maken met een stijging van het aantal nieuwe studenten (van 9 naar 12), terwijl het aantal nieuwe studenten bij *Hogeschool INHOLLAND* te Diemen constant bleef op 18 en aan de *Noordelijke Hogeschool Leeuwarden* daalde van 13 naar 9. Bron: [www.hbo-raad.nl](http://www.hbo-raad.nl)

## Studentenaantallen wiskunde aan universiteiten stabiel

De studentenaantallen voor wiskunde aan de Nederlandse universiteiten zijn dit jaar weinig veranderd ten opzichte van vorig jaar. Volgens de IBG waren er op 26 augustus van dit jaar 228 vooraanmeldingen voor een wiskundige bacheloropleiding, verdeeld over *Wiskunde* (127), *Technische Wiskunde* (71) en *Bedrijfswiskunde & Informatica* (30). Op dezelfde datum in 2004 waren er bij de IBG 231 vooraanmeldingen bekend (126, 84 en 21). Per universiteit hebben zich wel grote verschillen met vorig jaar voorgedaan. De meest markante dalingen in vooraanmeldingen hebben zich voorgedaan bij *Technische Wiskunde* aan de *Technische Universiteit Delft* (van 35 naar 15) en bij *Wiskunde*

aan de *Radboud Universiteit Nijmegen* (van 15 naar 8). Andere universiteiten hebben juist een enorme toename mogen meemaken. Het opvallendste hier is de *Vrije Universiteit* te Amsterdam, waar het aantal aanmeldingen voor *Wiskunde* gestegen is van 9 naar 24 en het aantal voor *Bedrijfswiskunde & Informatica* van 21 naar 30. De grootste studentenaantallen zijn, net als vorig jaar, te vinden bij de studies *Geneeskunde* (5060 eerstejaars), *Rechtsgeleerdheid* (4045) en *Psychologie* (3543). Bron: [cf.bc.uva.nl/facts/feitenboek/actueel/WO\\_opleid.pdf](http://cf.bc.uva.nl/facts/feitenboek/actueel/WO_opleid.pdf)

### Wiskunde is kleuterspel

Een recent onderzoek, uitgevoerd door psychologe Elizabeth Spelke van *Harvard University* en collega's Barth, La Mont en Lipton, lijkt de opvatting te ondersteunen dat kinderen een aangeboren gevoel voor hoeveelheden hebben: een rekenzintuig.

In het onderzoek kregen een aantal vijfjarige kinderen die nog geen rekenonderwijs genoten hadden en, zo bleek uit testen, geen begrip hadden van abstract optellen, op een computer een aantal blauwe stippen te zien. Na enige tijd werden deze stippen verborgen en kregen de kinderen een aantal rode stippen te zien. Op de vraag of er meer rode of meer blauwe stippen waren, gaf tweederde van de kinderen het goede antwoord. Eenzelfde aantal kinderen wist deze vraag goed te beantwoorden nadat er extra blauwe stippen aan de verborgen stippen waren toegevoegd en zelfs toen de rode stippen niet op het scherm te zien waren, maar als piepjes door een koptelefoon aan de kinderen aangeboden werden.

De onderzoekers concluderen dat kinderen een intuïtief begrip hebben van hoeveelheden, voordat ze op een abstracter niveau leren rekenen met de symbolische representaties van getallen.

Het bijbehorende artikel, *Abstract number and arithmetic in preschool children* is gepubliceerd in de *Proceedings of the National Academy of Sciences* (PNAS) van 12 september 2005.

Bron: [noorderlicht.vpro.nl](http://noorderlicht.vpro.nl) en [www.kennislink.nl](http://www.kennislink.nl)



Elizabeth Spelke: kinderen hebben een intuïtief begrip voor hoeveelheden, voordat ze op abstracter niveau leren rekenen

natuurlijk zonder op werkelijke details in te gaan. Het moet tenslotte voor een breed publiek aantrekkelijk blijven.

De geloofwaardigheid van de gebruikte wiskunde is voornamelijk te danken aan het feit dat het netwerk CBS veel advies heeft ingevraagd van de (Amerikaanse) wiskundige gemeenschap en dat de wiskunde is gebaseerd op werkelijke FBI-onderzoeken. Na een dertien afleveringen tellend eerste seizoen, is de serie inmiddels aan een tweede seizoen begonnen aan de overkant van de Atlantische oceaan en mag dus als een succes gezien worden.

*Texas Instruments* heeft een *Math Education Program* opgestart, gebaseerd op deze serie, waar scholieren met hun leraren aan mee kunnen doen.

Bron: [www.cbs.com/primetime/numb3rs/index.shtml](http://www.cbs.com/primetime/numb3rs/index.shtml)

### Serge Lang overleden

De wiskundige Serge Lang (geboren op 19 mei 1927) is op maandag 12 september overleden. Hij was bekend wegens zijn werk in de algebra en het schrijven van verschillende boeken, waaronder het invloedrijke *Algebra*. Zijn boeken zijn onder meer bekend om de originaliteit van de sommen. Opmerkelijk voor Lang was zijn enthousiasme voor contact met studenten. Hij won in 1999 een *Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition* van de American Mathematical Society. In 1960 won hij de zesde *Frank Nelson Cole Prize* voor opmerkelijke bijdrage in de algebra. Op het tijdstip van zijn dood was hij emeritus hoogleraar aan Yale University.

Naast de wiskunde, bracht Lang veel van zijn tijd door met politiek, in het bijzonder met een klokkenluiderkruistocht tegen echt of vermeend wiskundemisbruik. Hij daagde iedereen, waarvan hij geloofde dat hij wetenschap of wiskunde verkeerd gebruikte om zijn eigen doelstellingen te bevorderen, uit. Lang hield zijn politieke correspondentie bij in 'dossiers', waarvan een aantal in zijn boek *Challenges* werden gepubliceerd. Zijn meest controversiële politieke houding was dat hij geloofde dat de gemeenschappelijke overtuiging dat HIV/AIDS veroorzaakt niet door voldoende wetenschappelijk onderzoek is ondersteund. Publiekelijk was hij zeer openhartig over dit punt.

Reinie Erné; bron: [en.wikipedia.org/wiki/Serge\\_Lang](http://en.wikipedia.org/wiki/Serge_Lang)



Serge Lang gaf graag college

### Kijkcijfers?

Sinds 17 september zendt SBS 6 elke zaterdagavond een aflevering uit van de Amerikaanse serie *Numb3rs*. In deze serie draait het om twee broers, Don en Charlie Eppes. Don (gespeeld door Rob Morrow) is FBI-agent in Los Angeles en Charlie (David Krumholtz) is professor toegepaste wiskunde bij de fictieve universiteit Cal Sci. In elke aflevering wordt via Charlie de hulp ingeroepen van de wiskunde, bij het oplossen van misdaden. Of het nu gaat om het voorspellen van het volgende doelwit van bankrovers, het bepalen van de oorsprong van een gevaarlijke epidemie of het opsporen van een grootschalige bouwfraude, altijd wordt op een geloofwaardige manier de wiskunde ingezet,

### Structurele fouten in NS-dienstregelingen

Promovendus Rob Goverde van de Technische Universiteit Delft analyseert in zijn proefschrift de treindienstregelingen van de NS. Door zelf een treinvolgsysteem te ontwerpen en dit te koppelen aan gegevens van het beveiligingssysteem kon Goverde de treinloop in Nederland, en in het bijzonder op station Eindhoven, bestuderen.

Een statistische analyse wees uit dat er enkele structurele fouten in de dienstregelingen van de NS zitten, waardoor kleine vertragingen snel uitmonden in grote problemen. Zo is er vaak te weinig tijd ingepland voor overstappen en kan het gebeuren dat treinen op elkaar moeten wachten.

Zelfs als deze wachttijd maar kort is, kan dit grote vertragingen tot gevolg hebben. Goverde schreef een computerprogramma om deze fouten op te sporen. Het is volgens hem essentieel om de terugkoppeling te maken naar het dienstregelingssysteem om de oorzaken van vertragingen te kunnen oplossen. Zonder deze maatregel zal de punctualiteit van de NS niet meer kunnen verbeteren.

Bron: [www.nrc.nl/wetenschap/artikel/1128402148371.html](http://www.nrc.nl/wetenschap/artikel/1128402148371.html)

### Wat heb ik nou aan algebra?

In opdracht van de *Commissie Verbreding Wiskundeonderwijs* van het *Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde* heeft Ionica Smeets onderzoek gedaan naar de rol van wiskundigen in het bedrijfsleven. Door middel van gesprekken met zowel personen uit het bedrijfsleven als scholieren probeerde zij een antwoord te vinden op de vraag *wat is de behoefte van het bedrijfsleven aan afgestudeerde wiskundigen en welke baggage zouden deze betreders van de arbeidsmarkt moeten hebben?*

Er zijn door het *Korteweg-de Vries Instituut* vier profielen opgesteld, te weten *Statistiek*, *Toegepaste analyse*, *Wiskunde voor de praktijk* en *Zuivere wiskunde*, en aan het bedrijfsleven en de scholieren werd gevraagd welk profiel ze het meeste aansprak en welke kwaliteiten ze graag in afgestudeerde wiskundigen zouden zien.

Het bedrijfsleven lijkt geen duidelijke voorkeur voor een van de profielen te hebben, al is *Zuivere Wiskunde* de minst populaire. De gewenste kwaliteiten bij afgestudeerden zijn communicatieve vaardigheden, analytisch denkvermogen, oplossingsgerichtheid, vaardigheid in teamwork, interesse voor het bedrijf, ondernemingsdrang en affiniteit met ICT.

Voor de scholieren sprong een profiel er duidelijk uit, namelijk *Toegepaste analyse*. Van afgestudeerde wiskundigen verwachten zij dat zij werken aan actuele maatschappelijke problemen en dat zij op een hoog niveau met abstracte begrippen kunnen werken. Ook zouden ze graag de wiskunde gecombineerd zien met andere vakgebieden, zoals natuurkunde, ontwerpen, informatica, econometrie, geneeskunde, aardwetenschappen, belastinganalyse en medische wetenschappen.

Het rapport wordt afgesloten met enkele aanbevelingen voor de universiteiten, waarvan de meest urgente het geven van concrete beroepsmogelijkheden en duidelijke voorbeelden in de voorlichting naar scholieren toe is.

Bron: [www.science.uva.nl](http://www.science.uva.nl)

### Medisch statisticus zoekt wiskundigen

Het *Human Genome Project* en de nieuwe *HapMap*-database met genetische gegevens zijn pas nuttig als iemand statistiek gebruikt om iets met de gegevens te doen. Berekenen hoeveel kans iemand heeft om een bepaalde ziekte te krijgen bijvoorbeeld. Medisch statisticus Jeanine Houwing-Duistermaat zoekt wiskundigen om die klus te klaren.

Sinds het gereedkomen van het *Human Genome Project* in 2003 is de volgorde van het menselijk genoom bekend. Een week of drie geleden werd de wereld verrijkt met een nieuwe grote database: de resultaten van het *HapMap* project, dat juist verschillen tussen mensen in kaart heeft gebracht: de meest algemene variaties op dat menselijk genoom.

Er moeten nieuwe statistische methoden ontwikkeld worden om iets met al die informatie te kunnen doen. Berekenen hoeveel kans iemand heeft om een bepaalde ziekte te krijgen bijvoorbeeld. Medisch statisticus Jeanine Houwing-Duistermaat kreeg een Vidi-beurs van NWO om zulke nieuwe methoden te ontwikkelen. Houwing heeft echter één

groot probleem: Tot nu toe heeft ze in Nederland nog geen aio kunnen vinden om aan haar project mee te werken. "Er zijn gewoon niet genoeg wiskundigen. Als het tij niet keert weet ik niet of ik op den duur wel in Nederland wil blijven. En dat terwijl statistiek steeds belangrijker wordt, omdat de data steeds complexer worden. Niet alleen voor medische en biologische toepassingen, maar ook voor bijvoorbeeld het klimaatonderzoek." Voor uitgebreide informatie, zie: [www.kennislink.nl/web/show?id=141086](http://www.kennislink.nl/web/show?id=141086)

Ionica Smeets



Jeanine Houwing-Duistermaat

### Acht beste wiskundestudenten winnen vijfhonderd euro

Op donderdag 24 november ontvingen acht studenten in de wiskunde en technische wiskunde een aanmoedigingsprijs van vijfhonderd euro voor hun studieresultaten in het eerste studiejaar. Zij behaalden de beste studieresultaten in het eerste jaar. Deze *Jong Talent Aanmoedigingsprijzen* zijn beschikbaar gesteld door het *Thomas Stieltjes Institute for Mathematics* met als doel de studie in de wiskunde te stimuleren.

De acht Jong Talent Aanmoedigingsprijzen gaan naar Vincent Onos (VU), Kasper Duivenvoorden (RUG), Arno Kret (UL), Linda de Jonge (TUE), Niek Bouman (UT), Iris Smit (UvA), Nico van den Heuvel (TUD) en Arjen Baarsma (UU). Rob Tijdemans, wetenschappelijk directeur van het *Thomas Stieltjes Institute*, reikte de prijzen in Haarlem uit. Dit jaar zijn er twee meisjes onder de wiskundewinnaars. Linda de Jonge van de TUE haalde een gemiddelde van 8,9 en was daarmee de beste van de ruim vijfendertig startende wiskundestudenten in Eindhoven. De studie bevalt haar goed, vooral het vak waarbij ze problemen uit het bedrijfsleven op een wiskundige manier moet oplossen.

Op 24 november worden ook nog vier afstudeerprijzen van ieder tienduizend euro uitgereikt. Drie organisaties (Stichting Bakkenist, Organon BV en Corus) sponsoren deze prijzen. Doorslaggevend in de beoordeling van de genomineerden is het innovatieve karakter van de afstudeeropdracht en zijn waarde voor de maatschappij. Het is één keer voorgekomen dat een winnaar van een aanmoedigingsprijs later een afstudeerprijs won.

De jurering en de organisatie van de prijsuitreiking is in handen van de Koninklijke Hollandse Maatschappij der Wetenschappen in Haarlem.

Janny Terlouw, Hollandse Maatschappij der Wetenschappen

## Jan Aarts

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Delft  
Postbus 5031, 2600 GA Delft  
j.m.aarts@ewi.tudelft.nl

### In memoriam Albert Grootendorst (1924–2004)

# Homines dum docent discunt

Men leert door les te geven. Deze regel uit de epistels van Seneca zou goed passen bij het leven van Albert Grootendorst, die op tachtigjarige leeftijd te Rotterdam is overleden. Hij was vermaard om zijn vertalingen van Latijnse wiskundige teksten en heeft vele wetenschappelijke publicaties over de geschiedenis van wiskunde op zijn naam. Zijn driedelige nederlandsstalige introductie in de analyse, geschreven in 1974, wordt nog steeds veel gebruikt, van lerarenopleiding tot universiteit. Hij heeft veel betekend voor het Wiskundig Genootschap en heeft zijn academische carrière altijd moeiteloos kunnen combineren met het organiseren van activiteiten voor wiskundeleraars. Jan Aarts, emeritus hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft, heeft in allerlei verband veel met Grootendorst samengewerkt.

Op 22 december 2004 overleed Albert Grootendorst, emeritus hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft. Professor Grootendorst genoot grote bekendheid binnen de kring van wiskundeleraars. Hij was jarenlang voorzitter van de examencommissie *Wiskunde Akten voor het Middelbaar Onderwijs*. Ook heeft hij gedurende tien jaar leiding gegeven aan de vakantiecursussen van het Centrum van Wiskunde en Informatica. Hij werd op 28 december onder grote belangstelling in Den Haag begraven.

Albertus Wilhelmus Grootendorst was een bijzonder erudiete persoon, een goed wiskundige, een bevlogen docent, maar bovendien een goed mens. Albert Grootendorst is in Den Haag geboren en heeft er zijn hele leven gewoond. Hij deed eindexamen HBS-B in 1942. Omdat er toen vanwege de oorlog geen uitzicht was op een studie aan de universiteit, deed hij staatsexamen Gymnasium, in 1943 Gym- $\alpha$  en in 1944 Gym- $\beta$ . In

1945 begon Grootendorst aan de Universiteit van Leiden met de studie Klassieke Talen en een jaar later ving hij aan met de studie Wiskunde en Natuurkunde. Zijn liefde voor het Latijn en Grieks is nooit verflauwd. Na zijn doctoraal examen wiskunde in 1952 werd Grootendorst leraar aan het Gymnasium Haganum en vanaf 1956 was hij verbonden aan de Technische Universiteit Delft, eerst als instructeur, vervolgens als lector en daarna als hoogleraar.

#### Delft

Om de didactische kwaliteiten te beoordelen van een kandidaat voor het instructeurschap, brachten Bottema en Loonstra bezoeken aan scholen. Grootendorst doorstond de zware test voor het instructeurschap in Delft met glans en was voor eenieder het voorbeeld van de goede docent. Het leerboek *Analyse* dat hij samen met Meulenbeld schreef was jarenlang de bijbel van de Delftse wiskunde [2]. Albert nam binnen het Delftse onderwijs een belangrijke plaats in. Hij beschikte

over een encyclopedische kennis en was een onuitputtelijke bron voor bijbelteksten, citaten en zegswijzen. Daarnaast was Albert een zeer aimabel mens die met veel wijsheid en tact leiding kon geven. Daarom werd hij vaak gevraagd als lid van commissies en raden, die na de invoering van de *Wet Universitair Bestuur* het bestuur van de universiteit gingen voeren. Albert kon zich moeilijk vinden in een universitair bestuur anders dan door hoogleraren. Toch heeft hij dit commissie- en bestuurswerk consciëntieus en met een buitengewoon gevoel voor rechtvaardigheid uitgevoerd. Ook in landelijk verband heeft Grootendorst veel bestuurswerk gedaan. Van 1966 tot 1970 was hij secretaris van het Wiskundig Genootschap. Hij is voorzitter geweest van het Landelijk Werkcontact voor de Geschiedenis en de Maatschappelijke Functie van de Wiskunde en van de Commissie Persoonlijke Archieven van Wiskundigen van het KWG. Samen met zijn naaste collega Cor de Vroedt had hij jarenlang de leiding over de MO-examens.

Wat de studenten betreft, prefereerde Albert een vormelijke omgang. De democratiseringsgolf van de jaren zeventig zag hij met schrik tegemoet. Toch slaagde hij erin om een goede verstandhouding met de studenten tot stand te brengen. Hij was erelid van de *Wiskunde en Informatica Studievereniging Christiaan Huygens*. Albert was trots op het erelidmaatschap. Tot enkele maanden voor zijn

dood was hij een trouw bezoeker van de vereniging; hij bezocht alle bijeenkomsten met een niet al te luidruchtig karakter. Hij was en bleef een heer die onderhoudend kon converseren en plezier had in een scherp debat. Enkele van de talloze lezingen die hij heeft gegeven voor de studievereniging zijn verschenen in de caleidoscoopserie die hij redigeerde [26–27].

#### Tussen onderwijs en wetenschap

Naast zijn werkzaamheden als leraar en TU-docent vond Albert tijd om een proefschrift te schrijven; in 1959 promoveerde hij bij professor Kloosterman in Leiden [1]. Heden ten dage zou men spreken van een vrijetijds promotie. Maar die term is absoluut niet van toepassing bij Albert Grootendorst. Hij was zijn leven lang toegewijd aan zowel de alfa- als de beta-wetenschap, als docent en als onderzoeker. Daarbij was er geen scheidslijn tussen werk en vrije tijd.

Aangezet door Bottema ging Grootendorst zich toeleggen op vertalingen van wiskunde teksten vanuit het Latijn [3]. Hij ontwikkelde daarin een eigen stijl waarin de vertaling werd voorzien van een uitgebreid notenapparaat en een toelichting. Op deze wijze verwierf hij zich een plaats bij de beoefenaren van de geschiedenis van de wiskunde. Zijn activiteiten betroffen niet alleen het eigen onderzoek, maar ook de redactie van vele bundels, bijvoorbeeld [4–5].

Vanaf 1989 had Grootendorst de leiding van de vakantiecursussen die georganiseerd werden door het Centrum van Wiskunde en Informatica. De doelgroep is leraren van het VWO: aan het eind van de zomervakantie wordt hen een aantal lezingen geboden over een centraal onderwerp zodat zij nog beter in staat zijn de begaafde leerlingen te wijzen op de schoonheid van wiskunde. Onder leiding van Grootendorst ontstond er een vaste formule voor de vakantiecursussen: een modern onderwerp, waarvan allereerst de historische achtergronden belicht worden, vervolgens de ontwikkeling in de tijd en tenslotte recente actuele toepassingen. Grootendorst heeft gedurende tien jaar de cursussen gecoördineerd en bijna ieder jaar een eigen lezing in de cursus gegeven.

#### De *Elementa Curvarum Linearum*

Op 25 oktober 1989 nam Albert afscheid als hoogleraar van de Technische Universiteit [13]. In zijn afscheidsrede ontvouwde hij met — naar eigen zeggen — gepaste bescheidenheid zijn plannen voor de toekomst. Met bescheidenheid, want Seneca zei reeds: *Ars-*



*longa, vita brevis* (De kunst leeft lang, maar het leven is kort). Als zijn hoofdtaak zag hij de vertaling uit het Latijn in het Nederlands en Engels van het werk *Elementa Curvarum linearum* (Grondslagen van de kromme lijnen), geschreven door de Raadpensionaris Jan de Wit. Dit werk in twee delen kan beschouwd worden als het eerste leerboek over de analytische meetkunde. Het verscheen oorspronkelijk als appendix bij de Latijnse vertaling van Descartes' *Géométrie* door de Leidse hoogleraar Frans van Schooten. Het werk van Jan de Witt is een verhandeling over de kegelsneden. De kegelsneden worden gedefinieerd zonder gebruik te maken van een ke-

gel, dat wil zeggen zonder een ruimtelijk lichaam in de beschouwing te betrekken. De kegelsneden worden voorgebracht als baan van een bewegend punt. In deel I worden de kenmerkende eigenschappen van de kegelsneden behandeld. In deel II komt de classificatie van de kegelsneden aan de orde en wordt beschreven hoe alle voorkomende vergelijkingen herleid kunnen worden tot enkele standaardvergelijkingen.

Albert heeft de vertaling van de *Elementa Curvarum linearum* bijna geheel voltooid. De vertaling is voorzien van een uitgebreid notenapparaat en wordt vooraf gegaan door een verhelderende samenvatting. De Neder-

landse vertaling is verschenen bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica, die van het *Liber primus* in 1997 [32] en die van het *Liber secundus* in 2003 [37]. In 2000 is de Engelse vertaling van het *Liber primus* verschenen bij uitgeverij Springer in de serie Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences [36]. Albert was terecht bijzonder trots op dit werkstuk. De Engelse vertaling van het *Liber secundus* is zo goed als voltooid. Er was Albert veel aan gelegen

om ook dit deel te laten verschijnen. Zeer tot zijn spijt zag hij zich niet in staat om hier de puntjes op de i te zetten. De vertaling van het tweede deel zal posthuum verschijnen.

Onderstaande bibliografie is verre van volledig. Veel werk van Grootendorst is moeilijk naspeurbaar. Vermeld zijn onder andere het werk dat in *MathSciNet* staat en alle vakantiecursussen waaraan Grootendorst leiding heeft gegeven.

Albert Grootendorst beschouwde het le-

raarsambt als een *officium nobile*, een nobel ambt, en handelde daarnaar. We hebben afscheid moeten nemen van een bevoegen doctent die beschikte over een grote kennis van zaken, en die erg gewoon plezier in had om zijn kennis uit te dragen. In de woorden van Ovidius: *Tu bonus hortator, tu duxque comesque fuisti* (Gij zijt een trouwe begeleider, leider en metgezel geweest).

## Publicaties Grootendorst

- 1 Albertus Wilhelmus Grootendorst, *Thèta reeksen in verband met relatief-kwadratische getallenlichamen*, academisch proefschrift, promotie 4 maart 1959 aan de Rijksuniversiteit te Leiden, promotor Prof.dr. H.D. Kloosterman.
- 2 B. Meulenbeld en A.W. Grootendorst, *Analyse*, 3 delen, Stam Technische boeken, 1974.
- 3 O. Bottema en A.W. Grootendorst, *A thesis of 1834*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **26** (1978), no. 1, 74–83.
- 4 E.M.J. Bertin, H.J.M. Bos and A.W. Grootendorst, eds, *Two decades of mathematics in the Netherlands. 1920–1940, A retrospection on the occasion of the bicentennial of the Wiskundig Genootschap. Part I, II*, Mathematical Centre, Amsterdam, 1978, xxiv+379 pp.
- 5 A.W. Grootendorst and C. Roos, eds, *Autour de Frans, Nine papers dedicated to prof. dr. Frans Loonstra on occasion of his seventieth birthday*, Technische Universiteit Delft 1980, iii+134 pp.
- 6 A.W. Grootendorst and J.A. van Maanen, *van Heuraet's letter (1659) on the rectification of curves. Text, translation, commentary*, Nieuw Arch. Wisk. (3) **30** (1982), no. 1, 95–113.
- 7 A.W. Grootendorst, *A known problem solved by an unknown mathematician*, Euclides **58** (1982/83), 17–28.
- 8 C.F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Translated and with a preface by Arthur A. Clarke, Revised by William C. Waterhouse, Cornelius Greither and A.W. Grootendorst and with a preface by Waterhouse, Springer-Verlag, New York, 1986, xx+472 pp.
- 9 A.W. Grootendorst, *Johan Hudde's Epistola secunda de maximis et minimis*, Tekst, vertaling en commentaar, Nieuw Arch. Wisk. (4) **5** (1987), no. 3, 303–334.
- 10 A.W. Grootendorst, *Enkele aspecten van het omgaan met getallen in de Oudheid*, Feestbundel SHBD, TUD fac. TWI, Delft (1987), 39–59. Ook in: *Histtechnica Nieuws* **14**, Delft 1988, 16–31.
- 11 A.W. Grootendorst, *Wat verwacht het Wetenschappelijk Onderwijs van de abiturienten van het VWO, i.h.b. van de gymnasiast?* Tijdschrift voor het Wetenschappelijk Onderwijs (U & H) **34** nr. 3 (februari 1987-1988), 129–140.
- 12 A.W. Grootendorst, *Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde*, Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, 1988.
- 13 A.W. Grootendorst, *Wat ik nog zeggen wilde*, afscheidsrede Technische Universiteit Delft, 25 oktober 1989.
- 14 A.W. Grootendorst *Algebraïsche en arithmetische eigenschappen van complexe getallen*, Vakantiecursus 1987, 47–68, CWI Syllabi **15**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1989.
- 15 A.W. Grootendorst, *Brief van Adalboldus, Bisschop van Utrecht, aan Paus Sylvester II*, Vertaling, Nieuw Arch. Wisk. (4) **7** (1989), no. 3, 303–334.
- 16 A.W. Grootendorst, *Inleiding*, Vakantiecursus 1989: Wiskunde in de gouden eeuw, 1–14, CWI Syllabi **25**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1989.
- 17 A.W. Grootendorst, *Bekentenissen van een bekeerling*, Mededelingen van de Vereniging Vrienden van het Gymnasium nr. 31/32 (1990), 25–27.
- 18 A.W. Grootendorst, *Inleiding*, Vakantiecursus 1990: Getallentheorie en haar toepassingen, 1–24, CWI Syllabi **27**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1990.
- 19 A.W. Grootendorst, *Homo Ludens =  $\alpha + \beta$* , The Humanities in the Nineties, Amsterdam / Lisse: Swets en Zeitlinger (1990), 43–54.
- 20 A.W. Grootendorst, *De meetkundige algebra bij Euclides*, Vakantiecursus 1991: Meetkundige structuren, 1–26, CWI Syllabi **28**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1991.
- 21 A.W. Grootendorst, *Hulpmiddelen uit de Lineaire Algebra*, 23–47, Vakantiecursus 1992: Systeemtheorie, CWI Syllabi **31**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1992.
- 22 E.W. Tschirnhaus, *Methodus Auferendi Omnes Terminos Intermedios ex Data Equatione*, Tekst met vertaling en commentaar van A.W. Grootendorst, Nieuw Arch. Wisk. (4) **11** (1993), 67–83.
- 23 A.W. Grootendorst, *Eudoxus en Dedekind*, Vakantiecursus 1993: Het reële getal, 1–22, CWI Syllabi **35**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1993.
- 24 A.W. Grootendorst, *Primitiveren door middel van elementaire functies*, Vakantiecursus 1994: Computeralgebra, 77–97, CWI Syllabi **36**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1994.
- 25 J.M. Aarts en A.W. Grootendorst, *Rekursie en retrospectief, Voordrachten ter gelegenheid van het veertigjarig doctorsjubileum van Prof. dr. H.J.A. Duparc*, Delftse Universitaire Pers, 1994, xiii+74 pp.
- 26 A.W. Grootendorst, *De meetkundige algebra bij Euclides en de oorsprong van de termen para-*
- bool, hyperbool en ellips* 37–64, in A.W. Grootendorst en A.J. van Zanten, redactie, *Caleidoscoop van de Wiskunde*, Delftse Universitaire pers 1995.
- 27 A.W. Grootendorst, *Eudoxus en Dedekind* 65–86, in A.W. Grootendorst en A.J. van Zanten, redactie, *Caleidoscoop van de Wiskunde*, Delftse Universitaire pers 1995.
- 28 A.W. Grootendorst, *De "Kegelsneden" bij Johan de Witt*, Vakantiecursus 1995: Kegelsneden en Kwadratische vormen, 1–21, CWI Syllabi **35**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1995.
- 29 A.W. Grootendorst, *Inleiding*, Vakantiecursus 1996: Chaos, 1–8, CWI Syllabi **41**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1996.
- 30 Vakantiecursus 1997: Rekenen op het toeval, CWI Syllabi **43**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1997.
- 31 A.W. Grootendorst, *De geest van de Griekse wiskunde*, Syllabus collegecyclus HOVO, Erasmus Univ. R'dam, Rotterdam (1997)
- 32 Jan de Witt, *Elementa Curvarum linearum, Liber primus*, Tekst, inleiding en commentaar door A.W. Grootendorst, CWI Publications, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1997, ii + 287 pp.
- 33 A.W. Grootendorst, *Professor dr. Rehuel Lobatto, 6 juni 1797–9 februari 1866*, Delfia Batavorum, historisch jaarboek voor Delft 1997, Delft (1998), 121–128.
- 34 A.W. Grootendorst, *Analytische Meetkunde: het begin*, Vakantiecursus 1998: Meetkunde, oud en nieuw, 1–26, CWI Syllabi **44**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 1998.
- 35 *De laatste stelling van Fermat. De geschiedenis van een probleem*, Natuurkundige Voordrachten van de Koninklijke Maatschappij voor Natuurkunde onder de Zinspreuk Diligentia, Den Haag (1999), 39–49.
- 36 Jan de Witt, *Elementa Curvarum linearum, Liber primus*, Tekst, translation and commentary by A.W. Grootendorst with the help of Miente Bakker, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2000, xii+296 pp.
- 37 Jan de Witt, *Elementa Curvarum linearum, Liber secundus*, Tekst, inleiding en commentaar door A.W. Grootendorst, CWI Publications, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam 2003, x+313 pp.

## Pieter Zandbergen

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Universiteit Twente

Postbus 217, 7500 AE Enschede

pieterjz@netscape.net

### In memoriam

# Willem van Spiegel

Op 10 januari 2005 is Izak Willem van Spiegel op 82-jarige leeftijd overleden. Hij was de eerste wiskundehoogleraar van de toenmalige Technische Hogeschool Twente en heeft het wiskundeonderwijs aan deze universiteit opgezet. Hij was op allerlei gebied bijzonder gewaardeerd als bestuurslid. Pieter Zandbergen, emeritus hoogleraar toegepaste wiskunde en tot mei 1999 president van de KNAW, was enige jaren voor Van Spiegel rector magnificus aan de Universiteit van Twente. Hij werkte vele jaren met Van Spiegel samen, in het bijzonder bij het opzetten van de faculteit van Toegepaste Wiskunde in Twente.

Willem van Spiegel werd 'als tweede kind' op 9 april 1922 geboren in Harlingen. In 1930 verhuisden zijn ouders met hun inmiddels drie zoons naar Koekangerveld, een gehucht halverwege Meppel en Hogeveen. Zijn vader was daar benoemd tot hoofd van een tweemansschooltje en uiteraard kwam Willem bij zijn vader in de klas. Om een middelbare schoolopleiding te kunnen volgen was aangepast onderwijs nodig; de extra leerstof bestond onder andere uit algebra en meetkunde uit de boeken van Derksen en de Laive. Na de lagere school ging Willem naar de Rijks-HBS in Meppel. Dat betekende twee maal 15 km per dag op de fiets in weer en wind naar Meppel en terug, want er was geen openbaar vervoer.

Willem werd op de HBS in het bijzonder gestimuleerd door zijn wiskundeleraar Loonstra, de latere hoogleraar wiskunde in Delft. Deze pleitte er bij Willems ouders voor dat Willem wiskunde zou gaan studeren. Maar dit kon alleen met een studiebeurs en daarvoor was een gemiddeld eindexamencijfer van mi-

nimaal 8 noodzakelijk. Willem voldeed aan die eis en kon in Groningen wiskunde gaan studeren in 1940, het jaar waarin de Duitsers Nederland bezetten. Echter in oktober werd zijn vader door de bezetter ontslagen vanwege zijn joodse afkomst, iets dat voor de kinderen tot dat moment volkomen onbekend was. Het betekende dat Willem, die zogenaamd half-joods was, niet mocht studeren en zijn studie moest afbreken.

In 1941 verhuisde het gezin naar Amersfoort, waar zijn vader een positie verwierf bij een van de toen opgerichte speciale scholen voor joodse kinderen. Willem vond werk bij de Amersfoortse apparatenfabriek (de AMAF), een onderdeel van het latere Bronswerk, waar hij zijn toekomstige vrouw Jos Hunsche leerde kennen. Uiteraard werden de omstandigheden voor het gezin tijdens de oorlog almaar slechter. Zijn vader werd gedwongen tot arbeid bij de aanleg van een vliegveld, zijn jongste broer Egbert en Willem moesten eind 1944 tankgrachten graven aan de IJssel bij Dieren. Zoals Egbert getuigt, is Willem niet alleen voor hem, maar met name ook voor zijn moeder een grote steun geweest.

#### Promotie

Het gezin kwam uiteindelijk tamelijk ongeschonden door de oorlog. Direct na de oorlog hervatte Willem zijn studie in Groningen. Al snel combineerde hij de studie met een gedeeltelijke leraarsbaan, die na een aantal jaren overging in een volledige baan aan het St. Maartenscollege in Groningen, gecombineerd met wiskundecolleges aan de Frysche Akademie te Leeuwarden.

Hij treedt op 15 mei 1948 in het huwelijk

met Jos, nadat hij daarvoor katholiek was geworden. Nadat Willem eveneens in 1948 zijn doctoraal examen had gedaan, zette hij alles op alles om te promoveren. In die jaren heeft hij veel van zichzelf gevraagd, een volle leraarsbaan, een niet eenvoudige studie op het gebied van de meetkunde en ook nog een zich sterk ontwikkelend gezin.

In 1957 promoveert hij bij prof. Gerretsen op het proefschrift *Geometry of aggregates*. Prof. A. van de Ven merkt hierbij op: "Deze titel zou op het eerste gezicht verwondering kunnen wekken. In de negentiende eeuw was de projectieve meetkunde als onderdeel van de algebraïsche meetkunde tot volle ontwikkeling gekomen. De gebruikte methoden waren in principe eenvoudig, maar technisch vaak gecompliceerd. In Nederland beleefde de projectieve meetkunde in de eerste helft van de twintigste eeuw een nabloei en Van Spiegels proefschrift is een van de laatste voorbeelden daarvan.

Een van de onderwerpen, waaraan in de projectieve meetkunde veel aandacht besteed werd, was systemen van lineaire deelruimten van een projectieve ruimte (alias van deelvectorruimten van een vectorruimte) en aggregaten — een naam, meer niet — zijn daarvan een voorbeeld. Voortbouwend op het werk van vele voorgangers verkrijgt Van Spiegel verfijnde resultaten die onder andere als toepassing interessante configuraties opleveren. Tegenwoordig is bij dit onderwerp de multilineaire algebra niet weg te denken, maar die vond in 1957 in Nederland nog maar weinig toepassing. Misschien zou het interessant zijn Van Spiegels werk nog eens in dit licht te bezien."

### Het begin van zijn academische carrière

In het studiejaar 1957/1958 verblijft Willem in Rome, waar hij colleges volgt aan het *Istituta di Alta Matematica* van de Universiteit van Rome. De liefde voor Italië zal altijd aanwezig blijven, want hij gaat vele malen naar vakantiecursussen en wordt later lid van de gemengde culturele commissie Nederland-Italië.

In 1958 wordt hij instructeur aan de onderafdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool Delft, waar hij in contact komt met prof. Rein Timman, de grondlegger van de eerste opleiding tot wiskundig ingenieur in Nederland (1957). In Delft wordt in 1960 zijn broer Egbert tot hoogleraar benoemd. In 1963 wordt Willem tot lector benoemd. Uit zijn rede bij de aanvaarding van dat ambt (20 april 1964) en getiteld *Overpeinzingen bij een driehoek* blijkt dat hij zich inmiddels is gaan bezighouden met toepassingen van de wiskunde op technische problemen. Overigens is hij op dat moment al benoemd tot de eerste hoogleraar in de wiskunde aan de nog jonge *Technische Hogeschool Twente* (THT) en wel in de afdeling Werktuigbouwkunde. Hij aanvaardt dat ambt op 26 februari 1965 met het uitspreken van een rede, getiteld *Optimaliseren*.

Een van zijn eerste daden in Twente is het aantrekken van de nodige medewerkers, waaronder een aantal met zorg uitgekozen ervaren onderwijskrachten. In 1964 startte hij met: D.W. Bresters, A. Jetten, U.J. Knottnerus, H.G. van Kooten, Tj. Plomp, G. Sieben, F. Schurer en F.W. Steutel. Later kwamen daar nog bij C. Hoede, W. Wesselius, F. Twilt en P. Jonker. Een getalenteerde groep. Van de twaalf genoemden promoveerden er zeven, waarvan er vijf hoogleraar werden, en wel Bresters aan de UvA, Schurer en Steutel aan de TUE, Hoede en Plomp aan de UT.

Bij Willem van Spiegel promoveerden Hoede (1968) en Twilt (1981), terwijl hij copromotor was bij Plomp (1974). Kort na het aantreden van Willem van Spiegel worden in Twente drie andere wiskundehoogleraren benoemd, A.J.W. Duyvestein en T. Terpstra in de afdeling Electrotechniek en E.M. de Jager in de afdeling Chemische Technologie. Op 1 januari 1966 kwam ik de gelederen versterken als hoogleraar naast van Spiegel. Het is misschien illustratief om op te merken dat ik in 1962 gepromoveerd was bij Egbert van Spiegel, die ik evenals Eduard de Jager ken- de vanuit het Nationaal Luchtvaart Laboratorium. Het moge duidelijk zijn dat aanvanke- lijk in Twente de mening heerste, dat het beter was de hoogleraren wiskunde over de af-



Willem van Spiegel en zijn vrouw Jos van Spiegel-Hunsche in Italië

delingen te verdelen en niet naar een eigen wiskunde-afdeling te streven.

### Een nieuwe studie

Echter in oktober 1964 stelt Van Hasselt, voorzitter van de afdeling Werktuigbouwkunde in het *College van Rector en Assessoren* (R&A), het ontwikkelingsplan aan de orde en zegt "dat vanzelfsprekend in de eerste plaats in

het patroon van de THT zouden kunnen worden opgenomen de Natuurkunde en verder de Wiskunde." R&A besluiten dat aan Willem van Spiegel zal worden gevraagd zijn mening te geven over de Wiskunde-opleiding. Op 20 januari 1965 wordt een eerste nota aan R&A aangeboden en kort daarop besproken met Timman, die als adviseur was aangetrokken. Er wordt besloten te streven naar een afdeling



Willem van Spiegel, rector van de Technische Hogeschool Twente van 1976 tot 1979

of tussenafdeling Wiskunde.

Dit alles leidt in oktober 1965 tot het instellen van de *Commissie Ontwikkelingsplan Wiskunde*, de CONWI. Het uiteindelijke eindrapport, dat een gedetailleerde uitwerking van de studie wiskunde in Twente bevat, komt na moeizame onderhandelingen in 1967 tot stand en vraagt om toestemming tot het instellen van een studierichting *Toegepaste Wiskunde* in een eigen onderafdeling. Op 21 augustus 1968 wordt de ministeriële toestemming ontvangen. Het is ongetwijfeld aan de inspirerende houding van Willem van Spiegel te danken geweest dat deze opleiding tot stand kwam.

Bovendien wist hij als conrector in 1967/68 een plan voor nieuwbouw voor meer afdelingen uit te breiden met een deel voor Toegepaste Wiskunde. De ironie van het lot wil dat uiteindelijk alleen dat deel werd gerealiseerd, zodat er een eigen gebouw voor Wiskunde en Rekencentrum ontstond. En alsof dat alles nog niet genoeg was nam Willem in 1967 samen met Arie Duyvestein het initiatief tot de *Stichting Wetenschappelijke Opleidingen Twente* (SWOT). Dit was een stichting van en voor het bedrijfsleven en werd dan ook van harte ondersteund door de grote bedrijven in Twente. In eerste instantie ging het erom de grote achterstand in de kennis van 'computer-wetenschap' door middel van avondcursussen te kunnen inlopen. Er werd gestart met een cursus 'wetenschappelijk rekenen' waarbij een beroep gedaan werd op de vrije tijd van TH-medewerkers. Tot betrekkelijk kort voor zijn overlijden is Willem zich

blijven bezighouden met de SWOT, die in de loop der jaren steeds meer vakgebieden ging omvatten en zich ging concentreren op bedrijfskundige opleidingen, terwijl in de laatste jaren een duidelijk accent op management-opleidingen ontstond, zoals de MBA-studie. In een nagelaten notitie van Willem van na 2000 trof ik de volgende stelling aan: "Al met al kun je constateren dat het particulier initiatief ook in het onderwijs nog springlevend is en nog steeds in een behoefte voorziet."

Na de verkregen toestemming van de minister werd nog in 1968 tot het instellen van de Onderafdeling Wiskunde besloten, waarvan ik de eerste voorzitter werd. Toen ik per 1 januari 1970 tot prorector werd benoemd, nam Willem het voorzitterschap van mij over. Willem was een onderwijsman in hart en nieren. Mede door zijn inzet is de faculteit Toegepaste Wiskunde in Twente uitgegroeid tot één van de grootste wiskundefaculteiten in Nederland.

In de loop der jaren ging Willem zich hoe langer hoe meer met educatieve vragen van algemene aard bezighouden, waarbij vooral de mogelijkheden van het inschakelen van audiovisuele media voor een meer individueel onderwijsaanbod hem erg aanspraken. Het leidde ertoe dat zijn medewerker Tj. Plomp een eerste poging ondernam tot het ontwikkelen van een *Individueel Studie Systeem* (ISS) waarbij in feite de hoorcolleges op beeldscherm werden herhaald met een bijgevoegde toetsingsmogelijkheid. Maar zoals inmiddels bekend is, is overdragen van kennis per beeldscherm een vak apart en het is dus geen wonder dat deze eerste pogingen schipbreuk leden, vooral ook omdat de medewerkers weinig zagen in het beoordelingssysteem via multiple-choicevragen. Desalniettemin zat onderwijskunde ook landelijk gezien in de lift. In april 1975 was aan de THT een nota verschenen met de titel *Toegepaste onderwijskunde aan de THT*. Daarin stelde Twente zich kandidaat voor een dergelijke opleiding met een eigen karakter, binnen een nationaal ontwikkelingsplan.

#### Rectoraat

Het zal voor de nieuwe rector Willem van Spiegel die in 1976 aantrad een groots moment zijn geweest om van de toenmalige staatssecretaris van Onderwijs een uitnodiging te ontvangen tot het aanvragen van een opleiding in de onderwijskunde met technologische inslag. In zijn eerste rectorale rede (1977) merkt hij op: "Er is een toenemende vraag naar onderwijs, zowel ten behoeve van een betere beroepsuitoefening als ter bevordering van

de persoonlijke ontplooiing. Onderwijs is niet meer een zaak van een bepaalde levensfase of van bepaalde bevolkingsgroepen. Onderwijs zal een steeds groter deel van de menselijke activiteiten in beslag nemen. De toenemende complexiteit van onze hoog ontwikkelde samenleving vraagt ook een breder assortiment van onderwijsaanbod." Overigens zat hij zelf de werkcommissie Toegepaste Onderwijskunde voor, die het onderwijsplan voor deze studierichting tot stand bracht.

In dezelfde rede komt een ander onderwerp aan de orde waaraan hij veel heeft bijgedragen, namelijk de problematiek van de afstemming van wetenschappelijk technisch onderwijs (wto) en hoger technisch onderwijs (hto), vooral om een betere doorstroming van hto-abituriënten naar het wto mogelijk te maken. Dit was een onderwerp met vele voetangels en klemmen, vooral vanwege de totaal verschillende culturen van het hto en wto, met bijbehorende verschillen in wettelijke regelingen. Willem slaagde erin een echte brug te bouwen. Hij werd voorzitter van de *Landelijke Coördinatie Commissie*, die in feite een voortrekkersrol vervulde voor het gehele gebied van samenwerking tussen hoger beroepsonderwijs (hbo) en wetenschappelijk onderwijs (wo). Het vertrouwen dat hij daarmee opbouwde weerspiegelde zich in zijn jarenlange voorzitterschap van de Vereniging van Besturen van de Hogere Technische Scholen.

Een ander onderwerp dat hij aansnijdt is of het niet nuttig zou zijn om, naast de omvangrijke afdeling der Civiele Techniek in Delft, ook een zwaartepunt elders te vestigen, bijvoorbeeld in Twente. Hierover is acht jaar heen en weer gepraat, totdat uiteindelijk een civiel-technische oriëntatie binnen bestuurskunde tot stand kwam.

Zijn rectoraat eindigt in 1979. Hoewel duidelijk moge zijn dat hij beleidsvragen absoluut niet uit de weg ging, beklaagt hij zich wel over de gigantische vergadercultuur die het lidmaatschap van het College van Bestuur met zich meebrengt en spreekt hij zijn spijt uit over het feit dat hij zo weinig was toegekomen aan een intensief contact met de studenten. Wel is duidelijk dat hij genoeg heeft beleefd, veelal tezamen met zijn echtgenote, aan het meer representatieve deel van de rectorstaak.

#### De hogeschool als leefgemeenschap

Na zijn rectoraat heeft hij zich nog met vele zaken van algemeen belang beziggehouden. Zo was hij in 1981 betrokken bij het opstellen van een nota voor een *Provincia-*

le Onderwijsraad in Overijssel. In 1983 kwam het eindadvies van de *Programmeringswerkgroep Technische Wetenschappen* ten behoeve van de Open Universiteit onder zijn voorzitterschap tot stand. In die jaren deden zich fysieke problemen voor die hem ertoe noopten op 63-jarige leeftijd afscheid te nemen van het hoogleraarschap. Ter gelegenheid van zijn afscheid werd op 30 augustus 1985 een symposium georganiseerd waar medewerkers en oud-medewerkers en collegae voordrachten hielden. In zijn slotvoordracht, getiteld *Verantwoording*, blijkt duidelijk dat naast de dank voor plezierige samenwerking, de wo-hbo problematiek een centrale plaats inneemt, niet alleen vanuit onderwijskundig oogpunt maar vooral ook vanuit een oogpunt van wat er nodig is om de toekomst voor jonge mensen te kunnen garanderen. Heel kenmerkend voor Willem van Spiegel is, dat hij aan het einde van deze verantwoording het woord richt tot zijn vrouw en kinderen, om nog eens aan te halen dat de TH Twente niet alleen een werkgemeenschap is, maar als campus-hogeschool ook een leefgemeenschap. Hij stelt: "Als gezin hebben wij daar, ieder van ons op eigen wijze, in geparticipeerd. Toch meen ik te kunnen stellen dat het betrokken zijn bij het studentenpastoraat voor ons allen daarin het hoogtepunt was en is. Het is een beperkt deel van de Hogeschoolge-

meenschap dat in dit oecumenisch pastoraat actief is. Maar de ontmoeting daar met vooral jonge mensen die naast hun intellectuele vorming in staat zijn hun religiositeit en betrokkenheid op de totaliteit van het leven op rationele wijze tot uitdrukking te brengen, is voor ons steeds weer een teken van hoopvolle verwachting in de nieuwe generaties."

Na zijn afscheid is Willem zich met vele zaken blijven bezighouden. Dat was mogelijk omdat de fysieke ongemakken door een aangepaste leefwijze uiteindelijk voor een groot deel konden worden overwonnen. Zoals reeds eerder vermeld, bleef hij sterk betrokken bij de SWOT en daarnaast was hij voorzitter van de *Radboudstichting Wetenschappelijk Onderwijsfonds* van 1981 tot 1991. Zoals de directeur hiervan bij de crematieplechtigheid stelde, gaf hij daar leiding aan de bouwers, die vonden dat in het universitair onderwijs de levensbeschouwelijke, geestelijke en culturele dimensies in het onderwijs niet mochten ontbreken. Er werden aan vier openbare universiteiten leerstoelen gevestigd in de filosofie, de ethiek en de religie (thans tien). Nog in 1993 was hij de auteur van een nota met de titel *Bundeling van krachten in het Centrum voor Revalidatie Technologie*. Het tekent zijn betrokkenheid bij vraagstukken van algemeen belang en ligt in het verlengde van zijn lidmaatschap van het bestuur van het Ka-

tholieke Ziekenhuis Stadsmaten in Enschede in de beginjaren in Twente.

Willem van Spiegel werd benoemd tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw in 1985. Daarnaast werd hij benoemd tot Commandeur in de Orde van Sint Silvester in 1986 door Paus Johannes Paulus II.

### Vrijheid

Willem van Spiegel was als persoon een aanstekelijke man, met een grote mate van geïnteresseerdheid in de mensen om hem heen. Samen met Jos, die deze kenmerken met hem deelde, vormde hij een ijzersterk paar. In het begin van 1966 toen ik hen leerde kennen, was het gezin voltooid. Paul, Mirjam en Frans op de middelbare school, Edith en Bernadette op de lagere school. Voor de maaltijd werd er eerst een glas gedronken waarbij alle facetten van wat op de THT speelde, uitvoerig werden besproken en waarbij er heel wat werd afgelachen om de meer komische gebeurtenissen. Dan volgde de maaltijd waar de kinderen hun belevenissen kwijt konden, waarbij mij opviel hoe nuchter Willem kon reageren, vooral vanuit het inzicht dat de jongere generatie de vrijheid moet hebben het leven naar hun inzichten vorm te geven en de kans moet hebben aan den lijve te ondervinden wat dat met zich meebrengt. Toen alle kinderen waren uitgevlogen waren hun (uiteindelijk dertien) kleinkinderen een feest voor Jos en Willem. Jos was natuurlijk het werkelijke middelpunt van het gezin, die een sfeer kon scheppen waarin alles gedijde. Het gezin heeft ook, ondanks dat later de kinderen over het hele land verspreid waren, altijd als een bewonderenswaardige eenheid gefunctioneerd. Vooral toen het aan het einde van de negentiger jaren slechter ging met Jos en Willem was dat merkbaar. Toen Jos eind maart 2004 overleed was het duidelijk dat het leven voor Willem veel van zijn glans verloren had. Hij overleed begin Januari 2005, ten gevolge van een ongeneeslijke ziekte, te midden van zijn kinderen. 



Willem Van Spiegel en Pieter Zandbergen voor de Universiteit Twente

**Dankwoord** De auteur is veel dank verschuldigd aan dr. E. van Spiegel. Het eerste deel van dit In Memoriam is een vrijwel letterlijke weergave van het grootste deel van zijn afscheidsrede bij de crematieplechtigheid. Verder dank ik prof.dr. A.C.H. van de Ven voor zijn bijdrage over het proefschrift en prof.dr. C. Hoede en dr. F. Twilt voor hun bijdragen en opbouwende kritiek. Tenslotte dank ik de kinderen Van Spiegel voor hun hulp en het beschikbaar stellen van de foto's.

Jan P. Hogendijk

*Mathematisch Instituut*

*Universiteit Leiden*

*Postbus 9512*

*2300 RA Leiden*

*hogend@math.leidenuniv.nl*

## Inaugurele rede

# Geschenken uit

**De ontwikkeling van wiskunde heeft zich nooit veel van taalgrenzen aangetrokken. Wiskundige problemen reisden van de ene cultuur naar de andere en op die manier werden vaak nieuwe oplossingen gevonden. Dit is goed te zien aan de verschillende getallenstelsels die we in ons dagelijks leven aantreffen. In zijn oratie van 8 maart 2005 ter aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Universiteit Leiden geeft Jan Hogendijk een historisch overzicht.**

Wiskunde is veel ouder dan de meeste wetenschappen die tegenwoordig aan de universiteit worden onderwezen. Vierduizend jaar geleden werden in het huidige Irak al wiskundige problemen opgelost. De moderne wiskunde is grotendeels in het Westen ontwikkeld, maar sommige bijdragen van Oosterse culturen zijn nog steeds zichtbaar. Twee van deze 'geschenken uit het Oosten' zijn het tientallig en het zestigtallig positiestelsel, die allebei voorkomen in de aanvangstijd 16.15 uur in de uitnodiging voor mijn oratie. Door op tijd te komen, lieten de aanwezigen zien dat ze voldoende voorkennis hadden om een groot deel van mijn verhaal te volgen.

Wij gebruiken het tientallig positiestelsel als iets vanzelfsprekends, maar de wiskundigen hebben het meer dan 2000 jaar zonder dit stelsel moeten doen: aan de oude Grieken en Romeinen was het onbekend. In het tientallig positiestelsel gebruiken we symbolen voor één tot en met negen, en het

cijfer nul. Hiermee vormen we willekeurig grote getallen door deze symbolen naast elkaar te schrijven. Van rechts naar links geven de posities eenheden, tientallen, honderdtallen, enzovoort aan. We schrijven zestien als 16, dat is zes eenheden plus één tiental, en het jaar twee duizend vijf, waarin we leven, als 2005, dat is vijf eenheden, geen tientallen, geen honderdtallen en twee duizendtallen. Het cijfer nul heeft betekenis 'geen' (wat niet hetzelfde is als 'heeft geen betekenis').

Een symbool met zo'n abstracte betekenis was wel even wennen voor de Europese wiskundigen in de twaalfde en dertiende eeuw, toen het tientallig positiestelsel pas uit de Islamitische wereld naar Europa was gekomen. De Europese wiskundigen noemden de symbolen voor 1 tot en met 9 de negen 'figuren', maar voor de nul verlatijnsten ze het Arabische woord *ṣifr*. Dit woord betekent 'leegte', en het is de oorsprong van het moderne woord 'cijfer'. Het woord cijfer wordt dus eigenlijk ten

onrechte ook voor de symbolen 1 tot en met 9 gebruikt.<sup>1</sup>

We zijn gewend in het tientallig positiestelsel ook breuken te schrijven. Zestien en een kwart schrijven we als 16,25, dat is één tiental, zes eenheden, twee tienden en vijf honderdsten. Met de komma geven we aan waar de breuk begint. Sinds de Franse revolutie zijn maten, gewichten en munteenheden steeds verder aan het tientallig positiestelsel aangepast. De aanvangstijd van deze oratie laat zien dat de overwinning van dit stelsel niet volledig is. In het tientallig positiestelsel zouden we kwart over vier 's middags als 16.25 moeten noteren. Maar we schrijven 16.15 omdat we een uur in 60 minuten verdelen. We gebruiken het zestigtallig stelsel ook bij het verdelen van een minuut in 60 seconden, en bij het rekenen met hoeken in graden, minuten en seconden. De aantallen minuten en seconden schrijven we, nogal inconsequent, weer in het tientallig positiestelsel: vijftien minuten is 15 minuten.

We zullen nu de geschiedenis van deze twee positiestelsels kort bespreken aan de hand van oorspronkelijke bronnen. Dit is om diverse redenen mijn favoriete werkmethode. Het bronnenmateriaal vormt de ba-



Jan Hogendijk

# het oosten

sis van onze kennis, en studenten moeten het daarom met eigen ogen zien. De bronnen moeten steeds opnieuw worden bestudeerd en geïnterpreteerd, omdat iedere generatie nieuwe inzichten en onderzoeksmethoden meebrengt. Studie van authentiek bronnenmateriaal geeft 'gevoel' voor de oude wiskunde, en leidt direct naar vragen over de historische context en de motivatie van wiskunde. Tenslotte is het mijn ervaring dat werken met authentieke bronnen veel enthousiasme kan opwekken. Ik kom daar aan het eind van mijn verhaal nog op terug. Omdat bronnen uit drie verschillende culturen aan de orde zullen komen, kan ik niet zo veel aandacht aan elke bron en elke cultuur besteden als ik eigenlijk zou willen.

## Een Indiaas stuk berkenbast

Mijn eerste bron is afkomstig uit een van de oudst bewaarde wiskundige documenten uit de geschiedenis van het tientallig positiestelsel. Figuur 1 is een blad uit een handschrift dat in 1881 is gevonden in de omgeving van het dorp Bakhshali in Noordwest Pakistan.<sup>2</sup> Het handschrift wordt tegenwoordig bewaard in de *Bodleian Library* in Oxford. Het bestaat uit ongeveer vijftig stukken berkenbast, die

tussen de achtste en de twaalfde eeuw<sup>3</sup> na Christus aan beide kanten zijn beschreven met een wiskundige tekst in het Sanskriet. Dit is de heilige taal van het oude India, waarvan het moderne Pakistan een onderdeel was. Het handschrift bevat een collectie wiskundige problemen, die is samengesteld door iemand die zichzelf "de zoon van Chataka, een brahmaan, en een koning van de wiskundi-

gen" noemt.<sup>4</sup> We weten verder niets over deze persoon. De tekst bevat Sanskrietwoorden, die van links naar rechts worden geschreven, en getallen in het tientallig positiestelsel, die bijna allemaal in boogjes staan. De cijfers staan in de volgorde die wij gewend zijn. Omdat de vorm van de cijfers is veranderd, zijn in figuur 1 de meeste getallen in het Sanskriet in zwart aangegeven met de moderne cijfers



Figuur 1 Een blad uit het Bakhshali handschrift<sup>2</sup>



**Figuur 2** Links een rekenaar met het nieuwe Hindu-Arabische systeem, rechts een rekenaar met penningen op een rekenbord.

ernaast. Niet alle getallen zijn zo aangegeven: de lezer kan zelf nog extra getallen 6, 29, 58 en 11 vinden. Het stuk berkenbast is beschadigd en op de missende gedeeltes moeten nog meer getallen gestaan hebben.

De oudste bronnen voor het tientallig positiestelsel zijn Indiase sterrenkundige teksten uit de vijfde en zesde eeuw na Christus. Deze teksten zijn alleen bewaard in kopieën van veel recenter datum dan het Bakhshali handschrift.<sup>5</sup> De ontdekker van het tientallig positiestelsel was waarschijnlijk een Indiase sterrenkundige uit de tweede of derde eeuw na Christus. Hij heeft als uitgangspunt een ouder stelsel gebruikt dat al vanaf de derde eeuw vóór Christus voorkwam.<sup>6</sup> In dit oudere stelsel bestonden symbolen voor één tot en met negen, maar nog geen nul, en het getal tien werd dus niet geschreven als één-nul. Er waren aparte symbolen voor alle tientallen tot en met honderd, voor alle honderdtallen tot en met duizend, en zo verder. Dit oudere stelsel was dus wel tientallig, maar geen positiestelsel. Voor het dagelijks leven in het oude India was dit voldoende, maar niet voor de berekeningen in de Indiase sterrenkunde, waarin enorm grote getallen werden gebruikt. Dat was waarschijnlijk de motivatie voor de ontwikkeling van het tientallig positiestelsel.

Dit nieuwe stelsel is vanuit India in de achttiende eeuw in de Islamitische wereld ingevoerd, en daarna is het in de twaalfde en dertiende eeuw via Spanje en Italië in Europa terecht gekomen. Daar was men gewend aan Romeinse cijfers, maar de Italiaanse handelaars en bankiers zagen de voordelen van het nieuwe systeem in. Kort na het begin van de boekdrukkunst kregen de cijfers hun moderne vorm. In

de periode daarvoor zijn ze wel iets van vorm veranderd, maar toch zijn er duidelijke verbanden te zien tussen de moderne cijfers en de cijfers in figuur 1. De 6 in het handschrift lijkt op een bakje dat in een skilift hangt. De kabel waaraan het bakje hangt is sindsdien verdwenen, en de zes is gespiegeld. Het rondje van de zes is tegenwoordig open, net als van de nul. De 3 in het handschrift heeft een kuif die er sindsdien is afgefallen. De 2 heeft ook zo'n extra kuif, maar nog geen horizontaal streepje aan de onderkant. De 4, 7 en 9 zijn ten opzichte van de huidige vormen gedraaid; ze zijn in het handschrift beter te herkennen door het papier een kwartslag naar rechts te draaien. Ook de 4 heeft een aanhangsel dat er tegenwoordig niet meer aanzit.

Nu we al deze getallen hebben gezien, willen we (althans de wiskundig geïnteresseerden) natuurlijk weten wat ze betekenen. Hiervoor moeten we (een vertaling van) de Sanskriettekst raadplegen.<sup>7</sup> In het nu volgende komt een Indiase lengtemaat voor die ik gemakshalve als kilometer zal weergeven. De tekst beschrijft een probleem van twee reizigers die elkaar achtervolgen. Het probleem wordt eerst algemeen behandeld en opgelost, daarna volgen getallenvoorbeelden. Figuur 1 gaat over het volgende getallenvoorbeeld: Een reiziger gaat op weg. Hij reist elke dag 7 kilometer in dezelfde richting. Na 5 dagen gaat een tweede reiziger hem achterna. Deze reist op de eerste dag 5 kilometer en elke dag daarna 3 kilometer extra, dus op de tweede dag 8 kilometer, op de derde dag 11 kilometer, enzovoort. Hoeveel dagen duurt het tot hij de eerste reiziger heeft ingehaald?

Op de voorafgaande bladen berkenbast is beredeneerd dat de tweede reiziger ongeveer 6 hele dagen en  $4/29$  dag nodig heeft om de eerste in te halen. In figuur 1 wordt deze oplossing gecontroleerd. Eerst wordt de gemiddelde snelheid per dag van de tweede reiziger uitgerekend. Het antwoord, 737 gedeeld door 58 kilometer, staat aangegeven in het boogje bovenaan in het midden (we moeten de twee getallen dus lezen als het bovenste getal gedeeld door het onderste). Deze gemiddelde snelheid maal de  $6 + 4/29$  reisdagen levert de afstand die de tweede reiziger heeft afgelegd, namelijk de  $65593/841$  kilometer in het boogje aan de rechterkant. De afstand die de eerste reiziger dan heeft afgelegd kan ook gemakkelijk worden uitgerekend als aantal reisdagen maal zeven kilometer per dag.<sup>8</sup> Het resultaat staat in het boogje in het midden van de pagina aangegeven als  $65569/841$  kilometer. De tweede reiziger is de eerste dus al gepasseerd!

De auteur geeft in zijn Sanskriettekst de volgende verklaring van dit vreemde resultaat. De  $6 + 4/29$  reisdagen zijn niet het exacte antwoord, maar een benadering. De auteur heeft het aantal reisdagen gevonden als oplossing van een kwadratische vergelijking,<sup>9</sup> en hierbij moest hij de wortel uit 889 trekken. Dit getal is geen kwadraat, en daarom heeft hij de wortel benaderd als  $29 + 48/58$ . Hij kan nu de voorsprong van de tweede reiziger als volgt uitrekenen: neem het kwadraat van  $29 + 48/58$ , trek hier 889 vanaf, en deel het verschil door 8 maal de drie kilometer die de tweede reiziger per dag sneller gaat lopen. De voorsprong blijkt  $24/841$  kilometer te zijn, en alles klopt precies.

We kunnen in moderne wiskundige notatie nagaan dat de auteur de voorsprong van de tweede op de eerste reiziger correct heeft uitgerekend. Wie dit zelf probeert zal vermoedelijk, net als ik, bewondering krijgen voor de auteur van de tekst in het Bakhshali handschrift.<sup>10</sup> Ikzelf word altijd weer gefascineerd door de tijdloze en cultuuroverschrijdende aspecten van wiskunde. We moeten daarbij de verschillen niet uit het oog verliezen. Waar wij formules gebruiken, citeert de auteur van het Bakhshali handschrift *verzen* in het Sanskriet. Hij geeft een vers met de oplossing van de kwadratische vergelijking, en een ander vers voor de benadering van de wortel uit een getal dat geen kwadraat is. Wiskundigen in het oude India moesten ook kunnen dichten!

De auteur zegt nergens waarom hij dit probleem van de twee reizigers eigenlijk behandelt. Van de tweede reiziger wordt aangenomen dat hij dag en nacht doorloopt en daarbij zijn snelheid continu verhoogt. Dit gedrag doet niet erg realistisch aan. Het Bakhshali handschrift staat vol met zulke onrealistische problemen. Deze problemen horen tot een gebied dat vaak de recreatieve wiskunde genoemd wordt. Ikzelf spreek liever over de sportieve wiskunde (en daarmee bedoel ik niet die hardlopende reizigers). In allerlei culturen en perioden losten mensen in Azië en Europa wiskundige problemen op voor hun plezier. De problemen kozen ze liefst zo moeilijk mogelijk, en de oplossingen zo slim mogelijk. Daarna werden andere mensen uitgedaagd om deze problemen ook op te lossen. Figuur 1 hoort bij het laatste getallenvoorbeeld voor het probleem van de twee reizigers. In dit voorbeeld zijn de snelheden van de reizigers (kennelijk met opzet) zo gekozen dat de oplossing niet mooi uitkomt. Zo kon de auteur laten zien dat hij ook tegen dit soort situaties opgewassen was.

Problemen uit de sportieve wiskunde reisden ook van de ene cultuur naar de andere. In de tiende eeuw werd het probleem van de twee reizigers ook behandeld door de Islamitische wiskundige al-Karkhī of al-Karajī, afkomstig uit Irak of Iran. Ook deze koos een getallen-voorbeeld dat niet mooi uitkomt.<sup>11</sup>

We gaan nog even terug naar figuur 1. In het langgerekte verticale boogje in het midden rekent de auteur de 4/29 reisdagen om in het zestigtallig stelsel. De getallen 33 en 6 behoren tot de staart van de breuk, ze komen namelijk overeen met de derde sexagesimaal 33/60<sup>3</sup> en de vierde sexagesimaal 6/60<sup>4</sup>. Het eerste deel van de breuk is wegge gevallen doordat het handschrift is beschadigd. Door de breuk 4/29 zelf om te rekenen vinden we de eerste sexagesimaal 8 en de tweede sexagesimaal 16. Een klein stukje van de 16 is in figuur 1 met enige goede wil nog zichtbaar. Beschadigde wiskundige teksten kunnen soms uit de wiskundige inhoud voor een deel gereconstrueerd worden.

We zien dat de auteur gehele getallen in het tientallig positiestelsel schrijft, breuken in het zestigtallig positiestelsel, en dan de sexagesimalen (33 en 6) zelf weer in het tientallig positiestelsel. Dezelfde inconsequentie zijn we al eerder tegengekomen in de aanvangstijd 16.15 uur van deze oratie. Alleen de Indiase verdeling van een etmaal in 60 delen verschilt van de moderne verdeling in 24 uren. In het moderne Europa en in middeleeuws India bestond blijkbaar een merkwaardige voorliefde voor zestigtallige breuken. Waar komt deze voorliefde vandaan?

### Een Babylonisch kleitablet

Het zestigtallig positiestelsel kwam vierduizend jaar geleden in het tegenwoordige Irak al voor in oplossingen van wiskundige problemen. Het heeft latere culturen beïnvloed in de vorm waarin het vanaf circa 500 voor Christus in de Babylonische sterrenkunde werd gebruikt. In de vierde en derde eeuw voor

Christus ontwikkelden de Babylonische sterrenkundigen doeltreffende numerieke methodes voor het voorspellen van planeetstanden, maansverduisteringen, en de eerste zichtbaarheid van de maansikkel. Zij bereikten hierin een hoger niveau dan hun beroemde Griekse tijdgenoten Eudoxos, Eratosthenes, Archimedes en Apollonius van Perga, die zich bezig hielden met meetkundige speculaties over de planeetbewegingen, maar niet in staat waren gedetailleerde voorspellingen te doen. Onder invloed van de Babyloniers hebben latere Griekse sterrenkundigen zoals Ptolemaeus hun eigen methoden voor het doen van voorspellingen ontwikkeld.

Om Babylonische sterrenkunde te begrijpen, is het nodig veel tijd te besteden aan de studie van (transcripties en vertalingen van) kleitabletten, die maar een zeer gedeeltelijk inzicht geven in de denkwereld van de auteurs. Voor wie van getallen houdt, en het noodzakelijke doorzettingsvermogen bezit, is de Babylonische sterrenkunde een fascinerend onderzoeksterrein van groot historisch belang. De oudste wortels van de kwantitatieve natuurwetenschap liggen niet alleen in Griekenland maar ook in Babylon, en voor deze vergeten Oosterse oorsprong is in de moderne literatuur veel te weinig aandacht.<sup>12</sup>

We zullen nu een tamelijk late maar redelijk onbeschadigde Babylonische bron bekijken. De bovenste helft van figuur 3 is een tekening<sup>13</sup> van vijf regels<sup>14</sup> uit een kleitablet, dat in de negentiende eeuw is opgegraven in Babylon, in de buurt van het moderne Bagdad. Het kleitablet is omstreeks 175 voor Christus door een anonieme Babylonische sterrenkundige geschreven in spijkerschrift. Het wordt nu in het British Museum in Londen bewaard en is diverse keren gepubliceerd.<sup>15</sup> Op dit tablet staan voornamelijk getallen, die u eenvoudig zelf kunt lezen, van links naar rechts. De getallen van 1 tot 59 worden geschreven met twee tekens: een verticale spijker<sup>16</sup> voor het getal 1, en een pijltje met de punt naar

links voor het getal 10. Links bovenaan de eerste regel staat bijvoorbeeld een groepje van twee verticale spijkers, die samen 2 betekenen. Het groepje rechts daarvan bestaat uit twee pijltjes en zeven kleine spijkertjes, samen 27.

Voor getallen vanaf 60 en voor breuken gebruikten de Babyloniers het zestigtallig positiestelsel. De twee groepjes 2 27 links bovenaan in figuur 3 betekenen samen  $2 \times 60 + 27 = 147$ . Twee regels daaronder ziet u in dezelfde kolom het getal  $2 \times 60 + 28 = 148$ . Deze getallen 147 en 148 zijn jaartallen in de Seleucidische jaartelling. Jaar 1 van deze jaartelling begon in het voorjaar van 311 voor Christus en de jaren zijn (ongeveer) zonnejaren. Het jaar 147 in de eerste regel loopt van het voorjaar van 165 voor Christus tot het voorjaar van 164 voor Christus.

In de onderste helft van figuur 3 is de inhoud van de vijf regels voor het gemak in moderne woorden en symbolen weergegeven. De groepjes in spijkerschrift zijn vervangen door getallen in het tientallig positiestelsel. De andere spijkerschrift-symbolen — woorden voor positief, negatief, stijgend en dalend, namen van sterrenbeelden in de dierenriem, en namen van de maanden van het jaar — zijn in de transcriptie door moderne equivalenten vervangen. Bij de maanden van het jaar kan dat niet precies, omdat de maanden in de Babylonische kalender echt van de maanstand afhingen. Een maand begon in principe op de eerste avond wanneer de wassende maansikkel op de Westelijke horizon zichtbaar was, net zo als in de tegenwoordige Joodse en Islamitische kalenders.

Een Babylonisch jaar bestond uit twaalf of dertien maanden; men voegde dertiende maanden op zodanige manier in dat het jaar altijd dichtbij het begin van de lente begon. Omdat de lente in de huidige Gregoriaanse kalender op 20, 21 of 22 maart begint, heb ik de eerste maand van het Babylonische jaar vertaald als 'april', enzovoort.<sup>17</sup>

| jaar | maand | jaar            | positie<br>vóór maand | dagte<br>aansicht | afstand van<br>tot dagte | positie<br>vóór | metheid<br>maand | dagte<br>aansicht |          |       |   |                      |
|------|-------|-----------------|-----------------------|-------------------|--------------------------|-----------------|------------------|-------------------|----------|-------|---|----------------------|
|      |       |                 |                       |                   |                          |                 |                  |                   |          |       |   |                      |
| 2 27 | apr   | 2 13 44 26 40   | 1                     | 0 52 30           | schors                   | 3 13 56         | 54 14 40         | -1                | 8 21 32  | 14 58 | 1 | 5 14 38 34 4 26 40   |
|      | okt   | 2 3 40 57 46 40 | 1                     | 22 4              | ram                      | 2 51 57 20      | 49 34 24         | +                 | 9 11 15  | 17 44 | 1 | 37 9 37 46 40 ...    |
| 2 28 | apr   | 2 0 21 50 0 40  | 1                     | 20 30             | weegsch                  | 3 7             | 15 2             | -1                | 19 34 20 | 13 30 | 1 | 2 15 56 40 15 33 ... |
|      | okt   | 2 9 12 13 20    | 1                     | 11                | ram                      | 2 59 20         | 12 10 24         | +                 | 19 25 44 | 14 6  | 1 | 5 10 0 2 45 45 ...   |
|      | nov   | 2 2 56 15 33 20 | 1                     | 10 07 30          | weegsch                  | 3 0 5           | 1 10 15 48       | -1                | 30 47 0  | 12 14 | 1 | 2 0 23 4 35 ...      |

Figuur 3 Tekening en transcriptie van vijf regels uit een Babylonisch kleitablet, circa 175 voor Christus<sup>13</sup>

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 1 | 3 | 1 | 8 | 3 | 0 | 5 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 4 | 4 | 3 | 7 | 0 | 4 | 1 |
| 1 | 1 | 4 | 9 | 0 | 0 | 9 | 2 | 1 | 8 |
| 2 | 0 | 1 | 3 | 2 | 5 | 3 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 1 | 4 | 1 | 8 | 9 | 2 | 4 | 8 | 3 |
| 3 | 2 | 4 | 4 | 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 |
| 4 | 3 | 9 | 1 | 2 | 4 | 9 | 1 | 8 | 0 |
| 8 | 0 | 2 | 4 | 0 | 4 | 1 | 4 | 5 | 0 |
| 8 | 4 | 8 | 4 | 1 | 4 | 4 | 5 | 0 | 4 |
| 4 | 2 | 1 | 3 | 1 | 8 | 3 | 0 | 5 | 1 |

**Figuur 4** De tabel met veelvouden van  $2\pi$  van al-Kashī (circa 1420).<sup>22</sup> In de vijfde regel zijn de decimalen van  $\pi$  te herkennen.

Op het tablet staan berekeningen van maansverduisteringen voor een periode van ongeveer vijftig jaar, tussen 175 en 150 voor Christus. Om astrologische redenen was het belangrijk van te voren te weten wanneer maansverduisteringen zouden plaatsvinden. Een maansverduistering komt hoogstens eens in de vijf of zes maanden voor, wanneer het volle maan is, en de aarde precies tussen de zon en de maan in staat, zodat (modern gezegd) de maan in de schaduwkegel van de aarde terecht komt. Als er een maansverduistering is, dan moet die in het midden van de maand plaatsvinden, omdat elke maand kort na nieuwe maan begint.

De Babylonische sterrenkundige heeft op het tablet alleen die maanden aangegeven waarin eventueel een maansverduistering zou kunnen plaatsvinden. Voor elke maand is er één regel met acht getallen, keurig gerangschikt in kolommen. Sommige kolommen zijn gemakkelijk herkenbaar. In de derde kolom staat een eerste benadering van de positie van volle maan: het punt in de ecliptica precies tegenover de zonnestand in het midden van de maand (de ecliptica is de cirkelvormige baan die de zon gedurende het jaar aflegt tegen de achtergrond van de vaste sterren). De Babyloniers verdeelden de ecliptica in twaalf even grote 'sterrenbeelden' van elk 30 graden lang, samen dus 360 graden. De graden werden volgens het zestigtallig stelsel in minuten en seconden verdeeld, en de wiskundige 'sterrenbeelden' werden genoemd naar echte sterrenbeelden die in de buurt stonden. In de eerste regel van de derde kolom staat

0 52 30 Schorpioen, dat betekent 0 graden, 52 minuten en 30 seconden vanaf het begin van het achtste 'sterrenbeeld' van de ecliptica, dat bij de Babyloniërs ook al Schorpioen heette. Merk op dat het symbool 0 de transcriptie is van twee kleine haakjes schuin boven elkaar die in de tekening te zien zijn. Dit is de oudst bekende vorm van de nul.

In de zevende kolom van links staat de gelijkse beweging van de maan in het midden van de maand; in de bovenste rij staat 14 graden en 58 minuten. Tegenwoordig zouden we het precies zo kunnen zeggen. Uiteraard was zo'n nauwkeurig getal niet het resultaat van een meting maar van een berekening; op dit tablet staan berekeningen, geen waarnemingen. In de zesde kolom staat de zogenaamde 'grootte' van de maansverduistering. Dit getal geeft aan of er inderdaad een maansverduistering zal zijn, en of deze partieel of geheel zal zijn. Met moderne sterrenkundige methoden kan worden berekend wanneer maansverduisteringen in het oude Babylon plaatsvonden en hoe lang zij duurden. Neugebauer heeft de resultaten vergeleken met de getallen in de zesde kolom,<sup>18</sup> en het blijkt dat de Babylonische voorspellingen meestal goed uitkwamen.

Het is voor mijn verhaal niet nodig in detail uit te leggen wat de overige kolommen betekenen.<sup>19</sup> Ik wil alleen de aandacht vestigen op het feit, dat de lange getallen in de kolommen van figuur 3 bijna allemaal breuken in het zestigtallig stelsel zijn. De 58 minuten bovenaan de zevende kolom van links is eigenlijk een breuk, namelijk  $58/60$ . In de Ba-

bylonische sterrenkunde werden alle breuken in het zestigtallig positiestelsel geschreven.

Omstreeks 150 voor Christus nam de Griekse sterrenkundige Hipparchus veel methoden van de Babyloniërs over. Hij werd hierdoor geïnspireerd elke cirkel in 360 graden te verdelen, en de graden natuurlijk weer volgens het zestigtallig stelsel in minuten en seconden. De latere sterrenkundigen in de Griekse cultuur, India, de Islamitische wereld en middeleeuws Europa zijn hem in dit opzicht gevolgd. Astrologie en sterrenkunde waren in de late oudheid en de middeleeuwen de belangrijkste toepassingsgebieden van geavanceerde wiskunde. Zo is te verklaren dat de berekeningsmethoden uit de sterrenkunde ook in andere wiskundige problemen (bijvoorbeeld in het Bakhshali handschrift) opduiken.

Niet alle delen van de Griekse sterrenkunde zijn in het verre India overgenomen: een voorbeeld is de verdeling van het etmaal in 24 gelijke uren (weer onderverdeeld in minuten en seconden). Deze verdeling gaat vermoedelijk ook terug op Hipparchus. De gelijke uren, minuten en seconden werden wel gebruikt door de latere Griekse sterrenkundige Ptolemaeus en de Islamitische en middeleeuws Europese sterrenkundigen.

Buiten de sterrenkunde kwamen de 24 gelijke uren en de minuten en seconden in de middeleeuwen niet voor. In het gewone leven verdeelde men de dag in 12 seizoensuren: het eerste uur begon bij zonsopgang, en het twaalfde uur eindigde bij zonsondergang. In de zomer zijn deze seizoensuren langer dan in de winter. Deze situatie veranderde pas in de veertiende eeuw door de ontwikkeling van de techniek. Toen werden in veel steden in Europa mechanische torenklokken gebouwd, die elk uur of elk kwartier met een bel de tijd aangaven.

De meeste van deze klokken wezen uren van steeds dezelfde lengte aan, omdat uurwerken voor gelijke uren veel gemakkelijker te construeren zijn dan voor seizoensuren. Hiermee deden de 24 gelijke uren hun intrede in het leven van de gewone man en vrouw. In de eerste tijd waren de klokken niet erg nauwkeurig, en het kwartier was de kleinste tijds-eenheid die in de praktijk voorkwam. Een minutenwijzer was nog niet nodig. Ook de torenklok van het Leidse academiegebouw, waarin deze oratie is uitgesproken, heeft alleen een wijzer voor de uren. Kleinere onderverdelingen dan het kwart uur werden in het dagelijks leven pas belangrijk nadat onze landgenoot Christiaan Huygens in 1656 het slingeruurwerk had uitgevonden.<sup>20</sup> Voor de onderverdeling van het uur gebruikte men de tra-

ditionele methode uit de sterrenkunde met minuten en seconden.

### Een Arabisch papieren handschrift

De grote invloed van de sterrenkunde verklaart dat decimale breuken pas betrekkelijk laat verschijnen. Ze komen nergens voor in middeleeuws India, de bakermat van het tientallig positiestelsel voor gehele getallen. Decimale breuken zijn diverse malen onafhankelijk van elkaar in de Islamitische wiskunde en in West-Europa uitgevonden.<sup>21</sup> De uitvinding ligt voor de hand als men uit het zestigtallig stelsel voor breuken en het tientallig stelsel voor gehele getallen één uniform geheel wil maken.

Figuur 4 is een tabel uit een 16e-eeuws handschrift met een tekst van één van de uitvinders van decimale breuken, Jamshīd al-Kāshī. Deze wis- en sterrenkundige leefde de eerste veertig jaar van zijn leven in armoedige omstandigheden in Iran. Omstreeks 1420 werd hij naar Samarkand uitgenodigd aan het hof van koning Oeloeg Beg, zelf een groot liefhebber van wiskunde. Het handschrift is geschreven op papier, dat in die tijd ruim voorhanden was, en het wordt bewaard in een bibliotheek bij het graf van Imam Reza in Meshed in Oost-Iran. Het is een tabel met veelvouden van het getal dat modern als  $2\pi$  wordt aangeduid.<sup>22</sup> De notatie  $2\pi$  is modern, al-Kāshī spreekt in plaats hiervan over de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de straal. In de rechterkolom van de tabel staan de getallen 1 tot en met 10 van boven naar beneden, en links van ieder van deze getallen staat de omtrek van een cirkel met die straal. De cijfers werden ook in middeleeuws Arabische teksten in de volgorde geschreven die wij gewend zijn. Ze lijken veel op de cijfers die in het tegenwoordige Midden Oosten worden gebruikt. Op de vijfde regel staat de waarde  $10\pi$ , waarin de eerste 16 decimalen van  $\pi$  herkenbaar zijn: 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2.

Om  $\pi$  met deze nauwkeurigheid te bepalen heeft al-Kāshī een onvoorstelbare hoeveelheid rekenwerk gedaan. In dit opzicht stond hij in zijn tijd op eenzame hoogte. De-

ze nauwkeurigheid was in de praktijk onnodig, en we kunnen ons afvragen wat al-Kāshī's motieven waren om al dit rekenwerk te doen. Hij zegt er niets expliciet over maar we kunnen wel iets vermoeden. Al-Kāshī zelf, en vele andere Islamitische wiskundigen, geloofden dat de wiskunde tijdloos was. In één van zijn werken zegt al-Kāshī dat hij een wiskundige ontdekking "heeft aangeboord, met de kracht van inspiratie, uit de Eeuwige Aanwezigheid."<sup>23</sup> Wiskunde grenst hier aan mystiek.

In 1596 publiceerde Ludolf van Ceulen, die in de Pieterskerk in Leiden begraven is, de eerste 19 decimalen van  $\pi$ . Deze decimalen staan aangegeven op de voorpagina van zijn boek *Vanden Circkel*, waarvan het relevante deel in figuur 5 is afgebeeld. Van Ceulen stelt de straal van de cirkel een 1 met een heleboel nullen, en hij gebruikt geen decimale breuken. Hij was niet bekend met het werk van al-Kāshī en toch zijn de eerste 16 decimalen van  $\pi$  bij het pijltje in figuur 4 ook in figuur 5 te zien. Zo levert ook het getal  $\pi$  een voorbeeld van het tijdloze en cultuur-overschrijdende karakter van de wiskunde.

Decimale breuken werden in de Islamitische wereld geen succes, net zo min als het tientallige positiestelsel voor gehele getallen.<sup>24</sup> In Europa braken decimale breuken pas door nadat Simon Stevin in 1585 *de Thiende* had gepubliceerd. Hij schreef dit boekje toen hij aan de Leidse universiteit studeerde, en hij richtte het aan kooplieden en landmeters die al gewend waren aan het rekenen met gehele getallen in het tientallig positiestelsel. Stevin's eigen notatie was onhandig, en het voorbeeld van Ludolf van Ceulen laat zien dat niet iedereen meteen met decimale breuken begon te werken. Vanaf 1620 werden decimale breuken en de decimaalkomma ingevoerd in de berekening van de logaritmen, die enkele jaren daarvoor waren ontdekt. Dit is het begin van de overwinning van de decimale breuken. Sindsdien zijn sexagesimale breuken een fossiel uit een voorbijge tijd, maar wel een fossiel met een blijvend karakter.



Figuur 5 Ludolf van Ceulen, *Vanden Circkel*, Delft 1596, voorpagina (detail)

In de negentiende en twintigste eeuw is de wiskunde enorm uitgebreid, en zijn veel wiskundige begrippen en theorieën in een nieuw perspectief komen te staan. Deze ontwikkeling gaat steeds verder, en de wiskunde leeft zoals nooit tevoren. Dit betekent niet dat de oude wiskunde ongeldig is geworden, maar hoogstens, dat we er nu op een andere manier naar kijken. De groei houdt gelukkig ook niet in, dat de wiskunde iedere paar jaar weer een nieuwe 'modieuze' vorm moet krijgen.

Het tijdloze aspect van wiskunde is een van de redenen waarom het werken met oude bronnen zo enthousiasmerend kan zijn. Hoewel de bronnen zijn geschreven in een tijd en context die wij ons maar moeilijk kunnen voorstellen, kan het wiskundige gedachtengoed erin zeer herkenbaar zijn. Zo kan de moderne lezer met eigen ogen zien, dat sommige vanzelfsprekende concepten en symbolen een eeuwenlange geschiedenis hebben. Wat u op de lagere school over het tientallig positiestelsel heeft geleerd, had u ook kunnen leren in middeleeuws India. Wat een boog aan de hemel van 14 graden en 58 minuten is, had u ook in 300 voor Christus in een Babylonische tempel aan de weet kunnen komen. Ook Oosterse culturen hebben aan de ontwikkeling van de wiskunde bijgedragen. Wie er oog voor heeft, kan de sporen elke dag zien. ←

### Noten en referenties

- 1 Zie voor de nul in middeleeuws Europa K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl*, tweede editie, Göttingen 1957, deel 2, p. 213–220.
- 2 Zie de foto in T. Hayashi, *The Bakhshālī Manuscript: An Ancient Indian Mathematical Treatise*, Groningen: Egbert Forsten, 1995, p. 546; deze is gebaseerd op de foto gebruikt door G.R.

- Kaye in, *The Bakhshālī Manuscript: A Study in Medieval Mathematics*, 1927, reprint: Delhi, Cosmo Publications, 1981, 2 delen, Plate VI, 7 recto. De afmeting van het afgebeelde stuk berkenbast is naar schatting 12 bij 7 centimeter, vergelijk Hayashi hoofdstuk I.2.
- 3 De datum zou kunnen worden gepreciseerd door een moderne koolstof 14-datering op het

handschrift uit te voeren.

- 4 Zie Hayashi, p. 85–86.
- 5 Zie bijvoorbeeld *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*, ed. Kripa Shankar Shukla in collaboration with K.V. Sarma, New Delhi: Indian National Academy of Science, 1976, p. lxviii–lxxi (handschriften), p. 26–33 (tientallig positiestelsel).

- sel). Āryabhaṭa werd geboren in 476 na Christus.
- 6 Voor afbeeldingen van cijfers in dit zogenaamde Brahmi-stelsel zie B. Datta, A.N. Singh, *History of Hindu Mathematics*, reprint ed., Delhi 2001, vol. 1 p. 26.
  - 7 Zie de edities van Hayashi, voetnoot 2, p. 294–296, 369–370, 430–434 en vergelijk Kaye, voetnoot 2, vol. 1 (Parts I-II), p. 44–46 example (ii), p. 110 [7r.], vol. 2 (Part III), p. 179, Plate VI, 7 recto.
  - 8 Toen de tweede reiziger op weg ging had de eerste reiziger een voorsprong van 35 kilometer. In de  $6 + 4/29$  dagen daarna reisde hij 7 kilometer per dag, dit geeft de  $42 + 28/29$  in de onderste regel. Teller en noemer van de som vermenigvuldigen we met 29.
  - 9 Na  $t$  dagen heeft de tweede reiziger  $5 + 8 + \dots + (5 + 3t - 3) = t(5 + \frac{3}{2}(t - 1))$  kilometer afgelegd en de eerste reiziger  $35 + 7t$  kilometer. De voorsprong van de tweede reiziger op de eerste is  $\frac{1}{2} \times (3t^2 - 7t - 70)$  en ze ontmoeten elkaar als deze uitdrukking nul is, dus als  $t = \frac{7 + \sqrt{889}}{6}$  dagen.
  - 10 In moderne algebraïsche notatie benadert de auteur de wortel  $\sqrt{K}$  uit een niet-kwadraat  $K = p^2 + E$ , met  $p$  geheel,  $0 < E < p$ , als  $p + \frac{E}{2p}$ . Stel nu  $t = \frac{1}{2a} \cdot (-b + \sqrt{K})$ ,  $u = \frac{1}{2a} \cdot (-b + p + \frac{E}{2p})$ . In de tekst is  $K = 889$ ,  $p = 29$ ,  $E = 48$ ,  $a = 3$ ,  $b = -7$ ,  $t$  de exacte oplossing van het probleem, en  $u = 6\frac{4}{29}$  de benadering. Dan zijn  $t$  en  $u$  wortels van de vergelijkingen  $at^2 + bt + c = 0$  en  $au^2 + bu + c' = 0$  met  $c = -70$ ,  $b^2 - 4ac = K = p^2 + E$ ,  $b^2 - 4ac' = (p + \frac{E}{2p})^2$ . De voorsprong van de tweede op de eerste reiziger op tijdstip  $u$  is  $\frac{1}{2}(au^2 + bu + c) = \frac{1}{2}(c - c') = \frac{1}{8a}((b^2 - 4ac') - (b^2 - 4ac)) = \frac{1}{8a}(\frac{E}{2p})^2$ . De auteur hoeft natuurlijk niet precies dezelfde stappen te hebben gevolgd.
  - 11 Zie F. Woepcke, *Extrait du Fakhri, traité de l'algèbre par Abou Bekr Mohammad Ben Al-haçan Alkarkhi*, Paris 1853, p. 82 no. (6). Al-Karkhi of al-Karaji (beide spellingen komen voor) liet de wortel staan.
  - 12 Een afschrikwekkend voorbeeld is het recent verschenen boek *From Eudoxos to Einstein: A History of Mathematical Astronomy* van Christopher M. Linton (Cambridge: Cambridge University Press, 2004.). Deze auteur besteedt 4 bladzijden aan Babylon, en daarna 34 bladzijden aan de Griekse sterrenkunde in de periode voor Hipparchus. Linton geeft impliciet toe dat hij de Babylonische tabletten niet zelf heeft bestudeerd, zie zijn voetnoot 11 op p. 12.
  - 13 Zie *Late Babylonian Astronomical and Related Texts, copied by T.G. Pinches and J.N. Strassmaier, prepared for publication by A. Sachs*, Providence: Brown University Press, 1955, p. [11] no. 50, Obverse. Voor een foto van het tablet zie F.X. Kugler, *Die Babylonische Mondrechnung*, Freiburg 1900, Plate 13.
  - 14 Regels 22–26 in het tablet.
  - 15 Meest recentelijk in O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts London 1955*, vol. 1, p. 106–109 (tablet no. 60).
  - 16 Voor 9 was er een speciale combinatie van drie schuine spijkers, die de negen verticale spijkers vervingen.
  - 17 De maart met index 2 is een dertiende maand in het Babylonische jaar.
  - 18 ACT vol. 1, p. 106–109.
  - 19 Hier is een korte samenvatting. De Babyloniërs verdeelden een etmaal in 360 graden. Deze graden worden sexagesimaal genoteerd, dus bijvoorbeeld 182 graden als  $3 \ 2$  graden. We gebruiken hier het begrip synodische maand in de betekenis van periode tussen twee opeenvolgende volle manen. De tweede kolom is (een eerste benadering van) de lengte van 223 opvolgende synodische maanden, te beginnen met de volle maan in de volgende maand. Deze 223 maanden zijn altijd 6585 dagen plus een rest van ongeveer een derde dag. Alleen de rest staat aangegeven. In de vierde kolom staat het tijdsinterval tussen zonsopgang en zonsondergang in het midden van de maand aangegeven. De  $3 \ 13 \ 55$  in de eerste regel betekent  $3 \times 60 + 13 + 55/60$  van de graden waarin een etmaal werd onderverdeeld, hetgeen overeenkomt met 12 uur 55 minuten en 40 seconden. Omdat dit tijdsinterval langer dan 12 uur is, kunnen we zien dat het midden van 'april' 147 inderdaad na het begin van de lente viel. In de vijfde kolom staat de afstand van het middelpunt van de maanschijf tot de ecliptica, gemeten in 'gerstekorrels' (1 gerstekorrel is 50 boogseconden). De zesde kolom geeft de grootte van de verduistering in 'vingers' (1 vinger is 5 boogminuten). In de achtste kolom staat een eerste benadering van de lengte van vijf of zes synodische maanden die volgen op deze maand, dat wil zeggen de periode tussen deze maansverduistering en de volgende. Deze lengte is een geheel aantal dagen plus een breukdeel, en alleen het breukdeel staat aangegeven. Deze kolom is problematisch. Zie O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts*, Princeton 1955, vol. 1, p. 44–61, 106–109. Voor een recent overzicht van de Babylonische sterrenkunde zie Hermann Hunger, David Pingree, *Astral Sciences in Mesopotamia*, Leiden: Brill, 1999. Gemakkelijker leesbaar is B.L. Van der Waerden, *Science Awakening Part II*, Groningen: Noordhoff, 1968.
  - 20 Zie Gerhard Dohrn-Van Rossum, *History of the Hour*, Chicago 1996, p. 282–284.
  - 21 Voor de Islamitische uitvindingen van decimale breuken zie voor al-Uqlīdisī: A.S. Saidan, *The Arithmetic of Al-Uqlīdisī*, Dordrecht: Reidel, 1978, p. 114, 481–485; voor al-Samaw'al al-Maghribī: R. Rashed, L'Extraction de la Racine  $n$ -ième et l'Invention des Fractions Décimales (XI<sup>e</sup>-XII<sup>e</sup> Siècles), *Archive for History of Exact Sciences* 18 (1978), p. 142–145; voor al-Kāshī: Paul Luckey, *die Rechenkunst bei Ġamsīd b. Mas'ūd al-Kāshī mit Rückblicken auf die ältere Kunst des Rechnens*, Wiesbaden 1951, p. 102–114. Zie voor Europa J. Töpke, *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. Auflage, Band 1: *Arithmetik und Algebra, vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich, Helmuth Gercke*, Berlin: Walter de Gruyter, 1980, p. 116–117.
  - 22 Handschrift Meshed, Āstān-e Qods Reżawī, no. 5389, f. 46, zie *Fehrest-e Ketābhāne-ye Āstān-e Qods Reżawī, ta'līf Aqā-ye 'Abd al-'Alī Ektābī*. Meshed: A.H. (solar) 1305–1350/1926–1971 CE (vols. 7–8 zijn geschreven door A. Gulchīn Ma'ānī), vol. 3, p. 52, no. 162, vol. 8, p. 42. Zie voor editie en Duitse vertaling van de tekst: Paul Luckey, *Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-Risāla al-Muḥīṭiyya) von Ġamsīd b. Mas'ūd al-Kāshī*, Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften Jahrgang 1950 no. 6, Berlin 1953, p. 22, 86.
  - 23 Boris Rosenfeld and Jan P. Hogendijk, A Mathematical Treatise Written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg, *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 15 (2002/03), p. 25–65, zie p. 46 regel 20–21, p. 61 regel 8. Het Arabisch is: bil-<sup>c</sup>amal alladhī stanbaṭnāhu bi l-quwwati l-ilhāmīyya <sup>c</sup>ani l-ḥadrati l-ṣamadiyya.
  - 24 De grote rekenaars in de Islamitische cultuur waren sterrenkundigen, gewend aan het rekenen in het zestigtallig stelsel. Zij gaven de sexagesimalen aan met met de letters van het Arabisch alfabet, volgens hetzelfde systeem dat hun Griekse voorgangers hadden gebruikt om in het Griekse alfabet te rekenen. Al-Kāshī was gewend met gehele getallen en breuken in het zestigtallig positiestelsel te rekenen, en het eindresultaat eventueel naar het tientallig positiestelsel om te zetten.

**Dirk van Dalen***Faculteit Wijsbegeerte**Universiteit Utrecht**Postbus 80126**3508 TC Utrecht**dvvdalen@phil.uu.nl***Freudenthal 100 symposium**

# Amsterdamse jaren

Ter ere van de honderdste geboortedag van Hans Freudenthal is op 15, 16 en 17 september een symposium gehouden. Dirk van Dalen, hoogleraar historische aspecten van logica en filosofie van wiskunde aan de Universiteit Utrecht en biograaf van Brouwer, sprak op het symposium over Freudenthal. Bij zijn werk voor de biografie en voor het Brouwerproject heeft hij Freudenthal beter leren kennen, als bron van historische feiten en als kenner bij uitstek van de relevante wiskunde. In dit artikel gaat hij in op de wiskundige zijde van Freudenthals Amsterdamse jaren; de andere aspecten zijn door Freudenthal zelf beschreven in het boek 'Schrijf dat op, Hans'.<sup>1</sup>

Eerst een persoonlijke opmerking: wat mij in Freudenthal zo bijzonder trof was zijn combinatie van oude wiskundecultuur, en van vernieuwing. Om een voorbeeld van dat laatste te noemen: ik denk dat hij de eerste in Nederland was die logica met het volledigheidsbewijs van Henkin doceerde, en dat in een tijd dat de logica elders gegeven werd als een brei van tautologieën. Ook zijn persoonlijke stijl met paradoxale en provocerende salvo's fascineerde mij. Iemand die zo levendig blijft moet wel een direct inzicht in de hogere samenhang der dingen hebben.

**Dass soll man doch nicht Glauben**

Laat mij een voorbeeld aanvoeren ter illustratie van zijn schoktechniek. In de goede oude tijd werden hoogleraren in Oberwolfach soms door hun echtgenoten vergezeld. Dat had een zekere sociale functie; de jongere deelnemers waren veelal te voorzichtig (en voorzover ze aan een Duitse universiteit studeerden, onderdanig). 's Avonds vormde zich gewoontegetrouw een kring waar over van alles en nog wat gesproken werd. Freudenthal was daar het natuurlijke middelpunt; vooral de dames konden hem aan de praat krijgen met uitroepen als "Aber Herr Freudenthal, dass soll man doch nicht glauben." En dat was dan de aanleiding voor het volgende verhaal.

Bij een gelegenheid vond een van de dames dat wiskundigen uitzonderlijk begaafd en geleerd moeten zijn — om over zulke moeilijke onderwerpen met zoveel kennis van allerlei zaken te kunnen voordragen! Dit liet Freudenthal niet passeren, Nee, zei hij, het is veel moeilijker voor mensen uit de letterenfaculteit, voor historici, enzovoort. Die moeten hun voordrachten helemaal uitschrijven, letten op de formuleringen, jaartallen — kortom al die dingen waar een wiskundige niet naar omkijkt bij een voordracht of college. Freudenthals betoog liet niet na indruk te maken,

zodat na enige tijd het gehoor vond dat de alpha's het veel zwaarder hadden.

Op dat punt trok Freudenthal nog eens krachtig aan zijn pijp, en besloot de discussie met "Aber die brauchen natürlich nicht zu denken."

**De betovering van Brouwer**

Op 15 november 1930 kon men op het Berlijnse Bahnhof Friedrichstraße een groepje wisselende natuurkundestudenten aantreffen dat een hunner uitgeleide deed naar het buurland Nederland. Deze jongeman, Hans Freudenthal, had zijn wiskunde opleiding, inclusief de promotie, voltooid aan de Berlijnse universiteit. Met enig recht kan men zich afvragen waarom een modern opgeleide jonge wiskundige niet eerder een carrière zou opbouwen in Duitsland, waar behalve de twee topcentra — Göttingen en Berlijn — op vele universiteiten uitstekend onderzoek werd gedaan.

Om dat te begrijpen moeten we teruggaan in de geschiedenis. In de jaren 1910–'20 had Amsterdam zich in één slag een wereldfaam verworven door het baanbrekende werk van L.E.J. Brouwer. Brouwer had zich zelfstandig een reputatie als topologisch genie verschaft, en in de jaren '20 was de Brouwerse topologie voor



Brouwer betreedt het Mathematisch Instituut bij het afscheid van Mannoury en Hendrik de Vries.

zover begrepen, dat ze in Berlijn vaste voet kreeg; Bieberbach, Hopf, Erhardt Schmidt en anderen ontdekten en onderwezen de methoden en perspectieven van de nieuwe topologie. En toen Brouwer zijn aandacht verlegde naar de grondslagen van de wiskunde, vond ook zijn intuïtionistische wiskunde gehoor in Berlijn.

Zijn voordrachten op Duitse congressen en seminaria culmineerden in 1927 in een cursus intuïtionistische wiskunde in Berlijn. Brouwer maakte furore in Berlijn. Het onderwerp was daar dan ook niet geheel onbekend; Karl Löwner had al eerder college differentiaal- en integraalrekening gegeven, op intuïtionistische leest geschoeid. Een van de Berlijnse toehoorders, de jonge wiskundige Hans Freudenthal, had zich mede onder invloed van Löwner al wegwijs gemaakt in de mysterieuze problematiek van het intuïtionisme. En zo was hij in staat om zinnige vragen te stellen naar aanleiding van het college, en om op niveau te discussiëren. Brouwer was onder de indruk, en na overleg met Heinz Hopf besloot Brouwer Freudenthal een assistentschap in Amsterdam aan te bieden.

Dat Freudenthal de gelegenheid met beide handen aangreep was niet zo wonderlijk; Brouwers reputatie was binnen de wiskunde op zijn hoogtepunt, en er ging een bijna onvoorstelbare betovering van hem uit. Daarbij moet men bedenken dat Amsterdam in die tijd het Mekka van de topologie was.

De Amsterdamse universiteit kon zich namelijk verheugen op een wiskundecentrum

dat zich kon meten met de grote buitenlandse centra. De magiër met zijn topologische mirakels en van de radicale zuivering van de wiskunde had in het midden van de jaren twintig plotseling de Amsterdamse topologische school uit de grond gestampt. Waarschijnlijk tot zijn eigen verbazing, want schoolvorming en organisatie was wel het laatste waar Brouwer in geïnteresseerd was. De verschijning in 1923/24 van Urysohn en Alexandrov op het wiskundig toneel was voor Brouwer de aanleiding geweest om een groep topologen om zich te verzamelen in Laren-Blaricum. Met Alexandrov, Hurewicz, Menger, Newman, Vietoris, Wilson (en tijdelijk Emmy Noether) werd in korte tijd een ongekende activiteit in de topologie ontplooid. Helaas liet de financiering het al snel afweten, zodat na enige tijd alleen Hurewicz in Amsterdam achter bleef. Brouwer zelf nam wel deel aan de seminars en discussies, maar zijn eigen werk was uitsluitend intuïtionistisch van aard. Waar in het buitenland Brouwers intuïtionisme met enige reserve werd gevolgd, was in Duitsland naast het gebruikelijke onbegrip een zekere appreciatie voor Brouwers ideeën te constateren.

#### Amsterdam

Na het verkrijgen van de doctorsgraad, een noodzakelijke voorwaarde voor zijn benoeming, vertrok de jonge topoloog Freudenthal naar Amsterdam; hij voelde zich in Amsterdam als een vis in het water. De stad had een kosmopolitische allure, met een sterk Duitse component. Zoals hij opmerkte werd bui-

ten Duitsland nergens zoveel Duits op straat gehoord. De bekende 'Duitse dienstmeisjes' waren daar niet vreemd aan. Verder was er een levendige joodse gemeenschap, waarin alle sociale graderingen vertegenwoordigd waren. Amsterdam was wel geen Berlijn maar er viel best te leven. Nu had Brouwer, om het zacht uit te drukken, een sterke voorkeur om zijn medewerkers om zich heen te hebben in Laren-Blaricum. In de tijd van de topologische school woonde Alexandrov 'om de hoek' en ook de andere deelnemers waren in de buurt gevestigd. En ook Freudenthal gaf — niet van harte — gevolg aan Brouwers wens. Hij verruilde zijn kleine hotel naast het Concertgebouw<sup>2</sup> voor een hospita in Laren.

Voor iemand die Berlijn gewend was, bleek 't Gooi wel wat te veel van het goede. Freudenthal zag zich verstoken van de geneugten van de grote stad en hij verlangde terug naar Amsterdam. Het kostte moeite om Brouwer zo ver te krijgen, maar uiteindelijk stemde deze toe in Freudenthals verhuizing, mits hij een telefoonaansluiting nam, omdat Brouwer hem 'op ieder tijdstip, dag of nacht' moest kunnen bereiken. Na een volhardende strijd met de PTT kreeg Freudenthal uiteindelijk een aansluiting, en — hij is nimmer door Brouwer opgebeeld.

Wat viel er voor Freudenthal te doen in Amsterdam? Een instituut was er nog niet, dus alle wiskundigen waren op zich zelf aangewezen. Men kwam elkaar tegen bij colleges of in de leeszaal, en verder bij de maandelijkse vergaderingen van het Wiskundig Genootschap. Het gezelschap viel hem niet mee, Hendrik de Vries en Mannoury waren aimabele mensen, maar wiskundig tamelijk in de luwte. De uit Oostenrijk afkomstige wiskundige Roland Weitzenböck timmerde meer aan de weg, maar hij was een nauw gespecialiseerd man die een geduchte faam had op het gebied van de invariantentheorie. Zijn boek dat de *state of the art* van de jaren twintig weergaf genoot internationale bekendheid. Vrijwel alle Amsterdamse studenten werden er mee grootgebracht. Freudenthal, die niet gewend was om zijn mening in sierlijke arabesken te verpakken, beschreef Weitzenböck later als volgt; "Hij kon geen wiskunde begrijpen behalve invariantentheorie. Hij vroeg mij eens om iets over de Galoistheorie uit te leggen; Van der Waerden was het met mij eens, hij kon geen enkel conceptueel bewijs begrijpen." Freudenthal, lid van een nieuwe generatie met een andere smaak waar het conceptuele en abstracte wiskunde betrof, had waarschijnlijk gelijk. Toch moet men bedenken dat Weitzenböck ook colleges over groepentheo-

rie en 'algebraïsche theorie der lichamen' gaf, die weliswaar het niveau van Van de Waerden niet haalden, maar er toch wel mochten wezen.

Men zou verwachten dat Freudenthal ook commentaar leverde op de beide andere hoogleraren, te weten Hendrik de Vries en Mannoury. Kennelijk vond hij hen niet belangrijk genoeg om veel woorden aan te besteden. Privé gaf hij als zijn mening te kennen dat hij in de signifi- van Mannoury niet veel zag.

De reputatie van de Amsterdamse wiskunde was afkomstig van Brouwer. Tot Freudenthals verbazing waren de studenten zich nauwelijks bewust van Brouwers werk en internationale status. De impetus van de Amsterdamse school 1925/26 was al weer weggeëbd, en topologie behoorde niet langer tot het onderwijsaanbod.

De slimste student van de jaren twintig, Bartel Leendert van der Waerden, kwam er pas in 1924 in Göttingen achter dat Brouwer een groot topoloog was.<sup>3</sup> Niemand van de studenten was daarvan volgens hem op de hoogte.

#### Het Nederlandse wiskundebedrijf

Het moet voor Freudenthal, Komende uit Berlijn, met zijn sterke wiskundeopleiding (Bieberbach, Schmidt, I. Schur, von Mises, Löwner, von Neumann, Hopf), een wat wonderlijke ervaring geweest zijn, het Amsterdamse wiskundebedrijf van dichtbij mee te maken. Hij vond het Hollandse academische

bestaan maar merkwaardig. In een brief aan de Duitse studiebeurzeninstelling schreef hij dat de Hollandse student vaak niet meer dan zes tot acht uur per week college liep, en dat het geen uitzondering was dat hoogleraren twee tot vier uur per week college gaven. En, voegde hij daar aan toe, de studenten klaagden zich niettemin over overbelasting! Maar dat kwam misschien omdat ze, juist door het geringe aantal college-uren, veel uit de literatuur moesten halen.

Van de Hollandse student had Freudenthal aanvankelijk niet zo'n hoge dunk: "Het niveau van de Hollandse studenten is lager dan dat van de Duitse; dat hangt samen met het wat logge, trage volkskarakter. De Hollandse student werkt echter vlijtig, begrijpt daarentegen zeer langzaam. Zelfstandig productief werk vindt men weinig bij hen."

#### De Mengerkrieg

Freudenthal was niet van zins om zich neer te leggen bij het zachte kabbelen van het Nederlandse wiskundige bestaan, direct na zijn aankomst in Amsterdam organiseerde hij met Hurewicz een seminarium *Combinatorische topologie*.

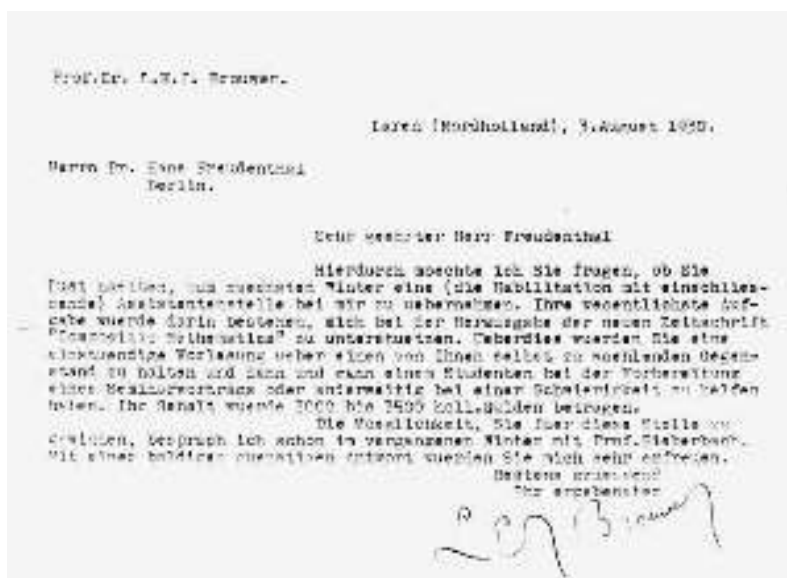
De afstand tussen docenten en studenten ervoer hij als tamelijk groot. De student reageerde weinig, zowel in als na het college. Een 'prediker in de woestijn' voelde hij zich vaak. Tegenover zijn *Doktorvater* Hopf liet hij meer het achterste van zijn tong zien: Brouwer had hem direct aan het werk gezet — hij

moest zich in de dimensietheorie inwerken. Hij moest zich in Brouwers woorden voor de 'Mengerkrieg' bewapenen.

Die Mengerkrieg was in wezen een strijd om de prioriteit van de dimensie definitie. Het dimensiebegrip is nu zo gewoon geworden dat de moderne wiskundige zich nauwelijks kan voorstellen dat men zich daar in de jaren twintig zo druk om maakte. Er waren drie gegadigden: Brouwer, Urysohn en Menger. Brouwer had in 1913 al een juiste definitie gegeven (en aangetoond dat die 'correct' was), Urysohn en Menger hadden tussen 1921 en 1926 juiste alternatieve definities gegeven. Urysohn erkende Brouwers prioriteit, maar Menger wilde de prioriteit niet zo maar opgeven. Een onverkwikkelijke strijd volgde, waarvan de laatste stuip trekking nog in 1932 plaatsvond. Freudenthal pluisde later nauwkeurig uit hoe de zaken lagen, en hij kwam tot de ondubbelzinnige conclusie dat Brouwer gelijk had. De strijd werd met grote heftigheid gevoerd, ook Freudenthal, de assistent van Brouwer, kreeg het te verduren. In het *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* beschuldigde Menger "een meneer Freudenthal wiens naam mij niet bekend is vanwege enig noemenswaardig wetenschappelijk resultaat" van incompetentie en partijdigheid. Freudenthal had een realistische kijk op de hele zaak. Na nauwkeurige studie van het werk van Urysohn en Menger was zijn conclusie dat Urysohn als wiskundige Menger veruit overtrof. "Urysohn maakt in zijn werk



Hendrik de Vries verlaat na zijn afscheid het oude Mathematisch Instituut in de Roeterstraat (1937).



Uit de briefwisseling over het triangulatieprobleem



de indruk van een groot genie, terwijl Menger echter slechts als een (in ieder geval zeer begaafd) talent te voorschijn komt.”

### Topologie en intuïtionisme

De taak van een assistent van Brouwer was niet uitzonderlijk zwaar, eerder licht. Brouwer gaf Freudenthal topologische problemen op, maar liet hem vrij bij de uitwerking. Sommige waren volgens Freudenthal veel te ambitieus. Eigenlijk was hij naar Amsterdam gekomen om Brouwers intuïtionistische programma te ondersteunen. Bij de Berlijnse voordrachten had hij een goede indruk gemaakt door ter zake doende vragen en discussies. Hij werkte ook wel van tijd tot tijd op het gebied van de intuïtionistische wiskunde, onder andere door alternatieve bewijzen van stellingen van Brouwer te geven. In 1930 publiceerde hij een prachtig artikel over intuïtionistische topologie. In datzelfde jaar verscheen een discussie tussen hem en Heyting over intuïtionistische logica, over de implicatie om precies te zijn. Hij nam daarbij een radicaal standpunt in dat dicht bij Brouwers opvattingen van 1907 lag. Heyting, die toen al de bewijsinterpretatie gepubliceerd had, nam een standpunt in dat thans gangbaar is.

Hoewel hij geen grondslagenspecialist geworden is, nam Freudenthal toch de lessen van Brouwers intuïtionisme ter harte; in zijn eigen woorden: “Ik moet zeggen dat het grootste deel van het werk dat ik gedaan heb correct is vanuit intuïtionistisch standpunt.”

Het onderzoek van Freudenthal sloot in zijn Amsterdamse jaren goed aan bij dat van Hurewicz. Deze schiep de homotopietheorie in Amsterdam en Freudenthal was zijn eerste

toehoorder. Samen ontwikkelden zij de theorie verder. Freudenthal paste de theorie toe, jaren voor anderen.

### De Compositio Mathematica

Naast zijn eigen onderzoek, besteedde Freudenthal veel tijd aan de redactie van *Compositio Mathematica*, het tijdschrift dat Brouwer opgericht had na zijn exit uit de *Mathematische Annalen*. In de praktijk deed Freudenthal het werk voor *Compositio*. Brouwer was wel de verantwoordelijke redacteur, maar hij liet veel aan Freudenthal over. Nu en dan refereerde Brouwer zelf een artikel, of correspondeerde met auteurs en referees, maar zijn invloed bleef tamelijk beperkt. Brouwers deelname aan het onderwijs was weliswaar consciëntieus en degelijk, maar nogal conventioneel. Hij gaf colleges projectieve meetkunde, kanonische vergelijkingen, en nu en dan intuïtionistische wiskunde. Brouwers aanwezigheid op het instituut werd echter krachtig beperkt door zijn betrokkenheid in een beleggingsaffaire — de befaamde Hongaarse badzaak. Hij had zich voorgenomen om frauduleuze handelingen aan het licht te brengen en te bestrijden, dat kostte helaas onevenredig veel tijd. Hij reisde nu en dan naar Budapest om persoonlijk onderhandelingen te voeren en een dreigende catastrofe af te wenden. Zijn studenten werden daar de dupe van, veel colleges vielen uit, en soms zat het gehoor te wachten terwijl Brouwer in Budapest was.

De Amsterdamse collega's bekeken Brouwers beleggingsavonturen hoofdschuddend. Freudenthal schreef in 1931 aan Hopf: “Het is Brouwer al gelukt om een paar bisschoppen

in de gevangenis te krijgen; die zitten daar, om zo te zeggen, de straf uit die hij aan Koebe, Hilbert en Menger toegedacht had.”

In een van zijn brieven aan Hopf (25-11-1930) berichtte Freudenthal dat hij bij Brouwer op bezoek geweest was. “Ich war Sonntag bei Brouwer, ich muss sagen dass dieser Nachmittag meinen grössten Eindruck war, den ich jemals bisher hatte. Ich habe mich B. immer als Bonzen vorgestellt. Davon ist keine Spur, er ist noch viel Kameradschaftlicher als ich ihn in Göttingen<sup>4</sup> kennengelernt habe. Trotzdem habe ich noch niemals bei einen Menschen so den Eindruck des Groszen gehabt wie bei Brouwer. Ich bin jetzt restlos befriedigt von meinem Entschluss nach A. zu gehen.”

Freudenthal was verrassend snel ingeburgerd in Nederland. Hij gaf al gauw college in het Nederlands en hij was succesvol in het maken van contacten. Nu was de wiskunde gemeenschap destijds veel kleiner en gemakkelijker te leren kennen, maar ook daar buiten kende hij heel veel mensen. Een kamergeleerde was hij zeker niet. Hij bewoog zich gemakkelijk in gezelschap van fysici, chemici, psychologen, kunstenaars, didactici, historici, ... Eigenlijk was de wiskunde te klein voor hem, hij had overal een mening over, en hij kon die nog verdedigen ook. Zijn onderwijs was modern, te modern volgens sommigen. Na het emeritaat van Hendrik de Vries was hem het college analyse opgedragen, en dat was te merken ook. De natuurkundige Clay beklagde zich eens dat zijn studenten nog niet eens wisten wat een exponentiële functie was. “Enfin, die hadden ze bij mij geleerd, op de manier van een homomorfisme, maar je vindt

vanzelfsprekend bij de natuurkundigen mensen die zeuren dat ze niet weten wat een exponentiële functie is.” Onder Freudenthals directe contacten zijn zeker de beide Ehrenfests en Dijksterhuis te noemen. Freudenthals colleges werden als ‘moeilijk’ beschouwd door de studenten. De betere studenten dweepten met de Freudenthal aanpak, maar er waren genoeg studenten die liever leerden differentiëren en integreren op de manier van, zeg, De Vries of Schuh. De wiskundehoogleraren waren ook niet helemaal gelukkig met Freudenthals vernieuwingsdrang: ook Brouwer vond dat zijn assistent er wel erg geavanceerde praktijken op nahield. Toen hij in 1937 het college analyse van Mannoury en De Vries overnam schoeide hij dat college “helemaal op een nieuwe leest, dat was een beetje overdreven, dat zou ik nu niet meer doen, dat zat hem toch niet goed. Daar kon Brouwer niet in mee. Dan zei hij, dat kun je in Duitsland doen, dat kun je in Nederland niet. Hij had het idee, in Duitsland was het niveau veel hoger, daar kun je heel andere colleges geven dan in Nederland etcetera. Niet dat hij mij iets in de weg legde maar hij was een beetje wantrouwend — moet je nu wiskunde op die manier geven, dan kwam er een begrip als compact als vanzelfsprekend voor, dat had hij niet geleerd, ik ben een van de eersten in de wereld geweest die dat begrip compact in het analyseonderwijs heeft ingevoerd. En het begrip volledig. Die wiskundecolleges die ik gegeven heb zijn lang niet zo gek geweest.”

De formele positie van Freudenthal was die van assistent met een privatdocentschap. Op 28 mei 1931 hield hij zijn openbare les. Brouwer had het privatdocentschap als equivalent van de Duitse *Habilitation* opgevoerd. Dat was weliswaar niet officieel, maar het gaf, om zo te zeggen, het recht om college te geven. Het verschafte in ieder geval in Duitsland het aanzien dat bij een ‘Habil’ hoorde. Freudenthal was toegelaten als privatdocent voor analyse, groepentheorie en topologie. Dit gaf hem ruimschoots gelegenheid moderne wiskunde te doceren. Veel later (1937) werd Freudenthals assistentschap omgezet in de positie van conservator. Dit lijkt een mooie bevordering, maar in feite was het een bezuinigingsoperatie. Mannoury en De Vries waren met emeritaat gegaan, en de hooglerarsposen werden niet gecontinueerd. In hun plaats kwam een lector (Heyting) en een conservator. Gezien de algemene malaise was zelfs een conservatorspost niet zo gek. In ieder geval was het een vaste positie, maar voor een man met Freudenthals staat van dienst was het wel wat mager. Brouwer beloofde hem weliswaar



Hans Freudenthal (1935)

foto: collectie M. Freudenthal

een lectorspost als de financiën het zouden toelaten, maar van beloften kan de kachel niet branden.

Het voeren van de redactie van *Compositio* was voor Freudenthal een leerzame en ook lonende bezigheid. Hij moest de meest uiteenlopende onderwerpen bekijken, waarbij extreme specialisaties buiten zijn gebied natuurlijk aan derden werd overgelaten. Verder correspondeerde hij met de halve wereld, en dat leverde ook een behoorlijke naam bekendheid. Hij kende in ieder geval zijn eigen generatie van Duitse wiskundigen goed, maar ook daarbuiten werd zijn naam bekend. De band met zijn directe werkgever, Brouwer, was losjes. Freudenthal was best tevreden met een bestaan waarin hij zo goed als eigen baas was. De enige wolken aan de horizon werden veroorzaakt door zijn overeenkomst in karakter met Brouwer. Freudenthal was een uitermate ondernemend en ambitieus jong mens, hij las veel, correspondeerde, en liep over van ideeën. Niet alleen in de wiskunde, maar ook op allerlei andere gebieden. Net als Brouwer, in diens *Sturm und Drang*-jaren, borrelde hij van plannen en onderzoeksideeën. En net als Brouwer werd hij geconfronteerd met een begaafde superieur, die niet zo'n

haast meer had. Waar Brouwer zich beklagde over de bezadigdheid van Korteweg, vond Freudenthal het een verlies dat zo'n geniaal mens als Brouwer zich onledig hield met de Sodalitas-affaire en universiteitspolitiek. Hij paste wel op om zoiets te laten blijken aan Brouwer. De grote man had niet langer de behoefte om aan het publicatiecircuit deel te nemen; hij hield zich naast zijn maatschappelijke functies en activiteiten vooral bezig met de diepere fundamente van zijn intuïtionisme. En als er iets was waar hij allergisch voor was, dan was het wel een actieve slimme jongere die hem wilde opjagen; de relatie met Van der Waerden en Van Dantzig was om deze reden al op de klippen gelopen. Freudenthal had het wat gemakkelijker, hij kon in feite zijn gang gaan, en er was geen reden om Brouwer voor de voeten te lopen.

### Het triangulatieprobleem

Toch liep het wel eens mis. Op 24 april 1937 hield Brouwer op de jaarvergadering van het Wiskundig Genootschap de voorzittersvoordracht. Het onderwerp was: *Het triangulatieprobleem van algemene n-dimensionale variëteiten*. De voordracht moet tamelijk onbegrijpelijk geweest zijn, mede omdat Brouwer

al sinds lang de gangbare presentatiestijl er aan had gegeven. Hij had alles verpakt in een intuïtionistisch jargon, waardoor de toch al niet eenvoudige materie nog schimmiger werd. Freudenthal zei later; “Ik hoorde de voordracht en ik had nog nooit van dit idee gehoord. Ik kon zijn benadering niet gebruiken, ik heb het nooit begrepen. Ik schreef een eigen artikel, waarin in feite een fout zat.” Maar zo gemakkelijk ging dat allemaal niet. Toen Freudenthal vertelde dat hij zijn eigen bewijs van de triangulatie van differentieerbare variëteiten gevonden had, en dit met verwijzing naar Brouwers bewijs wilde publiceren, gingen er bij Brouwer bellen rinkelen. Brouwer, die zich nog goed herinnerde hoe Menger jaren van zijn leven vergalde met zijn aanspraak op de prioriteit voor de dimensietheorie, zag plotseling allerlei spookbeelden. Een herhaling van het dimensiedrama was meer dan hij kon verdragen. Hij begon zich te verweren tegen een denkbeeldige aanval. Freudenthal meende dat er geen probleem was; hij zou naar Brouwers lezing en artikel verwijzen en daarmee de prioriteit vaststellen, en Brouwer zou zijn artikel publiceren. Deze oplossing was Brouwer veel te eenvoudig. In de eerste plaats had hij nog geen tijd om het artikel af te maken, maar zelfs al zou hij het afmaken, dan nog zouden boze tongen kunnen beweren: “Hij heeft wel beweerd in zijn lezing dat hij de triangulatie stelling voor differentieerbare variëteiten bewezen heeft, maar wie zegt dat dat zo was, en misschien heeft hij Freudenthals oplossing op de een of andere manier gebruikt!” Kortom, elk voorstel had zo zijn moeilijkheden.

Er was natuurlijk geen sprake van dat Freudenthal Brouwers prioriteit wilde stelen. In tegendeel — Freudenthal had tegenover derden alleen Brouwers bewijs genoemd en niet zijn eigen bewijs. In februari 1939 had Lefschetz in een gesprek met Freudenthal laten vallen dat Whitney zich met het probleem bezig hield; Freudenthal, die dacht, dat een specialist als Whitney binnen enkele jaren of maanden het probleem wel opgelost zou hebben, had toen Brouwer aangespoord om voort te maken.

Dit was echter een totaal verkeerde manier om Brouwer aan te pakken. Iedere druk van buiten beantwoordde hij met wantrouwen en uitvluchten. Het slot was dat Rosenthal, die toen juist Duitsland ontvlucht was, als intermediair optrad bij een uitwisseling van manuscripten. Dit probleem werd uiteindelijk opgelost, zij het na vele maanden. Bij al zijn intelligentie was Brouwer kennelijk niet in staat om te zien dat Freudenthal zich nimmer tot de methoden van Menger zou verlagen.

De mooiste tijd van Freudenthal in Amsterdam spoedde zich nu ten einde. De oorlogsdreiging nam toe; Freudenthal, die zich nog steeds niet had later naturaliseren (en die als Jood in Duitsland ‘ausgebürgert’ was) moest zich op het politiebureau melden — buitenlanders van Duitse afkomst moest je in de gaten houden.

### De tweede wereldoorlog

Na de bliksemoverwinning van de Duitsers begon de ellende eerst goed. De universiteit kon Freudenthal niet beschermen, en in november volgde zijn ontslag als conservator en privaattoecent. Vanaf dat moment was hij freelance wiskundige. Zijn bemoeienissen met *Compositio* waren aan hun eind gekomen toen Brouwer in overleg met Noordhoff besloot om het tijdschrift voor de duur van de oorlog niet te laten verschijnen. De internationale contacten zouden onmogelijk worden, en het idee om onder de Duitse censuur te werken lokte niet. Wel bleef Freudenthal topologische promovendi begeleiden. J. de Groot, F. Loonstra en A. van Heemert waren de facto zijn promovendi. Ook manuscripten van zijn leerlingen bewerkte en behandelde hij verder. In een geval leidde dat tot een botsing met Brouwer. Deze had een grote zending van artikelen van De Groot, Freudenthal en Loonstra gekregen voor de *Indagationes*. Vervolgens was Brouwer op eindexamentournee gegaan, en had geen tijd gehad om de artikelen te bekijken.

Toen Freudenthal namens de auteurs hem verzocht voort te maken met het aanbieden, omdat zij ‘eventueel andere beschikkingen wilden treffen’, ontplofte Brouwer: “Gij en de beide andere betrokken Heren schijnen te vergeten dat de leden der Akademie voor de *Proceedings* een tijdschriftredactie vormen, en dat tijdschriftredacties geen drukautomaten zijn.” (29-5-1942) en een dag later stuurde hij de manuscripten terug zodat de ‘ongeduldige Heren’ andere beschikkingen kunnen treffen. Dit was zo ongeveer het einde van de betrekkingen tussen Freudenthal en Brouwer. Freudenthals plaats in Amsterdam werd ingenomen door een jonge fysicus, E.M. Bruins.

De bezetting en de daar op volgende jodenvervolgving had op verschillende mensen verschillende uitwerkingen. Een algemeen erkende tactiek was ‘niet opvallen’; het lijkt wel alsof Freudenthal bewust de tegenovergestelde tactiek koos. In zijn omgang met Brouwer ging hij de confrontatie niet uit de weg, en als wiskundige bleef hij zoveel mogelijk actief. In 1942 beantwoordde hij bijvoorbeeld een van de prijsvragen van het Wiskundig Genoot-

schap. Volgens de regels waren de inzendingen anoniem, pas bij bekroning werd de envelop met de naam van de auteur geopend. Zoals ons nu niet zo zal verwonderen, werd Freudenthals inzending bekroond, en daar zou de kous mee af geweest zijn. De inzender had de eer, en hij kon beschikken over de tekst voor verdere publicatie. Echter, de autoriteiten ontdekten in 1944 dat het Wiskundig Genootschap de inzending van een Joodse auteur had bekroond! Het *Departement van Opvoeding, Wetenschap en Cultuurbescherming* zond een boze brief aan het Wiskundig Genootschap dat “Freudenthal, die een Jood is deelgenomen heeft aan een prijsvraag, en bekroond is. De Commissaris-Generaal vindt het merkwaardig dat Uw bestuur niet zoveel inzicht bezit om in zulk een geval een prijs niet te verlenen en hij behoudt zich voor het geval nader in onderzoek te nemen.” Het bestuur antwoordde dat Freudenthal al in 1942 zijn artikel ingezonden had, en dat het Wiskundig Genootschap zich strikt aan de regels voor de prijsvragen gehouden had. Het departement liet het er toen maar bij zitten.

### Een literaire prijs

In zijn autobiografisch boek vermeldt Freudenthal ook nog een excursie naar de literatuur, zo te zien half om zijn pen te testen en half om wat extra's te verdienen. Terwijl grootscheepse deportaties van joden plaats vonden, wist Freudenthal het hoofd koel te houden. Hij zette zijn onderzoek voort, en hij waagde zich op het terrein van de literatuur. Halverwege de oorlog zond hij een zojuist voltooide historische roman in bij een commissie voor literatuurprijzen. Als Jood had hij natuurlijk geen schijn van kans om mee te dingen, sterker nog, in die tijd was onzichtbaarheid een belangrijk goed. Hij zond de roman dus in onder het pseudoniem Sirolf. De commissie was onder de indruk van het werk, maar er scheen toch enig wantrouwen te bestaan — wie was die auteur, en deed het idioom niet wat Duits aan? Was het misschien een geval van plagiaat? Men besloot de auteur te horen. Hier deed zich een moeilijkheid voor, gelukkig bleek een van de Amsterdamse studenten, Willy Bloemendal, bereid voor auteur te spelen.<sup>5</sup> Het bleek niet zo eenvoudig een jury voor de gek te houden, maar Bloemendal maakte ervan wat hij kon. Uiteindelijk werd de zaak overgelaten aan een priester in de jury, die ‘goed’ was, deze was bereid het spel mee te spelen, hij bracht een positief verslag uit over meneer Sirolf. En zo werd de roman bekroond, en Bloemendal nam de prijs, 5000 gulden — een aanzienlijke som voor die tijd —

voor Freudenthal in ontvangst. Dat was overigens ook al weer een probleem, van de prijswinnaar werd verlangd dat hij aan het diner een tafelrede hield en daar had Bloemendal niet op gerekend. Tenslotte stond de namaak-auteur om 11 uur — lang na spertijd — met een aanzienlijk bedrag in contanten op straat. Freudenthal zelf zat in die tijd in het kamp in Havelte, zodat hij zijn stand-in niet kon bijstaan met raad of tekst. Het behoeft geen betoog dat niet alleen Freudenthal, maar ook Bloemendal gevaar voor eigen leven liep met deze actie. Mensen zijn wel om minder in concentratiekampen beland.

Hoe Freudenthal verder de oorlog doorkwam heeft hij beschreven in zijn autobiografische schetsen *Schrijf dat op Hans*.

### Utrecht

Toen de oorlog voorbij was rekende iedereen er op dat Freudenthal zijn positie terug zou krijgen, of preciezer, dat hij het lectoraat zou krijgen dat zijn opvolger inmiddels ten deel gevallen was. Hoewel iedere docent of medewerker die de positie van een ontslagen jood ingenomen had, automatisch tot nader orde ontslagen werd, zag Bruins kans om de zuiveringsregels te omzeilen. Een onverkwikkelijke strijd volgde, waarin veel partijen zich nu

eens correct en dan weer dubbelzinnig opstelden. Het slot van alle besprekingen, beloften en procedures was, dat Bruins bleef zitten, en Freudenthal een leerstoel in Utrecht kreeg. Een periode waarin met name Brouwer Freudenthals rehabilitatie, dat wil zeggen benoeming tot lector in Amsterdam, tegenwerkte. Hij spande zich in om een leerstoel voor hem te vinden buiten Amsterdam, met in zijn achterhoofd het principe dat later in *Fiddler on the roof* door de Rabbi uitgesproken werd als “God bless the Czar, but keep him far away from here.” Echter, ook Freudenthals vrienden konden zich niet onttrekken aan een belangenstrijd waarin Freudenthal uiteindelijk aan het kortste eind trok. Iedereen wilde wel een baan in Amsterdam, en toen het duidelijk werd dat het Mathematisch Centrum daar zou komen, werd het medeleven met Freudenthal al snel getemperd.

Terugziend kan men zich afvragen of de uiteindelijke oplossing slecht voor hem uitpakte. Het lijkt mij van niet. Maar voor Freudenthal zelf was het een erekwestie geworden, die niet naar behoren opgelost was.

Hij was nog het meest teleurgesteld door de houding van Brouwer, die hem verre van netjes behandeld had. Niettemin behield hij een bewonderenswaardige objectieve kijk op

zijn vroegere leermeester en werkgever. Na Brouwers dood publiceerde hij een aantal gedenkschriften en necrologieën waarin hij de verdiensten van Brouwer, en zijn ongeëvenaarde uitstraling recht liet wedervaren. Ook zijn editie van het deel *Topologie* van de verzamelde werken was een posthuum eerbewijs, dat slechts bewondering en geen spoor van rancune vertoonde. De wijze waarop Freudenthal de tegenslagen uit het verleden verwerkte kenmerkt in mijn ogen een groot man, spontaan in reacties en bezonken in retrospectie.

De geschiedenis heeft de neiging het verleden te egaliseren met een deken van doorwrocht commentaar, waardoor uiteindelijk alleen min of meer brave burgers lijken te hebben bestaan. Freudenthal was zeker een man met sterke burgerlijke deugden, maar het persoonlijke landschap van Freudenthal was beslist niet het vriendelijke glooiende van de rustige burger; zijn levenslandschap was doorsneden door bruisende beken, bergketens met stijle pieken, diepe kloven. Hij leefde fel en tolereerde geen halfzachtheid, in de wiskunde zo min als in het leven, maar hij wist niettemin zijn evenwicht te bewaren en de rust te vinden die bezinning vereist. ↵

### Noten

- 1 Mijn bronnen zijn voornamelijk het genoemde boek, interviews en de Brouwer biografieën.
- 2 Dit voormalige Hotel Rijnders bestaat nu nog onder de naam *Inner Amsterdam Hostel*.
- 3 In zijn woorden, “dat Brouwer wat aan topologie

gie gedaan had”.

- 4 Een schrijffout misschien? Berlijn lijkt meer voor de hand te liggen, maar misschien had de ondernemende Freudenthal in 1926 Brouwers voordracht in Göttingen bijgewoond.

- 5 Bloemendal trok zich het lot van Freudenthal aan, hij ontraadde hem sterk zich bij het kamp in Havelte te melden. Hij werd later hoogleraar in Delft.

### Referenties

- 1 H. Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven*, Meulenhoff, Amsterdam, 1987.
- 2 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer. Een biografie. Het*

*heldere licht van de wiskunde*, Bert Bakker. Amsterdam, 2001.

- 3 D. van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist. The Life of L.E.J. Brouwer. Volume 2: Hope and Disillusion*, Oxford University Press, 2005.

Erich Ch. Wittmann

Universität Dortmund

Fachbereich Mathematik

Projekt 'mathe 2000'

44221 Dortmund

wittmann@mathematik.uni-dortmund.de

## Freudenthal 100 symposium

# Realistic Mathematics Education, past and present

Het wiskundeonderwijs richt zich al enige tijd veel te veel op toepassingen. Dit betoogt Erich Ch. Wittmann, (sinds 2004 emeritus) hoogleraar wiskundendidactiek aan de Universiteit Dortmund. In dit artikel schetst hij zijn eigen kijk op Freudenthals bijdrage aan de wiskundendidactiek en haar gevolgen. De ontwikkeling van 'Realistic Mathematics Education' ook in het na-Freudenthalse tijdperk heeft hij, sinds enkele jaren met groeiende scepsis, gevolgd. Erich Ch. Wittmann heeft Freudenthal goed gekend. Hij formuleert concrete voorstellen hoe de academische wereld er systematisch op in zou kunnen spelen.

Als onderzoeker in de didactiek van wiskunde geniet professor Wittmann bekendheid door zijn opvattingen over wiskundendidactiek als 'design science'. In het jaar 2000 heeft hij hierover op het '9th International Congress on Mathematical Education' (ICME 9) in Japan een plenaire voordracht gehouden. Reeds voor het wiskundeonderwijs op de basisschool legt hij zowel de nadruk op wiskundige diepgang als ook op bruikbaarheid in de praktijk. Samen met Gerhard N. Müller riep hij in 1987 het 'mathe 2000' project aan de Universiteit Dortmund in het leven. Via 'Das Zahlenbuch' en andere publicaties vanuit het project konden sindsdien generaties Duitse kinderen rechtstreeks van nieuwe wiskundig didactische inzichten profiteren. Ook is hij als wetenschappelijk adviseur betrokken bij het in heel Duitsland grootschalig opgezette SINUS-project. Voor zijn levenswerk onving hij in 1998 een eredoctoraat aan de Universiteit Kiel.

In 1967 the department of mathematics at the University of Erlangen organized an international colloquium in commemoration of the famous geometer K.G.Ch. von Staudt (1798–1867), who had worked as a professor at this university. Hans Freudenthal, an international expert also in the foundations of geometry, was one of the invited speakers, and I was eager to meet him for the following reason: I had just finished my studies as a prospective teacher of mathematics and physics for the Gymnasium level and was working on my doctoral dissertation in the theory of infinite

groups as a research assistant at the Department of Mathematics in Erlangen. As I was seriously considering the option of moving into mathematics education at a later point of my career I had also started to read the literature in this rapidly growing field and while doing so I developed a strong aversion against the *New Math* movement, which at that time seemed to override the teaching of mathematics at both universities and schools. In this critical situation Freudenthal's paper 'What is axiomatics and what educational value can it have?', published in 1963 in *Der Mathe-*

*matikunterricht*, was an enlightenment for me in several respects: The paper contained a convincing refutation of Bourbaki's architecture of mathematics as a basis for mathematics teaching. Moreover, the paper was written in a style I had never seen before: brilliant, witty and unconventional. For example, the hesitation of a mathematician to publish a paper according to its genesis was compared to the feelings of a man standing in the street in his underwear. Wow! The most important point, however, was the following: The paper described learning as a process that passes through different stages, each one a necessary step for the next one. The paper emphasized mathematical activity as the crucial element of learning and described 'local ordering' as a reasonable alternative to ready-made axiomatics.

At the colloquium I had a chance to talk to Hans Freudenthal for one hour, and here I learned of his fresh initiatives as the president of *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI): the foundation of an international journal in mathematics education (*Educational Studies in Mathematics Education* (ESM), first published in 1968), the organisation of the *First International Congress in Mathematics Education* (ICME 1) in Lyon in 1969, the establishment of a research group in mathematics education at the University of Utrecht (the *Instituut Ontwikke-*

ling *Wiskundeonderwijs* (IOWO), 1971). After this conversation I was fully convinced that mathematics education was 'my' field, and I was determined to follow Freudenthal's ideas.

In the following years Hans Freudenthal elaborated his vision in many articles and books, among them *Geometry Between the Devil and the Deep Sea* (presented to the Carbondale Conference on Teaching Geometry in 1969), *Mathematics as an Educational Task*, *Pupils' Achievements Internationally Compared — the IEA* (in ESM 1975), *Weeding and Sowing*, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, and finally *Revisiting Mathematics Education*, a kind of legacy.

What impressed and influenced me likewise was the work that Freudenthal initiated at the IOWO in Utrecht. Here he had gathered a team of highly creative mathematics educators, among them Aad Goddijn, Fred Goffree, Martin Kindt, Jan de Lange, Ed de Moor, Leen Streefland, George Schoemaker and Adri Treffers. The members of this team certainly stimulated him as much as he stimulated them. The special issue *Five Years of IOWO* (in ESM 1976) gives a lively account of what this group had achieved in the early seventies.

The developmental research conducted at the IOWO served as a model for our project *mathe 2000*, and so for good reasons Hans Freudenthal is one of the four arch fathers of *mathe 2000*. I wish I had been a member of the IOWO team in the early seventies. This lack was in part compensated for in the eighties when I was lucky to join Hans Freudenthal as a member of the editorial board of the journal *mathematik lehren*. For me the frequent weekend meetings of this board were like in-service courses across the unbelievably wide variety of topics that this great scholar mastered. As a rule the discussions were continued in the publisher's bar and went far into the night.

What is special about Freudenthal's approach? How do present developments in mathematics and mathematics education appear in the light of his principles?

### Mathematics as an educational task

Hans Freudenthal has taught us to look at mathematics as a field of knowledge that is firmly integrated into our culture and determined by both external ('applied') and internal ('pure') factors. His masterpiece *Mathematics as an Educational Task* bears witness to this conviction. Richness of relationships (Beziehungshaltigkeit) was a postulate to which he continuously referred, and it in-



Freudenthal at the von Staudt colloquium (spring 1967)

cluded both structural relationships and relationships with the real world. Today the cultural diversity of mathematics is endangered by both a growing specialisation within mathematics and a too strong swing of the pendulum towards applications. Departments of mathematics are less and less perceived as intellectual centres from which an orientation for mathematical education beyond narrow disciplinary boundaries is expected. Universally educated scholars like Hans Freudenthal who are able to communicate with the public are badly missing. It is quite typical that the German mathematicians needed an essayist, Hans Magnus Enzensberger, to speak for them in a famous article *Zugbrücke außer Betrieb* (drawbridge closed) published in a big newspaper. The problem could be mitigated

to some extent by collective efforts of all members of a department or of a mathematical association. But as experience shows systematic and long-term concerted actions are hard to establish because of the growing specialization and of the 'ideology of self-restriction' (Roland Fischer). Many specialists don't even notice that something fundamental has gone wrong. The long-term consequences of this cultural vacuum are hard to predict. Possibly we have here one of the major reasons why less and less young people are attracted to the study of mathematics.

### A genetic view of teaching and learning

In Freudenthal's view the learner has no choice but to 're-invent' mathematics under appropriate guidance by starting as a child

from most elementary experiences and managing more and more complex structures with growing expertise. Mathematical knowledge can never be transmitted top-down in a ready-made form. Even the most perfect lecture can become vital for a student only if he or she makes sense of it by actively re-constructing in personal terms what has been proposed. Hans Freudenthal radically objected to the idea of a didactical transposition from the level of specialists to lower levels. In his talk at the *Carbondale Conference on Geometry* he put this view in his typical language:

“Geometry is endangered by dogmatic ideas on mathematical rigor. They express themselves in two different ways: absorbing geometry in a system of mathematics like linear algebra, or strangulating it by rigid axiomatics. So it is not one devil menacing geometry as suggested in the title of my paper. There are two. The escape that is left is the deep sea. It is a safe escape if you have learned swimming. In fact, that is the way geometry should be taught, just like swimming.”

Again, the present situation at universities is not favourable. Prospective teachers are rarely given a chance to look at mathematics from a genetic perspective in a systematic way as most teacher education programs are organized like courses for specialists or even composed of courses for specialists (Analysis I and II, Linear Algebra I and II, ...). This is a serious problem.

### Mathematics education as a research domain

In the preface of *Five Years IOWO* Hans Freudenthal stated: “*IOWO* is not a research institute; its members do not regard themselves as researchers but as producers of instruction, as engineers in the educational field, as curriculum developers. Engineering needs background research and can produce research as fall-out. Though both of them will be visible in the present account, its nucleus is our productive work, represented by a few specimens, and embodies our views on mathematics as a human activity and on curriculum development as a classroom activity, guided by curriculum developers, in close contact with all those interested in mathematics education.”

A few years later he still looked sceptically at mathematics education as a research field, but nevertheless wrote his *Weeding and Sowing* as a kind of prologue for an emerging research field. In this book he clearly separated the research he had in mind from the research on teaching and learning that is conducted by psychologists, pedagogues, sociologists

and other generalists who do not and cannot take the content properly into account. A decade later in *Revisiting Mathematics Education* he described more precisely the developmental research which he thought appropriate for a science of mathematics education. This view is closely related to the conception of mathematics education as a ‘design science’ which was developed by *mathe 2000* and which the former members of the IOWO explicitly shared. In the meantime, however, international mathematics education as a whole has certainly not moved into the direction that Freudenthal had proposed in his writings. As the two volumes of the ICMI-study *Mathematics Education as a Research Domain. A Search for Identity* show, the bulk of research in mathematics is too much dominated by general educational theories, does not pay enough attention to mathematical content and is far remote from the teaching practice. It is ironic that some part of recent research conducted at the institute carrying Freudenthal’s name also falls into this category.

### The loss of mathematical substance in mathematics teaching

The curricular conception of mathematics teaching developed at the IOWO has been called *Realistic Mathematics Education* (RME). At that time it was quite appropriate to emphasize the new curricular elements that the IOWO introduced in contrast with *New Math*, namely the relationships of mathematics with the real world. Structural aspects of mathematics nevertheless remained a firm part of RME in the early seventies. In Adri Treffers’ doctoral dissertation *Three Dimensions* written under Freudenthal’s supervision, ‘horizontal’ mathematization, related to the applied aspect of mathematics, and ‘vertical’ mathematization, related to the pure aspect, were clearly delineated. Later this balance became more and more distorted. The influence of RME at the international level has been enormous. However, for this seeming success a very high price had to be paid. While spreading almost over the whole world RME was exposed to developments which had their own momentum: to research in mathematical education which had lost the connection with mathematics, to a one-sided orientation towards superficial ‘applications’, and to the testing movement which replaced ‘contents’ by lists of ‘competencies’. Step by step mathematical substance was pushed into the background and got lost. Particularly as far as the secondary level is concerned, the edu-

cational system has given its own meaning to the original conception of RME. The result is a kind of ‘RME light’ which can less and less guarantee a sufficient preparation for academic studies. This might be another major reason for the declining numbers of students who are interested in mathematics or science.

### What about the future?

Hans Freudenthal’s conceptions of mathematics and mathematics education are still valid. However, over the past twenty years there have been developments at the universities and in society that have not been favourable for bringing these conceptions to bear. The present situation is neither good for mathematics nor for mathematics education. A return to sound conditions requires first and foremost a reconstruction of the disciplinary organization of universities. My proposal is to found mathematical departments *within faculties of education* as some Asian countries have done, though somewhat halfheartedly. These departments could concentrate on teacher education (and possibly on the education of engineers, computer scientists, et cetera) and design novel programs which are less oriented towards presenting polished theories but more towards developing rich elementary mathematical theories in a research-like atmosphere where mathematicians do not hesitate to step before students in their mathematical underwear! This construction would result in more influence of mathematicians on mathematics education and at the same time in more influence of educators and teachers on mathematicians — to the benefit of both sides. Specialisation is a common feature in mathematics. So it is only natural to have mathematicians who are specializing in education. After all it is education that is of utmost importance for the welfare of societies.

This is not to say that approaches to mathematics education anchored in other disciplines and in the teaching practice are less important. Mathematics education is an interdisciplinary field which can develop properly only with contributions from many sources and with a clear orientation towards the teaching practice. In this polyphonic concert the voice of mathematics must nevertheless be leading. However, as Hans Freudenthal’s work shows, mathematics can play this leading role only if it is conceived of as an integral part of culture, if the importance of its elementary parts is clearly recognized and if a genetic view of teaching and learning is adopted. ☞

Hendrik Lenstra

Mathematisch Instituut  
Universiteit Leiden  
Postbus 9512  
2300 RA Leiden  
hwl@math.leidenuniv.nl

# Profinite Fibonacci numbers

**Goede recreatieve wiskunde doet je meteen naar pen en papier grijpen. Het onderwerp moet eenvoudig en aanstekelijk zijn, het liefst nog met allerlei raadselachtige eigenschappen binnen handbereik. Hendrik Lenstra breekt een lans voor pro-eindige getallen. Rekent u mee?**

*Profinite integers* do not enjoy widespread popularity among mathematicians. They form an important technical tool in several parts of algebraic number theory and arithmetic geometry, but their recreational virtues have never been recognized. The purpose of the present paper is to acquaint the casual mathematical reader in an informal way with profinite integers and some of their remarkable properties. The less casual reader is warned that the approach is experimental and heuristic, and that the exact meaning of many assertions may not always be instantly clear. Providing not only precise formulations, but also valid proofs, is a challenge that an expert in  $p$ -adic numbers and their analysis can easily face, but that hardly does justice to the entertainment value of the subject.

To define profinite integers, we recall that any positive integer  $n$  has a unique representation of the form

$$n = c_k \cdot k! + c_{k-1} \cdot (k-1)! + \dots + c_2 \cdot 2! + c_1 \cdot 1!,$$

where the 'digits'  $c_i$  are integers satisfying  $c_k \neq 0$  and  $0 \leq c_i \leq i$ , for  $1 \leq i \leq k$ . In the *factorial number system*, the number  $n$  is then written as

$$(1) \quad n = (c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1)_!$$

The exclamation mark distinguishes the factorial representation

from the decimal representation. For example, we have  $5 = (21)_!$  and  $25 = (1001)_!$ .

If we allow the sequence of digits to extend indefinitely to the left, then we obtain a *profinite integer*:

$$(\dots c_5 c_4 c_3 c_2 c_1)_!,$$

where we still require  $0 \leq c_i \leq i$  for each  $i$ . Usually, only a few of the digits are specified, depending on the accuracy that is required. In this paper, most profinite numbers are given to an accuracy of 24 digits. For example, we shall encounter the following profinite integer:

$$(2) \quad l = (\dots 1_6 04_6 1_3 1_8 1_6 4768_6 1_6 49000120100)_!,$$

In this number, the 19th digit has the value 18, but this is written  $1_8$  in order to express that it is a single digit. Note that by the 19th digit we mean the 19th digit *from the right*. Likewise, when we speak about the 'first' digits or the 'initial' digits of a profinite number, we always start counting from the right.

One can view each positive integer  $n$  as in (1) as a profinite integer, by taking  $c_i = 0$  for  $i > k$ . Also 0 is a profinite integer, with *all* digits equal to 0. The *negative* integers can be viewed as profinite integers as well, for example

$$-1 = (\dots 2_4 2_3 2_2 1_6 1_8 1_6 1_5 1_4 1_3 1_2 1_1 987654321)_!,$$

with  $c_i = i$  for all  $i$ . In general, negative integers are characterized by the property that  $c_i = i$  for all but finitely many  $i$ .

The ordinary arithmetic operations can be performed on profinite integers. To add two profinite integers, one adds them digit-

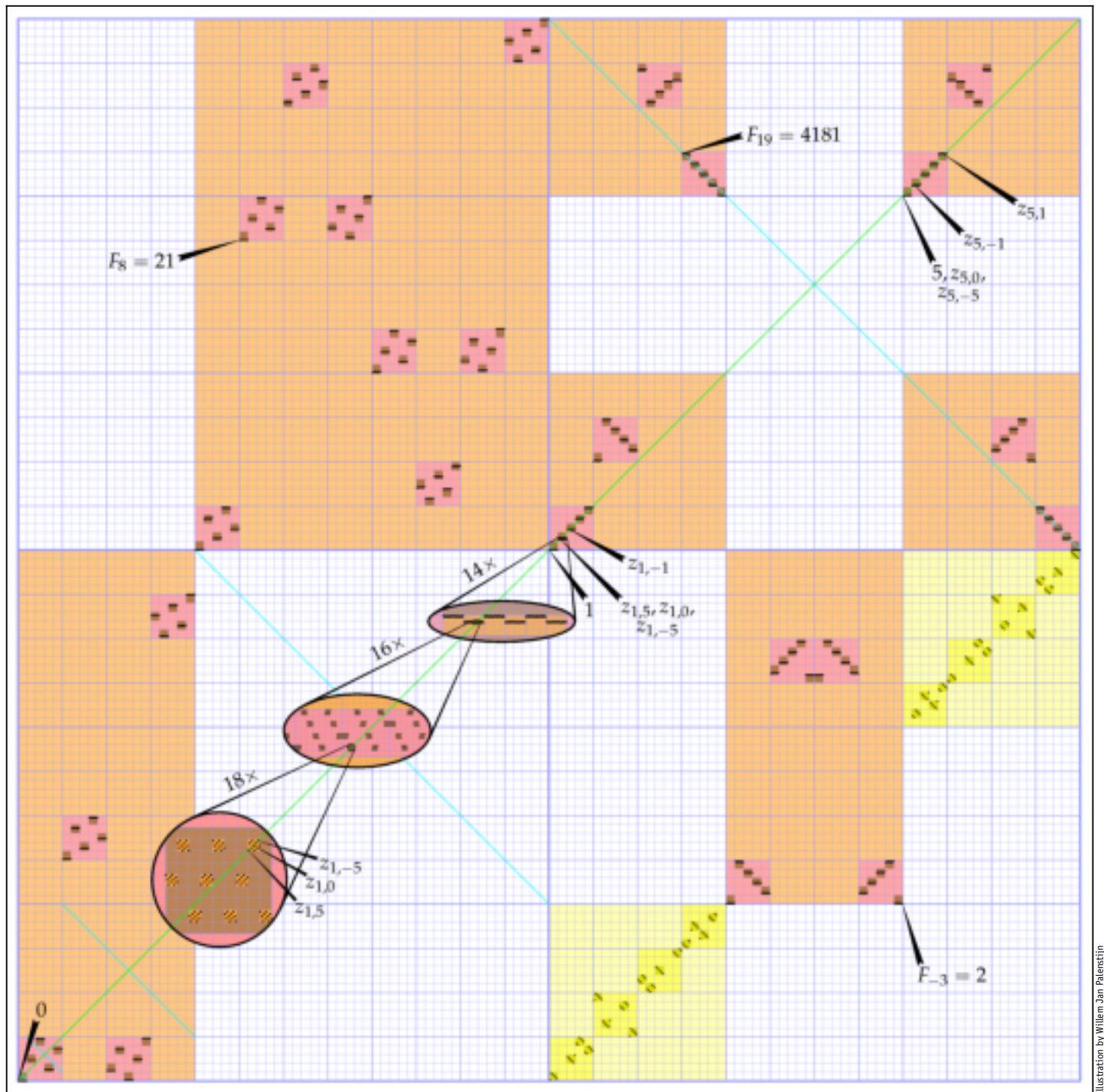


Illustration by Willem Jan Palenstijn

This picture shows the graph of the Fibonacci function  $\hat{\mathbb{Z}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ . Each element  $(\dots c_3 c_2 c_1)_! = \sum_{i \geq 1} c_i i!$  of  $\hat{\mathbb{Z}}$  is represented by the number  $\sum_{i \geq 1} c_i / (i+1)!$  in the unit interval, and the graph  $\{(s, F_s) : s \in \hat{\mathbb{Z}}\}$  is correspondingly represented as a subset of the unit square. Successive approximations to the graph are shown in orange, red, and brown. Intersecting the diagonal, shown in green, with the graph, one finds the eleven fixed points  $0, 1, 5, z_{1,-5}, \dots, z_{5,1}$  of the function. There are two clusters of three fixed points each that are indistinguishable in the precision used. One of these clusters is resolved by a sequence of three blow-ups, with a total magnification factor of  $14 \times 16 \times 18 = 4032$ . The graph of the function  $s \mapsto -s$ , shown in blue, enables the viewer to check the formula  $F_{-s} = (-1)^{s-1} F_s$ . The yellow squares contain the curve  $\{(s, t) \in \hat{\mathbb{Z}} \times \hat{\mathbb{Z}} : s \cdot (t+1) = 1\}$ , which projects to the group of units of  $\hat{\mathbb{Z}}$  on the horizontal axis.

wise, proceeding from the right; when the sum of the  $i$ th digits is found to exceed  $i$ , one subtracts  $i+1$  from it and adds a carry of 1 to the sum of the  $i+1$ st digits. The reader may check that in this way one finds that the sum of 1 and  $-1$  equals 0. Subtraction is performed in a similar manner. Multiplication can be done by means of a more elaborate scheme, but it is often more practical to compute products by means of the following rule: for each  $k$ ,

the first  $k$  digits of the product of two profinite numbers  $s$  and  $t$  depend only on the first  $k$  digits of  $s$  and of  $t$ . (This rule is also valid for addition and subtraction.) Using this rule, one reduces the problem of computing products to the case of ordinary positive integers. These operations make the set of all profinite integers into a commutative ring with unit element 1. This ring is denoted  $\hat{\mathbb{Z}}$ , the *ring of profinite integers*.

### Fibonacci numbers

Fibonacci numbers illustrate several features of profinite integers. The  $n$ th Fibonacci number  $F_n$  is, for  $n \geq 0$ , inductively defined by  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ , and

$$(3) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

for  $n > 1$ . It is well known that one can extend the definition to negative  $n$  by putting  $F_n = (-1)^{n-1}F_{-n}$ , and that many familiar identities, such as (3) and

$$(4) \quad F_n F_{m+1} - F_{n+1} F_m = (-1)^m \cdot F_{n-m},$$

then hold for *all* integers  $n$  and  $m$ . There is, however, no reason to stop here.

For each profinite integer  $s$ , one can in a natural way define the  $s$ th Fibonacci number  $F_s$ , which is itself a profinite integer. Namely, given  $s$ , one can choose a sequence of positive integers  $n_1, n_2, n_3, \dots$  that share more and more initial digits with  $s$ , so that it may be said that  $n_i$  converges to  $s$  for  $i \rightarrow \infty$ . Then the numbers  $F_{n_1}, F_{n_2}, F_{n_3}, \dots$  share more and more initial digits as well, and we define  $F_s$  to be their 'limit' as  $i \rightarrow \infty$ . This does not depend on the choice of the sequence of numbers  $n_i$ .

For example, we can write  $s = -1$  as the limit of the numbers  $n_1 = (21)_! = 5$ ,  $n_2 = (321)_! = 23$ ,  $n_3 = (4321)_! = 119$ ,  $n_4 = (54321)_! = 719, \dots$ , so that  $F_{-1}$  is the limit of

$$\begin{aligned} F_5 &= 5 = (21)_!, \\ F_{23} &= 28657 = (5444001)_!, \\ F_{119} &= 3311648143516982017180081 \\ &= (58264_1 181_5 323418173200001)_!, \\ F_{719} &= (\dots 31_6 698_6 1251_1 143_1 49806000001)_!, \\ &\dots \end{aligned}$$

which is consistent with the true value  $F_{-1} = 1 = (\dots 000001)_!$ .

For each  $k \geq 3$  the first  $k$  digits of  $F_s$  are determined by the first  $k$  digits of  $s$ . This rule makes it possible to compute profinite Fibonacci numbers, as we shall see below.

Many identities such as (3) and (4) are also valid for profinite Fibonacci numbers. In order to give a meaning to the sign that appears in (4), we call a profinite integer  $s$  *even* or *odd* according as its first digit  $c_1$  is 0 or 1, and we define  $(-1)^s = 1$  or  $-1$  accordingly. More generally, one defines a profinite integer  $s$  to be *divisible* by a positive integer  $b$  if the factorial number formed by the first  $b-1$  digits of  $s$  is divisible by  $b$ . For many  $b$ , it suffices to look at far fewer than  $b-1$  digits. For example, if  $k$  is a non-negative integer, then a profinite integer is divisible by  $k!$  if and only if its  $k-1$  initial digits are zero. Two profinite numbers  $s_1$  and  $s_2$  are called *congruent* modulo a positive integer  $b$  if their difference is divisible by  $b$ , notation:  $s_1 \equiv s_2 \pmod{b}$ .

The following method may be used to compute profinite Fibonacci numbers. Let  $s$  be a profinite number, and suppose that one wishes to compute the  $s$ th Fibonacci number  $F_s$  to an accuracy of  $k$  digits, for some  $k \geq 3$ . Then one first truncates  $s$  to  $k$  digits, which gives a non-negative integer  $n$  that is usually very large. By the rule mentioned above,  $F_s$  and  $F_n$  share at least  $k$  initial digits, so it suffices to calculate  $F_n$  to a precision of  $k$  digits. To this end, let  $\vartheta$  be a symbol that satisfies the rule  $\vartheta^2 = \vartheta + 1$ . Then for all  $n$  one has  $\vartheta^n = F_n \vartheta + F_{n-1}$ . The left hand side can be quickly calculated by induction, even for very large  $n$ , if one uses the identities  $\vartheta^{2m} = (\vartheta^m)^2$  and  $\vartheta^{2m+1} = \vartheta^{2m} \cdot \vartheta$ . All intermediate results are

expressed in the form  $a\vartheta + b$ , where  $a$  and  $b$  are integers that are only computed to a precision of  $k$  digits in the factorial number system. Then in the end one knows  $F_n$  to a precision of  $k$  digits as well, as required.

The *Lucas numbers*  $L_n$ , which are defined by  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$ ,  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$  ( $n > 1$ ), can be generalized to profinite numbers in a completely similar manner. They are expressed in Fibonacci numbers by  $L_s = F_{s+1} + F_{s-1}$ . One has also  $F_s L_s = F_{2s}$  for all  $s \in \hat{\mathbb{Z}}$ ; however, it is not necessarily meaningful to write  $L_s = F_{2s}/F_s$ , since division is not always well-defined in  $\hat{\mathbb{Z}}$ .

### Power series expansions

A striking property of profinite Fibonacci numbers is that they have *power series* expansions. If  $s_0 \in \hat{\mathbb{Z}}$ , then the power series expansion for  $F_s$  around  $s_0$  takes the shape

$$\begin{aligned} F_s &= F_{s_0} + l L_{s_0} (s - s_0) + 5l^2 F_{s_0} \frac{(s - s_0)^2}{2!} \\ &\quad + 5l^3 L_{s_0} \frac{(s - s_0)^3}{3!} + 5^2 l^4 F_{s_0} \frac{(s - s_0)^4}{4!} + \dots \\ (5) \quad &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( 5^i l^{2i} F_{s_0} \frac{(s - s_0)^{2i}}{(2i)!} + 5^i l^{2i+1} L_{s_0} \frac{(s - s_0)^{2i+1}}{(2i+1)!} \right), \end{aligned}$$

where  $l$  is a certain profinite integer that is given by (2). The number  $l$  is divisible by all prime numbers except 5. From this it follows that  $5^i l^{2i}$  and  $5^i l^{2i+1}$  are divisible by  $(2i)!$  and  $(2i+1)!$ , respectively, so that the coefficients in the power series expansions are profinite integers.

No prime number  $p$  is known for which  $l$  is divisible by  $p^2$ . In fact, if  $p$  is a prime number, then the number of factors  $p$  in  $l$  is the same as the number of factors  $p$  in  $F_{p-1}F_{p+1}$ , and no prime number is known for which  $F_{p-1}F_{p+1}$  is divisible by  $p^2$ . One may, however, reasonably conjecture that there exist infinitely many such primes.

An informal derivation of (5) can be given as follows. Let again  $\vartheta$  be such that  $\vartheta^2 = \vartheta + 1$ , and put  $\vartheta' = 1 - \vartheta$ . Then for all integers  $n$  one has  $F_n = (\vartheta^n - \vartheta'^n)/(\vartheta - \vartheta')$  and  $L_n = \vartheta^n + \vartheta'^n$ . This suggests that one has  $F_s = (\vartheta^s - \vartheta'^s)/(\vartheta - \vartheta')$  and  $L_s = \vartheta^s + \vartheta'^s$  for all profinite integers  $s$  as well, and with a suitable interpretation of the powering operation this is indeed correct. Now consider the Taylor series for  $F_s$  around  $s_0$ :

$$F_s = \sum_{j=0}^{\infty} F_{s_0}^{(j)} \frac{(s - s_0)^j}{j!},$$

where  $F_s^{(j)} = \frac{d^j F_s}{ds^j}$  denotes the  $j$ th derivative. To calculate these higher derivatives, one first notes that from  $\vartheta\vartheta' = -1$  one obtains

$$2(\log \vartheta + \log \vartheta') = 2 \log(-1) = \log 1 = 0,$$

and therefore  $\log \vartheta = -\log \vartheta'$ . This leads to

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{\vartheta^s - \vartheta'^s}{\vartheta - \vartheta'} = \frac{\log \vartheta}{\vartheta - \vartheta'} (\vartheta^s + \vartheta'^s) = \frac{\log \vartheta}{\vartheta - \vartheta'} L_s, \\ \frac{dL_s}{ds} &= \log \vartheta \cdot (\vartheta^s - \vartheta'^s) = \log \vartheta \cdot (\vartheta - \vartheta') \cdot F_s. \end{aligned}$$

Combining this with  $(\vartheta - \vartheta')^2 = 5$ , one finds

$$F_s^{(2i)} = 5^i l^{2i} F_s, \quad F_s^{(2i+1)} = 5^i l^{2i+1} L_s$$

for each  $i \geq 0$ , where

$$(6) \quad l = \frac{\log \vartheta}{\vartheta - \vartheta'}.$$

Here even the expert may be baffled: given that  $z_{5,-5}^2$  is different from 25, is there a good reason for the difference not to show up until after the *two hundredth* digit? ✎

## Danny Beckers

Dorpsstraat 26-A

6582 AN Heumen

d.beckers@inter.nl.net

# Oud Archief

Met de hoge vlucht die het wiskunde-onderwijs nam in de twintigste eeuw verschenen er ook steeds meer boeken ten behoeve van studenten. Nieuwe media zoals de radio lieten wiskundigen vertellen over het nut van hun vak. De Delftse hoogleraar Fred Schuh was zowel in lesboeken als op de radio prominent aanwezig. Danny Beckers, onderzoeker op het gebied van de geschiedenis van wiskunde, vertelt over deze causeur.

Tot de meest kleurrijke wiskundigen die Nederland gekend heeft behoort zonder meer Frederik (Fred) Schuh (1875–1966). Na zijn promotie in Amsterdam had hij in Göttingen gestudeerd en vervolgens een aantal jaren les gegeven aan een HBS. In 1907 werd hij benoemd tot hoogleraar aan de Technische Hoogeschool te Delft. Vanaf 1909 was hij werkzaam aan de universiteit van Groningen, om vervolgens tot ieders verbazing in 1916 terug te keren naar Delft.

Schuh was een veelschrijver. Niet alleen redigeerde hij sinds 1921 het wiskundige tijdschrift *Christiaan Huygens*, hij had tientallen lesboeken en vele artikelen op zijn naam staan. Bovendien was hij een begenadigd spreker, en naar verluidt een echte bon vivant. Onder studenten was hij bekend vanwege zijn glasheldere colleges in de algebra. Zijn studenten, onder wie E.J. Dijksterhuis, liepen met hem weg.

De flamboyante Schuh publiceerde in 1940 zijn *Didactiek en methodiek van de wiskunde en de mechanica*. Als didactiekboek was het bij verschijnen al enigszins ouderwets. Schuh was zich ervan bewust dat hij schreef vanuit de wiskunde en niet vanuit de leerpsychologie. Zijn boek bevatte tal van wenken ten behoeve van de student wiskunde: hoe hij moest studeren en hoe hij zijn bewijsvoering netjes op papier kon zetten. Bij de tips voor het afleggen van mondelinge examens wees Schuh de student erop dat hij beoordeeld ging worden op het aantal onderwerpen dat naar behoren kon worden afgehandeld in de tijd die er voor het examen stond. Dat betekende dat de student,

gevraagd naar het bewijs voor een stelling, er het beste aan deed om in grote lijn te schetsen hoe het bewijs in elkaar zat. Nam de examinerator daarmee genoegen, dan kon snel een ander onderwerp worden aangesneden en konden veel onderwerpen aan bod komen. Typerend voor de stijl van Schuh waren zijn kwinkslagen, waarin hij onverbloemd de spot dreef met de realiteit. Zo waarschuwde hij de student, dat de beschreven werkwijze alleen verstandig was wanneer men goed voorbereid ter examen verscheen. Wanneer de student naar een bewijs werd gevraagd waarvan hij zich pijnlijk bewust was dat hij het toevallig kende, dan kon hij beter de tijd nemen voor zijn exposé – daarmee het risico door de mand te vallen bij een volgend bewijs minimaliserend.

Achterin zijn didactiekboek had Schuh een afschrift opgenomen van een aantal causeriën die hij onder de de titel *Hoe leert men denken*, had verzorgd voor de VARA-radio. Deze causeriën waren op zondagmiddagen in 1936 uitgezonden. Om ieder misverstand omtrent de betekenis van ‘verstandig denken’ te voorkomen bood elke causerie ook plaats aan een wiskundig vraagstuk dat in de uitzending werd behandeld. Zelfs in de schriftelijke weerslag zijn deze radiofragmenten interessant omdat ze laten zien hoe wiskunde zich in de ‘nieuwe’ media manifesteerde.

In de causerie van 6 december 1936 citeerde Schuh uit een brief van Sinterklaas die zijn causeriën parodiëerde:

*Dames en Heren, Ik wil eens proberen U denken te leren.*

*Ik zal dan beginnen met U eerst te vertellen, Welke eisch men aan den denker kan stellen.*

*Het geheugen komt eerst, Dat behoeft gij het zeerst [...]*

*Dan komt het leggen van het verband En daaruit blijkt eerst Uw verstand. [...]*

*Nummer drie is critiek, maar liefst op je eigen. Men doet het allerbest over anderen te zwijgen. [...]*

*De laatste is fantasie, maar daarmee opgepast! Wie haar te veel gebruikt, wordt dikwerf een fantast. [...]*

*Doe mij nu het plezier En neem pen en papier En beantwoord met ijver de moeilijke vragen, Die ik de eer heb U hier voor te dragen. De eerste is deze: Trekt men een koe aan haar staart. Dan vraag ik U allen: Waar blijft dan het paard?*

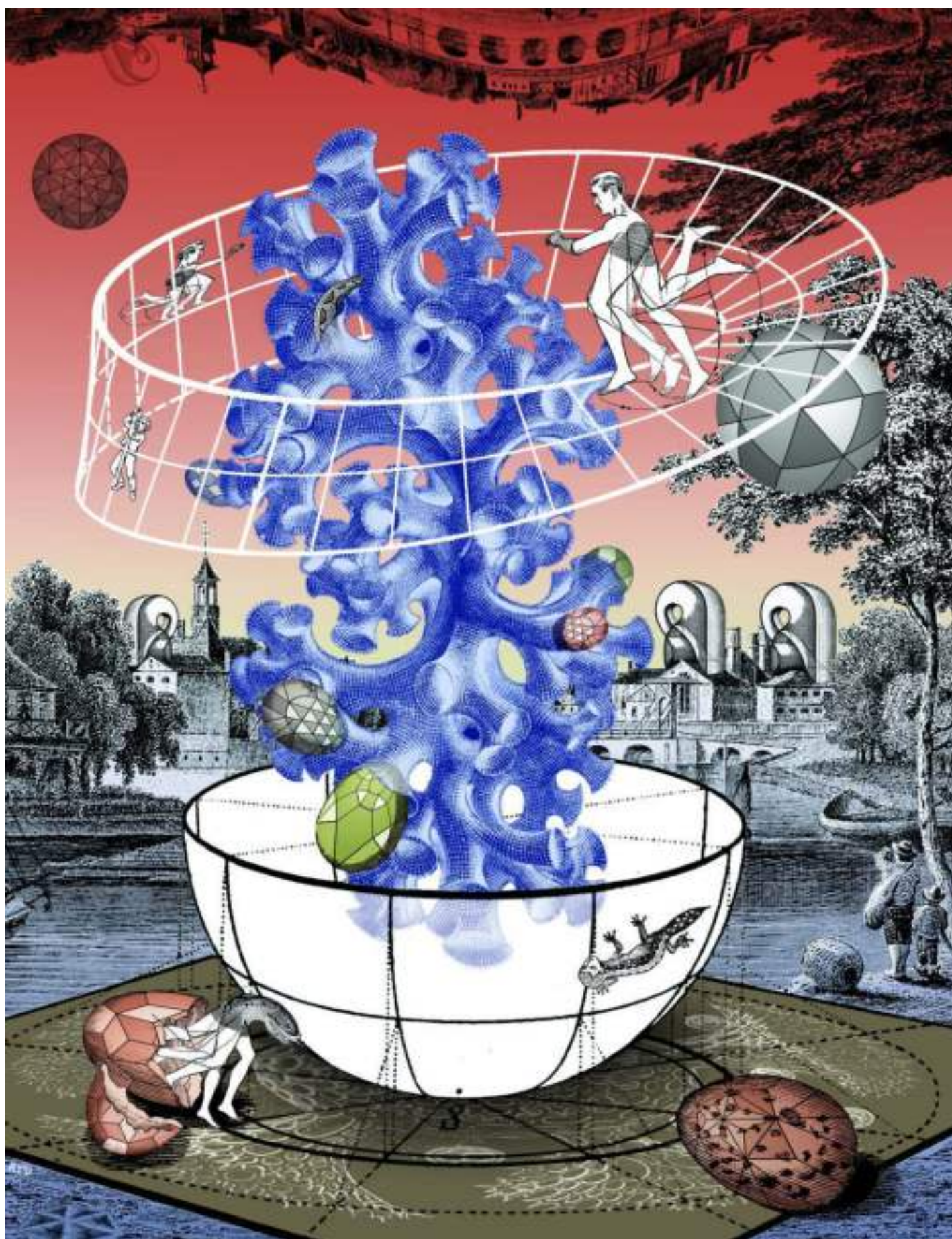
*Mijn tweede vraag is meer voor ingewijden, Die zich in kennis van Mechanica verblijden: Wanneer twee minnenden te saam een baantje rijden, Wat zal de dame dan doen, gaan kantelen of glijden?*

Wie deze Sinterklaas was vertelt deze geschiedenis niet. Het gedicht toont wel met welk formidabel gevoel voor zelfspot Schuh door het leven ging en het illustreert de kwinkslagen waarmee hij poogde zijn luisteraars voor zijn vak te winnen.

Literatuur: Fred Schuh, *Didactiek en Methodiek van de Wiskunde en de Mechanica*, Delft, 1940



Fred Schuh (1940)



## Jan Aarts

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Delft  
Postbus 5031, 2600 GA Delft  
j.m.aarts@ewi.tudelft.nl

## Onderwijs

# Voorstellingen van het projectieve vlak

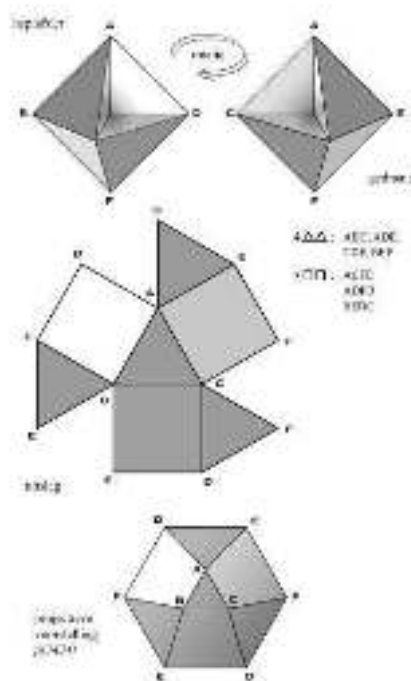
Meetkunde spreekt tot de verbeelding. Het is bijvoorbeeld een leuke opgave om je voor te stellen wat voor veelvlakken je allemaal kunt krijgen als je bij een regelmatig veelvlak alle hoekpunten op dezelfde manier afknot. Omgekeerd kunnen elementaire objecten uit de driedimensionale meetkunde, zoals Platonische lichamen, ons helpen om moeilijkere meetkundige objecten te begrijpen. Dit artikel gaat over de verschillende manieren waarop het projectieve platte vlak aanschouwelijk te maken is. Het kwam voort uit een vraag van een vwo-leerling en blijkt een onderwerp te zijn dat goed aansluit bij de kennis van de vwo-ers. Jan Aarts is emeritus hoogleraar topologie aan de Technische Universiteit te Delft. Hij heeft zich altijd bijzonder ingezet voor het onderwijs aan middelbare scholieren van wiskunde die wat verder gaat dan gebruikelijk op het vwo.

De *heptaëder*, het halfregelmatige zevenvlak, is een oppervlak dat is opgebouwd uit vier driehoeken en drie vierkanten. Al zijn ribben zijn even lang en in ieder hoekpunt komen om en om twee vierkanten en twee driehoeken samen. De heptaëder ontstaat uit de oktaëder, het regelmatige achthoek, door weglating om en om van vier driehoeken en inhang van drie vierkanten, zie figuur 1. Deze vierkanten zijn de middenvlakken van de oktaëder, die door vier van zijn hoekpunten gaan. In deze voorstelling van de heptaëder treedt zelfdoorsnijding op: de vierkanten doorsnijden elkaar twee aan twee in drie onderling loodrechte lijnen (die door één punt gaan). Die doorsnijding hangt samen met deze speciale wijze van voorstelling van de heptaëder. In werkelijkheid (in het echt) heeft elk tweetal van de drie vierkanten slechts twee overlappende hoekpunten gemeenschappelijk. Maar omdat we de heptaëder als figuur in de drie-dimensionale ruimte willen zien, is zelfdoorsnijding onvermijdelijk. In het fraaie knutselboek [5] heet de

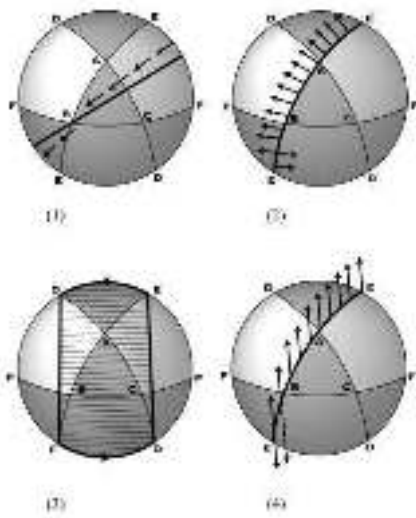
heptaëder een tetrahemihexahedron; *tetra* verwijst naar de vier driehoeken van de tetraëder, *hemi* naar de aanwezigheid van vlakken door het middelpunt, die dezelfde vorm hebben als de middenvlakken van het *hexahedron* (= regelmatig zesvlak of kubus), waarvan de middenvlakken vierkanten zijn. Dat wat betreft de nomenclatuur. In zekere zin is de heptaëder een uniform of Archimedisch veelvlak. Immers, het is opgebouwd uit regelmatige veelhoeken en in ieder hoekpunt zien we dezelfde configuratie: om en om 2 driehoeken en 2 vierkanten. In de gebruikelijke notatie van de uniforme veelvlakken zou het zevenvlak moeten worden aangeduid met (3434), vergelijk Van der Vegt [4] [p. 30]. Toch heeft Van der Vegt het heptaëder terecht niet opgenomen bij de opsomming van de Archimedische veelvlakken. Wat is hier aan de hand?

Om een beter inzicht in de heptaëder te krijgen maken we er een *uitslag* van. Na topologische vervorming ontstaat er een zeshoek waarvan het binnengebied verdeeld is in vier (topologische) driehoeken

en drie (topologische) vierkanten. De plaatsing van de labels bij de hoekpunten geeft aan dat we op de rand nog diametrale punten twee aan twee met elkaar moeten identificeren (op elkaar moeten plakken). Om redenen die later duidelijk zullen worden, noemen we de zo verkregen figuur, inclusief plaatschema, de *projectieve voorstelling*  $p(3434)$  van de heptaëder. In de drie-dimensionale ruimte is de identificatie van de diametrale punten alleen



**Figuur 1** De heptaëder (3434), ook wel tetrahemihexahedron genaamd



**Figuur 2** Merkwaardige eigenschappen van de heptaëder (in projectieve voorstelling)

mogelijk als we zelfdoorsnijding van de figuur toestaan; het resultaat is dan de heptaëder zoals boven beschreven. Terloops merken we nog op dat het wèl mogelijk is om in de vier-dimensionale ruimte een voorstelling zonder zelfdoorsnijding te maken. Laten we eens kijken welk een merkwaardige eigenschappen we uit de projectieve voorstelling kunnen aflezen, zie figuur 2.

1. Door twee diametrale punten met een rechte lijn te verbinden krijgen we een topologische cirkel (de diametrale punten worden immers op elkaar geplakt). Zo'n cirkel brengt geen verdeling van de heptaëder teweeg.
2. De heptaëder is niet oriënteerbaar. Bekijk we bijvoorbeeld de topologische cirkel  $EBAE$  en zetten we, gaande in de richting van  $E$  naar  $B$ , pijltjes uit naar links, dan blijkt na een volledige rondgang dat de pijltjes naar rechts staan.
3. Van de (rechthoek)  $DEDE$  moeten, in verband met het identificatie voorschrift, twee overstaande zijden, beide met label  $DE$  aan elkaar geplakt worden. Bij dat plakken wordt de rechthoek een halve slag gedraaid. Zo zien we dat er een Möbiusband in de heptaëder zit. Voor een impressie van de Möbiusband zie figuur 3. In de figuur staat rechts boven de bekende voorstelling van de Möbiusband als een band met een halve slag erin. Links in het midden staat een voorstelling van de Möbiusband met zelfdoorsnijding en links onder

staat er een waarbij een zogenaamde kruismuts is gebruikt. Merk op dat je in beide laatste voorstellingen geen halve slag meer ziet.

4. De volgende eigenschap is nauw verwant met de eigenschap 2. De heptaëder is een éénzijdig oppervlak. Bepalen we een normaal met behulp van een rechtsdraaiende driepoot dan blijkt na rondgang langs een niet-scheidende cirkel dat de normaal de andere kant op wijst. We kunnen dus geen binnen- en buitenkant onderscheiden.
5. Uit de vorige eigenschap zien we meteen dat de heptaëder geen scheiding in de ruimte aanbrengt. Zijn er twee willekeurige punten in de ruimte gegeven die niet op de heptaëder liggen, dan kun je die punten altijd met een kromme verbinden. Je kan immers vanuit beide punten eerst richting oppervlak gaan tot je er heel dicht bij bent. Gelet op het gestelde in 4 kan je daarna de twee dicht bij de heptaëder gelegen punten met een kromme verbinden.
6. Zoals gebruikelijk geven we met  $Z$ ,  $R$ ,  $H$  opeenvolgend aan de aantallen zijvlakken, ribben, hoekpunten van een veelvlak. Voor de heptaëder vinden we  $Z - R + H = 7 - 12 + 6 = 1$ .

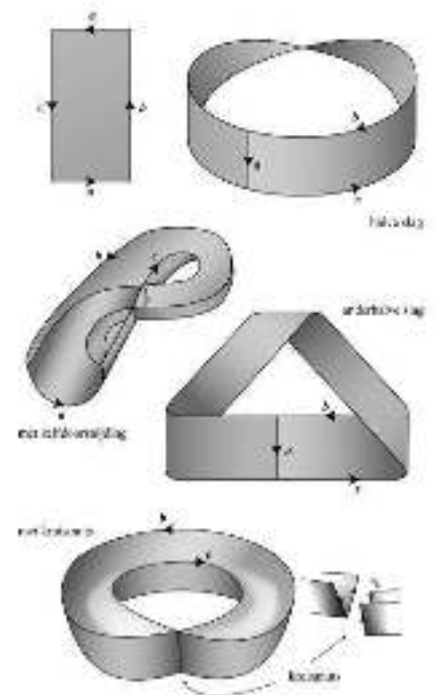
Zoals gezegd, wordt de heptaëder niet vermeld bij Van der Vegt [4]. Dat komt omdat Van der Vegt zich alleen bezighoudt met oriënteerbare oppervlakken (namelijk, afgesloten delen van de ruimte die begrensd worden door vlakke veelhoeken; loc.cit., p. 10) en eigenlijk alleen met sferische veelvlakken, dat zijn veelvlakken met met de topologische vorm van een sfeer; dat zie je aan het feit dat voor de sferische veelvlakken de volgende Formule van Euler geldt:  $Z - R + H = 2$ .

Samenvattend: *de heptaëder is noch oriënteerbaar, noch sferisch.*

Dit artikel is ontstaan naar aanleiding van vragen van Vera Wagenaar die ook na het Gymnasium nog belangstelling had voor stereometrie. Bij de studie van veelvlakken in [4] ging ze er zelf mee aan de slag en ontdekte de heptaëder en de treiskaidekaëder (dertien-vlak), die ontstaat door afknotting van de heptaëder. De vraag van Vera was: zijn deze oppervlakken bekend, en zo ja, waarom staan ze niet in [4]? Deze vragen zijn zojuist gedeeltelijk beantwoord. We komen er nog op terug in de sectie *De heptaëder*.

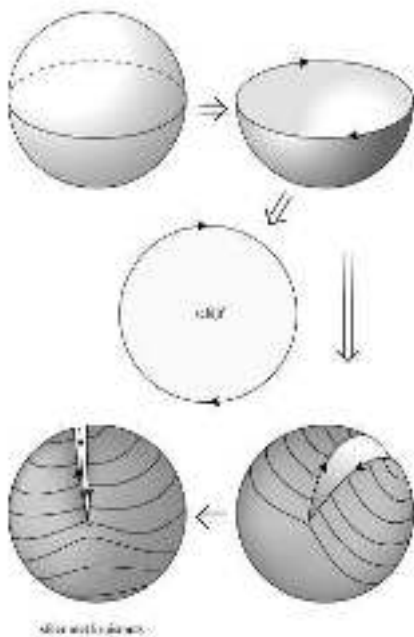
## Het projectieve vlak

In de gewone vlakke meetkunde hebben twee verschillende evenwijdige lijnen per definitie geen snijpunt. Voor sommige doeleinden is het nuttig om elk tweetal verschillende evenwijdige lijnen wel een snijpunt te geven (en ook niet meer dan één). Zo'n snijpunt kun je je voorstellen als een *richting* of als een *oneindig ver punt*. Het *projectieve vlak*  $P^2$  bestaat uit het *gewone platte vlak* tezamen met de *oneindig verre punten*. Om dit beter te kunnen beschrijven, werken we met homogene coördinaten. Een punt  $x$  uit het vlak met gewone coördinaten  $(x_1, x_2)$  krijgt de homogene coördinaten  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  waarbij de  $\xi_n$ 's reële getallen zijn,  $\xi_0 \neq 0$ ,  $x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}$  en  $x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}$ . Bij een punt  $x$  horen meerdere drietallen van homogene coördinaten. De drietallen  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  en  $(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$  zijn de homogene coördinaten van eenzelfde punt uit het vlak dan en alleen dan als er een getal  $\lambda \neq 0$  bestaat zó dat  $\xi_n = \lambda \eta_n$  voor  $n = 1, 2, 3$ . Aan een (richtings)vector  $a = (a_1, a_2)$  in het vlak - een oneindig ver punt dus - voegen we de homogene coördinaten  $(0, a_1, a_2)$  toe. De drietallen  $(0, a_1, a_2)$  en  $(0, b_1, b_2)$  zijn de homogene coördinaten van eenzelfde oneindig verre punt dan en slechts dan als er een getal  $\lambda \neq 0$  bestaat zó dat  $a_1 = \lambda b_1$  en  $a_2 = \lambda b_2$ ; de vectoren  $(a_1, a_2)$  en  $(b_1, b_2)$  bepalen dan dezelfde richting.



**Figuur 3** Vijfmaal de Möbiusband

Merk op dat bij alle drietallen van homogene coördinaten tenminste één van die getallen ongelijk aan nul is. Immers bij de punten uit het gewone vlak horen drietallen waarvan het eerste getal ongelijk 0 is en bij de oneindig verre punten horen drietallen waarvan weliswaar het eerste getal gelijk 0 is, maar de andere twee niet beide 0 kunnen zijn, omdat ze bij een richtingsvector horen (die altijd ongelijk aan de nulvector is). Verder is het duidelijk dat elk drietal van reële getallen die niet alle drie nul zijn ook optreedt als drietal van homogene coördinaten van een punt uit  $\mathbf{P}^2$ . Nu zijn we gewend om bij een drietal reële getallen  $(x_0, x_1, x_2)$  te denken aan (de gewone coördinaten van) een punt in de ruimte  $\mathbf{R}^3$ . De relatie tussen homogene coördinaten van een punt in het projectieve vlak  $\mathbf{P}^2$  en punten in de ruimte  $\mathbf{R}^3$  is als volgt. Alle homogene coördinaten van een punt uit het projectieve vlak zijn de punten van eenzelfde lijn in de ruimte door de oorsprong  $O$ , met uitzondering van  $O$ . De lijnen door  $O$  gelegen in het vlak  $x_0 = 0$  corresponderen met de oneindig verre punten, de andere lijnen met door  $O$  corresponderen met de punten uit het (gewone) vlak. Dit volgt uit de boven gemaakte opmerkingen over de vraag wanneer twee drietallen de homogene coördinaten van eenzelfde punt zijn. Zo komen we tot



**Figuur 4** Ontstaan van schijf met diametraalpuntsidentificatie en van bol met kruismuts

een meer formele definitie van het projectieve vlak.

**Definitie.** De punten van het *projectieve vlak*  $\mathbf{P}^2$  zijn de lijnen door de oorsprong in  $\mathbf{R}^3$ .

Een punt  $x$  in  $\mathbf{P}^2$  is geheel bepaald door een vector langs de lijn in  $\mathbf{R}^3$ , met andere woorden door zijn homogene coördinaten,  $x = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ . Een lijn in  $\mathbf{P}^2$  is gegeven door een homogene lineaire vergelijking in de homogene coördinaten:

$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0.$$

De getallen  $(a_0, a_1, a_2)$  heten de coördinaten van de lijn. De lijn  $\xi_0 = 0$  is de verzameling van alle oneindig verre punten.

Twee verschillende lijnen in het projectieve vlak hebben precies één snijpunt. Dat kan men op de volgende wijze berekenen. Gegeven zijn de homogene vergelijkingen

$$a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 = 0$$

$$b_0\xi_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_2 = 0$$

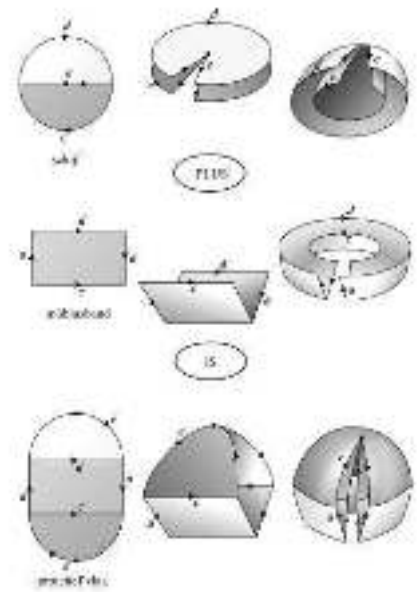
waarbij  $(a_0, a_1, a_2)$  en  $(b_0, b_1, b_2)$  verschillende vectoren in  $\mathbf{R}^3$  zijn, beide ongelijk aan de nulvector. We onderscheiden twee gevallen.

1.  $a_1b_2 \neq a_2b_1$ . In het gewone vlak hebben we te maken met twee niet-evenwijdige lijnen. Stellen we  $\xi_0 = 1$ , dan vinden we als oplossing de homogene coördinaten  $(1, \cdot, \cdot)$  van een gewoon punt.
2.  $a_1b_2 = a_2b_1$ . Het gaat nu om evenwijdige lijnen in het gewone vlak. Er is nu een oplossing van de vorm  $(0, \cdot, \cdot)$ , de homogene coördinaten van een oneindig ver punt.

Het projectieve vlak is het standaardmodel van de tweedimensionale *elliptische meetkunde*.

### Topologie van het projectieve vlak

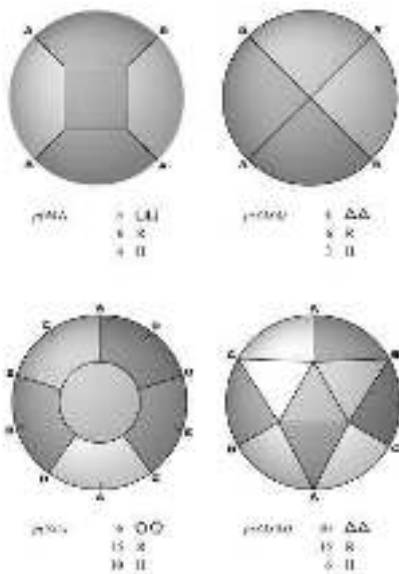
We zoeken nu een topologische voorstelling van het projectieve vlak. Daartoe proberen we een afstandsfunctie te introduceren. Hoe zou je de afstand tussen twee punten uit  $\mathbf{P}^2$  meten? Volgens de definitie is een punt in  $\mathbf{P}^2$  een lijn in  $\mathbf{R}^3$  door  $O$ . De afstand tussen twee lijnen door  $O$ , dat lijkt wat vreemd. We bekijken de eenheidssfeer  $S^2$  in  $\mathbf{R}^3$ , met middelpunt  $O$  en straal 1. Deze snijdt elke lijn door  $O$  in



**Figuur 5** Het projectieve vlak is de som van een schijf en een Möbiusband

een paar van diametrale punten. In plaats van 'paar van diametrale punten' gebruiken we ook wel de term 'antipodaal paar'. Vanuit topologisch standpunt is het projectieve vlak de verzameling van alle antipodale paren van  $S^2$ . De afstand tussen antipodale paren wordt op de gebruikelijke manier berekend; de afstand van het antipodale paar  $\{p, p^a\}$  tot het antipodale paar  $\{q, q^a\}$  is het minimum van de afstanden  $d(p, q)$  en  $d(p, q^a)$ . Voor een geoefend topoloog is dit een prima definitie van het (topologische) projectieve vlak.

Een duidelijk en bruikbaar beeld van het projectieve vlak ontstaat op de volgende manier. In figuur 4 zien we links een sfeer; dit is de eenheidssfeer in  $\mathbf{R}^3$ . Hiervan moeten we alle antipodale paren identificeren (op elkaar plakken). Om te beginnen 'onthoofden' we de sfeer; we verwijderen alle punten boven het equatorvlak. Wat overblijft is de onderste helft van de sfeer tezamen met zijn rand. Bijna alle punten van het projectieve vlak worden nu voorgesteld door één punt; de bijbehorende diametrale punten zijn bij de 'onthoofding' verdwenen. Op de rand zijn nog antipodale paren. Die moeten we paarsgewijs op elkaar plakken. Nu is een onthoofde bol topologisch niet anders dan een cirkelschijf. Zo komen we tot een voorstelling van het projectieve vlak die we in het vervolg nog vaak zullen gebruiken: een schijf met diametraalpuntsiden-



Figuur 6 De regelmatige projectieve veelvlakken

tificatie van de rand. Het is dus een cirkelschijf met antipodale paren op de rand. Met pijltjes geven we eventueel aan hoe de bogen op de rand op elkaar geplakt worden. De afstand tussen twee punten is nu de kortste verbinding tussen de punten, waarbij men ook gebruik mag maken van het feit dat de afstand tussen twee diametrale punten op de rand gelijk aan 0 is.

Toch is het ook interessant om een voorstelling van het projectieve vlak te maken waarbij elk punt gewoon een punt is en niet zoiets als een speciale lijn of bijzonder puntenpaar. We geven nu twee manieren waarop dit zou kunnen. De eerste manier sluit aan bij wat we net gedaan hebben. We gaan verder met de onderste helft van de sfeer tezamen met zijn rand van antipodale paren. Nu brengen we de te identificeren punten zo dicht mogelijk bij elkaar; dat kan met een topologische deformatie. Om nu het plakken mogelijk te maken moet het projectieve vlak zichzelf doorkruisen. Het kan ook niet anders, omdat het projectieve vlak niet zonder zelfdoorsnijding in de drie-dimensionaal ruimte kan worden ingebed. De zojuist verkregen figuur wordt een *sfeer met kruismuts* genoemd.

Een andere manier om een topologische voorstelling van het projectieve vlak te krijgen is geschetst in figuur 5. De figuur bestaat uit negen deelfiguren. Op de eerste rij staat drie keer een schijf, in de tweede rij staat driemaal een Möbiusband

en op de derde rij driemaal het projectieve vlak. Het doel van de figuur is aan te tonen dat een schijf en Möbiusband, op passende wijze aan elkaar geplakt, het projectieve vlak opleveren. In de linkerkolom gebeurt dit schematisch en de rechterkolom laat zien hoe dat in de ruimte gerealiseerd wordt (met zelfdoorsnijding). De middelste kolom is een fase tussen de schematische en realistische benadering.

### Regelmatige veelvlakken in het projectieve vlak

Ieder weet dat er maar vijf typen van regelmatige sferische veelvlakken zijn: de tetraëder, kubus, oktaëder, dodekaëder en icosaeëder, met opeenvolgend 4, 6, 8, 12 en 20 zijvlakken. Regelmatig wil hier zeggen dat alle zijvlakken van het veelvlak regelmatige veelhoeken zijn met evenveel hoeken en dat in ieder hoekpunt evenveel zijvlakken bij elkaar komen. Vaak geeft men het regelmatige veelvlak aan door de configuratie bij een hoekpunt op te schrijven. Bij bovenstaande opsomming krijgen we opeenvolgend (333), (444), (3333), (555), (33333). Meestal legt men aan de regelmatige veelvlakken de eis op dat ze convex zijn. We hebben dat hier vervangen door de voorwaarde dat het veelvlak vanuit topologisch standpunt de sfeer  $S^2$  is. Het doet er ook niet toe of de zijvlakken regelmatig zijn; wel is essentieel dat alle zijvlakken evenveel hoekpunten hebben. De gebruikelijke classificatie van de regelmatige en halfregelmatige veelvlakken, zie bijvoorbeeld [4] of [2], is alleen gebaseerd op de Formule van Euler:

$$Z - R + H = 2,$$

waarin  $Z$ ,  $R$  en  $H$  de aantallen van opeenvolgend zijvlakken, ribben en hoekpunten zijn.

Bij toepassingen van de formule van Euler is het irrelevant dat de ribben keurige rechte lijntjes zijn; het mogen ook wel kronkellijntjes (zonder dubbelpunten!) zijn. In de topologische context is een *regelmatig sferisch veelvlak* een verdeling van het boloppervlak in veelhoeken zó dat de veelhoeken twee aan twee slechts ribben gemeenschappelijk hebben, alle veelhoeken evenveel ribben hebben en in alle hoekpunten evenveel veelhoeken samenkomen. De ribben zijn topologische bogen. Een veelhoek wordt dus begrensd door een aantal bogen. Gemakshalve zullen we de veelhoeken vaak *zijden* noemen.

Ook in deze context zijn er precies vijf *regelmatige sferische veelvlakken*. Voor de volledigheid zullen we dat hier bewijzen. Zij namelijk  $Z$  het aantal zijden van een regelmatig sferisch veelvlak,  $R$  het aantal ribben en  $H$  het aantal hoekpunten,  $n$  het aantal ribben van elke zijde en  $k$  het aantal veelhoeken die in elk hoekpunt samenkomen. Merk op dat altijd al  $n \geq 3$  en  $k \geq 3$ . Tel eerst de hoekpunten via de zijden: er zijn  $Z$  zijden; die leveren  $nZ$  hoekpunten. Hierbij wordt ieder hoekpunt  $k$  keer geteld. Dus  $nZ = kH$ . Tel nu de hoekpunten via de ribben: er zijn  $R$  ribben; die leveren  $2R$  hoekpunten. Maar ieder hoekpunt wordt hierbij  $k$  maal geteld. Dus  $2R = kH$ . Invulling in de Formule van Euler geeft:

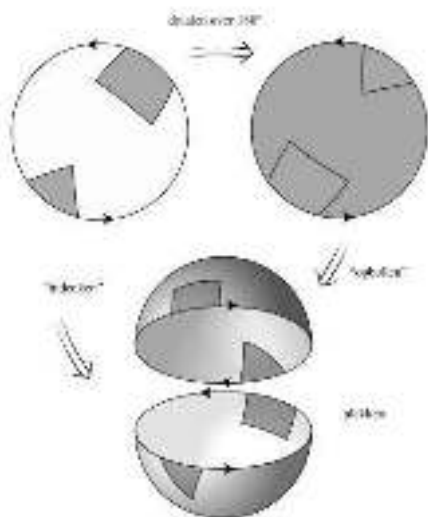
$$H\left(\frac{k}{n} - \frac{k}{2} + 1\right) = 2.$$

Omdat  $H > 0$ , moet ook  $\frac{k}{n} - \frac{k}{2} + 1 > 0$ . Daaruit volgt  $3 \leq n < \frac{2k}{k-2}$ , en dus  $k < 6$ . Bijgevolg  $k = 3, k = 4$  of  $k = 5$ . Voor  $k = 3$  komt er  $n < 6$ , en dus  $n = 3$  ( $H = 4$ , de tetraëder),  $n = 4$  ( $H = 8$ , de hexaëder of kubus) of  $n = 5$  ( $H = 20$ , de dodekaëder.) Voor  $k = 4$ , krijgen we  $n < 4$ , dus  $n = 3$  ( $H = 6$ , de oktaëder.) Voor  $k = 5$  tenslotte:  $n = 3$  ( $H = 12$ , de icosaeëder.)

Ter introductie van de regelmatige projectieve veelvlakken het volgende. We gaan uit van een regelmatig veelvlak op de sfeer  $S^2$  dat invariant is ten opzichte van de inversie  $\iota$  in het middelpunt; dat wil zeggen dat de afbeelding  $\iota(x) = -x$  het veelvlak in zichzelf overvoert (dus hoekpunten in hoekpunten, ribben in ribben, zijden in zijden). Merk op dat ieder antipodaal paar door de afbeelding  $\iota$  in zichzelf wordt overgevoerd. Dus geeft het regelmatige sferische veelvlak op natuurlijke wijze een regelmatig projectief veelvlak in de volgende zin.

**Definitie.** Een *projectief veelvlak* is een verdeling van het projectieve vlak in veelhoeken zó dat de veelhoeken twee aan twee slechts ribben gemeenschappelijk hebben. Men noemt het veelvlak *regelmatig* als alle veelhoeken evenveel ribben hebben en in alle hoekpunten evenveel veelhoeken samenkomen.

Ook nu zullen we de veelhoeken vaak *zijden* noemen. Het tetraëder is regelmatig, maar niet invariant onder inversie; de tetraëder geeft dus *geen* aanleiding tot een regelmatig projectief veel-



Figuur 7 Verdubbelingstelling

vlak. Maar de andere regelmatige veelvlakken doen het wel. De kubus, oktaëder, dodekaëder en icoesaëder geven na identificatie van antipodenparen regelmatige projectieve veelvlakken die we opeenvolgend projectieve kubus, projectieve oktaëder, projectieve dodekaëder en projectieve icoesaëder noemen. Ze zijn getekend in figuur 6. In samenhang met de boven gegeven notatie voor regelmatige sferische veelvlakken noteren we de veelvlakken opeenvolgend met  $p(444)$ ,  $p(3333)$ ,  $p(555)$  en  $p(33333)$ . Zijn dit nu alle regelmatige projectieve veelvlakken? Ja, dat zijn alle regelmatige projectieve veelvlakken. Dat is een direct gevolg van de volgende stelling.

**Verdubbelingsstelling.** *Laat een projectief veelvlak gegeven zijn. Dan is er een sferisch veelvlak dat invariant is onder inversie en dat na identificatie van antipodenparen het gegeven projectieve veelvlak oplevert.*

Het bewijs staat in figuur 7. We stellen het projectieve vlak voor door een cirkelschijf met antipodenparen op de rand en stellen ons voor dat daarin het gegeven projectieve veelvlak is getekend. Om te beginnen maken we nu een kopie die uit de eerste ontstaat door draaiing over 180 graden. De eerste cirkelschijf 'deuken we in' en de tweede 'bollen we op'. Daarna plakken we de halve bollen op elkaar en vergeten de identificatie van de antipodale paren op de rand. Het zo verkregen sferisch veelvlak is invariant ten

opzichte van inversie, dus na identificatie van antipodenparen ontstaat weer het gegeven projectieve veelvlak.

We merken nog op dat bij het verdubbelingsproces het aantal zijden van het veelvlak verdubbelt en ook het aantal ribben en het aantal hoekpunten. Deze beschouwing levert een bewijs voor de Formule van Euler.

**Formule van Euler voor het projectieve vlak.** *Als van een projectief veelvlak het aantal zijden gelijk is een  $Z$ , het aantal ribben gelijk aan  $R$  en het aantal hoekpunten gelijk aan  $H$  dan is*

$$Z - R + H = 1.$$

Als we de tekening van de projectieve dodekaëder  $p(555)$  bekijken, dan zien we dat die bestaat uit zes zijden die elk vijf ribben hebben. Iedere zijde grenst aan de vijf anderen. Daaruit volgt bijna onmiddellijk dat er zes kleuren nodig zijn om dit veelvlak zó te kleuren dat aan elkaar grenzende zijden een verschillende kleur krijgen. Hiermee is de helft van de volgende stelling bewezen.

**Zeskleurenstelling.** *Ieder projectief veelvlak kan met zes kleuren gekleurd worden. Het veelvlak  $p(555)$  kan niet met minder dan zes kleuren gekleurd worden.*

Het zou te ver voeren om hier een gedetailleerd bewijs van de Zeskleurenstelling te geven. Voor degenen die enigszins vertrouwd zijn met de aanpak van zulke bewijzen volstaat wellicht het volgende. Als we aannemen dat in ieder hoekpunt van het veelvlak precies drie zijden samenkomen, dan is de volgende uitgebreide formule van Euler van kracht. Is  $Z_k$  het aantal zijden met  $k$  ribben, dan is

$$Z_3 + 2Z_4 + Z_5 = 6 + \sum_{k \geq 7} (k-6)Z_k.$$

Uit de formule volgt dat er bij deze veelvlakken altijd zijden bestaan met vijf of minder ribben.

#### Halfregelmatige projectieve veelvlakken

Naast de regelmatige projectieve veelvlakken kunnen ook nog de halfregelmatige veelvlakken van de eerste en tweede soort bekijken. We noemen een projectief veelvlak *halfregelmatig van de eerste soort* indien voor ieder hoekpunt de configuratie

van de zijden die in dat hoekpunt samenkomen dezelfde is. In het bijzonder komen in ieder hoekpunt evenveel zijden samen. De halfregelmatige veelvlakken van de eerste soort worden ook wel *Archimedische* of *uniforme* veelvlakken genoemd. Door rolverwisseling van zijden en hoekpunten komt er de definitie van halve regelmaat van de tweede soort. Een projectief veelvlak heet *halfregelmatig van de tweede soort* indien voor iedere zijde de hoekpunten rond die zijde 'hetzelfde patroon hebben'. In figuur 8 is een overzicht gegeven van alle halfregelmatige projectieve veelvlakken. Telkens staat links het halfregelmatige veelvlak van de eerste soort, en rechts het halfregelmatige veelvlak van de tweede soort. De reeks is op de volgende wijze tot stand gekomen. Volgens de Verdubbelingstelling kan ieder halfregelmatig projectief veelvlak door identificatie



Figuur 8 Het Romeins oppervlak van Steiner

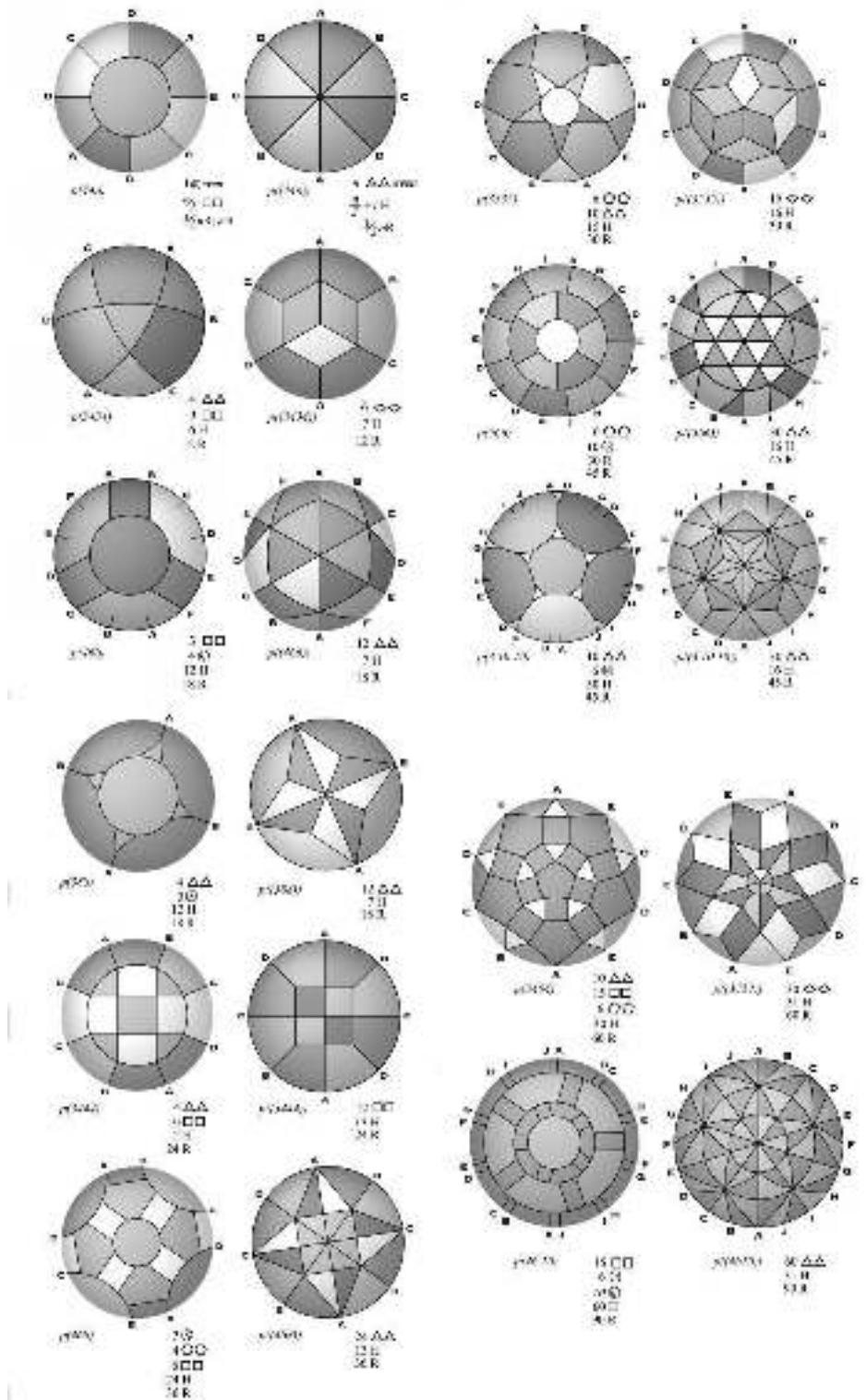
van antipodenparen worden verkregen uit een sferisch halfregelmatig veelvlak dat invariant is onder inversie. Dit is nu wat je te doen staat. Neem de lijst van halfregelmatige veelvlakken, bijvoorbeeld uit Van der Vegt [4]. Deze lijst van halfregelmatige sferische veelvlakken geeft in verband met de Verdubbelingstelling een volledige lijst van halfregelmatige projectieve veelvlakken. Het enige waar je op moet letten is dat het halfregelmatige veelvlak *invariant is onder inversie*. Alleen die halfregelmatige veelvlakken geven aanleiding tot halfregelmatige projectieve veelvlakken. In de figuren zijn dezelfde namen gebruikt als in het sferische geval. Ook de andere notatie vertoont grote gelijkenis met die van [4].

### De heptaëder

We lichten een enkel speciaal geval uit de lijst. Het halfregelmatige (sferische) veertienvlak, de kubo-oktaëder (3434), dat ontstaan gedacht kan worden als doorsnede van een kubus en een oktaëder en dat is opgebouwd uit zes vierkanten en acht gelijkzijdige driehoeken, gaat door identificatie van antipodale paren over in de *heptaëder*,  $p(3434)$ . Als je nu wilt weten wat er gebeurt bij afknotten van de heptaëder, dan kun je net zo goed eerst de kubo-oktaëder afknotten en daarna de antipodenparen identificeren. Nu kun je de kubo-oktaëder op twee wijzen afknotten: tot op de helft of tot op een-derde. Bij afknotten tot op de helft ontstaat er een veelvlak dat invariant is onder inversie en dat in topologische zin een rombenkubo-oktaëder (3444) is. Na identificatie van antipodenparen krijgen we het projectieve veelvlak  $p(3444)$ , dat is opgebouwd uit vier driehoeken en negen vierkanten, een dertienvlak. Bij afknotten tot op een-derde ontstaat er uit de kubo-oktaëder een veelvlak dat invariant is onder inversie en dat in topologische zin een grote rombenkubo-oktaëder (468) is. Na identificatie van antipodenparen krijgen we het projectieve veelvlak  $p(468)$ , dat is opgebouwd uit drie achthoeken, vier zeshoeken en zes vierkanten, ook een dertienvlak.

### Nogmaals het projectieve vlak

We hebben ondertussen begrepen dat de heptaëder een model is voor het projectieve vlak. In het boek van Hilbert en Cohn-Vossen worden verschillende voorbeelden gegeven van gladde oppervlakken die model zijn voor het projectieve



**Figuur 9** Een overzicht van alle halfregelmatige projectieve veelvlakken. De veelvlakken zijn in paren afgebeeld: links staat steeds het halfregelmatige projectieve veelvlak van de eerste soort en rechts staat het halfregelmatige projectieve veelvlak van de tweede soort.

vlak, [3] [p. 267, p. 280, p. 300]. Allereerst is er het algebraïsch oppervlak van Steiner dat gedefinieerd is door de vergelijking

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 3xyz.$$

Het oppervlak ziet er inderdaad uit als een minder hoekige variant van de heptaëder, figuur 8. Ook bij het oppervlak van Steiner is er zelfdoorsnijding. Je kunt zo narekenen dat de coördinaatassen de lijnen van zelfdoorsnijding zijn. Het punt

$(1, 1, 1)$  ligt op het oppervlak; welke punten nog meer? In de figuur zie je ook punten waar de kromming van het oppervlak niet continu is, namelijk de eindpunten van de lijnstukken van zelfdoorsnijding.

De wiskundige Boy heeft een voorstelling van het projectieve vlak gemaakt die overall een continue kromming heeft [3] [p. 280–283], [1]. Men kan zich afvragen waarom er altijd zelfdoorsnijding is bij de voorstelling van het projectieve vlak in de ruimte. De reden daarvoor is de volgende. Het projectieve vlak is een *compact oppervlak*, dat wil zeggen in ieder punt ziet het projectieve vlak er bij benadering uit als een stukje uit het platte vlak (ieder punt heeft een omgeving die homeomorf is met  $\mathbf{R}^2$ ) en het projectieve vlak is als deel van een  $\mathbf{R}^n$  altijd begrensd en gesloten. Nu heeft Brouwer de volgende generalisatie van de Stelling van Jordan voor de ruimte bewezen: een compact oppervlak dat topologisch (in dit bijzondere geval continu en éénduidig) in de ruimte is ingebed verdeelt de ruimte in twee delen. We hebben gezien dat het projectieve vlak

geplaatst in de ruimte dat niet doet. Daarom moet er altijd zelfdoorsnijding zijn.

Je bent pas verlost van het verschijnsel van zelfdoorsnijding als je naar de  $\mathbf{R}^4$  gaat. In [3] [p. 300] wordt de volgende inbedding (dus echt één-één en zonder zelfdoorsnijding) van het projectieve vlak in  $\mathbf{R}^4$  gegeven. Zoals we in paragraaf 3 gezien hebben is het projectieve vlak  $\mathbf{P}^2$  topologisch de  $\mathbf{S}^2$  met identificatie van antipodenparen. We kunnen de  $\mathbf{S}^2$  dus gebruiken om het projectieve vlak te parameteriseren. De vergelijking van  $\mathbf{S}^2$  is

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Ieder punt uit  $\mathbf{P}^2$  heeft twee parameters; als  $(x, y, z) \in \mathbf{S}^2$  als parameter van een punt van  $\mathbf{P}^2$  optreedt, dan ook  $(-x, -y, -z)$ . Definieer nu  $f(x, y, z) = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbf{R}^4$  door

$$\begin{aligned} u_1 &= x^2 - y^2, & u_2 &= xy, \\ u_3 &= xz & u_4 &= yz. \end{aligned}$$

Het is direct duidelijk dat  $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$  voor alle  $x, y, z$ . Dus de beide parameters van een punt uit  $\mathbf{P}^2$  hebben hetzelfde beeld;  $f$  geeft dus een deugdelijke afbeelding van  $\mathbf{P}^2$  naar  $\mathbf{R}^4$ . Hij is ook continu. Dat  $f$  ook éénduidig (en dus topologisch) is, kan men als volgt vaststellen. Neem aan dat  $f(x_1, y_1, z_1) = (u_1, u_2, u_3, u_4) = f(x_2, y_2, z_2)$ . De hyperbolen  $x^2 - y^2 = u_1$  en  $xy = u_2$  hebben twee snijpunten die gespiegeld liggen ten opzichte van de oorsprong. Dus geldt  $(x_1, y_1) = \pm(x_2, y_2)$ . Uit de andere twee vergelijkingen volgt dan  $z_1 = \pm z_2$ . De punten  $(x_1, y_1, z_1)$  en  $(x_2, y_2, z_2)$  vormen dus een antipodenpaar en representeren hetzelfde punt van  $\mathbf{P}^2$ .  $\square$

**Verantwoording** Ik ben Tobias Baanders van het CWI veel dank verschuldigd voor de fraaie tekeningen die hij voor dit artikel heeft gemaakt.

## Referenties

- 1 F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, 1987
- 2 P.R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997
- 3 D. Hilbert en S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932, tweede uitgave 1996
- 4 A.K. van der Vegt, *Regelmaat in de ruimte*, Delftse Uitgevers Maatschappij, 1991
- 5 Magnus J. Wenniger, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, 1996

**Peter Stevenhagen**

Department of Mathematics  
University of California, San Diego  
9500 Gilman Drive, Dept 0112  
La Jolla, CA 92093-0112  
Verenigde Staten van Amerika  
psh@math.leidenuniv.nl

**Column Wiskundigen in den vreemde**

# Homeland Security

**Peter Stevenhagen promoveerde in 1988 aan de University of California te Berkeley. Zeventien jaar later is hij hoogleraar algebra en opleidingsdirecteur aan de Universiteit Leiden, en brengt hij een sabbatical door in San Diego. Er lijkt in Californië iets veranderd te zijn — en niet alleen daar.**

Een van de leuke dingen van de academische wereld is dat zij erg internationaal is, en dat je met je diploma van land A gemakkelijk terecht kunt in een vervolgopleiding of een universitaire baan van land B. De meeste universiteiten zien deze 'internationalisatie' als positief, en hebben iets als een International Office voor de toestromende buitenlanders. De resulterende academische migratie valt in het niet bij andere, door economische of politieke factoren bepaalde migratie, maar is vaak aan dezelfde regelgeving onderworpen. Wat die regelgeving is hangt sterk af van de landen A en B uit de openingszin. De mondiale tendens lijkt echter te zijn dat immigratie tegengestaan moet worden: wij Nederlanders weten immers dat die buitenlanders op onze banen en uitkeringen uit zijn, net als Amerikanen weten dat *illegal aliens* crimineel en terroristisch zijn.

Toen ik twintig jaar geleden student was in Berkeley viel het mij altijd op dat de gemiddelde Amerikaan (die je buiten

Berkeley overal aan kon treffen) aan een komisch aandoende xenofobie leed, en op serieuze toon wist te melden dat Amsterdam een *sinful city* was, of reizen in Europa vanwege die voortdurende terroristische aanslagen niet zo verstandig. Als je zei dat in Amsterdam het leidingwater ook door Amerikanen gedronken kon worden — al zouden ze de chloorsmaak van thuis missen — was men oprecht verbaasd. De VS vormden toen ook al een economisch en cultureel universum waar je je leven in door kon brengen zonder je ooit te realiseren dat er nog heel veel andere landen bestaan, elk bevolkt door mensen die evenzeer menen in het centrum van de wereld te wonen.

Als Nederlands student kon je je verbazen over de loodzware bureaucratie die aan de Californische staatsuniversiteiten heerste, over de kennelijke behoefte om voor iedere futiele handeling een speciaal formulier te hebben, en over de gedetailleerde regelgeving die je bijvoorbeeld vertelt met welke regelfstand en op welk type papier een proefschrift vorm dient te krijgen. Als buitenlands student had je de complicatie dat je nooit in de voorgegoten mal paste waar alle Amerikanen wel in pasten. Je had juist wel een paspoort, maar geen *credit rating*, *birth certificate* of *social security number*, en als je al een rijbewijs had was het zo'n rare roze flap waarvan Amerikanen direct zagen dat het geen rijbewijs was. Geen reden om ver-

ontwaardigd te zijn, je kwam immers uit een land waar ze niet eens een *driving record* van je bijhielden! Iedere keer lol als je weer eens moest bewijzen de *legal drinking age* te hebben. En veel minder lol als je een auto kocht en die wilde verzekeren.

Het aardige van zo'n haat-liefde-verhouding die je als academisch toerist met een land opbouwt is dat je er je verdere leven een bepaalde band mee houdt, er mensen kent en er bij tijd en wijle terugkeert. Ik ben zelf een goed voorbeeld: in plaats van weer een jaar opleidingsdirecteur in Leiden te spelen, heb ik tijdelijk mijn biezen gepakt om een jaartje in San Diego mee te draaien. Academische immigratie is een van de beste vormen van reclame die je voor een land kunt bedenken, en ik hoop dan ook van harte dat de Nederlandse universiteiten overstroomd zullen worden met Chinezen en andere Arabieren: dat zal onze normen en waarden veel verder uitdragen dan enige delegatie van politici of industriëlen ooit vermag te doen. Of de politiek dat beseft, betwijfel ik: wij gaan onze kostbare belastinggelden toch niet besteden om buitenlanders te scholen?

Je zou misschien denken dat in de VS de academische instroom als een groot goed gekoesterd wordt, want zonder Nazi-Duitsland zou het land nooit de toonaangevende wetenschappelijke positie verworven hebben die het nu heeft. In feite is het hele land door immigranten uit de klei getrokken, dus afgeven op immigratie ligt sowieso niet zo voor de hand. De realiteit is echter een beetje anders, en het lijkt of sinds 9/11 de altijd al sluimerende xenofobie nu paranoïde trekjes begint te krijgen.

Nog niet zo lang geleden kon je op het Amerikaanse consulaat in de ochtend met je brieven en formulieren langskomen, en 's middags je visum ophalen. Tegenwoordig moet je een call center bellen dat voor 15 dollar een afspraak op het consulaat verzorgt. Niet in dezelfde week, maar over een maand of nog erger. Een Venezolaanse collega mailde me deze week nog dat hij moeite heeft om binnen zeven maanden een afspraak te krijgen in Bogota – wat erg nuttig is als het congres in Texas waarvoor ik hem uitnodig over vier maanden is.

Een afspraak op de ambassade betekent slechts dat je op een lijst komt van mensen die die dag naar binnen mogen, niet dat je mag verwachten dat er die dag iets voor je zal gebeuren. Wie na eindeloze controles uiteindelijk binnen is moet namelijk drie loketten af, om achtereenvolgens zijn formulieren geaccepteerd te krijgen, honderden dollars te betalen en tenslotte te spreken met een consulaire officier. De formulierenwinkel is in het kader van de *homeland security* uitgegroeid tot een industrie van bloedstollende omvang. Sommige ellenlange formulieren moeten verplicht met een webprogramma van de ambassade worden ingevuld dat alleen onder bepaalde besturingssystemen draait, voor andere wordt juist een zwarte ballpoint voorgeschreven. Alles in vijfvoud als je zoals ik een gezin met drie kleine meisjes met je meesleept, en vanzelfsprekend moeten er pasfoto's bij van een speciaal formaat dat slechts bij een paar fotografen standaard leverbaar is.

Het eerste loket, dat de formulieren aanneemt, is het ergste, en tijdens het wachten ben je ooggetuige van veel menselijk

leed. Een minzaam grijnzend mannetje is daar aan de lopende band bezig om mensen uit alle uithoeken van het land het consulaat weer uit te krijgen, terug naar Enschede voor een volgende afspraak over een week. Immers, de foto heeft wel het goede formaat maar het oor is niet zichtbaar, de achtergrond is toch meer lichtgrijs dan echt wit, of je denkt geheel ten onrechte dat straks de visa voor je gezin in één volgepostzegelde, aangetekend te versturen envelop mogen in plaats van in vijf verschillende. Aanvragers onder de 45 zoals ik moeten een lijst inleveren van al hun bezoeken aan het buitenland in de afgelopen *tien* jaar ('ja meneer, een dagje naar Antwerpen is ook een bezoek aan het buitenland'), en de adressen en telefoonnummers van hun complete familie (ouders, broers en zussen). Iedereen tot baby aan toe moet bij herhaling schriftelijk verklaren geen terrorist te zijn, en geenszins van plan te zijn om in de VS criminele activiteiten te ontplooiën. Zouden ze nou heus denken dat Bin Laden zich eerst laat koeionneren op een consulaat en vervolgens 'ja' aankruist bij de terroristenvraag?

In San Diego had de universiteit voor de verse buitenlanders een verplichte incheck-bijeenkomst, waar mijn visumformulier getekend werd 'om reizen binnen de VS mogelijk te maken', en mijn aankomst aangemeld werd in de *exchange-visitor-database* waar ik mij in Nederland al voor veel geld in had moeten registreren. Op serieuze toon werd me te verstaan gegeven dat dit land in oorlog was, dat San Diego veel militaire bases heeft, en dat ik altijd mijn paspoort en visumformulieren op zak moest hebben. Zo vlakbij de Mexicaanse grens wil men nog wel eens onverwacht op bepaalde wegen identiteitspapieren van automobilisten controleren. Daar kon ik droogjes op reageren met de opmerking dat al die dingen mij reeds vertrouwd waren van mijn reizen naar de Sovjet-Unie in de jaren tachtig – er kan veel veranderen in twintig jaar.

Hoe anders dan is de situatie bij ons in Nederland! Onze immigratiedienst is er de afgelopen twee jaar in geslaagd om de immigratie naar Nederland zo ongeveer te halveren: reden voor trots en tevredenheid. Hoe dat kan begrijp ik wel als ik zie wat de geprivilegieerde behandeling is die onze 'internationale' Leidse masterstudenten en postdocs krijgen. Door een *deal* die de *International Office* met immigratie heeft, krijgen deze studenten middels een 'versnelde procedure' een visum. Dat lukt niet altijd binnen drie maanden, en als de arme student getrouwd is komt vrouwlief niet in aanmerking voor deze vlotte behandeling – die kan het eerste halfjaar dus zeker niet mee. Ik heb zelf nu het omgekeerde probleem: anders dan mijn drie bloedjes van kinderen moet mijn vrouw officieel halverwege mijn sabbatical het land weer uit. Aan Hollandse constructies met samenwoners en geregistreerde partners doet de Amerikaanse immigratie namelijk niet: normen en waarden bestaan onder Bush meer dan in een *sinful city* als Amsterdam. Ik zal eens kijken of ik de wetenschappelijk directeur van ons Leidse instituut, die ongetrouwde werknemers met kinderen tolereert en mij formeel dit sabbatical verleent, in dezen niet succesvol kan *sue*-en.

## Willem van der Poel

Faculteit Elektrotechniek Wiskunde en Informatica  
Technische Universiteit Delft  
postbus 5, 2600 AA Delft  
w.l.vanderpoel@cs.tudelft.nl

### Geschiedenis Gerrit van der Mey

# Met drieënzestig symbolen

**Zevenentwintig jaar lang is de doof-blinde wiskundige Gerrit van der Mey een van de medewerkers van Willem van der Poel geweest. Hij had een cruciale rol in de ontwikkeling van software voor de ZEBRA en latere computers. Door zijn dubbele handicap zijn zijn verrichtingen in de publieke literatuur onderbelicht gebleven. Ten onrechte.**

Gerrit van der Mey werd geboren op 5 januari 1914 als zoon van een bekende bollenkweker in Lisse. Door een open verbinding tussen buitenoor en middenoor kreeg hij op vier-en-een-half-jarige leeftijd meningitis. Totale blindheid was het gevolg. Hij vertelde me wel eens, dat hij nog herinnering had aan statische beelden van de zichtbare wereld, zoals rode daken of zeiltjes op de Kaag.

Zijn lagere schoolopleiding kreeg hij op een Nederlandse blindenschool. De middelbare school volgde hij aan de *Blinden Studien Anstalt* in Marburg, Duitsland. Zijn leraar wiskunde, Friedrich Mittelsten Scheid onderkende zijn talent voor wiskundige. Met deze leraar heeft hij verder zijn leven lang contact gehouden.

Na terugkeer in Nederland ging hij in 1936 wiskunde studeren in Leiden, maar in 1941 werd de Rijksuniversiteit Leiden door de Duitsers gesloten en Van der Mey moest uitwijken naar de Vrije Universiteit in Amsterdam. Hij studeerde met lof af in 1943 bij Koksma en Haantjes [1]. Gedurende zijn studie was hij nauw bevriend geraakt met Mart Steenland, die later hoogleraar natuurkunde in Eindhoven is geworden. Mart is levenslang zijn boezemvriend gebleven.

In januari 1945 sloeg het noodlot wederom toe: meningitis. De medische wetenschap was nog niet zo ver gevorderd dat de open verbinding met het middenoor effectief gerepareerd kon worden, en penicilline was nog niet beschikbaar. Deze keer verloor hij het totale

gehoorvermogen en daarmee ook het evenwichtsgevoel. Het kostte hem een flinke tijd om op het spiergevoel in de voeten te leren lopen. Na veel oefenen slaagde hij erin om weer zelfstandig met zijn geleidehond overal te komen.

In die tijd hebben zijn ouders veel voor hem gedaan. Zo ontstond in die tijd het brailledoosje, een zeer klein apparaatje met zes toetsen die direct de pennetjes in de vorm van een brailletter omhoog brachten. Voor intimi is dit in de eerste tijd het middel bij uitstek geweest om met hem te praten.

Uit Marburg kende hij ook het *Lorm alfabeta* [4], een systeem van tekens met tikjes en strekjes op de vingers, dat vooral in Oostenrijk en Duitsland in gebruik is geweest voor doof-blinden. Met Lorm was het mogelijk om zonder mechanische hulpmiddelen met hem te praten, althans voor intimi. Naast het leren lopen pakte hij ook de studie wiskunde weer op en nauwelijks een jaar later promoveerde hij bij Van der Woude op het proefschrift *De resultant in de theorie der algebraïsche krommen*. Een proefschrift met meetkundige inslag mag voor een blinde bepaald opmerkelijk heten.

### Oergehoor

Het was onduidelijk wat het leven hem na de promotie zou brengen. Wel verbeterde zijn communicatie met de buitenwereld. Op het Centraal Laboratorium van de PTT construeerde Henk Mol, de latere hoogleraar fonetiek in Amsterdam, een eerste elektrische braillemachine: een gewoon toetsenbord en maar één letter op de plaats waar de blinde zijn vinger moet houden [4]. Het braille voelen op één plaats vereiste ook weer speciale oefening. In ieder geval kon Van der Mey nu met iedereen praten. Ondanks zijn totale doofheid had hij altijd de indruk dat hij zichzelf wel kon horen spreken. Dat was een combinatie van spierge-

voel bij het spreken en het zelf voelen van de trillingen. Hij noemde dat zelf het oergehoor. Bij het lormen of spreken met de braillemachine sprak hij zelf altijd mee wat hij hoorde, waardoor een geroutineerde spreker woorden kon afbreken zodra ze goed 'geraden' waren. Dat er een inwendig eigen gehoor was bleek ook duidelijk uit het feit dat hij zijn hele verdere leven altijd met uitstekende dictie is blijven spreken. Alleen bij het spreken voor publiek moest een begeleider de spreeksterkte wel eens aanpassen. Daarvoor bestond een teken op de hand.

Na mijn eigen afstuderen in februari 1950 kwam ik ook te werken op het Centraal Laboratorium van de PTT, later herdoopt tot *Dr. Neher Lab* (DNL), in Leidschendam. Daar ging ik werken aan het ontwikkelen van een elektronische rekenmachine en ik kwam er in aanraking met Henk Mol. Begin 1951 polste Mol of Gerrit van der Mey niet mee kon werken aan het programmeren van computers, toen nog rekenmachines genaamd.

Het voordeel van het vak programmeren was dat het in die dagen nog niet bestond. Alles moest van de grond af worden opgebouwd. Geen literatuur om te raadplegen. Dat was een groot voordeel voor een blinde. Gerrit heeft zich van meet af aan met grote ijver gestort op het programmeren van de PTERA, de eerste volledig elektronische machine in Nederland.

Voor deze machine, in bedrijf van 1953 tot 1958, moesten de eerste programma's geschreven worden voor het gebruik van drijvende komma, met conversie van decimaal naar binair drijvende komma [3]. Dat was hoofdzakelijk het werk van Gerrit. De Mathematische Afdeling van het lab gebruikte zijn programmeerwerk voor toepassingen als kabelberekeningen, filters voor multipele draaggolfverbindingen, en hemelmechanica.

### Zeeziek

Het lab bouwde voor Gerrit een brailletelefoon, de zes puntjes over zes verschillende frequenties over een gewone telefoonlijn. Alle techniek was immers in huis. Nog iets later maakte onze meester-instrumentmaker Hellenendoorn een mechanische braille typemachine, een gewoon klavier met braillepunten als output. Nu kon ook omgekeerd iedereen met Gerrit van der Mey praten.

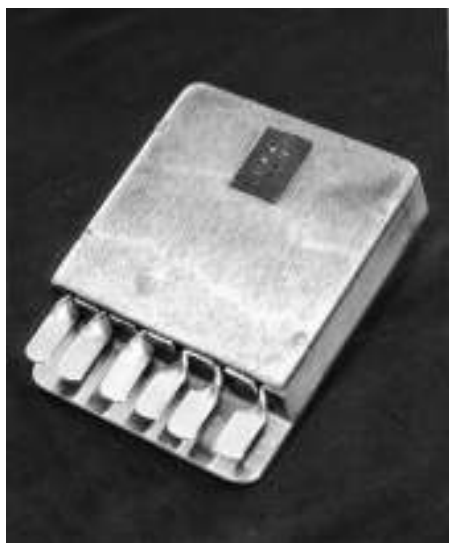
In 1957 werden Gerrit, zijn echtgenote Suus en ikzelf uitgenodigd voor de eerste wereldconferentie van de *Helen Kellerstichting* in Amerika. Het nieuws van de door ons ontwikkelde apparaten was daar ook doorgedrongen. Zeven weken hebben wij met een groep doof-blinden en begeleiders door Amerika en Canada langs verschillende instituten getrokken. Gerrit hield een aantal voordrachten, in het Engels! Voor mij was het ook de periode dat ik vloeiend leerde lormen.

Een niet geheel onverwacht verschijnsel trad op toen de boot naar Amerika twee dagen in zwaar weer kwam. Het was voor Gerrit vrijwel onmogelijk op het rollende schip te lopen zonder stevige begeleiding. Immers, zijn nieuwe lopen berustte op het voetengevoel en niet op het evenwichtsorgaan. Dat liet hem daarbij volkomen in de steek. Aan de andere kant kon hij ook niet zeeziek worden.

Een van de hoogtepunten van de reis was een bezoek aan president Eisenhower op het Witte Huis met de groep in de Oval Office.

### Instructie 358

Het echte werk voor Gerrit brak aan toen de PTERA vervangen werd door de ZEBRA, *Zeer Eenvoudig Binair RekenApparaat*. Het logisch ontwerp voor deze machine was ontwikkeld op het Dr. Neherlab, maar noch Philips en



Het eerste braille voeldoosje



Gerrit van der Mey, zijn vrouw Suzanne Melgerd en Willem van der Poel met de spreekmachine

noch de fabriek van Zuse in Duitsland had belangstelling om de productie op zich te nemen. Helaas moesten wij voor de productie uitwijken naar Engeland bij Stantec, *Standard Telephones and Cables*.

De taak waar ik samen met Gerrit voor gesteld stond, was het opzetten van de software voor de aflevering: een assembler, een operating system, floating point service en vooral de *Simple Code* [5–6]. De naam zegt het al: Simple Code was een gemakkelijk programmeerbare code voor toepassingsproblemen. Met Gerrit heb ik ettelijke weken in Engeland doorgebracht om alle software aan de praat te krijgen voordat de machines afgeleverd konden worden. Gerrit kon natuurlijk niet de machine bedienen, maar hij had een fotografisch geheugen voor de software. Als er iets misging in de assembler dan zei hij: “O, dan moet je kijken op instructie 358, daar zal de fout wel zitten.” Van de ZEBRA zijn ongeveer 55 exemplaren gemaakt. Tien daarvan zijn in en om Nederland geplaatst, de rest in hoofdzaak in landen van het Gemenebest als Canada, Australië, maar ook in Zwitserland en Portugal. Het is nauwelijks meer voor te stellen; de Technische Hogeschool Delft, de Rijksuniversiteiten van Utrecht en Groningen hadden een ZEBRA en dat was ook de enige computer in de hele universiteit. De Marine, het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, TNO en Heemaf in Hengelo hadden er ook een. De gebruikers hielden bijna elke maand een bijeenkomst in

de ZEBRA-club om nieuwe programma's uit te wisselen. Het succes van Simple Code was zo groot dat ook op de latere X1 van Electrológica een simulator voor Simple Code gemaakt is.

Gerrit typte alle documenten op een oude Remington. Daarop waren enkele kleine aanpassingen gemaakt om de stand van de rol af te kunnen voelen. Getypt werd op lichtdruk transparant, dat gemakkelijk uit te gummen was. Zijn vrouw corrigeerde de typefouten. Dat waren er zeer weinig. Gerrit was ontzettend secuur. Transparant had tevens het voordeel dat er lichtdrukken van gemaakt konden worden voor allen die deze documenten nodig hadden. Gerrit was thuiswerker en kon in alle rust een gigantische hoeveelheid werk verzetten. Onvergetelijk was de enorme inzet van zijn echtgenote, Suzanne Melgerd. Suus was een schat van een vrouw en buitengewoon behulpzaam. Heel veel van de documenten die hij toch nog moest raadplegen werden door haar gebrailleerd.

Het bijzondere aan Gerrit was dat hij een buitengewoon sterke persoonlijkheid was en daarbij een uiterst aangenaam mens. Hij had een zeer brede belangstelling. Zo bracht ik eens een bezoek met hem aan het *Museum voor het Onderwijs* in Den Haag. In dat museum was een enorme voorraad opgezette vogels. Gerrit was uit zijn horende tijd een goede vogelkenner. Nu gingen op speciale afspraak de kasten voor een blinde open en kon hij voor het eerst zien hoe groot



De brailletelefoon: de zes punten van het brailleschrift worden vertaald in zes verschillende frequenties, die vervolgens via een gewone telefoonlijn worden verzonden.



de voor hem bekende vogels waren. Hij verwonderde zich erover dat een vinkje zo klein was. Ook technische dingen wekten zijn nieuwsgierigheid, zoals een opengewerkt autodifferentieel of de synchronisatieringen van een versnellingsbak. Hij moest het naadje van de kous weten.

Hij vond het ook heerlijk om op reis te gaan. Hij kende het hele spoorwegnet uit zijn hoofd. Zodoende kon hij, nadat de conducteur was ingelicht, geheel alleen van Dieren naar mijn huis reizen, waarbij hij natuurlijk wel gebracht en gehaald werd. De treinen reden toen nog wel wat betrouwbaarder dan nu.

Gerrit was een uitstekend pianist. Na zijn doofheid had spelen natuurlijk weinig zin meer. Toch heb ik hem nog eens een deel van een partita van Bach horen spelen. Het vingergeheugen en het notengeheugen waren er nog. Het notenschrift voor blinden is een verschrikking. Alles moet van te voren gelezen en onthouden worden en uit het hoofd gespeeld worden. Zijn muzikaliteit is kenne-

lijk overgeërfd. Suus en Gerrit hebben drie dochters; twee van haar hebben muziek gestudeerd op het conservatorium.

### Balletje spelen

Gerrit was zeer geïnteresseerd in hogere programmeertalen, die toen sterk in opkomst waren. ALGOL 60 was juist in 1960 gedefinieerd. Talen als IPL5 [8] en LISP waren in ontwikkeling. Van deze vroege talen heeft alleen LISP door de jaren heen stand gehouden. In feite kan men onder de oppervlakte van alle formulemanipulatiesystemen nog steeds LISP als substraat herkennen. Mathlab, Mathematica, MAPLE en Smalltalk zijn allemaal derivaten van LISP. Gerrit pikte de draad snel op. Juist omdat LISP zo weinig syntax heeft en de semantiek geheel in de taal zelf gedefinieerd is, was dit *gefundenes Fressen* voor Gerrit. Zo maakte hij een LISP-systeem voor de ZEBRA, maar ook voor de PDP8 en de PDP9 die iets later in het machinepark van de Technische Universiteit Delft in gebruik kwamen [10–19].

De werkwijze was meestal zo: hij maakte een programma, wij moesten het op de machine testen. Daarbij kwam een hevige interactie tot stand via de braille telefoon/telex. Ik noem dat altijd balletje spelen. De een ziet iets dat nog fout is of wenselijk is, de ander doet een suggestie voor een oplossing. Als het dan uiteindelijk werkt zoals alles bedoeld is geeft dat bij beide partijen een bijzondere bevrediging. Bij vele projecten is dat zo gegaan, ook met andere medewerkers.

Voor de ZEBRA wilden we ook een ALGOL 60 compiler beschikbaar hebben. Het resultaat van de gezamenlijke inspanning met P.A. Witmans, G.M.M. Mulders, G. van der Mey is vastgelegd in rapport MA164. We definieerden de ZEBRA ALGOL-60-compiler geheel in ALGOL 60 zelf [7]. In 1964 werd deze compiler voltooid. ALGOL paste niet in zijn geheel in de ZEBRA. Eerst kwam de compiler in de machine; die vertaalde het bronprogramma in ob-

jectcode. Daarna moest de compiler het veld ruimen voor het runtime system om deze objectcode uit te voeren. Dat vereiste nogal wat manipulatie met de paper tapes. Wij volgden met de ZEBRA ALGOL compiler de strikte lijnen van het *Revised Report on the Algorithmic Language ALGOL 60* uit 1962 en Gerrits aandeel in deze compilerbouw was aanzienlijk.

Gerrit van der Mey leverde belangrijke bijdragen aan de ontwikkeling van het vak van programmeren en programmeertalen en slaagde erin deel te nemen aan het wetenschappelijk verkeer. Op uitnodiging van professor F.L. Bauer gaf hij lezingen in Mainz en München over de bouw van onze nieuwe ALGOL-compiler, natuurlijk in perfect Duits. Ook in Nederland hield hij verscheidene malen voordrachten over dit onderwerp. Voor een bijeenkomst in Vancouver over compilertechnieken had hij een referaat geschreven over concurrent garbage collection in LISP [28] en ALGOL68. Dat document heb ik daar in zijn naam gepresenteerd.

Voor de ZEBRA had Gerrit ook reeds een implementatie geschreven van LISP 1.5. Dat was geheel gebaseerd op het oorspronkelijke artikel van John McCarthy. De opvolger van de ZEBRA bij PTT was de Electrologica X8 waarvoor Gerrit eveneens de LISP implementatie voor schreef [9, 14–17].

### Wonderwerken

Gelukkig kon ik Gerrit meenemen naar mijn nieuwe werkring, toen ik benoemd werd tot gewoon hoogleraar zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hogeschool (TH) in Delft. Hoewel er toen al wel een ZEBRA



Het mechaniek van de spreekmachine



Een door Gerrit van der Mey getypte pagina [6]

op de TH aanwezig was, kreeg ik de beschikking over een vrij uitgebreide PDP8. Juist een RISC-achtige machine als de PDP8 was uitermate geschikt voor Gerrit om er even bij te leren. Er was heel weinig te leren aan de opdrachtcode. Zelf ben ik pas goed geïnfecteerd door LISP tijdens een sabbatical in de winter van 1964 in Stanford, de thuisbasis van John McCarthy. Een paar woorden over deze LISP waren voldoende voor Gerrit om zelfstandig een LISP voor de PDP8 te schrijven. Deze implementatie is ook onder zijn naam gepubliceerd in de *DEC User Society* (DECUS) library als programma DECUS 105-a [12–13].

Een van de elegante ideeën van Gerrit was om niet alleen een gelinkte *free space* te hebben, maar om ook een gelinkte stapel te maken, die van dezelfde vrije ruimte gebruik kon maken. Hij schreef natuurlijk ook de aan LISP inherente garbage collector. Het wonderlijke was dat Gerrit programma's kon schrijven die meteen foutloos waren. Later heeft deze LISP weer als model gestaan voor een grotere implementatie in 16k geheugen. Na de PDP8 kwam de PDP9 voor studententaakwerken.

Ook voor deze machine maakte Gerrit een implementatie van LISP. Dit was een nieuwe idee: de halfwoords LISP [17–18]. Normaal heeft een LISP cel een CAR en een CDR, de namen voor eerste en rest van een lijst. Het zou veel ruimte sparen als na het eerste element van een lijst meteen het tweede element zou staan in plaats van een link naar de rest. Helaas blijft een sequentiële lijst niet altijd sequentieel als er mee gemanipuleerd wordt. Hier moest de garbage collector te hulp schieten om zo mogelijk dat wat op volgorde zou moeten staan ook weer op volgorde te krijgen. Deze garbage collector is een van de wonderwerken van Gerrit geworden.

Machines verouderen snel. Na de PDP9 kwam de PDP11. Op deze machine hebben wij van het begin af aan bijna uitsluitend UNIX gedraaid. Wederom moest Gerrit een andere taal leren, namelijk de programmeertaal C, die de basistaal van UNIX was. Van het operating system zelf hoefde hij nooit veel te weten, want hij werkte zelf nooit aan de machine, maar schreef uitsluitend programma's voor deze machines. Taken als inlezen en debuggen werden door anderen gedaan. Een van mijn medewerkers Carel Stillebroer en mijn latere afstudeerder Jan van Katwijk hebben intensief met Gerrit aan diverse projecten gewerkt.

Onze belangstelling richtte zich geleidelijk aan meer op de theorie van het programmeren. Zelf had ik al een college symboli-



Bij Eisenhower in de Oval Office

sche logica opgezet. Turingmachines, automaten theorie en daarmee ook cellulaire automaten kwamen meer in het centrum van de belangstelling. Ook de theorie van combinatoren en lambda calculus fascineerden mij. Er was niet veel voor nodig om met combinatoren de belangstelling van Gerrit te wekken. In korte tijd werden enkele implementaties door Gerrit gemaakt, zowel voor de PDP8 LISP als voor de PDP9 halfwoords LISP. Enkele studenten hielpen ook mee goede implementaties te maken in C en enkele andere talen, waaronder ALGOL68. Een van die studenten was Chaim Schaap, een bijzonder begaafde werker. Deze samenwerking resulteerde in een groot artikel van ons drieën, Gerrit, Chaim en mijzelf, in *Indagationes Mathematicae* [30]. Dat artikel bood de volledige implementatie in (PDP8) LISP. Door de gemakkelijke portabiliteit van LISP is dat weer de basis geworden van latere implementaties voor de pc, die nu nog steeds worden gebruikt.

Een van de meest geniale vondsten van Gerrit is geweest: het inzicht dat de zogenaamde *paradoxale combinator*, ook wel genaamd de recursie-operator of fixed-point operator, en door ons geschreven als  $R$ , zelf ook weer een fixed-point is van de zeer eenvoudige combinator ( $SI$ ). Het merkwaardige hiervan is dat alleen al het feit dat  $R \Rightarrow (SIR)$  voldoende is om alle recursieve vormen in een gesloten niet-recursieve vorm uit te drukken, zonder

dat men expliciet een fixed-point van  $R$  hoeft te kennen. Ik kan u niet onthouden Gerrit's elegante bewijs hier weer te geven:

**Stelling** De fixed-pointoperator  $R$  is zelf weer een fixed-point van ( $SI$ )

**Bewijs**

|            |                                                      |
|------------|------------------------------------------------------|
| $Q = (FQ)$ | Stel $Q$ is een te construeren fixed-point van $F$   |
| $(RF)$     | Zou dus gemaakt worden door $R$ op $F$ toe te passen |
| $(SIRF)$   | en $R \Rightarrow (SIR)$                             |
| $(IF(RF))$ | volgens de werking van de $S$ operator.              |
|            | $(SXYZ) \Rightarrow (XZ(YZ))$                        |
| $(F(RF))$  | $I$ is de identiteit                                 |
| $(FQ)$     | levert inderdaad $(FQ)$                              |

Deze implementaties zijn geheel opgezet met een mechanistisch oogmerk: het moet echt werken. Ook een computer begrijpt niet wat er gebeurt maar het werkt wel. Gerrit had in deze materie een diep inzicht.

In de laatste fase voor zijn pensionering heeft hij zich nog intensief bezig gehouden met ALGOL 68 [20–27]. Het definiërend rapport van A68 bediende zich van vijf verschillende lettertypen. Toch heeft Gerrit kans gezien ook dat rapport nog grondig te begrijpen en zelfs enkele suggesties door te geven aan WG2.1.

Een bijzonder inzicht dat ik van Gerrit heb

meegekregen, berust op het feit dat hij alles moest doen met 63 braille symbolen. Het is mij wel eens opgevallen dat wiskundigen graag hun toevlucht nemen tot vele letterfonts waaronder Grieks en Hebreeuws en dan nog met superscripts, subscripts en underlining et cetera. Gerrit deed alles met 63 tekens! Dat heeft mij gebracht tot de stelling: Wat men met wit krijgt alleen niet duidelijk kan maken kan ook met gekleurd krijgt niet duidelijk gemaakt worden.

### Ridder

Na zijn pensionering in 1978 heeft Gerrit van der Mey het informaticavak totaal losgelaten en alles opgeruimd. Hij zat nog vol ideeën over wat hij het oergehoor noemde en met professor Ritsma, hoogleraar oorheelkunde in Groningen, heeft hij zijn ideeën daarover verder ontwikkeld [31].

In 1982 werd hij benoemd tot Ridder in de orde van Oranje Nassau. Daarover zei hij zelf: "Ik zie de ridderorde eigenlijk meer als een postuum eerbetoon aan mijn ouders en als een blijk van waardering voor mijn vrouw, schoonmoeder, kinderen en mijn vrienden. Zonder hen had ik nooit het leven kunnen leiden, dat ik nu leid."

In 1983 overleed onverwacht zijn vrouw

Suus. Voor Gerrit brak een moeilijke tijd aan, maar zijn positieve levensinstelling en zijn wilskracht bleven ongebroken. Nog steeds trok hij erop uit met zijn geleidehond naar de hem zo vertrouwde Veluwe bossen. Verder kreeg hij hulp van een vrouw uit de buurt die hem al voor die tijd bijstond. Een jaar later trouwde hij met deze vrouw. Zij heeft niet beseft wat het is om te leven met een zo uitgesproken persoonlijkheid als Gerrit. Een jaar later waren zij weer gescheiden. Als men nu zou denken dat daarmee de wilskracht van Gerrit wel gebroken zou zijn, heeft men het mis. Hij zei "Ach, ik heb er toch ook veel van geleerd". Zijn humeur was niet kapot te krijgen.

De laatste jaren van zijn leven bracht Gerrit door op *Kalorama*, in Beek bij Nijmegen, in het centrum voor doof-blinden. In november 2002 overleed Gerrit. Hij had al lang van tevoren bepaald dat hij zijn lichaam aan de wetenschap ter beschikking wilde stellen en zo gebeurde het. Later zijn alle intimi samengekomen en hebben ieder hun verhaal over Gerrit gedaan.

### Nalatenschap op cd

Gerrit van der Mey typte alle documenten op een oude Remington, op lichtdruk transpa-

rant; deze zijn vrijwel alle bewaard gebleven: een pakket van 20 cm dik in zwartschrift. In braille zou dit natuurlijk een veelvoud daarvan geweest zijn, maar de brailledocumenten werden na voltooiing van een karwei wel weggegooid.

In samenwerking met Don Hunter, een van de wetenschappers van de firma Standard Electric, die een simulator voor de ZEBRA had geprogrammeerd in Pascal, is die stapel documenten en programma's van 20 cm opnieuw ingevoerd in de computer. In de loop van ettelijke jaren zijn alle programma's wederom tot leven gekomen. In de laatste jaren zelfs de ZEBRA ALGOL. Daarvan was alleen het definiërend document MA164 beschikbaar plus een aantal krakkemikkige paper tapes die bijna nergens meer gelezen konden worden. De tussengelegen documenten waren inmiddels nergens meer te vinden. Zowel in Delft, in Groningen, als in Bradford waar ALGOL veel gebruikt werd, was alles weg. De hardware representation op vijfzats telexcode, de foutmeldingen, alles moest weer heruitgevonden worden. Het is allemaal gelukt. Er is nu een cd gemaakt waarop alle documenten van Gerrit, de fabriekshandboeken en nog veel meer in gescande vorm zijn vastgelegd. Natuurlijk alles uitvoerbaar met de simulator. 

### Referenties

- G. van der Mey, *De resultant in de theorie van de algebraïsche krommen*, Acad. proefschrift, VU Amsterdam 1945
- G. van der Mey, 'Determinant van Sylvester', *Verh. der KNAW, afd. Natuurkunde, Eerste Sectie*, Deel XIX, No 3, 1949, 39 pagina's
- G. van der Meij, Veel van de codering voor de PTERA is verloren gegaan. Hieraan heeft hij in de beginjaren '51-'58 bijgedragen.
- Dr.Ir. H. Mol, 'Conversation with the Deaf and Blind', *Het PTT Bedrijf*, Deel VI, no 1 (apr 1954), p. 11-19. (Hierin ook een beschrijving van het Lorm alfabet)
- G. van der Meij en W.L. van der Poel, Normal Input en Normal Output voor de ZEBRA. 3 dec '57, 100 pagina's
- G. van der Meij, Het grootste gedeelte van de codering van Simple Code voor de ZEBRA. Is geheel gescand en als zodanig aanwezig op de in de tekst genoemde cd. Een pagina is als voorbeeld in de dit artikel opgenomen.
- G. van der Meij, W.L. van der Poel, P.A. Witmans, G.G.M. Mulders, 'Process for an ALGOL Translator', *Report 164 MA*, Dr. Neher Lab. of the Dutch Postal & Telecommunication Services, July '62, 122 pagina's. (Deze ZEBRA ALGOL60 compiler is weer geheel gereconstrueerd en aanwezig op de cd. De omzetting in ZEBRA code is verzorgd door Witmans en Van der Poel, de reconstructie is verricht door Don Hunter en Van der Poel, 2002)
- G. van der Meij, *IPL (Information Processing Language) voor de ZEBRA*, 1 mar '64, Volledig handboek en alle code, 134 pagina's
- G. van der Meij, *Invoerprogramma voor de X8*, 1 apr '64, 10 pagina's
- G. van der Meij, *LISP-computer voor de ZEBRA*, 7 apr '65, 112 pagina's
- G. van der Meij, *Multi-Stack LISP*, p. 12, 12 apr '66, theoretisch artikel over het meervoudig gebruik van stapels
- G. van der Meij, *LISP-Interpretator voor de PDP8*, 25 december '66 (volledige code), 63 pagina's
- G. van der Meij, *Digital Equipment Co. DECUS (DEC Users Soc). LISP for the PDP8*, programma 105a, '66
- G. van der Meij, *EL X8-LISP, ontwerp*, 24 feb '67, 14 pagina's
- G. van der Meij, *LISP-Interpretator voor EL X8, de Dubbelpunt-faciliteit*, 6 nov '67, 30 pagina's
- G. van der Meij, *Het starten van de LISP-interpretator*, 21, dec '67, 13 pagina's
- G. van der Meij, *Gebruik van het X8 geheugen*, 25 dec '67, 15 pagina's
- G. van der Meij, *LISP interpretator voor de PDP9, ongedateerde handleiding en theorie van de halfwoords garbage collector*, 51 pagina's
- G. van der Meij, *LISP interpretator voor de PDP9, ongedateerd, 1970?, systeemcode*, 120 pagina's
- G. van der Meij, *Notities on REPORT on ALGOL 68*, 20 sep '71, 14 pagina's
- G. van der Meij, *Compilatie van ALGOL-68 programma's*, 1 sep '72, 18 pagina's
- G. van der Meij, *Compiler voor ALGOL-68*, 8 sep '72, 32 pagina's
- G. van der Meij, *Compilatiestap 2 ALGOL-68*, 19 nov '72, 9 pagina's
- G. van der Meij, *Kransklassen, een beschouwing over recursieve datastructuren in ALGOL68*, 20 feb '73, 18 pagina's
- G. van der Meij, *Compilatie en elaboratie van ALGOL-68 programma's*, p. 21, feb '73
- G. van der Meij, *Letter to the members of the WG 2.1 concerning the Sintzof-Mailloux syntax of ALGOL-68*, 30 mar '73, 13 pagina's
- G. van der Meij, *Proposal concerning constructs defining layers*, 25 jun '73, 6 pagina's
- G. van der Meij, *General List Processing. Paper, intended for ALGOL Implementation Conference*, Vancouver 1973 (Presented by Van der Poel)
- G. van der Meij, *Braille wiskundeschrift*, 7 mei '74, 15 pagina's
- W.L. van der Poel, C.E. Schaap and G. van der Mey, 'New arithmetical operators in the theory of combinators', *Indag. Mathematica*, vol 42, fasc. 3 (1980), 54 pagina's. (Hierin is het combinatorenprogramma in PDP8 LISP vervat.)
- G. van der Meij, *Postauditief Gehoor en echopeilzin*, Groningen: Meisner Fonds, 2004, 48 pagina's

Gunther Cornelissen

Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Postbus 80010

3508 TA Utrecht

cornelis@math.uu.nl

Boekbespreking *Requiem voor Newton*

# Turks fruit der natuurkunde

Van mathematisch fysicus Klaas Landsman is deze zomer het boek ‘Requiem voor Newton’ verschenen. In de landelijke pers is er ruim aandacht aan besteed. Welke indruk maakt het boek op een vakgenoot? Gunther Cornelissen is onderzoeker op het gebied van de arithmetische algebraïsche meetkunde en verwierf in 2003 een vidi-beurs van het NWO voor het project ‘Non-archimedean Geometry and Automorphic Forms’. Hij geeft zijn mening over het boek.

Om een indruk te geven van het boek, confronteer ik u graag met het volgende fragment.

“Met de ICE naar Bonn gekomen zijnde, begaf ik mij die zondag rechtstreeks naar het Max-Planck Institut für Mathematik, mij niet realiserende dat dit gerenommeerde wiskundige instituut uiteraard op zulk een rustdag officieel gesloten is. Maar niet getalmd, ik verwijlde enige minuten voor de gesloten deur tot vrijwel ogenblikkelijk een zwaar bebrild type met versleten jeans, rugzak en Russisch accent de deur voor mij opende en zich, zonder verder één woord met mij te wisselen, zwijzaam in zijn kamer terugtrok om zich aldaar aan de dagelijkse wiskunstige arbeid te wijden. Meteen ging ik naar de leszaal, waar ik oog in oog kwam te staan met de buste van

Max Planck *himself*.

Terwijl ik de beeltenis kort bevoelde en in vervoering raakte —dit was per slot van rekening de man van het kwantum, waaraan ik mijn tot op heden vrij korte edoch gehele wetenschappelijke leven had gewijd— betrad een lieftallig ogende jongedame de ruimte, en zei in perfect Duits “Hi, ik ben Hellen”. Ik keek diep in haar ogen en onze lippen naderden elkaar, toen een oudere man met vettige haren op gypen de zaal binnenkwam. Daarop stak Hellen een sigaret op en vroeg “Wat is eigenlijk étale cohomologie?” Ik antwoordde kuchend: [Hier wordt een monoloog van drie bladzijden weggelaten, voorzien van honderd eindnoten] “Aha”, zei Hellen. Ik vervolgde rochelend: [nog een monoloog van een aantal pagina’s] Hierop bereikte de sigarettenrook het plafond en schalde het brandalarm.

De man met de vettige haren bleek Korstmos te heten en nog zo dom niet te zijn. Omdat des avonds in de opera van Bonn een recital plaatsvond van de beroemde Cecilia Bartoli, begaven wij ons ten gepasten tijde richting *Beethovenhalle* en raakten in extase tijdens de aria “Quando? Quanto?”.<sup>1</sup>

Toen wij uit het gebouw traden, sprong Hellen plotseling tevoorschijn uit één van de bosjes voor de ingang, en zei, nog voor wij

koud gerstenat tot ons konden nemen: “Maar hoe vergelijk je étale en kristallijne cohomologie?” Ik vervolgde mijn antwoord van des middags: “Die Grothendieck was een linkse zweverige . . . , maar hij bedacht wel dat als  $X$  een gesepareerd<sup>2</sup> schema is, [hier worden nog eens drie bladzijden met honderd eindnoten weggelaten].”

## Een non-recensie

Dit is eigenlijk een non-recensie van het boek *Requiem voor Newton* van Klaas Landsman. Ik kan het boek niet echt als doorsnee lezer bespreken, omdat ik de auteur persoonlijk ken, veel sympathie voor hem voel, maar hem dus door het boek heen zie staan. De meeste feiten uit het boek ken ik uit mijn wiskundig-natuurkundige studietijd. Bovendien heb ik de fout gemaakt het boek als roman te lezen in plaats van het populair-wetenschappelijk werk dat het eigenlijk is. Al deze karakteristieken maken mij tot ontypische lezer, maar misschien binnen het NAW-publiek dan weer niet. Voor lezers van dit blad is mijn recensie wellicht toch van waarde.

Bovenstaand fragment is niet uit het boek afkomstig; het is een eigen parodie op het boek van Landsman, maar dan met een wiskundige post-doc in Bonn in de hoofdrol.

### Aanbevelingen voor de potentiële lezer

Het strekt de potentiële lezer van Landsmans boek tot aanbeveling tenminste twee bladwijzers klaar te houden. Het boek heeft 458 eindnoten, die een kwart van het werk in beslag nemen. Het is nuttig de bladzijden 137 en 138 op een warme zomerdag te lezen, want door het op- en neerbladeren bij het lezen van de tien noten wuift de lezer zich zonder verdere inspanning verfrissende koelte toe.<sup>3</sup>

Twee eindnoten (171 en 176) bevatten de complete playlist van een Neil Young/Bob Dylan concert. Ik spoor de lezer aan deze lijst op zijn/haar mp3-speler te laden en op die manier de roman multimediaal interactief te beleven. Door het beluisteren van deze twee neuzelende snerpzagen vermijdt de lezer bovendien knikkebollen bij fysieke uitweidingen.

Hiermee komen we bij een volgend karakteristiek punt van het boek: iedereen erin is een *nerd*, vooral dan de hoofdpersoon, een weinig verholten evenbeeld van de auteur zelf. Volgens Max Goldt hoort Dylan en *nerd* dan ook in hetzelfde lijstje thuis, dat ongeveer als volgt gaat: *Bettfrisur, Oberkörperpilz, Tiefkühlpizza, sehr große Schlüsselbünde, sehr kleine Kaffeemaschinen, und die meisten halten Bob Dylan für einen großartigen Songwriter*.<sup>4</sup> De karakters in het boek zijn hiermee perfect gecast. Ik ken in werkelijkheid niet veel natuurwetenschappers die zich als in dit boek gedragen, bijvoorbeeld hun sociale incompetentie verbergen achter *ellenlange* gesprekken over het onzekerheidsprincipe, matrixmechanica, de optica van Young, en daarbij blikken bonen in tomatensaus opentrekken.

Een lezer die toevallig deelneemt aan een cursus 'creatief schrijven' wordt bij het lezen van dit boek beloond met een schat aan voorbeelden van hoe het grammaticaal en stilis-

tisch niet moet. Bijna iedereen in het *Requiem* spreekt in monologen en in schrijftaal, en dan zelfs nog de schrijftaal die hoort bij ingezonden stukken in studentenverenigingsbladen. Regel één: schrijftijd 'begeven' in plaats van 'gaan', 'aldus' in plaats van 'dus', enzovoort.

Ik raad de lezer aan de literatuurlijst achterin het boek zorgvuldig te raadplegen: zij onderstreept niet alleen de eruditie van de auteur, ook het letterlijke gewicht van sommige van de opgegeven referenties komt van pas. Van Israel's *Radical Enlightenment* is bijvoorbeeld welbekend dat dit boek succesvol als voldoende zwaar slagwapen tegen minder verlichte geesten kan worden ingezet.

Landsman bedient zich met intelligentie en onbedaarlijke gretigheid van licht schokkende gezichtspunten. Wellicht meent hij dat dit beter beklijft, ondanks zijn soms feitelijk meer genuanceerde meningen. Zo uiteraard ook weer in dit boek, waar sommige karakters met naam en toenaam in weinig woorden worden neergesabeld. Dit strookt met de Nederlandse misvatting dat het contextloze gebruik van woorden voor geslachtsdelen niet storend of zelfs grappig is. Op die manier draagt het boek bij tot de inburgering van migranten die met deze donkere kant van de Nederlandse omgangsvormen nog geen kennis mochten maken. Kortom: het *Turks Fruit* der Natuurkunde.

### Populariseren?

Vele van deze problemen zijn inherent aan de constructie van het boek. De studentieke beschrijving van het saaie leven van een post-doc in Cambridge is een dunne raamvertelling, die dialogen aaneenrijgt die elk op zich een populair essay over een natuurkundig thema vormen.

Vrij Nederland beschreef Landsman als "vaardig popularisator", en ik geef toe dat

dit gedeeltelijk klopt. De wetenschappelijke inhoud van het boek is namelijk niet het probleem.<sup>5</sup> Gooien we de raamvertelling weg, dan zien we stukjes met relatief weinig formules en soms rake metaforen, waarin Landsman zijn hele vakgebied in kort bestek weet ten toon te spreiden zonder subtiliteiten te veel geweld aan te doen. Soms gaat het ook flink mis, vooral later in het boek, als er een lavastroom aan informatie op gang komt, de eindnoten de overhand nemen, allerlei notaties en formules opduiken, enzovoort.<sup>6</sup>

Nogmaals: waarom moet dit alles worden ingebed in een flauwe raamvertelling over het niet bereiken van geslachtsgemeenschap met een promovenda van Hawking, waarbij een schier eindeloze rij kartonnen tegenspelers voordurend als instant-klankbord vanachter bosjes opspringt en een diepzinnige wetenschappelijke vraag stelt? Was het gewenste lezerspubliek anders niet bereikt?

Misschien was Landsmans boek er minder bekaaid vanaf gekomen als ik het als tiener had gelezen. Ik denk aan Rudy Kousbroeks bespreking van Hofstadters *Gödel, Escher, Bach* (GEB) in de *NRC*: "...dat ik me betrapte op het verlangen om weer zeventien te zijn, alleen maar om met zo'n boek te kunnen leven." Alhoewel, als tiener-*nerd* had ik de raamvertelling van Landsman vast ook al flauw gevonden en het boek misschien wel gewoon weggegooid (op *GEB* was ik dol).

Rest mij nog Klaas Landsman van harte te bedanken voor het schrijven van dit boek, want de door hem zo vaak als saai afgeschilderde tafelgesprekken tussen wiskundigen kunnen nu tenminste met parodieën op zijn *Requiem* worden verrijkt. ◀

*Requiem voor Newton*, Klaas Landsman, Contact, Amsterdam, 2005, ISBN 9025426913, 399 pagina's, prijs € 27,50

### Noten

- De rest van het programma bestond uit de aria's 'Das klingen so scheußlich' uit *Die Zauberflöte* en 'Auszug der Gäste' uit *Tarnhäuser*.
- Dit betekent dus dat het diagonaal-morfisme een gesloten immersie is.
- Deze stijlfout wordt passend op de spits gedreven in Umberto Eco's 'Hoe men een inleiding voor een tentoonstellingscatalogus schrijft', in: *Il secondo diario minimo*, Bompiani (1992); voor zover ik weet alleen in Duitse vertaling te vinden in *Wie man mit einem Lachs verweist und andere nützliche Ratschläge*, dtv (1999), dat ik van harte kan aanbevelen.
- 'Ein gutes und ein schlechtes neues Wort für Männer', in: *Mind-boggling* (=Evening Post van Max Goldt (2001); ook aanbevolen.

- Dat Landsman wat te zeggen heeft, blijkt wel uit zijn schitterende Nijmeegse oratie, zie: NAW (5), 6, no. 3 (2005), 206–215.
- Wat technische opmerkingen over de uitgave van het boek: zoals gezegd gaat het soms mis met formules. Ik weet in eindnoot 100 (die langer dan een bladzijde is) bijvoorbeeld niet wat "I" is, en in eindnoot 216 niet wat "T" is. In noot 133 worden drie symbolen ingevoerd die in de nabije omgeving niet te vinden zijn. Dit is een typische wiskundige schrijffout in de volgende trant: "elk geheel getal heeft een ontbinding in priemgetallen" weergegeven als "elk geheel getal  $n$  heeft een ontbinding in priemgetallen  $p_i$ ". Latere eindnoten, zoals 326, waar het om niet-commuteren gaat, kan een lezer zonder quantummechanische achter-

grond werkelijk niet meer volgen. De (hopelijk ingeschakelde) lector van Contact zijn heel wat drukfouten ontgaan, vooral in de latere delen van het boek. Vesalius heet Versalius, uiteraard worden nullen afwisselend als "0" en de letter "o" weergegeven, "intensief", enz. Bij de tiende herziene druk en de Engelse vertaling wordt hier hopelijk rekening mee gehouden.



Illustratie: Peter van Straaten

"DAT WAS HEERLIJK.  
MAAR WAT IS EIGENLIJK HET ONZEKERHEIDSPRINCIPE?"

**Chris Zaal**

Amstel Instituut  
Universiteit van Amsterdam  
Kruislaan 404  
1098 SM Amsterdam  
zaal@science.uva.nl

**Interview** Klaas Landsman over zijn boek *Requiem voor Newton*

# Avonturen van een schlemiel

Een hoogleraar heeft een drukke baan: onderzoek doen, onderwijs geven, promovendi begeleiden, commissiewerk. Aan 'outreach' komen de meeste professoren niet toe. Maar Klaas Landsman is geen gewone hoogleraar. In zijn vrije uren schreef hij een autobiografische roman over de ontstaansgeschiedenis van de kwantummechanica. En met succes: zijn *'Requiem voor Newton'* is inmiddels toe aan een derde druk.

In de jaren 1951–1953 ontrafelden Francis Crick en James D. Watson de structuur van het DNA. Het avontuurlijke verloop van dit onderzoek dat in 1962 beloond werd met de Nobelprijs, staat levendig opgetekend in Watsons boek *The Double Helix, A Personal Account of the Discovery of the Structure of DNA*. Het is een geschiedenis vol met blunders, intens en bij vlagen hilarisch. In dit boek geen roestvrijstalen wetenschappers die in blinkende laboratoria vooruitploegen, maar levende wetenschap met alle gebreken van dien. Watson beschrijft haarscherp het geroddel, de achterklap en de kleingeestige aanvallen van collega's die zich niet konden vinden in het feit dat met fysische methoden biologie bedreven werd. Wetenschap is in *The Double Helix* geen lineair proces, maar een spannend verhaal waarin de betrokkenen veel fouten maken en voortdurend in het duister tasten.

Daarom blijft het boek tot het eind toe spannend ook al is de uitkomst bij de lezer allang bekend.

De succesfactoren van Watsons boek — het persoonlijke aspect en het niet-lineaire karakter van wetenschap in wording — zijn eveneens terug te vinden in het recente boek van Klaas Landsman. In zijn *Requiem voor Newton* is de hoofdrol ook weggelegd voor de auteur. En het onderwerp van het boek is eveneens de wordingsgeschiedenis van wetenschap, in dit geval de ideeëngeschiedenis van de natuurkunde en de kwantummechanica in de periode 1660–1990.

Daarmee stopt meteen elke verdere vergelijking. Het boek van Landsman is nadrukkelijk fictief, ook al zijn de gebeurtenissen erin gebaseerd op de belevenissen van de auteur in de tijd dat hij als postdoc in Cambridge werkte. Het boek wordt niet voor niets geafficheerd als een *roman*. Het romantische deel betreft voornamelijk de woon- en werk-omstandigheden van een postdoc, de eet- en drinkgewoontes in Cambridge en de amoureuze avonturen van de hoofdpersoon met een drietal dames.

Meer nog dan een persoonlijke roman is het boek van Landsman een *ideeënroman*. Viervijfde deel van het boek behandelt op onderhoudende wijze de wordingsgeschiedenis van de moderne natuurkunde, met een na-

druk op de wetenschapsfilosofische aspecten. Maar de wetenschapsgeschiedkundige presentatie is zeker niet objectief. De keuzes en de accenten daarin zijn nadrukkelijk gebaseerd op de voorkeuren van de hoofdpersoon, een jonge fysicus die in het begin van het verhaal aankomt in Cambridge.

"Kotsend kwam ik aan op Marshall International Airport bij Cambridge", zo opent het autobiografische verslag van de avonturen van postdoc Klaas. Aanvankelijk is hij moederziel alleen. Niemand die hem verwacht, het academisch jaar is nog niet begonnen. Hij krijgt een kamer boven een discotheek, zijn avondmaal bestaat uit witte bonen in tomatensaus.

Ten einde raad zoekt Klaas op zijn eerste dag in Cambridge troost bij het standbeeld van Newton in de hal van Trinity College. Een portier dist Newtons geschiedenis in Cambridge op. Daarmee wordt het andere spoor van de roman geopend: het onderzoek naar Isaac Newton en de bronnen van de moderne natuurkunde. Illustere hoogleraren en schimmige passanten leggen de ideeëngeschiedenis van de moderne fysica bloot. In het eerste deel van het boek figureren klasieke helden als Spinoza, Young, Faraday, Maxwell, Lorentz, Einstein en Planck. Als de moderne kwantummechanica aan bod komt, zijn er hoofdrollen voor Heisenberg, Bohr, Schrödinger, Dirac, Von Neumann en Bell.

### Eregalerij

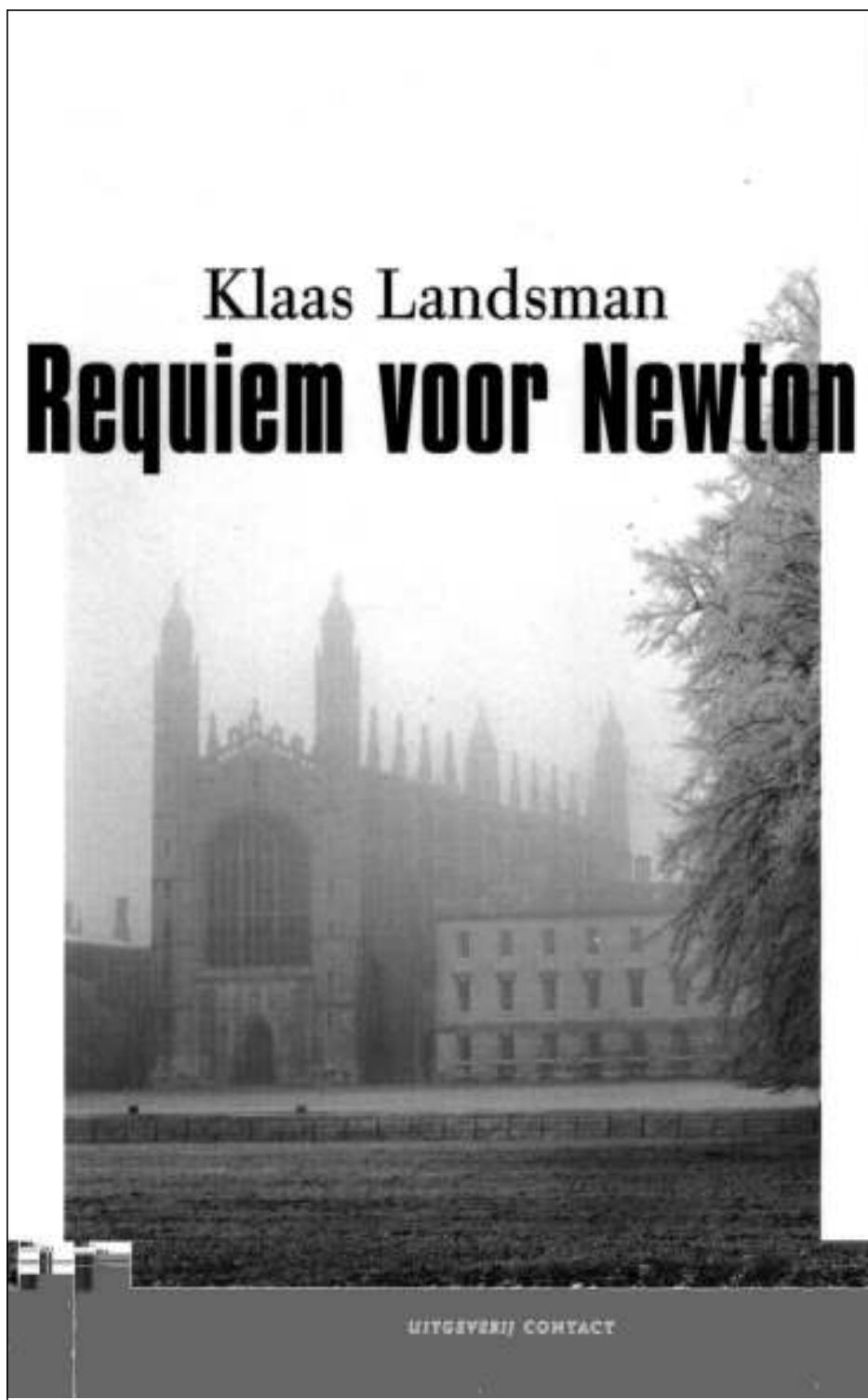
Geschiedenis is meestal niet het boeiendste onderwerp voor een roman, maar Landsman compenseert dit door een aantal slimme zetten. De ideeëngeschiedenis wordt opgevoerd aan de hand van dialogen tussen de verschillende personages. Verschillende personen belichten verschillende facetten, en ook domme vragen worden niet geschuwd: “Wist Huygens waarom lichtstralen zich niet achteruit voortplanten?”, vroeg Kosmos. [...] Dit had ik me zelf nooit afgevraagd.” (p. 58)

Verder wordt de geschiedenis van de natuurkunde op een filosofische manier behandeld, op het niveau van de ontwikkeling van de concepten: Is licht een golf of een deeltje? Bestaat er een ether of juist niet? Dergelijke kwesties dragen de historische lijn van deze roman.

Tenslotte doet Landsman op een aanstekelijke manier aan heldenverering. Zijn wetenschappelijke helden worden geroemd om hun vernieuwende inzichten, maar daar blijft het niet bij. Ook de minder sterke punten van de grote fysici komen uitgebreid over het voetlicht. Newton was een bijgelovige alchemist, Schrödinger een seksmaniak en ten tijde van de koude oorlog was Von Neuman een heuse oorlogshitser. Op levendige wijze worden deze maar al te menselijke details in het boek opgedist: tijdens een *Formal Hall* in St. John's, in de kroeg of tijdens een bezoek aan een naamloze fellow, een bezoek dat wegens opkomende misselijkheid van de hoofdpersoon afgebroken wordt —ook Klaas heeft zijn zwakheden.

### Ik Jan Cremer

Het boek geeft zeker geen waarheidsgetrouw verslag van het dagelijkse leven van een postdoc. Gewerkt wordt er bijna nooit. Voortdurend is de hoofdpersoon op jacht. Is hij niet op zoek naar de volgende bron met historische gegevens, dan is Klaas op vrouwenjacht. Want het academische leven van de hoofdpersoon wordt verstoord door de knappe blonde Deense Ellen, een PhD-studente van Stephen Hawking. In de roman circelen Ellen en Klaas om elkaar heen als twee elektronen rond een atoomkern. Ellen valt voor Klaas, maar ze heeft een Zuid-Afrikaanse vriend waar ze uiteindelijk voor kiest. Klaas valt voor Ellen, al lijkt het hem meer om haar uitstraling te gaan dan om haar persoon. De rol van versierder is Klaas niet op het lijf geschreven. De ene onhandige versierpoging volgt op de andere, met als hoogtepunt de scène waarop Klaas en zijn geliefde Ellen op een bed door de vloer zakken.



In dit boek speelt Landsman met zijn eigen rol. Net zoals hij zijn eigen helden menselijk maakt door hun zwakheden te benadrukken, relateert hij zijn eigen rol door op een clowneske manier de nerd te spelen. Soms is dat grappig, maar het kan ook anders uitpakken. Tijdens een werkbezoek van Tiny Veltman behandelt de hoofdpersoon Ellen dermate onheus, dat “je je serieus afvraagt waarom er zo’n enorme nerd moet rondlopen in een

mooi geschreven boek over natuurkunde”, aldus Claud Biemans in een bespreking voor het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde.

Een uitvoerige behandeling van de Bellongelijkheden aan de hand van een uitleg van het cricket-spel — compleet met spelregels — vormt het slot van de uitleg van de kwantummechanica. Daarna gaat Klaas op reis, waarbij hij een aantal aanvaringen heeft met het vrouwelijk geslacht. Het vrij abrupte einde

doet geforceerd aan. Dat is een beetje jammer voor zo'n mooi boek, dat leest als een trein, dat vlot geschreven is, dat heel Nederlands is in zijn verwijzingen (bijvoorbeeld naar *Ik Jan Cremer*) en dat op een bewonderenswaardige manier een historische lijn trekt van Newton tot de naoorlogse kwantummechanica. Maar het meest bewonderenswaardig is dat een 'gewone' hoogleraar wetenskap een succesvolle roman schrijft waarin op een hoogst originele manier wetenschap gepopulariseerd wordt.

### Hoe een roman tot stand komt

*Gefeliciteerd. Je boek Requiem voor Newton is inmiddels toe aan derde druk. Behalve mathematisch fysicus ben je nu ook succesvol romancier. Hoe is dat schrijverschap ontstaan?* "In 2001 interviewde Martijn van Calmthout mij voor de Volkskrant naar aanleiding van de Pioniersbeurs van NWO die ik toen ontving. Een klein deel van die onderzoeksbeurs zou besteed worden aan het populariseren van wetenschap, zo vermeldde het interview. Maarten Carbo van de uitgeverij Contact las dat en nam contact op. Of ik niet een boek wilde schrijven. In eerste instantie dachten wij aan een boek voor middelbare scholieren. Maar al snel bleek dat te moeilijk om te realiseren, en werd het een populair wetenschappelijke roman over de ideeëngeschiedenis van de kwantummechanica.

Het heeft uiteindelijk niet veel gescheeld, of het boek had de boekhandel nooit gehaald. In de voorverkoop deed het boek het niet goed. De Nederlandse boekhandels bestelden met zijn allen slechts tweehonderd exemplaren. Aanvankelijk wilde de uitgever daarom het boek in de ijskast leggen. Uiteindelijk kwam alles toch nog op zijn pootjes terecht."

*De achterflap van je boek vermeldt: "Dit boek doet voor de natuurkunde wat de wereld van Sophie heeft gedaan voor de filosofie." Intermediair schrijft (februari 2005): "Klaas Landsman heeft in zijn boek Gaarders formule gekopieerd." Wat klopt hier van?* "Wat mij betreft helemaal niets. Ik heb het bewuste boek nooit gelezen, en ben dat ook niet van plan. Het enige wat me aan dat andere boek interesseert, is dat het een enorme bestseller geweest is. Dat zou ik ook wel willen bereiken."

*Levert het wat op, het schrijven van zo'n roman?* "De eerste twee drukken zijn uitverkocht. Er zijn nu 1600 exemplaren verkocht. Elk exemplaar levert mij 1 euro op. Reken uit je winst. Daarvan eist de belasting ook nog eens

haar deel. Omdat ik zelf ook kosten gemaakt heb, is de kans is groot dat ik er helemaal niets aan verdien. Ik heb zeker zo'n dertig presentemplaren weggegeven, en het grootste deel daarvan heb ik zelf bekostigd. Waar ik mijn hoop op vestig, is een Engelse vertaling. In Engeland zijn de royalties voor de auteur een stuk ruimer. Overzees gaat een veel groter percentage van de omzet naar de auteur, zo heb ik begrepen."

*Onder welke omstandigheden heb je deze roman geschreven?* "Aan dit boek heb ik de afgelopen twee jaar gewerkt: 's avonds, in de weekeinden, in de vakanties. Dat was een intensieve tijd, naast mijn gezin en mijn baan aan de universiteit. De literatuur kende ik al, die had ik uitgebreid bestudeerd in mijn tijd in Cambridge. Maar ik wilde nauwkeurig zijn in de historische details en dat vereist de nodige tijd en energie.

Het laatste half jaar ging zitten in het herschrijven. In totaal zijn er tien verschillende versies geweest. Twee mensen hebben mij intensief bijgestaan bij de verschillende revisies van de tekst. Mijn broer, die docent Engels is, heeft de tekst nauwkeurig becommentarieerd.

Peter Bongaarts, een collega mathematisch fysicus uit Leiden, is een goede vriend van mij. Peter is een erudiet persoon. Met hem heb ik vele diepgaande gesprekken gevoerd over het onderwerp van het boek. Een eerste versie ervan is door hem uitvoerig becommentarieerd. De invloed van de uitgever op de uiteindelijke tekst is gering geweest. De definitieve versie is gelezen door een tekstredacteur, maar dat leverde een beperkt aantal correcties op, vooral punten en komma's."

*Je boek leest als een trein. Het heeft vaart, humor en stijl. Hoe heb je zo leren schrijven?* "Cursussen heb ik niet gevolgd. Wel heb ik me in de achtergronden van het schrijven verdiept. Er zijn drie boeken die ik in het bijzonder uitvoerig geraadpleegd heb. Dat zijn *Het geheim van de schrijver* van Renate Dorrestein, *Het naakte schrijven* van Nirav Christophe en *Zelf schrijven worden* van Gerard Reve. Van deze drie auteurs geeft Reve de meest concrete aanbevelingen. Bij de revisies van mijn tekst heb ik zijn tips erbij gepakt, om te kijken of ik ze wel naleefde."

*Wat wil je bereiken met het schrijven van dit boek?* "Het klinkt misschien onbeschaamd ambitieus, maar met dit boek wil ik bekend worden. Daar gebruik ik een eerbaar middel voor, namelijk het overdragen van een

belangrijk stuk cultureel erfgoed. En wel de ideeëngeschiedenis van de moderne natuurkunde, van Newton tot en met de kwantummechanica. In de tijd dat ik in Cambridge werkte, heb ik dit onderwerp diepgaand bestudeerd. Mijn wetenschappelijke werk uit die periode is gepubliceerd in een ander boek: *Mathematical topics between classical and quantum mechanics* (Springer 1998). Daarin was geen ruimte voor de historische en filosofische achtergronden van de kwantummechanica. Die kon ik in deze roman verwerken, op een voor een breed publiek toegankelijke manier. Ten slotte heb ik een minder eerzaam motief, namelijk een persoonlijke afrekening met een liefdesaffaire die ik in Cambridge beleefd heb."

*Welke reacties krijg je op je boek?* "Erg veel reacties krijg ik niet. Bekenden en collega's reageren meestal positief, die vinden het een leuk boek. Via de e-mail krijg ik verschillende reacties van wildvreemden, die mij van alles en nog wat vragen over kwantumfysica.

Het boek is uitgebreid besproken. De verschenen recensies —acht in totaal— vallen uiteen in twee soorten. De ene groep vindt het populair-wetenschappelijke deel goed en het biografische gedeelte te dun, te summier. Dit vond bijvoorbeeld het NRC. Bij de andere groep is het juist omgekeerd. Die vinden het persoonlijke verhaal juist sterk, en vinden het wetenschappelijk-inhoudelijke gedeelte te moeilijk. Dit laatste was met name de tenor van de besprekingen in de Volkskrant en Trouw."

*In je roman spelen de bijfiguren een handige rol. In je vertelling van de geschiedenis van de kwantumfysica spelen ze de rol van aangever, van commentator, van relativator. Voorbeeld: de portier van Trinity College geeft in het begin tal van achtergronden bij de persoon van Newton. Idem voor Kosmos, Nigel, Volker en de naamloze fellow van Emmanuel. Zijn de bijfiguren geïnspireerd op bestaande personen? Weten ze dat ze voorkomen in dit boek?* "Met uitzondering van de portier van Trinity zijn alle figuren in het verhaal gebaseerd op bestaande personen. Het zijn allemaal collega's, vrienden of bekenden van mij. De naamloze fellow heet Alex, zowel in het boek als in het echt. De heremiet, de kernfysicus die Engelstalige artikelen in het Duits vertaalt, is gebaseerd op iemand die ik ken uit mijn tijd in Duitsland. De karakters heb ik wat aangezet, wat stereotieper gemaakt, in de hoop dat het zo leuker werd om te lezen. Ook de persoon van Ellen is gebaseerd op de werkelijk-

heid. Om haar werkelijke identiteit te verbergen, heb ik een paar persoonlijke details aangepast, maar Ellen bestaat echt. Die persoon heeft dezelfde psychologie als in het boek, en dezelfde biologische driften. Een slimme dame, die ook in werkelijkheid nooit werkte. Met deze 'Ellen' heb ik ook in werkelijkheid een stormachtige affaire gehad. In mijn boek probeer ik haar met opzet zwart te maken — het is echt bedoeld als een afrekening. Eerlijk gezegd ben ik benieuwd naar haar reactie. Dat is een andere reden dat ik het boek graag in het Engels vertaald zou zien.”

*In het boek doe je tegelijkertijd aan heldenverering en heiligschennis. Doe je dit bewust?* “Mijn intellectuele helden zijn mensen van vlees en bloed, met alle zwakheden van dien. Ze blinken echter uit door hun denkbeelden, door hun bijdragen aan de manier waarop wij naar de wereld kijken. Dit contrast tussen de hoge wereld van het intellect en het platte dagelijkse bestaan is één van de thema's van het boek. Mijn heldenverering is dus dialectisch van aard.”

*Komt er een volgend boek?* “Op romangebied ben ik eerlijk gezegd wel even uitgeschreven. Mijn volgende boek is nu echt bestemd voor middelbare scholieren. Het is bedoeld voor de Zebrareeks en het onderwerp is Bell-ongelijkheden. Dat ga ik samen schrijven met Evelien Bus.”

### Klaas en het vrouwelijk geslacht

*Op mijn werk gaf ik je boek te lezen aan een stagiaire. Ze was geschokt door de beschrijving van Ellen: knap en aantrekkelijk,*

*maar ook calculerend, karakterzwak en gezellig met betrekking tot het sterke geslacht. Zo voorziet Ellen op p. 183 haar ontlukende relatie met jou gelijk van twee toekomstige kinderen. Het commentaar van mijn collega was: “Hiermee zet je de emancipatie van de vrouw dertig jaar terug.”* “Die kritiek herken ik. Het boek is echter nadrukkelijk zo bedoeld. Het is een wraakoefening op het calculerende vrouwelijke gedrag. In het boek ga ik niet in op de details, maar Ellens leugenachtigheid was groot.

Maar ik heb ook kritiek op mezelf, hoor. In het boek voer ik mezelf op als *sexist number one*. Dat is eveneens op waarheid gebaseerd. Niet iedereen beschouwde mij zo, maar vooral Ellen en haar vriendinnen zagen mij als een seksist. Dat had te maken met het feit dat ik bij de dames vooral indruk probeerde te maken met intellectueel vertoon.

Het gaat er mij niet om het vrouwelijk geslacht zwart te maken. In het boek probeer ik ook het contrast te benadrukken tussen de twee werelden waarin ik leef: enerzijds de hoge denkwereld met zijn intellectuele pieken, anderzijds het dagelijkse bestaan dat uitblinkt door middelmatigheid.”

*Je verhouding met Ellen is er een van aantrekken en afstoten, zo lijkt het in het boek. Ellen wordt af en toe ronduit vijandig door jou behandeld. Is dat een zuiver persoonlijke kwestie, of speelt hier iets algemener? Concreter: is het misschien zo dat vrouw en wetenschap met elkaar moeten concurreren om de aandacht van de (mannelijke) wetenschapper, en als die voor het ene kiest, dan het andere maar moet laten?* “Juist! Ik ben onder de indruk dat Newton vrijgezel was. Hij

koos expliciet voor de wetenschap en het geloof. Een ander voorbeeld is Beethoven, die anders dan Newton een paar ongelukkige liefdes beleefde, maar toch ook steeds voor zijn bestaan als componist koos en inzag dat hij zich niet voldoende op zijn muziek zou kunnen concentreren met een vrouw in huis. En ten derde Spinoza. Zie daar, de drie grootste figuren uit de westerse beschaving, allemaal vrijgezel of erger!”

*Zelf ben je inmiddels getrouwd. Wat vindt je vrouw van het boek?* “Mijn vrouw vindt het vooral fijn dat ze in het boek zelf niet voorkomt — de belevenissen uit het boek dateren uit de tijd voordat ik mijn vrouw leerde kennen. Van mijn affaire met Ellen was ze al op de hoogte, dat was voor haar niets nieuws. Mijn vrouw is overigens geen fan van mijn boek: het wetenschappelijke gedeelte van het boek vindt ze te moeilijk, en de manier waarop ik Ellen zwart schildert, vindt ze ronduit verwerpelijk.”

*De hoofdpersoon in het boek heet Klaas. In een niet-geslaagde versierpoging staat Klaas een halfuur bij de deur van Ellen zonder aan te durven kloppen. Qua karakter is het een typische nerd, een soort ‘houten Klaas’. Wat vind je van deze omschrijving?* “In deze beschrijving kan ik me helemaal vinden. Met dit boek probeer ik op te komen voor de nerds, voor de onhandige jongens en meisjes die niet vanzelf hun weg vinden in het sociale verkeer. Ik wil laten zien dat zulke mensen uiteindelijk ook hun pad vinden in het leven en gelukkig kunnen worden.”



St John's College, de plek waar de hoofdpersoon uit *Requiem voor Newton* aanzit aan een zogenaamde *Formal Hall*. *Formal Hall* is het officiële diner in een college waar iedereen in toga verschijnt en de Fellows op een verhoging apart eten. Klaas verschijnt in een bruin jasje, een wit shirt en een donkerblauwe polyester das met groene stippen. (p. 63 en verder)

# Brieven

| Letters to the editor

*In deze rubriek reageren lezers op recent in dit blad verschenen artikelen. De redactie behoudt zich het recht voor ingezonden brieven in te korten of niet te plaatsen.*

## Internationale wiskunde-olympiades en de staat van ons onderwijs

In het septembernummer van NAW wordt de prestatie van de zes Nederlandse afgevaardigden naar de internationale wiskunde-olympiade vermeld: twee keer brons en twee eervolle vermeldingen. Ik wil niets afdoen van de prestatie van het Nederlandse team (ik kan dat soort sommen helemaal niet maken), maar het is misschien goed om op te merken dat een bronzen medaille — anders dan bij de olympische spelen — niet betekent dat je nummer drie van de wereld bent. Bij de wiskunde-olympiade van 2002 ging ruim 60 procent van de deelnemers met een medaille of eervolle vermelding naar huis: van de 479 deelnemers verdienden er 39 een gouden medaille, 73 kregen zilver, 120 brons en 66 een eervolle vermelding. De bewindslieden op OC&W moeten uit de resultaten niet de indruk krijgen dat Nederland het bijzonder goed doet in de wiskunde. Over inrichting en uitvoering van de 43-ste olympiade in 2002 is een zeer lezenswaardig rapport geschreven door Tom Verhoeff: *The 43-rd International Mathematical Olympiad: A Reflective Report on IMO 2002*, CS-Report 02-11, Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven (internet: [www.win.tue.nl/~wstomv/publications/imo2002report.pdf](http://www.win.tue.nl/~wstomv/publications/imo2002report.pdf)). Met name is daar te lezen wat er gepresteerd moet worden voor goud, zilver of brons.

*Fred W. Steutel, TU Eindhoven*

## Hou uw preprints openbaar en up-to-date op arXiv:math

In zekere zin hebben we het als wiskundige onderzoekers beter dan ooit, met (bijna) de hele tijdschriftliteratuur direct tot onze beschikking via de computer op het bureau en de printer op de gang. Maar er verschijnen wolken aan de hemel. In toenemende mate gaat het tijdschriftbudget van onze bibliotheek op aan meerjarencontracten met de grote uitgeversconcerns. Voor de tijdschriften van de kleinere uitgevers blijft steeds minder geld over, terwijl dat juist de sympathieker clubs (wetenschappelijke verenigingen, academies en universiteiten) zijn die we zo graag zouden willen steunen.

Onze situatie is echter riant vergeleken met die van onze collega's in de derde wereld, die doorgaans geen elektronische toegang hebben tot Springer en Elsevier. Het ligt niet op mijn weg om u daarom te adviseren om maar niet meer te publiceren in tijdschriften van deze uitgevers. Wat u wel kunt doen is om van al uw nieuwe publicaties een digitale preprintversie openbaar te maken en die versie ook te actualiseren in overeenstemming met een geaccepteerde tijdschriftversie. Dit actualiseren hoeft alleen textueel. Wat betreft de lay-out hoeft het niet (en mag het van de uitgever ook meestal niet). Op deze manier blijft uw publicatie altijd beschikbaar voor iedereen ter wereld die toegang tot het web heeft, ook als de instelling waar hij werkt het tijdschrift waarin u publiceert niet kan betalen.

Een voor de hand liggende plaats voor uw preprint is uw homepage. Daar is hij echter niet zo gemakkelijk vindbaar, hoewel je met behulp van *Google* of *Google Scholar* een eind kunt komen. Andere mogelijke locaties zijn de elektronische preprint-serie van uw instituut en het DAREnet van de Nederlandse universiteiten, zie [www.darenet.nl](http://www.darenet.nl). De allerbeste plaats, want meest universeel is mijns inziens *arXiv:math*, zie [arxiv.org/archive/math](http://arxiv.org/archive/math) en een vriendelijker toegang tot ditzelfde archief op [front.math.ucdavis.edu](http://front.math.ucdavis.edu). Hier vindt u wiskunde-preprints van de afgelopen twaalf jaar gerubriceerd in 31 categorieën. U kunt onder andere zoeken op auteur, op titel, op trefwoord, op periode of per rubriek (subject class). Van elke daar geplaatste preprint kun u de abstract lezen en u kunt het volledige artikel downloaden (pdf of ps, vaak ook dvi of tex). U kunt er herziene versies van preprints plaatsen,

zelfs herhaaldelijk, maar eerdere versies blijven altijd beschikbaar.

Het archief *arXiv:math* is een spin-off van *hep-th* dat in 1991 werd opgezet door Paul Ginsparg in Los Alamos als elektronisch archief van preprints op het gebied van de theoretische hoge-energiefysica. Zie ook over deze preprint-server: A. Jackson: 'From preprints to e-prints: The rise of electronic preprint servers in mathematics', *Notices Amer. Math. Soc.*, January 2002, p. 23–31; [www.ams.org/notices/200201/200201-toc.html](http://www.ams.org/notices/200201/200201-toc.html).

Er zijn een aantal denkbare redenen waarom u uw preprint niet op *arXiv:math* zou willen plaatsen, maar geen van die redenen vind ik overtuigend.

1. *Na plaatsing op arXiv:math kan het artikel niet meer in een tijdschrift gepubliceerd worden.* Geen enkele mij bekende tijdschriftuitgever doet hier moeilijk over.
2. *Anderen gaan er met de resultaten vandoor terwijl het artikel nog niet geaccepteerd is door een tijdschrift, laat staan geplaatst.* Integendeel, door uw resultaten op *arXiv:math* te plaatsen, hebt u een overtuigend bewijs van uw prioriteit.
3. *Wat in mijn richting op arXiv:math staat is van laag niveau. De coryfeeën in mijn vakgebied zetten hun preprints daar niet.* Dit loopt erg uiteen per deelgebied van wiskunde. In sommige gebieden plaatsen de Fields-medalwinnaars er hun preprints, in sommige andere gebieden is de oogst kwantitatief en kwalitatief wat magerder. Wellicht niet toevallig zijn de gebieden die dicht bij de natuurkunde staan of veel met de natuurkunde communiceren, op *arXiv:math* het actiefst. Maar dit hoeft u niet tegen te houden om ook op uw gebied preprints te gaan plaatsen. Want wellicht bent u zelf een coryfee op uw gebied. Door uw voorbeeld zullen uw promovendi en allen op de wereld die u bewonderen, u hierin gaan navolgen.
4. *Het plaatsen van een preprint op arXiv:math is zo moeilijk en bewerkelijk.* Dat valt best mee, maar voor de eerste keer is misschien wat instructie nodig.

Veel helderder en uitgebreider dan ik het hier kan vertellen vindt u de instructies op [front.math.ucdavis.edu](http://front.math.ucdavis.edu). Zie ook de officiële instructies op [arxiv.org/help](http://arxiv.org/help). Hieronder loop ik de achtereenvolgende stappen kort langs.

1. Elke actie van u richting *arXiv* loopt via een webformulier. Van elke actie krijgt u binnen een paar minuten per e-mail een bevestiging.
2. U moet zich eenmalig via het web registreren bij *arXiv* met e-mailadres, username en password. Bewaar die gegevens, omdat u ze elke keer als u een nieuwe preprint wilt plaatsen, weer nodig hebt om in te loggen. Het is belangrijk om het e-mailadres (in het algemeen via uw instituut, niet via een andere provider) constant te houden. Als u van werkgever en daarmee van e-mailadres verandert, of als uw instituut (faculteit, universiteit) het onzalige idee heeft om het e-mailadres te veranderen en het oude op te heffen, dan kunt u dit doorgeven aan *arXiv*.
3. Sommigen die zich registreren en voor het eerst een preprint willen plaatsen, moeten een *endorsement* vragen van iemand die beter en langer bekend is bij *arXiv*. Het is aan te bevelen om u hiervoor te wenden tot iemand die al vaker in dezelfde rubriek van *arXiv:math* iets heeft geplaatst als waar u dat van plan bent.
4. Om een preprint te plaatsen verschaft u een aantal metadata: auteursnamen met affiliaties, titel van het artikel, gewenste *subject class* in *arXiv:math* en eventuele crosslisting naar andere subject classes, comments (vooral het aantal pagina's), math subject classification numbers, abstract.
5. Het belangrijkste is natuurlijk de file van het artikel zelf. Hierto



Het front-end van *arXiv* van de University of California, Davis

moet u de latex file (of ander tex-dialect) uploaden. Zorg dat alle eventuele bijbehorende files, zoals *bbl* files (geproduceerd door bibtex) en *eps* files (plaatjes) meegaan. Als u meer dan twee of drie files hebt, dan is het handig om ze te bundelen in een *tar* file. Binnen een halve minuut zal *arXiv* uw input compileren. Bij een foutmelding krijgt u de log-file te zien en kunt u een gecorrigeerde file uploaden. Bij succesvolle compilering kunt u de pdf of ps file bezichtigen. Mocht de output u niet bevallen, dan kunt u de input verder aanpassen.

6. U ontvangt van elke nieuw geplaatste preprint een ID number en password. Ook dit moet u goed bewaren, omdat u het voor eventuele revisies nodig hebt.
7. Uw preprint zal de volgende dag (of de daaropvolgende; in het geval van een weekend op maandag of dinsdag) openbaar worden op *arXiv:math*.
8. U kunt nieuwe versies van uw preprint plaatsen op *arXiv*. Doe dit echter niet al te vaak. Zorg in het bijzonder bij de eerste versie dat u die al goed qua inhoud en qua taal hebt gecorrigeerd. Het is bij een volgende versie de gewoonte om daarbij onder *comments* aan te geven wat er veranderd is. De oude versies blijven echter bewaard en toegankelijk, zelfs als u uw preprint helemaal zou terugtrekken.
9. Als uw artikel door een tijdschrift is geaccepteerd en als dat met een revisie voor het tijdschrift gepaard is gegaan, dan is het een goede gewoonte om een overeenkomstige nieuwe versie van uw preprint te plaatsen op *arXiv*. Ook kunt u onder *comments* aangeven waar het artikel zal verschijnen. Als de definitieve referentie van het tijdschriftartikel bekend is, dan kan ook dat aan de metadata op *arXiv* worden toegevoegd (voor een aantal tijdschriften gaat dit automatisch).
10. Mocht u toch problemen ondervinden, dan is er bijna zeker een collega in de buurt die ervaring heeft met het plaatsen van preprints op *arXiv* en die u kan helpen. Als het allemaal toch niet lukt, zorg dan om altijd een coauteur met *arXiv*-ervaring te hebben die het plaatsingswerk voor u doet.

Tom Koornwinder, Universiteit van Amsterdam

# Boekbesprekingen

## Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk  
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93  
Dept. of Math. and Computer Science  
Technische Universiteit Eindhoven  
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven  
Webpagina: [www.math.rug.nl/revwg/](http://www.math.rug.nl/revwg/)  
e-mail: [wgreview.win@tue.nl](mailto:wgreview.win@tue.nl)



K.-J. Engel and R. Nagel  
**One-parameter semigroups for linear evolution equations**

*Graduate Texts in Mathematics*, 194

Berlin: Springer-Verlag, 2000

586 p., prijs €56,95

ISBN 0-387-98463-1

This book is a real asset for people who work in the field of operator semigroups, or want to. It is a beauty, not only because it contains so much information, but also because the authors have done everything conceivable to put the whole subject in the right historical and contemporary context. We note that in addition to K.-J. Engel and R. Nagel, there were a number of other authors who wrote certain sections.

Chapter I, entitled *Linear Dynamical Systems*, puts some of the preliminary facts and concepts about operator semigroup theory in chronological order and in historical perspective. It treats matters like: the functional equation  $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ; (stability of) matrix (semi)groups and uniform continuity of (semi)groups on Banach spaces  $e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , with  $A$  bounded; multiplication semigroups and spectral theory; translation semigroups on all kinds of spaces; constructions with semigroups such as rescaling of semigroups, subspace semigroups, adjoint semigroups, quotient semigroups. A proof is included of the fact that a uniformly continuous semigroup, defined on the operator algebra  $L(H)$ , with  $H$  a Hilbert space, is necessarily of the form  $U(t) = e^{tA}Te^{tA^*}$ ,  $A = -A^* \in L(H)$ . Its generator is the derivation  $T \mapsto AT - TA$ . Chapter I also contains a proof of the fact that a weakly continuous semigroup is strongly continuous. Exercises, which supplement the theory, are scattered throughout the book.

In Chapter II, entitled *Semigroups, Generators, and Resolvents*, the authors discuss generation theorems, such as the Hille-Yosida theorem; contraction semigroups and the corresponding dissipativity of their generators; cores for generators of semigroups, Stone's theorem; examples such as first and second order differential operators that serve as generators, delay differential equations, (semi)flows and operator semigroups. Henceforth  $e^{tA}$  denotes the semigroup generated by the closed linear operator  $A$  with a domain that is dense in  $X$ . As special classes of semigroups, the authors discuss analytic semigroups, semigroups  $e^{tA}$  with the property that there exists  $t_0 \geq 0$  so that for every  $x \in X$  the function  $t \mapsto e^{tA}x$  is differentiable on  $(t_0, \infty)$  ('eventually differentiable semigroups'); semigroups  $e^{tA}$  with the property that for some  $t_0 \geq 0$  the mapping  $t \mapsto e^{tA}$  is (uniformly) continuous on the interval  $(t_0, \infty)$  ('eventually norm continuous semigroups'); semigroups with compact resolvents, or, what amounts to the same, semigroups for which the inclusion  $D(A) \hookrightarrow X$  is compact. Nilpotent semigroups are treated as well. Other topics of discussion include (abstract) Sobolev spaces for generators of semigroups, Favard and abstract Hölder spaces, and fractional powers  $A^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , of operators  $A$  with a resolvent that satisfies certain boundedness conditions.

Chapter III treats additive perturbations of generators of semigroups. More precisely, it discusses the problem of finding conditions on generators  $A$  and  $B$  in order that (some extension of)  $A + B$  is a generator. If  $A$  is a generator and  $B$  is bounded, then

$A + B$  is again a generator. The same is true if  $A$  generates a contraction semigroup, and the dissipative closed operator  $B$  is  $A$ -bounded with relative bound  $< 1$ , or if  $B$  is  $A$ -compact. It is also true if  $A$  generates an analytic semigroup and  $B$  is  $A$ -bounded with a certain bound. The Desch-Schappacher and Miyadera-Voigt perturbation theorems are treated, as are multiplicative perturbations and the Trotter-Kato approximation results.

In Chapter IV spectral theory in relation to (generators of) operator semigroups is treated thoroughly. Important quantities are the *spectral bound*, defined by  $s(A) := \sup \{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ , the *growth bound*  $\omega_0$  defined by  $\omega_0 = \inf \{\omega \in \mathbb{R} : \|e^{tA}\| \leq M_\omega e^{\omega t}\}$ , and the *essential growth bound*  $\omega_{\text{ess}}$ , which is obtained upon replacing  $\|e^{tA}\|$  with  $\|e^{tA}\|_{\text{ess}}$  in the definition of  $\omega_0$ . Then  $\omega_0 = \max \{\omega_{\text{ess}}, s(A)\}$ . In case  $e^{tA}$  is positive (or positivity preserving) on the Banach lattice  $L^p(\Omega, \mu)$ , then  $\omega_0 = s(A)$ , a result due to Derndinger ( $p = 1$ ), Greiner and Nagel ( $p = 2$ ), and Weis (arbitrary  $p \geq 1$ ). Explicit examples show that the spectral mapping theorem  $\sigma(e^{tA}) = e^{t\sigma(A)}$  need not be true; it is true in the form  $\sigma(e^{tA}) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}$  if the semigroup  $e^{tA}$  is analytic, eventually compact, eventually differentiable, or uniformly continuous. Under any of these conditions the equality  $s(A) = \omega_0$  is also true. The weak form of the spectral mapping theorem, i.e.  $\sigma(e^{tA})$  coincides with the closure of  $e^{t\sigma(A)}$  is true for normal semigroups and for groups.

In Chapter V the authors describe the asymptotic properties of strongly continuous semigroups: uniform, weak, and strong (exponential) stability. A semigroup  $e^{tA}$  is called *hyperbolic* if the space  $X$  can be written as a direct sum  $X = X_s \oplus X_u$  of two  $e^{tA}$ -invariant subspaces  $X_s$  (the ‘stable’ subspace) and  $X_u$  (the ‘unstable’ subspace) with the following properties:  $e^{tA}$  confined to  $X_s$  is uniformly exponentially stable; its restriction to  $X_u$  is invertible and the inverse semigroup  $e^{-tA}$ ,  $t \geq 0$ , is uniformly exponentially stable on  $X_u$ . A sample result reads as follows. A strongly continuous semigroup  $e^{tA}$ ,  $t \geq 0$ , acting on a Hilbert space, is hyperbolic if and only if  $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$  and  $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq M$ ,  $\lambda \in i\mathbb{R}$ . Another feature of Chapter V is a thorough discussion of semigroups that have (weak) compactness properties. Suppose that  $A$  generates a bounded strongly continuous semigroup. If the boundary spectrum  $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$  is small, in the sense that  $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$  is countable and that there is no point spectrum contained in  $\sigma(A') \cap i\mathbb{R}$  ( $A'$  is the adjoint of  $A$ ), then  $e^{tA}$  is strongly stable; i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{tA}x = 0$  for all  $x \in X$ . This result is due to Arendt, Batty, Lyubich, and Vu. Ergodic properties of semigroups are also touched upon.

Chapter VI, entitled *Semigroups everywhere*, describes a number of examples of semigroups that are interesting not only as examples, but that may also serve as subjects for further research and inspiration. Included are semigroups and asymptotics for population equations, cell equations, and transport equations, as well as possibly degenerate analytic semigroups generated by differential operators defined on intervals, Cauchy problems involving partial differential operators, delay equations and semigroups, regularity of solutions, semigroups and Volterra operators, semigroups for control theory, evolution equations, evolution semigroups, and their perturbations. Methods to reduce second order Cauchy problems to first order ones are also described.

The book concludes with Chapter VII, *A brief history of the exponential function*, which contains some remarkable comments re-

lated to the development and use of operator semigroups. The appendices present some standard results on functional analysis, operator theory, and vector-valued integration. The Epilogue, *Determinism: Scenes from the interplay between metaphysics and mathematics*, contains some historical comments on causality in physics, the birth of evolutions and semigroups, and the phenomena they model. Implicitly the notion of evolution, or semigroup action, is present when Hadamard discusses the Huygens ‘principle’. In a more explicit manner this notion also shows up in the Schrödinger equation. The epilogue describes some of the controversy between Newton and Leibniz about the way god intercedes in the planetary system. Newton saw the orderliness of the planetary system as an act of god; later mathematicians and physicists like Laplace, and also the philosopher Kant, tried with the aid of Newton’s laws to understand the stability of the planetary system. Du Bois-Raymond even went so far as to suggest that there might exist a mathematical system of (differential) equations that would, in a deterministic way, describe the direction and speed of every atom in the universe. This idea has to be compared with the upcoming rise of quantum mechanics, and the different points of view taken by Einstein and Bohr in the beginning of the 20th century. In order to discuss ‘motion in history’ the epilogue goes as far back as the great Greek philosophers in antiquity.

J. van Casteren

G. Coletti, R. Scozzafava

### Probabilistic Logic in a Coherent Setting

Dordrecht: Kluwer, 2002

289 p., prijs €32,-

ISBN 1-402-00970-4

Het boek geeft een gedetailleerde uiteenzetting van probabilistische logica in een coherente setting. Deze aanpak van onzekerheid verschilt van de klassieke probabilistische aanpak, doordat men niet langer een unieke maat op een welbepaalde sigma-algebra van gebeurtenissen veronderstelt. In een coherente setting kan men dan ook werken met probabiliteiten voor zo veel of zo weinig gebeurtenissen als men wil en deze naar wens uitbreiden met eventuele nieuwe gebeurtenissen. Minimale Booleaanse algebra’s van de gebeurtenissen dienen hierbij enkel als hulpmiddel om de coherentie van een bepaalde schatting na te gaan, en kunnen later veranderen wanneer er nieuwe gebeurtenissen op de proppen komen. Conditionele probabiliteiten (zoals ingevoerd door Bruno de Finetti, 1906-1985) spelen in de coherente setting een sleutelrol.

Dit boek is het eerste echte boek over probabilistische logica in een coherente setting. Geschreven door twee experts in dit gebied, biedt het in 21 korte hoofdstukken een samenraapsel van onderzoek uit dit domein. De auteurs trachten dit, in hun eigen woorden, te presenteren “within a unified framework”. Hierin slagen zij echter slechts ten dele. Het boek mist duidelijk een overzichtelijke structuur, zodat het verband tussen de verschillende onderdelen moeilijk te achterhalen is. Bovendien ontbreekt ook een schets van de grotere context waarin dit onderwerp kan geplaatst worden en lukt het de auteurs niet om overtuigend duidelijk te maken waar juist de gelijkenissen en verschillen met klassieke probabiliteitstheorie liggen.

Tot slot wordt de onoverzichtelijke structuur van het boek ook

nog eens weerspiegeld in al even onoverzichtelijke zinsstructuren en bladspiegels. Deze worden vooral gekenmerkt door een overvloed aan gedachtestreepjes, haakjes, puntkomma's en te pas en te onpas vetgedrukte of gecursiveerde woorden. Het spreekt voor zich dat ook dit de leesbaarheid van de tekst niet bevordert. Samenvattend kan dan ook gesteld worden dat dit boek, hoewel het voor onderzoekers in dit specifieke vakgebied misschien een nuttig naslagwerk kan vormen, anderen weinig zal bijbrengen.

S. Verbaeten, J. Vennekens



A.D. Bruno

**Power Geometry in Algebraic and Differential Equations**

*North-Holland mathematical library; 57*

*Amsterdam : Elsevier Science, 2000*

*385 p., prijs € 112,-*

*ISBN 0-444-50297-1*

Vanaf 1962 publiceert Alexander D. Bruno artikelen waarin hij zijn methode, die hij *Power Geometry* noemt, ontwikkelt en toepast. Dit boek kan als een samenvatting daarvan gezien worden. In het voorwoord zegt de auteur: "Power Geometry is a new calculus developing the differential calculus and aimed at the nonlinear problems. Its main concept consists in the study of nonlinear problems not in the original coordinates, but in the logarithms of these coordinates." en over het gebruik ervan zegt hij verderop: "Power Geometry is an alternative to Algebraic Geometry, Differential Algebra, Group Analysis, Nonstandard Analysis, and other disciplines."

Voor een in een machtreeks ontwikkelbare functie betekent dit het volgende. De in die machtreeks voorkomende exponenten vormen een verzameling die de locale eigenschappen van de functie bepaalt. Bijvoorbeeld het opblazen van singulariteiten wordt vertaald in lineaire afbeeldingen op de ruimte van exponenten. In een van de eerste hoofdstukken wordt gekeken naar algebraïsche vergelijkingen. Dan is de verzameling van exponenten uiteraard eindig. De convexe omhullende daarvan is een polytoop waarvan de dimensie gelijk is aan het aantal variabelen. Met Power Geometry bedoelt de auteur het analyseren van de structuur van een bij een algebraïsche vergelijking behorend polytoop (of collectie van kegels bij machtreeksen) en de lineaire transformaties van de exponenten ten behoeve van de bestudering van singulariteiten.

Na een inleidend hoofdstuk over de structuur van polytopen en kegels en een hoofdstuk over singulariteiten van algebraïsche vergelijkingen, wordt Power Geometry in volgende hoofdstukken toegepast op onder andere de volgende problemen: asymptotische oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen, het Henon-Heilesysteem, locale analyse van een reversibele gewone differentiaalvergelijking en 'systems of arbitrary equations'. Dit laatste blijken partiële differentiaalvergelijkingen met algebraïsche beperkingen te zijn. Er wordt aan bekende en minder bekende voorbeelden gerekend, maar daarbij wordt het niet erg duidelijk waar dat gereken toe leidt en hoe zich dat verhoudt tot wat uit de literatuur bekend is.

Een ieder die zich wel eens met de genoemde onderwerpen

heeft bezig gehouden zal Power Geometry herkennen (zij het niet onder deze naam) als berekeningen die daarbij voorkomen. Het lijkt dan ook nogal overdreven om dit "a new calculus" te noemen die "an alternative to Algebraic Geometry etc." vormt. Het materiaal dat de auteur presenteert is daarvoor veel te rekenachtig zonder in te gaan op de achterliggende concepten. Bovendien ontbreken de voor de hand liggende verbanden met bijvoorbeeld Gröbnerbases en torische variëteiten.

In paragrafen over de historie van Power Geometry beklagt de auteur zich over zijns inziens onterechte kritiek. Alhoewel daar later door anderen nog gedetailleerde kritiek aan toegevoegd is, blijft wat mij betreft de opmerking van reviewer Coleman in 1966: "The methods and results are not always clear" onverminderd van kracht.

I. Hoveijn

I. Chavel

**Isoperimetric inequalities.**

**Differential geometric and analytic perspectives**

*Cambridge: Cambridge University Press, 2001*

*Cambridge Tracts in Mathematics (145)*

*268 p., prijs £55,-*

*ISBN 0-521-80267-9*

One of the most famous classical geometrical problems, which can be formulated using only elementary geometric notions, is the so-called isoperimetric problem: 'which closed curve of given length bounds a domain with the greatest possible area?' The answer is, of course, a circle. This is the starting point of this nice book, and indeed the first chapter contains different approaches and solutions of the classical isoperimetric problem in the Euclidean plane. One of the ways of looking at the problem is via the classical isoperimetric inequality, which is the title of this book.

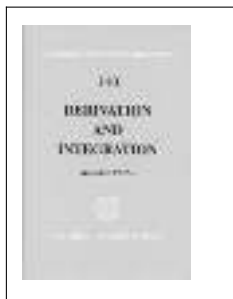
Roughly speaking, the book consists of two parts: in the first part the classical theory of planar domains is generalized to more general domains. In the second part the author moves on to Riemannian manifolds of bounded geometry.

The first chapter is an introduction containing, as already said, some proofs of classical results, but also a brief discussion on material needed for the remainder of this part of the book. The second chapter focuses on a differential geometric approach to the isoperimetric problem, for instance by considering it as a variational problem. The boundary is first assumed to be  $C^2$ , after which the attention is moved to the  $C^1$  case. In Chapter 3 geometric measure theory is used to look at the problem, and here the keyword is Steiner symmetrization. Chapter 4 deals with the Hausdorff measure and can be considered as an intermezzo between the two parts of the book.

In Chapter 5 the viewpoint is changed to Riemannian geometry. First a brief introduction to Riemannian geometry is given, but quickly the discussion concentrates on isoperimetric inequalities in the Riemannian context. The implications of these on analytic (Sobolev) inequalities are studied in Chapter 6. Chapter 7 introduces the Laplacian and heat operator on Riemannian manifolds together with basic properties. Finally, in Chapter 8 the main problem of the second part of this book, the 'large time decay of the heat kernel', is formulated and studied from various points of view, and a link to recent research, in particular that of Grigoryan, is made.

The author succeeds in providing enough background material and details on preparatory material. Each chapter ends with bibliographic notes in which the reader is referred to more background material and detailed proofs of the main results in this excellent book.

F. Dillen



W.F. Pfeffer

**Derivation and integration**

Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 140

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

282 p., prijs £50,-

ISBN 0-521-79268-1

Dit boek is gewijd aan een moeilijk geval van een klassiek probleem: het terugvinden van een functie uit haar afgeleide. In een eerstejaarscollege analyse leert men dat dit mogelijk is als de afgeleide functie Riemann-integreerbaar is. Lebesgue bewees dat een functie  $f$  van  $[0, 1]$  naar  $\mathbf{R}$  Lebesgue-integreerbaar is dan en slechts dan als er een *absoluut continue* functie  $F$  van  $[0, 1]$  naar  $\mathbf{R}$  bestaat zodat bijna overal  $F' = f$ .

Denjoy en Perron vonden onafhankelijk van elkaar een manier om het begrip 'integreerbaar' zo uit te breiden dat eenzelfde bewering juist is voor *gegeneraliseerd absoluut continue* functies. Minder lang geleden wisten Henstock en Kurzweil de Denjoy-Perron-integraal op een derde wijze te definiëren. De auteur is geïnteresseerd in meerdimensionale versies van deze resultaten die leiden tot belangrijke uitbreidingen van de stellingen van Gauss-Green en Stokes.

Er is geen voor de hand liggende uitbreiding van de Denjoy-Perron-integraal naar hogere dimensies. Het verschil tussen het eendimensionale en het meerdimensionale geval is erg groot. De technieken uit de theorie van de reële functies moeten worden aangevuld met methoden uit de meetkundige maattheorie. In de zoektocht naar een oplossing van dit vraagstuk speelt de auteur zelf, emeritus hoogleraar wiskunde aan de University of California, Davis, een rol van betekenis. Eerdere boeken van zijn hand zijn *Integrals and Measures* (Marcel Dekker, 1977) en *The Riemann Approach to Integration* (Cambridge University Press, 1993). In de nu besproken monografie wil hij de gevorderde lezer inzicht bieden in de meest recente resultaten. Het boek is helder geschreven en overzichtelijk opgezet.

W.H.M. Veldman

in the study of flows on homogeneous spaces  $G \backslash \Gamma$  where  $G$  is a Lie group and  $\Gamma$  a lattice in  $G$ . This book is an introduction to the ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces. The focus is on two types of group actions: the geodesic flow on the unit tangent bundle of a locally symmetric group, and unipotent actions on homogeneous spaces. This book is well written and serves as an excellent introduction to this area. It is accessible to graduate students with background in measure theory, functional analysis, and Lie theory. The emphasis is put on the group theoretic point of view, and on the role of the associated unitary representation of the group action.

Chapter I provides an introduction to ergodic theory and topological dynamics. Special attention is given to stating some dynamical properties, such as ergodicity and the different notions of mixing in representation theoretic terms. Chapter II is devoted to the study of geodesic flows associated to surfaces of constant negative curvature, and their realization as flows on homogeneous spaces of  $SL(2, \mathbf{R})$ . In Chapter III, the authors give a complete proof of Howe-Moore's vanishing theorem on the asymptotics of the matrix coefficients of unitary representations, and its application to mixing properties of the flows. Higher order mixing is also discussed, Ledrappier's famous example of a  $\mathbf{Z}^2$ -action that is strongly mixing but not mixing of all orders is given, as well as Mozes' theorem on mixing of all orders of Lie group actions. Chapter IV deals with horocycle flows. A proof of Hedlund's theorem on the minimality of the horocycle flows for compact surfaces is given; this theorem says that every orbit is either dense or periodic, and minimality holds for a cocompact lattice  $\Gamma$ . Also, the classification of invariant measures and results on equidistribution are discussed. In Chapter V, the authors describe Siegel sets and show that they are approximations to fundamental domains for the action of  $SL(n, \mathbf{Z})$  by translations on  $SL(n, \mathbf{R})$ . This is used to prove Mahler's criterion for compactness of sets of lattices in  $\mathbf{R}^n$ . A full proof is given of Margulis' lemma dealing with recurrence properties of unipotent subgroups of  $SL(n, \mathbf{R})$  in the homogeneous space  $SL(n, \mathbf{R}) \backslash SL(n, \mathbf{Z})$ , namely, that an orbit under such a subgroup never tends to infinity in  $SL(n, \mathbf{R}) \backslash SL(n, \mathbf{Z})$ . Chapter VI contains an application of the derived results to number theory. They give a complete proof of the famous Oppenheim conjecture: if  $Q$  is an indefinite irrational quadratic form over  $\mathbf{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , then  $Q(\mathbf{Z}^n)$  is dense. The presented proof is by Dani and Margulis, and is based on the study of the orbit structure of the action of  $SO(Q)$ , the orthogonal group of  $Q$ , on the homogeneous space  $SL(n, \mathbf{R}) \backslash SL(n, \mathbf{Z})$ .

K. Dajani



M.B. Bekka, M. Mayer

**Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces**

London Math. Soc. Lecture Note Series 269

Cambridge: Cambridge University Press,

2000

200 p., prijs £30,-

ISBN 0-521-66030-0

The interplay between ideas from the theory of algebraic groups on the one hand and ergodic theory on the other is best illustrated



G. Gasper, M. Rahman

**Basic hypergeometric series, 2nd edition**

Cambridge: Cambridge University Press,

2004

428 p., prijs £65,-

ISBN 0-521-83357-4

Basic hypergeometric series are series of the form  $\sum c_k$  with the property that  $c_{k+1}/c_k$  is a rational function in  $q^k$  for all  $k$  for some fixed number  $q$ , the base, which we assume to satisfy  $|q| < 1$ .

This should be compared with the definition of a (generalised) hypergeometric series, where the quotient of two consecutive terms is a rational function of  $k$ . Hypergeometric series form a well-established part of mathematics, and there is a wealth of results related to differential equations, special functions etc., starting with the works of Euler, Gauss, Riemann. The development of basic hypergeometric series was much slower, partly due to the fact that there is no close connection with differential equations. Nevertheless, Euler proved several summation formulas involving basic hypergeometric series related to partition theory, and basic hypergeometric series occurred in the works of Jacobi on elliptic functions. In the 19th century, Heine published a book in which he included a chapter on basic hypergeometric series, and in the beginning of the 20th century much work was done by Jackson, a reverend in the British Navy. Over the last few decades basic hypergeometric series have come into full swing, and they show up in various places: special functions and orthogonal polynomials, representation theory of Lie algebras, finite groups of Lie type and quantum groups, difference operators, coding theory, partition theory, association schemes, statistical mechanics.

To give an idea, we discuss the most basic result, the analogue of the binomial theorem. To state the result we introduce the notation

$$(a; q)_k = (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{k-1}) \text{ for } a \in \mathbb{C}$$

and a natural number  $k$ . Note that we can take the limit  $k \rightarrow \infty$ . The  $q$ -binomial theorem states that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} z^k = \frac{(az; q)_{\infty}}{(z; q)_{\infty}}$$

for  $|z| < 1$ . This result goes back at least to Cauchy, and the special case  $a = 0$  at least to Euler. This is a general feature of the type of summation formulas that are discussed; an infinite sum equals an infinite product. Other famous examples are the Rogers-Ramanujan identities in the theory of partitions; one of them is

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q; q)_k} = (q; q^5)_{\infty}^{-1} (q^4; q^5)_{\infty}^{-1},$$

which states that the number of partitions of an integer  $k$  in which the differences between the parts is at least 2 is equal to the number of partitions of  $k$  into parts that are congruent to 1 or 4 modulo 5.

The book by George Gasper and Mizan Rahman contains a wealth of information and many references to the literature. So, even in the unlikely event that you cannot locate the result needed, it is an ideal starting point to search the literature. The first few chapters develop the general theory in a very clear-cut fashion, and mainly deal with unilateral series. The first five chapters give all the basics, and much more, of the theory, including summation and transformation formulae, basic contour integrals, and bilateral summation formulae. The remaining six chapters deal with applications, mainly related to orthogonal polynomials and special functions. The last chapter discusses an extension to elliptic hypergeometric series, i.e., series for which  $c_{k+1}/c_k$  can be viewed as an elliptic function of a complex parameter  $k$ . This is a very recent development.

The first edition appeared in 1990, and was a great source of information containing results previously scattered throughout the

literature. This second edition, with three additional chapters, updates and extends the first edition, and includes many results of the last fifteen years. Gasper and Rahman have done us a great service by writing this book.

H.T. Koelink

H. Tijms

### Operationele analyse

#### Een inleiding in modellen en methoden

*Epsilon-Uitgaven, deel 54*

*Utrecht: Epsilon, 2002*

*496 p., prijs €37,-*

*ISBN 90-5041-075-8*

Dit boek voorziet in de behoefte aan een Nederlandstalige inleiding in de zogenaamde *Operationele Analyse*, beter bekend onder de Engelse naam *Operations Research* (OR). Dit vakgebied ontstond in de tweede wereldoorlog door het gebruik van wiskundige methoden bij het optimaliseren van militaire operaties.

In tien hoofdstukken bestrijkt het boek een breed gebied van de OR. Na een relatief lang hoofdstuk over lineaire programmering (90 p.) volgen hoofdstukken over geheeltallige programmering, netwerkanalyse, beslissingsbomen en dynamische programmering. Vervolgens komen onderwerpen uit de stochastische OR aan de orde in de hoofdstukken voorraadbeheer, discrete-tijds Markovketens, continue-tijds Markovketens, wachttijdtheorie en simulatie.

Het is verleidelijk een vergelijking te maken met het enige mij bekende andere Nederlandstalige boek op dit gebied, Th.H.B. Hendriks, P. van Beek, *Optimaliseringstechnieken: principes en toepassingen* (3e druk, Bohn, Stafleu, Van Loghum, Houten, 1991) dat zich beperkt tot de deterministische OR, maar zich onderscheidt van het besproken boek door een hoger abstractieniveau. Dit zal wel komen doordat de auteur zich niet alleen op het universitaire onderwijs richt maar ook op het hoger beroepsonderwijs.

Storend is het grote aantal drukfouten. Er is via de website van de auteur weliswaar een lijst met errata beschikbaar, maar deze lijst is niet uitputtend. Als voorbeeld noem ik de niet goed lopende zin op bladzijde 80: 'De LP-formulering en de bijbehorende output worden hieronder pagina gegeven.' Ook vanuit wiskundig oogpunt zijn er tekortkomingen. Op bladzijde 66 bijvoorbeeld wordt van een gegeven  $m \times n$  matrix  $A$  aangenomen dat (i)  $n \geq m$ ; (ii)  $\text{rang}(A) = m$ , dat wil zeggen, de matrix  $A$  heeft ten minste één verzameling van  $m$  lineair onafhankelijke kolomvectoren. Als definitie van het begrip matrixrang is dit niet overduidelijk. Waarom niet gezegd dat de rijen van  $A$  lineair onafhankelijk zijn? Bovendien zou op zijn minst kunnen worden opgemerkt dat (i) uit (ii) volgt.

Cycling van de Simplex methode komt ter sprake op blz. 36, maar dat dit te wijten is aan degeneratie blijft onbesproken. Degeneratie wordt (helaas) ook niet genoemd bij de behandeling van gevoeligheidsanalyse. Het is bekend dat dit in de praktijk veel optreedt en tot verwarrende resultaten van de gevoeligheidsanalyse aanleiding geeft, zie B. Jansen, J.J. de Jong, C. Roos, and T. Terlaky, *European Journal of Operations Research* 101, 15–28, 1997.

Overigens lijken de voorbeelden zo te zijn gekozen dat degeneratie niet optreedt.

De auteur heeft er van afgezien meer dan één paragraaf te besteden aan inwendige punt methoden. Alleen Karmarkars me-

thode wordt in dit verband genoemd. De zin "De hooggespannen verwachtingen over de nieuwe methode zijn inmiddels bijgesteld" geeft mijns inziens de stand van zaken niet goed weer. Alle commerciële programma's, zoals bijvoorbeeld CPLEX en XPRESS, bevatten een primaal-duale inwendige punt methode omdat deze voor grootschalige problemen doorgaans factoren sneller is dan de Simplex methode.

Het boek is rijk aan voorbeelden en opgaven, veelal van het 'ingeklede' type. Slaagt de auteur er in om een volgende druk te vrijwaren van de genoemde onvolkomenheden dan zal het Nederlandstalig onderwijs zijn verrijkt met een zeer bruikbare inleiding tot de OR.

C. Roos



J.M. Steele  
**Stochastic Calculus and Financial Applications**

*Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability, Vol. 45*

Berlin: Springer Verlag, 2001

300 p., prijs €74,95

ISBN 0-387-95016-8

De snelle opkomst van de financiële wiskunde sinds de ontdekking van de Black-Scholes formule dertig jaar geleden heeft het gebied van de stochastische analyse van een slechts voor ingewijde wiskundigen toegankelijk speciaalgebied van de stochastische processen tot een onmisbaar onderdeel van het economiecurriculum gemaakt. Parallel hiermee is de vraag naar boeken ontstaan die de theorie voor een breder publiek toegankelijk maken. In het afgelopen decennium is een aantal boeken met dit expliciete doel verschenen, zoveel zelfs dat mijn favoriete boekwinkel in Groningen een eigen rubriek hiervoor introduceerde, naast wiskunde, statistiek en dynamische systemen.

Onder de boeken over stochastische analyse voor niet-wiskundigen is het boek van Steele zeker een van de meest geavanceerde, in ieder geval qua lijst van onderwerpen. Het gaat daarin veel verder dan het bekende boek van Mikosch, en komt al aardig in de buurt van Øksendal's boek. Het boek van Steele geeft in precies 300 pagina's een compacte inleiding in de grondbegrippen van de stochastische analyse, met een aantal toepassingen in de financiële wiskunde. De lijst van hoofdstukken geeft een eerste indruk van de inhoud van het boek: 1. Random walk and first step analysis, 2. First martingale steps, 3. Brownian motion, 4. Martingales: the next steps, 5. Richness of paths, 6. Itô integration, 7. Localization and Itô's integral, 8. Itô's formula, 9. Stochastic differential equations, 10. Arbitrage and SDE's, 11. The diffusion equation, 12. Representation theorems, 13. Girsanov theory, 14. Arbitrage and martingales, 15. The Feynman-Kac connection.

Op iedere bladzijde van het boek wordt duidelijk dat de auteur ruime ervaring heeft in het verzorgen van cursussen over stochastische analyse voor niet-wiskundigen. Steele schenkt veel aandacht aan de didactische opzet en heeft daar ook duidelijke opvattingen over die sterk aan de ideeën van Polya zijn ontleend. In geval van twijfel wordt de voorkeur aan het concrete boven het abstracte gegeven. Veel onderwerpen komen in spiralen aan de orde, beginnend met een simpel voorbeeld tot steeds meer diepte en abstractie doordringend. Daardoor komt een element van her-

haling in het boek, dat de leesbaarheid sterk verhoogt en het leren voor de student makkelijker maakt. Aan het einde van zo'n proces wordt steeds weer een terugschouw gehouden om nog eens de afloop te overzien.

Het boek veronderstelt weinig wiskundige voorkennis; eerstejaars analyse, een beetje lineaire algebra en een inleiding in de kansrekening zijn eigenlijk al voldoende om het boek te kunnen lezen. De meeste wiskundige technieken worden zelfs nog in een aanhang besproken. Veel technische moeilijkheden van de stochastische analyse worden door de strikte beperking tot integratie met betrekking tot de Brownse beweging omzeild. Desondanks is het boek allesbehalve eenvoudig te noemen. In een rap tempo worden nieuwe begrippen en technieken geïntroduceerd, zodat behalve enige aanleg voor wiskundige argumentatie ook behoorlijke motivatie en doorzettingsvermogen van de lezer gevraagd wordt. Maar aan het einde staat dan ook een resultaat dat gezien mag worden en waarmee de lezer aan de slag kan om recente wetenschappelijke publicaties op het gebied van de financiële wiskunde te lezen. Ik kan het boek zonder meer aanbevelen.

H. Dehling



P. Deufhard, F. Bornemann,  
**Scientific computing with ordinary differential equations**

Berlin: Springer Verlag 2002

485 p., prijs €49,95

ISBN 0-387-95462-7

Het boek *Scientific Computing with Ordinary Differential Equations* beschrijft voornamelijk algoritmen voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen op het laatste hoofdstuk na, dat randvoorwaarde problemen bestudeert. Het boek is helder geschreven en bevat interessante opgaves. Antwoorden daarop worden niet geformuleerd.

De hoofdstukken beschrijven de relevante onderwerpen: van de uniciteit van een oplossing tot en met de gangbare numerieke methodes voor het oplossen van differentiaalalgebraïsche vergelijkingen. Het is een goed boek, met deze kritische kanttekening: de *state of the art* — aangaande elk van de relevante onderwerpen — wordt niet expliciet vermeld in bijvoorbeeld de hoofdstukintroductions. De lezer moet het boek volledig lezen om die te vernemen. Dat is jammer, want zo is het niet duidelijk welke methoden er nieuw zijn ontwikkeld sinds het voorgaande boek *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice* van Mattheij en Molenaar uit 1996 en 2003, waarnaar niet wordt verwezen.

J. Maubach

# Problemen/UWC

## Universitaire Wiskunde Competitie

The Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is a ladder competition for students. Others may participate 'hors concours'. The results can also be found on internet at: <http://www.nieuwarchief.nl/uwc>

Each issue contains three problems A, B and C. A total of 12 points can be obtained for each problem: 8 for a complete and correct answer, at most 2 points for elegance, and at most 2 points for possible generalisations. To compute the overall score, the totals for each problem are multiplied by a factor 3, 4 and 5, respectively.

The three best contributions will be honoured with a Sessions Prize of respectively 100, 50 and 25 Euro. The points of the winners will be added to their total after multiplication by a factor of respectively 0, 1/2 and 3/4. The highest ranked participant will be given a prize of 100 Euro, after which he/she starts over at the bottom of the ladder with 0 points.

Twice a year there is a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will also receive a prize of 100 Euro.

Group contributions are welcome. Submission by email (in  $\text{\LaTeX}$ ) is preferred; participants should repeat their name, address, university and year of study at the beginning of each problem/solution. The submission deadline for this session is March 1, 2006.

The Universitaire Wiskunde Competitie is sponsored by Optiver Derivatives Trading, the Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde and the Vereniging voor Studietoelagen Studentenbelangen in Delft.



### Problem A (Unknown proposer)

We have  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ . Consequently partial sums must satisfy

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k(k+1)} < 1.$$

Show that for any  $q \in \mathbb{Q}$  satisfying  $0 < q < 1$ , there exists a finite subset  $K \subseteq \mathbb{N}$  so that

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k(k+1)} = q.$$

### Problem B (Proposed by Matthijs Coster)

We consider the progressive arithmetic and geometric means of the function sequence  $f_n(x) = x^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . These are

$$A_n = A_n(x) = \frac{1}{n}(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \frac{x^n - 1}{n(x - 1)}$$

and

$$G_n = G_n(x) = (x^{1+2+\dots+(n-1)})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{n-1}{2}}.$$

The *Martins-property* reads  $A_{n+1}/A_n \geq G_{n+1}/G_n$ . In our case this gives

$$\frac{n}{n+1} \frac{x^{n+1} - 1}{x^n - 1} \geq \sqrt{x}.$$

Prove, more generally, that

$$\frac{a}{a+1} \frac{x^{a+1} - 1}{x^a - 1} \geq \sqrt{x} \text{ for } a > -\frac{1}{2}, x > 0, x \neq 1.$$

Eindredactie: Matthijs Coster

Redactieadres: UWC/NAW

Mathematisch Instituut

Postbus 9512

2300 RA Leiden

[uwc@nieuwarchief.nl](mailto:uwc@nieuwarchief.nl)

**Problem C** (Proposed by Roger Hendrickx and Rob van der Waall)

A *finite geometry* is a geometric system that has only a finite number of points. For an *affine geometry*, the axioms are as follows:

1. Given any two distinct points, there is exactly one line that includes both points.
2. The parallel postulate: Given a line  $L$  and a point  $P$  not on  $L$ , there exists exactly one line through  $P$  that is parallel to  $L$ .
3. There exists a set of four points, no three collinear.

We denote the set of points by  $\mathbf{P}$ , and the set of lines by  $\mathbf{L}$ . Let  $\sigma$  be an automorphism of  $(\mathbf{P}, \mathbf{L})$  (meaning that three collinear points of  $\mathbf{P}$  are mapped onto three collinear points of  $\mathbf{P}$  and three noncollinear points of  $\mathbf{P}$  are mapped onto three noncollinear points of  $\mathbf{P}$ ). Prove that there exists a point  $P \in \mathbf{P}$  with  $\sigma(P) = P$  or a line  $L \in \mathbf{L}$  with  $\sigma(L) = L$  or  $\sigma(L) \cap L = \emptyset$ .

**Star Problem** (Unknown proposer)

We have  $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k^2 = (\pi^2/6) - 1$ . Consequently partial sums must satisfy

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

Given any  $q \in \mathbf{Q}$  satisfying  $0 < q < (\pi^2/6) - 1$ , does there exist a finite subset  $K \subseteq \mathbf{N} \setminus \{1\}$  so that

$$\sum_{k \in K} \frac{1}{k^2} = q?$$

**Edition 2005/2**

For Session 2005/2 of the Universitaire Wiskunde Competitie we received submissions from Herbert Beltman, Ruud Jeurissen, H. Reuvers, Piet Stam, and Jaap Spies.

**Problem 2005/2-A** A student association organises a large-scale dinner for 128 students. The chairs are numbered 1 through 128. The students are also assigned a number between 1 and 128. As the students come into the room one by one, they must sit at their assigned seat. However, one of the students is so drunk that he can't find his seat and takes an arbitrary one. Any sober student who comes in and finds his seat taken also takes an arbitrary one. The drunken student is one of the first 64 students. What is the probability that the last student gets to sit in the chair assigned to him?

**Solution** This problem was solved by Herbert Beltman, Ruud Jeurissen, Jaap Spies, and Piet Stam. The solution below is based on the solution of Herbert Beltman.

Let  $D$  be the seat of the drunken student and  $N$  be the seat of the last student. Before student  $D$  enters the room both chairs are empty. The drunken student, or one of the students after him, will sit in one of these seats. The last student will sit in the other one. The probability that he will sit in his own chair is  $\frac{1}{2}$ , and this probability is independent of the number of students and the time the drunken student entered.

**Problem 2005/2-B** We consider amino acids  $A$ ,  $B$  and  $C$  and proteins formed by an ordered sequence of these. We also consider 9 enzymes which modify the proteins by replacing two adjacent amino acids by two other amino acids. These substitutions are given by:

$$\begin{aligned} AA &\rightarrow BC, & AB &\rightarrow CC, & AC &\rightarrow BA, \\ BA &\rightarrow CB, & BB &\rightarrow CA, & BC &\rightarrow AA, \\ CA &\rightarrow BB, & CB &\rightarrow AC, & CC &\rightarrow AB. \end{aligned}$$

We define classes of proteins as follows. If a protein has been modified by an enzyme, then it still belongs to the same class of proteins. Two proteins belong to two different

classes of proteins if there doesn't exist a set of enzymes that is able to modify one of the proteins into the other.

1. How many classes of proteins consisting of 12 amino acids do there exist?
2. How many proteins belong to the class of proteins of  $ABCCBAABCCBA$ ?

**Solution** This problem has been solved by Herbert Beltman and Ruud Jeurissen. The solution below is based on the solution of Herbert Beltman.

We rewrite the problem by substituting 0 for A, 1 for B, and 2 for C. A protein of length  $n$  can be written as  $P = a_0a_1 \dots a_{n-1}$ , where  $a_k \in \{0, 1, 2\}$ . The substitutions in the problem can now be written as:

$$\begin{aligned} 00 &\rightarrow 12, & 01 &\rightarrow 22, & 02 &\rightarrow 10, \\ 10 &\rightarrow 21, & 11 &\rightarrow 20, & 12 &\rightarrow 00, \\ 20 &\rightarrow 11, & 21 &\rightarrow 02, & 22 &\rightarrow 01. \end{aligned}$$

We introduce a convenient transformation of the problem. Define

$$f(P) = b_0b_1 \dots b_{n-1},$$

where  $b_k = a_k + k \pmod 3$ . So again  $b_k \in \{0, 1, 2\}$ . We will call the new protein the *mutated* protein  $Q = f(P)$ . It is clear that  $f$  is a bijection.

Now we consider the transformations. The original transformations can be summarised by:

$$\begin{aligned} xx &\rightarrow (x+1)(x+2) \\ (x+1)(x+2) &\rightarrow (x+2)(x+2) \\ x(x+2) &\rightarrow (x+1)x \end{aligned}$$

where  $x \in \{0, 1, 2\}$  and the numbers have to be taken modulo 3.

For the mutated proteins  $Q$  we get the transformations:

$$\begin{aligned} x(x+1) &\rightarrow (x+1)x \\ x(x+2) &\rightarrow (x+2)x \\ xx &\rightarrow (x+1)(x+1) \end{aligned}$$

We can summarize these transformations for the mutated proteins into two rules.

1. Swap two consecutive aminoacids if they differ.
2. If two consecutive amino acids are equal, increase both by one (modulo 3).

By applying Rule 1 numerous times to a mutated protein  $Q$  we can reach any permutation of  $Q$ . We can replace Rule 1 by:

1'. Replace  $Q$  by some permutation of  $Q$ .

Furthermore, we observe that by applying Rule 2 more often we can replace two consecutive equal amino acids by two other equal amino acids. We can replace Rule 2 by:

2'. Replace two consecutive equal amino acids by two other equal amino acids.

Only by applying Rule 2, the number of a given amino acid in  $Q$  can be changed. These changes are only applied to an even number of amino acids.

Let  $Z(Q) = (z_0, z_1, z_2)$ , where  $z_i$  is the number of amino acids  $i$  in  $Q$  modulo 2. Since  $z_0 + z_1 + z_2 \equiv Z(Q) \pmod 2$ , we have:

If the number of amino acids in  $Q$  is even then  $Z(Q)$  can only be one of  $(0, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ , while if the number of amino acids in  $Q$  is odd then  $Z(Q)$  can only be one of  $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)$ .

It is easy to construct mutated proteins satisfying each of the eight cases (4 for the even case, 4 for the odd case). It is clear that these classes are all different (since only an even number of amino acids can be substituted for an even number of other amino acids). We even have the following lemma, which implies that the result to part 1 is 4.

**Lemma.** Two proteins  $Q_1$  and  $Q_2$  belong to the same class if and only if  $Q_1$  and  $Q_2$  have the same number of amino acids and  $Z(Q_1) = Z(Q_2)$ .

**Proof.** Suppose  $Q_1$  and  $Q_2$  are two proteins with the same number of amino acids, and with the number of amino acids 0, 1 and 2 in  $Q_1$  equal to  $z_0 + 2x_0, z_1 + 2x_1, z_2 + 2x_2$  respectively, and in  $Q_2$  equal to  $z_0 + 2y_0, z_1 + 2y_1, z_2 + 2y_2$ .

We will show that these two proteins belong to the same protein class. We apply the following algorithm to both proteins  $Q_1$  and  $Q_2$ :

- Sort  $Q_i$  in ascending order by applying Rule 1.
- Replace as many pairs 11 and 22 by 00 as possible and sort again.

For both proteins we obtain a protein  $Q$  with  $2(x_0 + x_1 + x_2) + z_0$  zero's followed by  $z_1$  ones and  $z_2$  twos. (Notice that  $x_0 + x_1 + x_2 = y_0 + y_1 + y_2$ ).  $\square$

#### Solution part 2

We have to calculate the exact size of a protein class. We define  $g(n, z_0, z_1, z_2)$  as the number of proteins  $Q$  of size  $n$  satisfying  $Z(Q) = (z_0, z_1, z_2)$ . By symmetry arguments we have

$$g(n, 1, 1, 0) = g(n, 0, 1, 1) = g(n, 1, 0, 1)$$

and

$$g(n, 0, 0, 1) = g(n, 0, 1, 0) = g(n, 1, 0, 0).$$

Since the number of proteins of length  $n$  is  $3^n$  we have

$$g(n, 0, 0, 0) + g(n, 1, 1, 0) + g(n, 0, 1, 1) + g(n, 1, 0, 1) = 3^n$$

for even  $n$  and

$$g(n, 1, 1, 1) + g(n, 0, 0, 1) + g(n, 0, 1, 0) + g(n, 1, 0, 0) = 3^n$$

for odd  $n$ . Given an arbitrary protein, we can adjoin an arbitrary amino acid and get a protein of length one more. As a formula this gives:

$$g(n, 0, 0, 0) = g(n-1, 0, 0, 1) + g(n-1, 0, 1, 0) + g(n-1, 1, 0, 0) = 3^{n-1} - g(n-1, 1, 1, 1),$$

and

$$g(n, 1, 1, 1) = g(n-1, 0, 1, 1) + g(n-1, 1, 0, 1) + g(n-1, 1, 1, 0) = 3^{n-1} - g(n-1, 0, 0, 0).$$

Therefore we find

$$g(n, 0, 0, 0) = 3^{n-1} - g(n-1, 1, 1, 1) = 3^{n-1} - 3^{n-2} + g(n-2, 0, 0, 0).$$

Since  $g(2, 0, 0, 0) = 3$  and  $g(2, 0, 1, 1) = g(2, 1, 0, 1) = g(2, 1, 1, 0) = 2$  we find by induction that

$$g(n, 0, 0, 0) = \frac{1}{4}(3^n + 3)$$

and

$$g(n, 0, 1, 1) = g(n, 1, 0, 1) = g(n, 1, 1, 0) = \frac{1}{4}(3^n - 1).$$

We need to know whether the mutated protein related to the original protein ABC-CBAABCCBA belongs to  $Z(0, 0, 0)$  or to one of the three other classes. This can be done by calculating the related mutated protein. We find  $P = 012210012210$  and  $Q = 021222021222$ . Consequently  $Z(Q) = (0, 0, 0)$  and therefore the size of the class is  $g(12, 0, 0, 0) = \frac{1}{4}(3^{12} + 3) = 132861$ .

**Problem 2005/2-C** In what follows,  $P$  stands for the set consisting of all odd prime numbers;  $M$  is the set consisting of all natural 2-powers  $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ ;  $T$  is the set consisting of all positive integers that can be written as a sum of at least three consecutive natural numbers.

1. Show that the set theoretic union of  $P, M$ , and  $T$  coincides with the set consisting of all natural numbers..
2. Show that the sets  $P, M$ , and  $T$  are pairwise disjoint.

3. Given  $b \in T$ , determine  $t(b)$  in terms of the prime decomposition of  $b$ , where by definition  $t(b)$  stands for the minimum of all those numbers  $t > 2$  for which  $b$  admits an expression as sum of  $t$  consecutive natural numbers.
4. Consider the cardinality  $C(b)$  of the set of all odd positive divisors of some element  $b$  of  $T$ . Now think of expressing this  $b$  in all possible ways as a sum of at least three consecutive natural numbers. Suppose this can be done in  $S(b)$  ways. Determine the numerical connection between the numbers  $C(b)$  and  $S(b)$ .

**Solution** This problem has been solved by Herbert Beltman, Ruud Jeurissen, H. Reuvers, Piet Stam, and Jaap Spies. The solution below is based on the solution of Jaap Spies.

Remark: In this problem we follow the convention not to include zero in the natural numbers.

First let

$$a = p_0^{e_0} \cdot p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$$

be the prime decomposition of a positive integer  $a$  with  $p_0 = 2$ ,  $e_0 \geq 0$  and  $p_1, \dots, p_m$  odd primes with  $e_i > 0$  for  $i = 1, \dots, m$ . We want to write  $a$  as the sum of  $k$  consecutive natural numbers starting with  $n$ .

$$a = n + (n+1) + \cdots (n+k-1) = k \cdot n + \frac{k(k-1)}{2} = k(2n+k-1)/2.$$

So  $2a = k \cdot (2n+k-1)$ . We define  $k$  to be the smallest factor, hence  $k < \sqrt{2a}$ . We observe that only one of the factors is odd.

*Solution to parts 1 and 2*

When  $a$  is a power of 2 we can only have  $k = 1$ . A power of two is clearly not an odd prime and vice versa. An odd prime can only be written as a sum of 2 consecutive natural numbers ( $k = 2$ ). For all other positive integers we have at least one odd prime divisor  $p_i$ . Let  $k = p_i \geq 3$  and  $n = (2a/k - k + 1)/2$ . It follows that  $a$  can be written as the sum of at least three consecutive positive integers starting with  $n$ . The remaining part of the proof is trivial.

*Solution to part 3*

Let  $b = a \in T$  and  $p_1$  be the smallest odd prime divisor of  $b$ . From (2) it follows that if  $e_0 = 0$ , meaning  $b$  is odd, we have  $t(b) = p_1$ , else  $t(b) = \min(2^{e_0+1}, p_1)$ .

*Solution to part 4*

Let again  $b = a \in T$ . We use the prime decomposition (1) to find the number of odd divisors of  $b$ . We easily see that this number must be  $(e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdots (e_m + 1)$ . So  $C(b) = (e_1 + 1) \cdot (e_2 + 1) \cdots (e_m + 1)$ .  $S(b)$  is the number of ways  $b$  can be expressed as sum of at least three positive integers.

From (2) it follows that for each odd divisor of  $b$  we can find a  $k < \sqrt{2a}$ . We must exclude  $k = 1$  and  $k = 2$ . Only in case of an odd  $b$  can we have  $k = 2$ , so  $S(b) = C(b) - 2$  if  $b$  is odd and  $S(b) = C(b) - 1$  if  $b$  is even.

#### Results of Session 2005/2

| Name               | A | B  | C | Total |
|--------------------|---|----|---|-------|
| 1. Herbert Beltman | 8 | 10 | 8 | 104   |

#### Final Table after Session 2005/2

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

| Name                 | Points |
|----------------------|--------|
| 1. Peter Bruin       | 99     |
| 2. Hendrik Hubrechts | 90     |
| 3. Syb Botma         | 42     |