

Inhoud

| Contents

- 186 Colofon
- 187 Redactioneel *Jaap Top*
- 188 Agenda
- 190 Nieuws
- 193 In memoriam Guus Zoutendijk *Lodewijk Kallenberg, Willem van Zwet*

Oratie | Inaugural lecture

- 198 Wat valt er nog te regelen? *Malo Hautus*
- 206 Op het kruispunt *Klaas Landsman*

Onderzoek | Research

- 215 De overval bij het Nederlands Forensisch Instituut *Gerard Alberts, Ger Koole, Jaap Molenaar*
- 221 World Year of Physics 2005 *Kareljan Schoutens*
- 226 Risicobeheer door herverzekeren *Jef Teugels*

Onderwijs | Education

- 232 Te moeilijk? Welnee! *Hans Finkelberg*
- 237 Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade *Matthijs Coster*
- 244 Studio Courses in Studio Classrooms *Jan Brandts*
- 247 Interview met Pierre van Hiele *Gerard Alberts, Rainer Kaenders*

Samenleving | Society

- 225 Uit de schaduw vandaan *Fred Steutel*

Boeken | Books

- 252 Boekbesprekingen

Rubrieken | Departments

- 197 L'autre pays du fromage *Rutger Noot*
- 205 Oud Archief *Danny Beckers*
- 260 Problemen/UWC

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (dpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)

Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid (naw@nieuwarchief.nl)
Arno Kret (naw@nieuwarchief.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.) Jan van de Craats (KMA), Hans Cuypers (TUE), Yves van Gennip (TUE), Geertje Hek (UVA), Teun Koetsier (VU), Joop Kolk (UU), Ger Koole (VU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (FI)

TeX-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
NL-1090 GB Amsterdam

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap. De contributie voor leden van het KWG bedraagt    70 per jaar. Gepensioneerden betalen    35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor    25 per jaar. Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG.

Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van    50.

Members of the *Société Mathématique de France*, the *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay    50 instead of the full membership fee of    70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of    5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of    7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor    90 respectievelijk    105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan van Mill (VU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottschäfer (UL).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
4	03-12-2005	-
1	04-03-2006	07-11-2005
2	17-06-2006	06-02-2006
3	16-09-2006	08-05-2006

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Vectoren zijn in de jaren zeventig in het wiskundeonderwijs geïntroduceerd op grond van het werk van didacticus Pierre van Hiele. Zie pagina 247 voor een interview.

Serviceonderwijs

Aan de opengescheurde bruine envelop in zijn handen kon je het doel van dit bezoek al zien: opnieuw een student die een probleem had met zijn tentamenresultaat. In het afgelopen cursusjaar kwamen opvallend veel meer van zulke mensen langs dan in de voorgaande jaren. Dit verschil vindt tegelijkertijd plaats met een verandering in mijn onderwijstaken. Tot een jaar geleden zaten bij ieder college dat ik verzorgde (ook) wiskundestudenten. Afgelopen jaar veranderde dit.

Nu zou je alleen al op grond van een toename in studenten-aantallen een gestegen aantal klachten over tentamencorrecties voorspellen. Zelfs in grote Groningse eerstejaars differentiaal-rekeningcolleges voor wis-, natuur- en sterrenkundestudenten had ik nooit meer dan zo'n honderd deelnemers. Bij de cursus van afgelopen voorjaar, verplichte wiskundekost voor studenten *Kunstmatige Intelligentie* (KI), *Life Science and Technology*, *Informatica*, *Technische Bedrijfskunde* (TBK) en *Scheikunde*, schreven zich ongeveer 170 personen voor het tentamen in. Een kleine verdubbeling van het aantal klachten, dus zeg maar 5 in plaats van 3, lag voor de hand. Echter, na nummer 12 voldeed deze redenering niet meer. En een ander verschil met de 'eigen' studenten begon op te vallen: daar had de student regelmatig gelijk; bij deze 12 nog geen enkele.

De student met bruine envelop in mijn deuropening kwam een poging ondernemen hierin verandering aan te brengen. "Meneer, er is een fout gemaakt bij het berekenen van mijn eindcijfer voor Wiskunde B". Ik mompelde dat dit vervelend was, en vroeg naar de details. Er was een formule voor dit eindcijfer: eerst bepaal je het maximum van het tentamenresultaat en een gewogen gemiddelde van tentamencijfer en huiswerkresultaten. In het onderhavige geval was dit eenvoudig: andere verplichtingen hadden het maken van huiswerk onmogelijk gemaakt, dus alleen het tentamencijfer speelde een rol. En dat was een 2. Hiermee was de student het eens. Hij verklaarde enkele domme vergissingen te hebben gemaakt, en tot overmaat van ramp waren een paar hoofdstukken van de tentamenstof aan zijn aandacht ontsnapt, zoals bij het maken van het tentamen was gebleken.

Wat was er dan mis met het eindcijfer? Welnu, de formule bevatte naast het voornoemde maximum (de 2 in dit geval), nog een term: eindcijfer is maximum plus 3. De tijdens het hoorcollege twee maanden eerder gemaakte aantekeningen werden als

overtuigend bewijs uit een map in zijn rugzak voor me neergelegd. De 'plus 3' was omcirkeld, en net buiten die cirkel stond "Bij voldoende aanwezigheid en inzet tijdens hoor- en werkcolleges". Hij was elke keer bij deze bijeenkomsten geweest, dus aan alles was voldaan, en bijgevolg diende het eindcijfer geen 2, maar $2 + 3 \dots$ Opeens verstrakte de uitdrukking op zijn gezicht. Een teleurgesteld "*Shit!*" kwam uit zijn mond, en met een "Laat maar, ik heb niets gezegd" draaide hij zich om teneinde via mijn deuropening weer te verdwijnen.

Veel verhalen over wiskundeonderwijs aan studenten van andere studierichtingen hebben wat gemeenschappelijks met bovenstaande ervaring. Of erger, ze spreken van ongemotiveerdheid, gebrek aan inzicht en inzet, fraude. Er zit een gevaar aan dit type verhalen, en tegelijkertijd verhullen ze iets. Het verzorgen van serviceonderwijs is namelijk beslist niet minder uitdagend dan het werken met 'gewone' wiskundestudenten. Juist niet-wiskundestudenten willen we immers tonen hoe mooi ons vak in elkaar steekt, en hoe verrassend sommige toepassingen zijn. En het is niet gemakkelijk een groepje via havo en hbo doorgestroomde informatici, met in hun vooropleiding wel differentiëren maar geen integreren, meteen de theorie over Laplace-transformaties, Fouriercoëfficiënten en stellingen van Green en Gauss te leren waarderen. Wat mij wel het meeste tijd heeft gekost, is het vinden, en min of meer begrijpen van toepassingen van deze wiskunde in de Scheikunde, KI, Life Science, TBK en Informatica. Daar ben ik nog lang niet mee klaar.

Toen ik mijn 'gast' nog vroeg, wat zijn studierichting was (TBK), gaf hij de verontschuldigende toelichting dat hij wel vaker 'plus' en 'keer' door elkaar haalde. En met 'keer' zou hij een voldoende gehad hebben. De volgende keer dan maar beter, antwoordde ik. Hem vertellen dat de '3' in de formule een 'ε' had moeten zijn, en dat wiskundigen de gewoonte hebben met ε een klein, positief getal aan te duiden, komt misschien komend jaar bij het college nog.

Jaap Top
hoofredacteur

Instituut voor wiskunde en informatica, Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800, 9700 AV Groningen
top@math.rug.nl

Agenda

Upcoming Events

september 2005

27 – 30 september

□ Achtste Europese Multigrid Conferentie

Speciaal aandachtsgebied: elliptische partiële differentiaalvergelijkingen

plaats Scheveningen, Den Haag

info <http://pcse.tudelft.nl/emg2005>

oktober 2005

3 – 7 oktober

□ Advanced Num. Meth. for Fluid Dynamics

Lezingen en trainingssessies over spectrale methoden, discontinue eindige-elementenmethoden, Godunovmethoden, eindige-volumemethoden en hoge-resolutiemethoden

plaats Universiteit Twente, Enschede

info wwwhome.math.utwente.nl/~geurtsbj

7 oktober

□ BWI-middag

Bijeenkomst van de opleiding Bedrijfskunde en Informatica, waarin bedrijfsmatige toepassingen uit wiskunde en informatica centraal staan

plaats Vrije Universiteit, Amsterdam

info www.alubwi.nl

7 – 10 oktober

□ Coding Theory and Cryptography

Organisatie: Koninklijke Vlaamse Academie van België voor Wetenschappen en Kunsten

plaats Leuven (België)

info <http://cage.ugent.be/~ls/website/contactforum2005.html>

10–13 oktober

□ Mathematics of Life Sciences

Kick-off bijeenkomst van het NWO-wiskundecluster niet-lineaire dynamiek van natuurlijke systemen (NDNS+)

plaats Groningen

info www.nwo.nl

12 – 14 oktober

□ Woudschoten-conferentie 2005

Numerieke analyse. Thema's: convectie-diffusie-reactievergelijkingen, signaalanalyse en beeldverwerking

plaats Conferentieoord Woudschoten, Zeist

info www.cwi.nl/projects/wnw/conf2005

14 oktober

□ EIDMA Cryptography Working Group

Driemaandelijks bijeenkomst voor cryptografie-onderzoek

plaats Vergadercentrum La Vie, Utrecht

info www.win.tue.nl/math/eidma/cwg.html

14 – 15 oktober

□ Buildings, Groups and Algebras

Conferentie ter ere van Jacques Tits

plaats Gent (België)

info <http://cage.rug.ac.be/~hvm/conference.html>

14 – 15 oktober

□ Jaarcongres Belgische Vereniging voor Statistiek

Organisatie: Belgian Statistical Society, b-ENBIS, RSS-3cc en Quetelet

plaats Priorij Corsendonk (België)

info www.bss2005.be

19 – 26 oktober

□ Wetenweek: Ken je krachten

Jaarlijks evenement over wetenschap en techniek. Bedrijven, instellingen en onderzoeksorganisaties in Nederland openen hun deuren.

plaats Gehele land

info www.wetenweekparticipanten.nl

november 2005

7 – 11 november

□ Dynamics of Patterns

Workshop voor wiskundigen, biologen, fysici en chemici. Thema: het vinden van classificeringen van spatio-temporele patronen van dynamische systemen

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

Redacteur: Yves van Gennip

12 november

□ Bètavrouw: kies je toekomst

Symposium voor bètavrouwen gericht op loopbaanaspecten

plaats *Aristo Zalen, Utrecht*

info www.science.uva.nl/misc/nimf

14 – 16 november

□ Stochastics Meeting Lunteren 2005

Jaarlijkse bijeenkomst van Stochastici. Sprekers: David Gilat (Tel Aviv), Marc Halin (Brussel), Charles Newman (New York), Gareth Roberts (Lancaster), Michael Sørensen (Kopenhagen), Marc Yor (Paris)

plaats *Conferentiecentrum De Werelt, Lunteren*

info www.cwi.nl/events/2005/lunteren

16 – 18 november

□ Diamant-Eidma Symposium 2005

Naast de gebruikelijke thema's uit de discrete wiskunde aandacht voor getallentheorie en computerwiskunde

plaats *Hotel Carlton de Brug, Mierlo*

info www.win.tue.nl/math/eidma

december 2005

2 december

□ EIDMA Cryptography Working Group

Driemaandelijks bijeenkomst voor cryptografie-onderzoek

plaats *Vergadercentrum La Vie, Utrecht*

info www.win.tue.nl/math/eidma/cwg.html

6 – 8 december 2005

□ International Conference on Science and Mathematics Education (CoSMEd)

Conferentie met doel de kloof tussen onderwijs-theorie en -praktijk te overbruggen. Speciale onderwerp: ICT-onderwijs

plaats *Penang, Maleisië*

info www.recsam.edu.my/cosmed

20 – 22 december

□ Fast Num. Sols. of Partial Differential Equations

Workshop over nieuwe ontwikkelingen op het gebied van numerieke oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen

plaats *Universiteit Utrecht*

info www.math.uu.nl/Fastsolvers

januari 2006

7 januari 2006

□ Wintersymposium 2006

Jaarlijks symposium van het KWG. Thema: financiële wiskunde

plaats *Academiegebouw van de Universiteit, Utrecht*

info www.math.unibas.ch/~draisma/rwcao6

30 januari – 3 februari 2006

□ Studiegroep Wiskunde met de Industrie 2006

Wiskundigen werken in groepsverband aan industriële problemen

plaats *Technische Universiteit Eindhoven*

info www.win.tue.nl/swi2006

februari 2006

3 – 4 februari 2006

□ Nationale Wiskunde Dagen

Lezingen en werkgroepen over alle gebieden van de wiskunde voor wiskundeleraars

plaats *Congrescentrum de Leeuwenhorst, Noordwijkerhout*

info www.fi.uu.nl/nwd

maart 2006

6 – 10 maart 2006

□ Tessellations in Theory and Practice

Workshop over alomtegenwoordigheid van fundamentele meetkundige patronen in de verdeling van de ruimte. Organisatie: Vincent Icke, Rein van de Weijgaert, Jelle Ritzerveld

plaats *Lorentz Center, Leiden*

info www.math.unibas.ch/~draisma/rwcao6

16 – 17 maart 2006

□ Tenth Rhine Workshop on Computer Algebra (RWCA 2006)

Jaarlijkse workshop over alle deelgebieden van de computeralgebra. Voorzitter: Jan Draisma

plaats *Basel (Zwitserland)*

info www.math.unibas.ch/~draisma/rwcao6

mei 2006

12 mei 2006

□ Leve de Wiskunde!

Wetenschappelijke voordrachten, lezingen over populariseren van wiskunde en informatiemarkt voor vwo-docenten en andere belangstellenden

plaats *Universiteit van Amsterdam*

info www.science.uva.nl/math/home.cfm

juni–augustus 2006

25 juni – 2 juli 2006

□ 7th Junior Mathematical Congress

Internationaal wiskundecongres voor scholieren, waarbij zij lezingen voor elkaar kunnen houden

plaats *Tg-Mures (Roemenië)*

info www.uni-miskolc.hu/matjun7

18 – 21 juli 2006

□ 13th ILAS Conference

Conferentie van de *International Linear Algebra Society* over verscheidene thema's in de lineaire algebra

plaats *Vrije Universiteit, Amsterdam*

info staff.science.uva.nl/~brandts/ILASo6

22 – 30 augustus 2006

□ International Congress of Mathematicians 2006

Drie prijsuitreikingen: de *Fields medal* (wiskundig onderzoek), de *Nevanlinna prize* (theoretische informatica), de *Gauss prize* (toegepaste wiskunde)

plaats *Madrid (Spanje)*

info www.icm2006.org

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Redacteur: Yves van Gennip

Henk Bos ontvangt de Kenneth O. May medal

Tijdens het afscheidssymposium van Henk Bos op 30 juni in Utrecht is aan hem de *Kenneth O. May*-prijs overhandigd. De vijfde editie van deze prijs, die elke vier jaar wordt uitgereikt door de *International Commission on the History of Mathematics* (ICHM), werd hem verleend voor zijn werk op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde.

Henk Bos is emeritus hoogleraar Geschiedenis van de Wiskunde aan de Universiteit Utrecht en is verbonden aan zowel het Mathematisch Instituut als het *Institute for History and Foundations of Science* van die instelling. Zijn bijdragen aan het geschiedkundig onderzoek liggen op drie gebieden: het wetenschappelijke werk van Huygens, de fundamentele concepten van de infinitesimaalrekening van Leibniz en de meetkunde van Descartes. Over dit laatste onderwerp heeft hij het boek *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* gepubliceerd. Tevens is Bos een van de redacteurs van het *Archive for History of Exact Sciences*.

Zijn voorliefde voor de infinitesimaalrekening van Leibniz kwam ook naar voren in zijn afscheidscollege *Loose Ends*. Hierin besprak hij een aantal open problemen in zijn eigen onderzoek, waarbij de nadruk lag op 'fluid concepts', ambigue concepten waarmee in de wiskunde ooit gewerkt werd of wellicht zelfs nog gewerkt wordt. Een voorbeeld hiervan is de "infinittangular polygon", een polygoon met oneindig veel hoeken, waar Leibniz een kromme mee voorstelde.

De *Kenneth O. May*-prijs is vernoemd naar de wis- en geschiedkundige die een grote bijdrage heeft geleverd aan het totstandkomen van een internationale gemeenschap van historici van de wiskunde. Hij speelde een bepalende rol bij de oprichting van de ICHM en het tijdschrift *Historia Mathematica* en door de publicatie van de eerste *World Dictionary of Historians of Mathematics*. De vier eerdere edities van deze prijs gingen naar Dirk J. Struik en Adolf P. Yushkevich (1989), Cristoph J. Scriba en Hans Wussing (1993), Rene Taton (1997) en Ubiratàn D'Ambrosio en Lam Lay Yong (2001).

Bron: www.math.uu.nl/ichm/maymedal.html



Henk Bos ontvangt de *Kenneth O. May*-medaille uit handen van Jeremy Gray

NWO-Spinozapremie 2005 voor Lex Schrijver

Aan de wiskundige prof.dr. Alexander Schrijver is de *Spinozapremie 2005* toegekend. Hij ontvangt de prestigieuze prijs voor zijn baanbrekende onderzoek op het gebied van combinatoriek en algoritmië. De officiële uitreiking vindt plaats op woensdag 23 november 2005.

Het vakgebied van de combinatoriek en de algoritmië verbindt wiskunde met informatica en speelt zich af op een fundamenteel niveau, dat dikwijls leidt tot zeer praktische toepassingen. Eén van Schrijvers verdiensten is dat hij boeken heeft geschreven "waar iedereen op zat te wachten", zoals een collega het formuleert. Hierdoor heeft hij een ge-

bied, dat vijftientig jaar geleden nog een collectie op zichzelf staande problemen en resultaten vormde, tot een vakdiscipline omgesmeed. Voor *Theory of Linear and Integer Programming* (1986) en *Combinatorial Optimization — Polyhedra and Efficiency* (2003) ontving Schrijvers de *Lanchester Prize*.

Lex Schrijver studeerde wiskunde aan de Vrije Universiteit in Amsterdam, waar hij ook promoveerde (1977). Van 1983 tot 1989 was hij hoogleraar in Tilburg, waarna hij in dienst trad bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI). Hij is er lid van het Management Team en leider van het onderzoekscluster *Probability, Networks and Algorithms*. Daarnaast is hij sinds 1990 ook deeltijdhoogleraar in de Discrete wiskunde en optimalisering aan de Universiteit van Amsterdam.

Schrijver was als gastonderzoeker in Oxford, Szeged, Bonn, ENS Paris, Rutgers University, Yale University, was consultant bij *Bell Communications Research* en *Microsoft Research* en kreeg in 2002 een eredoctoraat wiskunde van de University of Waterloo, Ontario, Canada. Sinds 1995 is Lex Schrijver lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen en sinds kort ook buitenlands lid van de Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften.

Hij ontving een groot aantal prijzen, waaronder tweemaal de *Fulker Prize* van de American Mathematical Society (in 1982 en 2003), de *Dantzig Prize* van de Mathematical Programming Society en Society for Industrial and Applied Mathematics (2003) en tweemaal de *Lanchester Prize* van de Operations Research Society of America (in 1987 en 2004).

Bron: www.science.uva.nl



foto: Arle Wapenaar

Lex Schrijver

Vidi-subsidies voor Hilde Huizenga, Jeanine Houwing, Onno van Gaans, Etienne de Klerk en Chris Stolk

De Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) heeft 79 jonge, excellente wetenschappers een zogeheten *Vidi*-subsidie toegekend. Elke onderzoeker krijgt in totaal maximaal 600.000 euro, waarmee hij vijf jaar lang een eigen onderzoekslijn kan ontwikkelen en een of meer onderzoekers aan kan stellen. In totaal schreven 307 onderzoekers een onderzoeksplan.

De onderzoeksvoorstellen op wiskundig gebied zijn *Nieuwe statistische methoden voor hersenonderzoek* (Hilde Huizenga, Universiteit van Amsterdam, psychologie), *Pluizen in DNA-profielen* (Jeanine Houwing, Universiteit Leiden, medische statistiek) *Wiskundige technieken voor optimalisering* (Etienne de Klerk, Universiteit van Tilburg, econometrie en operations research), *Tot rust komen in oneindig veel dimensies* (Onno van Gaans, Universiteit Leiden, wiskunde) en *Re-*

constructie van de structuur van de aarde uit seismische data (Chris Stolk, Universiteit Twente, toegepaste wiskunde en mathematische fysica).

Bron: www.nwo.nl

Twee keer brons op Internationale Wiskunde Olympiade

De Nederlandse delegatie is in de prijzen gevallen bij de 46ste *Internationale Wiskunde Olympiade* die in juli plaatsvond in Mérida, Mexico. Aan deze wedstrijd voor middelbare scholieren namen dit jaar deelnemers uit 91 landen deel. Na drie selectierondes werden voor de Nederlandse afvaardiging de scholieren Johan Konter, Sjoerd Boersma, Jinbi Jin, Sietske Tacoma, Anne de Haan en Johannes Steenstra uitgekozen. Samen met begeleider Fokko van de Bult en Nederlands leider Jan Donkers werden ze niet alleen getraakteerd op wiskundige opgaven, maar ook op de overtrekkende orkaan Emily. Uiteindelijk gingen Johan Konter en Jinbi Jin naar huis met een bronzen medaille en Sjoerd Boersma en Sietske Tacoma met een eervolle vermelding. De 47ste editie van de Olympiade zal volgend jaar plaatsvinden in Ljubljana, Slovenië.

Bron: www.kennislink.nl



Het Nederlandse team bij de Internationale Wiskunde Olympiade

Wiskunde in Engeland in een neerwaartse spiraal

In een rapport van de UK Mathematics Foundation *Where will the Next Generation of UK Mathematicians come from?* worden ernstige zorgen geformuleerd over het wiskunde-onderwijs. Met name het aantal leerlingen dat wiskunde afsluit op 'A-level' (min of meer te vergelijken met vwo) is de laatste jaren dramatisch afgenomen. De opdeling van de wiskundestof voor het 'A-level' in verschillende modules een paar jaar geleden heeft, door het gebrek aan samenhang, bijgedragen tot de neerwaartse spiraal. Het rapport bepleit een beter curriculum voor de betere leerling.

Gerard Koolstra; Bron: news.bbc.co.uk

Raad van State kritisch over ontbreken wiskunde bij C&M havo

In een eind april uitgebracht, maar nu pas openbaar advies van de Raad van State worden kritische opmerkingen gemaakt over het niet verplicht meer zijn van wiskunde bij het profiel C&M op het havo. "De Raad wijst er op dat leerlingen die doorstromen van havo naar vwo problemen kunnen ondervinden als zij geen wiskunde in hun pakket hebben. Voorts bestaat het gevaar dat door het ontbreken van wiskunde in het profiel Cultuur en Maatschappij de even-

wichtigheid tussen de profielen verstoord wordt en de maatschappelijke waardering van een havo-diploma met dit profiel hierdoor afneemt.”

Gerard Koolstra, bron: www.nvww.nl

Meesterlijk design?

Recentelijk is in Nederland de discussie over *Intelligent Design* opgeblaaid. Minister van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap Maria van der Hoeven liet op haar wekelijkse weblog *De week van M* weten wel iets te voelen voor dit concept, dat stelt dat er een ontwerp ten grondslag ligt aan het heelal en het leven: zij propageert een debat binnen de wetenschappelijke en onderwijswereld over *Intelligent Design in het middelbaar onderwijs*.

In juni verscheen er een boek over dit onderwerp, onder redactie van molecuulair bioloog Cees Dekker (TU Delft), wiskundige Ronald Meester (VU) en filosoof René van Woudenberg (VU), getiteld *Schitterend ongeluk of sporen van ontwerp? Over toeval en doelgerichtheid in de evolutie*. Het boek is een bundel met 21 essays over *Intelligent Design* met bijdragen uit de biologie, sterrenkunde, natuurkunde, wiskunde, filosofie, theologie en geschiedkunde.

Yves van Gennip



Zomergast Dijkgraaf trakteert op Wiles en fractals

Op zondag 7 augustus was Robbert Dijkgraaf, hoogleraar mathematische fysica aan de Universiteit van Amsterdam, te gast in het programma Zomergasten van de VPRO. Hierin werd Dijkgraaf geïnterviewd door Connie Palmen aan de hand van door hemzelf uitgekozen televisie- en filmfragmenten.

Een van deze fragmenten, was afkomstig uit de documentaire *Fermat's Last Theorem* en ging over Andrew Wiles, de wiskundige die midden jaren negentig de laatste stelling van Fermat bewees. Een ander fragment handelde over fractals, waarbij natuurlijk Mandelbrots bekende figuur niet ontbrak. Ook het opnieuw actuele *Intelligent Design* werd in deze uitzending middels een fragment uit *Unlocking the Mystery of Life* ten tonele gebracht. Op de website van het programma zijn alle getoonde fragmenten te bekijken.

Dijkgraaf werkt in Amsterdam op het gebied van de snaartheorie en houdt zich veel bezig met het populariseren van wetenschap, vooral onder jongeren. In 2003 werd hem de Spinozapremie toegekend.

Bron: www.vpro.nl/programma/zomergasten

Nieuw bètablad voor jongeren

Met ingang van het septembernummer heeft tijdschrift *Mens & Wetenschap* zichzelf verjongd. Het richt zich nu expliciet op jeugd tussen de tien en de achttien jaar en informeert op vlotte manier over de actualiteit in de exacte wetenschap. De categorieën in de inhoudsopgave karakteriseren het blad goed; *Science, Life Science, Doen, Techniek, Focus*: men verwacht een actieve participerende lezer. In meerdere artikelen wordt de lezer aangezet tot het uitvoeren van experimenten zoals het maken van vuurwerk of het meten van luchtvochtigheid.

Het is echt jammer, dat de wiskunde er zo bekaaid af komt. Dit is overigens een euvel waar bijna alle bètabladen aan lijden. En dat terwijl op wiskundig gebied juist zo veel door de lezer zelf te doen is. Derk Pik



Aantal aanmeldingen WetenWeek 2005 overtreft 2004

Tijdens de *WetenWeek 2005*, het jaarlijkse landelijke evenement over wetenschap en techniek, openen in totaal bijna honderdvijftig instellingen hun deuren. Het aantal participanten voor de twintigste editie van het evenement overtreft daarmee *WetenWeek 2004*. Van 19 tot en met 26 oktober kan het publiek kennismaken met de fascinerende wereld van techniek en wetenschap en hun invloed op de samenleving.

Diverse bedrijven, sterrenwachten, musea, universiteiten, ziekenhuizen en andere kennisinstellingen doen mee aan de *WetenWeek 2005*. Hierdoor komen wetenschap en techniek bijna overal in Nederland op een bijzondere manier tot leven.

Wendy Pouwer, projectmanager van de *WetenWeek*, is zeer tevreden: “Het enthousiasme van de deelnemende bedrijven en instellingen is weer enorm. Elk jaar is het weer fantastisch om te merken dat de *WetenWeek* zo positief wordt ontvangen. De twintigste editie van de *WetenWeek* valt samen met het *World Year of Physics*. Het hele jaar staat natuurkunde in het zonnetje omdat het honderd jaar geleden is dat Albert Einstein zijn drie legendarische wetenschappelijke artikelen schreef die de basis hebben gelegd voor fundamentele gebieden in de natuurkunde. Het thema van de *WetenWeek 2005* sluit daar dan ook naadloos op aan en loopt als een rode draad door deze editie.”

Bron: www.wetenweek.nl



Lodewijk Kallenberg*Mathematisch Instituut**Universiteit Leiden**Postbus 9512**2300 RA Leiden**kallenberg@math.leidenuniv.nl***Willem van Zwet***Mathematisch Instituut**Universiteit Leiden**Postbus 9512**2300 RA Leiden**vanzwet@math.leidenuniv.nl*

Guus Zoutendijk (1929–2005)

In memoriam Guus Zoutendijk (1929–2005)

Wetenschap of maatschappij

Op 29 januari 2005 is Guus Zoutendijk overleden. Hij is 75 jaar geworden. Zijn wetenschappelijk werk lag op het terrein van de mathematische programmering en de informatica. Ook bekleedde hij vele hoge maatschappelijke functies, zowel bij de overheid als in het bedrijfsleven. Het dilemma wetenschap of maatschappij loopt als een rode draad door zijn leven. In zijn eigen woorden: “Ik heb van alles wát gedaan en het voorrecht gehad op vele terreinen in de frontlinie mee te draaien”. Lodewijk Kallenberg is de laatste promovendus van Zoutendijk en is thans hoogleraar-directeur van het Landelijk Netwerk Mathematische Besliskunde (LNMB). Willem van Zwet, emeritus hoogleraar statistiek aan de Universiteit Leiden, heeft Zoutendijk vanaf zijn studententijd gekend.

Guus Zoutendijk werd op 12 september 1929 in Den Haag geboren. Hij sloeg de eerste klas van de lagere school (de Nutsschool aan de Laan van Poot) over en voordat hij op elfjarige leeftijd naar het gymnasium ging had hij met een oom al ongeveer de hele wiskundestof van de middelbare school doorgenomen. Het was dan ook niet verwonderlijk dat hij na het gymnasium wiskunde ging studeren en hij deed dat in Leiden. Daar werd in die tijd alleen zuivere wiskunde gedoceerd en al spoedig merkte hij dat zijn belangstel-

ling zeker ook uitging naar wiskunde die in de praktijk werd toegepast. Hij ging in Amsterdam college-lopen in onderwerpen uit de actuariële wetenschappen en kwam op deze wijze in aanraking met onder andere Van Dantzig, bij wie hij een drietal vakken volgde. In het studentenleven was Zoutendijk actief in het Leidsch Studenten Corps en werd daar quaestor van de sociëteit en naamgever van de voetbaltrofee de Zoutendijkstoep. Zijn belangstelling voor de wiskunde was halverwege de studie wat tanende, maar toen de

Leidse hoogleraar Droste hem vroeg om zijn assistent te worden, stortte hij zich weer op de wiskunde en studeerde in het najaar van 1954 af.

Militaire dienst en Shell

Na zijn afstuderen moest Zoutendijk in militaire dienst. Inmiddels had hij contact gehad met Shell Research te Amsterdam, waar plaats was voor wiskundigen. Hij maakte de afspraak om, na zijn dienstplicht vervuld te hebben, bij Shell te komen werken. In ruil hiervoor werd hij gedurende zijn diensttijd al door Shell betaald. In 1956 ging hij werkelijk aan de slag bij Shell, waar men erg geïnteresseerd was geraakt in de lineaire programmering, een nieuwe wiskundige methode voor het oplossen van optimaliseringsproblemen. Benders, de latere hoogleraar mathematische besliskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven, was er zijn kamergenoot. Inmiddels had Zoutendijk bij Shell geregeld

Promovendi

- a. Spijker, M.N., *Stability and convergence of finite-difference methods*, Leiden, 20 maart 1968.
- b. Roode, J.D., *Generalized Lagrangian functions in mathematical programming*, Leiden, 30 oktober 1968.
- c. Buys, J.D., *Dual algorithms for constrained optimisation problems*, Leiden, 30 juni 1972.
- d. Griend, J.A. van de, *Optimalisering van functies van één veranderlijke*, Leiden, 7 juni 1978.
- e. Kallenberg, L.C.M., *Linear programming and finite Markovian control problems*, Leiden, 4 juni 1980.

dat hij tijd mocht vrijmaken voor het schrijven van een proefschrift, waarbij Van Dantzig als promotor zou optreden. Hoewel Van Dantzig niet gecharmeerd was van het onderwerp lineaire programmering (hij zag meer in de theorie van Markovprocessen) was hij toch bereid als promotor op te treden. Helaas overleed Van Dantzig onverwachts in 1959, waarna Van Wijngaarden de rol van promotor op zich nam. Op 22 juni 1960 promoveerde Zoutendijk.

Curaçao en informatica

Na zijn promotie koos Zoutendijk ervoor om de ontwikkelde theorieën op het gebied van de lineaire programmering in de praktijk te gaan toepassen. Het doel daarbij was om raffinaderijproblemen zo efficiënt mogelijk op te lossen. Shell had daarvoor een aparte operations researchgroep op Curaçao, waar ook de eerste Shellcomputer was geïnstalleerd. Bij de implementatie van de wiskundetechnieken was het nodig om veel aandacht te schenken aan de numerieke aspecten van de lineaire programmering en aan de hardware

en software van de computer. Zo kwam Zoutendijk in aanraking met de informatica. De expertise die hij op dit gebied ontwikkelde trok de aandacht van IBM, die hem een aanbod deed om op Yorktown Heights in hun research center te komen werken.

Terug naar Leiden

Tegelijkertijd werd hem door Kloosterman een aanbod gedaan om naar Leiden te komen als hoogleraar numerieke wiskunde, de eerste leerstoel in Leiden in de toegepaste wiskunde, en om tevens directeur te worden van het pas opgezette Centraal Rekeninstituut (CRI). Kloosterman, zelf een zuiver wiskundige, zag in dat het nodig was ook toegepast wiskundigen naar Leiden te halen. Wel was het van meet af aan de bedoeling dat men zich in Leiden bezig zou houden met de fundamentele aspecten van de toegepaste wiskunde en niet zou trachten om te concurreren met de ingenieurs bij het oplossen van specifieke praktische problemen in het bedrijfsleven. Dit beginsel is tot de dag van vandaag in Leiden de leidraad gebleven.

In zijn oratie in november 1964 maakte Zoutendijk meteen duidelijk dat de computer niet alleen als rekenmachine moet worden beschouwd, maar een veel wijder toepassingsgebied heeft als verwerker van informatie. Hij stelde voor om voortaan te spreken over *informatie mathematica*, ofwel *informatica*, waarmee hij het woord informatica in onze taal introduceerde. Het bleef niet bij woorden en in hoog tempo verscheen geavanceerde apparatuur op het CRI en werd Leiden het informatica tijdperk binnengevoerd.

Zoutendijk was een van de eersten die zich bezig hield met de maatschappelijke gevolgen van het computertijdperk en daarbij, naast negatieve gevolgen, ook vele positieve aspecten van de nieuwe technologie benoemde, met name op het gebied van het goed laten functioneren van allerlei administratieve

processen. Verder wees hij op de eigen verantwoordelijkheid in tegenstelling tot 'de fout van de computer'.

Recht op privacy

Zoutendijk was een veelvuldig spreker over onderwerpen als 'computers en macht' en 'computers en privacy'. In Leiden hield hij een diesrede over 'computers en democratie'. Hij maakte lange tijd deel uit van de Staatscommissie Bescherming Persoonlijke Levenssfeer. In zijn maidenspeech in 1972 in de Eerste Kamer zei hij onder meer het volgende: "De computer kan een zeer belangrijk hulpmiddel worden om deze gecompliceerde maatschappij beter te bestuderen. Gezien de snelle technologische ontwikkelingen op dit terrein zal aan ad hoc wetgeving niet geheel te ontkomen zijn, maar voor wij deze kleine stapjes gaan nemen moeten wij zeker zijn dat wij niet de verkeerde kant op gaan. Afweging van de belangen van het individu, van zijn recht op privacy tegen de belangen van de gemeenschap, is geen eenvoudige zaak". Met dit citaat dat aan actualiteitswaarde niet heeft ingeboet gaf hij blijk van zijn vooruitziende blik en gewogen oordeelsvorming.

Zoutendijk nam in Leiden het initiatief tot de bouw van een nieuw instituut dat —naast het CRI— ook de wiskunde en informatica huisvestte. Er kwamen meer leerstoelen in de toegepaste wiskunde (Van Zwet, Fabius) en informatica (Verrijn Stuart) en in 1971 verruilde hij zijn eigen leeropdracht in de numerieke wiskunde in voor een leerstoel in zijn eigenlijke vakgebied, de mathematische beslissonde. Zijn leerling Spijker werd de nieuwe hoogleraar numerieke wiskunde.

Delta Lloyd en de politiek

Intussen werd van steeds meer kanten een beroep gedaan op zijn uitzonderlijke kwaliteiten, met name als bestuurder. Nadat hij zich in 1966 aanmeldde bij D66, werd hij la-



Het Centraal Rekeninstituut (CRI), vlak na oplevering.

ter —na een aanvaring met Van Mierlo— lid van de VVD. In 1971 werd hij voor de VVD lid van de Eerste Kamer, van 1980 tot 1987 als fractievoorzitter. Bij zijn aftreden als fractievoorzitter ontving hij de Thorbeckepenning. Daarnaast was hij voorzitter van de werkgroep over de bevindingen van de *Club van Rome* en vanaf 1971 tot aan zijn overlijden lid van het curatorium van de Professor Telders Stichting. Zelf beschouwde hij zijn politieke activiteiten als ‘werk aan de zijlijn’.

In 1975 besloot hij dat zijn bestuurlijke bezigheden hem nauwelijks meer tijd lieten voor wetenschappelijk werk. Hij verliet de universiteit en trad toe tot de Raad van Bestuur van Delta Lloyd. Hij werd hiervoor gevraagd vanwege zijn expertise op het gebied van de automatisering, maar zijn kwaliteiten als ‘generalist’ kwamen ook goed van pas. Eerst werd hij lid en vanaf 1984 voorzitter van de Raad van Bestuur. In Leiden vervulde hij van 1980 tot 1985 nog een bijzonder hoogleraarschap.

Maatschappelijke functies

Zijn grote maatschappelijke betrokkenheid kwam tot uiting in de vele pro deo functies die hij naast zijn drukke werkzaamheden tot op het laatste moment bekleedde. Zo was hij onder andere lid van de Commissie Scholten voor Joodse oorlogstegoeden en bestuurslid van het Rijksinstituut voor Oorlogsdocumentatie.

Hij was voorzitter van de NEBAS (Nederlandse Bond voor Aangepast Sporten). Die reikt, sinds zijn aftreden in 2003 waarbij hij benoemd werd tot erelid, jaarlijks een naar Zoutendijk genoemde prijs uit voor een instantie of persoon die zich bijzonder heeft ingespannen op dit gebied. Zoutendijk zelf kreeg de *Audrey Hepburnprijs* voor dit werk. Voor zijn werk als voorzitter van de Rotary Doctors Bank ontving hij op 4 januari jl, kort voor zijn overlijden, het Paul Harris Fellowship.

Voor zijn grote maatschappelijke verdiensten werd hij onderscheiden met de benoeming tot Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw, Commandeur in de Orde van Oranje Nassau en Honorary Officer of the Most Excellent Order of the British Empire.

Wetenschappelijk werk

Zoutendijk's eerste artikel [1] is het enige met een co-auteur, in dit geval Van Dantzig. Het handelt over Markovprocessen. Al zijn andere artikelen en boeken liggen op het terrein van de lineaire programmering (LP) en de niet-lineaire programmering (NLP). Zij behandelen de zogenaamde *methods of feasible directions*, een klasse van technieken die hij voor

het eerst in [2] publiceerde en die in zijn proefschrift [3] verder zijn ontwikkeld.

Het is een methode om een maximaliseringsprobleem iteratief op te lossen. De stappen van deze methode zijn: (1) start met een toegelaten beginpunt; (2) kies een richting waarin de doelfunctie stijgt en toelaatbaar blijft; (3) kies een staplengte in deze richting, waarmee een nieuwe iterand wordt verkregen.

Op zich is dit een triviale aanpak, maar de interessante vragen die Zoutendijk in een groot aantal gevallen heeft kunnen oplossen zijn: (a) hoe bepaal je een toegelaten startpunt; (b) wat is de beste richting en staplengte; (c) is er convergentie naar de optimale oplossing, hoe snel gaat deze en is er convergentie in een eindig aantal stappen? Lange tijd was de simplexmethode de enige techniek om LP-problemen op te lossen. Sinds 1984, met de komst van de inwendigepuntmethoden, staan methoden van toelaatbare richtingen ook voor LP-problemen weer in de belangstelling.

In volgende artikelen gaat hij met name in op de numerieke aspecten van technieken voor NLP-problemen [4], [6], [8], [10], [12] en [13] en LP-problemen [9]. Daarnaast publiceert hij over duale algoritmen en Lagrange functies [8], [11]. Zoutendijk heeft ook enkele bijdragen geleverd aan de combinatorische optimalisering. In [5] wordt een aanpak voorgesteld om de deelproblemen, die worden verkregen met decompositiemethoden, snel op te lossen. De meeste van deze technieken en resultaten zijn te vinden in het boek over mathematische programmering, dat Zoutendijk schreef vlak voor zijn overstap van de Rijksuniversiteit Leiden naar Delta Lloyd [14].

De artikelen [7] en [15] geven een reflectie op maatschappelijke problemen, met name het gebruik van computers in relatie tot beslissingsproblemen.

In 1970 haalde Zoutendijk het International Mathematical Programming Symposium naar ons land. Tijdens dit symposium werd, mede op zijn initiatief, een aantal organisatorische fundamenteen gelegd waarop dit vak tot de dag van vandaag steunt: de Mathematical Programming Society (MPS) en het tijdschrift *Mathematical Programming*. Als erkenning voor zijn belangrijke pionierwerk werd hem in 2000 de Founder's Award van de MPS toegekend.

Promovendi

Zoutendijk heeft vijf promovendi gehad. Hij liet de promovendi erg vrij in hun keuze van onderwerp en de begeleiding had geen dwin-



gend karakter. Vandaar dat deze proefschriften een vrij breed gebied bestrijken. In het proefschrift van Spijker, zijn eerste promovendus, worden convergentie en stabiliteit van differentiemethoden onderzocht voor het numeriek oplossen van beginwaardeproblemen [a].

De volgende twee promovendi, Roode en Buys, beiden afkomstig uit Zuid-Afrika, hebben onderzoek gedaan naar het gebruik van Lagrange functies voor niet-lineaire programmering [b], [c]. Van de Griend [d], waarbij Spijker eveneens als promotor optreedt, onderzoekt het ééndimensionale optimaliseringsprobleem, met name methoden met interpolatie en intervalreductie.

De laatste promovendus, Kallenberg, heeft lineaire programmering toegepast om allerlei Markovbeslissingsproblemen op te lossen [e]. Hierbij traden Hordijk en Zoutendijk beiden als promotor op.

Wetenschapsbeleid

Zoutendijk heeft altijd een grote belangstelling gehad voor wetenschapsbeleid. Hij is lid

geweest van vele commissies en besturen op dit gebied. Van 1991–2000 was hij lid van de Adviesraad voor Wetenschaps- en Technologiebeleid (AWT). Hij was commissaris van de Universiteit Leiden Holding b.v. en bestuurslid van het Thomas Stieltjes Institute for Mathematics. In de Eerste Kamer was hij voorzitter van de commissie voor het wetenschappelijk onderwijs en wetenschapsbeleid.

Hij vond dat de roep om maatschappelijke relevantie door de overheid alleen maar leidde tot modegevoelige onderwerpen die men dan overal meteen wil gaan bestuderen. Iedereen gaat dan min of meer hetzelfde doen en er is geen ruimte voor de toevallige geniale ontdekking. Ook was hij een tegenstander van het sluiten van wiskundeopleidingen: ze zijn alleen al nodig in verband met de hulpwetenschap die de wiskunde overal is. Wel was hij een warm voorstander voor meer samenwerking tussen instellingen en instituten.

Persoonlijk

Guus Zoutendijk trad in 1959 in het huwelijk met Adelheid Meijs. Het echtpaar kreeg twee

dochters, Olga en Eveline. Zoutendijk's laatste boek [14] werd door hem opgedragen aan 'Adelheid, my global optimum'.

Guus was een snelle denker, maar zijn optreden en wijze van spreken leken enigszins aarzeland. In werkelijkheid was er geen spoor van aarzeling en wist hij heel precies en scherp te formuleren. Hij was zeer betrokken bij zaken en personen waar hij mee te maken had. In deze bescheiden, integere en wijze persoon verliezen wij een energieke man, een excellent onderzoeker en een vakkundig bestuurder met grote maatschappelijke belangstelling, die zijn talenten op vele plaatsen heeft ingezet.

Verantwoording

In *Nieuw Archief voor Wiskunde* (vijfde serie, deel 2, nummer 1, 2001) staat een uitgebreid interview met Zoutendijk, afgenomen door Gerard Alberts en Ger Koole. In dit In Memoriam wordt gebruik gemaakt van een groot aantal gegevens en uitspraken uit dat interview.

Publicaties Zoutendijk

- 1 Van Dantzig, D. and Zoutendijk, G., 'Itérations markoviennes dans les ensembles abstraits', *Journal de Mathématiques, Pures et Appliquées* 38 (1959) 183 - 200.
- 2 Zoutendijk, G., 'Maximizing a function in a convex region', *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 21 (1959) 338-355.
- 3 Zoutendijk, G., *Methods of feasible directions: A study in linear and nonlinear programming*, Elsevier Publishing Co., Amsterdam-London-New York-Princeton, (1960) ii+127 pp.
- 4 Zoutendijk, G., 'Nonlinear programming: A numerical survey', *SIAM Journal on Control* 4 (1966) 194 - 210.
- 5 Zoutendijk, G., 'Enumeration algorithms for the pure and mixed integer programming problem', in: *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming* (1967) 323 - 338.
- 6 Zoutendijk, G., 'On continuous finite-dimensional constrained optimisation', in: *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*, Princeton University Press (1967) 539 - 549.
- 7 Zoutendijk, G., 'Inter-relationship between Operational Research data processing and computers', *Operational Research Quarterly*, 20 (1969), 95 - 96 (special conference issue).
- 8 Zoutendijk, G., 'Nonlinear programming, computational methods', in: *Integer and nonlinear programming*, North-Holland, Amsterdam (1970) 37 - 86.
- 9 Zoutendijk, G., 'A product-form algorithm using contracted transformation vectors', in: *Integer and nonlinear programming*, North-Holland, Amsterdam (1970) 511 - 523.
- 10 Zoutendijk, G., 'Some algorithms based on the principle of feasible directions', in: *Nonlinear programming*, Academic Press, New York (1970) 93 - 121.
- 11 Zoutendijk, G., *Some recent developments in nonlinear programming*, Lecture Notes in Computer Science 3 (1973) 407 - 417.
- 12 Zoutendijk, G., 'On linearly constrained nonlinear programming and some extension', in: *Mathematical programming in theory and practice*, North-Holland, Amsterdam (1974) 81 - 119.
- 13 Zoutendijk, G., *Linearly constrained nonlinear programming, a survey*, Cahiers Centre Études Recherche Opérationnelle 16 (1974) 337 - 346.
- 14 Zoutendijk, G., *Mathematical programming methods*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford (1976) xiv+500 pp.
- 15 Zoutendijk, G., 'Operations Research and Society', *European Journal of Operations Research*, 5 (1980) 302 - 308.

Rutger Noot

Institut de Recherche Mathématique Avancée

Université Louis Pasteur

7 rue René Descartes

67084 Strasbourg Cedex

Frankrijk

rutger.noot@math.u-strasbg.fr

Column Wiskundigen in den vreemde

L'autre pays du fromage

Rutger Noot promoveerde in 1992 in Utrecht bij Frans Oort op het gebied van de algebraïsche meetkunde. Hij bracht een jaar door als postdoc in Münster. Daarna werd hij aangesteld als Maître de Conférences in Rennes, een functie vergelijkbaar met universitair docent. Sinds twee jaar is hij hoogleraar algebraïsche meetkunde te Straatsburg.

Na twaalf jaar in Frankrijk te hebben gewoond vind ik het moeilijk om de merkwaardigheden van het land te onderscheiden. In het begin sprongen de verschillen met Nederland in het oog, maar na verloop van tijd veranderde de norm en vallen in Nederland de verschillen met Frankrijk juist op.

Toen ik voor het eerst een Franse collegezaal betrad verraste mij het grote aantal studenten. Kort daarna viel ook op dat de studenten hier over het algemeen geen buitengewoon hoog niveau hebben, hetgeen de eerste observatie op zijn minst gedeeltelijk verklaart. Het hoge aantal studenten heeft tot gevolg dat de wiskundefaculteiten groot zijn en daardoor hebben steden als Rennes en Straatsburg goedlopende onderzoeksinstituten met vele actieve onderzoekers. Inmiddels ben ik zo ver dat mij in Nederland het geringe aantal en het hoge niveau van de studenten opvalt. Ik krijg zelfs de indruk dat het er nog minder zijn dan tijdens mijn eigen studietijd en ik vraag mij dan ook af hoe lang het zal duren totdat een doortastende minister op het idee zal komen dat er best een wiskundefaculteit gesloten kan worden.

Wie enigzins op de hoogte is van de Franse wiskunde, weet dat dat vak hier op een hoog niveau staat, hetgeen in tegenspraak lijkt met mijn klachten over de studenten. Dit wordt verklaard door de belangrijkste merkwaardigheid van het Franse onderwijssysteem. In tegenstelling tot wat in de rest van de wereld gebruikelijk is, worden de beste studenten hier niet aan de universiteiten opgeleid maar aan de *École Normale Supérieure* en de *École Polytechnique* die elk jaar de beste studenten voor de neuzen van de universiteiten wegkapen. Zo hier en daar

(Parijs, Lyon en tegenwoordig ook Rennes) volgen deze *normaliens* een deel van hun colleges aan de universiteit, maar overal elders moeten de universiteiten zich met een tweede keus aan studenten tevreden stellen. De afwezigheid van deze goede studenten in Straatsburg heeft een duidelijk merkbaar effect in vergelijking met Rennes, vooral bij de meer geavanceerde colleges. De invoering van het 3-2-3-systeem, waar heel Europa op dit moment aan moet geloven, zal hier geen enkele verandering in brengen, dus de Europese integratie op universitair gebied zal nog wel enige tijd op zich laten wachten.

De bureaucratische reputatie die Frankrijk geniet is tamelijk verdiend. Zo staat het aantal lesuren dat ik hier jaarlijks aan de universiteit vol moet maken op de tweede precies vast en worden extra uren als overwerk uitbetaald. Enerzijds levert dit een zekere bescherming op van de tijd die aan het onderzoek besteed kan worden. Aan de andere kant betekent het dat iemand die in het geheel geen onderzoek meer verricht niet gedwongen kan worden om meer onderwijs te geven. Zodoende draagt een deel van het wetenschappelijk personeel weinig meer bij aan het universitaire leven. Deze groep wordt door (vroeg) pensionering overigens wel gestaag kleiner en langzamerhand stromen actievere, jonge wiskundigen in.

Twee jaar geleden ben ik van Rennes naar Straatsburg verhuisd. Dankzij de hoge mate van centralisatie verschilt de gang van zaken aan de universiteit in Straatsburg nauwelijks van die in Rennes, afgezien van de afwezigheid van de *normaliens*. Voor het dagelijkse leven is de situatie anders. Dit is waarschijnlijk de minst Franse stad van het land. Straatsburg is door de eeuwen heen afwisselend Frans en Duits geweest en dat heeft duidelijk zijn sporen nagelaten. Na een tiental jaren in Rennes vertoefd te hebben is het nu net of ik weer terug ben in Nederland, afgezien van de voertaal. Ik twijfel er overigens niet aan dat ik daar heel anders over gedacht zou hebben als ik rechtstreeks van Nederland naar Straatsburg geëmigreerd was.



Malo Hautus

Departement Wiskunde en Informatica

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

malotue@hautus.nl

Afscheidsrede

Wat valt er nog

De systeemtheorie, dat is de theorie die zich bezighoudt met het modelleren van fysische processen die evolueren in de tijd en waarbij bovendien sprake is van beïnvloeding van het proces door een invoerfunctie, heeft in Nederland een lange bloeiperiode gekend. Onder de diverse centra in Nederland was de Eindhovense groep prominent aanwezig. Deze groep floreerde van 1978 tot 1993 en stond onderleiding van Malo Hautus. Op 8 april 2005 sprak hij zijn afscheidsrede uit ter gelegenheid van de aanvaarding van zijn emeritaat aan de Technische Universiteit Eindhoven. Hautus heeft vele resultaten op het gebied van de systeemtheorie op zijn naam staan; er is zelfs een criterium, de zogenaamde Hautustest voor de observeerbaarheid, naar hem genoemd.

Bijna 46 jaar loop ik rond op de Technische Universiteit Eindhoven. Meer dan 35 jaar heb ik me bezig gehouden met systeem- en regeltheorie. In dit afscheidscollege wil ik met u terugblikken en enkele gedachten met u delen over wiskunde en wiskundigen, en over systeemtheorie.

Terugblik

In het voorjaar van 1959 bezocht ik samen met mijn vader voor het eerst de Technische Hogeschool Eindhoven om een voorlichtingsbijeenkomst bij te wonen. Het TH-terrein zag er toen heel anders uit dan tegenwoordig. Het was eigenlijk meer een bouwterrein met diverse gebouwen in een of ander stadium van aanbouw. Zo stonden er van het hoofdgebouw alleen maar de poten. En alleen het paviljoen en de W-hal waren in 1959 min of meer geschikt voor gebruik. Desondanks of misschien juist daardoor was ik bijzonder onder de indruk van het hele complex.

Hoewel mijn vader en ik naar de studievoorlichting gingen, had ik mijn keuze

in feite al gemaakt. Ik wist dat er op de TH Eindhoven drie opleidingen waren: werktuigbouwkunde, scheikundige technologie en elektrotechniek. Deze laatste opleiding sprak het meest tot mijn verbeelding. Het feit dat mijn vader een radio- en televisiezaak had, zal daarbij wel van invloed zijn geweest. Mijn wiskundeleraar van de middelbare school bracht mij nog even aan het twijfelen. Hij adviseerde me in Delft te gaan studeren. "Daar heb je een opleiding tot wiskundig ingenieur en daar krijg je lekker veel wiskunde," zei hij. Veel wiskunde, dat sprak me aan, maar bij een opleiding tot wiskundig ingenieur kon ik me niet veel voorstellen. Ik bleef dan ook bij mijn oorspronkelijke keuze en ging in september 1959 elektrotechniek studeren in Eindhoven.

In mijn eerste studiejaar volgde ik met veel interesse de aangeboden cursussen. Het interessantst vond ik de colleges Wiskunde I en II, van professor Seidel, met de bijbehorende instructies, gegeven door Alois Geurts. De behandeling van de wiskunde was heel anders dan op de middelbare school, veel

minder rigide en protocollair, en met meer flair. Het was voor mij een belevenis! Meer moeite had ik met de praktisch georiënteerde vakken en de practica, in het bijzonder met werkplaatstechniek. Daar waren twee redenen voor. In de eerste plaats was en ben ik voorzien van een voor de Hautusfamilie kenmerkende onhandigheid, zodat de proeven die ik moest uitvoeren steevast mislukten. In de tweede plaats had ik moeite met de beschrijvingen van de verschillende begrippen, omdat die naar mijn mening ambigu waren. Hier openbaarden zich misschien de eerste verschijnselen bij mij van een beroepsafwijking die kenmerkend is voor wiskundigen. In het begin van het tweede jaar werd ik bij professor Seidel geroepen. Hij wilde twee zaken met mij bespreken. Ten eerste vroeg hij mij of ik interesse had studentassistent voor het wiskundeonderwijs te worden, indertijd meeloper genoemd. Ten tweede attendeerde hij mij op een nieuwe studierichting in oprichting, die van 'wiskundig ingenieur'. Die opleiding zouden studenten van de TH vanaf het derde jaar kunnen volgen, nadat ze de eerste twee studiejaar een van de andere studierichtingen hadden gevolgd. Bij de nieuwe studierichting wiskundig ingenieur dacht men aan specialisaties in de richting van de analyse, de statistiek en de computerkunde. (Tussen haakjes: het woord informatica bestond toen nog niet. De term 'informatica' werd pas in 1964 in Nederland geïntroduceerd door de onlangs overleden numeriek wiskundige en



Malo Hautus

te regelen?

politicus Zoutendijk.) Ik had inmiddels een beter inzicht in wat een studie wiskundig ingenieur zou kunnen inhouden dan toen mijn middelbare-schoolleraar het erover had, maar toch vroeg ik professor Seidel of er wel voldoende emplooi voor afgestudeerde wiskundig ingenieurs zou zijn. Hij vertelde me dat hij een bespreking had gehad met een aantal mensen van IBM, de grootste computerfirma ter wereld. Deze mensen hadden gezegd dat ze onmiddellijk alle wiskundig ingenieurs wilden aanstellen die de TH kon afleveren. Dat was indrukwekkend. Ik antwoordde professor Seidel dat ik over beide punten zou nadenken. Vervolgens heb ik advies ingewonnen bij mijn patroon, een ouderejaarsstudent elektrotechniek, die mij begeleidde. Hij raadde mij het studentassistentchap af, omdat er bij elektrotechniek veel interessantere mogelijkheden waren. Dát advies heb ik toen opgevolgd. Maar een jaar later — na een praktische stage bij Philips in Drachten — was ik helemaal om. Ik schreef me in als wiskundestudent, en werd ook nog meeloper.

Een belangrijke gebeurtenis voor mij in het derde studiejaar was het college fundamentele wiskunde, gegeven door professor De Bruijn in een bovenzaal van het IPO-gebouw (Instituut voor Perceptie Onderzoek), het tegenwoordige Dommelgebouw, waar de afdeling Wiskunde in die tijd in gevestigd was. Dit college was een bijzondere ervaring, want toen bleek dat al het wiskunde-onderwijs dat ik tot dan toe gevolgd had, niet streng genoeg

geweest was. De nauwkeurigheid, de strenge logica en de elegantie waarmee de wiskunde in dat college bedreven werd, hebben een blijvende invloed gehad op de manier waarop ik de wiskunde zie. Enige tijd later werd ik studentassistent bij professor De Bruijn. Ik hielp hem bij de opgavenrubriek *Problem Section* van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*, waarvan hij redacteur was. Verder controleerde ik proefschriften van zijn promovendi. Ik voerde deze werkzaamheden voor een deel samen uit met medestudent Kees van Ginneken, en we hadden er veel plezier in. In die tijd had ik verder veel contact met Stan Ackermans. Ook zijn proefschrift heb ik tot in de details gelezen. Zo begon mijn loopbaan in de wiskunde. Een paar jaar later besloot ik bij professor De Bruijn te gaan afstuderen.

Dames en heren, voordat ik verder ga met mijn terugblik, wil ik enkele gedachten aan u kwijt over de wiskunde en over hoe tegen wiskundigen wordt aangekeken.

Wiskunde en wiskundigen

Wiskunde is een gespecialiseerd vak. Wanneer twee wiskundigen een wiskundige conversatie voeren en een niet-wiskundige dat gesprek opvangt, dan kan deze vaak niet achterhalen wat het gespreksonderwerp is. Zelfs al hoort hij normale woorden, toch blijft de niet-wiskundige in het ongewisse. Een bekende stelling uit de functietheorie, de zogenaamde stelling van Liouville, luidt: een begrensde gehele functie is constant. De meeste

Nederlanders zullen elk woord van deze uitspraak verstaan, zonder er een flauw idee van te hebben waar deze zin over gaat.

Hoewel wiskunde dus voor veel mensen volslagen onbegrijpelijk is, hebben velen een heilig ontzag voor het vak. Sommigen denken zelfs dat je met wiskunde alle problemen kunt oplossen. Zo was er jaren geleden een jongedame die in een liedje haar beklag deed dat ze goed was in wiskunde, maar toch niet kon kiezen tussen twee aantrekkelijke jongemannen. Ze zong: "Wat heb ik nou aan algebra, nu ik voor de keuze sta." Tussen haakjes, in dit geval is de oplossing duidelijk: deze dame had geen algebra nodig maar besliskunde.

De meeste mensen zullen echter denken dat wiskunde niet kan helpen bij het kiezen van een partner of bij het oplossen van relatieproblemen. Dit blijkt een onderschatting van de wiskunde te zijn. De wiskundige James Murray ontwikkelde onlangs samen met de klinisch psycholoog John Gottman een eenvoudig maar effectief model om het succes van een relatie te voorspellen en om relationele problemen aan te pakken. Voor geïnteresseerden geef ik hier de titel van het boek dat Murray en Gottman hierover schreven: *the Mathematics of Marriage: Dynamic Nonlinear Models*.

In tegenstelling tot het vak wiskunde genieten zijn beoefenaars, de wiskundigen, vaak niet zo'n hoge waardering. Vindt men nou dat wiskundigen dom zijn? Al lang geleden, ik denk in de middelbare schooltijd, las



H.J. Engels, Wiskundeleraar op het Bisschoppelijk College in Roermond

ik in een verhaal van Godfried Bomans de volgende anekdote, die de domheid van wiskundigen wel suggereert: “Er was eens een statisticus, die een lange wandeltocht gemaakt had in de bergen, en vermoeid aankwam bij een meertje. Hij kon niet zwemmen, maar wist dat het meertje gemiddeld niet meer dan 1,5 meter diep was. Dus ontdeed hij zich van zijn kleren en sprong met een gerust hart het water in. Nu was het water daar ter plaatse 3 meter diep, en onze statisticus verdronk jammerlijk.” Dit is natuurlijk een droevig verhaal, maar voor de statistiek is aan deze man niet veel verloren gegaan. De anekdote lijkt te wijzen op de extreme domheid van een wiskundige, maar het is eigenlijk een aanklacht tegen alle personen die statistische gegevens op een verkeerde of niet verantwoorde manier gebruiken. En wiskundigen zijn juist degenen die daar steeds tegen vechten.

Nee, de bezwaren tegen wiskundigen hebben een ander karakter. Een veel voorkomende klacht is bijvoorbeeld dat wiskundigen pedant zijn, want ze leggen nadruk op kleine, irrelevante details.

Toen de 19de eeuwse wiskundige Babbage, die een pionier was in de informatica, het gedicht *The Vision of Sin* van zijn vriend, de beroemde dichter Lord Alfred Tennyson gelezen had, schreef hij hem de volgende brief:

“In your otherwise beautiful poem, one verse reads: Every moment dies a man, Every moment one is born. If this were true, the population of the world would be at a standstill. In truth, the rate of birth is slightly in excess of that of death. I would suggest, that the next edition of your poem should read:

Every moment dies a man, Every moment

1 1/16 is born. Strictly speaking, the actual figure is so long I cannot get it into a line, but I believe the figure 1 1/16 will be sufficiently accurate for poetry.”

Het is duidelijk dat Babbage hier een grapje maakte en Tennyson heeft zijn gedicht heus niet aangepast.

Een andere gewoonte die aan wiskundigen wordt toegeschreven en die verband houdt met de pedanterie van wiskundigen is de opvatting dat wiskundigen vragen verkeerd beantwoorden. De volgende bekende anekdote is kenmerkend voor deze kijk op wiskundigen: een ballonvaarder had over een uitgebreid bebost heuvellandschap gevlogen, en de heuvels leken allemaal zoveel op elkaar dat de man niet meer wist waar hij precies was. Gelukkig zag hij beneden een wandelaar door de bossen lopen. Hij liet zijn ballon wat zakken en riep naar beneden: “Beste man, kunt u mij vertellen waar ik ben?” De wandelaar antwoordde: “In een ballon.” Hierop zei de ballonvaarder: “Meneer is zeker wiskundige.” “Hoe weet u dat?” vroeg de wandelaar. “Uw antwoord is volkomen correct, maar ook compleet waardeloos” zei de ballonvaarder. Het antwoord van de wandelaar wil ik u niet onthouden: “En meneer is zeker manager” zei de wandelaar. “Hoezo?” vroeg de ballonvaarder. “U weet niet waar u bent, en waar u naar toe gaat, en u verwacht dat ik u help.”

Een ander punt: wiskundigen worden ook wel slechte verstaanders genoemd. Als je hun niet precies zegt wat je bedoelt, hebben ze er geen idee van waar je het over hebt. In het kort, wiskundigen hebben aan een half woord niet voldoende. Wanneer zoiets in het dagelijkse leven gebeurt, kan het een beroeps-

afwijking genoemd worden. Maar binnen de wiskunde is het een absolute vereiste een slechte verstaander te zijn. Een fout die vaak voorkomt bij wiskundige verhandelingen, is het gebruiken van niet expliciet genoemde veronderstellingen. Het is essentieel dat de wiskundige zich daartegen wapent, want dergelijke fouten zijn vaak moeilijk te achterhalen. De wiskundige moet ervoor zorgen dat hij precies begrijpt wat de ander bedoelt. Hij mag zeker niet denken: ‘Oh, er zal zeer waarschijnlijk dit of dat bedoeld worden.’ Een wiskundige mag dus geen goede verstaander zijn, althans niet in zijn vakgebied. Uiteindelijk bestaat er binnen de wiskunde geen ander middel dan logische strengheid om resultaten te controleren.

Waar men de wiskundige óók van beschuldigt, is dat hij een aan hem gegeven probleem vertaalt in zijn eigen notatie, en eventueel aanpast aan bestaande theorieën. De schrijver Goethe nam bijvoorbeeld dit standpunt in. Van hem is de volgende uitspraak bekend: “Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas Anderes.” [Maximen und Reflexionen, 1829] Kennelijk zag Goethe ook de Fransen niet zo zitten.

Door de meeste mensen wordt Goethe tegenwoordig gezien als een dichter en schrijver. Goethe zelf zag niet zijn literaire maar zijn wetenschappelijke werk als zijn voornaamste bijdrage tot onze cultuur, in het bijzonder zijn werk in de biologie en in de natuurkunde. Met de wiskunde had Goethe echter problemen. Hij miste elke wiskundige basis, en dit heeft hem ernstig belemmerd in de uitoefening van de natuurkunde. Hij had wel veel ontzag voor de wiskundige methode, zoals blijkt uit de volgende uitspraken: “Die Bedächtlichkeit, nur das Nächste ans Nächste zu reihen, oder vielmehr das Nächste aus dem Nächsten zu folgern, haben wir von den Mathematikern zu lernen, und selbst da, wo wir uns keiner Rechnung bedienen, müssen wir immer so zu Werke gehen, als wenn wir dem strengsten Geometer Rechenschaft zu geben schuldig wären...” (Zur Farbenlehre, 1810) en “Ich hörte mich anklagen, als sei ich ein Widersacher, ein Feind der Mathematik überhaupt, die doch niemand höher schätzen kann als ich, da sie gerade das leistet, was mir zu bewirken völlig versagt worden.” (Naturwissenschaftliche Schriften, 1826).

Met de eigenaardigheid van de wiskundigen om problemen in hun eigen taal te vertalen, kan Goethe verschillende dingen bedoeld hebben: In de eerste plaats het gebruik van

wiskundige modellen. Wiskunde heeft veel toepassingen in andere vakgebieden. Als buitenstaander kun je je afvragen hoe het mogelijk is dat de wiskunde, die op zo'n abstracte basis geschoeid is, op zoveel plaatsen in het praktische leven toegepast kan worden. De bekende fysicus en Nobelprijswinnaar Eugene Wigner heeft over deze vraag een bekend artikel geschreven met de titel *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Science and Engineering*.

De methode die de wiskundige gebruikt bij het oplossen van een praktijkprobleem is een vertaling ervan naar een wiskundig probleem. Dit heet wiskundige modellering. We noemen het wiskundige probleem een wiskundig model van het oorspronkelijke probleem. Als het meezit, kan daarna dit wiskundige probleem worden opgelost. De resultaten van die oplossing kunnen vervolgens weer terugvertaald worden naar de praktijk.

Het maken van een goed wiskundig model is een belangrijk aspect van het werk van een toegepast wiskundige, en het speelt ook een belangrijke rol in de opleiding toegepaste wiskunde aan de Technische Universiteit Eindhoven.

Goethe moest echter niets hebben van deze vertaling van een praktisch probleem naar een wiskundig probleem, want hij was daardoor niet meer in staat de behandeling van het probleem te volgen, vanwege zijn gebrek aan wiskundige kennis.

Goethe kan ook iets anders bedoeld hebben met zijn opmerking dat de wiskundigen alles vertalen. Wiskundige problemen gevonden door modelvorming zijn vaak zo ingewik-

keld dat een oplossing onmogelijk is. Daarom worden deze problemen vereenvoudigd. Men spreekt dan over een geïdealiseerd probleem. In de mechanica bijvoorbeeld wordt deze werkwijze veelvuldig toegepast. In dat vakgebied heeft men het over oneindig gladde oppervlakken, over puntmassa's, over wrijvingsloze gassen en vloeistoffen, over gelineariseerde vergelijkingen. Door deze vereenvoudigingen krijgt het probleem vaak een heel ander karakter dan het oorspronkelijk had. Vandaag de dag zijn dergelijke drastische vereenvoudigingen veel minder nodig dan in de tijd van Goethe. We beschikken tegenwoordig immers over zulke rekenfaciliteiten dat ook gecompliceerde modellen kunnen worden doorgerekend. De vereenvoudigde modellen worden nog voornamelijk voor educatieve doeleinden gebruikt, en ook om een voorlopig idee te krijgen van de oplossing, voordat het echte rekenwerk begint.

Een derde verandering die wiskundigen aan problemen aanbrengen, en die misschien door Goethe bedoeld werd, heet generalisatie. Generalisatie is een proces dat samen gaat met abstractie, een wiskundig belangrijk begrip. Als je twee of meer overeenkomstige wiskundige methodes hebt voor problemen die niets met elkaar te maken lijken te hebben, dan probeer je deze methodes te zien als speciale gevallen van een algemene methode. Deze algemene methode verkrijgt je door de specifieke eigenschappen van de afzonderlijke problemen achterwege te laten en alleen het gemeenschappelijke te behouden. Het weghalen van de eigenschappen van het probleem die niet relevant zijn, noemt men

abstractie. Abstractie is in de eerste plaats zo belangrijk omdat je daarmee door middel van één redenering een aantal problemen tegelijk kunt behandelen, wat de efficiëntie verhoogt. Maar ook hebben wij, wiskundigen, de indruk dat we door abstractie meer inzicht in een probleem en zijn oplossing hebben, en dat we daardoor beter gereedschap in handen krijgen om nieuwe problemen aan te pakken en nieuwe resultaten te vinden.

Dit alles klinkt misschien wel wat vaag, of misschien 'abstract', maar in werkelijkheid wordt het principe al op zeer elementair niveau gebruikt. Getallen vormen bijvoorbeeld al een wiskundige abstractie. De uitspraken "als je bij drie tafels vier tafels voegt, krijg je zeven tafels" en "als je bij drie knikkers vier knikkers voegt, krijg je zeven knikkers" gaan over compleet verschillende objecten, maar ze hebben veel gemeenschappelijk. Als we abstraheren kunnen we de tafels en de knikkers weglaten, en eenvoudig zeggen: $3+4 = 7$.

Genoeg gezegd over wiskundigen en hun eigenaardigheden. Het wordt tijd dat ik verder ga met mijn terugblik.

Mijn vakgebied: systeem- en regeltheorie

In de tijd dat ik bij professor De Bruijn aan het afstuderen was, richtte hij de zogenaamde differentiaalclub op. Dit was een wekelijkse bijeenkomst van zijn groep die vooral kwalitatieve eigenschappen van oplossingen van gewone differentiaalvergelijkingen bestudeerde. In die tijd ontstond er interesse in het vinden van optimale besturingen, bijvoorbeeld met behulp van het maximumprincipe van Pontryagin. Dat was mijn eerste contact met de systeemtheorie, afgezien van een college in de regeltechniek dat ik eerder bij de afdeling elektrotechniek had gevolgd. Ik volgde de discussies in de differentiaalclub over optimale besturingen slechts terzijde, omdat ik me meer concentreerde op mijn afstudeerwerk, dat in de richting van de storingsrekening lag.

In juli 1966 studeerde ik af. Professor Seidel vroeg me of ik na mijn afstuderen op de Technische Hogeschool wilde blijven werken bij professor De Bruijn. Ik antwoordde dat ik dat graag wilde, maar dat ik dan ander werk wilde doen dan het bestuderen van proefschriften van anderen. Seidel interpreteerde dit als een verzoek van mij om zelf te promoveren. Daar had ik nog niet aan gedacht, want in die tijd was het helemaal niet vanzelfsprekend dat iedere wetenschappelijk medewerker aan de Technische Hogeschool ook ging promoveren.

Voor mijn promotieonderzoek hield ik mij



Promotie juni 1970

aanvankelijk met storingsrekening bezig, een uitbreiding van het onderwerp van mijn afstudeerwerk. De berekeningen daarin werden echter steeds ingewikkelder en onaantrekkelijker. Wanneer ik in de differentiaalclub vertelde over de voortgang, zag ik dat menig toehoorder moeite had een geeuw te onderdrukken. En toen ik ontdekte dat een belangrijk gedeelte van mijn resultaten eerder gevonden was, ben ik gestopt met dit onderzoek. Het was wel een teleurstelling en aanvankelijk had ik moeite aan een nieuw onderzoeksproject te beginnen.

Ik heb in die tijd veel contact gehad met David Klarner, die onze onderafdeling bezocht om samen te werken met professor De Bruijn en professor Seidel. David en ik deden onderzoek op het gebied van de combinatoriek. Mijn eerste artikel heb ik samen met hem geschreven. Ik heb veel gehad aan zijn hulp, toen en ook later in de periode dat ik mijn proefschrift schreef.

Verder vond ik in die tijd afleiding in het oplossen van problemen die in verschillende tijdschriften gepubliceerd werden. Op de TH was er indertijd veel interesse in deze activiteit, en ik had er tijdens mijn student-assistentenschap al kennis mee gemaakt toen ik werkte aan de *Problem Section* van professor De Bruijn. Later nam professor Van Lint de opgavenrubriek over. Hij was ook de oprichter van de club *O.P. Lossers* die opgaven oplosten uit *The American Mathematical Monthly*, kortweg de *Monthly* genoemd, uit *Siam Review* en *Elementen der Mathematik*. Het streven was elementaire, korte en elegante oplossingen te vinden. In dat streven was en is *O.P. Lossers* succesvol en de club kreeg bekendheid over de hele wereld. De waardering onder wiskundigen voor deze activiteiten varieert nogal. Volgens de voorstanders was het oplossen van zulke problemen een uitstekende manier om je geest alert te houden. Je voorkomt daarmee dat je te zeer vastroest in één specialisatie binnen de wiskunde. Ook leer je, vooral door de discussie in de groep, allerlei nieuwe technieken, die anders voor je ver-

borgen blijven. Tenslotte leer je beknoptheid en elegantie van oplossingen van wiskundige problemen waarderen. Anderen vinden dat allemaal te ver gaan, en vragen zich af of je daar wel zoveel tijd in moet steken. Zo zei professor Seidel bijvoorbeeld tegen mij “Je kunt je potlood niet altijd blijven slijpen”, en daar had hij ook wel enigszins gelijk in. Toch denk ik dat deze activiteiten ten eerste aan te raden zijn, vooral voor jonge wiskundigen.

Het was een van de opgaven uit *SIAM Review*, die me weer op het spoor heeft gezet. Het was een variatieprobleem, dat duidelijk aansloot bij de besprekingen in de differentiaalclub over optimale besturingen. Het interessante van dit probleem was dat het geen oplossing had, althans niet in de klassieke zin van het woord. Het begrip oplossing moest worden aangepast, een techniek die gebruikelijk is in de wiskunde, en die Goethe waarschijnlijk zou hebben afgekeurd. Deze opgave wekte mijn interesse op in problemen over optimale besturingen. Ik presenteerde mijn resultaten in 1968 op het Mathematisch congres in Eindhoven. Daar ontmoette ik Geert Jan Olsder, die ook onderzoek deed in optimale besturingen. We besloten regelmatig bijeenkomsten te houden om te praten over onze gezamenlijke belangstelling.

Professor De Bruijn suggereerde als promotieonderwerp het probleem van het optimaal besturen van een jojo. Dat probleem heb ik bestudeerd, en er bleken allerlei aspecten aan te zitten, met verschillende wiskundige complicaties. Hoewel de optimalisatieproblemen heel interessant waren, werd ik in die tijd gegrepen door een aanverwant gebied, de systeemtheorie. Dat kwam vooral door het standaardwerk van Lee en Markus, *Foundations of Optimal Control* geheten, dat ik bestudeerde om het maximumprincipe van Pontryagin te doorgronden. Daar ontdekte ik de begrippen bestuurbaarheid en waarneembaarheid. Over deze begrippen schreef ik mijn eerste publicaties in de systeemtheorie, voornamelijk omdat ik de behandeling in Lee en Markus veel te ingewikkeld vond.

In juni 1970 promoveerde ik; kort daarna ontving ik een ZWO-beurs (Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek) en in september van dat jaar vertrok ik met mijn gezin, dat wil zeggen: met Hilde en onze zoon Edwin — toen 9 maanden oud — voor een jaar naar Stanford in Californië. Ik ging daar samen werken met Rudolf Kalman, een heel bekende persoonlijkheid in de systeemtheorie, vooral door zijn ontdekking van het Kalmanfilter. De ervaringen die we in Verenigde Staten hadden waren heel bijzonder. Ze waren van beslissende in-

vloed op de rest van ons leven.

Toen ik terugkwam naar Eindhoven, was ik boven alles geïnteresseerd in systeemtheorie, niet alleen in het technische aspect van stellingen formuleren en bewijzen, maar ook in de conceptuele aspecten.

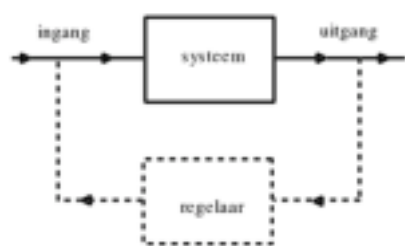
Systemen: lineair en niet-lineair

Eigenlijk ben ik niet gelukkig met de term systeemtheorie voor dit vakgebied. De term ‘systeem’ is beladen en te algemeen en komt voor in allerlei vakgebieden. Denk maar aan een computersysteem. In de wiskunde zou je een algemeen systeem ruwweg kunnen omschrijven als een geheel van grootheden waartussen relaties bestaan. De meeste mensen denken bij een systeem eerder aan een of ander concreet apparaat waarin de genoemde grootheden een rol spelen. Mijn omschrijving geeft het wiskundige model aan en niet het werkelijke fysische systeem.

Bij een gas in een gesloten ruimte bijvoorbeeld bestaat er een relatie tussen volume, druk en temperatuur. Deze relatie staat in geïdealiseerde vorm bekend als de wet van Boyle-Gay-Lussac. Een volledig ander systeem krijgen we als we de prijs, kwaliteit en totale verkoop van een product met elkaar in verband brengen. Op deze manier kunnen we elk wiskundig model zien als een systeem. Eerdergenoemde omschrijving van het begrip systeem is te algemeen om interessante resultaten mee af te leiden. Er zijn wel onderzoekers die de systeemtheorie in deze algemene zin bedrijven. Ze zien in alles een systeem.

Het is zinvoller het terrein van onderzoek af te bakenen door het begrip systeem in te perken. Dat is ook wat we in de systeemtheorie doen. We beperken ons tot systemen waarin de veranderingen in de loop van de tijd een belangrijke rol spelen. We spreken in dat geval dan ook van ‘dynamische systemen’. Daarom zou ik mijn vakgebied de *dynamische systeemtheorie* willen noemen. Niettemin zal ik in deze verhandeling de term systeemtheorie blijven gebruiken omdat die nu eenmaal ingeburgerd is.

Om interessante resultaten te krijgen bij ons onderzoek is het verstandig dat we ons nog verder beperken en werken met types systemen die hanteerbaar zijn. Er zijn artikelen gepubliceerd waarin dit niet gebeurt, en waar met heel algemene dynamische systemen gewerkt wordt. Je komt titels tegen als ‘niet-lineaire, gedistribueerde, stochastische spelsystemen met meerdere spelers, beschreven door integro-differentiaalvergelijkingen’. Niet-wiskundigen zullen onmiddellijk afha-



Het meest eenvoudige voorbeeld van een regelsysteem

ken, als ze deze termen horen. Laat ik u zeggen, ook als wiskundige kun je zulke artikelen beter naast je neer leggen. Je zult daarin zeer waarschijnlijk geen interessante resultaten aantreffen. Een belangrijk en hanteerbaar onderdeel van de categorie dynamische systemen vormen de lineaire systemen. Met deze laatste categorie heb ik me uitgebreid beziggehouden.

Het begrip lineariteit speelt een grote rol in veel gebieden van de zuivere en toegepaste wiskunde. Ik zal proberen het begrip zoveel mogelijk te verklaren op een niet-technische manier. Ik zal dus geen formules gebruiken. Als een man in één minuut twee vierkante meter kan ompspitten, dan kan hij in zes minuten twaalf vierkante meter spitten. Bij deze berekening hebben we verondersteld dat het systeem (in dit geval de spittende man) lineair is. Het is een voor de hand liggende veronderstelling, maar we weten allemaal dat deze manier van rekenen maar beperkt toepasbaar is. Als we op deze manier zouden doorgaan, zou dat inhouden dat hij 1200 m² kan ompspitten, als hij 10 uur zonder pauzes werkt, en 14.400 m² in vijf etmalen. Bij het formuleren van het 'spitmodel' hebben we geen rekening gehouden met vermoeidheid. We constateren dat we de veronderstelling van lineariteit in dit geval alleen kunnen hanteren voor een beperkte tijd. Het is echter in de meeste gevallen niet mogelijk een harde grens te geven waarbinnen de lineariteit geldt. In het eenvoudigste geval, namelijk in het geval van één variabele grootte, zoals in bovenstaand voorbeeld, betekent lineariteit evenredigheid, dus dat je twee keer zoveel resultaat hebt als je je twee keer zoveel inspant en drie keer zoveel resultaat als je je drie keer zoveel inspant, enzovoorts. Het is een veronderstelling die het mogelijk maakt veel wiskundige modellen door te rekenen en krachtige wiskundige theorieën op te bouwen. Het principe spreekt intuïtief aan, ook dan wanneer het niet terecht is. Dat ervoer een vrouw toen zij tot haar schrik haar man — die geen keukenprins was — in de keuken hoorde mompelen: "Eén ei koken duurt vier minuten, vier eieren dus 16 minuten."

In op de natuurkunde en de techniek georiënteerde toepassingen van de wiskunde heb je in feite praktisch altijd te maken met niet-lineaire systemen. Toch speelt de lineaire systeemtheorie er een grote rol omdat in veel gevallen lineaire systemen als goede benaderingen voor lokale verschijnselen kunnen worden gebruikt. Voor systemen die voortkomen uit een economische en organisatorische omgeving, gebruikt men ook lineaire systemen voor niet-lokale verschijnselen.

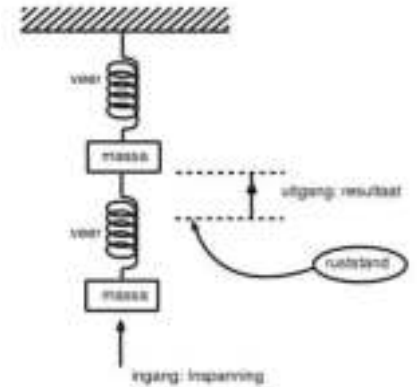
Een van de redenen daarvoor is dat de wiskundige modellen voor zulke systemen minder ver ontwikkeld zijn, maar ook dat lineariteit vaak meer voor de hand ligt voor deze systemen, in ieder geval wanneer er sprake is van één variabele. Zoals bij het voorbeeld van het ompspitten van het land, geldt in eerste instantie vaak dat de resultaten van een actie evenredig zijn met de geleverde inspanning. Dat systemen niet lineair hoeven te zijn is al lang geleden door de filosofen ontdekt. Een bekende uitspraak, die aan Aristoteles wordt toegeschreven, luidt: het geheel is meer dan de som der delen! Filosofen willen deze kreet wel eens zeer triomfantelijk slaken en er aan toevoegen: deze opvatting moet voor wiskundigen haast onverdraaglijk zijn. Het tegendeel is waar. De uitspraak zegt namelijk slechts dat er niet-lineaire systemen zijn waarin de groei méér is dan lineair. Het probleem dat wij wiskundigen met zulke korte, krachtige uitspraken hebben, is dat we niet weten hoe algemeen ze gelden. Je zou bij de uitspraak van Aristoteles bijvoorbeeld de indruk kunnen krijgen dat ze universeel en dus algemeen geldend is. In werkelijkheid geldt ze soms wel, soms niet. En er zijn genoeg gevallen bekend waar het geheel minder is dan de som van de delen, maar dit hoor je zelden iemand roepen.

Het geheel en de som der delen

Het klassieke voorbeeld van 'meer dan' is een project dat veel beter uitgevoerd wordt als een aantal mensen samenwerkt dan wanneer ze elk voor zich aan de gang gaan.

Een ander voorbeeld vindt men bij het ecologische bermbeheer. Daar maakt men namelijk onderscheid tussen grasland, ruigte en bosaanplant. Elk van die begroeiingen heeft zijn eigen variatie van fauna en flora. Langs de Brusselse Ring worden deze begroeiingen aangegeven met pictogrammen op de borden langs de weg. Een vlinder wijst op grasland, een muis op ruigte en een eekhoorn op bosaanplant. Nog meer variatie ontstaat door een combinatie van grasland, ruigte en bosaanplant. Als deze verschillende begroeiingen naast elkaar bestaan en in elkaar overvloeien, ontstaan er meerdere leefgebieden op een beperkte oppervlakte. Heel wat organismen zijn zelfs gebonden aan de overgangen tussen grasland, ruigte, struikgewas en bos. Het geheel is hier meer dan de som van de delen.

Een voorbeeld van 'minder dan', is het volgende. Als je een zekere hoeveelheid plezier hebt wanneer je een lekkere perzik eet, zul je minder dan vijftien keer zo veel plezier heb-



Dubbel massa-veersysteem

ben als je vijftien lekkere perziken achter elkaar opeet, zeker als je maagkrampen krijgt. In de economie noemt men dit het verschijnsel van de verminderde meeropbrengsten of op zijn Engels: *diminishing return*.

Een ander voorbeeld van verminderde meeropbrengsten is de extra toevoeging van CO₂ aan gewassen om de productie te verhogen. Bij een kleine toevoeging van CO₂ kun je constateren dat de toename van de productie evenredig is aan de hoeveelheid toegevoegde CO₂. Bij grotere hoeveelheden wordt het rendement steeds kleiner, en moet je naar verhouding steeds meer CO₂ toevoegen om meer opbrengst te krijgen. In de economie is hét klassieke voorbeeld van verminderde meeropbrengst een fabriek waarin de productie niet evenredig zal zijn met het aantal werkers, omdat bij te grote aantallen werkers er te weinig machines zullen zijn waarop gewerkt kan worden. Hierbij wordt verondersteld dat het aantal machines constant blijft.

In de systeemtheorie bestuderen we zowel lineaire als niet-lineaire systemen. Mijn interesse ligt vooral bij de lineaire systemen, hoewel ik de ontwikkelingen in de niet-lineaire theorie ook bijzonder interessant vind. Ik heb in het verleden vaak discussies gehad met vakgenoten over de vraag welke theorie nu interessanter, belangrijker of moeilijker is: de theorie van lineaire systemen of die van niet-lineaire systemen. We zijn tot de conclusie gekomen dat deze vraag eigenlijk niet te beantwoorden is. Het is net zoiets als de vraag: "Wat is interessanter, schaken of dammen?" of de vraag "Wat is moeilijker, viool- of piano-spelen?". Beide disciplines hebben hun eigen uitdaging. Lineaire systemen hebben in principe een eenvoudigere structuur dan niet-lineaire systemen, maar bij lineaire systemen kunnen ook problemen worden bekeken die veel complexer zijn. Beoefenaars van de niet-lineaire systeemtheorie zeggen dat je in deze theorie beter het onderscheid kunt zien tus-

sen verschillende begrippen die bij de lineaire theorie samenvallen. Het begrip bestuurbaarheid bijvoorbeeld, dat in de lineaire systeemtheorie een centrale rol speelt, valt in de niet-lineaire theorie uiteen in een aantal begrippen. Beoefenaars van de lineaire theorie claimen dat in hun theorie nieuwe essentiële begrippen en ideeën worden gecreëerd.

Een kenmerk van de systemen die de systeemtheoretici bestuderen is dat je ze kunt besturen of regelen. We hebben dat in de bovenstaande voorbeelden ook gezien. Een systeem bevat een ingang, bijvoorbeeld de hoeveelheid geleverde inspanning, en een uitgang, het behaalde resultaat. Hierbij is de bepaling van wat we ingang en wat we uitgang noemen vaak onderdeel van de wiskundige modellering.

In het dubbelmassaveersysteem van Figuur 2 is bijvoorbeeld de kracht op de onderste massa als ingang en de uitwijking van de bovenste massa als uitgang gekozen. Symboolisch geven we een systeem vaak aan met een diagram. De onderzoeker wil een adequate regeling voor een systeem vinden, of een automatisch regelsysteem. Regelen is een belangrijke doelstelling van de systeemtheorie.

In de jaren na 1975 heeft de systeemtheorie in Nederland een stormachtige ontwikkeling doorgemaakt. Er ontstonden onderzoeksgroepen bij de wiskunde-afdelingen van de universiteit van Groningen, en bij de Technische Hogescholen in Twente, Eindhoven en Delft. Het onderzoek was en is nog steeds van hoge kwaliteit en krijgt internationale erkenning. Toen ik omstreeks 1980 nadacht over een sabbatical in de Verenigde Staten, vroeg ik een Amerikaanse vakgenoot naar welke universiteit hij op sabbatical zou gaan. Hij antwoordde dat hij een plaats in Nederland zou kiezen, want er was geen gebied in de wereld waar zich op een dergelijke kleine afstand van elkaar zulke goede onderzoekscentra in de systeemtheorie bevonden.

Het was niet alleen de hoge kwaliteit van het onderzoek, maar ook de intensieve en prettige samenwerking die Nederland deze goede naam gaven. De samenwerking in Ne-

derland vond aanvankelijk plaats in het kader van de werkgemeenschap Mathematische Besliskunde en Systeemtheorie, en later in de onderzoeksschool DISC, de *Dutch Institute for Systems and Control*. Het belangrijkste product van deze samenwerking was het AiO-netwerk, dat wil zeggen, de gemeenschappelijke landelijke AIO-cursus Systeemtheorie. Het vakgebied is namelijk zo gespecialiseerd dat het niet mogelijk is op elk instituut in Nederland afzonderlijk de noodzakelijke AIO-cursussen in de systeemtheorie te geven. De introductie van het AiO-netwerk maakte een volledige opleiding wél mogelijk, en had daarnaast een aantal andere positieve effecten. De docenten en de AIO's leerden elkaar goed kennen, er ontstonden wederzijdse betrekkingen en vriendschappen en gebaseerd op deze cursussen zijn er verschillende goede studieboeken geschreven. Een verder product van de werkgemeenschap vormen de Beneluxmeetings. Dat zijn jaarlijkse congressen voor Nederlandse en Belgische systeemtheoretici. Ze worden beurtelings in Nederland en in België gehouden. Bij deze meetings krijgen de AIO's volop de gelegenheid om over hun werk te berichten. Ook kunnen de jonge Nederlandse en Belgische systeemtheoretici gemakkelijk in contact komen met internationale beroemdheden uit het vakgebied, die op deze meetings worden uitgenodigd.

De systeemtheorie in Nederland

Systeemtheorie in Nederland heeft veel te danken aan de inzet van Jan Willems, Huib Kwakernaak en Jan van Schuppen. Zij hebben deze activiteiten opgestart en tot bloei gebracht. Ook de systeemtheoriegroep in Eindhoven floreerde in de periode van 1978 tot 1993. In die tijd werd het mogelijk gemaakt verschillende AIO's aan te trekken. De werksfeer in de groep was heel plezierig en dynamisch. In 1994 kwam de groep echter onder vuur te staan toen de faculteit ging reorganiseren. In eerste instantie besloot het bestuur van de faculteit dat de groep systeemtheorie zou worden opgeheven na mijn emeritaat. In die tijd was er nog een democratische

structuur op de universiteit. Het besluit kon daardoor worden teruggedraaid. Onze groep kreeg een nieuwe opleving, maar de zege was van zeer korte duur. Opnieuw werd besloten de groep systeemtheorie op te heffen. Inmiddels was de bestuursstructuur veranderd, en was er geen effectief middel aanwezig om dit besluit aan te vechten. De opheffing van de groep na mijn emeritaat was definitief.

Het was een zeer moeilijke tijd voor mij en voor de groep. Ik begrijp dat er bij het maken van beleid keuzes gemaakt worden die pijnlijk kunnen zijn voor de ene groep en een weldaad voor een andere groep. Ik heb deze beslissing uiteindelijk geaccepteerd. Een onaangename maar logische consequentie van deze ontwikkeling was wel dat mijn groep leegliep. Sommige medewerkers in mijn groep zochten en vonden hun heil op een andere plek. Dat was terecht natuurlijk. De contacten van mijn gekortwiekte groepje met andere collega's in de faculteit zijn altijd heel plezierig gebleven. Er ontstonden zelfs nieuwe contacten en goede vriendschappen met de groep *Informatie en Communicatie Technologie voor Onderwijs en Onderzoek* die bij een interne verhuizing vlak bij ons terecht was gekomen.

Met dit afscheidscollege komt een einde aan de groep systeemtheorie van de faculteit Wiskunde & Informatica in Eindhoven. Er valt hier niets meer te regelen, althans niet door mij. Maar in Nederland blijft de systeemtheorie actief en Nederland blijft internationaal een goede naam houden op het gebied van de systeemtheorie.

Ik ben in zekere zin vooruitgelopen op het definitieve einde van de systeem- en regeltheorie in Eindhoven. Ik heb mijn interesse namelijk niet meer beperkt tot deze discipline. De laatste jaren heb ik vooral belangstelling gekregen voor matrixvergelijkingen. Het grote voordeel van de periode die ik tegemoet ga, is dat ik volledige vrijheid krijg bij de keuze van mijn onderzoeksgebied. Ik hoef niet en niets meer te regelen. Dat is dus in ieder geval goed geregeld.



Danny Beckers

Dorpsstraat 26-A

6582 AN Heumen

d.beckers@inter.nl.net

Oud Archief

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap is net als andere verenigingen afhankelijk van de betrouwbaarheid van haar leden. Danny Beckers, onderzoeker op het gebied van de geschiedenis van wiskunde, vertelt over problemen bij de inning van contributie en het fenomeen correspondent.

Er zijn zaken die een penningmeester liever niet meemaakt. De geschiedenis van het (tegenwoordig Koninklijk) Wiskundig Genootschap bevat een aantal anekdotes die zonder meer tot de categorie 'nachtmerrie voor de penningmeester' gerekend kunnen worden. Een van de gruwelijkste is zonder twijfel die met mr. D. Hoola van Nooten in de hoofdrol. Het archief van het genootschap bevat enkele snippets die getuigen van de bange uren die deze rechtsgeleerde het bestuur bezorgde.

D. Hoola van Nooten was een succesvolle student in de Rechten. Hij werd in zijn studietijd lid van het Wiskundig Genootschap. Zijn naam duikt in 1830 op in de ledenlijst. In juni 1832 doet hij samen met een aantal andere leden een voorstel voor meer differentiatie in moeilijkheidsgraad van de opgaven die door het genootschapsbestuur aan de leden werden voorgelegd. Een bijzonder actief lid was Van Nooten overigens niet.

Na het behalen van zijn titel vertrok Van Nooten naar Suriname. In oktober 1842 liet de jonge meester in de Rechten plots weer van zich horen. Hij zond het genootschapsbestuur een brief waarin hij aangaf dat hij inmiddels in Paramaribo resideerde, lid was van het gerechtshof van Suriname en van de commissie van onderwijs aldaar. Hij gaf aan dat hij graag zijn lidmaatschap zou voortzetten, en bood aan de taak van correspondent op zich te nemen. Hij meende vijf of zes anderen voor het lidmaatschap te kunnen interesseren en verwachtte meer toestroom van leden met de aanstaande onderwijsvernieuwingen.

Gezien de koloniale bezittingen van Nederland was het niet vreemd voor genootschappen om ook in de overzeese gebiedsdelen

leden te hebben. Genootschappen hadden daartoe zogenaamde correspondenten aangesteld. Die vormden in de verre gebiedsdelen de spil voor de aldaar gevestigde leden. Ze verzorgden de lokale verzending van post en tijdschriften en zorgden voor een geregelde inning van de contributie. In de Oost, in Batavia (tegenwoordig Indonesië) hadden diverse genootschappen correspondenten. In Suriname kwam het minder voor. Ook in de grote Europese steden hadden genootschappen correspondenten.

Het Wiskundig Genootschap had gedurende de eerste decennia van haar bestaan weliswaar banden met een vergelijkbaar genootschap te Hamburg (de oprichters van 1778 waren allen ook lid van het Hamburgs Wiskundig Genootschap), maar die banden waren begin negentiende eeuw verdwenen. Eind achttiende eeuw was er een correspondent te Batavia, en begin negentiende eeuw ook korte tijd in Suriname, maar het genootschap had nooit echt voet aan de grond gekregen buiten Nederland: daarvoor opereerde het genootschap te lokaal. Het ledental was klein en daarom kwam deze Surinaamse connectie als een Godsgeschenk voor het bestuur.

Op 21 november 1842 werd Van Nooten officieel benoemd tot correspondent van het Wiskundig Genootschap. Van het contact dat hij tussen het genootschapsbestuur te Amsterdam en de leden in de kolonie onderhield is, behoudens enkele verzendbrieven van katernen van het tijdschrift dat het genootschap indertijd verzorgde, niets bewaard gebleven.

Op de bestuursvergadering van 16 november 1846 maakte de secretaris bekend dat Van Nooten uit Paramaribo was verdwenen. Met de correspondent leken tevens de correspondentie en contributiegelden van de aardbodem verdwenen. Zijn verdwijning was bij toeval aan het licht gekomen, doordat een Surinaams genootschapslid bij het bestuur had geïnformeerd naar het uitblijven van het tijdschrift — en de voortdurende afwezigheid van Van Nooten. De heer Goede, genootschaps-

lid en notaris te Paramaribo meende te weten dat Van Nooten was teruggekeerd naar Nederland. Het bestuur besloot onmiddellijk om de heer Tollus, correspondent van het genootschap te Den Haag, te vragen om bij het Ministerie van Koloniën te informeren naar de verblijfplaats van Van Nooten.

Op de bestuursvergadering van 18 januari 1847 was duidelijk dat ook op het Ministerie niets met zekerheid bekend was omtrent de verblijfplaats van Van Nooten. Ook het Ministerie zelf wilde graag met Van Nooten spreken. In de tussentijd, op 8 januari, was de heer Tollus overleden. Men kan zich de consternatie voorstellen die dit teweegbracht. (Laat rustig uw fantasie op hol slaan. Als historicus ben ik mij ervan bewust dat ik de suggestie van doofpotten en complotten alleen maar kan versterken door te vermelden dat enig verband tussen de dood van Tollus en de verdwijning van Van Nooten nooit is gesuggereerd.)

In elk geval leed het genootschap verlies. Van Nooten had in geen drie jaar geld naar Nederland gestuurd. Van de Surinaamse leden had hij dus de contributie, indertijd vijf gulden per jaar, in eigen zak gestoken. Bovendien moesten die Surinaamse leden opnieuw van het tijdschrift worden voorzien. De financiële strop bedroeg in totaal rond de zeventig gulden — een aanzienlijk bedrag voor die tijd. Geruime tijd bleef het bestuur tegen beter weten in hopen dat er sprake was van een misverstand. Eerst een jaar na de constatering van zijn verdwijnen, op de vergadering van 27 december 1847, werd mr. D. Hoola van Nooten ontslagen als correspondent.

De affaire — ze zal wel niet enig zijn geweest in haar soort — heeft geen aanleiding gevormd om het correspondentenschap als zodanig aan de kaak te stellen. Wel werd er binnen het Wiskundig Genootschap strakker de hand gehouden aan de inning van contributies en het verzenden van de tijdschriftkaternen. Het correspondentenschap voor genootschappen zou tot in de twintigste eeuw een goed functionerend instituut blijven. 



Foto: Andrew Dunn; copyright: Creative Commons

Klaas Landsman

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Radboud Universiteit Nijmegen

Toernooiveld 1

6525 ED Nijmegen

landsman@math.ru.nl

Inaugurele rede

Op het kruispunt

Volgens Klaas Landsman zijn een aantal belangrijke doorbraken in de wiskundige analyse ontstaan uit de kruisbestuiving tussen wiskunde en natuurkunde. De centrale rol is natuurlijk vervuld door Isaac Newton, Lucasian professor in Cambridge van 1669 tot 1687. Newton heeft voor Landman ook een grote persoonlijke betekenis, zoals blijkt uit deze oratie. Hij sprak deze uit op 7 januari 2005 bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar Analyse aan de Radboud Universiteit Nijmegen.

“In het intellectuele en politieke debat waren cultuurverschillen lange tijd verboden terrein. Vooral linkse denkers hadden er moeite mee. [...] Een individu [werd] voorzien van een sticker op zijn voorhoofd die hem reduceerde tot een aantal onveranderlijke eigenschappen. Dat laatste [...] werd gezien als determinisme. De Nederlanders [hadden] net afgerekend met de calvinistische voorbestemming. Ze wil[d]en daarom geen culturele voorbestemming.”

Dit was een citaat uit een recent krantenartikel over de multiculturele samenleving¹, en u zult zich nu afvragen of u wel bij de juiste oratie terecht bent gekomen. Dat is het geval, want ik ga u straks onder meer uitleggen wat wiskundige analyse met determinisme te maken heeft. Maar ik zal u eerst aan de hand van haar historische ontwikkeling vertellen wat het vak analyse zelf eigenlijk inhoudt. Ook daarin zullen opmerkelijke cultuurverschillen naar voren treden, zelfs binnen de wiskunde. De ontwikkeling van de analyse begon 4500 jaar geleden, maar omdat ik slechts 45 minu-

ten de tijd heb, zal ik me beperken tot drie momenten uit de geschiedenis.² Dit zijn: de uitvinding van de differentiaal- en integraalrekening door Isaac Newton (1642–1727) rond 1670; vervolgens bijna tweehonderd jaar later het idee van Bernhard Riemann (1826–1866) om niet naar één functie op zichzelf te kijken, zoals analytici voor hem hadden gedaan, maar naar een heleboel functies tegelijk en in samenhang met elkaar; en tenslotte de ultieme realisatie van dit idee rond 1930 in de vorm van een zogenaamde Hilbertruimte. Ondanks deze naam was dit niet het werk van Hilbert, maar van diens toenmalige assistent Johann von Neumann (1903–1957).

Het is geen toeval dat ik juist déze doorbraken in de analyse heb genomen, want ze vormen alle drie plaats op een historisch kruispunt van de wiskunde en de natuurkunde, de twee vakken waar ik alsmaar niet tussen kan kiezen. Het eerste kruispunt is het vrijwel gelijktijdige ontstaan van de klassieke mechanica en de klassieke analyse, waarvan de differentiaal- en integraalrekening het begin vormt. Het tweede is de kruisbestuiving tussen de opkomende veldentheorie in de natuurkunde en de generalisatie van het begrip

ruimte in de wiskunde. Ten derde kruisten de kwantummechanica en de moderne analyse elkaar voor het eerst tussen 1925 en 1932.

Isaac Newton

Ik begin bij het eerste kruispunt, dat in één persoon was geconcentreerd. Newton was volgens velen de grootste wiskundige uit de geschiedenis, een eer die ook Archimedes (287–212 v.Chr.) en Gauss (1777–1855) soms wordt toebedeeld. Daarnaast was Newton niet alleen de vader van de theoretische natuurkunde, maar tot op heden ook haar briljantste beoefenaar, hoogstens geëvenaard door Einstein. Voor sommigen onder u is dat misschien één pot nat, maar ik kan u zeggen dat zelfs theoretische natuurkunde een duidelijk ander metier is dan wiskunde. Einstein hield daar bijvoorbeeld zijn leven lang moeite mee, om nog maar te zwijgen van iemand als Bohr, die zelfs de eenvoudigste integralen niet kon uitrekenen. Aan de andere kant kunnen de paar wiskundigen van Newtons kaliber zich als fysicus weer bij lange na niet met hem meten. In deze combinatie van absolute genialiteit in zowel de wiskunde als de natuurkunde is Newton uniek in de menselijke geschiedenis. Bovendien had hij geen twee linkerhanden: Newton was ook een groot experimentator en uitvinder, met name op het gebied van de optica. Hij ontdekte bijvoorbeeld de spectrale decompositie van wit licht, dat, tot ieders verrassing destijds, alle kleuren van de regenboog bleek te bevatten.

Figuur 1 Standbeeld van Isaac Newton in de Trinity College kapel te Cambridge

Tevens bouwde Newton de eerste spiegeltelescoop, en vond hij het sextant uit.

U begrijpt dat ik hoog inzet; ik ben zonder meer het slachtoffer van de mentaliteit die Van Kooten en De Bie bespotten in hun prachtige lied: *Onze God is de beste* (hij is wereldkampioen). En met het loven van Newton prijs ik uiteraard ook mijn vakgebied de hemel in, want daarvan was hij de grondlegger. Maar het is moeilijk aan deze heiligenverering te ontkomen. Zelfs de nuchtere Nederlandse wetenschapshistoricus Dijksterhuis schreef in zijn *Mechanisering van het Wereldbeeld* dat Newtons natuurkundige werk “eerst ten koste van een ontzaglijke geestesinspanning heeft kunnen worden gedaan, en één van de hoogtepunten in de geschiedenis van het menselijk denken beduidt.” Ook de auteur van een marxistisch boekje over de geschiedenis van de wiskunde uit de toenmalige DDR kon, na er fijntjes op te hebben gewezen dat Newton zoon was van een grondbezitter, niet om de vaststelling heen dat Newtons wiskundige werk “eine der bewundernswertesten geistigen Leistungen in der Menschheitsgeschichte” is. Met dergelijke lofuitingen, zowel van mensen die het wel als die het niet konden weten, zijn pagina’s te vullen.

Wie mijn boek *Requiem voor Newton* leest, zal zien dat Newton een van de belangrijkste personen in mijn leven is: in verstrooide buien spreek ik bijvoorbeeld mijn zoontje Julius vaak met Isaac aan. De reden daarvoor is niet zozeer van wetenschappelijke, maar van emotionele aard. Toen ik namelijk op zondag 1 oktober 1989 als pas gepromoveerd postdoc aankwam in Cambridge, kende ik daar geen hond, en werd ik ook door niemand ontvangen, laat staan welkom geheten. Tot overmaat van ramp bleek ook de stekker van mijn geluidsinstallatie niet in het Engelse stopcontact te passen, zodat ik mij niet door de muziek van Beethoven of *The Beach Boys* kon laten opvrolijken. Op dat moment overviel mij een existentiële crisis van een intensiteit die ik niet eerder had meegemaakt.

Daaruit heeft Newton mij gered. Ik wist dat in de kapel van Trinity College, het instituut waaraan Newton vijfendertig jaar lang verbonden was, een standbeeld van hem stond. Ik liep daar naartoe, en bleek ook in deze kapel alleen te zijn. Dat wil zeggen, ik bevond mij in gezelschap van de op ware grootte in marmer afgebeelde, maar op een fors voetstuk geplaatste Newton. Het opschrift van dit voetstuk, namelijk “Newton: Qui genus humanum ingenio superavit” (wat zo iets betekent als: ‘Newton, die de mensheid met zijn genie heeft overtroffen’) droeg bij tot mijn

gevoel van algehele nietigheid. Maar toch is Newton toen, in de uren die ik zwijgend met hem in de kapel doorbracht, voor mij een levende realiteit geworden, in plaats van een dode figuur uit de encyclopedie. Ik kon in ieder geval weer verder.

Het begin van de klassieke analyse

Deze overweging moest mij even van het hart, maar ik zal verder een nuchtere toon aanslaan. Zo wordt het hoog tijd om te vertellen wat nu precies Newtons bijdrage aan de analyse was.³ Ik zal die eerst in één zin samenvatten: Newton zag in dat een groot aantal alledaagse wiskundige problemen die al sinds de oudheid werden bestudeerd, zoals de bepaling van lengtes, oppervlakten, volumes, minima en maxima, en snelheden, konden worden opgelost met behulp van twee technieken die hij zelf uitvond, namelijk integratie en differentiatie, compleet met het verbluffende inzicht dat deze operaties de inverse van elkaar zijn.⁴ Dat was een lange zin, maar die beschrijft dan ook een wiskundige synthese zonder weerga. Newton verbond die bovendien met een groot arsenaal aan praktische methoden om de integralen en afgeleiden die hij tegenkwam ook daadwerkelijk uit te rekenen. De belangrijkste voorbeelden daarvan zijn oneindige reeksen, zoals het terecht naar hem genoemde binomium, maar ook de ten onrechte niet naar Newton genoemde Taylorreeks,⁵ en verder allerlei approximatie- en interpolatiemethoden. Wat de laatste betreft ging hij zonder hulp van zelfs maar een rekenliniaal met een precisie te werk waar de hedendaagse wiskundige nog niet met een supercomputer aankomt: Newton controleerde zijn formules soms tot zestig decimalen.

Moderne analytici hebben het niet vaak over Newton, gedeeltelijk wellicht uit een gebrek aan historisch besef, maar vooral omdat het al sinds de achttiende eeuw in zwang is om te denken dat het wiskundige werk van Newton niet rigoureus zou zijn, en daarmee in feite geen wiskunde is. De aanval op Newton werd in 1734 gelanceerd door de Ierse Bisschop George Berkeley (1685–1753),⁶ die daarmee wilde aantonen dat de grondslagen van de wiskunde niet solider waren dan die van het geloof. Zijn kritiek richtte zich met name op het gebruik van infinitesimalen ofwel oneindig kleine grootheden, waarmee Newton zijn resultaten inderdaad in eerste instantie rechtvaardigde.⁷

Het is waar dat Newton veel van zijn wiskundige werk niet in de ook toen gebruikelijke vorm van definities, axioma’s, stellingen, en bewijzen presenteerde, maar de voorkeur

gaf aan de behandeling van talloze voorbeelden. Die pakte hij dan met behulp van differentiatie of integratie aan, zonder deze methode zelf duidelijk te beschrijven (zoals Leibniz, die ten onrechte wordt beschouwd als de mede-uitvinder van de differentiaal- en integraalrekening,⁸ dat later wel zou doen). Newton wijdde hoogstens af en toe een stukje proza aan zijn algemene methodiek, en ontleende zijn vertrouwen daarin oorspronkelijk niet aan een wiskundige bewijsvoering, maar aan haar interne consistentie en aan numerieke verificaties, die hij zoals gezegd met manische precisie uitvoerde.

Uit alles blijkt dat Newton inderdaad heel intuïtief over de wiskunde dacht, en daarbij vooral het oog van een fysicus had. Dat was ook de sleutel tot zijn succes. Wat wij nu al op de middelbare school als het eenvoudigste type functie bestuderen, van $\mathbf{R}$ naar $\mathbf{R}$ dus, was voor Newton een deeltje dat zich in het platte vlak bewoog. Een functie van twee variabelen beschouwde Newton als een lijn die door de drie-dimensionale ruimte bewoog, waarmee hij zich zowaar als de eerste stringtheoreticus manifesteerde. In vrijwel al zijn beschouwingen speelt de tijd een rol, en juist dat perspectief leidde hem tot zijn belangrijkste inzichten. Waar Leibniz een integraal bijvoorbeeld als een statische grootheid zag, vroeg Newton zich af hoe het oppervlak onder de baan van het deeltje van het eindpunt afhing. Zo kwam hij via een dynamisch argument tot de hoofdstelling van de calculus, die in moderne terminologie stelt dat de afgeleide van de onbepaalde integraal van een functie precies die functie zelf is.

Ondanks dit intuïtieve karakter van Newtons wiskundige werk is de kritiek van Berkeley en anderen volledig misplaatst.⁹ Newton ging er net als wij vanuit dat een wiskundig bewijs moest worden geleverd in de vorm van een waterdicht deductief argument, zoals Euclides dat in zijn *Elementen* had voorgedaan. Newton zou de eerste zijn geweest om te erkennen dat zijn vroege werk niet aan dit criterium voldeed. Maar zoals vrijwel al zijn tijdgenoten maakte hij de merkwaardige denkfout dat, omdat Euclides over meetkunde schreef, een bewijs ook noodzakelijk meetkundig van aard moest zijn.¹⁰ Newton zag het daarom als zijn taak een meetkundig bewijs van zijn rekenmethode te geven, en daarin slaagde hij ook met glans. Hij verving infinitesimalen en andere dubieuze grootheden uit zijn eerdere formulering door begrippen als continuïteit, convergentie, en limiet. Daarmee was hij niet alleen de vader van de analyse, namelijk als ontdekker van de integraal- en differentiaal-

rekening, maar ook haar moeder, want deze begrippen vormen nog steeds de kern van het vak.

Helaas ontging deze kant van Newtons analytische werk destijds ook zijn meest fervente aanhangers. Om de indruk te wekken dat zijn argumenten meetkundig van aard waren, verpakte hij ze in plaatjes in plaats van in formules, wat alom verwarring zaaide, en eigenlijk nu pas op waarde wordt geschat. Maar nog schadelijker was dat Newton de beslissende wiskundige bewijzen verstopte in zijn *Principia* uit 1687, waar ze totaal werden overschaduwd door de natuurkundige inhoud van het boek. Dit werk, voluit genoemd *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, geldt niet zonder reden als het belangrijkste boek uit de geschiedenis van de wetenschap.¹¹ Het is gebaseerd op de drie later naar Newton genoemde bewegingswetten, die bepaald niet voor de hand liggen, en zelfs in strijd lijken met alledaagse waarnemingen. Die geven namelijk eerder aanleiding tot de natuurkunde van Aristoteles, want die man was ook niet gek. En toch wist Newton een groot deel van de toen bekende natuurverschijnselen uit zijn wetten af te leiden. *Principia* beschrijft bijvoorbeeld in groot detail het zonnestelsel, uitgaande van Newtons eigen universele gravitatiewet. Daaruit verklaarde hij niet alleen de empirisch gevonden wetten van Kepler, maar ook alledaagse verschijnselen als eb en vloed.

Slechts de beweging van de maan ging Newtons krachten te boven. Zijn onvermogen dit probleem met de door hem gewenste precisie op te lossen, deed hem na meer dan dertig jaar van onafgebroken intellectuele inspanning besluiten naar een ander beroep dan dat van kamergeleerde uit te zien. Het zij hem gegund. Een held van onze tijd is Arnon Grunberg, die in zijn veelgeprezen debuutroman *Blauwe Maandagen* beschrijft hoe hij al zijn schoolboeken verkocht om al spijbelend op terrasjes in Amsterdam-Zuid samen met zijn vriendinnetje een aperitief genaamd *Dubonnet* te consumeren.

Bernhard Riemann

Ik sluit hiermee de behandeling van het eerste kruispunt tussen wiskunde en natuurkunde af. De eerste grote analyticus na Newton was Leonhard Euler (1707–1783), die als de meest productieve wiskundige aller tijden geldt. Naast ontelbare praktische bijdragen aan de analyse, gaf hij een nieuwe basis aan dit vak door uit te gaan van het begrip functie, in de zin van een variabele die van een andere variabele afhangt.¹² De ontwikkeling van

de analyse na Euler wordt vaak gezien als een uiteindelijk geslaagde zoektocht naar een rigoureuze grondslag van het vak, waarbij in de negentiende eeuw wiskundigen als Cauchy (1789–1857), Dirichlet (1805–1859), en Weierstrass (1815–1897) een hoofdrol zouden hebben gespeeld. Dit streven naar een solide basis speelde inderdaad een rol,¹³ maar hun motivatie lag nog meer in de vraag hoe de analyse, die zijn nut intussen dankzij Newton en Euler wel aangetoond had, het beste onderwezen kon worden.

Zelfs de meest fervente aanhanger van Newton moet namelijk erkennen dat de meester op dat vlak volledig gefaald had; zijn colleges als *Lucasian Professor of Mathematics* in Cambridge waren veel te moeilijk, en werden dan ook niet of nauwelijks bezocht. Dat weerhield Newton er overigens niet van ze altijd te geven; ook als niemand op kwam dagen hield hij zijn verhaal *to the walls*, zoals hij dat zelf uitdrukte.¹⁴ Het genoemde drietal vulde dit vacuüm, en ook het analyse-onderwijs van nu is nog steeds op hun inzichten gebaseerd. Dat is mogelijk de reden dat ik dit onderwijs zelf als buitengewoon saai heb ervaren, omdat precisie wordt ingevoerd op een moment dat de student niet begrijpt welke ideeën er eigenlijk precies worden gemaakt, en waarom dit nodig is. Dat vonden mijn jaargenoten aan de UvA ook, en daarom bleek ik al na een paar weken van het eerste jaar van mijn studie de enige te zijn uit een groep van tachtig die de analyse-colleges nog bezocht.

Dat brengt mij op de persoon die naar mijn mening in de negentiende eeuw de belangrijkste impuls aan de analyse heeft gegeven, want ook deze man zat meestal in zijn eenje in de collegebanken. Ik denk daarom óók vaak aan hem als ik, inmiddels aangeland aan de andere kant van de kathedra, zélf aan een hele klein groep college geef, zoals hier in Nijmegen tot nu toe het geval is geweest. Ik beschouw dat nog steeds als een eer, en het minimum aantal studenten waarbij mijn colleges doorgang vinden is één. (Dus niet nul, zoals bij Newton.) Je kunt namelijk nooit weten of die ene student niet toevallig de nieuwe Riemann is. Dat voor u helaas niet de nieuwe Gauss staat — want dat was de docent die plichtsbewust aan Riemann college bleef geven — heeft te maken met het feit dat de Radboud Universiteit haar ambities nog best wat zou kunnen opschroeven. Bij de top-vier van Nederland horen, wat is dat nou.

Ik zie Riemann als de brug tussen de klassieke en de moderne analyse, en stel daarbij vast dat hij net als Newton bijzonder intuïtief en vanuit de fysica over wiskunde dacht.¹⁵

Naast wiskunde bij Gauss studeerde Riemann in Göttingen ook natuurkunde bij de grote Duitse fysicus Wilhelm Weber (1804–1891), die hij zowel met experimenteel als met theoretisch werk bijstond. Ook Gauss was daar nauw bij betrokken.¹⁶ Op dat moment, rond 1850, zette de natuurkunde haar eerste grote stap voorwaarts sinds Newton dankzij de invoering van het veldbegrip. Dit wordt terecht toegeschreven aan de Britse fysici Faraday, Thomson alias Kelvin en Maxwell, maar de invloed van de Duitse school, die behalve het genoemde drietal uit Göttingen ook Helmholtz en Hertz in Berlijn omvatte, moet niet onderschat worden.¹⁷ Ik zal u hier niet vermoeien met de geschiedenis van de elektrodynamica, die in 1905 door Einstein met zijn speciale relativiteitstheorie tot voltooiing werd gebracht — de belangrijkste reden dat we nu, precies een eeuw later, een *World Year of Physics* hebben.

Kort gezegd bleek dat alle elektrische, magnetische, en optische verschijnselen verklaard konden worden door de aanname dat zich op ieder punt van de ruimte een nieuwe grootte bevond, de elektromagnetische veldsterkte, die krachten op geladen deeltjes uitoefende, en in trilling kon worden gebracht met licht als resultaat. Riemann zag eerder dan Maxwell in, dat de trillingen van het elektromagnetische veld zich met de lichtsnelheid voortplantten, en ontwikkelde bovendien reeds als student de ambitie om ook de zwaartekracht door middel van een veldentheorie te beschrijven, met het uiteindelijke doel een geünificeerde theorie van alle fundamentele natuurverschijnselen op te stellen.¹⁸

Met dit programma was hij zijn tijd ver vooruit, want pas Einstein zou in 1915 met zijn algemene relativiteitstheorie inderdaad een veldentheoretische beschrijving van de zwaartekracht geven, en naar een alomvattende theorie van de natuurkrachten is men nu nog steeds op zoek. Riemann had dan ook zelf geen succes met zijn natuurkundige agenda, maar het is zonneklaar dat de veldentheorie hem er als wiskundige toe bracht op een veel diepere en abstractere manier over het begrip ruimte na te denken dan zijn voorgangers en tijdgenoten. In een veldentheorie is een punt in de ruimte namelijk veel meer dan dat: het is de drager van een bepaalde structuur. Bovendien was Riemann één van de eerste wiskundigen die het ruimtebegrip rigoreus loskoppelde van de driedimensionale ruimte om ons heen.¹⁹ Voor hij op zijn veertigste jaar aan een combinatie van pleuritis en tuberculose stierf, bepaalde Riemann mede daardoor

de agenda voor de moderne wiskunde.

Het bekendste voorbeeld van Riemanns algemenere en abstractere ruimtebegrip is zijn concept van een gekromde ruimte van willekeurige dimensie, dat zestig jaar later de wiskundige basis bleek te vormen van Einsteins algemene relativiteitstheorie.²⁰ Maar voor de analyse telt vooral Riemanns geniale inzicht om functies op te vatten als punten in een abstracte ruimte, waarbij naburige punten staan voor functies die op een bepaalde manier niet veel van elkaar verschillen.²¹ Een functie als een punt in een ruimte: u kunt hierbij denken aan het ministerie van OCW, waarvan ieder steenkorreltje een voorschrift is waar scholen of universiteiten zich aan moeten houden.

Ook met dit inzicht was Riemann zijn tijd ver vooruit, want om er verder mee te komen moest het worden gecombineerd met een groot aantal andere wiskundige ontwikkelingen, die ik slechts kort zal aanduiden. Wie er meer van wil weten moet maar wiskunde gaan studeren, bij voorkeur aan de Radboud Universiteit, waar we nog volop plaats hebben. “We houden de groepen bewust klein”, schreef een vriend van mij eens in advertenties voor zijn cursussen Engels voor tolken en vertalers. Zijn instituut ging het jaar daarop overigens failliet. Ik noem begrippen als vectorruimte (Grassmann, 1844), matrix (Cayley, 1844), reëel getal (Dedekind, 1872), verzameling (Cantor, 1872–1897), topologie (F. Riesz, 1907; Hausdorff, 1914), en maat (Borel, 1894; Lebesgue, 1904), waarvan de laatste drie ook nog eens direct door het werk van Riemann waren geïnspireerd.²² Uit deze combinatie ontstond uiteindelijk de moderne abstracte analyse, die gebaseerd is op het idee dat een functie niet op zichzelf moet worden beschouwd, maar als een punt in een oneindigdimensionale vector-ruimte van functies met soortgelijke eigenschappen.²³

Het is opmerkelijk dat Engeland geen enkele rol van betekenis speelde in het ontstaan van de moderne analyse. Door een combinatie van heiligenverering, respect voor traditie, en *jingoism*, ging men veel te lang door op het pad van Newton, zodat de vernieuwingen die al vanaf de achttiende eeuw op het continent ontstonden niet of nauwelijks werden geabsorbeerd. Hierdoor kwam de klassieke analyse rond de eeuwwisseling in Cambridge juist tot een hoogtepunt, met name in het werk van Hardy (1877–1947) en Littlewood (1885–1977), maar werd de opkomst van de functionaalanalyse volledig gemist. Ter illustratie hiervan moge een opmerking dienen die Hardy zelfs in 1935 nog maakte na het aanhoren van een voordracht van Von Neumann over

de nieuwe analyse en haar verband met de kwantumtheorie: “Obviously a very intelligent man. But was that mathematics?”²⁴ Tot het laatst hield Hardy ook vol dat er een stricte scheiding zou bestaan tussen de zuivere en de toegepaste wiskunde. Vol trots verklaarde hij over zijn werk als wiskundige: “I have never done anything useful.” Mijn oude maatjes Richard Borchers en Richard Taylor, die het een stuk verder hebben geschopt dan ik, werden inderdaad niet moe van de opmerking dat ze het werk van Hardy als *Tripos questions* ofwel veredelde tentamenvragen zagen.

John von Neumann

Ik ben als vanzelf bij Von Neumann aangeland. Omdat ik mijn vorige oratie al aan hem heb opgehangen, zal ik vandaag slechts het minimum over hem vertellen.²⁵ Als voormalig wonderkind toog hij in 1926 naar Göttingen om assistent te worden van David Hilbert (1862–1943), de grootste wiskundige van zijn tijd. Von Neumann was zijn loopbaan begonnen in de verzamelingenleer, en dacht in Göttingen aan Hilberts *Beweistheorie* te gaan werken, een mislukte poging om de wiskunde op de logica te grondvesten en zo haar absolute geldigheid aan te tonen. Toen Von Neumann aankwam, bleek Hilbert echter alweer in iets heel anders geïnteresseerd te zijn, namelijk de kwantummechanica.²⁶

Sinds 1900 waren fysici geleidelijk aan tot de ontdekking gekomen dat de klassieke mechanica van Newton, aangevuld met de veldentheorie van Maxwell en de electrodynamica van Lorentz, op microscopische schaal geen juiste beschrijving van de natuur meer vormde. Deze ontwikkeling, waarin in eerste instantie Planck, Einstein, en Bohr toonaangevend waren, culmineerde in 1925 in de ontdekking van een nieuwe mechanica van de microscopische wereld door Werner Heisenberg (1901–1976). Die was op dat moment assistent van Max Born (1882–1970), ook alweer in Göttingen. Deze Born was zelf assistent van Hilbert geweest, en was wiskundig aanzienlijk beter onderlegd dan de gemiddelde theoretisch fysicus. Hij zag daarom in dat de wiskundige grootheden die Heisenberg had opgeschreven matrices waren. Een half jaar later publiceerde Erwin Schrödinger (1887–1961) zijn golfmechanica, die een alternatieve poging was de microscopische wereld wiskundig te beschrijven. Zelfs mensen die niets van wiskunde wisten waren daarvan onder de indruk, met name vanwege het mysterieuze symbool dat Schrödinger gebruikte. Hilberts leerling Weyl, die toen net als Schrödinger in Zürich werkte, hielp Schrödinger bij de wis-

kundige uitwerking van diens theorie, en begon tegelijkertijd een verhouding met diens echtgenote. Dat was haar antwoord op de vele buitenechtelijke verhoudingen die haar man, Schrödinger dus, had.²⁷

Dit terzijde. De matrixmechanica van Heisenberg zag er totaal anders uit dan de golfmechanica van Schrödinger, en toch leek het erop dat deze theorieën beide dezelfde microscopische werkelijkheid correct beschreven. Dit fascineerde Hilbert, die al in het zesde probleem van zijn beroemde lijst van wiskundige problemen uit 1900 had opgeroepen tot de wiskundige axiomatisering van de natuurkunde. Hij zag het verband tussen de kwantumtheorie en de opkomende functionaalanalyse, waarin hij ook zelf een grote rol had gespeeld, maar bleek te oud en te ziek om veel verder te komen dan die observatie. Gelukkig betrok Hilbert zijn assistent Von Neumann bij dit project, die precies de juiste man op de juiste plaats bleek te zijn. Von Neumann absorbeerde alle relevante wiskundige en fysieke ideeën van dat moment, en integreerde deze door een begrip in te voeren dat aan de basis ligt van de moderne analyse.

Dit is de zogenaamde Hilbertruimte. Van alle mogelijke ruimtes van functies, en dat zijn er heel wat, lijkt deze ondanks haar oneindige dimensie nog het meest op de ruimte om ons heen, omdat men in een Hilbertruimte lengtes en hoeken kan bepalen. Von Neumann zag in dat de golf functies van Schrödinger abstract gezien vectoren van lengte één in een Hilbertruimte waren, en dat de kansen die processen als radioactiviteit beschrijven, bepaald worden door de hoeken tussen dergelijke vectoren. De matrices van Heisenberg bleken juist zogenaamde operatoren op een Hilbertruimte te zijn. Zo kon Von Neumann aantonen dat de kwantumtheorie van Heisenberg inderdaad equivalent was aan die van Schrödinger.

Als klap op de vuurpijl begon én voltooid Von Neumann een virtueuze studie van zogenaamde onbegrensde operatoren, uiterst singuliere objecten waaraan zeker geen wiskundige zijn vingers had durven te branden als de kwantumfysica niet van de daken had geschreeuwd dat ze noodzakelijk waren om de natuur te beschrijven. Von Neumann schreef zijn ideeën in 1932 op in een boek genaamd *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, dat naast briljante wiskunde ook diepe natuurkundige beschouwingen bevat. Tot op zekere hoogte is dit boek daarmee een kwantummechanische versie van Newtons *Principia*.

Met de invoering van Hilbertruimten door Von Neumann kwam de moderne analyse

rond 1930 tot volwassenheid. Het wezenlijke verschil met de klassieke analyse is zoals gezegd dat nu niet naar één functie wordt gekeken, maar naar oneindig veel functies tegelijk. In de beperkte wereld van de wiskunde kan deze verandering van perspectief met recht een revolutie worden genoemd. De wiskundigen Birkhoff en Kreyszig slaan de spijker op de kop met hun oordeel dat “This revolution was made possible by combining a concern for rigorous foundations with an interest in physical applications.”²⁸ Deze opmerking is net zo goed van toepassing op het werk van Newton en van Riemann, en daarmee sluit ik de bespreking van mijn drie kruispunten tussen wiskunde en natuurkunde af. Het eerste gaf ons de klassieke analyse, het derde de moderne analyse, en het tweede vormde de brug daartussen.

Plannen en dromen

Je kunt je leven wijden aan de klassieke analyse, en ook aan de moderne analyse. Mijn fascinatie gaat echter uit naar het verband tussen die twee. Dit hangt nauw samen met het verband tussen de klassieke natuurkun-

de en de kwantumfysica, die wiskundig tenslotte door respectievelijk de klassieke en de moderne analyse worden beschreven. Ik zal u kort twee van mijn onderzoeksprojecten beschrijven die direct met dit verband te maken hebben.

Het eerste betreft het probleem van determinisme, ofwel voorbestemming. Dit is de vraag of er, gegeven de toestand van de wereld vandaag, slechts één mogelijke toekomst is. Deze kwestie speelt in de filosofie en de theologie een hoofdrol, maar heeft ook sociologische en juridische implicaties. Op de gevolgen voor de multiculturele samenleving heb ik al in het begin van deze oratie gewezen, maar al veel eerder werd de Republiek der Zeven Verenigde Nederlanden verscheurd door de strijd tussen de remonstranten, die Calvijns leer van de predestinatie afwezen, en de contra-remonstranten, die aan de kant van de Gereformeerde Kerk en daarmee de staat stonden. Raadspensionaris Johan van Oldenbarneveld kwam de remonstranten naar de smaak van prins Maurits te veel tegemoet, en werd om die reden in 1619 wegens hoogverraad onthoofd.²⁹ De prins had achteraf ge-

zien groot gelijk met deze actie, want modern neurobiologisch onderzoek laat geen spaan heel van de vrije wil,³⁰ maar ik probeer zelf iets nuchterder tegen dit probleem aan te kijken, en wel als wiskundige. Ik houd daarbij wél in gedachten dat Nijmegen een belangrijk bolwerk van de remonstranten was.

Newton wordt vaak opgevoerd als de vader van het deterministische wereldbeeld, waarin het heelal als een mechanisch uurwerk afloopt. Dit is een ernstig misverstand. Newton geloofde in het primaat van een almachtige schepper, die de natuurwetten niet alleen uit vrije keuze had bedacht, maar ook door middel van wat Newton *active powers* noemde voortdurend in de natuur ingreep. Als voorbeelden van dergelijke krachten noemde hij de opvallend hoge temperatuur van urine, processen als gisting en transmutaties van elementen zoals die in de alchemie werden voorzien — het is inmiddels een cliché dat Newton een fervent alchemist was. Maar ook wees hij op elektriciteit en zwaartekracht, waar hij geen mechanische verklaring voor had.³¹ Newton dacht bovendien dat de



Trinity College, Cambridge

schepper af en toe kometen op het zonnestelsel afvuurde om het stabiel te houden.

Als één denker uit de zeventiende eeuw als kampioen van het determinisme moet worden opgevoerd zou ik Spinoza (1632–1677) nemen, maar binnen de exacte wetenschappen moet met name markies de Laplace (1749–1827) worden genoemd, die zichzelf als het Franse antwoord op Newton beschouwde. Hij introduceerde zijn beroemde demon, die gegeven de plaatsen en snelheden van alle deeltjes in het universum, met behulp van de wetten van Newton de toekomst met absolute zekerheid zou kunnen voorspellen. Het is alwéér een cliché dat de demon van Laplace zijn opgave in de praktijk vanwege het verschijnsel van chaos niet kan vervullen, maar deze opmerking schiet aan de kern van de zaak voorbij. De werkelijke oorzaak van het feit dat de klassieke natuurkunde lang niet zo deterministisch is als Spinoza en Laplace dachten, ligt in het verschijnsel van zogenaamde incomplete beweging.³²

Het eenvoudigste voorbeeld daarvan is een knikker die van een tafel afrolt. Als het universum uitsluitend uit de tafel zou bestaan, is het eenvoudig zo, dat de bewegingsvergelijkingen van Newton na een bepaalde tijd geen oplossing meer hebben. Een iets ingewikkelder voorbeeld is een zuiver wiskundige die in een zwart gat valt, en het ultieme paradigma van een incomplete beweging is het heelal als geheel, dat ooit in de oerknal ontstond. Wat is het lot van de wiskundige als die eenmaal in het zwarte gat is aangeland? Bestond het heelal vóór de oerknal? Dat zijn vragen waarop de klassieke natuurkunde geen antwoord heeft. Augustinus trof eens een skepticus, die hem vroeg wat God eigenlijk deed vóór hij de wereld schiep. Woedend beet de kerkvader hem toe dat God toen de hel schiep, om later mensen te kunnen straffen die het waagden dergelijke vragen te stellen.

Daar laat ik me niet door tegenhouden; alleen NWO heeft de macht mijn onderzoek stop te zetten. Voorlopig waag ik het dus er maar op. De kwantummechanica heeft de reputatie juist minder deterministisch te zijn dan de klassieke mechanica, zoals bijvoorbeeld blijkt uit een verschijnsel als radioactiviteit. Maar in werkelijkheid is het omgekeerde het geval. De kwantummechanica per se is juist een deterministische theorie, waarin incomplete beweging vanwege het speciale wiskundige formalisme van Von Neumann onmogelijk is. Het toevalskarakter van de kwantumtheorie komt uitsluitend bovendien wanneer we door een klassieke bril

naar de kwantumwereld kijken, of technisch gezegd de klassieke limiet nemen. Deze limiet is hoogst singulier, en daarmee een waar genoegen voor de echte analyticus. Het onderzoeksproject is nu om te begrijpen hoe een indeterministische klassieke beweging kan ontstaan als klassieke limiet van een noodzakelijk deterministisch kwantumsysteem. Zo hoop ik aan te kunnen tonen dat het begin van de tijd een door onze klassiek-natuurkundige bril veroorzaakte illusie is.

Dit laatste idee is oorspronkelijk afkomstig van Stephen Hawking, die als de huidige *Lucasian Professor of Mathematics* in Cambridge een verre opvolger van Newton is. Over hem en zijn coterie van verpleegsters en studentes kunt u desgewenst verder lezen in de pikantere passages van mijn Requiem voor Newton, want mijn zoektocht naar Newton en de bronnen van de moderne natuurkunde kende vele onvermoede zijpaden.

Een tweede project, dat al loopt, betreft het verband tussen klassieke en kwantummechanica in omgekeerde richting, van klassiek naar kwantum dus. Net als de vraag hoe de moderne kunst uit de klassieke heeft kunnen ontstaan, kan men zich afvragen hoe een kwantumsysteem eruit ziet als we weten wat de klassieke versie ervan is. Je kunt dit per systeem bekijken, en dat is sinds het ontstaan van de kwantumtheorie in 1925 ook veelvuldig gedaan. Mijn opzet is echter om dit in één klap voor alle mogelijke fysische systemen tegelijk te doen:

Groots en meeslepend wil ik leven!

Hoort ge dat, vader, moeder, wereld,

*knekelhuis!*³³

De truc daarbij is om de stap die heeft geleid van de klassieke analyse tot de moderne analyse opnieuw te zetten, maar nu één stap verder. Ik breng u in herinnering dat deze stap eruit bestond om niet naar één functie te kijken, maar naar een heleboel functies tegelijk, oneindig veel zelfs, samengebracht in een Hilbertruimte. Voor hetzelfde geld kun je alle Hilbertruimten samenvoegen tot één enkel wiskundig object, dat technische gesproken geen ruimte blijkt te zijn maar een zogenaamde categorie, waarin alle mogelijke kwantumtheorieën bevat zijn.

Om alle klassieke theorieën op een dergelijke wijze samen te rapen is het essentieel om het perspectief van Newton op de klassieke analyse te hebben, en niet dat van Euler en alle latere analytici. De klassieke analyse gaat dan dus over trajecten in meetkundige ruimten, en niet over functies daarop. Op die manier verkrijgt men opnieuw een categorie, waarin deze keer alle klassieke theorieën be-

vat zijn. Het verband tussen de klassieke en de kwantumwereld wordt dan naar mijn huidige verwachting gegeven door wat wiskundigen stoere functor noemen. Dit is de laatste wiskundige term waarmee ik u vandaag lastig zal vallen, hoewel mijn zeer gewaardeerde promovendi er nog vele jaren door gekweld zullen worden.

De Humboldt-universiteit

Ter afsluiting wil ik opnieuw met u teruggaan in de tijd — als kwantisatie geen functor blijkt te zijn kan ik nog altijd de wetenschapsgeschiedenis in vluchten — en daarbij het beroep van hoogleraar in de tijd van Newton vergelijken met de tijd van Riemann, en met de situatie nu.

Toen Newton in Cambridge studeerde, was retoriek het enige vak dat systematisch werd gedoceerd. Er was maar één hoogleraar in de wiskunde, genaamd Isaac Barrow, die zijn leerstoel in 1669 aan zijn toen zevenentwintig jaar oude leerling ter beschikking stelde. Dat waren tijden. De wiskundigen konden in Cambridge doen wat ze maar wilden, want hun vak werd als volkomen onbelangrijk beschouwd. Newton maakte volop gebruik van deze vrijheid. Van de vijfendertig jaar dat hij in Cambridge werkte, besteedde hij slechts een fractie van zijn tijd aan de wiskunde, waarin hij dus hoogleraar was, en al net zo weinig aan de natuurkunde. De jaren 1665–1666, waarin hij de differentiaal- en integraalrekening ontdekte, en 1684–1686, waarin hij *Principia* schreef, waren dus niet typerend, maar uitzonderlijk. Ik noemde net al Newtons activiteiten in de alchemie, maar ook die vormden niet zijn belangrijkste tijdsverdrijf.

Waar Newton zich voornamelijk mee bezighield, was theologie en kerkgeschiedenis: je zou zelfs kunnen spreken van een obsessie.³⁴ Hij was een diep gelovig christen, die echter meende dat de wereldse kerk aan een voortdurend corruptieproces onderhevig was. Dit gold ook voor de bijbel, waarvan Newton om onnavolgbare redenen alleen Daniël en de Openbaring van Johannes als authentiek beschouwde. In zijn nagelaten manuscripten treft men eindeloze tirades aan tegen de katholieke kerk, en in die zin was Newton een echte protestant. Maar ook de anglicaanse kerk beschouwde hij als verdorven, omdat deze het dogma van de drie-eenheid met de katholieke kerk deelde. Newton was namelijk bij zijn eenzame studie tot de conclusie gekomen dat Gods almacht gecompromitteerd zou zijn als Jezus Christus niet ondergeschikt aan hem was. Wat deze opvatting extra delicaat maakte, was dat Newton ver-

bonden was aan *Trinity College*, waarvan de volledige naam luidt: *College of the Holy and Undivided Trinity*. Hij hield zijn ketterse opvattingen daarom wijselijk voor zich. Dat kón hij ook doen, omdat niemand hem ooit vroeg onderzoeksvoorstellen in te dienen of achteraf rekenschap af te leggen over zijn werk.

We springen nu van Newton naar Riemann, en belanden daarbij in de negentiende eeuw. De beste Duitstalige universiteiten waren toen ingericht volgens het model van Wilhelm von Humboldt (1767–1835), de oudere broer van de beroemde ontdekkingsreiziger Alexander von Humboldt. Naar deze Alexander is een stipendium genoemd dat mij tien jaar geleden in staat stelde een tijd in Hamburg te werken, en daar viel het me op dat iedereen het nog steeds over Humboldt had, maar dan Wilhelm. Ik ben toen een fervent aanhanger geworden van diens visie op de universiteit, en zal daarom kort samenvatten waar die uit bestond en hoe Humboldt daar toe kwam.³⁵

In de achttiende eeuw ontstond het Duitse humanisme, waarin verlichte geesten als Goethe, Kant en Humboldts vriend Schiller erop wezen dat iedereen het recht had zijn persoonlijkheid te ontplooiën en in waardigheid te leven. In Pruisen vond de heersende klasse van vorsten en landjonkers haar ontplooiing reeds in het berijden en fokken van paarden, zodat dit humanisme vooral aansloeg bij de middenklasse. Om deze groep in staat te stellen kennis en cultuur te vergaren, richtte Humboldt in 1810 de universiteit van Berlijn op. Het doel van Humboldts universiteit bestond uit *Bildung und Aufklärung*, ofwel vorming en verlichting. *Bildung* is iets heel anders is dan *Ausbildung*, oftewel opleiding. Humboldt vond de gedachte dat een universiteit een beroepsopleiding zou bieden zelfs ondraaglijk. Hij zag de wetenschap als een abstracte spirituele activiteit, die uitsluitend de verrijking van de persoonlijkheid tot doel had.

Niettemin was Humboldt een sluw politicus. Hij vroeg zich af waarom de koning van Pruisen, Friedrich Wilhelm III, een dergelijke universiteit, tenslotte een potentiële bron van

rebellie, zou willen financieren. Om te beginnen noemde hij de universiteit naar de koning. We hadden hier natuurlijk ook een of andere miljardair moeten zoeken, in plaats van Radboud die geen cent heeft nagelaten. Waarom geen *John de Mol Universiteit Nijmegen*. Maar bovendien hield Humboldt zijn koning voor dat de Duitse cultuur een bindend element zou zijn in het opkomend nationalisme, dat door Friedrich Wilhelm werd ondersteund omdat het tegen Napoleon was gericht, en na diens gehoopte ondergang tot een groot-Duitse staat zou kunnen leiden. Uiteindelijk gebeurde dat ook.

Ten slotte, en nu komt het, verzekerde Humboldt absolute loyaliteit van de universiteit aan de regering, als omgekeerd ook de academici op geen enkele manier door de staat werden lastiggevallen. Dit pact, dat de essentie vormt van zijn universiteit, vatte Humboldt samen met de woorden *Einsamkeit und Freiheit*. Dit betekent dat de studenten en hoogleraren zich ongestoord en vrij van iedere inmenging kunnen wijden aan de verrijking van hun persoonlijkheid door middel van onderwijs en onderzoek. Het zou ook betekenen dat de meeste niet-joodse Duitse academici zich later kritiekloos achter Hitler schaarde, zolang ze hun werk maar konden blijven doen.³⁶

Hoe staat het er nu voor? Ik ben blij hier in Nijmegen te werken, want in Nederland is de Radboud Universiteit degene die nog het dichtst in de buurt komt van het model van Humboldt. Dat blijkt bijvoorbeeld uit het bestaan van het *Honours Programma*, en uit het niet bestaan van fusieplannen met een hogeschool. Maar het blijkt ook uit de veelvuldige mogelijkheden die worden geboden om met collega's uit andere disciplines in contact te komen; ik heb niet eerder in zo korte tijd zoveel interessante nieuwe mensen leren kennen.

Wat de wiskunde betreft wil ik nog een ander aspect noemen, namelijk Humboldts idee dat hoogleraren en studenten samen door middel van een dialoog de waarheid moeten zoeken. De hoogleraar levert de kennis, maar de student brengt zijn of haar onbe-

vangen aandacht en kritiek in. Kennis heeft daarom altijd een voorlopig en onaf karakter. Ik heb nog nooit zo'n leuke en enthousiaste groep wiskundestudenten gezien als hier, en heb op dat vlak dus hoge verwachtingen. Aan de andere kant dreigt de Humboldtse eenheid tussen onderwijs en onderzoek te worden getorpedeerd door de vorming van aparte onderwijs- en onderzoeksinstituten. Gelukkig zal de volgende minister of staatssecretaris deze wel weer samen willen voegen tot subfaculteiten, waarna de daarop volgende ze weer uiteen zal laten vallen, enzovoort, net als in de klassieke Chinese roman *De Drie Koninkrijken*. Ik maak me op dit vlak dus niet al te veel zorgen.

Ook met de *Freiheit* van Humboldt is het goed gesteld, want zowel NWO als deze universiteit hebben met een tweesporenbeleid, bestaande uit thematisering en clustering aan de ene kant, en persoonsgerichte steun aan de andere kant, de spanning tussen de maatschappelijk gewenste sturing en de door de wetenschapsbeoefenaar gewenste vrijheid van onderzoek naar mijn mening bevredigend opgelost.

De werkelijke bedreiging van de Humboldtse universiteit is dat de moderne hoogleraar noodgedwongen ondernemer is geworden. Hij of zij is vrijwel dagelijks bezig met de financiering van onderzoek, overdag dat van zichzelf, en 's avonds, als de kinderen in bed zijn, dat van iemand anders. Het Humboldtse ideaal van *Einsamkeit* is daarmee in het huidige academische bestel onbereikbaar gemaakt. Ooit wist Newton, één keer als student en één keer als hoogleraar, het concentratievermogen op te brengen om in een paar jaar tijd respectievelijk de klassieke analyse en de klassieke mechanica te ontwikkelen. Ook voor de mindere goden is het in iedere fase van de loopbaan essentieel om gedurende langere perioden met een totale overgave over wetenschappelijke problemen te kunnen nadenken. Ik doe daarom een beroep op zowel universitaire bestuurders als NWO om onderzoekers hun eenzaamheid weer terug te geven.

Noten en referenties

- 1 'Wie is er bang voor cultuur?' door Marcia Luyten (*de Volkskrant*, 4 december 2004, Reflex, p. 14).
- 2 Voor een geheel overzicht van de geschiedenis van de analyse zie H.N. Jahnke (ed.), *A History of Analysis* (American Mathematical Society, Providence, 2003).
- 3 De ultieme referentie voor Newtons wiskundige werk is D.T. Whiteside (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, 8 Vols. (Cambridge

University Press, Cambridge, 1967–1981). Voor korte samenvattingen zie bijvoorbeeld C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus* (Springer-Verlag, New York, 1979) of Jahnke, op.cit.

- 4 Newton was zich de algemeenheid van zijn methode al vroeg bewust. Reeds in 1666, toen zijn calculus nog volop in ontwikkeling was, schreef Newton "Could this [n.l. het berekenen

van primitieven en afgeleiden] ever bee done all problems whatever might be resolved."

- 5 Newton beschreef de Taylor-expansie in een vroege versie van zijn artikel 'De Quadratura Curvarum', dat hij al in 1676 begon, maar pas in 1704 zou publiceren (en wel als appendix van zijn *Opticks*). Hij vond deze expansie kennelijk niet belangrijk genoeg om in de gepubliceerde versie op te nemen.

- 6 *The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. De ongelovige wiskundige was Edmund Halley, een van de meest zichtbare bewonderaars en volgelingen van Newton.
- 7 In het bijzonder in zijn wiskundige *Opus Magnum De Methodis Serierum et Fluxionum* uit 1671 (postuum gepubliceerd in 1736), en in de werken die daaraan vooraf gingen, zoals *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* uit 1669 (gepubliceerd in 1711).
- 8 Leibniz beschreef zijn versie van de calculus later dan Newton, en had daarvoor ook inzicht gehad in Newtons ongepubliceerde werk op dit gebied. Historici die beweren dat het werk van Leibniz onafhankelijk was van dat van Newton, begrijpen niet dat de zekerheid dat een bepaald resultaat behaald kan worden dikwijls al het halve werk is, ook als dit resultaat vervolgens op een nieuwe manier verkregen wordt. Zie bijvoorbeeld A.R. Hall, *Philosophers at War: The Quarrel Between Newton and Leibniz* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- 9 Zie P. Kitcheer, 'Fluxions, limits, and infinite litenesse: A study of Newton's presentation of the calculus', *Isis* 64, p. 33–49 (1973).
- 10 Ook Spinoza trapte bijvoorbeeld in deze val: zijn hoofdwerk *Ethica*, waarin geen enkel wiskundig argument voorkomt, laat staan een meetkundige constructie, heeft de ondertitel *Ordine Geometrico Demonstrata*, ofwel 'volgens de meetkundige ordening uiteengezet'.
- 11 Een goede moderne editie is I. Newton, *The Principia (Mathematical Principles of Natural Philosophy)*, Transl. I.B. Cohen & A. Whitman, *Preceded by A Guide to Newton's Principia* by I.B. Cohen (University of California Press, Berkeley, 1999).
- 12 Om die reden geldt Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (1748) voor historici die zich niet bewust zijn van de draagwijdte van Newtons werk als het begin van de analyse als zelfstandige wiskundige discipline. In zijn vroege werk eiste Euler nog dat een functie werd gegeven doot een expliciete analytische uitdrukking, maar in zijn tweede hoofdwerk over de analyse, *Institutiones calculi differentialis* (1755), neigt hij al naar het moderne, abstracte functiebegrip. De definitie van een functie als een afbeelding die aan een (reëel) getal een ander (reëel) getal toevoegt wordt veelal aan Dirichlet (1837) toegeschreven, ofschoon die nog niet over een behoorlijke definitie van de reële getallen beschikte en tevens uitsluitend continue functies beschreef,
- 13 "Dirichlet allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauss, weiss, was ein vollkommen strenger Beweis ist, sondern wir lernen es erst von ihm. Wenn Gauss sagt, er habe etwas bewiesen, so ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist ebensoviel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiss." (Jacobi aan A. von Humboldt, 21 december 1846).
- 14 Wel verkortte Newton de duur van het college van dertig tot vijftien minuten.
- 15 Zie bijvoorbeeld D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866: Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik* (Birkhäuser, Basel, 1996) en M. Monastyrski, *Riemann, Topology, and Physics* (Birkhäuser, Basel, 1987).
- 16 Zie O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampère to Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 2000) voor de bijdragen van Gauss, Weber en Riemann. Zo voerden zij als eersten hoge-precisie metingen uit aan elektrische en magnetische verschijnselen.
- 17 Zie Darrigol, op.cit.
- 18 Onafhankelijk van Riemann dacht ook Faraday in die richting.
- 19 Ook Lagrange (1736–1813) moet hier worden genoemd, vanwege zijn concept van de configuratieruimte in de klassieke mechanica.
- 20 Het is verbazingwekkend dat Riemann expliciet zocht naar een veldentheorie van de zwaartekracht én zijn metrische tensor als een door de fysica bepaalde veldgrootte zag, maar het verband tussen deze twee inzichten over het hoofd zag.
- 21 Een nog grotere abstractie is Riemanns idee van een ruimte van oplossingen van een stelsel vergelijkingen, dat onder de naam moduli-ruimte de basis vormt van de moderne algebraïsche meetkunde.
- 22 Cantor kwam tot zijn verzamelingenleer door zijn studie van Riemanns werk aan Fourierreeksen. Riemanns werk aan de complexe analyse stond aan de wieg van de topologie, en zijn definitie van de integraal was van grote invloed op het latere werk van Borel en Lebesgue.
- 23 Zie J. Dieudonné, *History of Functional Analysis* (North-Holland, Amsterdam, 1981), G. Birkhoff & E. Kreyszig, 'The establishment of functional analysis', *Historia Mathematica* 11, p. 258–321 (1984), J. Pier, *Mathematical Analysis During the 20th Century* (Oxford University Press, New York, 2001), and Jahnke, op.cit., voor de geschiedenis van de functionaalanalyse. Rond 1900, vijftig jaar na Riemann dus, ontstonden twee concurrerende scholen rond dit bloeiende vak. De een was in Parijs rond Jacques Hadamard (1865–1963), met Maurice Fréchet (1878–1973) als belangrijkste representant (in zijn proefschrift uit 1906 voerde Fréchet bijvoorbeeld het begrip metrische ruimte in, en ook daarna leverde hij nog vele bijdragen aan de functionaalanalyse en de topologie). De andere school in Göttingen stond onder leiding van Hilbert. Vermeldenswaardige leerlingen van Hilbert waren in deze context bijvoorbeeld Erhard Schmidt (1876–1959) en Hermann Weyl (1885–1955). Schmidt dacht als eerste op een meetkundige manier over wat wij nu Hilbertruimten noemen, en voerde begrippen als inproduct, projectie, en orthonormale basis in. Hij was de eerste die functies als vectoren in een oneindigdimensionale lineaire ruimte zag, en leverde in navolging van Hilbert ook belangrijke bijdragen aan de spectraaltheorie van compacte operatoren. Het proefschrift van Weyl uit 1908 bevatte vanuit modern perspectief de eerste behandeling van onbegrensde operatoren. Maar juist iemand die tot geen van deze scholen behoorde, en daardoor openstond voor de invloed van beide, zou de belangrijkste rol spelen in het rijpingsproces van de functionaalanalyse, namelijk de Hongaarse wiskundige Frigyes Riesz (1880–1956). Zijn belangrijkste bijdrage was misschien wel het begrip operator uit 1913, dat een cruciale abstractie was van de lineaire vergelijkingen en kwadratische vormen waar Hilbert en zijn leerlingen het over hadden, en een complementaire rol speelde ten opzichte van het begrip functionaal waar de Franse school vanuit ging. Verder noem ik hier de stellingen van Riesz-Fischer en Riesz-Fréchet, beide uit 1907, het begrip norm uit 1916, en de studie van abstracte compacte operatoren in 1918. Het schitterende boek *Functional Analysis* van Riesz en Sz. Nagy bevat het grootste deel van zijn bijdragen aan het gebied.
- 24 Zie I.E. Segal, 'Review of Noncommutative Geometry', *Bull. Amer. Math. Soc.* 33, P. 459–465 (1996). Segal schrijft de anecdote toe aan Norman Levinson. Uit diens biografie kan worden opgemaakt dat het hier om het academisch jaar 1934–35 gaat.
- 25 Twee geheel verschillende biografieën van Von Neumann zijn S.J. Heims, *John von Neumann and Norbert Wiener: From Mathematics to the Technologies of Life and Death* (MIT Press, Cambridge, Mass., 1980) en N. Macrae, *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More* (Pantheon Books, 1992).
- 26 Voor de geschiedenis van de kwantummechanica zie J. Mehra & H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vols. 1–6 (Springer-Verlag, New York, 1982–2001). Voor een kortere introductie zie K. Landsman, *Requiem voor Newton* (Contact, Amsterdam, 2005).
- 27 W. Moore, *Schrödinger: Life and Thought* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- 28 Birkhoff & Kreyszig, op.cit., p. 306–307.
- 29 Zie bijvoorbeeld F. van Deursen, *Maurits van Nassau: De Winnaar die Faalde* (Prometheus, Amsterdam, 2002) of J. Israel, *The Dutch Republic: Its Rise, Greatness and Fall 1477–1806* (Oxford University Press, Oxford, 1998).
- 30 Zie bijvoorbeeld J.A. den Boer, *Neurofilosofie: Hersenen – Bewustzijn – Vrije Wil* (Boom, Meppeel, 2003).
- 31 Zie de definitieve biografie van Newton: R.S. Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- 32 De eerste die hier m.i. duidelijk op wees in verband met het probleem van determinisme is J. Earman, *A Primer on Determinism* (Reidel, Dordrecht, 1986).
- 33 H. Marsman, 'De Grijsaard en de Jongeling', 1929.
- 34 Naast Westfall, op.cit., zie J.E. Force & R.H. Popkin, *Essays on the Context, Nature, and Influence of Isaac Newton's Theology* (Kluwer, Dordrecht, 1990) en J.E. Force & R.H. Popkin (eds.), *Newton and Religion: Context, Nature and Influence* (Kluwer, Dordrecht, 1999). Een groot deel van Newtons theologische manuscripten wacht nog op ontsluiting en bestudering.
- 35 Klassiekers op dit gebied zijn o.a. F.K. Ringer, *The Decline of the German Mandarins: The German Academic Community, 1890–1933* (Wesleyan University Press, New England, 1969), en, kort maar krachtig, H. Schelsky, *Einsamkeit und Freiheit: zur Sozialen Idee der deutschen Universität* (Verlag Achendorf, Münster, 1960). Modernere literatuur over de Humboldt universiteit is bijvoorbeeld *Wissenschaft als kulturelle Praxis, 1750–1900*, eds. H.E. Bödecker et al (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1999), *Romanticism and the Sciences*, eds. A. Cunningham & N. Jardine (Cambridge University Press, Cambridge, 1990), en A. Labrie, "Bildung" en Politiek, 1770–1830: De "Bildungsphilosophie" van Wilhelm von Humboldt Bezien in Haar Politieke en Sociale Context (Historisch Seminarium van de Universiteit van Amsterdam, 1986).
- 36 Een schrijnend voorbeeld is de fysicus Werner Heisenberg. Zie N.P. Landsman, 'Getting even with Heisenberg', *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* B33, p. 297–325 (2002).

Gerard Alberts

*Werkgroep Wetenschap en Samenleving
Radboud Universiteit Nijmegen
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
g.alberts@cw.nl*

Ger Koole

*Faculteit der Exacte Wetenschappen
Afdeling Wiskunde, Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam
koole@few.vu.nl*

Jaap Molenaar

*Faculteit Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Den Dolech 2, 5600 MB Eindhoven
j.molenaar1@tue.nl*

De overval Bij het Nederlands Forensisch Instituut

Waarheid met kans nul

Het Nederlands Forensisch Instituut herbergt vele wiskundigen en dat is eigenlijk niet zo vreemd. Bij recherche en justitie is men vertrouwd met waarheid en waarschijnlijkheid, met logica en kansberekening. Wat doen wiskundigen in dit instituut? Hoog tijd om eens een kijkje te nemen achter de schermen.

Het Nederlands Forensisch Instituut (NFI) is gehuisvest in een gloednieuw gebouw aan de rand van Den Haag. Bij binnenkomst blijken de resten van de recente receptie ter gelegenheid van de officiële opening door Hare Majesteit nog niet helemaal opgeruimd te zijn. Het instituut vormt een essentiële schakel in ons juridisch systeem. Het woord 'forensisch' in de benaming blijkt vaak vragen op te roepen. Het slaat op alles wat met het strafrecht te maken heeft en bij de Romeinen op het Forum werd afgehandeld.

Het NFI heeft drie kernactiviteiten (zie [1]):

- Onderzoek in verband met misdrijven
- Ontwikkeling van methoden ten behoeve van forensisch onderzoek
- Kennis- en expertisecentrum voor forensische zaken

De belangrijkste opdrachtgevers van het NFI zijn de regio-polities en het Openbaar Ministerie. Voor het Openbaar Ministerie zijn de NFI-bevindingen soms al van belang bij de vraag of men überhaupt een zaak zal starten.

Wat is waarheid?

Waarheidsvinding ligt de medewerkers van het Nederlands Forensisch Instituut in de mond bestorven. Tegelijk weten zij heel goed dat er geen absolute waarheden zijn. Zij belijden dan ook niet zozeer een achterhaald ideaal van objectiviteit. 'Waarheidsvinding' is hier primair een juridische notie en het feit dat ze dit begrip hanteren, brengt tot uitdrukking dat ook voor de exacte wetenschappers onder hen het juridisch discours de overkoepelende denkwijze is. Het NFI geniet veel vertrouwen. Sinds 1995 is het instituut internationaal geaccrediteerd voor het uitvoeren van bepaalde standaardonderzoeken. Voor niet-standaardonderzoek houdt men zich aan het protocol *Borging Infrequent Maatwerk*, waarin allerlei voorschriften staan, die moeten voorkomen dat de onderzoeker gedachtefouten maakt of dingen over het hoofd ziet.

Afgaan is nog geen exploderen

Ir. E. van Leuven, van huis uit chemisch technoloog, nu hoofd van de afdeling Fysische Technologie, heeft een militaire achtergrond en dat komt hem goed van pas. Zijn afdeling houdt zich onder andere bezig met wapen- en munitieonderzoek. Met grote kennis van zaken legt hij bijvoorbeeld uit wat het verschil is tussen het exploderen en het afgaan van een wapen. Als een wapen explodeert ben je er zelf geweest. Bij het afgaan van een wapen komen er uit het kruit na een ingewikkelde en razendsnelle reactie gassen vrij onder hoge druk die de kogel in beweging zetten. Ook vertelt hij hoe bijvoorbeeld schootsafstanden geschat kunnen worden. Bij ieder schot komen er deeltjes vrij die lood, antimoon, barium en nog wat meer typische metalen bevatten en die in de richting van het schot uitwaaien. Opmeten van de concentraties van deze stoffen levert gedetailleerde informatie over de kogelbaan. Die informatie kan soms verhalen in de trant van 'het pistool lag gewoon op tafel en ging plotseling vanzelf af' volledig onderuit halen. Rustig legt Van Leuven uit dat het een fluitje van een cent is een inschotopening



Ivo Alberink, Arnout Ruifrok, André Hoogstrate

van een uitschotopening te onderscheiden: rond een inschotopening wemelt het van de munitieresten. De kogel wordt als het ware schoongeveegd bij intreden.

Van Leuven geeft toe dat enige beroeps-deformatie hier moeilijk te vermijden is, maar benadrukt ook dat compassie wel degelijk een belangrijke factor blijft. Relativerend merkt hij op dat we zelf ook de neiging hebben ons eruit te kletsen als we bijvoorbeeld te hard gereden hebben in de bebouwde kom. Kortom, misdadigheid is in zekere zin een relatief begrip. De enorme betrokkenheid van de NFI-mensen bij hun werk verklaart hij uit de impact van het werk.

De conclusies van het NFI kunnen vergaan de consequenties hebben. Dat blijkt wel uit het verhaal dat het in een bepaalde zaak gelukt is om te achterhalen waar de vuilniszak vandaan kwam waarin een babylijkje gevonden was. Vanwege de eigenaardigheden van het fabricageproces heeft iedere rol vuilniszakken namelijk zijn eigen kenmerken in opdruk en structuur van het plastic. Er is zelfs na te gaan hoe ver twee individuele vuilniszakken van dezelfde rol van elkaar afzaten op de rol. De dader is op grond van dit NFI-onderzoek getraceerd en heeft bekend.

Ballistiek

Van Leuven's afdeling heeft een scala aan modellen ontwikkeld voor ballistische processen: afgeschoten projectielen, vallende voorwerpen en mensen, botsende auto's. In deze modellen zijn allerlei invloeden gedetail-

leerd meegenomen: niet alleen variaties in luchtdruk, zwaartekrachtsveld en luchtweerstand, maar ook bijvoorbeeld de aardrotatie en de ruwheid van een weg. De modellen bestaan veelal uit ingewikkelde differentiaalvergelijkingen die numeriek worden opgelost. Ze bevatten doorgaans zo'n tweehonderd parameters.

Een bekend probleem is het schatten van de snelheid van een auto uit gegevens als remspoor, de ernst van de deformatie, oftewel de kreukels, en de eindposities van de betrokken wagens. Het is al een gigantisch numeriek karwei om de snelheid ten tijde van de start van het remmen te schatten. Het is echter nodig daar ook een foutschatting bij te geven. Veel parameters zijn alleen bekend met een zekere foutenmarge en die onzekerheden werken allemaal door in de foutschatting voor het eindresultaat. Soms zijn er rekentijden van veertien dagen voor een geval nodig waarbij er dan twaalf computers tegelijk staan te rekenen. Van Leuven geeft toe dat er op numeriek gebied waarschijnlijk nog veel te verbeteren valt. Het NFI heeft echter geen pure numerici in dienst.

De modelberekeningen moeten gevalideerd worden. Vroeger deed men wel live proeven door oude auto's te laten botsen. Momenteel loopt er een project waarbij er continu op bepaalde kruispunten videocamera's draaien. Daarmee is al een redelijk bestand aan ongevallen geregistreerd en die gegevens zijn uiterst nuttig voor validatie van de computermodellen.

Oorafdrucken

Ivo Alberink is bekend van de oorafdrukken, waarover onlangs artikelen in dagbladen en tijdschriften verschenen. Hij studeerde en promoveerde in Nijmegen in de statistiek bij Martien van Zuilen en Frank den Hollander. "Na mijn promotie heb ik gewerkt bij een actuariael adviesbureau in pensioenverzekeringen. Het verzekeringsbedrijf is erg formeel. Daar zie je mensen strak in het pak, terwijl je hier rondloopt in spijkerbroek en t-shirtje. Ja, de werksfeer bevalt me beter hier." Alberink werkte tot voor kort bij het NFI als postdoc aan het EU-project *Forensic Ear Identification* en is nu in vaste dienst.

Oorafdrucken gevonden op ruiten en deuren waaraan inbrekers hebben geluisterd of er iemand binnen was, worden net als vingerafdrukken gepoederd en dan afgenomen met een black-gel-lifter: een rechthoekje dat je erop plakt en waar de poeder intrekt. Daar maak je een scan van, waarna je een digitale foto hebt. Het EU-project speelde in drie landen: Italië, Groot-Britannië en Nederland. "In totaal hebben in deze drie landen dertienhonderd donoren voor dit project afdrukken van hun oren ter beschikking gesteld: oordonoren. Per persoon hebben we drie linker- en drie rechter-oorafdrukken gemaakt. Wij deden vanuit het NFI mee voor het classificatieproces, het matchen van oren."

De oorherkenning in de praktijk gebeurt overigens tot nu toe niet bij het NFI maar bij de politie. Daar is Cor van der Lugt al twintig jaar met oren bezig en hij moet daarom regelmatig als expert voor de rechtbank optreden. Het is voor de rechter een probleem in te schatten hoe goed zo'n expert is. Er zijn geen getallen bekend om vast te stellen hoe uniek een bewijsstuk op dit gebied is. Alberink: "Dat is ook de reden dat we dit project zijn gestart. Van der Lugt zelf was overigens leider van ons project. Het NFI houdt zich vooral bezig met automatische herkenning van oorafdrukken: je krijgt een afdruk en vraagt 'Welke oren in ons orenbestand lijken hier het meest op'. Je stelt een hitlist op puur met behulp van image-processing technieken, niet zozeer op basis van anatomische expertise. Wat wij hebben gedaan is een systeem ontwikkelen voor het matchen van oorafdrukken. Het systeem berekent 'afstanden' tussen twee patronen.

Je wilt nu weten hoe goed het systeem werkt, of anders gezegd wat is de kans dat het systeem ten onrechte een bepaalde conclusie suggereert. Je krijgt ter verificatie twee prints voorgelegd. Wat is nu enerzijds de kans dat je ten aanzien van twee prints van hetzelfde oor zou besluiten dat ze van verschillende oren

zijn, anderzijds de kans dat je ten aanzien van twee prints van verschillende oren zou besluiten dat ze van hetzelfde oor zijn; wat zijn de *false acceptance* en de *false rejection rates*? In statistici-taal: gaat het om type-één- of type-tweefouten? Wij hebben met die 1300 oordooringen als proefdatabase een algoritme ontwikkeld dat een gelijkheidsmaat tussen twee oorafdrukken berekent.

Echter, als de plaats van de zogenaamde *Darwinian knob* in de rand van het oor overeenkomt op twee afdrukken, dan kan een antropoloog er waarschijnlijk veel meer over zeggen dan een patroonherkenner.”

Biometrie: goed dat er een statisticus bij is

Alberink: “Ik zit niet bij de statistici, maar bij de afdeling digitale technologie in een subgroep die video- en biometrie doet. In video-metrie krijg je bijvoorbeeld beelden van een bewakingscamera met de vraag hoe groot de mensen zijn die daarop te zien zijn. Het onderzoek is overigens ook een voorbeeld van biometrie. Ik zal vanaf nu meer aan concrete forensische zaken gaan werken. Dat ik wiskundige ben zit hem vooral daarin dat ik meer dan anderen gestructureerd bezig ben met dingen. Bij die lengtemeting merk je wel dat het goed is dat er een statisticus bij is. Ik heb in dat geval nog wel iets aan de methodiek kunnen verbeteren. Tot voor kort werkten men met een eenmalige reconstructie van een situatie en schatte dan de afmetingen op basis van het gemiddelde van zes metingen. Het werkt veel beter wanneer je dezelfde meting een aantal keren door een aantal personen laat doen en daar dan betrouwbaarheidsin-

tervallen bij berekent. Zo elementair is de bijdrage van de wiskundige soms.

Voor een deel is het werk ook een kwestie van communiceren. Als mensen al acht jaar dezelfde strategie volgen, dan overtuig je ze niet zo gemakkelijk dat een andere methode beter is. Je groeit niet meer als wiskundige, je groeit wel in je werk. Ik vind het, bijvoorbeeld, wel prettig om in groepsverband te werken. Dat daarbij het wiskundig niveau iets omlaag gaat is niet het einde van de wereld. Ik leer trouwens een hoop nieuwe dingen, bijvoorbeeld de techniek van driedimensionaal scannen. Ik blijf echt wel statisticus.”

Kwaliteitszorg

Jos Tóth is adviseur kwaliteitszorg. Hij heeft het instituut snel zien groeien omdat het aantal vragen almaar toenam. Er is daarom effectiviteit nodig om overbelasting van de medewerkers te voorkomen. Tóth is projectleider van een onderzoek naar het effect van de NFI-rapporten bij klanten. De rapporten worden geschreven door de forensisch deskundigen. Zij moeten in ‘gewone’ taal de methoden en conclusies van de technische onderzoeken weergeven. Tóth: “Er is een vermoeden dat de klanten onmiddellijk doorbladeren naar de conclusies. Echter, bij rechtbankzittingen doen de gebuikte methoden en redeneringen er echt wel toe. Daar moet dus toch veel zorg aan besteed worden”.

Annabel Bolck is gepromoveerd in de chemometrie bij Doornbosch in Groningen en richt zich in haar baan binnen het NFI op de statistiek. Samen met Tóth heeft Bolck een project uitgevoerd om het NFI op één lijn te



Annabel Bolck: “Eén getal is niet genoeg.”

krijgen in de rapportage over meetonzekerheden. “Meet men bijvoorbeeld een alcoholpromillage in het bloed, dan wordt een getal gerapporteerd, een enkel getal, maar eigenlijk hoort daar een betrouwbaarheidsinterval bij te worden aangegeven. Ook in milieuvraagstukken en drugskwesties is dat van evident belang. We doen hier immers aan waarheidsvinding. Eén getal is niet genoeg.” Het project was erop gericht binnen het NFI eenheid te bereiken in de rapportage van meetonzekerheden. In de praktijk is het ideaal nog niet bereikt. Nog steeds wordt soms één getal gerapporteerd. De reden is vaak dat men bang is dat de juristen het anders te ingewikkeld zullen vinden. Kan een dergelijke verbetering niet af-



Het nieuwe gebouw van het Nederlands Forensisch Instituut



Marjan Sjerps: "Juristen zijn gezegend met gezond verstand."

gedwongen worden? Moeten ze dus eigenlijk als stafafdeling nog op kruistocht binnen het eigen instituut? Bolck: "Wij zullen zo'n boodschap moeten blijven uitdragen. Maar het is ook belangrijk dat iedereen zich bij een strategie happy voelt. Afdwingen kan wel, maar als mensen iets doen omdat het moet, maken ze gemakkelijk fouten. Als ze het doen uit overtuiging, dan gaat het veel beter. Soms is één zaak genoeg om de boel om te turnen, kijk maar naar de afvalproblematiek."

Correct is nog niet duidelijk

Arnout Ruifrok is van huis uit bioloog maar voelt zich meer in het algemeen bèta-wetenschapper. In de loop van de jaren is hij naar de statistiek toe gegroeid: "Mijn tolerantie tegenover wiskundigen is bijna onbeperkt." In de richting van alfa-wetenschappers constateert hij een geweldig communicatieprobleem: "De taal is gewoon anders. Wij bedoelen iets concreets met onzekerheid. Spreek je echter met een jurist over onzekerheid, dan kom je in een andere wereld terecht." Dat is ook de ervaring van André Hoogstrate. Hij deed de vrije studierichting statistiek aan de Universiteit van Amsterdam en promoveerde in de econometrie in Maastricht. Beiden merken dat ze op een grens stuiten bij de buitenwereld wanneer ze geneigd zijn ergens een bewijs voor te geven: "Wij mogen graag uitleggen dat iets het geval is omdat een bepaalde stelling geldt, maar men is niet geïnteresseerd in theorie. Je moet directe raad geven: als je het nu zo aanpakt, deze grafiek opstelt, zo en zo de waarden berekent, dan sta ik als wiskundige ervoor in dat je een zinvol resultaat krijgt. Met

zo'n benadering is men allang blij." Aan de intern-wiskundige rationaliteit heeft de buitenwereld geen boodschap. "Je moet je eigen expertise in je bagage houden en manieren van verkopen zien te vinden."

Hoogstrate: "Mensen van andere disciplines hier in huis, schriftdeskundigen, chemici, et cetera, vragen om advies. Als jouw raad hen echter te ingewikkeld is of hun niet past, dan nemen ze de academische vrijheid om je advies gewoon te negeren. De hele discussie over waarschijnlijkheidsschalen is een kenmerkend voorbeeld. Er worden in de juridische praktijk schalen gebruikt die niet logisch zijn. Breng een jurist maar eens aan het verstand dat hij een andere schaal moet gebruiken die wél logisch juist is, maar heel moeilijk te begrijpen. Bijvoorbeeld, men is hier gewend te zeggen: 'De persoon op deze foto is zeer waarschijnlijk de verdachte.' Als je nu zou zeggen: 'Deze overeenkomsten zijn tienmaal waarschijnlijker als deze foto genomen is van persoon X, dan als hij genomen is van enig ander lid van de Nederlandse samenleving', dan was dat correct, maar niemand begrijpt je. Als je zegt: 'Het is 90% zeker dat het die persoon is', dan begrijpt iedereen je, maar dan is het eigenlijk weer niet correct."

Boevenvangers?

Hoogstrate werd eens in een zaak opgeroepen waarin de rechter toelichting wilde op de bewijskracht van het herkennen van oorafdrukken: "Daar heb ik toen een genuanceerd verhaal kunnen houden, voorzichtig verwijzend naar de wiskundige achtergrond. Ik was wel trots dat de rechter in zijn oordeel mij geheel heeft gevolgd."

En, werd de boef gevangen? "Nee, maar daar gaat het niet om. Wij evalueren alleen. Wij zijn niet de boevenvangers, we zijn het geweten van het juridisch apparaat. Wat wij doen is waarheidsvinding. Natuurlijk zoek je zoveel mogelijk feiten die je kunt evalueren, maar de evaluatie moet zo objectief mogelijk zijn. Tegenover de politieman die zich voor 99% zeker waant dat de persoon op de video zijn verdachte is, houden wij vol dat hij dat op de video echt niet kan zien."

Waarheid en waarschijnlijkheid

Waarheidsvinding blijkt voor een jurist echt iets anders te zijn dan voor een statisticus. Hoe verloopt de communicatie? Hoogstrate: "Je probeert te reconstrueren wat er gebeurd is. De rechter neemt de door ons gereconstrueerde feiten tezamen met nog veel andere informatie tot zich en komt op grond daarvan tot de conclusie dat er al of niet een strafbaar feit

is gepleegd en dat daarvoor al of niet iemand verantwoordelijk kan worden gehouden."

Het gaat hem om 'voldoende en overtuigend bewijs'. Ook als statistici het woord 'waarheid' in de mond nemen, zijn hun uitspraken maar betrekkelijk geldig, altijd binnen een zeker model. Niemand in Nederland weet beter dan de toegepast wiskundige dat de waarheid ook in wetenschappelijke uitspraken niet altijd een vast gegeven is."

Alberink: "Je probeert wel grenzen aan te geven. Het vaststellen van onzekerheden hoort ook tot de waarheidsvinding." Ruifrok: "Op de studiedag *De rekenende rechter* presenteerde iemand een Bayesiaans rekenmodel voor het meewegen van bewijsmateriaal (zie [2]). Daarop zeiden de juristen 'Neel'. Op dat moment moet de jurist immers een getalswaarde verbinden aan zijn gevoelswaarde. Maar als je dat niet expliciet doet, dan gebeurt die toekenning van zo'n getal impliciet. Dan is hij eigenlijk stilletjes toch aan het rekenen. En daar wil de jurist niet aan, dat hij rekt. Hij is doodsbang overgeleverd te zijn aan de technocraten. De rechterlijke macht heeft de taak waarschijnlijkheid om te zetten in een ja/nee-variabele: de schuld is overtuigend bewezen en er volgt strafoplegging, of niet bewezen en er volgt vrijspraak."

Statistiek

Kan de forensische statistiek zich spiegelen aan de rol van het vak in andere disciplines, zoals in de medische wetenschap, de farmacie, de biologie, of de natuurkunde? Hoogstrate: "De rol van de statistiek is hier bijzonder. Overal elders wordt de statistiek ingezet om algemene patronen te herkennen. Hier gaat het altijd om de *outlier*: iemand heeft mo-



Onlangs is het boek *Het onzekere bewijs* verschenen. Het bevat talloze voorbeelden van statistiek in het strafrecht [3]. Het is samengesteld door wiskundige Marjan Sjerps en rechter John Coster van Voorhout.

gelijk een moord begaan, hoe waarschijnlijk is dat. Wij hebben telkens één observatie. Het gaat erom een model te ontwikkelen dat je in staat stelt te beoordelen hoe uniek iets is. Het gaat altijd om de waarheid. Maar de waarheid treedt op met kans nul. Of je echt de waarheid met een statistisch sluitende redenering boven water kunt krijgen, is zeer de vraag. Wat je wel kunt doen, is kansen afwegen en vooral: duidelijk maken welk model en welke aannames je hanteert.”

Hoe kun je de brug slaan naar de buitenwereld, in dit geval de rechtszaal, waar redeneringen worden gevolgd die naar het oordeel van de statisticus logisch incorrect zijn? De zaak Lucy de B. is door de statistici van het NFI met bijzondere belangstelling gevolgd. Deze Haagse verpleegster was steeds in de buurt van een groot aantal raadselachtige sterfgevallen van patiënten. Een direct getuigenis van het geven van dodelijke injecties of zo was echter niet voorhanden. Er is in die rechtszaak een rapport — overigens niet vanuit het NFI — gepresenteerd waarin de kans wordt uitgerekend dat iemand bij zoveel raadselachtige gevallen tegelijk betrokken is. In vakkringen laaide er een hevige discussie op over deze aanpak (zie [4]). De rechter heeft zich bij zijn oordeel nauwelijks laten leiden door dit rapport, maar is onder andere afgegaan op dagboeken van Lucy zelf. Alberink: “Sommige dingen volg je met kromme tenen. Je ziet ook dat de discussie nog niet uitgewoed is tussen de Bayesiaanse benadering en de mensen die denken in termen van overschrijdingskansen. Het antwoord is eigenlijk educatie. Marjan Sjerps doet dat al vanuit het NFI, zij heeft regelmatig een klasje van rechters. Kennisdisseminatie is een van onze taken. Dat zou ook vanuit de universiteiten moeten gebeuren. Kansrekening moet eigenlijk opgenomen worden in het rechtencurriculum.”

Educatie

Marjan Sjerps studeerde af in statistiek en operations research in Nijmegen. Ze promoveerde in de mathematische biologie bij Hans Metz in Leiden waar zij zich heeft bezig gehouden met speltheorie. Ze heeft zich bij het NFI ontwikkeld tot statistisch expert. Sjerps vindt haar werk bij NFI ideaal. Ze zag zichzelf niet hoppen van post-doc plaats naar post-doc plaats: “Ik wilde een gezin en niet leven uit de koffer.” Dat is gelukt, want Marjan is een gelukkige moeder van drie kinderen. Ze waardeert vooral de veelzijdigheid van het werk en het contact met mensen. Toen ze zich ging specialiseren in de statistiek moest ze constateren dat de klassieke aanpak waarbij ne-



Juridisch adviseur Sijtze Wiersma: “De burger hoeft nergens bang voor te zijn.”

tjes hypothesen getoetst worden, in de NFI-praktijk niet vaak werkt. Het was voor haar een eye-opener dat de Bayesiaanse oftewel de *likelihood*-aanpak, waar ze eerst sceptisch tegenover stond, uitermate goed toepasbaar blijkt in haar werk. Ze draagt haar enthousiasme daarvoor met kundigheid en verve uit, zoals blijkt uit het feit dat ze winnares is van de *Chris Zaai Wisselbokaal* voor het best leesbare artikel in jaargang 2004 van het NAW ([2]).

Sjerps: “Juristen zijn gezegend met gezond verstand. Het is niet zo dat het mis gaat als ze geen statistiek toepassen, maar als ze meer gebruik maakten van wiskundig denken, werd het nog beter. Twee kenmerkende denkfouten zijn de *prosecutors fallacy* en de *vergis-sing van de advocaat*. Stel dat een bloedspoor wordt gevonden op de plaats van het misdrijf dat in DNA-patroon overeenkomt met dat van de verdachte. Als één op de miljoen mensen hetzelfde DNA-patroon heeft, zal de advocaat zeggen: van de zestien miljoen Nederlanders hebben er ongeveer zestien dit DNA-patroon, dus er is te weinig grond om mijn cliënt te veroordelen. De aanklager zal zeggen: er is een kans van 0,999999 dat het de verdachte was. Beiden maken een denkfout, die je helder in beeld brengt met conditionele kansen. Ik heb echt bij rechtszaken gezeten waar deze dingen gezegd werden.”

Hoe kun je dergelijke inzichten nu vertalen naar de praktijk van de rechtbank? “Wat goed werkt is een voorbeeld geven, een parallel trekken met een ander geval. Niet in formules praten, maar in concepten: dat het ertoe doet hoeveel mensen die bloedvlek ge-

maakt kunnen hebben, dat begrijpt iedereen wel. Concentreer je op de ideeën die achter de formules liggen. Als wiskundige ben je geneigd in formules te denken en die dan ook op te schrijven: ‘Kijk als dit daalt, stijgt dat’. Dat moet je dus niet doen! Ik heb één standaardzaak — met een concrete rechtszaak als voorbeeld aankomen, dat werkt altijd goed — waar die *prosecutors fallacy* ook echt op schrift is gesteld.”

Drama's achter koele cijfers

Juristen en statistici spreken verschillende talen. Als de rechters Sjerps klas gevolgd hebben, is dan hun denkwijze veranderd of hebben ze meer van de statistiek begrepen? “In die ene middag bereik ik natuurlijk geen van beide. Ik eindig met een sheet waarin ik casussen geef waarin je moet uitkijken en dan hoop ik dat ze zich herinneren dat er iets aan de hand is, wanneer ze een dergelijk geval tegenkomen in de praktijk. Kon ik ze een hele cursus geven, dan zou ik wel proberen ze een denkkader mee te geven om de statistische overwegingen mee te nemen in hun werk.”

Marjan Sjerps en John Coster van Voorhout hebben *Het onzekere bewijs* geredigeerd, een boek vol voorbeelden van statistiek in het strafrecht [3]. Coster van Voorhout was zo'n rechter in Marjans klasje en zocht na afloop tevergeefs naar Nederlandse literatuur op dit gebied. Het gevolg ligt nu in de boekhandel.

Wat is voor haar in dit boek het meest verbijsterende voorbeeld? “Het voorbeeld van de risicotaxatie bij TBS: het is een koele afweging tussen de strengheid van risicotaxatie en de maatschappelijke kosten. De kosten zijn dat er opnieuw mensen slachtoffer zullen worden van bijvoorbeeld verkrachting. De baten zijn dat er minder mensen in de cel hoeven. TBS is heel duur. Je weet heus wel dat het een illusie is te denken dat men alleen iemand vrijlaat die niet meer in de fout zal gaan. Toch contrasteert de koelheid van de kosten-baten-analyse, geïllustreerd met recidivecijfers, nogal met de zaken die wij juist hier te zien krijgen. Wij krijgen op het Nederlands Forensisch Instituut de onderbroekjes opgestuurd van de peuters van twee die verkracht zijn. Die kant zien wij hier ook.”

Databases: een typefoutje is zo gemaakt

Hoogstrate: “Lucy de B., Bianca K., dat zijn unieke gevallen. Daar is de wetenschap er nog niet eens uit onder welke aannames, in welke modellen, je conclusies kunt trekken en hoe je dat moet evalueren. Bij DNA-analyse, daarentegen, is statistiek volledig geaccepteerd. Bij het NFI worden meetapparaten afgesteld,

gekalibreerd en geëvalueerd. Hier wordt de toon gezet voor wat als statistisch zorgvuldig zal gelden. Het gaat dan niet zozeer om privacy; het NFI is niet de grote databasehouder; die problematiek wordt elders bewaakt. Een burger kan veroordeeld worden wanneer zijn betrokkenheid bij een misdaad is vastgesteld. Wat zijn daarin de zorgvuldigheidsmarges? In de afgelopen tien á vijftien jaar is hier een maatstaf gegroeid voor wat als dwingend bewijs geldt.”

Ruifrok: “Wat ik als verreweg het grootste risico zie, is dat met het groeien van de databases het risico op een *false hit*, een onterechte toewijzing, ook groeit. Het weerleggen van een false hit komt neer op een omkering van het huidige rechtsprincipe; daarin ben je onschuldig tot op het moment van een rechterlijke veroordeling. Daar komt bij dat in het geval van matching van DNA veel aandacht wordt besteed aan het vermijden van false hits, maar weinig aan de bijkomende alledaagse vergissingen. De kans dat een laborant twee buisjes verwisselt, is vele malen groter dan de kans op het optreden van het gezochte DNA-patroon. Die patronen zijn zo gedetailleerd, denk voor het toevallig optreden van gelijke patronen in termen van één op de miljard. Een typefout is daarentegen zo gemaakt.”

“Voor het koppelen van databestanden behoeven criminelen niet zo bevreesd te zijn. Dat is onpraktisch. Stel, er is een supermarkt overvallen en de politie krijgt alle nummers van mobieltjes die in de buurt waren. Dat zijn er al gauw tienduizend. Er is nooit mankracht genoeg om de eigenaars van al die mobieltjes na te gaan.”

Heeft de burger op het vlak van privacy iets te vrezen in verband met DNA-databases? Wiersma: “De burger hoeft nergens bang voor te zijn. Wij in het NFI en het hele juridisch apparaat gaan uiterst zorgvuldig om met gegevens. Hooguit moet je bezorgd zijn dat hier erfelijk materiaal bij elkaar ligt, waar veel meer mee kan, dan wij doen. In de commerciële sfeer, verzekeringen, werkgevers, wordt daar heel anders mee omgegaan. De burger heeft in die sfeer veel meer te vrezen.”

Orakelen

Juridisch adviseur Sijtze Wiersma doet de bedrijfsjuridische kant en begeleidt de NFI-deskundigen. Alle juridische zaken passeren zijn bureau, van contracten tot ambtsberichten voor de minister. Belangrijk zijn de adviezen met betrekking tot wetgeving, zoals recentelijk de privacy-wetgeving en de DNA-wetgeving. Daarnaast heeft hij een rol met betrekking tot het optreden van de deskundigen van het NFI.

“Onze deskundigen moeten in een forensische context opereren. Zij moeten niet alleen goed zijn in hun vak, ze moeten ook rapporteren voor de leek, in dit geval de jurist. De jurist begrijpt niet alle vakinhoudelijke overwegingen, maar zal wel de uitkomsten ervan gebruiken. Een deskundige hier moet zijn bevindingen op de goede manier kunnen vertellen, zowel in woord als in geschrift. De deskundige kan opgeroepen worden voor een zitting en moet dus beschikken over presentatievaardigheden.

We hebben daarom tegenwoordig een oefenrechtbank in huis waarin we via rollenspel de situatie bij een rechtbank kunnen oefenen. Onze medewerkers moeten hun boodschap op een relevante en eenvoudige manier kunnen vertellen. Het is niet zo dat wiskundigen en andere technici die presentatievaardigheden niet zouden hebben, maar ze denken vaak te technisch. Ze slaan bijvoorbeeld redeneerstappen over, omdat die voor hen vanzelf spreken. Wij noemen dat ‘orakelconclusies’ de conclusie kan wel juist zijn, maar de logica erachter ontgaat de leek. Daar praat ik vaak met onze deskundigen over. Je schrijft en spreekt voor de politie, voor juristen, voor de politiek: je moet je kunnen verplaatsen in de ander.”

Moet de deskundige zijn expertise dan verbergen? “Nee, je moet je onderzoek in de context vertellen. De statisticus maakt kansberekeningen. Je moet de officier van justitie duidelijk maken wat ‘kans’ betekent in een concrete situatie. In een bevolkingsonderzoek in een dorp is de populatie van potentiële verdachten meestal heel klein. Dan is de pakkans natuurlijk veel groter dan in het geval

de populatie een stad, of heel Nederland betreft. De jurist kwantificeert overigens ook: hij hanteert een soort bewijsboom en maakt inschattingen om uiteindelijk tot een normatief oordeel te komen. Ik vroeg onlangs een handschriftkundige wat hij bedoelde als hij zei ‘waarschijnlijk’. Het antwoord was 90%. Dat had ik nooit gedacht; in het dagelijks taalgebruik denk je eerder aan 60% of 70%. Die verschillen moet je de rechter uitleggen.

De rechter zal altijd volhouden dat hij de wet interpreteert in het bijzondere geval. De wiskundige zal zeggen dat hij vanuit axioma’s bewijst. Dat zijn toch wezenlijk verschillende redeneervormen.”

Zitvlees

Theo van den Bos, hoofd afdeling personeelszaken, vertelt dat het NFI een zeer platte organisatiestructuur heeft. “Er zijn hier ongeveer 350 mensen in dienst die technisch wetenschappelijk onderzoek doen. Een aantal daarvan heeft van de directie op grond van deskundigheid en ervaring tekenbevoegdheid gekregen, de zogenoemde deskundigheidstrekkers. Zij zijn meestal gepromoveerd en staan aan het hoofd van een groep van vijf á acht personen. Ze mogen zelfstandig adviseren in juridische zaken en de rapporten tekenen.

Los daarvan kan het voorkomen, dat de rechter een medewerker oproept als deskundige. Immers, de rechter kan iedere Nederlander als getuige oproepen. Het interne opleidingprogramma is erop gericht tekenbevoegd te worden. Managers worden in het NFI per traditie niet uit de eigen organisatie gerekruteerd, maar van buiten aangetrokken.”

Er is bijzonder weinig verloop onder het NFI personeel. Of zoals van Leuven het formuleert: “We hebben hier veel zitvlees”. Sjerps: “Het NFI is een soort klooster, je treedt in en blijft. Wat is het geheim van deze aantrekkingskracht? Tóth: “Iedereen heeft hier een gigantische drive.”

Referenties

- 1 <http://www.forensischinstituut.nl>
- 2 M. Sjerps, Forensische Statistiek, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2004, p. 108-111
- 3 M.J. Sjerps en J.A. Coster van Voorhout (editors) *Het onzekere bewijs, gebruik van statistiek en*

kansrekening in het strafrecht, Kluwer Deventer, in druk

- 4 <http://www.kennislink.nl/web/show?id=111865>

Kareljan Schoutens

Instituut voor Theoretische Fysica (ITFA)

Universiteit van Amsterdam

Valckenierstraat 65, 1018 XE Amsterdam

kjs@science.uva.nl



World Year of Physics 2005

Dure ijsjes, strijd met het oneindige en de kunst van het tellen

In 1905 verbaasde Einstein de wereld met drie doorbraken in de natuurkunde: de speciale relativiteitstheorie, de theorie van de Brownse beweging (diffusie) en, in de voetsporen van Planck, de quantumtheorie van licht aan de hand van het foto-elektrisch effect. Nu, honderd jaar later, wordt dit herdacht met een wereldwijd natuurkundejaar, het World Year of Physics 2005. Dit WYP2005 biedt een goede aanleiding eens stil te staan bij het samenspel van wiskunde en natuurkunde in recente tijden. Kareljan Schoutens is hoogleraar theoretische fysica aan de Universiteit van Amsterdam. Hij verricht onderzoek op het gebied van de quantumtheoretische beschrijving van gecondenseerde materie.

Een wiskundige en een natuurkundige lopen elkaar in het *NEMO* tegen het lijf en besluiten een ijsje te nemen. Zegt de wiskundige: 'Hé wat gek, we hebben allebei hetzelfde ijsje en moeten samen € 4,75 betalen.' Waarop de natuurkundige: 'Tja, ijsjes zijn duur in het *NEMO*.' Grapjes van dit soort (er zijn er wel meer) schetsen een karikatuur van de mate waarin wiskundigen en natuurkundigen verschillen in hun manier van denken. Voor de één is de wiskunde een doel, voor de ander een middel. Waar de wiskundige tevreden is als het formalisme staat en de verbanden bewezen zijn, wil de

natuurkundige getallen die zich laten vergelijken met waarnemingen van de natuur.

Toch is er sprake van een boeiend tweerichtingsverkeer tussen de beide wetenschappen. De wiskunde maakt deel uit van de taal waarin natuurkundigen wetten en wetmatigheden in de natuur formuleren. Wiskundige modellen geven een nauwkeurige beschrijving van wat er in de natuur gebeurt en wiskundige eenvoud en raffinement spelen vaak een rol in de speurtocht naar de fundamentele natuurwetten.

Verrassender, wellicht, is de 'tegenpresentie' van de natuurkunde: het blijkt vaak

dat, wanneer een stuk wiskunde 'tot leven komt' in een concrete context in de natuurkunde, dit aanleiding geeft tot een verrijking van de wiskunde zelf. Deze boeiende thematiek gaat ver terug in de geschiedenis (op zijn minst tot Archimedes) en er is veel over gezegd en geschreven. Wigner repte over *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* [1]; een titel die door Dijkgraaf later luchtigjes werd omgedraaid [2].

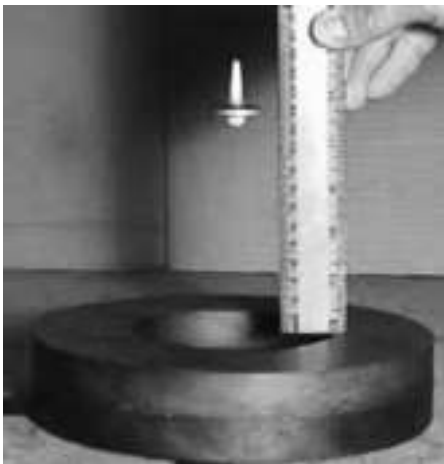
Het standaardmodel voor de wisselwerking tussen wis- en natuurkunde werkt ongeveer als volgt. In de natuurkunde wordt een categorie natuurverschijnselen gevangen in een aantal fundamentele vergelijkingen (veelal: differentiaalvergelijkingen). De wiskunde biedt vervolgens het gereedschap waarmee de stap van natuurwet naar concreet verschijnsel gemaakt kan worden. Waar die wiskunde nog onvolledig is wordt, naar aanleiding van de concrete toepassing, een aantal puntjes op de i gezet.

And there was light

Een voorbeeld: Maxwells theorie voor elektromagnetisme laat zich samenvatten in vier gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen, die met gemak passen op een T-shirt (en dan liefst met de tekst: God said: ‘...’ and there was light!). De oplossingen van deze vergelijkingen beschrijven elektriciteit, magnetisme en licht, maar ook radiogolven, microgolven en Röntgenstraling, kortom: de halve wereld. In deze situatie leggen ‘harde’ stellingen uit de wiskunde beperkingen op aan wat er in de natuurkunde kan gebeuren. Het is bijvoorbeeld onmogelijk (stelling van Wing, 1984) een zodanige configuratie van stromen en magneten te hebben dat ergens in de ruimte het magnetisch veld een lokaal maximum heeft. Dit betekent dat het niet mogelijk is een ‘magnetische val’ te bouwen voor atomen met een positief dipoolmoment, die een kracht ondervinden in de richting van een toenemend magneetveld. (Een minimum kan wél; magnetische vallen voor atomen met een negatief dipoolmoment zijn daadwerkelijk gebouwd en gebruikt in de realisatie, in 1995, van een Bose-Einstein condensaat van ultrakoude atomen.)

Dat het niet altijd gemakkelijk is wiskundige stellingen juist toe te passen bewijst de geschiedenis van magnetische levitatie. Op grond van de stelling van Earnshaw (1842) werd het lange tijd voor onmogelijk gehouden een magneetje vrij te laten zweven in een magnetisch veld.

Pas in 1983 zag uitvinder Harrigan in dat voor een *roterend* magneetje deze stelling omzeild kan worden; hij bouwde vervolgens een prototype van wat nu bekend staat als het ‘Levitron’. De aanhoudende verwarring over de werking van dit vernuftige apparaat is uiteindelijk weggenomen door Berry [3].



Figuur 1 Het Levitron: levitatie van een draaiend magneetje in een magnetisch veld

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	-1	1	3	1	-1	1	3	1	-1	1	3	1	-1	1	3
3	1	1	4	1	1	4	1	1	4	1	1	4	1	1	4	1
4	1	3	1	7	1	3	1	7	1	3	1	7	1	3	1	7
5	1	1	1	1	-9	1	1	1	1	11	1	1	1	1	-9	1
6	1	-1	4	3	1	14	1	3	4	-1	1	18	1	-1	4	3
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-27	1	1
8	1	3	1	7	1	3	1	7	1	43	1	7	1	3	1	7
9	1	1	4	1	1	4	1	1	40	1	1	4	1	1	4	1
10	1	-1	1	3	11	-1	1	43	1	9	1	3	1	69	11	43

Tabel 1 Witten index W_G voor een vierkant rooster met $M \leq 10$, $N \leq 16$. Een aantal vermoedens dringt zich op, bijvoorbeeld dat $W_G = 1$ zodra M en N geen gemeenschappelijke deler hebben.

Het natuurkundige halfduister

Er zijn veel meer voorbeelden te geven waarin het samenspel tussen wis- en natuurkunde in grote lijnen verloopt volgens het geschetste standaardmodel, maar vaak ook gaat het heel anders. Veel fysische systemen zijn zodanig complex dat directe berekeningen – ook numeriek – totaal onmogelijk zijn. Het is dan nodig benaderingen en effectieve beschrijvingen te ontwikkelen, die duidelijk maken wat het fysische gedrag is en die het mogelijk maken fysische grootheden te berekenen. In andere gevallen is de formulering van de fundamentele fysische theorie wiskundig gezien problematisch of onvolledig en is het zaak te roeien met de riemen die men heeft. Het interessante is dat juist in dit soort gevallen, waarin natuurkundigen in het halfduister proberen hun weg te vinden, paden worden ingeslagen die ook voor de wiskunde leiden tot vernieuwing.

Divergentie

Deze zaken spelen in hun volle omvang in moderne theorieën waarin quantummechanica wordt toegepast in de deeltjesfysica (quantumveldentheorie en snaartheorie) en in de gecondenseerde materie (quantum veel-deeltjestheorie). Op zichzelf is de formulering van quantummechanica vanuit de wiskunde niet problematisch. Er is een precies formalisme, waarin toestanden van een systeem corresponderen met vectoren in een lineaire ruimte en waarin waarneembare grootheden worden voorgesteld door lineaire operatoren. De eigenwaarden bepalen de mogelijke uitkomsten van een meting. De problemen ontstaan wanneer, zoals in een quantumveldentheorie, de quantumtheorie betrekking heeft op continue velden (zoals een stralingsveld), zodat

het aantal vrijheidsgraden formeel oneindig groot is.

Vanwege de onzekerheidsrelatie van Heisenberg geeft elke vrijheidsgraad een positieve ‘nulpuntsenergie’ en het optellen van al die bijdragen leidt onherroepelijk tot divergenties. Anders gezegd: je probeert een fysische grootheid uit te rekenen, zoals de totale energie van het systeem, en je vindt oneindig.

Laten we om dit concreet te maken kijken naar de quantumtheorie voor een eenvoudig continu systeem: een trillende snaar. De hierboven genoemde vrijheidsgraden zijn in de dit geval de trillingswijzen (boventonen) van de snaar, die we kunnen aftellen met label n . De nulpuntsenergie van de n -de boventoon is evenredig met n en we vinden dus al meteen een totale energie evenredig met

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

De manier om met deze divergentie om te gaan is: we vervangen de som door $\dots - \frac{1}{12}$. Deze mededeling is dubbel verrassend: allereerst gooien we een oneindig grote bijdrage weg en vervolgens laten we een welbepaald ‘eindig deel’ staan! Getaltheoretici hebben wellicht al herkend dat dit eindige deel overeenkomt met een ‘ ζ -functie voorschrift’: de analytische functie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

heeft waarde $-\frac{1}{12}$ als $s \rightarrow -1$. In het natuurkundige verhaal is door andere argumenten bevestigd dat er sprake is van een goed gedefinieerde, eindige energie en dat $-\frac{1}{12}$ de juiste waarde is. De conclusie is dan ook dat ‘quantum snaartheorie’ in principe consistent geformuleerd kan worden!

De theorie van ‘renormalisatie’, het consistent wegpoetsen van oneindigheden, vormt het hart van de moderne quantumveldentheorie. Pas nadat ’t Hooft en Veltman hadden laten zien hoe de theorie van elektrozwakke interacties gerenormaliseerd kan worden, kon die theorie gebruikt worden om fysische voorspellingen te doen. Ondanks de grote successen die geboekt zijn blijft de wiskundige formulering van quantumveldentheorie en, meer recent, snaartheorie, een zorgenkindje, onder andere omdat het in veel gevallen nodig is te werken met een storingsreeks die niet rigoureus onder controle is. Toch is dit bij uitstek een gebied waar fysische methoden, zoals het gebruik van de padintegraal, grote- N expansies, supersymmetrie, niet-commutatieve meetkunde, et cetera, tot belangrijke resultaten in de wiskunde hebben geleid.

Quantumtheorie in één dimensie

Bij de behandeling van quantum veel-deeltjessystemen ligt de wiskundige problematiek ietwat anders. Hier gaat het om quantumsystemen met een groot aantal deeltjes (bijvoorbeeld elektronen in een vaste stof), waarvoor de fundamentele vergelijkingen volledig bekend zijn. (Meestal zijn dat gekoppelde Schrödingervergelijkingen voor elk van de deeltjes.) Het probleem is dan om relevante meetbare grootheden (elektrische weerstand, soortelijke warmte, etc.) te berekenen. In zijn algemeenheid is dit probleem volstrekt ondoenlijk en zelfs als allerhande vereenvoudigingen worden gemaakt is het bijzonder lastig zinnige resultaten uit de theorie te distilleren. Dit vakgebied kent een geschiedenis van een kleine honderd jaar, maar nog steeds staat een groot aantal problemen wagenwijd open, en nog steeds worden fysici bij tijd en wijlen verrast door verschijnselen die ‘niemand had zien komen’, zoals het fractionele quantum Halleffect (1982) en supergeleiding bij ‘hoge’ temperatuur (1986).

Dit wil niet zeggen dat er geen resultaten geboekt zijn. Fysici hebben geleerd om met een combinatie van benaderende methodes, computerkracht en een gezonde dosis fysische intuïtie vorderingen te boeken en er is een tamelijk verfijnd, maar onvolledig, begrip van het fysische gedrag dat in allerhande situaties verwacht wordt. Bovendien zijn er exacte resultaten. Al in 1931 formuleerde Bethe, die eerder dit jaar overleed, een methode, nu bekend als de *Bethe Ansatz*, waarmee specifieke quantummodellen in één ruimtelijke dimensie (zogenaamde quantumketens en quantumdraden) kunnen worden opgelost

[4]. Er is een beperkt aantal exacte resultaten in hogere dimensies.

Het werk aan quantum veel-deeltjessystemen heeft een groot aantal belangwekkende één-tweetjes met de wiskunde opgeleverd. De Bethe Ansatz is nauw verbonden met een veelheid aan algebraïsche structuren, quantumgroepen met name. Meer in het algemeen geeft quantumfysica in één dimensie aanleiding tot uitbundige symmetriestructuren, zoals oneindig dimensionale affine (Kac-Moody) Lie-algebras. Een specifieke categorie, die van de zogenaamde W -algebras, is door fysici ontwikkeld en pas later door wiskundigen bestudeerd. Al met al behoort de theorie voor oplosbare roostermodellen en veldentheorieën in één ruimtelijke dimensie tot de best ontwikkelde wiskundige formalismen in de theoretische natuurkunde. Het feit dat resultaten van deze theorieën van direct belang zijn voor een groot aantal experimentele systemen, zoals spin-ketens en nanobuisjes, houdt dit veld springlevend!

Mooie identiteiten

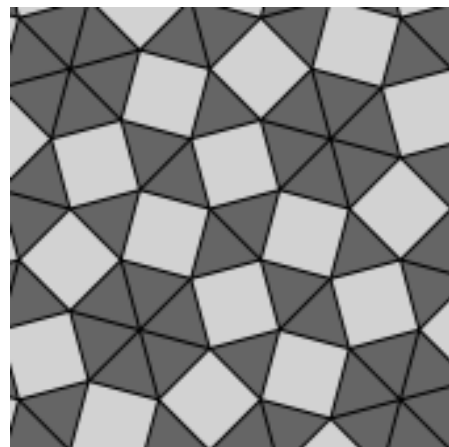
Bij de analyse van een fysisch systeem is er vaak meer dan één manier om tegen de dingen aan te kijken. Doorvertaald naar de wiskundige beschrijving kan dit leiden tot verrassende resultaten. Als voorbeeld de volgende identiteit, in 1894 voor het eerste bewezen door Rogers en soms aangeduid als één van de ‘Rogers-Ramanujan identiteiten’,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} [q^{n(10n+1)} - q^{(5n+2)(2n+1)}]}{(q)_{\infty}},$$

waarin

$$(q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^k).$$

Bijna honderd jaar na dato kwam deze identiteit te voorschijn in de context van een specifieke quantumveldentheorie. Kort gezegd is de betreffende q -serie daar een voortbrengende functie voor het spectrum, dat wil zeggen de som over alle toestanden van q^{E_i} , met E_i de energie van de toestand met label i . De identiteit ontstaat nu door het spectrum op twee manieren te interpreteren; in het jargon is er sprake van een ‘fermionische’ formulering (het linkerlid) en een ‘bosonische’ formulering (het rechterlid). Het aardige is dat, toen dit verband eenmaal duidelijk was geworden, een groot aantal vergelijkbare identiteiten kon worden opgesteld, simpelweg door



Figuur 2 Voor een vierkant-driehoekbetegeling is een twaalfvoudige rotatiesymmetrie mogelijk (figuur: B. Nienhuis)

de redenering te herhalen voor andere maar gelijksoortige veldentheorieën [5].

Combinatoriek en supersymmetrie

Aan het einde van dit stukje een paar woorden over de meest elementaire vorm van wiskunde: combinatoriek oftewel de kunst van het tellen. Bij de behandeling van een (klassiek of quantummechanisch) veel-deeltjesprobleem in de natuurkunde is een eerste stap vaak het aftellen van de mogelijke toestanden. Zodra deeltjes de ruimte om zich heen voor een deel afsluiten voor andere deeltjes wordt het tellen van alle mogelijke configuraties een ingewikkelde zaak, met interessante combinatorische aspecten.

Een klassiek voorbeeld is dat van *dimeren* op een graaf G met n punten. We schrijven $N_G(r)$ voor het aantal manieren om r dimere te plaatsen op G (anders gezegd: om r lijnen van G te markeren zonder dat twee gemarkeerde lijnen in één punt bij elkaar mogen komen). De getallen $N_G(r)$ worden gecombineerd in het zogenaamde matching polynoom

$$P_G(x) = \sum_r (-1)^r N_G(r) x^{n-2r}.$$

In de natuurkunde is men vooral geïnteresseerd in gevallen waarin G een rooster is in $D = 1, 2$ of 3 dimensies. Zodra $D > 1$ zijn de berekeningen uiterst lastig. Een klassiek resultaat is dat van Kasteleyn uit 1962 [6] die voor een vierkant rooster het aantal dimeeroverdekkingen (met de hoogst mogelijke waarde van r) exact berekende. Hij gebruikte hiervoor een ‘fysische’ methode, waarin fermionen (deeltjes die voldoen aan het Pauli uitsluitingsprincipe) een belangrijke rol spelen. Een iets algemenere grootheid is

$$Q_G(x) = \sum_r (-1)^r M_G(r) x^{n-r},$$

waarin $M_G(r)$ het aantal manieren is om r punten van G te markeren zonder dat twee gemarkeerde punten door een lijn van G verbonden worden. De waarde voor $x = 1$,

$$W_G = Q_G(1) = \sum_r (-1)^r M_G(r),$$

heeft een interpretatie als Witten index voor een supersymmetrische quantumtheorie. Deze theorie beschrijft fermionen die op G kunnen bewegen en elkaar daarbij afstoten. Numeriek werk [7] heeft geleid tot een aantal opmerkelijke vermoedens voor de Witten index op een vierkant rooster van M bij N roosterpunten met periodieke randvoorwaarden, (zie tabel 1). Van een wiskundig bewijs ontbreekt

elk spoor.

Andere interessante telproblemen duiken op in de analyse van wanordelijke betegelingen. Voor welbepaalde sets van tegels (bijvoorbeeld een vierkant en een gelijkzijdige driehoek met gelijke zijde) zijn er velerlei manieren om een deel van het vlak te betegelen. Het is dan interessant het aantal manieren te berekenen en zo de 'entropie' (per oppervlak) van de betegelingen te bepalen. In een aantal gevallen (zoals dat van vierkant/driehoek) is het mogelijk gebleken deze berekening exact te doen door gebruik te maken van de *Bethe Ansatz* [8]. Deze berekeningen zijn nauw gerelateerd aan de analyse van quasi-kristallen

die met dezelfde tegels gevormd kunnen worden. Voor de vierkant/driehoektegels is hierbij een twaalfvoudige rotatiesymmetrie mogelijk, een symmetrie die in de klassieke kristallografie verboden is!

De moraal

De voorbeelden die hier de revue passeerden zijn enigszins willekeurig gekozen en inwisselbaar voor andere. De grote lijn van het stuk is dat echter niet. Zonder de wiskunde valt de natuurkunde stil en omgekeerd biedt de concrete context van natuurkundige systemen de wiskunde steeds weer nieuwe aanknopingspunten. *An eternal golden braid.* 

Referenties

- 1 E.P. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, in Comm. in Pure and Applied Math., vol. 13, No. I (Februari 1960).
- 2 R.H. Dijkgraaf, *De onredelijke effectiviteit van de fysica in de moderne wiskunde*, Ned. Tijd. v. Nat. 62/11 (1996) 255.
- 3 M.V. Berry, *The Levitron: an adiabatic trap for spins*, Proc. Roy. Soc. Lond. 452 (1996) 1207.
- 4 H. Bethe, *Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Phys. 71 (1931) 205.
- 5 R. Kedem, B.M. McCoy and E. Melzer, *The sums of Rogers, Schur and Ramanujan and the Bose-Fermi correspondence in 1 + 1-dimensional quantum field theory*, in Recent Progress in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, ed. P. Bouwknegt *et al.*, World Scientific, (Singapore 1995) 195.
- 6 P.W. Kasteleyn, *Dimer Statistics and Phase Transitions*, Jour. Math. Phys. 4 (1963) 287.
- 7 P. Fendley, K. Schoutens and H. van Eerten, *Hard squares at negative activity*, Jour. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 315.
- 8 zie bijvoorbeeld: J. de Gier and B. Nienhuis, *Integrability of the square-triangle random tiling model*, Phys. Rev. E 55 (1997) 3926; *ibid.*, *The exact solution of an octagonal rectangle-triangle random tiling*, Jour. Stat. Phys. 87 (1997) 415.

Fred W. Steutel

Faculteit Wiskunde en Informatica

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

f.w.steutel@tue.nl

Samenleving

Uit de schaduw vandaan

Het komt wel vaker voor: een uitzonderlijk begaafde vrouw die getrouwd is met een nog grotere (mannelijke) beroemdheid. Dikwijls werd het dergelijke vrouwen moeilijk tot onmogelijk gemaakt om hun talent te ontplooiën. In de kunst is het menigeen slecht vergaan: bijvoorbeeld Camille Claudel, beeldhouwer en minnares van Rodin, of Alma Mahler, vrouw van Gustav Mahler. Het lijkt dat Alexandra Bellow, vrouw van schrijver Saul Bellow, het er beter heeft afgebracht. Fred Steutel, kansrekenaar aan de Technische Universiteit Eindhoven vertelt over haar leven.

Saul Bellow (1915–2005), in 1976 winnaar van de Nobelprijs voor literatuur, was geen wiskundige; toch levert zoeken bij MathSciNet met auteursnaam Bellow een lijst van 51 artikelen: Alexandra Bellow, vierde en voorlaatste echtgenote van Saul. Zij speelt een belangrijke rol in diens boeken *The Dean's December* en *To Jerusalem and Back*.

Alexandra Bellow (1935), in Boekarest geboren als Alexandra Bagdasar, is onder kansrekenaars als Alexandra Ionescu Tulcea mogelijk bekender dan Saul. Zij was echtgenote van Cassius Ionescu Tulcea, bekend door een naar hem genoemde stelling over Markovprocessen.

Het echtpaar, dat tien gezamenlijke artikelen heeft gepubliceerd, emigreert in 1957 naar de VS. Alexandra heeft dan een mastergraad uit Boekarest en haalt twee jaar later een PhD bij de beroemde Shizuo Kakutani, het begin

van een carrière in de ergodentheorie.

In 1975, gescheiden van Cassius en full professor aan de Northwestern University, trouwt Alexandra met Saul Bellow. Zij publiceert daarna, tot verwarring van wiskundigen, onder de naam Alexandra Bellow. Ik herinner me deze verwarring als deelnemer aan een colloquium in Amsterdam over ergodentheorie.

In 2001 houdt ze in Chicago een voordracht in het Spaans over haar leven: *Una vida Matemática*, waar ze curieuze details over haar leven vertelt. Bijvoorbeeld dat ze als zevenmaands kind bijna, maar net niet, in een trein werd geboren, waardoor ze een pas misliep, op vertoon waarvan ze haar leven lang in heel Europa gratis met de trein had kunnen reizen.

Over het gebruik van de naam Bellow citeert ze Saul, die desgevraagd zegt dat ze een munt hadden opgegooid —“Alexandra was immers kansrekenaar”— om uit te maken welke achternaam ze zou gebruiken, en dat het lot op hem gevallen was. Over het publiceren onder de naam Bellow zegt ze: “fue un error”. Saul Bellow, die in weerwil van zijn vijf huwelijken enigszins misogyn was, had de gewoonte om intieme details van vrienden en kennissen, inclusief echtgenotes in zijn boeken te gebruiken. Niet iedereen was daarvan gediend, ook Alexandra niet, die hem eens (bijna?) het huis heeft uitgegooid.

Saul is een vijfde keer getrouwd, niet weer met een wiskundige. Alexandra een derde keer, met de beroemde wiskundige Albertro

Calderón, met wie zij twee artikelen publiceerde: Bellow(!) en Calderón. Ze schrijft over deze periode dat haar leven meer lijkt op een fractal dan op een C^∞ functie.

De geschiedenis van Alexandra Ionescu Tulcea-Bellow-Calderón, née Bagdasar doet, eigenlijk ten onrechte, denken aan die van Alma Mahler-Gropius-Werfel, née Schindler (1879–1964), over wie Tom Lehrer zingt, “Which of your magical wands got you Gustav and Walter and Franz?”. Anderzijds had toch ook Alma meer talenten dan alleen de liefde. Waar Alexandra een zeer gerespecteerd wiskundige is geworden en gebleven, had Alma, met een paar mannen minder – onder meer Kokoschka en Klimt hoorden tot haar veroveringen, een respectabel componiste kunnen zijn: haar werk wordt nog steeds af en toe uitgevoerd. Toch zal zij voornamelijk bekend blijven als echtgenote en minnares van beroemde mannen.

Alexandra, née Bagdasar, zal, ondanks haar huwelijken met bekende mannen, vooral bekend blijven als een vooraanstaande vrouwelijke wiskundige, die een belangrijke rol heeft gespeeld bij de ontwikkeling van de ergodentheorie. Waardering voor haar werk blijkt uit een Fairchild Distinguished Scholarship, de Humboldtprijs in 1987 en het houden van de Emmy Noether Lecture in 1991. Denk dus voortaan bij het horen van de naam Bellow niet alleen aan *Herzog* en *The Dangling Man*, maar ook aan ergodentheorie en convergentie met kans één. 

Literatuur

- 1 Bellow, A., ‘An Lp inequality with application to ergodic theory’, *Houston J. Math.* 1 (1975), 1, p. 153–159.
- 2 Bellow, A., H. Furstenberg, ‘An application of number theory to ergodic theory and the con-

struction of uniquely ergodic models’, in: ‘A collection of invited papers on ergodic theory’, *Israel J. Math.* 33 (1979), 3–4, p. 231–240 (1980).

- 3 Bellow, A., A.P. Calderón, U. Krengel, ‘Hopf’s ergodic theorem for particles with different veloc-

ities and the “strong sweeping out property”’, *Canad. Math. Bull.* 38 (1995), 1, p. 11–15.

Jef L. Teugels

EURANDOM

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

jef.teugels@wis.kuleuven.be

Overzichtsartikel

Risicobeheer door herverzekeren

Grote natuurrampen, zoals orkanen en overstromingen, vinden zelden plaats. Toch wil het publiek zich hier graag tegen verzekeren. De grote verzekeringsmaatschappijen kunnen dergelijke risico's niet dragen: zij brengen hun verzekering weer onder bij andere partijen, tegen vaak weer andere voorwaarden. Dergelijke ketens van verzekeringen hebben een rijke wetenschappelijke structuur. Jef Teugels is emeritus hoogleraar in de kansberekening en statistiek aan de Katholieke Universiteit Leuven. Hij heeft baanbrekend onderzoek verricht op tal van gebieden, waaronder risictheorie en data-analyse, met toepassingen in de verzekeringswereld en de milieuwetenschap.

Verzekeringsmaatschappijen zijn in principe niet geneigd zeer grote risico's te lopen, tenzij de cliënt daarvoor een behoorlijke premie op tafel legt. Een alternatieve manier om aan risicobeheer te doen bestaat erin dat de maatschappij zichzelf als verzekeringsnemer gaat beschouwen. Ze zal dan tegen een negotieerbare premie een polis afsluiten bij een *herverzekeringsmaatschappij*, die hierdoor zelf een deel van het verzekerde risico gaat dragen.

Herverzekeren is één van de meest courante vormen van risicodeling, waarbij beide partners verschillende redenen zullen hebben om een contract af te sluiten. Welke vorm een herverzekeringscontract aanneemt is ook afhankelijk van een hele reeks andere factoren die verderop aan bod komen.

Wie uitkijkt naar een herverzekeringscontract heeft als hoofdbedoeling zich in te dekken tegen onverwachte of grote schadevorderingen. Voor zeer waardevolle constructies zoals vliegtuigen, olietankers of kantoorgebouwen worden ook de risico's van de herverzekeraar verder herverzekerd bij een andere maatschap-

pij. Daardoor ontstaan verzekeringsketens van verzekeringsnemers, die zich elk voor een gedeelte van het risico borg stellen, maar zich tegelijkertijd indekken bij een volgende maatschappij in de keten.

Zware verliezen

Zoals de beroemde Karl Borch het formuleerde in [5] moet een verzekeringsmaatschappij door herverzekering trachten de kans op zware verliezen zo klein mogelijk maken, eventueel zelfs uitsluiten om te vermijden dat de maatschappij ernstige schade zou lijden. Zo behoudt de maatschappij haar solvabiliteit en geloofwaardigheid op de verzekeringsmarkt.

Voorbeelden van potentiële zware verliezen zijn gemakkelijk te geven. Hier zijn er enkele.

Het optreden van uitzonderlijk grote schadevorderingen

Hierbij denken we aan ernstige ongevallen zoals de vliegcrash van de Bijlmermeer of de ontploffing van de vuurwerffabriek in Enschede. Ook accidenten in nucleaire installaties kunnen aanleiding

geven tot enorme vorderingen. Vergissingen in een medische behandeling leiden vaak tot uitzonderlijk zware gerechtskosten met bijbehorende schadeloosstellingen. Denken we verder aan milieurampen zoals veroorzaakt door de *Exxon Valdez* of de *Amoco-Cadiz* dan kunnen we gemakkelijk inzien dat één enkele verzekeraar onmogelijk een dergelijke ramp alleen overleeft. Veelal spreken we in zulke omstandigheden over *katastrofen*, al is een steekhoudende definitie van dit begrip niet eenvoudig te geven.

Het samenvallen van een ongewoon groot aantal schadevorderingen

Soms samengebracht in een *schadecluster*. Door het grote aantal schadevorderingen dienen de individuele eisen niet exuberant te zijn. Voorbeelden hiervan zijn bosbranden die verantwoordelijk kunnen zijn voor een hele reeks min of meer belangrijke vorderingen. Maar ook windstormen, orkanen, tornado's en aardbevingen kunnen aanleiding geven tot een explosie van schade-eisen. Samengevoegd vormen dergelijke individuele eisen vaak een catastrofale ramp die alleen maar door meerdere verzekeraars samen gedragen kan worden, veelal in samenspraak met een of ander rampenfonds.

Systematische ontwikkelingen in schadevorderingen

Bijvoorbeeld kan één gerechtelijke uitspraak over een schade-eis door een recht-

bank een waterval van analoge gerechtszaken tot gevolg hebben. Maar ook de aanval op het World Trade Center heeft een golf van (her-)verzekeringsmaatregelen tot gevolg gehad. Om opgewassen te zijn tegen dergelijke verrassingen kan het nemen van een herverzekering een mogelijke oplossing bieden.

Onverwachte schommelingen van inkomsten langs premies

Dergelijke fluctuaties kunnen gemakkelijk aanleiding geven tot het onderschrijven van een herverzekeringscontract. In sommige periodes moeten verzekeraars opboksen tegen inflatie, terwijl ook het opstellen en negotiëren van contracten tot hoge bedragen aanleiding kan geven. We mogen ook niet uit het oog verliezen dat alleen de allereerste verzekeraar bij de cliënt kan gaan aankloppen voor de betaling van de premie. Hiervan moet hij dan nog een behoorlijk groot deel afstaan aan zijn eigen herverzekeraar. Naderhand premies herzien is altijd een erg onpopulaire maatregel.

Uitholling van levenverzekeringen

Recent zijn zelfs de vroeger zo stabiele verzekeringen in een versneld herverzekeringsvaarwater terecht gekomen. Eerder betaalde premies hebben door inflatie waarde verloren. Ook is er het niet onbelangrijke feit dat op dit ogenblik de gemiddelde levensverwachting met circa één jaar stijgt per zes jaar. Hierdoor moeten vroegere prognoses zwaar worden bijgesteld.

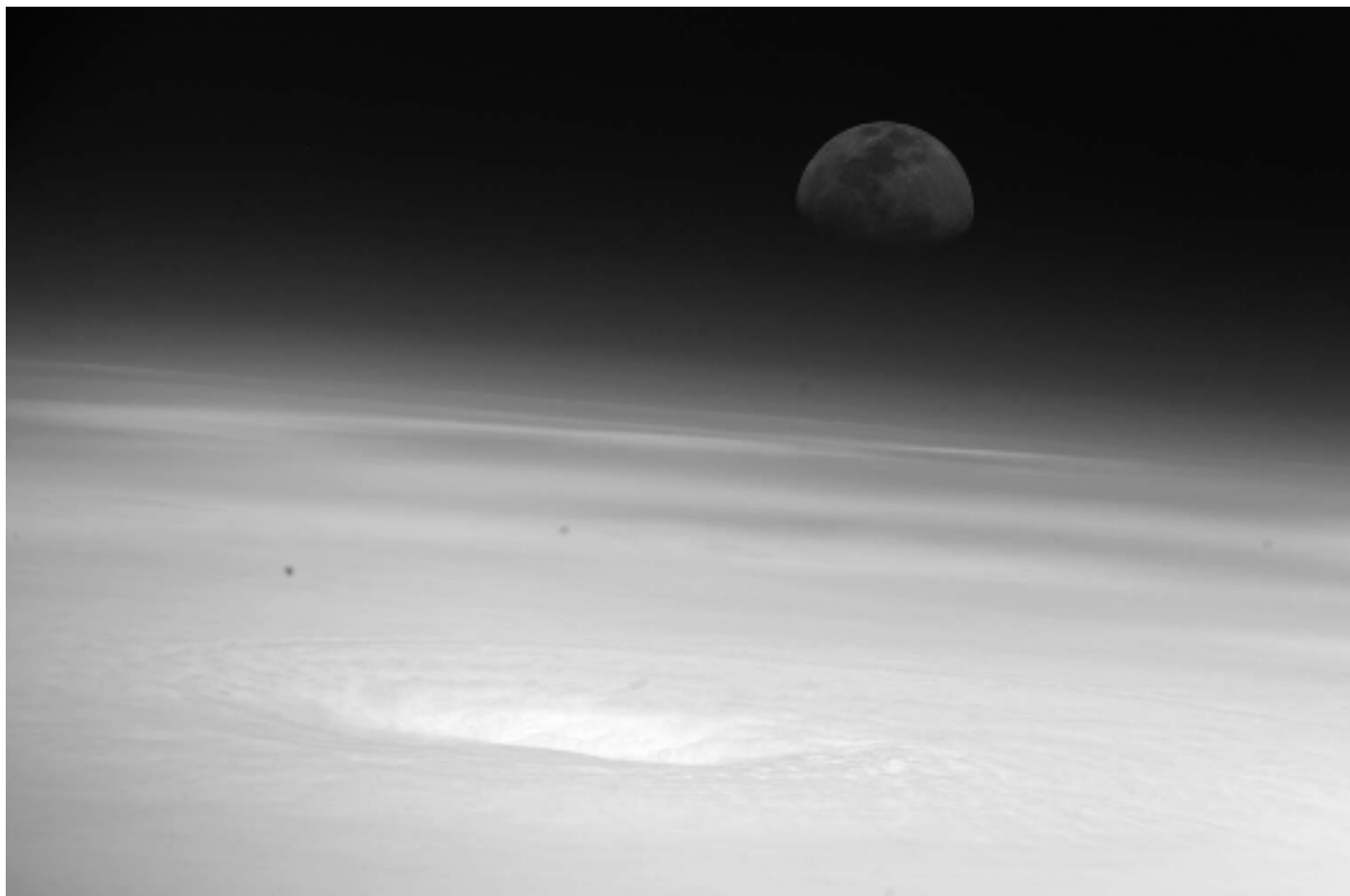
Hoe het ook zij, door zichzelf te herverzekeren vermindert een verzekeringsnemer de mogelijke risico's. Er zijn natuurlijk andere manieren om aan risicospreiding te doen. Zo kan een maatschappij intern reserves aanleggen en zich zo indekken tegen grote schadevorderingen. Een meer gebruikelijk alternatief is dat de verzekeraar de premies opdrijft met het risico hierdoor klanten te verliezen. Recent stelt men vast dat verzekeraars klanten uitsluiten als deze voor hen een te groot risico inhouden. Zo worden jongeren en bejaarden vaak discriminerend behandeld in de automobielverzekering. Eventueel

zal de maatschappij de betaling van grote bedragen op de lange baan schuiven of juridisch aanvechten, zodat ondertussen meer inkomsten uit eigenbeheer ge genereerd kunnen worden.

Enkele praktijkvoorbeelden waar herverzekering een rol speelt

We moeten ons wel bewust zijn dat termen als *grote schadevordering* of *katastrofe* niet accuraat kunnen worden vastgelegd. Bovendien zijn zulke begrippen vaak afhankelijk van ruimte en tijd. De mogelijke verliezen bij een ernstige aardbeving in Tokyo of Los Angeles zouden wel eens de financiële capaciteit van de hele verzekeringswereld kunnen overschrijden. De aanval op het World Trade Center heeft een kettingreactie veroorzaakt van falingen in de verzekerings- en financiële wereld.

De voorbeelden in de kaders bevatten cijfermateriaal dat kan worden teruggevonden op de webstek van *Swiss Re*, een van de hoofdspelers op de internationale herverzekeringmarkt.



John Phillips, NASA Science Officer, nam deze foto van de orkaan Emily op 17 juli 2005. De orkaan woedde op dat moment boven de Caribische zee, ten oosten van het Yucatan-schiereiland.

Orkanen bij de Golf van Mexico: schade-eisen

In het voorbeeld hieronder geven we een kort overzicht van de belangrijkste schadevorderingen (in miljoen dollar) die over de laatste vijfendertig jaar werden uitbetaald voor orkanen in het gebied van de Caraïben en de Golf van Mexico.

Naam	Datum	Bedrag
Andrew	23.08.92	20.900
Hugo	15.09.89	6.203
Georges	20.09.98	3.969
Floyd	10.09.99	2.597
Opal	01.10.95	2.526
Iniki	11.09.92	2.090
Fran	05.09.96	1.870
Luis	03.09.95	1.804
Gilbert	10.09.88	1.694
Isabel	18.09.03	1.685
Celine	04.08.70	1.463
Grace	29.10.91	1.346

De bedragen in de laatste kolom verwijzen naar 2003. Oudere cijfers zijn gecalculeerd voor koerswijzigingen. Merk op hoe orkaan Andrew evenveel kapitaal heeft opgeëist als de zeven volgende in de rij. Niet verwonderlijk dat meer dan vijftig verzekeringsmakelaars uit de staat Florida bankroet gegaan zijn op deze eenmalige gebeurtenis. Vermoedelijk was een aantal onder hen niet voldeende herverzekerd.

Cijfermateriaal: *website Swiss RE*

Een verzekeraar zal er zorg voor dragen dat hij zich indekt door in te schrijven op een gemengde lijst van herverzekeringscontracten. Inderdaad is het niet aangewezen om een portefeuille integraal te herverzekeren, omdat dan ook de premies integraal naar de herverzekeraar gaan. Enkele elementen die meespelen bij het afsluiten van een herverzekeringscontract zijn de volgende:

- Is herverzekeren al dan niet nodig?
- Indien ja, welke vorm moet dan worden aangewend?
- Hoe splitsen we de risico's tussen verzekeraar en herverzekeraar?
- Wat gebeurt er met de premies?

Herverzekeringscontracten

De onderliggende redenering voor het afsluiten van een herverzekeringscontract moet zijn dat de verzekeraar een voor hem optimaal deel van het risico behoudt. Neemt hij te weinig risico, dan zullen zijn financiële baten ook gering zijn; neemt hij te veel, dan wordt hij kwetsbaarder. We voeren notaties in om de belangrijkste componenten in kaart te brengen.

We gaan er van uit dat we te maken hebben met een homogene portefeuille, zodat eventuele schadevorderingen kunnen bekeken worden als komend uit eenzelfde kansverdeling. Stellen we deze op een volgende vorderingen voor door

$$\{X_1, X_2, \dots\},$$

dan nemen we aan dat deze stochastische veranderlijken onafhankelijk zijn en dezelfde verdeling F hebben als de veranderlijke X . Nemen we dan nog aan dat het aantal schadevorderingen tot op een tijdstip t gegeven is door het stochastisch proces $\{N(t); t \geq 0\}$, dan wordt de totaalschade tot op tijdstip t gegeven door de som

$$X(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

De verdeling van $X(t)$ wordt voorgesteld door

$$G_t(x) = P(X(t) \leq x).$$

In een *herverzekeringscontract* wordt het bedrag $X(t)$ opgesplitst in twee delen als $X(t) = D(t) + R(t)$, waarbij $D(t)$ het *eigenbehoud* voorstelt, dat wil zeggen het deel waarvoor de verzekeraar zelf verantwoordelijk is, en $R(t)$ het *herverzekerd deel* is dat naar de herverzekeraar gaat.

Er zijn twee belangrijke families van contracten, namelijk proportionele en niet-proportionele. In beide families zijn nog speciale vormen gebruikelijk. We zetten de meest gebruikte contracten op een rij en bespreken ze in het kort.

Proportionele contracten

Er zijn twee belangrijke *proportionele contracten*.

De herverzekeraar neemt een vaste proportie — zeg a — over van de totaalschade. Dit betekent dat

$$R(t) = a \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = a X(t)$$

waarbij $0 < a < 1$ de *proportiefactor* wordt genoemd. Men spreekt over *propor-*

tionele herverzekering of ook over een *quota-share contract*. Dit soort contract is populair als het risico gedeeld wordt tussen gelijkwaardige partners. Een bekend voorbeeld is die van de ziekteverzekering, waarbij de klant zelf een proportioneel deel van het risico op zich neemt. Spijtig genoeg zijn geen van beide partners gedekt tegen grote schade vorderingen. Bovendien verdubbelt de administratieve behandeling van de vorderingen onder dit soort contract.

Een gedeeltelijk proportionele herverzekeringsvorm is het *surpluscontract*, waarbij het herverzekerd bedrag mee bepaald wordt door de waarde van het verzekerde goed. Stel dat Q_i de waarde is van het goed waarop de i -de schade-eis X_i betrekking heeft. Zo lang Q_i beneden een *retentie* M blijft, is de schade X_i gedekt door de verzekeraar. Is echter $Q_i \geq M$, dan wordt diens aansprakelijkheid beperkt tot het bedrag M/Q_i terwijl wat overblijft naar de herverzekeraar gaat. Surplus contracten zijn enorm populair in brandverzekering; ze worden ook meestal gebruikt in de scheepvaart en bij stormschaade. Ondanks de populariteit van het surpluscontract in de praktijk, toch is er nog geen uitgebreide wetenschappelijk ondersteuning voor dit soort contract opgesteld. De afhankelijkheid tussen de schadevordering X_i en de waarde Q_i in het koppel (X_i, Q_i) is daarbij cruciaal.

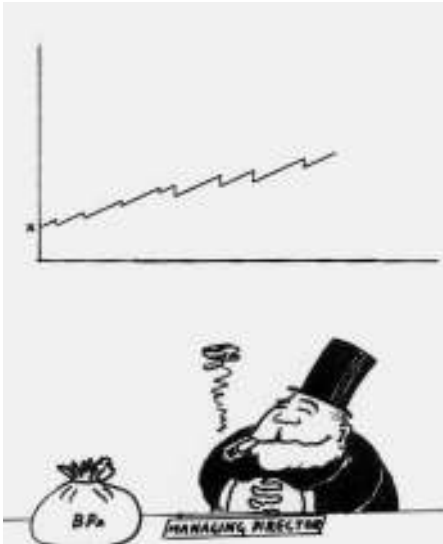
Niet-proportionele contracten

Binnen de *niet-proportionele contracten* zijn er twee erg gebruikelijk.

Allereerst het *excess-loss* contract, waarbij de eerste verzekeraar verantwoordelijk is voor maximaal een *retentie* M . Het eventuele deel van de schade dat hoger ligt wordt naar de herverzekeraar doorgeschoven. Voor die laatste is M dus een *franchise*. Het herverzekerd bedrag is dan gegeven door

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - M)_+$$

waarbij $x_+ = \max(0, x)$. Dit soort contract is gebruikelijk bij algemene aansprakelijkheid, terwijl het ook vaak gebruikt wordt bij automobielverzekering en stormschaade. Noteer dat het leeuwendeel van een grote schadevordering naar de herverzekeraar gaat; de premiedeling tussen de twee partners zal dan ook aanleiding ge-



Ragnar Norberg, 1972

ven tot onderhandelingen. Administratief is deze contractvorm interessanter voor de herverzekeraar dan de proportionele vormen omdat maar een fractie van de oorspronkelijke vorderingen wordt doorgeschoven.

Bij een *stop-loss* contract wordt elke individuele schadevordering bekeken als een integraal deel van de portefeuille. Hierdoor wordt het herverzekerd bedrag gegeven door

$$R(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - C \right\}_+$$

waarbij de *retentie* C op de totaalschade bepaald wordt. Een *stop-loss* contract wordt gebruikt wanneer het aantal schadevorderingen $N(t)$ groot is. Ook kan men zo'n contract bekijken als een *excess-loss* voor de ganse portefeuille. *Stop-loss* herverzekering wordt aangewend bij storm- en hagelschade, af en toe bij brandverzekering. Voor de herverzekeraar is dit soort contract administratief erg interessant daar er ten hoogste één schadevordering kan binnenlopen.

Contracten voor grote schadevorderingen

Het merendeel van de herverzekeringscontracten valt in één van de hierboven beschreven categoriën. Toch zijn er oudere en ook nieuwere vormen bekend die meer verwijzen naar grote schadevorderingen. De contracten in deze categorie worden bepaald door eerst de schadevorderingen te ordenen naar stijgende bedragen. Dit levert

$$X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_{N(t)}^*.$$

We vermelden twee soorten contracten.

Kijken we enkel naar de grootste eisen, dan verkrijgen we een *grootste eisen contract* (*largest claims reinsurance*) waarbij het herverzekerd gedeelte gegeven wordt door

$$R(t) = \sum_{i=1}^r X_{N(t)-i+1}^*.$$

Hierbij worden dus de r grootste vorderingen doorgeschoven naar de herverzekeraar.

Een theoretisch interessante versie wordt gegeven door eerst een retentie toe te passen op de grootste vorderingen. Dit gebeurt in een *ECOMOR contract*, een vorm die door een Franse actuaire Thépaut werd voorgesteld in 1950 in [14]. De naam is een acronym voor *excédent du coût moyen relatif*. Het herverzekerd bedrag is hier

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i=1}^r X_{N(t)-i+1}^* - r X_{N(t)-r}^* \\ &= \sum_{i=1}^{N(t)} \left\{ X_i - X_{N(t)-r}^* \right\}_+. \end{aligned}$$

Het bedrag $R(t)$ dekt dus enkel dat gedeelte van de r hoogste schade-eisen dat boven de stochastische franchise $X_{N(t)-r}^*$ uitsteekt. Dit soort contract heeft in de jaren 80 van de vorige eeuw een beperkt gebruik gekend bij Zwitserse en Scandinavische herverzekeraars.

Mengvormen

Andere contracten en mengvormen zijn natuurlijk mogelijk en zelfs gebruikelijk. We vermelden er enkele om aan te geven dat verder theoretisch inzicht in het stochastisch verloop van een portefeuille hulp kan bieden bij het nemen van beslissingen. Combinaties van verschillende contracten zijn erg gewoon. Bijvoorbeeld worden proportionele en *stop-loss* contracten verwerkt in

$$R(t) = a(X(t) - M)_+.$$

Analoog levert het superponeren van een *stop-loss* contract bovenop een *excess-loss*

$$R(t) = \left(\sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - M)_+ - C \right)_+$$

een populaire combinatie.

Meer recent wordt gebruik gemaakt van *drop down excess-loss contracten*. Hierbij wordt een schadevordering langs beide kanten gecensureerd door bedragen die afhangen van de grootte van de schadevordering. Meer precies levert dit contract voor de herverzekeraar het totaal

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \min(L_i, (X_{N(t)-i+1}^* - M_i)_+)$$

op, waarbij M_i voor de franchise staat en L_i voor de retentie voor de herverzekeraar.

Bijdragen vanuit EURANDOM

Uit bovenstaande mag blijken dat het terrein van herverzekeringen aanleiding geeft tot interessant wetenschappelijk onderzoek en praktische implementatie. Als eerste stap in een gestructureerde aanpak is een compendium samengesteld [13], waarin een 500 artikels werden verwerkt die rechtstreeks danwel onrechtstreeks met herverzekeringen te maken hebben. Wat daarbij opvalt was dat het aantal publicaties dat dieper ingaat op stochastische en statistische aspecten van herverzekeringen bedroevend klein is. Dit is één van de belangrijkste redenen om dit onderwerp te selecteren voor EURANDOM.

Een aantal workshops is ingericht, waarvan een *Statistical Issues in Actuarial Risk Modelling: Dependence Modelling and Detrending*, die gesponsord is door de Nederlandse vleugel van AON-Re Europe, een van de marktleiders in de herverzekeringswereld. Een andere workshop ver-



Ragnar Norberg, 1972

Orkanen in Zuid-Azië: slachtoffer aantallen

Onderstaande gegevens zijn gebaseerd op een Swiss-Re lijst voor rampen waarbij niet naar verzekerd kapitaal wordt gekeken maar naar het aantal slachtoffers. Bijgevoegd staat het deellijstje van de slachtoffers van cyclonen en orkanen die optraden in het Zuid- Aziatisch gebied over de laatste vijfendertig jaar.

Wat opvalt in deze lijst is dat de zwaarste rampen aanleiding geven tot de ruwste cijfers. De recente *tsunami* van 26 december 2004 bevestigt dit soort vaststelling, vooral omdat de slachtoffers over een enorm gebied verspreid waren. De massale solidariteitsacties zouden de internationale organisaties kunnen inspireren om structuren uit te werken die geschikt zijn om in te springen bij zulke rampen. Het ligt immers niet voor de hand hoe een enkel land zich zou kunnen indekken tegen dit soort rampen, tenzij wereldwijd een soort verzekeringspakket kan worden ontwikkeld. Dit voorbeeld toont ook aan dat niet voor alles een verzekering, laat staan een herverzekering, bestaat.

Plaats (Naam)	Datum	Slachtoffers
Bangladesh	14.11.70	300.000
Bangladesh (Gorky)	29.04.91	138.000
India	01.09.78	15.000
Bangladesh (O5B)	29.10.99	15.000
Bengal Gulf	31.10.71	10.800
Bengal Gulf	20.11.77	10.000
Bengal Gulf	25.05.85	10.000
Venezuela	15.12.99	10.000
Honduras (Mitch)	22.10.98	9.000
Philippines (Thelma)	05.11.91	6.304
Brazil	15.11.01	5.112
Vietnam (Linda)	01.11.97	3.840
Punjab	08.09.92	3.800
China (Yangze)	01.07.98	3.656
Reunion	16.04.78	3.200

Cijfermateriaal: *website Swiss RE*

wijst meer naar financiële aspecten en handelt over *Exotic Option Pricing under Advanced Lévy Models*.

Binnen EURANDOM wordt vooral aandacht besteed aan afgeleide onderzoeks- onderwerpen. Enkele daarvan hebben inmiddels aanleiding gegeven tot publicaties terwijl andere nog in de steigers staan. De algemene noemer voor de researchonderwerpen is het ontwerpen van richtlijnen die kunnen leiden tot een gestructureerde keuze van een welbepaalde herverzekeringvorm.

Herverzekering

Een eerste cruciale vraag is waarom grote schade-eisen angstvallig worden vermeden in de gebruikte contracten. Nochtans

wordt het optreden van catastrofale vor- deringen stevast opgegeven als dé belangrijkste reden voor het afsluiten van een herverzekeringscontract. Omdat vooral ECOMOR een tijd in de lift had gezeten werd daaraan een sleutelrol toebedeeld. Het bleek snel dat in dit soort contract het herverzekerde kapitaal

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \left\{ X_i - X_{N(t)-r}^* \right\}_+$$

een bijzonder ingewikkelde stochastische structuur heeft. Het gaat inderdaad om een stochastische som van veranderlijken die zeer sterk onderling afhankelijk zijn omwille van hun ordening in de schade-

groottes.

Ondanks deze ingewikkeldheid is het toch mogelijk geweest om limietresultaten te bekomen die een expliciete benadering van de verdeling van $R(t)$ opleveren. Ook voor de verwachting $ER(t)$ en de variantie $Var(R(t))$ werden benaderingsformules afgeleid. Enkele van deze resultaten waren embryonaal al ontwikkeld in [12] en opgenomen in [4]. Een systematische en gedetailleerde behandeling is opgenomen in [7], dat binnenkort zal verschijnen. De basisonderstelling bij de verworven resultaten is dat de verdeling F van de schadegrootte aanleiding moet geven tot zwaar-staartgedrag, wat wordt vertaald in het gebruik van extremewaardetheorie.

Stochastische modellering van handel in verzekeringen

Als toetsmateriaal werd door D. Silvestrov en zijn medewerkers in Mälardalen University, Västerås, Sweden een pilot-programma uitgewerkt onder de naam *Stochastic Modelling of Insurance Business*. Grondidee hierbij is dat door Monte-Carlo-simulatie een gezond inzicht kan worden bekomen welk soort herverzekeringscontract optimaal is als welbepaalde gegevens worden vooropgesteld, zoals de verdelingen van schadetijdstippen en -groottes, de gebruikte premieberekening, de vigerende retenties en franchises, enzovoorts. Indien analytische methoden (nog) niet beschikbaar zijn, is een dergelijk softwarepakket bijzonder handig in het zoeken naar verdere theoretische funderingen. Eén van de belangrijke verworvenheden van het pakket is dat zelfs gebeurtenissen met een uiterst kleine kans om op te treden toch in kaart kunnen gebracht worden. Bovendien leren deze simulaties of het verbannen ECOMOR al dan niet recht heeft op een herziening. De onderzoeksgroep in Västerås werd opgericht naar aanleiding van een vraag vanuit EURANDOM. Op regelmatige tijdstippen wordt daar verslag uitgebracht over de bereikte resultaten.

Risicomaten

In de praktijk wordt de keuze van een of ander herverzekeringscontract vaak gemaakt op basis van het gedrag van een *risicomaat* (*risk measure*). Bovendien zijn zulke maten erg in trek in de financiële wereld, waar ze een cruciale rol spelen bij het inschatten van de volatiliteit van een financiële grootte. In mei 2005 werd over

dit onderwerp een workshop ingericht die door een hele reeks experts uit academia en praktijk bijgewoond werd. Speciale aandacht ging naar kredietrisico (credit risk) en het modelleren van interestrisico.

De variabele coëfficiënt

Een risicomaat die in herverzekeringen wordt aangewend is de *variatioecoëfficiënt* (*coëfficiënt of variation*). Deze coëfficiënt is echter cruciaal afhankelijk van een andere hulpstatistiek

$$T_n := \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}.$$

Het gedrag van de verwachtingswaarde van deze statistiek werd reeds onderzocht in [6]. Asymptotische resultaten voor verdelingsfuncties en voor andere verwachtingswaarden dan het gemiddelde (zoals variantie en scheefheid) zijn ook bereik-

baar, zoals aangetoond door Albrecher en anderen in [2]. Hierbij werd aangetoond dat een onzorgvuldig gebruik van risicomaten onheilsellende gevolgen kan hebben voor de herverzekeraar. Een verdere uitbreiding naar het geval van een verzekeringsportefeuille is te vinden in [10].

Limietgedrag van variatie coëfficiënten

Verder bouwend op het onderzoek aangehaald in de voorgaande paragraaf worden de resultaten over T_n overgedragen op de variatioecoëfficiënt. Zoals aangetoond door Mack in [11] is deze grootheid populair in herverzekeringen. Daarom werd een gedetailleerde studie gemaakt van het limietgedrag van deze risicomaat onder elke mogelijke invloed van extremewaardeonderstellingen. Deze resultaten zijn allicht nog belangrijker in de industriële bouwkunde waar de vermelde risicomaat vaak wordt aangewend. De resultaten zijn te vinden in [3].

Dropdown excess loss contracten

Zoals hoger vermeld worden *drop down excess-loss* contracten stilaan gebruikelijk in het herverzekeringsbedrijf. Om in te spelen op de nood naar een theoretische onderbouw voor het gebruik van dit soort contract werd in [9] een eerste studie gewijd aan de variatioecoëfficiënt als risicomaat voor het opstellen van een dergelijk contract.

Tijdsafhankelijkheid

Tenslotte vermelden we nog dat in [1] een poging gedaan werd om inzicht te krijgen in een portefeuille waar de tijdstippen en de groottes van de schadevorderingen wel afhankelijk kunnen zijn. In theoretisch onderzoek wordt gewoonlijk (al dan niet stilzwijgend) onafhankelijkheid aangenomen. ◀

Referenties

- Albrecher, H. and Teugels, J.L. (2004), *Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory*, EURANDOM Report 2004-011, Technical University of Eindhoven, The Netherlands.
- Albrecher, H. and Teugels, J.L. (2005), 'Asymptotic analysis of a measure of variation', *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, verschijnt binnenkort.
- Albrecher, H. and Teugels, J.L. (2005), *Asymptotic analysis of the sample coëfficiënt of variation*. In voorbereiding.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin.
- Borch, K. (1960), 'An attempt to determine the optimal amount of stop-loss reinsurance', *Transactions of the 16-th International Congress of Actuaries*, 597-610.
- Fuchs, A., Joffe, A. and Teugels, J.L. (2001), 'Expectation of the ratio of the sum of squares to the square of the sum: exact and asymptotic results', *Theory of Probability and its Applications*, 46, 243-255.
- Ladoucette, S. A. and Teugels, J.L. (2004), 'Reinsurance of large claims', *Journal of Computational and Applied Mathematics*, verschijnt binnenkort.
- Ladoucette, S. A. and Teugels, J.L. (2004), 'The largest claims treaty ECOMOR', in *Proceedings of the European Conference on Mathematics for Industry*, Eindhoven, The Netherlands, 2004.
- Ladoucette, S.A. and Teugels, J.L. (2004), *Risk measures for a combination of quota-share and drop down excess-of-loss reinsurance treaties*, EURANDOM Report 2004-047, Technical University of Eindhoven, The Netherlands.
- Ladoucette, S.A. and Teugels, J.L. (2005), *The quota-share drop down excess-of-loss reinsurance treaty for an ordered claim*, EURANDOM Report 2005-to appear, Technical University of Eindhoven, The Netherlands.
- Mack, T. (1997) *Versicherungsmathematik*, Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe.
- Teugels, J.L. (1985) *Selected Topics in Insurance Mathematics*, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- Teugels, J.L. (2003) *Reinsurance: Actuarial Aspects*, EURANDOM Report 2003-006, 160p., Technical University of Eindhoven, The Netherlands.
- Thépaut, A. (1950) 'Une nouvelle forme de réassurance. Le traité d'excédent du coût moyen relatif (ECOMOR)', *Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaire Français*, 49, p. 273-343.



Hans Finkelberg

Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
hfinkelberg@math.leidenuniv.nl

Promotionele activiteiten op de Universiteit Leiden

Te moeilijk? Welnee!

Ook in Leiden worden allerlei promotionele activiteiten ontplooid om vwo-ers te betrekken bij universitaire wiskunde. Het belangrijkste jaarlijkse project van de Universiteit aan Leiden is de zogenaamde Masterclass-Praktische-Opdracht waar leerlingen van de bovenbouw van het vwo drie dagen naar het Mathematisch Instituut komen om diep in te gaan op een stuk wiskundetheorie. De colleges worden gegeven door Hans Finkelberg. Naast zijn werk als docent aan de universiteit werkt hij bij een bedrijf dat roosters maakt voor grote scholen en instellingen. Eerder deed hij ruime ervaring op als docent wiskunde aan een middelbare school.

Sinds 1998 wordt ieder voorjaar op het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden een masterclass georganiseerd (later Masterclass-Praktische-Opdracht genoemd) voor scholieren uit de bovenbouw van het vwo. Doel hiervan is zoals gebruikelijk met dit soort activiteiten: de contacten met het voortgezet onderwijs verbeteren in deze tijd waarin de belangstelling voor bèta-studies steeds meer afneemt.

Nu is het de ervaring van de auteur (die zelf ook jarenlang voor de klas heeft gestaan) dat hoe gemakkelijker je het maakt voor de leerling, hoe lager je het niveau instelt, hoe luier en ongeïnteresseerder de leerling wordt. Om dit wegzak-effect tegen te gaan, wordt de lat op de Master-PO inhoudelijk op een hoog niveau gelegd. Zo zijn in het verleden onderwerpen aan bod gekomen als complexe analyse, projectieve meetkunde, coderingstheorie en algebraïsche topologie. Het onderwerp van het seizoen 2004–2005 was *verzamelingenleer*.

Verzamelingenleer

Het onderwerp *verzamelingenleer* is een geschikt onderwerp omdat het aan drie voorwaarden voldoet:

1. Er is weinig of geen voorkennis voor nodig.
2. Bij de behandeling van dit onderwerp komen de deelnemers in aanraking met wezenlijke concepten van de wiskunde, zowel vakinhoudelijk als ook de manier waarop wiskunde op de universiteit wordt bedreven.
3. Het onderwerp is in verschillende etappes/deelonderwerpen te behandelen.

Dit laatste punt maakt het mogelijk tijdens de Master-PO regelmatig een nieuw onderwerp aan te snijden. Heel belangrijk om deelnemers die een bepaald stuk even niet meer begrijpen de gelegenheid te geven opnieuw in te stappen.

Er is gekozen voor intuïtieve verzamelingenleer, omdat dit heel toegankelijk is voor scholieren. Bovendien kan je ze direct confronteren met de beroemde paradox van Russell:

Paradox van Russell. Zij de verzameling A gedefinieerd door:

$$A = \{V \mid V \notin V\}$$

Is nu A een element van A of is A geen element van A ? Er geldt:

- $A \in A \Rightarrow A \notin A$, immers: als A wel voldoet aan de voorwaarde om in A te zitten, zit A er niet in.
- $A \notin A \Rightarrow A \in A$, immers: als A niet voldoet aan de voorwaarde om in A te zitten, zit A er wel in.

En we hebben een paradox.

Enkele begrippen uit de verzamelingenleer

Definitie 1. Zij X een niet lege verzameling. Een relatie R op X is een deelverzameling van het cartesisch produkt van X met zichzelf:

$$R \subset X \times X$$

Notatie: als $(a, b) \in R$, dan noteren we dit als: aRb .

Definitie 2. Een relatie R op X heet een partiële ordening op X als geldt:

- $\forall a \in X : aRa$
- $\{aRb \wedge bRa\} \Leftrightarrow a = b$
- $\{aRb \wedge bRc\} \Rightarrow aRc$

Veelgebruikte notaties voor aRb (ingeval van een partiële ordening) zijn:

- $a \leq b$
- $a \preceq b$
- $a \sqsubseteq b$

Een belangrijk voorbeeld van partiële ordening is die van de inclusierelatie op de machtsverzameling van een (niet lege) verzameling X :

Voorbeeld 1. Zij X een niet lege verzameling met machtsverzameling $\wp(X)$. De relatie $\subseteq$ op $\wp(X)$ gedefinieerd door:

$$U \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq_{\text{inclusie}} V$$

is een partiële ordening op $\wp(X)$.

Definitie 3. Een partiële ordening $\preceq$ op X heet een lineaire ordening als geldt:

$$\forall a \in X : \forall b \in X : a = b \vee a \preceq b \vee b \preceq a$$

Definitie 4. Een lineaire ordening $\preceq$ op X heet een welordening als iedere niet lege deelverzameling van X een kleinste element heeft:

$$\forall U \neq \emptyset \subset X : \exists a \in U : \forall b \in U : a \preceq b$$

Merk op dat dit kleinste element automatisch uniek is.

Definitie 5. Zij X een verzameling voorzien van een partiële ordening $\preceq$. Een deelverzameling $K \subset X$ heet een keten als de restrictie van $\preceq$ tot K een lineaire ordening op K oplevert.

Definitie 6. Zij X een verzameling voorzien van een partiële ordening $\preceq$ en zij $U \subset X$ een deelverzameling. Een element $b \in X$ heet een bovengrens van U als geldt:

$$\forall x \in U : x \preceq b$$

Definitie 7. Zij X een verzameling voorzien van een partiële ordening $\preceq$. Een element $M \in X$ heet een maximaal element van X , als geldt:

$$\forall x \in X : x \preceq M$$

Merk op dat een maximaal element altijd uniek is.

Definitie 8. Zij X een verzameling voorzien van een lineaire ordening $\preceq$. Een deelverzameling $U \subseteq X$ heet een beginstuk van X , als het volgende geldt:

$$\forall b \notin U : \forall a \in U : a \preceq b$$

Definitie 9. Zij X een verzameling voorzien van een welordening $\preceq$ en zij $U \neq X \subset X$ een beginstuk van X . De direkte opvolger van U is dan het kleinste element van het complement van U in X . Notatie: U^+ .

De manier om aan deze paradox te ontsnappen is natuurlijk de axiomatische opbouw van de verzamelingenleer en in het bijzonder het regulariteits-axioma van Zermelo en Fraenkel. Dit is op de Master-PO niet gedaan. De Russellparadox is behandeld om de deelnemers alert te maken en ze het gevoel te geven dat er meer aan de hand is. Zodra ze de paradox doorzien, zijn ze klaar voor het *echte* werk.

De beoogde onderwerpen van de Master-PO en dit artikel

Het beoogde doel van de Master-PO was het begrijpen en bewijzen van de gelijkwaardigheid tussen de volgende drie fundamentele uitspraken:

- Het Keuzeaxioma,
- Het Lemma van Zorn,
- De Welordeningsstelling van Zermelo.

Op een bijna Japans-filosofische manier gaat het hierbij nog niet eens zozeer om deze eindresultaten als wel om de weg er naar toe. Om deze drie onderwerpen überhaupt te kunnen bespreken is er namelijk een heel bouwwerk van definities en stellingen nodig. Het is juist het opbouwen van deze theorie dat zo leerzaam en vooral leuk is voor de deelnemers (en de docent!).

In dit artikel zal ik een deel van de behandelde wiskunde uiteenzetten dat representatief is voor het niveau en de sfeer van de

Master-PO. Ik heb hierbij gekozen voor feit dat volledige inductie met verzamelingen van *willekeurige kardinaliteit* mogelijk is bij acceptatie van het keuzeaxioma.

Om bovenstaande te kunnen uitvoeren worden de definities in het kader geïntroduceerd en aan de hand van voorbeelden uitgebreid besproken. Met deze definities kunnen we de belangrijke uitspraken van de Master-PO formuleren:

Het Keuzeaxioma, Zorn en Zermelo

Voor het formuleren van het keuzeaxioma is in principe een gering begrippenkader nodig. Het axioma kent een aantal verschillende equivalenten formuleringen. Op de Master-PO is de volgende formulering gegeven:

Keuzeaxioma 1. Zij A een niet lege verzameling en zij $\wp(A)$ de machtsverzameling van A (dat is: de verzameling van alle deelverzamelingen van A). Dan bestaat er een afbeelding, de zogenaamde keuze-functie, k :

$$k : \wp(A)^* \rightarrow A$$

met de eigenschap:

$$\forall U \in \wp(A)^* : k(U) \in U.$$

Hierin is $\wp(A)^* = \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Hier wordt natuurlijk een en ander onder tafel geveegd: wat is eigenlijk een *verzameling* of een *afbeelding*? Doordat ik gekozen had voor intuïtieve verzamelingenleer kon ik me de luxe veroorloven hier een beetje overheen te stappen. We hadden immers maar drie dagen om alles te doen!

Een andere formulering van het keuzeaxioma die we ook gebruikt hebben, is de volgende:

Keuzeaxioma 2. Zij A en B twee niet lege verzamelingen en zij $f : A \rightarrow B$ een surjectie, dan:

$$\exists g : B \rightarrow A$$

met de eigenschap:

$$f \circ g = id_B.$$

Merk op dat g automatisch injectief is!

De deelnemers hadden bij het keuzeaxioma eigenlijk wel een beetje het gevoel van “Waarom doen we zo moeilijk? Het is toch duidelijk dat we bij iedere niet-lege deelverzameling *dus* een punt kunnen kiezen?”. Een begrijpelijke reactie. Het antwoord op deze reactie werd eigenlijk gevormd door de totale Master-PO. Na afloop was het de deelnemers volkomen duidelijk geworden dat hier veel meer aan de hand is, dan ze aan het begin hadden kunnen (laat staan durven) vermoeden en dat het wel degelijk noodzakelijk is zo moeilijk te doen over het keuzeaxioma.

Lemma van Zorn. Zij X een verzameling (niet leeg) voorzien van een partiële ordening $\preceq$. Als geldt dat iedere keten in X een bovengrens heeft, dan heeft X een maximaal element.

Stelling 1. Welordeningsstelling van Zermelo. Zij X een niet lege verzameling. Dan bestaat er op X een welordening.

Volledige inductie

Bijzonder aan de equivalentie tussen deze drie uitspraken is het feit dat de reacties er op zo verschillend zijn:

- Keuzeaxioma: wordt door velen als vanzelfsprekend geaccepteerd.
- Zorn: wordt door velen ervaren als een handige technische tool.
- Zermelo: ik weet niet hoe anderen er op reageren, maar mijn reactie bestond alleen maar uit ongeloof! Eén van de gevolgen hiervan is namelijk het kunnen toepassen van volledige inductie op $\mathbf{R}$, $\wp(\mathbf{R})$ of welke kardinaliteit dan ook en niet alleen die van $\mathbf{N}$!

De wiskunde van de Master-PO die hier in dit artikel wordt behandeld is het bewijs van de volgende stelling:

Stelling 2. (Onder aanname van het keuzeaxioma!) Zij X en Y twee verzamelingen. Dan bestaat er een injectieve afbeelding van X naar Y of omgekeerd (of allebei natuurlijk, dan zijn de verzamelingen gelijkmachting).

De gevallen waarbij X of Y leeg is, zijn triviaal. Het bijzondere aan het bewijs is het feit dat het gebruik maakt van volledige inductie met willekeurige kardinaliteit.

Bewijs. In dit bewijs wordt het keuzeaxioma geaccepteerd, waarmee in het bijzonder de welordeningsstelling van Zermelo geldt. Zij X en Y twee verzamelingen, beide niet leeg. Te bewijzen: in minstens één richting bestaat er een injectieve afbeelding. Dit to-

nen we aan door aan te tonen dat er altijd van X naar Y een injectie of een surjectie bestaat. Als er een injectie bestaat, zijn we klaar. Als er een surjectie bestaat, bestaat er volgens het keuzeaxioma (tweede variant) een injectie van Y naar X .

We voorzien X van een welordening $\preceq$ die volgens Zermelo bestaat daar we het keuzeaxioma accepteren. We voorzien Y van een keuzefunctie $k : \wp(Y)^* \rightarrow Y$.

We definiëren een afbeelding $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ voor zekere $\tilde{X} \subset X$ met inductie:

- Zij $a \in X$ het kleinste element van X . Dan is $f(a) = k(Y) \in Y$
- Zij $U \subset X$ een beginstuk van X zodanig dat f op U gedefinieerd is. Als $U \neq X$ en $f(U) \neq Y$, dan is $f(U^+) = k(Y \setminus f(U))$

Laten we, vóórdat we het bewijs netjes afmaken, kort in woorden omschrijven wat hier gebeurt, net zoals op de Master-PO. Aan de éne kant kregen de deelnemers de nette en strakke formuleringen van definities en stellingen op hun bord, aan de andere kant werd veel aandacht besteed aan wat nu eigenlijk de ideeën achter deze zaken waren. Wat gebeurt er nu eigenlijk?

Allereerst definiëren we f voor een startwaarde: het kleinste element van X . In de tweede stap breiden we f uit, zodra we f kennen op een beginstuk. In het bijzonder is $\{a\}$ een beginstuk! Maar dat betekent dat we met de tweede stap f definiëren voor het kleinste element dat groter is dan a , tenzij er geen grotere bestaat. In dat geval hebben we een injectie van X naar Y en zijn we klaar. Deze *direkte opvolger* (als die dus bestaat) wordt aangeduid met a^+ . Nu is f dus gedefinieerd op $\{a, a^+\}$. Echter, $\{a, a^+\}$ is óók weer een beginstuk, dus f is welgedefinieerd op $\{a, a^+, a^{++}\}$ (onder voorwaarde dat a^{++} bestaat; zo niet, zijn we weer klaar) en wel als volgt:

- $f(a) = k(Y)$
- $f(a^+) = k(Y \setminus \{f(a)\})$ Merk op dat $f(a) \neq f(a^+)$. Dus f is op dit beginstuk injectief!
- $f(a^{++}) = k(Y \setminus \{f(a), f(a^+)\})$ Merk op dat f op dit beginstuk weer injectief is!

Hiermee zien we dus f gedefinieerd zijn op een eindige of aftelbaar aantal opvolgers ($\{a, a^+, a^{++}, \dots\}$) van a . Echter, deze verzameling van opvolgers is op zijn beurt weer een beginstuk die, als het nog niet de hele X is, een directe opvolger heeft $\dots$ waarmee f weer verder gedefinieerd kan worden $\dots$ enzovoorts. De verzameling $\tilde{X} \subset X$ is niets anders dan het domein D_f van f .

Bewering 1. De afbeelding f is injectief.

Het is een aardige opgave dit na te gaan.

Bewering 2. Als f niet surjectief is, is $\tilde{X} = X$.

Stel namelijk dat f niet surjectief is en het domein $D_f = \tilde{X}$ van f is niet de hele X . Beschouw:

$$V = \{x \in X : x \notin D_f\}.$$

Zij nu m het kleinste element van V . Deze bestaat, omdat we een welordening hebben! Beschouw nu P_m :

$$P_m = \{x \in X : x \preceq m \wedge x \neq m\}.$$

Het is eenvoudig na te gaan dat P_m een beginstuk is van X waar bovendien f op gedefinieerd is (m was immers het kleinste element waar f niet voor gedefinieerd was!). Bovendien is $f(P_m) \neq$

Y , omdat f op D_f al niet surjectief was. Maar dan is $f(m)$ wél gedefinieerd: $f(m) = k(Y \setminus f(P_m))$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $m \notin D_f$. Conclusie: f is gedefinieerd op heel X .

We weten nu echter het volgende:

- f is injectief op zijn domein $D_f = \tilde{X}$,
- $D_f = X \vee f(X) = Y$.

Waarmee de stelling is bewezen. Immers, als $D_f = X$, hebben we een injectie van X naar Y en anders hebben we een surjectie van X naar Y hetgeen ons middels het keuzeaxioma een injectie van Y naar X oplevert.

Q.E.D. (door velen abusievelijk gezien als de afkorting van een Latijnse spreuk, maar kenners weten dat dit staat voor Quite Easily Done!)

Te moeilijk?

Als ik aan collega's vertel wat voor soort wiskunde ik behandel op de Master-PO, krijg ik vaak de vraag of dat niet veel te moeilijk is. Mijn antwoord hierop is een volmondig *nee*.

Waarom zou bijvoorbeeld de wiskunde die ik hierboven behandeld heb, te moeilijk zijn voor scholieren? Omdat het 'nog maar scholieren' zijn? Onzin! Natuurlijk is deze wiskunde veel en veel te moeilijk voor de meeste leerlingen (en tegenwoordig he-

laas ook voor sommige docenten), maar die komen niet naar een Master-PO. Ik stel dat deelnemers aan een Master-PO, die pretendeert universitaire wiskunde te behandelen, er *recht* op hebben wiskunde te krijgen die moeilijk is, erg moeilijk en soms voor sommige deelnemers *te* moeilijk! Eindelijk krijgen ze iets waar ze écht voor en over moeten nadenken. Het is mijn ervaring dat ze verbijsterend veel aan kunnen. Ze zijn gemotiveerd, hebben er plezier in en hebben een heel behoorlijke aanleg voor wiskunde. Wat wil je nog meer? OK, het is niet zo, dat ze de volgende dag het verhaal na kunnen vertellen. Daar is een langdurig proces voor nodig dat *studeren* heet. Maar tijdens de behandeling van de stof hebben álle deelnemers bovenstaand bewijs kunnen volgen! Na afloop van de Master-PO gaan de deelnemers dan ook altijd zeer goed gehumeurd terug naar huis.

Of ze dan naar aanleiding van de Master-PO besluiten om wel of geen wiskunde te gaan studeren, vind ik op zich wel interessant, maar het is niet mijn doelstelling 'zieltjes te winnen'. Ik wil met de Master-PO bereiken dat ze in ieder geval een goede beslissing kunnen nemen op inhoudelijke gronden. Daar kunnen ze dan over nadenken bij de eerstvolgende wiskundeles, als de docent voor de N_0 -ste keer de abc-formule uitlegt. Hebben ze eindelijk iets te doen tijdens de wiskundeles. ◀

Matthijs Coster

Postbus 20701
2500ES Den Haag
uwc@nieuwarchief.nl

Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade

Eerste aflevering meteen pittig

De Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) begon in de jaren negentig als een jaarlijks terugkerend evenement, medio december werden ongeveer tien opgaven over de prikborden van de wiskunde-faculteiten verspreid. Studenten die zich er door voelden aangesproken, mochten, gebruikmakend van bibliotheek en computer, proberen de opgaven op te lossen. Vanaf het jaar 2000 tot nu is deze wedstrijd voor studenten opgenomen als laddercompetitie in de problemenrubriek van dit blad, waardoor het aparte van de competitie voor een groot deel was verdwenen. Dit jaar is er een volledig nieuwe vorm bijgekomen: een landelijk evenement, waarbij studenten gedurende drie uren opgaven moeten oplossen, zonder hulpmiddelen. Matthijs Coster, redacteur van de UWC, vertelt.

Op 3 juni verzamelden zich 's morgens om half elf tientallen studenten in het Gorlaeus in Leiden om deel te nemen aan de eerste *Landelijke Interuniversitaire Mathematische Olympiade* (LIMO).

Omdat de LIMO voor het eerst werd georganiseerd was er beschuit met muisjes.

Om elf uur begon het programma. De studenten werden welkom geheten door Anne Keune namens de LIMO-commissie van de *Leidsche Flesch*. Vervolgens werd het woord gegeven aan Frans Keune die de studenten welkom heette namens het *Koninklijk Wiskundig Genootschap* (KWG). Hij maakte gebruik van moderne marketingmiddelen om KWG aan te prijzen bij de studenten.

Daarna was het woord aan Jan Hogendijk. Hem was gevraagd om zijn voordracht dusdanig in elkaar te zetten dat ook laatkomers moeiteloos konden inspringen. Zijn voordracht ging over de derdegraads vergelijking en hoe deze langzaam maar zeker werd opgelost in de zestiende eeuw. Hij bracht zijn verhaal in de vorm van een soap-opera in zeven afleveringen. Er zat ook een wedstrijd-element in, doordat de aanwezigen halverwege de voordracht werd gevraagd om voor een wortel van de vergelijking

$x^3 + px = q$ een uitdrukking te vinden die naast de gebruikelijke operaties alleen tweede- en derdemachts wortels toelaat. Hij besteedde veel aandacht aan het feit dat de zestiende-eeuwse rekenmeesters in Italië elkaar veel uitdaagden en onderling wedstrijden hielden. Al bij al was het een zéér toepasselijke voordracht.

Na de lunch konden de zestien teams van vier studenten aan de slag. Elk team werd in een lokaal gezet met tien opgaven die waren bedacht door wiskundigen van verschillende universiteiten. De teams bestonden uit drie bachelorstudenten en één oude-rejaars student, alhoewel bij sommige teams deze vierde student ook bachelorstudent was. Er was drie uur uitgetrokken om de opgaven te maken, maar nadat de tijd verstreken was, was nog niemand klaar.

De oplossingen, voor zover deze waren gevonden, gingen naar de nakijkers. Dit waren veelal de wiskundigen die de opgaven hadden bedacht. Ondertussen hadden de studenten een borrel tot de prijsuitreiking. Velen gebruikten deze tijd om opgaven en de antwoorden te bespreken, anderen speelden een spelletje harten-jagen of klaverjassen.

Van integreren kwam niet zoveel terecht. Men zat of stond veelal bij studenten van eigen universiteit. Alleen de studenten die elkaar kenden (van bijvoorbeeld de Wiskunde Olympiade) maakten gebruik van de gelegenheid om ook buiten de eigen universiteit met anderen een praatje aan te gaan.

In de ruimte waar de opgaven werden nagekeken heerste een enorme drukte. Naast de tien inzenders van de opgaven (of hun plaatsvervangers) die de opgaven nakaken waren er ook nog twee organisatoren in de weer met een laptop om de resultaten in te voeren, en om uiteindelijk een presentatie van de resultaten in elkaar te draaien.

De prijsuitreiking was in een ander gebouw. Onderwerp moest een forse hoosbui getrotseerd worden. Voor de uitreiking werd



Eerste rij, van links naar rechts: voor en na het introductiecollege van Jan Hogendijk; tweede rij: de deelnemers aan de slag; derde rij, eerste twee foto's: bezorgde blikken van de correctoren; derde rij, laatste foto: de organisatoren ontvangen een fles *Limo*; vierde rij, links: het winnende team *Squeak!* van de Radboud Universiteit Nijmegen; rechts, bovenste foto: de organisatoren ruimen op; onderste foto: Rein Nobel bedankt alle medewerkers.

Hoe is het ooit zo ver gekomen!

“Ah, leuk, een definitie van de reële getallen!” Dat is in ieder geval de eerste gedachte die bij mij opkwam bij het doorbladeren van de opgaven van de LIMO. Nou had een definitie van open en gesloten intervallen - die in de betreffende opgave veel voorkwamen - het nog leuker kunnen maken, maar dat kan de pret niet drukken.

Enige tijd later wordt die gedachte natuurlijk wel deels vervangen door: “Wat doe ik hier? Gelukkig weet ik bij tentamens over het algemeen het antwoord op meer vragen.” Maar ook dat kan de pret niet drukken. En dan beweren mijn teamgenoten nog wel dat het mijn idee was om hier te komen. Hoe is het ooit zo ver gekomen?

Ik weet nog precies dat ik over de LIMO de woorden “Goh, dat lijkt best leuk” sprak. Waarmee ik bedoelde dat de mensen die wel aan zulk soort dingen meedoen vast een heel leuke dag zouden hebben. Als niet een van mijn studiegenoten zo iemand was geweest, was mijn uitspraak waarschijnlijk zonder ernstige gevolgen gebleven. Nu werd het opgevat als een vrijbrief net zo lang door te vragen tot ik beloofde mee te gaan. Dag, colleges! Hallo, veel te lange treinreis Groningen-Leiden!

Uiteindelijk viel het allemaal nog mee. In de trein werd het — mede dankzij een ander team uit Groningen waarvan wij het bestaan van tevoren niet vermoedden — toch nog best gezellig. We slaagden er zelfs in, door de stroom als wiskundige uitzijende mensen te volgen, bij het juiste gebouw aan te komen, waar helaas net de thee op was. Dan maar zonder thee naar de lezing, en hopen dat het nog een beetje interessant wordt. Dat was gelukkig dan weer wel het geval, wat natuurlijk veel goed maakt.

Prof. dr. J.P. Hogendijk kon de geschiedenis van wiskunde heel levend neerleggen en met paar opgaven van toen heeft hij onze hersenen een beetje opgewarmd voor de Olympiade.

Dan, na een goede lunch het onderdeel waar het allemaal om was begonnen. De Olympiade zelf. Zoals al eerder vermeld een interessant, en niet bepaald eenvoudig onderdeel.

Tussen het maken van de opgaven en de bekendmaking van de uitslag vielen ons een aantal interessante zaken op. Zo gaf het aantal klaverjassende wiskundestudenten aanleiding tot de vraag of er misschien een verband bestaat tussen het beoefenen van deze edele sport en het bekend zijn met de wiskunde. Ook interessant is hoe veel vloeistof geconsumeerd wordt door een relatief kleine groep mensen als het drinken gratis is. (Hulde aan de organisatoren, overigens). En dan natuurlijk het moment waar iedereen op heeft zitten wachten, de bekendmaking van de uitslag.

Uiteindelijk blijkt gelukkig dat we het als team nog niet zo slecht gedaan hebben als we hadden gedacht. Blijkbaar vond iedereen de opgaven moeilijk. Wat natuurlijk niet wegneemt dat elfde van de zestien geen enorm goed resultaat is. De top tien was niet gehaald, en ook hebben we niet van het andere Groningse team werd niet gewonnen. Het eten was daarentegen wel goed, wat vele teleurstellingen doet verbleken.

Al met al was de LIMO een interessante dag, met interessante mensen, interessante opgaven, en een zeer goede organisatie. Afgezien van de thee bij het ontvangst natuurlijk. Aangezien alles verder uitstekend ging denk ik dat ik ze dat wel kan vergeven.

*Bouke Kuijer, Andrea Velická en Philip Pruim,
studenten wiskunde, Rijksuniversiteit Groningen*

een fles *Limo* uitgereikt aan de leden van de organiserende commissie en verder was er een reclamepraatje voor de Universitaire Wiskunde Competitie.

Lodewijk Kallenberg verzorgde op een leuke wijze de uitreiking. Er waren prijzen voor de beste drie teams, en een prijsje voor het team dat geheel onderaan was geëindigd. De hoofdprijs ging naar *Squeak!* uit Nijmegen. De organisatie sprak tenslotte de hoop uit dat de universiteit waar het winnende team vandaan kwam (Nijmegen) volgend jaar de organisatie op zich zal nemen.

De dag werd afgesloten met een diner-barbecue. Terugkijkend kan ik niet anders, dan concluderen dat het voor iedereen een geslaagde dag was. ◀

De opgaven

De opgaven werden alle ingeleid door een algemene introductie. De auteurs van de opgaven komen van alle universiteiten van Nederland, uit alle vakgebieden.

Verpleeghuis Avondrood (R.D. Nobel, Vrije Universiteit)

In verpleeghuis Avondrood heeft men te kampen met een nijpend tekort aan personeel. Er zijn N bewoners die elke 24 uur M soorten verzorging behoeven (wassen, aankleden, eten, etc.) die voor het personeel evenzovele taken omvatten. Voor bewoner j vereist taak i een tijd t_{ij} van een verzorger ($i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$). Er

zijn in totaal Q verzorgers werkzaam in Avondrood, die elk uiteraard aan slechts één taak tegelijk kunnen werken. Voor elke taak geldt een tijdvenster $[a_i, b_i]$ waarbinnen taak i voor alle bewoners moet worden uitgevoerd. De tijdvensters voor de verschillende taken zijn paarsgewijs disjunct ($a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_M < b_M$). Verschillende taken voor één bewoner kunnen eventueel door verschillende verzorgers worden uitgevoerd. Elk personeelslid werkt regulier 8 uur per etmaal. Uiteraard geldt voor elke taak i ,

$$\max\{t_{ij} : 1 \leq j \leq N\} \leq b_i - a_i \quad \text{en} \quad \frac{\sum_{j=1}^N t_{ij}}{Q} \leq b_i - a_i,$$

omdat het anders fysiek al niet mogelijk is alle bewoners de volledige verzorging te geven. Het personeelstekort komt tot uiting door het gegeven dat

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M t_{ij} > 8Q,$$

in woorden, de totale tijd nodig voor het verzorgen van de bewoners is groter dan het totaal aantal uren reguliere (echte) werktijd dat met Q personeelsleden per etmaal beschikbaar is. Omdat

het niet mogelijk blijkt meer personeel te vinden, en men 'pyjamadagen' wil voorkomen, zal elke verzorger een aantal uur per dag moeten overwerken om al het noodzakelijke werk gedaan te krijgen. De directie van Avondrood vraagt nu aan elke verzorger hoeveel uur hij maximaal bereid is per dag over te werken voor de goede zaak. Voor verzorger k blijkt dit u_k uur te zijn ($k = 1, \dots, Q$).

De volgende vraag is òf en hoe een werkschema kan worden opgesteld waarin voor elke verzorger precies wordt voorgeschreven voor wie hij/zij welke taak moet uitvoeren. Men streeft er hierbij naar de totale tijd besteed aan overwerk te minimaliseren. Er zij nog opgemerkt dat in huize Avondrood de goede gewoonte bestaat dat na het voltooien van een taak de verzorger altijd nog enige tijd sociaal contact onderhoudt met de bewoner. Deze tijd ligt altijd buiten het tijdvenster van de voltooide taak, maar wordt in onze zakelijk ingestelde samenleving wel als werktijd beschouwd, en mag ook niet plaatsvinden binnen het tijdvenster voor een andere taak. Precies gezegd, sociaal contact na uitvoering taak i vindt plaats in het tijdsinterval $[b_i, a_{i+1}]$ ($a_{M+1} = a_1$ van de volgende dag!). De tijd voor sociaal contact na taak i tussen verzorger k en bewoner j bedraagt altijd c_{ijk} (hier wordt de persoonlijke relatie tussen bewoner en verzorger zichtbaar!). Merk op dat als een verzorger bijvoorbeeld drie bewoners geholpen heeft bij taak i hem dit drie na elkaar af te werken sociale contacten 'kost'. Tenslotte, (koffie)pauzes en dergelijke worden niet als werktijd beschouwd.

Formuleer het probleem van het vinden van een werkschema met minimale totale overwerktijd nu als een gemengd lineair/geheeltalig programmeringsprobleem.

Nadat men het optimale werkschema heeft berekend blijkt het personeel zeer ontevreden te zijn, terwijl toch aan de genoemde wensen voldaan is.

Verklaar waarom het personeel zeer ongelukkig zou kunnen zijn met het 'optimale' werkschema.

De vraag is vervolgens hoe we via extra voorwaarden het personeel wel een acceptabel werkschema kunnen geven. De directie deelt daartoe een etmaal op in drie keer 8 uur (1=dagdienst, 2=avonddienst en 3=nachtdienst). Verder zoekt de directie uit welke taken in de diverse diensten kunnen worden uitgevoerd. Laat $T_d \subset \{1, 2, \dots, M\}$ de collectie taken zijn die (inclusief sociaal contact na afloop) in een d -dienst (plus 'aansluitend' overwerk!) redelijkerwijs zijn uit te voeren ($d = 1, 2, 3$).

Voeg nu de voorwaarden toe die tegemoet komen aan de bezwaren van de oplossing van het eerste onderdeel.

Periodieke functies (R. Tijdeman, Universiteit Leiden)

We beschouwen functies $f : \mathbf{Z} \rightarrow \{0, 1, 2\}$. We noemen de functie f periodiek als er een geheel getal $p > 0$ bestaat zodat $f(n+p) = f(n)$ voor alle n groter dan een zeker getal N . We definiëren $P(m, f)$ als het aantal verschillende vectoren

$$(f(n+1), f(n+2), f(n+3), \dots, f(n+m))$$

dat je krijgt als n de gehele getallen doorloopt.

Bewijs: als het beeld van f zowel nullen, enen als tweeën bevat en er bestaat een positief geheel getal m zodat $P(m, f) = m + 1$, dan is f periodiek.

Bewijs: er bestaat een f waarvan het beeld zowel nullen, enen als tweeën bevat, zodat f niet periodiek is en voor elk positief geheel getal m geldt dat $P(m, f) = m + 2$.

Aanwijzing: Je kunt het volgende bewijzen en gebruiken: Schrijf $\{x\}$ voor het fractionele deel van x , dat is de rest bij deling door 1. Beschouw voor een irrationaal getal $a \in (0, 1)$ de functie $f : \mathbf{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ gegeven door $f(n) = 0$ als $\{na\} \in [0, a)$, $f(n) = 1$ als $\{na\} \in [a, 1)$. Bewijs dat f niet periodiek is en voor elke m voldoet aan $P(m, f) = m + 1$.

Reële getallen (N.P. Landsman, Radboud Universiteit Nijmegen)

In de negentiende eeuw zagen wiskundigen in dat zelfs intuïtief volkomen voor de hand liggende resultaten als de *tussenwaardstelling* (als een continue reëelwaardige functie f op het interval $[0, 1]$ voldoet aan $f(0) < 0$ en $f(1) > 0$, dan heeft f een nulpunt in $[0, 1]$) niet bewezen konden worden zonder een goed begrip van de reële getallen.

Dit leidde in de tweede helft van de negentiende eeuw tot een groot aantal pogingen de reële getallen te definiëren. Hier toe bleek het verzamelingbegrip van Cantor noodzakelijk, en deze pogingen culmineerden in de definitie van Hilbert uit 1900, die nog steeds als basis van de analyse geldt.

Let op: een definitie is iets anders dan een constructie! Bij een constructie van de reële getallen $\mathbf{R}$ moet men denken aan verhalen over Cauchy-completering van $\mathbf{Q}$, of aan Dedekind-snedes van $\mathbf{Q}$. Dergelijke constructies stellen de natuurlijke getallen $\mathbf{N}$ voorop in de wiskunde, en construeren daaruit $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, en ten slotte dus $\mathbf{R}$. In de aanpak van Hilbert daarentegen begint de analyse met een definitie van $\mathbf{R}$, en zijn bijvoorbeeld de natuurlijke getallen een daaruit afgeleid begrip.

Hier is de definitie van Hilbert:

Definitie. De reële getallen $\mathbf{R}$ vormen een lichaam dat totaal geordend is onder een ordening $\leq$, zodanig dat $x \leq y$ impliceert $x + z \leq y + z$ voor alle z alsmede $x \cdot z \leq y \cdot z$ voor alle z met $0 \leq z$. Dit totaal geordende lichaam voldoet aan de volgende eigenschap:

Volledigheidsaxioma van Dedekind. Als $X \subseteq \mathbf{R}$ en $Y \subset \mathbf{R}$ beide niet-lege deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn met de eigenschap dat $x \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$, dan is er een $c \in \mathbf{R}$ zodanig dat $x \leq c \leq y$ voor alle $x \in X$ en $y \in Y$.

Er kan aangetoond worden dat $\mathbf{R}$ op isomorfie na uniek is: als $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}'$ twee totaal geordende lichamen zijn die voldoen aan het volledigheidsaxioma van Dedekind, dan is er een uniek lichaamsisomorfisme $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'$ dat de ordening bewaart.

Leid uit Hilberts definitie van $\mathbf{R}$ het lemma van Cauchy-Cantor af: de doorsnede $\cap_n I_n$ van een aftelbare verzameling niet-lege, gesloten intervallen $I_n \subseteq \mathbf{R}$ met de eigenschap $I_{n+1} \subseteq I_n$ voor alle $n \in \mathbf{N}$ is niet leeg.

Een *limietpunt* van een deelverzameling $X \subseteq \mathbf{R}$ is een punt $c \in \mathbf{R}$ met de eigenschap dat voor iedere $\epsilon > 0$ de doorsnede

$(c - \epsilon, c + \epsilon) \cap X$ oneindig veel punten van X bevat. Een deelverzameling $X \subseteq \mathbf{R}$ heet *begrensd* als er $a, b \in \mathbf{R}$ bestaan zodat $a \geq x \geq b$ voor alle $x \in X$.

Leid uit het lemma van Cauchy-Cantor de stelling van Bolzano-Weierstrass af: iedere oneindige begrensde deelverzameling $X \subseteq \mathbf{R}$ heeft een limietpunt.

Laat zien dat (gegeven het eerste deel van Hilberts definitie van $\mathbf{R}$) de stelling van Bolzano-Weierstrass equivalent is met het volledighedsaxioma van Dedekind. Gegeven opgave b moet dus nog worden bewezen dat de stelling van Bolzano-Weierstrass het bewuste axioma impliceert.

Dammen (R. Tijdeman, Universiteit Leiden)

We beschouwen damborden met stukken erop. De situatie geven we aan met een functie $f : \{1, 2, \dots, 10\} \times \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{0, 1\}$, waarbij de functiewaarde 1 is als er wel een stuk op het veld staat en 0 anders. We noteren het aantal stukken op de i -de rij met r_i , dus $r_i := \sum_{j=1}^{10} f(i, j)$ voor $i = 1, 2, \dots, 10$. Analooq noteren we de kolomsommen als $k_j := \sum_{i=1}^{10} f(i, j)$ voor $j = 1, 2, \dots, 10$ en de diagonaalsommen als $d_h := \sum_{i+j=h} f(i, j)$ voor $h = 2, \dots, 20$.

Geef twee verschillende opstellingen die dezelfde rijssommen, kolomsommen en diagonaalsommen hebben.

De sommen zijn niet onafhankelijk. Zo is evident dat

$$\sum_{j=1}^{10} r_j = \sum_{i=1}^{10} k_i = \sum_{h=2}^{20} d_h$$

Er is nog een hiervan onafhankelijke lineaire relatie tussen de rijssommen, kolomsommen en diagonaalsommen. Geef zo'n relatie.

Modulorekenen (F.J. Keune, Radboud Universiteit Nijmegen)

Bepaal de natuurlijke getallen m waarvoor er een natuurlijk getal $k > 1$ is met de eigenschap dat tot de macht k verheffen een permutatie van de restklassen van gehele getallen modulo m induceert.

Eigenwaarden (M.A. Botchev, Universiteit Twente)

Notatie:

- Alle vectoren zijn kolomvectoren.
- Voor $A \in \mathbf{R}^{n \times k}$ wordt met A^T de getransponeerde van de matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ aangegeven. Dus als $A = (a_{ij})$, dan is $A^T = (a_{ji})$.

Beschouw een stelsel lineaire vergelijkingen

$$Ax = b, \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbf{R}^n,$$

waar de vector x moet worden bepaald voor een gegeven matrix A en vector b . In aantal belangrijke fysische toepassingen komen we lineaire stelsels tegen met matrices A die antisymmetrisch zijn (dus $A = -A^T$).

Bij dergelijke toepassingen is het niet de bedoeling dat de matrix A singulier is, want we willen dat het stelsel oplosbaar is voor alle $b \in \mathbf{R}^n$.

Voor welke $n \in \mathbf{N}$ kun je zeker zeggen dat een antisymmetrische matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ minstens één eigenwaarde gelijk aan nul heeft?

Er groeien bomen in onze computers (F.M. Dekking, TU Delft)

Allerhande pakketjes van gegevens die bewaard worden op de harde schijf van een computer hebben een identificatie, die de sleutel heet. Een sleutel is gewoon een (geheel) getal. Wat vaak voorkomt is dat er een heleboel gegevenspakketjes zijn met elk hun eigen sleutel. Als je een gegevenspakketje wilt bekijken, dan zoek je het op met behulp van zijn sleutel. Om dat opzoeken snel te laten verlopen zitten de sleutels niet gewoon achter elkaar maar zijn ze in een boomvorm opgeslagen. Het probleem is om een rijtje van (verschillende) sleutels op een slimme manier op te slaan. Dit gebeurt met een vaste regel die voor elk mogelijk rijtje van sleutels vertelt hoe de vorm van de bijbehorende boom is. Wat is bijvoorbeeld de boom die hoort bij het rijtje sleutels 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36? Dit gaat als volgt. De boom heeft takken die we als streepjes voorstellen, en vertakkingspunten die we als rondjes voorstellen. De sleutels worden in de vertakkingspunten gezet. Er is een bijzonder vertakkingspunt: de wortel. Hierin wordt de eerste sleutel gezet, de sleutel die vooraan staat in het rijtje. Dus voor het rijtje sleutels 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36 begint de boom met:



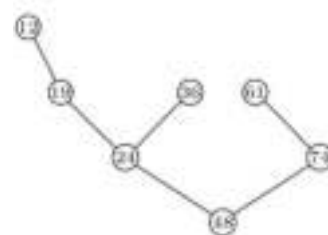
De eerste sleutel, 48, is in de wortel gezet. Nu pakken we de tweede sleutel, 74. Omdat 74 groter is dan 48 gaat de boom naar rechts omhoog: er komt een tak uit de wortel die naar rechts groeit, en sleutel 74 wordt in het nieuwe vertakkingspunt gezet:



De derde sleutel is 61. Deze komt binnen bij de wortel, en gaat naar rechts omdat hij groter is dan de 48 die in de wortel staat. Vervolgens gaat hij naar links omhoog, omdat hij kleiner is dan de 74 die in het vertakkingspunt staat:

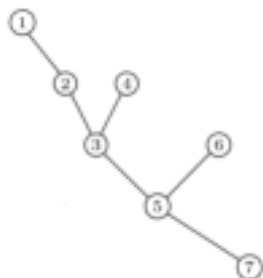


Als we zo doorgaan ontstaat de volgende boom met sleutels:



De vaste regel die gebruikt is luidt: "Als groter, dan naar rechts,

als kleiner dan naar links, tot je een vrije plek vindt.” Merk op dat de precieze waarden van de sleutels er niet toe doen: in plaats van het rijtje 48, 74, 61, 24, 19, 12, 36 hadden we ook het rijtje 5, 7, 6, 3, 2, 1, 4 kunnen nemen – de boom had precies dezelfde vorm gekregen. Om te oefenen: maak de boom die bij het rijtje 7, 5, 6, 3, 2, 1, 4 hoort. Antwoord:



Bij de opgaven die hier onder volgen, speelt een interessante eigenschap van een boom de hoofdrol, namelijk zijn hoogte. Een boom die alleen uit een wortel bestaat heeft hoogte 0. De boom die hoort bij de oefening hierboven heeft hoogte 4.

Bedenk een rijtje met zeven sleutels waarvan de bijbehorende boom hoogte 6 heeft, en een rijtje met zeven sleutels waarvan de bijbehorende boom hoogte 2 heeft.

Merk op dat er verschillende rijtjes zijn die tot dezelfde boom leiden. We maken de bomen stochastisch door uniform te trekken uit de mogelijke permutaties van rijtjes van n sleutels. Dan wordt de hoogte H_n van de boom een stochastische variabele. Bijvoorbeeld: $P(H_3 = 1) = \frac{1}{3}$ en $P(H_3 = 2) = \frac{2}{3}$ (ga na!).

Bewijs, door afschatten zonder $P(H_n = n - 1)$ uit te rekenen, dat $P(H_n = n - 1) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$.

Bereken $P(H_n = n - 1)$.

Nogal verrassend is het volgende. Met behulp van de moderne kansrekening kan aangetoond worden dat als $n \rightarrow \infty$, dan hebben bijna alle bomen die door die rijtjes gemaakt worden min of meer dezelfde vorm hebben.

Wat denk je: zal die vorm zijn ‘iel en nogal hoog’, of is die vorm ‘compact en nogal laag’? (Je kunt deze vraag nog goed gemotiveerd beantwoorden door een ‘hoger’ standpunt in te nemen).

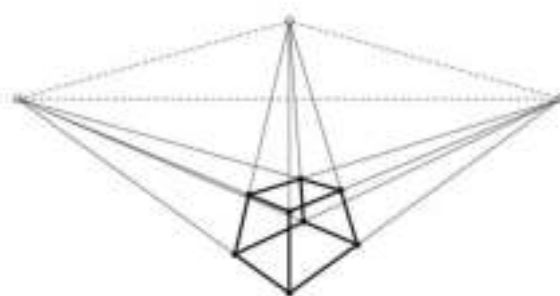
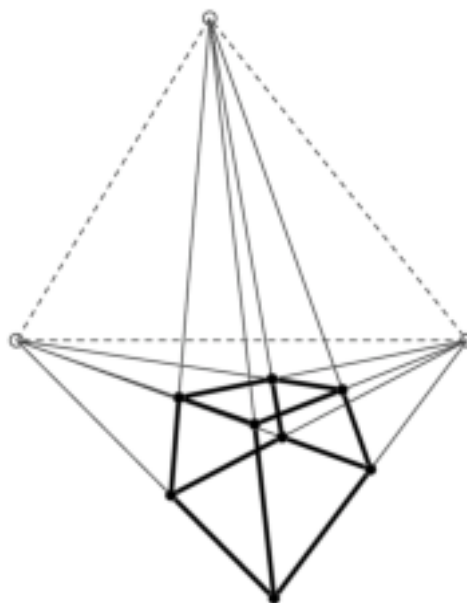
Verdwijnpunten (F. Takens, Rijksuniversiteit Groningen)

We beschouwen perspectivische afbeeldingen van rechthoekige blokken op een plat vlak V . Een rechthoekig blok is een begrensde deel van de driedimensionale ruimte dat begrensd wordt door zes zijden die twee aan twee evenwijdig zijn en verder loodrecht op elkaar staan; de lijnen waar de zijden elkaar ontmoeten noemen we de ribben. Deze zijn dus vier aan vier evenwijdig en verder loodrecht. Een perspectivische afbeelding van zo’n rechthoekig blok C op een vlak V is een projectie van de ribben van C , vanuit een punt P buiten V , op het vlak V . We nemen voor de eenvoud aan dat geen van de ribben van C evenwijdig is aan V . In V hebben we dan drie verdwijnpunten. Deze worden als volgt gedefinieerd: de ribben van C zijn vier aan vier evenwijdig. De projecties

van zo’n viertal geeft lijnsegmenten in V die, bij verlenging, door één punt gaan. Dat punt noemt men het (bij de richting van die ribben horende) verdwijnpunt. Op die manier zijn er dus drie verdwijnpunten behorende bij de drie loodrechte richtingen van de ribben van C .

In Figuur 1 geven we zo’n perspectivische projectie met z’n verdwijnpunten. Figuur 2 is in principe op dezelfde manier geconstrueerd, maar nu kan het resultaat niet verkregen worden als de perspectivische projectie van een rechthoekig blok. In onderstaande figuren geldt:

- Verdwijnpunten zijn aangegeven met $\circ$.
- De projecties van de ribben zijn dik getekend
- De verlengingen tot de verdwijnpunten zijn dun getekend



Laat zien dat zo’n plaatje afkomstig is van de projectie van een rechthoekige balk dan en slechts dan als de driehoek gevormd door de verdwijnpunten alleen scherpe hoeken heeft.

Saaie afbeeldingen (J.G.M. Donkers, TU Eindhoven)

Laat S een eindige verzameling zijn met m elementen. Voor een afbeelding $f: S \rightarrow S$ bekijken we de samengestelde afbeeldingen $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, enz. Een afbeelding f heet saai als er een n is zodat $f^n = f^{n+1}$.

Bepaal het aantal saaie f 's (als functie van m).

Kansrekening en Stochastiek (A.W. van der Vaart en R.W.J. Meester, Vrije Universiteit)

Om de genealogische relatie tussen verschillende individuen te simuleren, wordt vaak gebruik gemaakt van Hoppe's urn model. Deze opgave gaat over dit urn model. Op tijdstip 0 bevat een vaas 1 zwarte bal met massa $\theta > 0$. Op elk volgend tijdstip bevat de vaas 1 zwarte bal met massa θ en een aantal gekleurde ballen met massa 1. Op elk tijdstip trekken we een bal met kansen proportioneel met haar massa. Als we een gekleurde bal trekken, dan doen we die bal, plus een nieuwe bal van dezelfde kleur terug in de vaas. Als we de zwarte bal trekken, dan doen we die weer terug, plus een bal met een geheel nieuwe kleur. Op tijdstip n bevat de vaas dus n gekleurde ballen plus de zwarte bal. Laat nu K_n het aantal kleuren zijn op tijdstip n .

Laat zien dat

$$\frac{E(K_n)}{\theta \ln(n)} \rightarrow 1,$$

als $n \rightarrow \infty$. Hierbij stelt $E(K_n)$ de verwachting van K_n voor en laat zien dat

$$\frac{\text{Var}(K_n)}{\theta \ln(n)} \rightarrow 1,$$

als $n \rightarrow \infty$, waarbij $\text{Var}(K_n)$ de variantie van K_n voorstelt.

Laat nu $A_{k,n}$ het aantal kleuren zijn dat k keer voorkomt, op tijdstip n . Als we op tijdstip 5 bijvoorbeeld drie rode en twee gele ballen hebben, dan is $A_{2,5} = 1$ en $A_{3,5} = 1$. Merk op dat $\sum_{k=1}^n k A_{k,n} = n$.

Bewijs met volledige inductie naar n dat

$$P(A_{1,n} = a_1, \dots, A_{n,n} = a_n) = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^n \frac{(\theta/j)^{a_j}}{a_j!},$$

waarbij $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1) \cdots (\theta+n-1)$.

We kunnen de beschrijving van Hoppe's model verbinden met permutaties. Elke realisatie koppelen we aan een permutatie

van $1, 2, \dots, n$, genoteerd in haar cyclische decompositie. Hiertoe nummeren we de gekleurde ballen in de volgorde waarin ze in de vaas terechtkomen. Wanneer we nu de zwarte bal trekken, dan beginnen we een nieuwe cykel. Wanneer de k -de kleur bepaald wordt door bal j te kiezen, dan voegen we nummer k in links van nummer j . Ter verduidelijking geven we een voorbeeld. Stel we maken 5 stappen waarbij op de tijdstippen 1, 2, en 4 de zwarte bal wordt gekozen, en waarbij op de tijdstippen 3 en 5 de bal met nummer 2 wordt gekozen. Dit leidt tot de volgende serie:

$$\begin{aligned} & (1) \\ & (1)(2) \\ & (1)(32) \\ & (1)(32)(4) \\ & (1)(352)(4) \end{aligned}$$

Laat zien dat de kans op bovenstaande realisatie gelijk is aan $\theta^3 / \theta_{(5)}$.

Laat zien dat

$$P(K_n = k) = \frac{\theta^k}{\theta_{(n)} \cdot S_{k,n}},$$

waarbij $S_{k,n}$ het aantal permutaties van $\{1, 2, \dots, n\}$ voorstelt met precies k cycli.

Stel nu dat θ onbekend is, en dat we deze willen schatten op basis van de observatie dat $K_n = k$. We kunnen dat doen door die θ te zoeken die $P(K_n = k)$ maximaliseert. (Dit is de 'methode van de meest aannemelijke schatter'.)

Laat zien dat dit voor $k < n$ leidt tot de waarde van die voldoet aan

$$k = \frac{\theta}{\theta} + \frac{\theta}{\theta+1} + \cdots + \frac{\theta}{\theta+n-1}$$

Veronderstel nu dat we behalve K_n ook $(A_{1,n}, \dots, A_{n,n})$ observeren. We willen deze informatie gebruiken voor het schatten van θ . We kunnen dezelfde methode van de meest aannemelijke schatter gebruiken.

Laat zien dat dit tot dezelfde schatting als in het vorige onderdeel leidt.

Jan Brandts

Korteweg-de Vries Instituut
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
brandts@science.uva.nl

Onderwijs Numerieke Wiskunde in de 21ste eeuw

Studio Courses in Studio Classrooms

Van docenten wordt tegenwoordig meer dan ooit verwacht dat ze goed en aansprekend onderwijs verzorgen. Daarom wordt er op verschillende universiteiten geëxperimenteerd met nieuwe lesmethoden naast de gangbare vormen van onderwijs. Jan Brandts, universitair docent aan de Universiteit van Amsterdam, beschrijft de toegevoegde waarde binnen het Numerieke Wiskundeonderwijs aan de hand van ervaringen opgedaan bij de ontwikkeling en implementatie van vier Studio Courses in het academisch jaar 2004–2005, waaronder twee vakken binnen de zojuist van start gegane Landelijke Master Wiskunde.¹

Een *Studio Course* is een cursus gegeven in een *Studio Classroom*. Een *Studio Classroom* wijkt in een aantal opzichten af van een reguliere collegezaal. Zo heeft ieder tweetal studenten de beschikking over een online computer van bescheiden afmetingen met op het vak toegesneden software, en heeft de docent-machine behalve aansluiting op de beamer, software om indien gewenst de computers van de studenten aan of bij te sturen.

In combinatie met een goede cursuswebsite geeft een dergelijke onderwijsomgeving extra mogelijkheden naast (maar zeker niet in plaats van) de meer gangbare vormen van onderwijs. Deze mogelijkheden lijken vooral bij vakken in de toegepaste richtingen prima te kunnen worden benut. Er moet wel gerekend kunnen worden op goede ondersteuning door de ICT-groep, want niemand is gebaat bij een *Studio Curse* in een *Studio Klusroom*.

Geïntegreerd ICT-gesteund onderwijs

Een als *Studio Classroom* ingerichte zaal leent zich bij uitstek voor het geven van geïntegreerd ICT-gesteund onderwijs. Meer dan in menige klassieke practicumzaal is er rekening gehouden met het feit dat zelfstandig werken en klassikale overdracht hand in hand moeten kunnen gaan. Het volgende voorbeeld illustreert de soepele afwisseling van werkvormen.

Context: Numerieke Wiskunde, bachelorfase, 6EC², jaar 2, semester 1, week 10–11 van 14; het benaderen van oplossingen van randwaardeproblemen.

Relevante reeds vergaarde voorkennis: het projecteren van vectoren op deelruimten van $\mathbf{R}^n$ en van functies op polynoomruimten, beide in het standaard inproduct. Foutgrenzen voor Hermitisch interpoleren (interpoleren van zowel functiewaarden als waarden van de afgeleide) met cubische polynomen.

Te behandelen collegestof: de bilineaire vorm $\langle f, g \rangle = (f', g') = \int_I f'(x)g'(x)dx$ is een inproduct op de ruimte $C_0^1(I)$ van continu differentieerbare functies die nul zijn op de rand van $I = [0, 1]$. Als $u \in C_0^1(I)$ voldoet aan $-u'' = f$, kan de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -orthogonale projectie Pu van u op een deelruimte $\mathcal{V}$ van $C_0^1(I)$ met $\dim(\mathcal{V}) = m < \infty$ middels partiële integratie worden berekend uit het feit dat

$$\langle Pu, v \rangle = \langle u, v \rangle = (f, v)$$

voor alle $v \in \mathcal{V}$. Bijna per definitie geldt bovendien dat

$$|u - Pu| = \min_{v \in \mathcal{V}} |u - v|, \quad \text{waarbij } |\cdot| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}. \quad (1)$$

Laat nu bijvoorbeeld

$$\mathcal{V} = \{v \in C_0^1(I) \mid v|_{I_j} \text{ is een cubisch polynoom voor alle } j\},$$

waarbij $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ en $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ een opdeling van I in sub-intervallen voorstelt.³ Stug herhaald toepassen van Rolle's Lemma laat zien dat het minimum in (1) voor deze keuze van $\mathcal{V}$ en voor $u \in C^4(I)$ grootte $\mathcal{O}(h^3)$ heeft, waarbij $h = \max_j |x_j - x_{j-1}|$.

Gangbare overdracht: wekelijks middels hoorcollege, werkcollege, en een programmeersessie. Beide laatste onderdelen onder begeleiding van een aio en student-assistent.

Geïntegreerde aanpak: de docent geeft 35 minuten hoorcollege, en zet in het kwartier pauze dat volgt twee foto's van de zojuist volgeschreven schoolborden op de cursuswebsite.⁴

De 25 minuten erna laat hij aan opgaven werken. Hij signaleert dat de uitleg over de bovengrens van de fout middels analyse van de interpolant van u in $\mathcal{V}$ niet is overgekomen, en last vijf minuten in voor extra toelichting, waarbij hij het eerste volgeschreven schoolbord nogmaals toont via de beamer. Zodra de opgaven zijn afgerond, geeft hij na een korte pauze weer 25 minuten hoorcollege. Als bij de



Ruim opgezette *Studio Classroom* met compacte desktops

Group scores per question

There were 37 participants. This table shows their results for each of the questions

Statement:	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Correct:	21	35	24	35	35	17	30	27	27	19
Incorrect:	12	1	1	2	2	9	4	5	4	8
No idea:	4	3	2	0	0	1	3	5	6	11

Update the statistics

To refresh the above results, click the button below:

Start Quiz

Resultaten van online ingevulde ja-of-nee vragen kunnen direct worden getoond.

opgave erna blijkt dat niet goed is begrepen hoe de basis van ∇ eruit ziet, maakt hij een schets middels een tekenprogramma binnen het elektronisch schoolbord (een via de beamer geprojecteerde desktop van een computer met een speciale pen die als muis fungeert).

Na een derde pauze, waarin de docent de schets als basis.jpg op de website heeft gezet, wordt gedurende de resterende 55 minuten paarsgewijs en ter plekke aan de *Matlab*-implementatie gewerkt. Een verwarrende tikfout in de online beschrijving van de opdracht, opgemerkt door de snelste student, herstelt hij snel, en vraagt de anderen om even te reloaden nog voordat ze de fout hebben kunnen opmerken. In de laatste tien minuten projecteert hij via de beamer tien ja-of-nee vragen over de theorie die de studenten anoniem op een *fill-out form* op de webbrowser invullen en opsturen.⁵

De studenten zien direct hun eigen score op hun eigen scherm. De opgetelde antwoorden per vraag zijn direct via de beamer te zien, en de twee vragen die door opvallend veel mensen fout waren gemaakt worden extra toegelicht.

Klassiek of geïntegreerd?

Bovenstaande beschrijving van de geïntegreerde aanpak heeft veel weg van de praktijk bij vier nieuwe Studio Courses in de Numerieke Wiskunde waarvan in tabel 1 enkele cijfers staan gepresenteerd. Deze vakken hebben de volgende kenmerken met elkaar gemeen:

- 14 bijeenkomsten van 3–4 maal 45 minuten intensief onderwijs
- een hoge (vrijwillige) opkomst en een hoog slagingspercentage
- continue afwisseling van uitleg, opgaven, en illustratief programmeerwerk
- website met lecture notes, programma's, opgaven, quizen

Voordelen van deze aanpak zijn dat iedereen een groot deel doet van het (programmeer)werk onder toezicht van de docent, die ook de stof heeft uitgelegd en de opgaven heeft uitgekozen. Hints en tips worden door alle studenten opgevangen. Opgemerkte fouten en gebreken in de uitleg kunnen direct worden hersteld. De online quiz is niet alleen een efficiënt maar ook een leuk en eenvoudig middel om feedback te krijgen over wat begrepen is. Een middel dat veel beter lijkt te werken dan te vragen of er nog vragen zijn.

De klassieke aanpak is minder schools. Veel wordt bepaald door de werkhouding en het lef van de student om te willen en durven studeren, ook als de docent niet in de buurt is. De onderwijsbelasting van de docent die een zaal kan boeien middels vakkennis, enthousiasme, een krijtje en een boek, is veel lager. We

kennen allemaal voorbeelden van dergelijke studenten en docenten. Maar hoeveel eigenlijk?

Differentiatie naar niveau

Studio Courses lijken dus onder andere een middel om de zwakere en gemiddelde student extra houvast en studiekader te bieden. Toch is de Studio Course meer dan een bezemwagen. Ook de sterke studenten geven aan dat ze gemotiveerd worden door activerende werkvormen, die bovendien meer mogelijkheden bieden tot differentiatie naar niveau. Het volgende voorbeeld illustreert dit. Binnen één cursus waarin de eerste zeven inleidende weken voor iedereen gelijk waren, konden negen groepen vervolgens aan de slag met projecten waarvan de moeilijkheidsgraad aansloot bij de cijfers van de drie toetsen binnen de eerste zeven weken.

Context: *Simuleren en Programmeren*, bachelorfase, 6EC, jaar 1, semester 2, week 8–14.

Collegestof: het leren programmeren in *Matlab*. Projecten in groepen van 3–4.

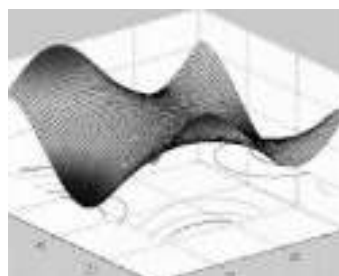
Groep A: programmeer, zonder van ingebouwde mogelijkheden van *Matlab* gebruik te maken, een numerieke benaderingsmethode voor de Laplacevergelijking $-\Delta u = 0$ op $[0, 1] \times [0, 1]$ met gegeven tijdsafhankelijke waarden van u op de rand, en los de hieruit resulterende matrixvergelijkingen (vernoemd naar Sylvester) $AU + UA = G$ iteratief op.

Groep B: vul ieder van de hokjes van een $n \times n$ rooster op met kans p en onderzoek of er een gevuld pad ontstaat van een zijde naar de overzijde. Onderzoek experimenteel de afhankelijkheid van n en p . Generaliseer naar drie dimensies.

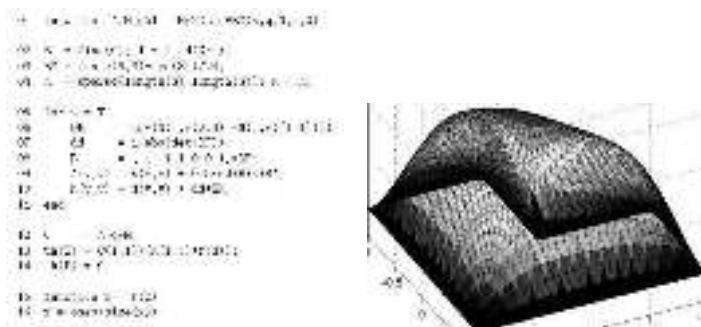
Geïntegreerde aanpak: bij deze cursus waarin leren programmeren centraal staat, loopt het niveau vaak sterk uiteen. Sommige studenten zijn handiger dan de docent, anderen hebben geen enkele ervaring met programmeren. Toch is een heterogene groep van dertig tot veertig personen goed aanstuurbaar in een Studio Classroom door projectwerk aan te bieden op niveau, dat gemeen wordt middels korte individuele tests in de eerste helft van de cursus. Groep B in dit voorbeeld koos voor een eenvoudig percolatieproject met extra begeleiding van de docent, met als maximale eindcijfer een acht.⁶ De sterkste groepen konden zich prima zelf redden, en kwamen onder slechts marginale begeleiding tot prachtige en verrassende resultaten die het doel van cursus ruim overstegen: het werk van groep A zou zeker niet hebben misstaan in de tweedejaarscursus uit het eerste voorbeeld.

Afwisselende theoretische en praktische toetsing

Een ander kenmerk van de cursussen is het steeds weer toetsen van de studenten. Naast een ingangstest aan het begin van week 3 zijn er drie programmeeropdrachten die in paren gemaakt



Een avi-filmpje van groep A, en een gevonden percolatiepad van groep B



Matlab-code voor bovenstaande PDE, toegepast op een winkelhaakvormig domein Ω

kunnen worden, en drie schriftelijke individuele toetsen over de theorie achter de programmeeropgaven van ongeveer een half uur.⁷ Vier van de zeven cijfers zijn dus individueel. Alle zeven moeten tenminste een 5 zijn. Als voorbeeld van deze afwisseling tussen theorie en praktijk met bijbehorende toetsen het volgende. Context: *Numerical Methods for Partial Differential Equations (PDE)*, Masterfase, 8EC, jaar 4 of 5, semester 2, week 7–10.

Collegestof: Sobolevruimtes, zwakke formulering van elliptische PDE-s, lemma's van Lax-Milgram en Céa voor foutgrenzen in $H^1(\Omega)$, Matlab-implementatie van de uit dit alles resulterende eindige elementen methode op willekeurige triangulaties van polygonale domeinen van

$$-\operatorname{div} K \nabla u + qu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{op } \partial\Omega,$$

en het regelmatig verfijnen van de gegeven triangulatie, oftewel, het opdelen van iedere driehoek in vier kleinere door de middelpunten van de zijden te verbinden.

	S&P	NW2	NLA	NUMPDE
Semester	2	3	7	8
# cursusweken	14	14	20	20
# middagen	14	14	14	14
× 45 minuten	4	4	3	3
EC belasting ²	6	6	8	8
# studenten	33	16	17	22
# geslaagd	28	12	13	19
% opkomst	95	85	90	95

Tabel 1 De cijfers van de vier Studio Courses *Simuleren en Programmeren*, *Numerieke Wiskunde 2*, *Numerical Linear Algebra* en *Numerical Methods for PDE*. Het aantal studenten is steeds het aantal studenten dat de eerste schriftelijke individuele test, doorgaans aan het begin van week 3, heeft gehaald.

Geïntegreerde aanpak: in de vier bijeenkomsten van drie uur wordt (functionaal)analyse afgewisseld met opgaven en de paarsgewij-

ze Matlab-implementatie van de eindige elementen methode. Er wordt veel aandacht besteed aan het feit dat de theorie achter de methode zich weinig aantrekt van eventuele praktische problemen bij het daadwerkelijk implementeren.

Door studenten tijdens de bijeenkomsten meteen met deze problemen te confronteren, vormen zich onverwachte vragen die leiden tot discussies, met een beter begrip tot gevolg (of op zijn minst de realisatie dat er meer achter zit dan in eerste instantie bij oppervlakkig toehoren werd vermoed). Zo is het zeer eenvoudig om uit te leggen hoe je een triangulatie verfijnt, maar zeker niet eenvoudig hoe je dit in optimale complexiteit kunt administreren binnen een computerprogramma.

Doordat de theoretische test vrij snel plaatsvindt na het inleveren van de programmatuur, en beide meetellen, heerst er een plezierige nu-of-nooit-werkhouding. Aangezien een groot deel van het begrip op deze manier al tijdens de bijeenkomsten wordt gevormd, dient de theoretische test voornamelijk om meeliften onmogelijk te maken.

Een dag nadat hij op het college is genoemd wint Peter Lax de *Abel Prize*. Op de cursuswebsite wordt in een handomdraai een aantal links geplaatst en de studenten ontvangen meteen een e-mail hierover in de wekelijkse nieuwsbrief *NUMPDE Digest*.

Enkele cijfers en opmerkingen

De cijfers in tabel 1 geven een indruk van de vier cursussen. Het aantal studenten is steeds het aantal studenten dat de eerste schriftelijke individuele test aan het begin van de derde week heeft gehaald. Deze eenvoudige ingangstest is bedoeld om studenten met een totaal ontoereikende voorkennis te kunnen weren bij de rest van het vak.

Vooralsnog lijkt het er echter op dat studenten zo nu en dan liever een half uur langer blijven om nog even door te werken, zelfs aan het eind van een middag van vier keer drie kwartier. Daarnaast staan ze ook vaak een half uur tevoren al voor de zaal te wachten. En de vele tientallen e-mails gaan op een enkele afmelding na gewoon over de cursus.

Noten

- Website auteur: <http://staff.science.uva.nl/~brandts>; website landelijke master wiskunde: <http://www.mastermath.nl>
- Per 1.9.2003 is een nieuw systeem van Europese studiepunten waardering ingevoerd: *European Credits (EC)*, voluit: studiepunten volgens het *European Credit Transfer System (ECTS)*. x oud studiepunt (40 studielasturen) = $x * 1,43$ EC, afgerond naar dichtstbijzijnde hele EC. Dus: één EC = 28 studielasturen en één cursusjaar bestaat uit 60 EC = 1680 studielasturen.
- Het moeizame werken met differentieerbare stuksgewijs cubische functies motiveert de introductie van in hogere jaren door studenten vaak schouder-ophalend bekeken concepten als zwakke differentieerbaarheid en Sobolevruimtes, die het relatief simpele gebruik van continue stuksgewijs lineaire functies rechtvaardigen.
- Digitaal fotograferen en publiceren op het web van schoolborden is een leuk idee dat ik voor het eerst zag bij Joost Hulshof (VU).
- Dit lijkt veel beter te werken dan te vragen of studenten de stof hebben begrepen, en of er nog vragen zijn. Voor de docent is enige bekendheid met html en php of cgi vereist.
- Bij turnen en schoonspringen heeft een oefening of een sprong ook vaak een uitgangswaarde die bij perfecte uitvoering lager kan zijn dan een tien.
- Dit alles speelt zich grotendeels af tijdens de bijeenkomsten.

Gerard Alberts

Werkgroep Wetenschap en Samenleving
Radboud Universiteit Nijmegen
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079, 1090 GB Amsterdam
g.alberts@cw.nl

Rainer Kaenders

Faculteit EWI, TU Delft
Instituut voor Leraar en School
Radboud Universiteit Nijmegen
Postbus 38250, 6503 AG Nijmegen
r.kaenders@ils.ru.nl

Interview Pierre van Hiele

Ik liet de kinderen wél iets leren

Pierre van Hiele is de stille kracht van de didactiek van de wiskunde in Nederland. Hij was wiskunde- en scheikundeleraar en is nooit veel op de voorgrond getreden. Zijn werk vindt brede internationale erkenning en is tegenwoordig niet meer weg te denken uit de wiskundendidactiek. Zijn werk, waaronder het invloedrijke *Begrip en inzicht*, werkboek van de wiskundendidactiek wordt nog steeds bestudeerd. Van Hiele is zesennegentig jaar.

“Het zinken van de Titanic, dat gebeurde toen ik drie was. Ik woonde in Amsterdam. Ik ben geboren in de Indische Buurt, in de Eerste Atjehstraat. Het huis staat er niet meer. Die straat heette al heel gauw de lelijkste straat van Amsterdam, en daar was ik trots op, eigenlijk, want je bent tenminste iets.”

Van Hiele studeerde van 1927 tot 1933 wiskunde in Amsterdam. Een aantal docenten maakten grote indruk op hem. “Ja, daar stond indertijd gewoon zes jaar voor. Het was een heel degelijke studie en ik was een van de weinigen die het klaarspeelden binnen die tijd. Mannoury, bijvoorbeeld, was een belangrijke leermeester. Ik heb altijd erg veel aan

hem gehad. Het was een schat van een man. Ik weet nog dat ik als student een keer bij hem thuis kwam. Toen bood hij aan om voor mij de fiets de trap op te dragen. Later heb ik hem nog een keer ontmoet als geëmmitteerde bij een examen. Er was een leerling die bij mij herexamen moest doen. Mannoury zei mij gewoonweg hoe ik dat moest aanpakken. ‘Kijk, de bedoeling van zo’n herexamen is toch dat het kind slaagt. Stel nu die en die vraag, dan gaat het altijd goed.’ Hij had oog voor het kind. Het was een schat van een man, Mannoury.”

“Heel belangrijk was ook Brouwer, wiskundige en filosoof. Je volgde zijn colleges, maar die duurden vijftien jaar. Daar kon je een stuk van opvangen. Dan was er nog De Vries: die gaf ook wiskunde maar meer in de bijwagen, zou ik haast zeggen. Hij was wel aardig; een verschrikkelijk aardige man.”

En Freudenthal? “Freudenthal begon meteen colleges te geven toen hij naar Amsterdam kwam. Hij speelde eigenlijk meteen de baas, hoor. Ten koste van Hurewicz, bijvoorbeeld.”

Heeft u al tijdens uw studie kennis ge-

maakt met mevrouw Ehrenfest-Afanassjewa? “Ja, God, die heb ik zo lang goed gekend. Door Freudenthal; hij zei me dat mevrouw Ehrenfest een belangrijk persoon was waar ik contact mee moest zoeken.” Hoe kwam het dan dat Freudenthal dat deed? Was hij toen al met didactiek bezig? “Over didactiek wisten we eigenlijk nog niet eens dat je daar studie van kon maken. Dat was toen onbekend.” Maar hoe gebeurde dat dan? Zei hij bij de koffie ‘Dit moet je eens lezen?’ “Zo goed was mijn relatie met Freudenthal niet dat ik met hem ging koffie drinken. Trouwens, Freudenthal heeft mij later nogal eens een hak gezet, jongens.”

Ik was bezeten van lesgeven

U wilde leraar worden? “Ja, en ik wilde een breed pakket. Daarom deed ik er ook scheikunde bij — ik heb ook een tijdje scheikunde gegeven.”

“Ik was bezeten van lesgeven. Didactiek, dat hoorde bij me. Ik heb verschrikkelijk veel bijles gegeven. In de tijd dat ik studeerde en bijles gaf, verdiende ik meer dan later als leraar.”

Wanneer is nou het vlammetje ontbrand

Pierre Van Hiele

Pierre Maria van Hiele werd in 1909 geboren te Amsterdam. Hij studeerde van 1927 tot 1933 wiskunde aan de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam. In de crisistijd verdiende hij zijn geld met bijles en kleine baantjes. In 1938 werd hij leraar aan het Montessori-lyceum te Overveen. Later werd hij leraar te Bilthoven en Voorburg.

Van jongs af aan wilde Van Hiele onderwijzer worden. Hij interesseerde zich reeds in zijn studietijd voor didactische vraagstukken. In 1948 bracht hij met zijn vrouw het *Werkboek der meetkunde* uit. Van Hiele was lid van de Wiskunde Werkgroep van de WVO, de *Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding* die van 1936 tot 1974 bestond. Hij was nauw betrokken bij het ontwerp-wiskundeprogramma voor de hbs B en gymnasium β dat de werkgroep in 1953 uitbracht.

Onder de begeleiding van de wiskundige Freudenthal (1905-1990) en de pedagoog en ontwikkelingspsycholoog Langeveld (1905-1989) deed hij naast zijn werk als docent onderzoek naar ontwikkelingspsychologische aspecten van wiskundeonderwijs. In 1957 promoveerde hij in Utrecht tegelijk met zijn vrouw Dina (Dieke) van

Hiele-Geldof (1911-1958) op het proefschrift *De problematiek van het inzicht*. Dit boek beschreef de niveautheorie voor het leren van meetkundige begrippen. In 1958 stierf zijn vrouw Dieke.

Na Van Hieles proefschrift volgde in 1959 het boek *Development and learning process: a study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics*. In het verlengde van de niveautheorie formuleerde Van Hiele vijf fasen in het (onderwijs-) leerproces. Verder had hij een ontwerptheorie waarmee onder zijn leiding de methode *Van A tot Z* tot stand kwam.

Hij publiceerde verschillende artikelen in nationale en internationale tijdschriften en bijdragen in bundels over wiskundendidactiek. Met het boek *Mogelijkheden van het wiskundeonderwijs* (1975) richtte hij zich tot zijn collega-docenten. In de boeken *Begrip en inzicht* (1973) en *Structuur* (1981, tweede druk 1997) verdiepte hij zijn theoretische inzichten. In 1986 verscheen *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Voor zijn baanbrekend werk ontving Pierre van Hiele eredoctoraten in Zuid-Afrika en Nieuw-Zeeland.

dat dit nadenken over het lesgeven zelf een vak werd? Wanneer bent u pedagoog van de wiskunde geworden? “Het is allemaal heel vreemd gegaan, hoor. Ik kreeg een baan in 's Hertogenbosch. Mijn vrienden waren verbaasd dat ik in dat katholieke oord was aangenomen, maar ja, mijn naam had zo vertrouwd geklonken: Pierre Marie van Hiele. Ik ging wel zo nu en dan naar Amsterdam terug om mijn leerlingen nog bijles te kunnen geven. Toen heb ik gezien dat je met lesgeven een geweldig eind kunt komen.”

Was u een goede leraar? “Mijn vrouw deed het echt beter. Oh ja, zij had meer geduld met de kinderen. Ik werd soms ongeduldig, als het antwoord niet gauw genoeg kwam en dan zeiden ze: ‘Laat uw vrouw het maar doen.’ Nee, ik was geen slechte leraar, denk ik.”

Maar u dacht er veel bij na? “Ja. En op mijn eigen school moest ik zo nu en dan bulderen om rust te krijgen. En als ik dan gebulderd had, dan waren ze voor tijden gekalmeerd.”

Dieke van Hiele-Geldof

Uw vrouw was ook studente in Amsterdam? “Dieke heb ik pas later ontmoet. Wel grappig eigenlijk. Ik weet niet of u aan zulke bijgelo-

vige dingen doet, maar Dieke beschermt mij nog steeds. Stel ik wil een boek kopen dat ik al heb, dan zorgt zij dat het ineens voor me ligt en dan weet ik: oh nee, dat moet ik niet kopen want dat heb ik al. En als ik de trap opga, zeg ik: ‘Dieke, hou je nog even de lift voor me vast’. Ik leef alle dagen met haar en dus droom ik niet van haar.”

“Als ze was blijven leven, was Dieke denk ik professor geworden. De ideeën kwamen wel van mij — echt, de ideeën zijn allemaal van mij gekomen — maar zij kon ze veel beter uitdragen. Ik zou in het begin wel geschrokken zijn als zij professor was geworden en ik niet. Maar ik zou dan toch moeten toegeven: jij kan het uitdragen, in de praktijk brengen.”

Langeveld tegen Piaget

“We zijn tegelijk gepromoveerd in 1957, mijn vrouw en ik. Het sprak eigenlijk vanzelf dat ik bij Langeveld zou promoveren en mijn vrouw bij Freudenthal. Maar het is andersom gegaan want — dat heb ik pas later van mijn schoon-zuster gehoord — mijn vrouw had niks op met Freudenthal.”

Hoe kwam u bij Langeveld terecht? “Langeveld zag dat ik nogal belangrijke dingen aan

het ontdekken was; hij probeerde mij altijd op te zetten tegen Piaget. Hij zei: ‘Bestudeer Piaget en dan kom je tot de conclusie dat hij rare dingen doet.’ Nou, Piaget deed rare dingen, want hij zorgde altijd dat degenen die onderzocht werden door hem niets konden leren. Daar wist ik een antwoord op. Ik deed die proeven over, maar liet die kinderen wel iets leren. Piaget beweerde bijvoorbeeld dat kinderen helemaal geen begrip van aantal hadden. Het getal zou hen wel iets zeggen, maar aantal hoorde daar niet bij. Die proef ging ik nadoen en vond inderdaad, dat de kinderen wel wisten van getal, maar niet van aantal. Ik had echter in die tijd zelf al kinderen en hen zette ik een drietal dingen voor. Zette ik nu de dingen wijder uit elkaar, dan zeiden ze: ‘Dat is meer.’ Vervolgens kwam ik op het idee niet drie maar twee dingen te nemen. Zette ik twee dingen wijder uit elkaar, dan reageerden ze: ‘Poeh, je hebt ze uit elkaar geschoven’. En herhaalde ik dan de situatie met drie dingen, dan zeiden ze meteen weer: ‘Je hebt ze uit elkaar geschoven’. Dus ik liet de kinderen leren, eigenlijk. Allerlei mensen waren verbaasd dat dat kon.”

Bestond er toen contact met Piaget? “Dat was het juist. Piaget heeft toch echt goede ideeën en ik heb het idee dat als ik met Piaget in aanraking was gekomen, dat wij het heel goed met elkaar hadden kunnen vinden. Ik voel erg veel verwantschap met Piaget.”

Dus het is Langeveld uiteindelijk niet gelukt om een wig tussen u en Piaget te drijven. “Nee, dat is de belangrijke conclusie, ja.”

U hebt Piaget nooit ontmoet? “Helaas niet. Ik denk ook niet dat hij op de hoogte was van mijn ideeën, anders zou hij misschien toch geprobeerd hebben om kennis met mij te maken.”

Freudenthal heeft van zijn kant in *Mathematik als pädagogische Aufgabe* Piaget frontaal aangevallen. “Ja, ja, dat ken ik en ik vind het eigenlijk een heel dom stuk. Neem me niet kwalijk hoor, maar ik vind dat Freudenthal daar eigenlijk niet zo heel veel van begrepen heeft. Bij verschillende passages moet ik denken: nou, Freudenthal zat er hier wel verschrikkelijk naast.”

En waarom? Begreep Freudenthal die dingen niet, of maakte hij zich er te snel van af? “Ik denk dat-ie ze niet begreep.”

Onderzoek

U was wiskundeleraar geworden. Deed U uw onderzoek naast de leraarsbaan of bent u bij Langeveld in dienst gekomen. “Nee, ik deed het ernaast. Dat was werkelijk niet zo heel moeilijk, nee.” Heeft u ooit geambieerd

om aan de universiteit te werken? “Niet heel sterk. Bovendien, telkens wanneer ik aan iets begon te denken, werd mij van vertrouwelijke kant gezegd: doe het niet, blijf toch leraar.” Wat waren dat voor mensen die dat zeiden? “Mensen die bijvoorbeeld zeiden: je houdt het wijnglas niet goed vast.” En dat liet u zich zeggen, omdat u geboren was in de Eerste Atjehstraat? “Ja, inderdaad. Ik ben in zekere zin een verlegen man en dat heeft men soms weten te exploiteren.”

Als Van Hiele gelijk heeft

Wanneer brak U nu echt door als didacticus van de wiskunde? “Men ging ineens over mij praten in Australië, waar ik nog geen contacten had. Toen ik vroeg hoe zij eraan kwamen, zeiden ze me dat het terugging op een lezing die ik in 1957 in Parijs heb gehouden. Bij die lezing had ik me een bepaalde gedachte laten ontvallen. En die gedachte was door een Rus zo goed opgevangen dat hij daaruit begreep: ‘Oh, maar als Van Hiele gelijk heeft dan kun je eigenlijk op de lagere school al met wiskunde beginnen.’”

Die gedachte was, dat er geen ondergrens is aan de leeftijd waarop je abstracte begrippen kunt begrijpen? “Ja, althans de ondergrens dat je natuurlijk het verschil moet we-

ten tussen getal en aantal. Zodra de leerling daar overheen is, kun je op de lagere school met wiskunde beginnen. Welnu, die gedachte had ik nog niet eens gehad. Mijn ideeën waren plotseling wereldkundig geworden doordat men ze in Rusland expliciet gemaakt had. Zo kreeg ik dus plotseling contacten bij de tegenvoeters, contacten die culmineerden in mijn eredocoraten.”

Niveautheorie

Wanneer kwamen die niveaus in zo uitgesproken vorm naar voren? “Bij onze promotie had ik al het idee van die niveaus. Ik had zelfs het idee dat er vijf niveaus waren. Ik wilde er eigenlijk in mijn promotie niet over spreken: stel je voor dat ze die niveaus helemaal onderuit halen, dan sta ik in mijn hemd. Maar mijn vrouw begon erover in haar dissertatie. Zij had dergelijke angsten helemaal niet.”

Over die niveaus gesproken. In *Begrip en inzicht* zijn het er drie, met de bijzonderheid dat het tweede niveau zich weer laat reduceren tot het eerste. “Dat is de niveaureductie, maar dat is nu eigenlijk een weg om eronder uit te komen. Een collega in Australië heeft de zaak nader bestudeerd en die zegt: ‘Van Hiele, je moet tenminste vier niveaus handhaven. Ja, hij heeft me gewoonweg overtuigd,

helemaal.’” Verdwijnt daarmee uit uw theorie dat er reductie plaatsvindt? “Soms vindt er een reductie plaats. Dat is, wat wij noemen, de gladde weg.”

De Nijmeegse vakdidacticus Lodewijk van Schalkwijk verdedigde in zijn proefschrift de stelling: ‘De niveautheorie van Van Hiele kent twee gezichten. Enerzijds gebruikt Van Hiele zijn niveaus om intern wiskundige theorievorming te beschrijven, anderzijds om de samenhang tussen *wetenschap* en *leefwereld* te modelleren. De Van Hiele theorie zou aan duidelijkheid winnen wanneer deze twee aspecten van elkaar werden onderscheiden.’

“Oh ja. Ik heb met het woord leefwereld zoveel moeite. Ik kan nooit goed begrijpen wat leefwereld eigenlijk is. Dat is mijn moeilijkheid. Dat woord wordt ook steeds gebruikt door mensen in de scheikunde. Die hebben het altijd over de leefwereld. En dan moet ik zeggen, ik snap hem eigenlijk niet goed.” Maar los van het woord leefwereld. “Het gaat eigenlijk over de wiskunde.”

Het gaat niet primair over het kind dat wiskunde moet leren in de klas? “Ja, kijk, het kind dat wiskunde moet leren in de klas, kan volgens mij niet laag genoeg beginnen. Zodra het kind weet dat er verschil is tussen getal en aantal, kun je meteen beginnen.”



Pierre van Hiele

De niveautheorie van Van Hiele

De dissertaties van het echtpaar Van Hiele hebben de basis gelegd voor de ontwikkeling van een niveautheorie van wiskundige leerprocessen. Later werd dit door Pierre van Hiele verder uitgewerkt. In fenomenologische traditie gaat de niveautheorie uit van intuïtieve, onvoorwaardelijke en directe ervaring van kennis van de wereld en de onderliggende structuren. In een wiskundig leerproces onderscheidt Van Hiele verschillende niveaus van denken over wiskunde. Aanvankelijk had de niveautheorie betrekking op het meetkundeonderwijs, maar al snel is zij uitgebreid naar andere delen van het vak. De eerste versie onderscheidde drie niveaus; in de latere, meest bekende vorm werden het er vier.

1. *Grondniveau of nulniveau (visueel of intuïtief niveau)*: het kind bekijkt het object visueel of intuïtief. Bijvoorbeeld de herkenning van een gelijkbenige driehoek is vergelijkbaar met de herkenning van "een eik of een muis".
2. *Eerste niveau (beschrijvend niveau)*: een object wordt herkend aan zijn eigenschappen. Bijvoorbeeld een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden - of twee gelijke hoeken. Wanneer het kind deze eigenschappen herkent, dan twijfelt het er niet meer aan dat het daadwerkelijk te maken heeft met een gelijkbenige driehoek is, zelfs indien het object onduidelijk is of indien er sprake is van gezichtsbedrog.
3. *Tweede niveau (informeel deductief niveau)*: hier zijn ook de eigenschappen niet meer onderwerp van beschouwing; nu gaat het om *het verband* tussen de eigenschappen: het gelijk zijn van twee zijden van een driehoek impliceert de gelijkheid van twee hoeken, en andersom.
4. *Derde niveau (theoretisch deductief niveau)*: hier is het karakter van de verbanden tussen eigenschappen onderwerp van studie. Wat wordt er bedoeld met stellingen als: "De gelijkheid van twee zijden van een driehoek impliceert dat ook twee hoeken overeenkomen."? En wat wordt er bedoeld als er van de geldigheid van de omkering van de

ze stelling wordt gesproken?

Op elk niveau reflecteert men expliciet de inwendige structuur van het vorige niveau. Het is denkbaar dat de objecten van het tweede niveau weer kunnen worden gezien als objecten van het eerste: dit is de zogenaamde niveaureductie. In zijn vroege boek *Begrip en inzicht* geeft Van Hiele hierdoor de niveaus een meer cyclisch dan hiërarchisch karakter. In aansluiting op zijn niveaubeschrijving geeft Van Hiele een uitgebreide uiteenzetting van de leerprocessen die het mogelijk maken deze niveaus te doorlopen. Daarna heeft hij de algemene kenmerken van zulke leerprocessen geformuleerd.

Zou men bijvoorbeeld kinderen die het tweede niveau nog niet hebben bereikt, vragen om een bewijs te leveren, dan menen zij volgens Van Hiele dat zij moeten *laten zien dat iets waar is*. Zij zien niet het verband tussen veronderstelling en conclusie. Het lijkt voor de leerlingen alsof de leraar de waarheid in twijfel trekt van een uitspraak die voor hen volkomen helder is. Worden wiskundige bewijzen op deze manier te vroeg in het leerproces ingebracht, dan zou dat tot gevolg hebben dat de leerlingen het nut van wiskunde ernstig betwijfelen: meestal zijn ze reeds zonder bewijs overtuigd van de juistheid van bepaalde uitspraken. Zij houden daar een volledig verkeerde indruk van het wezen van een deductief systeem aan over.

De kern van Van Hiele's niveautheorie is dat de objecten van één en dezelfde wetenschap op verschillende niveaus iets heel anders voorstellen. Dit verklaart ook waarom mensen die op verschillende niveaus van denken zitten, langs elkaar heen praten. Anders dan bij de door Piaget aangeduide fases van begripsvorming zijn de niveaus van Van Hiele geen ontwikkelingspsychologische stadia. Zij beschrijven het leerproces van de wiskunde zelf, zoals mensen — meestal kinderen, maar in principe ook volwassenen — dat doormaken. Kinderen, bij wie rekening wordt gehouden met de niveaus van hun leerproces, kunnen volgens Van Hiele juist zeer vroeg een hoge mate aan abstractie bereiken.

denthals zei: 'Dat is eenvoudig zo'n prachtige gedachte van Van Hiele.'

En dan ook om het eerst in twee dimensies te doen? "Inderdaad."

Beweert U dat een kind, zodra dat het verschil tussen getal en aantal kent, reeds binnengedrongen is in de wiskunde? "Ja, zodra dat kind dat begrip vector heeft gehad op de lagere school, dan is de overgang naar de middelbare school een fluitje van een cent."

En moet een kind later nog toegang verschaft worden tot de wiskunde, via contexten buiten de wiskunde? "Het kind heeft dan natuurlijk in het middelbaar onderwijs geen enkele moeilijkheid meer."

Maar is het ook gemotiveerd in het middelbaar onderwijs? "Ja, helemaal gemotiveerd. Het kind heeft geen enkele moeilijkheid meer met bijvoorbeeld goniometrie en trigonometrie. Dat gaat allemaal als het ware vanzelf. Het zit al in die lagere-school-kennis besloten."

U zegt dus eigenlijk: op de basisschool beginnen met vectoren. "Ja, op de leeftijd dat het kind heeft ontdekt dat er een aantal is. Dan heb je meteen de vrijheid om wiskunde aan te reiken. En als je dan maar begint met vectoren, dan gaat het verder van een leien dakje."

Als het kind nou zegt: waarom moet ik dat leren? Ik wil geen wiskundige worden. "Natuurlijk, dat willen de meeste kinderen niet. Toch maken ze dergelijke opmerkingen helemaal niet. Wanneer zij deze eerste aanzet gekregen hebben, dan zijn ze eigenlijk meteen wel overtuigd dat ze het goed kunnen."

Wat is er zo bijzonder aan vectoren, dat daardoor de wiskundige wereld open zou liggen voor alle kinderen? Kan ik ook een ander onderdeel nemen van de wiskunde dat dezelfde werking heeft? "Nee, nee. Het moeten beslist vectoren zijn."

Waarom? "Omdat die vectoren je de mogelijkheid geven van richting — tweedimensionaal tenminste. En de negatieve getallen krijg je er ook vanzelf bij."

"Een kind vraagt zich niet meer af: waarom doe ik wiskunde? Want wiskunde is eigenlijk zo'n fijn vak, dat doe je met liefde. Zo geloof ik dat het is. Je doet het met liefde."

Kun je dat aan de vectoren zien dat de kinderen dat met liefde gaan doen? "Dat kun je niet zien aan die vectoren. Je kunt dat alleen maar merken in het middelbaar onderwijs, dat het allemaal zo vlot gaat, dat je plezier hebt in de wiskunde." Hoe weet u dat? "De kinderen zeggen het zelf."

Maar nu is het in het wiskundeonderwijs in Nederland zo ingericht, dat in het curricu-

Schakel nu helemaal over, doe het nu anders

"Je kunt dan al meteen invoeren: het begrip vector. Dat kan met heel jonge kinderen. Je moet wel ergens een plaatsbepaling hebben,

maar zodra die plaatsbepaling er is dan kun je met behulp van vectoren zeggen: ga naar links of ga naar rechts. Dit is een idee waar Freudenthal heel erg verrukt van was. Freu-

lum nauwelijks vectoren behandeld worden. “Nee, daarom zijn we een geweldig eind teruggezakt in het onderwijs. Ik vind eigenlijk het onderwijs tamelijk treurig, zoals het nu is. Mijn idee is: schakel nu helemaal over en doe het nu anders.”

Intuïtie

“Het geval wil, daar wordt de laatste tijd over gepubliceerd, dat door elkaar meisjes het beter doen dan jongens. Dat verbaast mij eigenlijk ook niet, want die meisjes gebruiken hun vrouwelijke intuïtie. En de jongens hebben iets tegen vrouwelijke intuïtie. In mijn boek *Structuur* heb ik erg de nadruk gelegd op intuïtie. Daar is men in Nederland wars van. Het boek is dan ook niet bijzonder goed verkocht.”

Wat is het belang van intuïtie in de wiskunde? “Eigenlijk iedere gedachte die je hebt, begint met intuïtie. Voor wie het bestaan van intuïtie wil ontkennen, heb ik een eenvoudig voorbeeld: iemand belt je op en je hoort meteen wie het is. Probeer dat nou maar uit te leggen op een rationele manier.”

Maar juist in de wiskunde, het meest rationele vak in de hele cultuur, juist daar zegt u: laat de intuïtie haar rol spelen? “Ja. En ik blijf erbij dat alle gedachten die we hebben die berusten op intuïtie.” Ook in de wiskunde? “Juist in de wiskunde”.

U hebt beschreven hoe abstractie werkt, hoe het denken van het ene niveau naar het andere verloopt. Wat is de verhouding tussen het proces van abstraheren en intuïtie? “Intuïtie speelt een rol op ieder niveau”.

Hans Freudenthal

Welke rol heeft Freudenthal in uw leven gespeeld? “Ik had niet zo erg veel op met Freudenthal. Van begin af aan al niet. Hij was een bezig iemand. Hij bracht me wel op ideeën. Dat was het eigenlijk.”

Freudenthal hanteerde andere beschrijvingen van het proces van abstractie. In de *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht* zette hij dat proces uiteen in termen van *comprehensie* en *apprehensie*. Dacht hij ook anders over de rol van denkniveaus? “Ja, ik geloof eigenlijk dat hij van die denkniveaus niet veel begrepen heeft.”

Freudenthal was uw promotor. Hij heeft hij u toch ook geholpen naar buiten te treden — buiten Nederland? “Dat laatste beslist niet. Nee, het was juist zo dat ik voor mijzelf moest opkomen. Ik herinner mij bijvoorbeeld een congres in Amerika, waar een spreker naar mijn werk verwees en zei: ‘die Van Hiele waar ik het nu over heb, die zit hier in de zaal. Mevrouw Van Hiele staat u even op.’ Iemand in het publiek, een Duitser, vroeg waar hij over mijn werk kon lezen. Ik antwoordde dat er binnenkort een boek van mij in het Engels zou verschijnen. Daarop zei Freudenthal die ook aanwezig was: ‘U kunt het ook bij mij in mijn boek lezen.’ Dat was dus niet waar. Hij zat mij gewoon weer dwars. Zo was Freudenthal, ja.” Zat hij u de hele tijd dwars? “Eigenlijk wel, ja. Freudenthal is nooit voor mij een leuke man geweest, nee.” Waar kan hij u nou dwars hebben gezeten. U werkte toch in heel andere omgevingen? “Ja, maar hij probeerde iedere keer mij iets af te snoepen.”

Later hebt U meer erkenning voor uw werk gevonden. Heeft U toen vrede met hem kunnen sluiten? “Nou, vrede? Eigenlijk niet. Dan had je eerst oorlog moeten maken. Ik maak geen oorlog.”

U gaat ervan uit dat Freudenthal uw werk niet helemaal begreep. Begreep U hem, omgekeerd, wel? “Ja, wat ik van hem kende dat begreep ik. En daar was ik het ook vaak mee eens. Ik verkeerde niet in permanente ruzie met Freudenthal. Van zijn kant had hij erg veel respect voor mijn ideeën van vectoren op de lagere school. Daar heeft hij mij erg om geprezen.”

Leraar, met hart en ziel

Bij de onderwijsontwikkeling voor de Mammoet heeft Freudenthal in 1971 de mensen die leermethodes aan het ontwikkelen waren naar Utrecht gehaald en min of meer of het matje geroepen. Als we Henk Schuring mogen geloven (NAW, september 2001) kregen die mensen op hun donder. Kunt U zich dat herinneren? “Freudenthal zou mij op het matje roepen? Kom, nou.”

Heeft u ook contact gehad met andere wiskundigen zoals Van der Blij? Een punt dat Van der Blij altijd weer naar voren brengt is: je kunt zoveel theorie ontwikkelen als je wil: uiteindelijk komt het toch altijd weer op de leraar aan. Bent u het dat met hem eens? “Ook ik ben toch altijd eigenlijk leraar gebleven — met hart en ziel.”



Boekbesprekingen

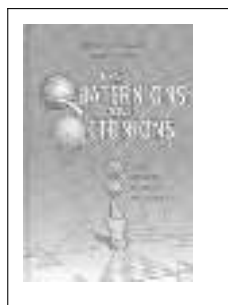
| Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl



J.H. Conway, D.A. Smith
On Quaternions and Octonions
Natick, MA : A.K. Peters Ltd., 2003
159 p., prijs \$ 29,-
ISBN 1-56881-134-9

Drie facetten van de in de titel genoemde getallen, namelijk hun meetkunde, hun rekenkunde en hun symmetrie komen speciaal in dit boek aan de orde. Voor de in de titel niet genoemde, maar in hoofdstuk 1 wel behandelde complexe getallen is alles vrij eenvoudig; meetkunde en symmetrie vragen om rotaties en spiegelingen in het platte vlak, rekenkunde behandelt de gehele getallen van Gausz ($a + bi$ met gehele a en b), maar ook de gehele getallen van Klein ($a + b\omega$ met $\omega^2 + \omega + 1 = 0$).

De quaternionen in hoofdstuk 2 vragen meer aandacht, het zijn de bouwstenen voor drie- en vierdimensionale meetkunde en de behandeling van de symmetrie vraagt meer groepentheorie; de regelmatige lichamen in drie en vier dimensies zijn interessanter dan de regelmatige veelhoeken in het vlak. De quaternionengetaltheorie heeft twee facetten die analogie vertonen met respectievelijk de gehele getallen van Gausz en van Klein. De gehele quaternionen van Lipschitz zijn de getallen $a + bi + cj + dk$ met gehele a, b, c en d ; de gehelen van Hurwitz die waarin a, b, c, d óf alle geheel zijn óf alle een geheel getal plus $1/2$ zijn. De norm van de quaternionen van Hurwitz zijn ook gehele rationale getallen. Voor de gehelen van Lipschitz werkt het principe van deling met kleine rest niet, voor de Hurwitz gehelen werkt dit principe wel, zodat de getaltheorie in het laatste geval eenvoudiger is. Maar ontbinding in priem-quaternion factoren vraagt toch nog wel wat subtiële redenering. We zijn nu zo ongeveer bij het midden van het boek aangekomen. Er komen nu twee aanloophoofdstukken over de beroemde sommen-van-kwadratenidentiteiten en Moufangloops alvorens de octonionen (vroeger in de Utrechtse traditie octaven geheten) aan de orde komen. De associativiteit is dan ook verloren gegaan, de regels voor de vermenigvuldiging zijn gecompliceerder geworden, de meetkunde en symmetrie eveneens.

Bij de definitie van gehele octonionen (op de manier van Hurwitz) speelt de even kwadratische vorm met determinant 1 door Korkine en Zolotarev in 1877 geconstrueerd, nu beter bekend als de vorm behorende bij de exceptionele Liegroep E_8 , de rol van normvorm.

De achtdimensionale delingsalgebra van de octonionen, door Graves in 1844 geconstrueerd is een typisch voorbeeld van abstractie op grond van nieuwsgierigheid onderzocht. Maar er blijkt samenhang met vele niet-triviale meetkundige zaken. En als men op internet octonionen opzoekt vindt men naast verwijzingen naar wiskundig onderzoek ook verwijzingen naar recent theoretisch natuurkundig onderzoek. Het boek van G.M. Dixon, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*, verwijst naar titels over superstring theorie, twistors, uitbreiding van het standaardmodel enzovoorts. Zowel dit fysicaboek als het werk van Conway-Smith bespreken het magisch vierkant van Freudenthal, bij iedere delingsalgebra kan een elliptisch vlak, een projectief vlak, een vijfdimensionale

symplectische meetkunde of een metasymplectische meetkunde geconstrueerd worden.

In een uitvoerig overzichtsartikel in de *Bulletin of the AMS* (deel 39 (2002) p. 145-205) van J.C. Baez vindt de lezer een lijst van 14 onderwerpen over octonionen die de auteur daar dringend aanraadt voor nadere bestudering. Zij die meer willen weten over de rol van octonionen in wis- en natuurkunde zou ik voor de lezing van het boek van Conway en Smith eerst dit overzichtsartikel willen aanraden, om dan de smaak te pakken te krijgen voor de verfijnde getaltheorie in het tweede deel van het besproken boek.

Alles bij elkaar genomen is de vondst van Graves in 1844 in de eerste jaren van de eenentwintigste eeuw een actueel onderwerp, ook in toepassingen binnen de wiskunde en natuurkunde geworden. Zouden de exceptionele Liegroepen en speciaal de E_8 toch een rol spelen in de fysische modellen van de wereld? Dan hebben de octonionen een goede toekomst en wellicht zelfs de getaltheorie van deze octonionen!

F. van der Blij



A.I. Dale

**Most honourable remembrance.
The life and work of Thomas Bayes,
Sources and Studies in the History of
Mathematics and Physical Sciences**

New York: Springer Verlag, 2003

667 p., prijs €69,50

ISBN 0-387-00499-8

Bovenstaand boek is gewijd aan de initiator van de vorm van statistiek die naar hem is genoemd: de Bayesiaanse statistiek. De auteur concentreert zich op de persoon en het werk van de predikant Thomas Bayes (1702-1761), wat betekent dat slechts een beperkt deel gaat over de bijdrage aan de statistiek waardoor hij beroemd is geworden. Dale heeft in dezelfde serie van uitgever Springer *A History of Inverse Probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson* doen verschijnen. Lezers die in de geschiedenis van Bayesiaanse statistiek zijn geïnteresseerd kunnen beter dat boek ter hand nemen. Ook het boek van Anders Hald, *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, is dan een betere keus. Bayes' overige werken gaan namelijk over heel andere onderwerpen: over Goddelijke goedgunstigheid, over de theorie van fluxies en over semiconvergente rijen. Deze drie publicaties zijn van een inleiding en een conclusie voorzien en in onderhavig werk gepubliceerd, samen met het werk over inverse waarschijnlijkheid. Verder zijn er nog een aantal brieven en een aantekeningenboek opgenomen. Er wordt ook aandacht besteed aan Bayes' leven.

Het boek is niet een intellectuele biografie in de gebruikelijke zin van het woord. Ik kan me eigenlijk ook nauwelijks een auteur indenken die zo'n biografie zou kunnen schrijven. Gezien de variëteit van de onderwerpen van Bayes' publicaties zou zo iemand over een zeer brede expertise moeten beschikken. En om zijn leven en carrière goed te kunnen duiden, is een grondige kennis van de Engelse samenleving van de achttiende eeuw noodzakelijk. Het boek is meer een becommentarieerde bronnenpublicatie waaraan een bespreking van allerlei feiten uit Bayes' leven is toegevoegd.

De auteur bekijkt Bayes' publicatie over inverse waarschijnlijkheid vanuit modern mathematisch-statistisch gezichtspunt: "Pos-

tulates, definitions, axioms, and propositions succeed each other in logical order, and the general appearance of the work does not seem foreign to the modern eye". Desondanks is de auteur er zich van bewust, dat het vanuit historisch gezichtspunt niet altijd even correct en interessant is om wetenschap van vroeger aan moderne maatstaven te meten; "Some of Bayes's arguments seem to foreshadow aspects of limit theory; but presented as they were (and as they could then only possibly be), they fail to convince today, adequate though they might have been at the time" (beide citaten op p. 249).

Degene die geïnteresseerd is in het leven en de intellectuele achtergrond van de initiator van de Bayesiaanse statistiek kan plezierige uren met dit boek doorbrengen.

I.H. Stamhuis

I. Satake et al. (eds.)

Kenkichi Iwasawa Collected papers, Vols. 1 & 2,

Heidelberg: Springer Verlag, 2001

880 p., prijs €298,-

ISBN 4-431-70314-4

Kenkichi Iwasawa werd in 1917 in Shinshuku-mura (Kiryuushi) geboren. Hij overleed in Tokyo in 1998. Iwasawa was een van de invloedrijkste wiskundigen van de twintigste eeuw. Velen zullen hem kennen van de formule $G = KAN$: de Iwasawadecompositie van een semisimpele Liegroep. Iwasawa's belangrijkste werk betreft echter de algebraïsche getaltheorie. Hij creëerde een geheel nieuwe vakgebied dat nu *Iwasawatheorie* heet. De technieken zijn zeer krachtig en speelden een grote rol in Wiles' bewijs van de Laatste Stelling van Fermat in 1993. Tegenwoordig is Iwasawatheorie een zeer belangrijk instrument in de arithmetische algebraïsche meetkunde.

Iwasawa studeerde aan de Universiteit van Tokyo. De grote getaltheoreticus Takagi ging net met pensioen toen Iwasawa begon. Takagi's leerling Iyanaga doceerde er nu. De eerste twaalf artikelen van Iwasawa gaan over groepentheorie. Ze zijn geschreven tussen 1941 en 1944. Iwasawa bestudeert hierin niet alleen eindige groepen, maar ook oneindige, topologische groepen en groepenringen daarover. In 1945 promoveert Iwasawa. Dan wordt hij ernstig ziek. Hij gaat pas in 1947 weer aan het werk. In 1949 wordt hij assistentprofessor aan de universiteit van Tokyo. In die jaren levert Iwasawa een belangrijke bijdrage aan de oplossing van het vijfde probleem in Hilbert's lijst. Iwasawa karakteriseert Liegroepen die modulo hun radicaal compact zijn volledig in termen van hun topologische groepsstructuur. In dit artikel vinden we de beroemde Iwasawadecompositie van een semisimpele Liegroep.

In 1950 wordt Iwasawa uitgenodigd om op het *Internationale Congres* in Cambridge (MA) te spreken. Hij blijft vervolgens twee jaar aan het IAS in Princeton. Van de geplande terugkeer naar Japan wordt afgezien als Iwasawa een positie aan het MIT krijgt aangeboden. Hij blijft in de Verenigde Staten. Gedurende zijn Princetonjaren werd Iwasawa sterk beïnvloed door Emil Artin. Hij leert er algebraïsche getaltheorie en publiceert een artikel in de *Annals* over adëleringen. Het verzameld werk bevat ook een brief die Iwasawa in 1952 aan Dieudonné schreef. Hierin legt hij uit hoe de zetafunctie van een getallenlichaam gedefinieerd kan worden als integraal over de idèleklassengroep. Dit is een idee dat later vorm kreeg in het beroemde proefschrift van John Tate.

Het speelt tegenwoordig een zeer belangrijke rol in de automorfe representatietheorie.

In de volgende jaren bestudeert Iwasawa vooral cyclotomische lichamen, lichamen van de vorm $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ waar ζ_m een m -de eenheidswortel is. André Weil had een paar jaar eerder gesuggereerd om voor elk priemgetal p de cyclotomische lichamen in de oneindige toren

$$\mathbf{Q}(\zeta_p) \subset \mathbf{Q}(\zeta_{p^2}) \subset \mathbf{Q}(\zeta_{p^3}) \subset \dots$$

te zien als analoga van constantenuitbreidingen van een functie-lichaam. Het asymptotische gedrag van de klassengroepen van de lichamen in deze toren zou dan wellicht lijken op dat van de groepen van k_n -rationale punten van de Jacobianen van een vaste kromme X over een eindig lichaam $\mathbf{F}_q$, die men over de constantenuitbreidingen $k_n = \mathbf{F}_q(\zeta_{p^n})$ bekijkt.

In 1958 bewijst Iwasawa een zeer interessante stelling in deze richting. Hij bewijst dat de precieze p -macht die het klassengetal h_n van het lichaam $\mathbf{Q}(\zeta_{p^n})$ deelt, van de vorm p^{e_n} is met

$$e_n = p^{\mu n} + \lambda n + \nu, \quad \text{voor } n \gg 0.$$

Hier zijn μ , λ en ν de *Iwasawa-invarianten* van de uitbreiding. Het zijn gehele getallen. Als de invariant μ gelijk aan nul zou zijn, dan bevestigt deze formule Weils idee.

Iwasawa bestudeert daarna klassengroepen in willekeurige $\mathbf{Z}_p$ -uitbreidingen. Dit zijn lichaamsuitbreidingen waarvan de Galoisgroep isomorf is met de additieve groep $\mathbf{Z}_p$ van de p -adische getallen. De eerder genoemde toren van cyclotomische lichamen is het belangrijkste voorbeeld ($p \neq 2$). Alle natuurlijke limietconstructies die men uitvoert in een $\mathbf{Z}_p$ -uitbreiding zijn modulen over een zekere pro-eindige groepenring Λ . Jean-Pierre Serre, die in die jaren op het *Séminaire Bourbaki* Iwasawa's werk populariseert, merkt op dat Λ isomorf is met de ring $\mathbf{Z}_p[[T]]$ van machtreeksen over $\mathbf{Z}_p$. Dit is een ring van Krull-dimensie 2. Het is juist het soort ring dat Iwasawa in zijn jonge jaren bestudeerde. Heden ten dage ziet men de ring Λ als een speciaal geval van een universele deformatiering. Iwasawa's stelling volgt uit een grove classificatie van eindig voortgebrachte Λ -modulen. Aan elk eindig voortgebracht Λ -moduul kent Iwasawa een *karacteristiek polynoom* toe en de vorm van het polynoom bepaalt de Iwasawa-invarianten μ , λ en ν . Hij bepaalt vervolgens welke vorm het karakteristieke polynoom van het p -stuk van de projectieve limiet van de klassengroepen kan hebben. Dit polynoom kan dan gezien worden als een arithmetisch analogon van het karakteristiek polynoom van Frobenius dat men associeert aan een kromme over een eindig lichaam.

Begin jaren '60 werkt Iwasawa de theorie van $\mathbf{Z}_p$ -uitbreidingen verder uit. Hij doet berekeningen die suggereren dat inderdaad geldt $\mu = 0$. Het onderwerp krijgt een enorme impuls als Iwasawa een artikel van T. Kubota en H.W. Leopoldt onder ogen krijgt. In dit artikel worden p -adische L -functies geconstrueerd door de gebruikelijke Dirichlet- L -functies p -adisch te interpoleren. Iwasawa ziet in dat dit dezelfde functies behoren te zijn als zijn karakteristieke polynomen. Nu is *Iwasawatheorie* geboren. Het *hoofdvermoeden* van deze theorie is het idee dat de analytisch geconstrueerde L -functies van Kubota-Leopoldt gelijk zijn aan de algebraïsch geconstrueerde functies van Iwasawa.

In 1967 verlaat Iwasawa het MIT en wordt hij hoogleraar aan de universiteit van Princeton. In de twintig jaar die hij in Princeton zal doorbrengen, promoveren Ralph Greenberg, Larry

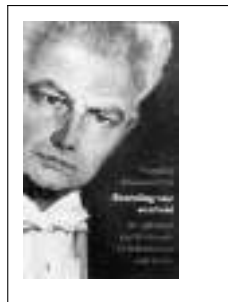
Washington en Bob Coleman bij hem.

In de jaren '70 trekt Iwasawatheorie zeer veel beoefenaars. Er wordt veel gerekend en speciale gevallen van het hoofdvermoeden worden bewezen. In 1978 bewijzen Bruce Ferrero en Larry Washington dat $\mu = 0$ voor de eerder genoemde cyclotomische $\mathbf{Z}_p$ -uitbreiding. Rond die tijd bewijzen John Coates en Andrew Wiles een speciaal geval van het Birch-Swinnerton-Dyer-vermoeden met behulp van technieken uit de Iwasawatheorie. In zijn proefschrift bestudeert Ralph Greenberg $\mathbf{Z}_p$ -uitbreidingen van totaal reële lichamen. Zijn vermoeden dat voor deze lichamen de λ -invariant ook gelijk aan 0 is, is nog altijd niet bewezen.

Het eerste teken dat het hoofdvermoeden ging bezwijken kwam in 1976, toen Ken Ribet de omkering van een stelling van Herbrand uit de jaren '30 bewees. Ribet gebruikte de arithmetiek van modulaire krommen. Het idee om deze krommen bij het probleem te betrekken is volstrekt nieuw en gaat terug op Serre. Deze zag in die jaren in dat vele klassieke congruenties geïnterpreteerd konden worden in termen van modulaire Galoisrepresentaties. Een paar jaar later verfijnt Wiles het werk van Ribet en dan, in 1981, bewijzen Mazur en Wiles het Hoofdvermoeden van de Iwasawatheorie. Het bewijs is lang en gebruikt een hoop algebraïsche meetkunde in de stijl van Grothendieck. Het grondidee is echter hetzelfde als dat van het bewijs van Ribet.

De editors van Iwasawa's verzameld werk zijn G. Fujisaki, K. Kato, M. Kurihara, S. Nakajima en I. Satake. De twee delen bevatten 65 artikelen van Iwasawa en een mathematische biografie van de hand van John Coates. De artikelen zijn in het Duits, Engels of Japans geschreven. De Japanse artikelen zijn voorzien van een uitgebreide samenvatting in het Engels. Het is heel boeiend de ontwikkeling van Iwasawa's werk te volgen in deze twee goed-verzorgde banden.

R. Schoof



H. Blauwendraat
**Worsteling naar waarheid.
De opkomst van Wiskunde en Informatica aan de VU**

Zoetermeer: Uitgeverij Meinema, 2004

248 p., prijs € 20,-

ISBN 90-211-3973-1

Dit boek is ontstaan uit de gelijknamige afstudeerscriptie in de studie Wiskunde die de schrijver in 2001 aan de Vrije Universiteit (VU) heeft voltooid. Er wordt een schets gegeven van de geschiedenis van de huidige afdelingen Wiskunde en Informatica. Inhoudelijk komen onderwijs en onderzoek nauwelijks aan de orde, omdat de schrijver poogt het boek leesbaar te maken voor lezers die wel algemeen wetenschappelijk geïnteresseerd zijn, maar terzake geen vakopleiding hebben genoten. Feitelijk geeft het boek een chronologie van gebeurtenissen en omstandigheden die bij het ontstaan en de groei van de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, waaruit genoemde afdelingen zijn voortgekomen, een rol speelden. De schrijver heeft tal van archiefstukken geraadpleegd en een tiental ooggetuigen ondervraagd en zodoende allerlei bijzonderheden aan een breder publiek bekend kunnen maken. Zo worden, bijvoorbeeld, de in sommige opzichten zo tragische gebeurtenissen tijdens de tweede wereldoorlog weer in herinne-

ring gebracht. Het boek bevat slechts weinig statistisch materiaal, maar men kan er toch vinden dat de studierichting Wiskunde in 1930 begon met twee hoogleraren en drie studenten terwijl er nu voor Wiskunde en Informatica 28 hoogleraren, 42 docenten en (ongeveer) 300 studenten zijn.

De afstudeerscriptie was geschreven naar aanleiding van de toen nog verwachte honderdste geboortedag van J.F. Koksma (1904-1964), aan de VU de eerste gewoon hoogleraar voor Wiskunde, benoemd in 1930. Aan het werk van Koksma voor de VU en aan zijn betekenis voor de wiskunde wordt veel aandacht besteed. De titel van het boek is ontleend aan de slotzin van een voordracht die Koksma in 1936 voor een algemeen publiek hield, en waarin hij zich (dus) genoopt zag slechts over de grondslagen van de wiskunde te spreken. In die tijd woedde de grondslagenstrijd zó hevig dat ze ook buiten de wiskunde werd opgemerkt en weerklink vond; op de VU bij de huisfilosoof Vollenhoven die meende, uitgaande van gereformeerde beginselen, voor het intuïtionisme te moeten kiezen. Koksma begon zijn werkzaamheden dus in een milieu dat een zekere vooringenomenheid bezat. Blauwendraat besteedt dan ook tamelijk veel aandacht aan de opvattingen van Kant, Brouwer en Vollenhoven, maar toch wellicht niet genoeg om de lezer met de wijsbegeerte van de wiskunde vertrouwd te maken. Het boek bevat weliswaar twee voorbeelden uit de wiskunde om het betoog te illustreren; maar het eerste hiervan (p. 107) is een slordige beschrijving van diophantische ongelijkheden en een vertekende definitie van transcendente getallen (doelende op het werkterrein van Koksma); het andere geeft een onhandig gekozen en ongebruikelijk bewijs van de tussenwaardestelling waarvan evenwel niet alleen een deel van de redenering maar ook de logische pointe ontbreekt.

Met het begrip 'vooroordeel' gaat de schrijver nogal ongenueanceerd om: zijn openingszet '*wetenschap zonder vooroordelen is onmogelijk*' (p. 17) wordt Abraham Kuyper in de mond gelegd. Nu weten we precies wat Kuyper schreef en wat hij bedoelde (uit zijn zogenaamde Stonelezingen, 1898), hij bedoelde een religieuze stellingname, toentertijd bekend als 'antithese' maar onder rooms-katholieke invloed ook 'zuil' genoemd en later vervlakt tot 'verzuiling'. De schrijver transformeert het begrip tot een pragmatisch uitgangspunt (p. 19), namelijk, enigszins verwarrend, de invalshoek van de verhouding van wiskunde cum annexis, en van de wiskundigen, tot het christelijk karakter van de VU. Deze invalshoek vernauwt hij vervolgens tot drie vragen: (1) bestaat een christelijke wiskunde, (2) heeft het christelijk karakter invloed op de sociale structuren binnen de disciplines, zoals omgangsvormen, en (3) zijn er bepaalde ideeën over de 'dienstbaarheid' der wetenschap. De laatste twee van deze vragen betreffen gedrag en vlijt, en kunnen hier gevoeglijk buiten beschouwing blijven. De eerste vraag bepaalt het interessante deel van het boek. Het antwoord op de vraag is evenwel negatief, zoals de VU-hoogleraar Fabius al in 1884 op knorrige toon had aangegeven (p. 36), door de VU-leiding in 1971 werd erkend (p. 135), en door de schrijver, ogenschijnlijk schoorvoetend, wordt toegegeven (p. 194: "als zo'n wiskunde mogelijk zou zijn geweest").

Het boek bevat een lijst van promoties in Wiskunde en Informatica, en het is geïllustreerd met een groot aantal foto's waaronder veel portretten van genoemde personen. Het personenregister aan het eind van het boek is tamelijk onvolledig. Opvallend is dat de schrijver bij de nadruk waarmee hij aan het begin over vooroordelen spreekt, geen aandacht schenkt aan de mogelijke voor-

ingenomenheden van zijn veel geciteerde bronnen en zegslieden, zodat de geïnteresseerde lezer met een hoop huiswerk blijft zitten. Het boek is verschenen als nr. 5 in de *Historische Reeks VU* waarin delen over natuur- en scheikunde in voorbereiding zijn die aandacht zullen geven aan een andere coryfee van de VU, de wetenschapshistoricus R. Hooykaas (p. 217). Hier zien wij met belangstelling naar uit.

W. van der Meiden



A. Neeman

Triangulated Categories

Annals of Mathematics Studies 148

Princeton: Princeton University Press, 2001

499 p., prijs \$ 52,50

ISBN 0 691 08686 9

Getrianguleerde categorieën spelen een rol in onder andere de homologische algebra, homotopietheorie en K-theorie, en dus ook in de algebraïsche topologie en in de theorie van motieven. In de homologische algebra bijvoorbeeld definieert men afgeleide functoren met behulp van injectieve of projectieve resoluties, of algemener acyclische resoluties. Resoluties zelf zijn complexen, uniek op quasi-isomorfisme na. Voor een abelse categorie A definieert men dan ook de *afgeleide categorie* $D(A)$ door in de categorie van complexen in A de quasi-isomorfismen te inverteren. Afgeleide categorieën zijn niet meer abels, maar hebben wel de structuur van *getrianguleerde categorie*: een collectie gedistingeerde driehoeken die de notie van korte exacte rij vervangt (denk hierbij aan de lange exacte cohomologierij). Allerlei ingewikkelde zaken zoals spectraalrijen voor afgeleiden van samengestelde functoren, dualiteit en Künnethformule voor cohomologie worden veel simpeler als ze in termen van afgeleide categorieën worden beschreven. Het is een interessant feit dat dezelfde notie van getrianguleerde categorie ook op natuurlijke wijze uit de homotopietheorie tevoorschijn komt.

Het te recenseren boek is begonnen als een project van de schrijver, Amnon Neeman, en Vladimir Voevodsky, één van de twee ontvangers van de Fields medaille in 2002. De bedoeling was een boek te schrijven over toepassingen van de theorie van getrianguleerde categorieën op motieven. Neeman zou de theorie schrijven, en Voevodsky de toepassingen.

Maar zoals wel vaker gebeurt, explodeerde Neemans deel van het werk buiten proportie, en bestaat het boek nu alleen uit de formele theorie van getrianguleerde categorieën. De motivische toepassingen hopen Neeman en Voevodsky in een vervolg te geven.

De getrianguleerde categorieën die uit de hoek van de motieven komen, hebben niet de eindigheidseigenschappen (zoals compact voortgebracht zijn) die in de klassieke literatuur altijd worden aangenomen. Het boek bevat dan ook voor een groot deel generalisaties van bekende resultaten naar deze nieuwe situatie. De bewijzen zijn echter noodzakelijk volkomen anders. Afgezien van deze generalisaties bevat het boek veel nieuwe resultaten over de structuur van getrianguleerde categorieën.

Voor een gedetailleerde beschrijving van de inhoud van de 9 hoofdstukken en 5 appendices verwijzen we naar de review van

Stanislaw Betley in de *Mathematical Reviews* van de AMS. Laten we hier volstaan met zeggen dat het eerste hoofdstuk begint met de definitie van getrianguleerde categorie, en met het noemen van lokalisatie stellingen (Verdier, Thomason, Bousfield) en de representeerbaarheidsstelling van Brown. Het gebruik van cardinaal-getallen om 'kleine objecten' te definiëren maakt dat het boek ook nog eens een extra verzamelingstheoretisch smaakje heeft. Ieder hoofdstuk en iedere appendix eindigt met een kort historisch overzicht.

Het boek is zonder twijfel wetenschappelijk van grote kwaliteit. Het is goed en inspirerend geschreven en aangenaam te lezen. De schrijver heeft een goed gevoel voor wat een lezer interesseert: "Sweeping, general theorems about arbitrary 2-categories tend to leave us cold. We become impressed only when we learn that these theorems teach us something new. Preferably something new about an old, concrete example that we know and love." De benodigde voorkennis voor dit boek is de taal van categorieën en functoren, geadjungeerden, enige elementaire homologische algebra. Het boek is interessant voor ieder die al weet wat een getrianguleerde categorie is, of die weet dat hij dit moet leren. *B. Edixhoven*

struct knot invariants. In this chapter too, examples play a crucial role. Here, as a particular case, the representations of the quantum group $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ are explicitly given.

Hopf algebras in braided categories are also studied in Part II. Using the method of 'bosonisation', this kind of Hopf algebras is taken back to the level of usual Hopf algebras.

Further topics are a natural construction of the standard quantizations of the universal enveloping algebras of complex semi-simple Lie algebras, together with the Serre relations, group factorizations and the bicrossed product construction and other more advanced topics.

Some aspects of the theory of Hopf algebras, such as integrals, are not covered in this book, and it does not refer to many other aspects of quantum group theory such as the theory of locally compact quantum groups. It certainly can serve as a primer for students who want a short introduction to the theory of quantum groups within the purely algebraic framework. This book is well written and one of its interesting features is that it contains many of the standard examples.

A. Van Daele



Shahn Majid
A Quantum Groups Primer
London Mathematical Society Lecture Note Series 292
Cambridge: Cambridge University Press, 2002
169 p., prijs £28,-
ISBN 0-521-01041-1

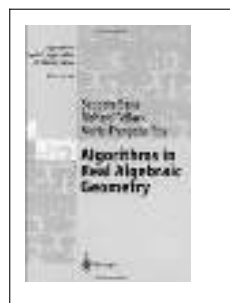
This book on quantum groups is the text of a course of 24 lectures — each lecture is a chapter in the book — given at the University of Cambridge in 1998. These were algebra lectures given in the Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics.

This book consists of three parts. The first part treats some of the basic theory of Hopf algebras. The second part deals with representation theory and the last part is on more advanced topics.

In the view of the author, quantum groups are Hopf algebras. He starts his lectures with elements of the theory of Hopf algebras. This is done in the first chapters. The definition is followed by the two motivating examples (the group algebra of a finite group and the universal enveloping algebra of a finite-dimensional Lie algebra). Also included is a simple example of a non-commutative, non-cocommutative Hopf algebra. Dual pairs of Hopf algebras are studied, giving rise to the notion of an action of a Hopf algebra on an algebra. The dual notion, a coaction, is treated as well. Throughout, the basic examples are studied, such as the Hopf algebra $SL_q(2)$ as coacting on the quantum plane A_q^2 .

Part I also studies quasitriangular structures, as well as the quantum double and dual quasitriangular structures.

In Part II of the lecture series, representations of quantum groups are treated, together with some of their applications. The theory is intimately related with braids and knots. Therefore the first lecture in this part is devoted to braided categories. There is an obvious link between these braided categories and quasitriangularity. Hecke algebras and the natural relation with braid and knot theory come into play, and a method is obtained to con-



S. Basu, R. Pollack, M.F. Roy
Algorithms in real algebraic geometry
Algorithms and computation in mathematics 10
Berlin: Springer Verlag, 2003
602 p., prijs €60,-
ISBN 3-540-00973-6

Consider polynomials $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s$ in n variables and with real coefficients. Then $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0 \text{ and } g_j(x) \geq 0\}$ is called a semi-algebraic set.

This book is about the algorithmic study of such sets. For instance, a rather nontrivial problem asks for an efficient determination of the connected components of a semi-algebraic set. As a special case, if the set is finite we are asking for all of its elements.

It helps to generalize and replace $\mathbb{R}$ with an arbitrary real closed field. Indeed many algorithms are based on perturbing a problem infinitesimally, then solving the perturbed problem, and finally taking a limit to solve the original problem. For this one wants to extend the base field with a positive but infinitely small deformation parameter. That is just one of the many techniques one may learn from this book.

Other important ingredients include logic, in particular quantifier elimination and the transfer principle, Morse theory, real root counting, semi-algebraic triangulations, simplicial homology, an effective Nullstellensatz, and subresultants. All this is built up from scratch: instead of referring to other texts for standard material, the book gives short introductions to whatever is needed. It is all very practical, only theory which is relevant for the algorithms is treated. However, this choice does mean that much is excluded.

The authors are expert guides, they have preferred clarity to conciseness. They are not afraid to repeat themselves, telling a story first in the simplest case, then again and again with extra wrinkles added as the situation gets more complicated, which it definitely does.

But the patient reader is well rewarded. For instance, one soon learns what projecting semi-algebraic sets to a coordinate axis has to do with preservation of properties, such as the number of connected components, under a field extension. This is of course important when adjoining infinitely small deformation parameters. Towards the end, the book becomes more like a research paper, providing algorithms with better complexity than those in use at the time of writing.

W. van der Kallen

make a powerful appearance.

The authors write about all this with erudition and charm taking the excellent pedagogical principle of proving things mostly in the simpler cases only and not attempting full generality. They have included more than a hundred exercises, with hints, which range all the way upward to the highest level of open research problems such as something equivalent to proving that there are infinitely many Mersenne primes.

M. Hazewinkel



G. Everest, T. Ward
Heights of polynomials and entropy in algebraic dynamics

Berlin: Springer Verlag, 1999

212 p., prijs €67,36

ISBN 1-85233-125-9

The height of an algebraic number, a point of an algebraic variety, or a polynomial is an important notion in algebraic number theory and algebraic geometry. It is in one way or another a measure of complexity that has proved its value in these areas, viz. the ones that have classification numbers 11 and 14 in MSC2000.

A discrete time dynamical system is simply a map T of a compact metric space X into itself. If X is a compact topological group and T is a homomorphism, it is an algebraic dynamical system. One important number attached to a (discrete time) dynamical system is its entropy, a number that up to a point is classifying in the sense of dynamical system theory. This is area 37 in MSC2000.

At first sight it would seem exceedingly unlikely that there would be any relation at all between entropy and height. Reality is otherwise: they are very much intertwined, and this is what this unusual and very interesting book is about.

Let's give some detail for the simplest manifestation of this. The Mahler measure of a polynomial

$$F(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_d \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i)$$

is

$$M(F) = |a_d| \prod_{i=1}^d \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Its logarithm $m(F)$ is also called Mahler measure.

Now take an integral $n \times n$ matrix A and take the induced map T_A of the torus R^n/Z^n into itself. Then (see page 35 of the book under review): The topological entropy of the transformation T_A is equal to the (logarithmic) Mahler measure of the characteristic polynomial of the matrix A .

Such a thing cannot, of course, be just a coincidence. There is something very fundamental going on that is still not all that well understood. What has just been said is only the beginning of an absorbing (interspecialistic) area of research, which, in a way, started with the quest for large prime numbers (Lehmer, 1933). One aspect that takes much space in the present volume is the situation with polynomials in more than one variable. Here elliptic curves, those much loved objects from algebraic geometry, again



T.W. Palmer
Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras II

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 49

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

834 p., prijs £75,-

ISBN 0-521-36638-0

Dit is het tweede deel van een omvangrijk werk over Banach algebras en *-algebras. Deel 1 kwam uit in 1994 en bedoelde te voorzien in "a gentle introduction to most of the research on general Banach algebras". Het vond een zeer gunstig onthaal in de *Mededelingen van het Wiskundig Genootschap*, september 1996. Hier wordt Deel 2 besproken dat werd gepubliceerd in 2001 en de theorie van *-algebras — dat wil zeggen, complexe algebra's met involutie — bestrijkt. De pretentie is: een werk "including all known results on general Banach *-algebras". Het gebruik van het woord 'general' indiceert in dit verband dat geen uitputtende, systematische behandeling wordt geboden van C^* -algebra's.

De twee boeken tellen samen zo'n 1600 pagina's, elk circa 800. Het totale werk is ingedeeld in 12 hoofdstukken en er is (in overeenstemming met de bovengenoemde pretentie) een indrukwekkende hoeveelheid materiaal bijeengebracht en verwerkt. Per saldo is mijn mening over dit boek — ruimer: deze twee boeken — dan ook positief, wat niet wegneemt dat er hier en daar aanleiding is voor een kritische kanttekening.

Hieronder volgt de bespreking van het tweede boek dat bestaat uit de Hoofdstukken genummerd 9 t/m 12. Ik houd het kort, zeker in verhouding tot de omvang van het werk.

Hoofdstuk 9, getiteld **-Algebras*, behandelt de algebraïsche theorie van *-algebra's sec, dat wil zeggen zonder verdere a priori veronderstellingen. De voor de ontwikkeling van de theorie noodzakelijke operatorentheorie staat her en der verspreid in de tekst. Dit komt de overzichtelijkheid niet ten goede. Elders in het boek komen vergelijkbare, wat minder overzichtelijke, situaties voor.

Hoofdstuk 10, getiteld *Special *-Algebras*, is gewijd aan de bestudering van *-algebra's waaraan wel extra eisen zijn opgelegd: G^* -algebra's, S^* -algebra's, Sq^* -algebra's, etc. Het heeft geen zin om al die onderscheidingen hier te benoemen (ten behoeve van een indruk: voor een Sq^* -algebra geldt een zeker 'square root axiom'). Het lijkt er op alsof het de bedoeling is na te gaan hoe ver men kan komen zonder de (ultieme) eis 'Banach *-algebra' die in Hoofdstuk 11 wordt gesteld. De auteur zelf noemt Hoofdstuk 10 "the heart of this volume". Of het bij anderen dan de echte specialist (bijvoorbeeld graduate students) warme gevoelens voor het onderwerp zal opwekken durf ik niet zomaar aan te nemen.

Hoofdstuk 11, gaande onder de naam *Banach *-Algebras*, gaat over de structuur waar het uiteindelijk om draait: de Banach algebra met involutie. Voor een groot deel gaat het om herformuleringen en toespitsingen van het eerder ontwikkelde materiaal. In de inleiding tot het hoofdstuk wordt de indruk gewekt dat men de lezing van het boek ook hier zou kunnen aanvangen. Of dit ook zo is betwijfel ik: het aantal terugverwijzingen lijkt mij te groot.

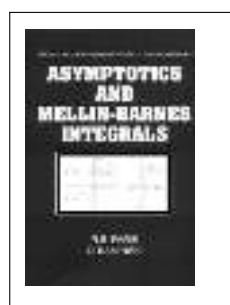
Hoofdstuk 12 heeft als titel *Locally Compact Groups and their *-Algebras*. Het is een lang hoofdstuk: 226 pagina's (alleen overtroffen door Hoofdstuk 9 met 238 pagina's). Voor het elders in het boek centrale begrip *-algebra is hier, naar het mij voorkomt, slechts een bijrol weggelegd. Daarmee is dit hoofdstuk een beetje een vreemde eend in de bijt. Ook de presentatie wijkt af van die in de rest van het boek: de toegankelijkheid is minder.

Met die toegankelijkheid is het voor het overige redelijk gesteld, zeker als men de omvang van het werk in aanmerking neemt. De auteur neemt regelmatig de moeite om de relatie tussen verschillende delen van de tekst toe te lichten. Verder gaat hij veelvuldig in op historische achtergronden. Het aantal verwijzingen is enorm, en het boek bevat een adequate index en een goed notatieoverzicht.

Zoals ik eerder aanduidde is mijn oordeel over dit boek positief, maar dan wel met een zekere nuancering. Er zijn inderdaad bepaalde onevenwichtigheden zoals — om er nog maar eens een te noemen — een naar mijn mening niet goed uitgekristalliseerde *Preface*. Misschien ligt de verklaring voor deze en eerder aangeduide onvolkomenheden hierin dat de schrijver geen kans heeft gezien het boek geheel naar de oorspronkelijke bedoeling af te maken. Zelf zegt hij hierover: "Volume II has two missing chapters. (...) In the end, I had neither the space nor the energy to complete these chapters. Age and health intervened." Voor wat wél tot stand werd gebracht, voor de enorme hoeveelheid arbeid die hier is verricht, is per saldo grote waardering op zijn plaats. Het heeft voor degene die een actieve interesse in de theorie van Banach algebra's heeft een waardevol naslagwerk opgeleverd. *H. Bart*

curves - the crossroads of theory and computation), A.Joux (The Weil and Tate pairings as building blocks for public key cryptosystems), B.Poonen (Using elliptic curves of rank one towards the undecidability of Hilbert's 10th problem over rings of algebraic integers), and T.Satoh (On p-adic point counting algorithms for elliptic curves over finite fields).

The *ANTS* takes place every second year and is a milestone in the field of number theory and cryptography. The articles in this book reflect the broad interest of the organizing committee and the participants. The emphasis lies on the mathematical theory as well as on computational results. We recommend the book to students and researchers who want to read about current research in number theory and arithmetic geometry and its applications. *R. Carls*



R.B. Paris, D. Kaminski
Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals

Cambridge: Cambridge University Press, 2001
Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 85

422 p., prijs £70,-
ISBN 0-521-79001-8

The *Mellin-Barnes integrals* considered in this book are of the form $\int_{\gamma} Q(s)z^{-s}ds$ where $Q(s)$ involves gamma functions, trigonometric functions and zeta functions, while the contour γ runs from $c - i\infty$ to $c + i\infty$, avoiding singularities of the integrand. Such integrals have been used in particular in the theory of special functions, by Barnes and several other authors, among whom C. S. Meijer in his theory of the *G*-function. The authors are mainly concerned with the asymptotic behavior of these integrals, which we denote further on by *MB-integrals*, as $z \rightarrow \infty$.

The first three chapters are devoted to an introduction to asymptotics and properties of Mellin transforms with among others MB-integral representations of hypergeometric and confluent hypergeometric functions. Next, applications are given to transformation of the series, number-theoretic sums, solutions of special classes of ordinary differential equations and difference equations, and of integral equations with product or convolution kernels.

Chapter 5 is devoted to asymptotic expansions. First those of algebraic type are treated: they are obtained by shifting the path of integration and evaluating the residues at the singularities which are encountered by this shifting. Then saddle-point approximations are treated. Finally exponential asymptotic expansions are considered: they arise by estimating the integrand by means of factorial series. These methods are applied to several special functions, and to sums and integrals which allow a representation by MB-integrals.

In Chapter 6 the Stokes phenomenon for a confluent hypergeometric function and a special *G*-function is treated based on MB-integral representations for these functions. Here, the remainder term after truncation of the asymptotic series at the smallest term is represented by an MB-integral for which another asymptotic expansion is given. This leads to exponentially improved expansions and the smooth transition of asymptotic expansions across



C. Fieker, D.R. Kohel (eds.)
Algorithmic Number Theory, 5th International Symposium, ANTS-V, Sydney, Australia, July 7-12, 2002

Lecture Notes in Computer Science 2369, proceedings

Berlin: Springer Verlag, 2002

517 p., prijs €71,-

ISBN 3-540-43863-7

The book to be reviewed contains the conference proceedings of the *ANTS-V (5th Algorithmic Number Theory Symposium)* held at Sydney, Australia, in July 2002, (<http://magma.maths.usyd.edu.au/antsv>). The first edition of the book had the title *Algebraic Number Theory*, which was a misprint and was corrected later on by Springer. There are four other books in this series published by Springer, which contain the proceedings of the *ANTS I-IV* (LNCS 877, 1122, 1423, 1838).

The book contains 39 articles about computational algebraic number theory, arithmetic geometry and cryptography. A set of representatives is given by the five invited talks: M.Bhargava (Gauss decomposition and generalizations), J.Coates (Elliptic

Stokes lines in terms of error functions. By a repetition of this procedure of writing remainder terms as MB-integrals and then truncating the corresponding asymptotic expansion optimally, so-called hyperasymptotic expansions are obtained. The theory is also applied to exponentially improved asymptotics of the gamma function. The results are compared with those obtained by a numerical procedure.

In Chapter 7 multiple MB-integrals are treated. The main emphasis here is on Laplace-type multiple integrals where the integrand contains an exponential with a polynomial as exponent. First, these are transformed to multiple MB-integrals and then algebraic expansions are derived. The last chapter gives three applications: (i) to generalised Euler-Jacobi series, (ii) to a new asymptotic formula for the zeta-function on the critical line and (iii) to the Percy integral arising in diffraction theory.

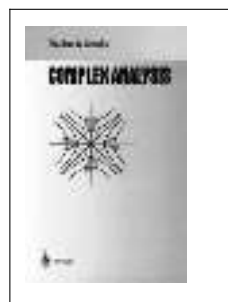
The authors have presented their material in a clear way. The book is a welcome addition to the literature on asymptotics.

B. Braaksma

hetzelfde is als wissen. Het blijkt dat Manhattan op een chip lijkt: het Central Park kan vergeleken worden met een geheugeneenheid waarover geen bedrading loopt terwijl die bedrading juist wel mag lopen over het weggennet van Manhattan, bestaande uit loodrecht op elkaar staande straten. De Steinerbomen kunnen dus toegepast worden om chips optimaal te bedraden.

De drie andere filmpjes zijn van het zelfde niveau. Al met al is de cd vergelijkbaar met een tv-documentaire, aangevuld met een paar kleine programmaatjes die je hooguit één keer speelt; wel is alles netjes verzorgd en onderhoudend.

R. Lindenbergh



T.W. Gamelin

Complex analysis

Undergraduate texts in mathematics

Berlin: Springer-Verlag, 2001

478 p., prijs €79,95

ISBN 0-387-95093-1

Dit boek is een introductie in de complexe analyse. Het eerste deel van het boek bevat het standaardmateriaal voor een eerste cursus in de complexe analyse. Deze theorie kan op ruwweg drie manieren onderwezen worden: die van Cauchy (met nadruk op lijnintegrallen), die van Weierstrass (met nadruk op machtreeksen) en die van Riemann (met de nadruk op meetkunde).

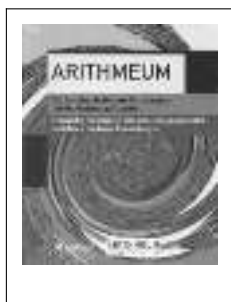
De schrijver kiest voor de manier van Cauchy met af en toe een uitstapje naar de manier van Riemann. Dit lijkt mij een goede keuze aangezien deze manier het meest 'calculus-achtig' is en dus het best aansluit bij wat de gemiddelde student al weet als hij aan een cursus complexe analyse begint. De uitstapjes naar de meetkundige manier van Riemann zijn essentieel om vat te krijgen op meerwaardige functies zoals de wortelfunctie en de logaritme. De auteur kiest ervoor om in de definitie van analytische functie op te nemen dat de afgeleide continu moet zijn (net als Cauchy dit deed) en pas op bladzijde 123 volgt de stelling van Goursat die zegt dat deze aanname overbodig is. Dit lijkt didactisch gezien de juiste keuze.

Iedere sectie in het boek heeft één centraal idee. De auteur legt eerst dit idee (helder) uit en vervolgens volgt er een overvloed aan (goede) opgaven om dit idee te verwerken. Alweer didactisch juist.

Het tweede deel van het boek bevat een selectie uit de 'modernere' complexe analyse. De onderwerpen die behandeld worden zijn: conforme afbeeldingen met als hoofdstellingen de Riemann afbeeldingsstelling en de uniformisatie stelling; harmonische functies met als hoofdstellingen de Poisson integraalformule en de stelling van Perron; priemgetallen met als hoofdstellingen de stelling van Dirichlet en de priemgetalstelling; normale families met als hoofdstelling de stelling van Montel en als toepassing Julia verzamelingen en de Mandelbrot verzameling; approximatie met als hoofdstelling de stelling van Runge en als gevolgen de stelling van Mittag-Leffler en de productstelling van Weierstrass.

Ik denk dat dit een uitstekend boek is om complexe analyse uit te leren. De auteur heeft de juiste keuzes gemaakt, zijn uitleg is helder en de opgaven zijn bijzonder goed.

M. Opmeer



Arithmeum : old problems in discrete mathematics and its modern applications

Berlin : Springer, 2002

cd-rom

ISBN 3-540-14901-5,

prijs €30,-

Eindelijk is het gelukt de *Arithmeum* cd-rom te bekijken: de cd draait niet onder *Unix/Linux* en heeft problemen met diverse smaken van Windows, waardoor ik nu zeer vertrouwd ben met het 'Bitte warten'-scherm. Een nieuwe, sterke laptop draait de cd echter zonder problemen af onder *Windows XP*. Maar dan ben je ook binnen een lesuur klaar: de cd bevat vier filmpjes die alles bij elkaar drie kwartier in beslag nemen.

De cd is ontwikkeld door *Arithmeum*, een rekenmuseum in Bonn dat verbonden is aan het plaatselijke onderzoeksinstituut voor discrete wiskunde. De vier filmpjes behandelen dan ook alle vier discrete optimaliseringsmethodes. In het derde filmpje bijvoorbeeld worden Steinerbomen behandeld onder de titel *Van Fermat naar chip-ontwerp*. We zien een plaatje van een aantal steden in de Verenigde Staten. Een mevrouw legt uit dat het eerder geïntroduceerde Fermatprobleem van het vinden van een punt dat de som van de afstanden tot drie gegeven punten minimaliseert, gegeneraliseerd kan worden: we zoeken nu een aantal extra punten in de VS opdat de totale lengte van het netwerk dat de gegeven steden en de extra punten verbindt, minimaal is. Zo'n netwerk heet een Steinerboom. Vervolgens verschijnt een kaartje van Europa waarop Londen, Rome en Sint Petersburg aangegeven zijn. Nu mogen we zelf aan de slag. De kortste weg van Rome naar Sint Petersburg via Londen bedraagt 3350 kilometer. We worden gevraagd het Fermatpunt te vinden. We komen in de buurt, maar vinden de juiste locatie (Bonn) net niet. We mogen nog meer doen. Nu het Steinerprobleem in Manhattan en dus in de Manhattanmetriek.

De programmaatjes zijn makkelijk te bedienen, alleen is het bij het maken van de Steinerboom wel lastig dat teruglopen

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

The Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is a ladder competition for students. Others may participate 'hors concours'. The results can also be found on internet at: <http://www.nieuwarchief.nl/uwc>

Each issue contains three problems A, B and C. A total of 12 points can be obtained for each problem: 8 for a complete and correct answer, at most 2 points for elegance, and at most 2 points for possible generalisations. To compute the overall score, the totals for each problem are multiplied by a factor 3, 4 and 5, respectively.

The three best contributions will be honoured with a Sessions Prize of respectively 100, 50 and 25 Euro. The points of the winners will be added to their total after multiplication by a factor of respectively 0, 1/2 and 3/4. The highest ranked participant will be given a prize of 100 Euro, after which he/she starts over at the bottom of the ladder with 0 points.

Twice a year there is a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will also receive a prize of 100 Euro.

Group contributions are welcome. Submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred; participants should repeat their name, address, university and year of study at the beginning of each problem/solution. The submission deadline for this session is November 1, 2005. The Universitaire Wiskunde Competitie is sponsored by *Optiver Derivatives Trading*, the *Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde* and the *Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen* in Delft.



Problem A

In what follows f, g are two continuous functions.

- 1) Determine $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ and $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ such that $f \circ g(x) = x + 1$ and $g \circ f(x) = x - 1$.
- 2) Determine $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ and $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ such that $f \circ g(x) = x + 1$ and $g \circ f(x) = 2x$.

As usual, the symbol ' $\circ$ ' denotes the composition of functions and $\mathbf{R}^+$ the set of all strict positive real numbers.

Problem B

1. Let G be a group and suppose that the maps $f, g : G \rightarrow G$ with $f(x) = x^3$ and $g(x) = x^5$ are both homomorphisms. Show that G is Abelian.
2. In the previous exercise, by which pairs (m, n) can $(3, 5)$ be replaced if we still want to be able to prove that G is Abelian.

Problem C

For $s > 1$ define

$$\Phi_1(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \text{ with } p \text{ over all primes } \equiv 1 \pmod{4}$$

and

$$\Phi_3(s) = \prod_q \left(1 - \frac{1}{q^s}\right)^{-1} \text{ with } q \text{ over all primes } \equiv 3 \pmod{4}.$$

Describe how $\lim_{s \downarrow 1} \frac{\Phi_3(s)}{\Phi_1(s)}$ can be computed to 'any' degree of (high) accuracy (precision). (The use of an algebra-package is permitted.)

Star Problem

It is known that $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{3}{\sqrt{5}}$. This can be checked with Mathematica or Maple. Does there also exist an elementary proof for this equality?

Edition 2005/1

For Session 2005/1 of the Universitaire Wiskunde Competitie we received submissions from Leendert Bleijenga; DESDA (Nijmegen); the team of Gerben Stavenga, Jan Kuipers, and Jaap Eldering; Hendrik Hubrechts; Ruud Jeurissen; and Jaap Spies.

Problem 2005/1-A Calculate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^3}.$$

Solution This problem has been solved by Leendert Bleijenga; DESDA (Nijmegen); the team of Gerben Stavenga, Jan Kuipers, and Jaap Eldering; Hendrik Hubrechts; Ruud Jeurissen; and Jaap Spies. The solution of Gerben Stavenga, et al. is given here.

Using the standard results $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$ we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 6 \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 6 \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{2n+1} \right) - 1 + \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 6 \left(4 \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) - 1 + \frac{1}{N+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 6 \left(4 \left(\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n} + 1 \right) - 1 + \frac{1}{N+1} \right) \\ &= 6(-4 \log 2 + 3). \end{aligned}$$

Using the standard results $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^n i^3} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \left(\sum_{n=1}^N \frac{2}{n^2} - 1 + \frac{1}{(N+1)^2} - 2 + \frac{2}{N+1} \right) \\ &= \frac{4}{3}(\pi^2 - 9). \end{aligned}$$

Problem 2005/1-B On a ruler of length 2 meter are placed 100 black ants and one red ant. Each ant walks with a speed of 1 meter/minute. If two ants meet then both turn 180° . So does an ant that reaches the end of the ruler. At the start the red ant is exactly in the middle. Calculate the probability that the red ant is exactly in the middle after 4 minutes.

Solution This problem was solved by Michel Bel; DESDA (Nijmegen); the team of Gerben Stavenga, Jan Kuipers, and Jaap Eldering. We give Michel Bel's solution.

Let the ants take part in a relay race: when two ants meet, each ant gives his baton to the other ant. This way every baton moves in a single direction until the end of the ruler, after which it turns around and comes back. Hence: after four minutes every baton has

made exactly one complete round and has come back to the same place. All batons are therefore at the same spot as at $t = 0$. (And the ants too. . .)

As the ants have not changed order every ant, including the red ant, has his own baton back. Conclusion: every ant is back at its own starting point. $P = 1$

In the original exercise one does not look after 4 minutes but after 2 minutes. That is interesting because the probability is no longer 1 and is not 0 either.

Problem 2005/1-C We call a triangle *integral* if the sides of the triangle are integral. Consider the integral triangles with rational circumradius.

1. Prove that for any positive integral p there are only a finitely many integral q such that there exists an integral triangle with circumradius equal to p/q .
2. Prove that for any positive integral q there exist infinitely many integral triangles with circumradius equal to p/q for an integral p with $\gcd(p, q) = 1$.

Solution This problem has been solved by the team of Gerben Stavenga, Jan Kuipers, and Jaap Eldering, and by Jaap Spies. We give the solution of the team of Gerben Stavenga et al.

Solution to 1

If the denominator q is bigger than $2p$, the diameter of the circumcircle is smaller than 1, so that no integral sides and also no integral triangles will fit in the circle. So the values for q , such that an integral triangle with circumradius equal to p/q possibly exists, are limited to $1 \dots 2p$, which is a finite set. $\square$

Solution to 2

Take a denominator $q \geq 1$ and take

$$a = b = 4(q+1)(2q^2 + 2q + 1) \quad \text{and} \quad c = 8(q+1)(2q+1).$$

It is clear that $a, b, c > 0$ and $a < b + c$, $b < a + c$ and $c < a + b$, so that there exists a integral triangle with sides equal to a, b and c .

The circumradius of a triangle is given by

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}},$$

which in this case reduces to

$$R = \frac{(2q^2 + 2q + 1)^2}{q}.$$

Since $\gcd((2q^2 + 2q + 1)^2, q) = 1$, there exists an integral triangle with circumradius p/q for an integral p with $\gcd(p, q) = 1$, namely $p = (2q^2 + 2q + 1)^2$. To obtain infinitely many integral triangles, we can scale this triangle with factors k , such that $\gcd(k, q) = 1$, for example $k = (q+1)^n$ for $n \in \mathbf{N}$. $\square$

Non-congruent triangles

It is also possible to construct an infinite set of non-congruent triangles:

The triangles constructed above are presented without derivation. We will give a sketch-wise derivation now, and also show how they yield an infinite set of non-congruent integral triangles.

Instead of constructing integral triangles with rational circumradii, we will construct rational triangles with rational circumradii first. Scaling these will give integral triangles with rational circumradii. We will call its sides a, b and c and take $c = 1$.

The circumradius of a triangle is given by

$$R = \frac{c}{2 \sin \gamma},$$

so we are looking for triangles with rational sines of the angles. For rational sides, the cosine formula,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

gives that the cosines of the angles are rational. Furthermore since the sine and cosine are connected via $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, we take $\sin \gamma = p/r$ and $\cos \gamma = q/r$ with (p, q, r) a Pythagorean 3-tuple. These 3-tuples can be parametrised as follows

$$(m, n) \mapsto (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2),$$

so we take

$$\cos \gamma = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \quad \text{and} \quad \sin \gamma = \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

for $m, n > 0$ and integral.

Next we will try to find rational solutions (a, b) to the cosine formula with $c = 1$ and fixed $\cos \gamma$:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 1.$$

This equation can be rewritten as

$$(a \sin \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2 = 1,$$

so we are looking for rational point $(a', b') = (a \sin \gamma, b - a \cos \gamma)$ on the unit circle. These again are given by Pythagorean 3-tuples, which we will parametrise by $r, s > 0$ integral:

$$a' = \frac{2rs}{r^2 + s^2} \quad \text{and} \quad b' = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}$$

This gives as rational solutions (a, b, c) to the cosine formula with $\cos \gamma = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$:

$$a = \frac{(m^2 + n^2)rs}{mn(r^2 + s^2)}, \quad b = \frac{(m^2 - n^2)rs + mn(r^2 - s^2)}{mn(r^2 + s^2)} \quad \text{and} \quad c = 1$$

Scaling this triangle with a factor of $4mn(r^2 + s^2)$ then gives the following integral solutions to the cosine formula with $\cos \gamma = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$:

$$a = 4(m^2 + n^2)rs, \quad b = 4(m^2 - n^2)rs + 4mn(r^2 - s^2) \quad \text{and} \quad c = 4mn(r^2 + s^2).$$

This integral triangle has circumradius equal to

$$R = (m^2 + n^2)(r^2 + s^2).$$

If we now take m, n, r and s such that q divides mn , q divides rs and $\gcd(q, (m^2 + n^2)(r^2 + s^2)) = 1$, then the sides a, b, c are all divisible by q . Dividing them by q then results in an integral triangle with circumradius

$$R = \frac{(m^2 + n^2)(r^2 + s^2)}{q}.$$

In this way an infinite set of non-congruent integral triangles with rational circumradii with denominator q can be constructed.

The ones given above as solution to Part 2 of the problem are obtained by taking

$$m = q + 1, \quad n = q, \quad r = q + 1 \quad \text{and} \quad s = q,$$

and swapping b and c .

Problem 2005/1-D This problem has appeared earlier in Session 2004/2. It was reprinted in Session 2005/1 with a hint.

Quasiland has 30.045.015 inhabitants. Every two inhabitants are each others friend or foe. Any two friends have exactly one mutual friend and any two foes have at least ten mutual friends.

1. Describe the relations between the inhabitants.
2. Is it possible that less people live in Quasiland, while the inhabitants are still friend or foe as above?

Solution No submissions were received. We give the solution of Robbert Fokkink, who proposed the problem.

- 1) Note that $30.045.015 = \binom{30}{10}$. Let us start with 30 colours. Associate 10 colours to each inhabitant of Quasiland, so that no two different inhabitants have all colours alike. Two inhabitants are friends if their sets of associated colours are disjoint. For each pair of friends there is a third inhabitant who has been assigned the complimentary ten colours. This third inhabitant is unique. If the sets of two inhabitants are not disjoint, they are foes. In this case they have at least one colour in common, and together account for at most 19 colours. There are at least 11 complementary colours left. As there are at least 11 ways to choose 10 colours out of these, the two have at least 11 common friends.
- 2) If there are $4.686.825 = \binom{27}{9}$ inhabitants in Quasiland, the argument above still holds.

Results of Session 2005/1

	<i>Name</i>	A	B	C	<i>Total</i>
1.	Gerben Stavenga e.a.	8	9	10	110
2.	DESDA	7	9	-	57
3.	Hendrik Hubrechts	7	8	-	53
4.	Leendert Bleijenga	8	-	-	24

Final Table after Session 2005/1

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

	<i>Name</i>	<i>Points</i>
2.	Filip Cools e.a.	123
3.	Peter Bruin	99
4.	Hendrik Hubrechts	90