

Inhoud | Contents

98	Colofon
99	Redactioneel <i>Jaap Molenaar</i>
100	Agenda
102	Nieuws
106	In memoriam Jack van Lint <i>N.G. de Bruijn</i>

Afscheidsrede | Valedictory lecture

111	Dat was afgesproken <i>Gerrit van Dijk</i>
-----	--

Oratie | Inaugural lecture

117	Christiaan Huygens and Contact Geometry <i>Hansjörg Geiges</i>
-----	--

Onderzoek | Research

124	Rollende vloeistof <i>Simon van Mourik en Arthur Veldman</i>
130	Japanese Oysters in Dutch Waters <i>Jan Bouwe van den Berg e. a.</i>
142	Uitdagings in numerieke wiskunde <i>Dirk Laurie</i>
148	The Invariant Subspace Problem <i>B.S. Yadav</i>

Samenleving | Society

153	Handelsreizigers in wiskunde <i>Hajo Broersma en Henri Ruizenaar</i>
158	Mysterieuze regelmatige lichamen <i>Pieter Moree, Robert Triest en Jack Triest</i>
162	Nationale PR-medewerker wiskunde <i>Gieljan de Vries</i>
164	Kick-off wiskundeclusters <i>Marinus Kaashoek en Henk van der Vorst</i>

Boeken | Books

168	Boekbesprekingen
-----	------------------

Rubrieken | Departments

105	Brieven <i>Letters to the editor</i>
110	Regn och sprit <i>Jan Stevens</i>
156	Differentiëren en integreren <i>Leila Mohammadi</i>
161	Oud Archief <i>Danny Beckers</i>
181	Problemen/UWC

Colofon

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een uitgave van het Koninklijk Wiskundig Genootschap en verschijnt vier maal per jaar. Het tijdschrift richt zich op een ieder die zich beroepsmatig met wiskunde bezighoudt, als academisch of industrieel onderzoeker, student, leraar, journalist of beleidsmaker. Het stelt zich ten doel te berichten over ontwikkelingen in de wiskunde in het algemeen en in de Nederlandse wiskunde in het bijzonder.

ISSN 0028-9825

Adres

Nieuw Archief voor Wiskunde
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512
2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101
<http://www.nieuwarchief.nl>

Hoofredactie

Jaap Molenaar (j.molenaar1@tue.nl)
Jaap Top (top@math.rug.nl)

Eindredactie

Derk Pik (dpik@math.leidenuniv.nl)

Bladmanager/Advertenties

Reinie Ern   (erne@nieuwarchief.nl)
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden
Postbus 9512, 2300 RA Leiden
tel. 071-5277121, fax 071-5277101

Redactie

Gerard Alberts (g.alberts@wens.kun.nl)
Rainer Kaenders (r.kaenders@ils.kun.nl)
Patrick Oonincx (p.j.oonincx@kim.nl)

Bureauredactie

Annelies Hafkenscheid (naw@nieuwarchief.nl)
Arno Kret (naw@nieuwarchief.nl)

Medewerkers

Danny Beckers (RU), Matthijs Coster (Min.Def.) Jan van de Craats (KMA), Hans Cuypers (TUE), Yves van Gennip (TUE), Geertje Hek (UVA), Teun Koetsier (VU), Joop Kolk (UU), Ger Koole (VU), Hans Sterk (TUE), Chris Zaal (FI)

T  X-ondersteuning

Marko Boon (marko@win.tue.nl)
Klaas Pieter Hart (k.p.hart@ewi.tudelft.nl)

Abonnee-administratie/Subscription manager

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Abonnementsperiode/Subscription period

Een abonnement gaat in op de dag dat uw aanmelding ontvangen wordt. De opzegtermijn is twee maanden v  r het verstrijken van de abonnementsperiode. / The subscription starts on the day that your application is received. The term of notice is two months before the end of the current subscription period.

Exchange subscriptions

Koninklijk Wiskundig Genootschap Library
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Postbus 94079
NL-1090 GB Amsterdam

Vormgeving

Kitty Molenaar (ontwerp)
Susanne Laws (omslag, begeleiding binnenwerk)

Illustraties

Ryu Tajiri, Amsterdam

Programmatuur (CONTEXT)

Hans Hagen, PRAGMA-ADE, Hasselt (Overijssel)

Druk

Giethoorn ten Brink, Meppel

Koninklijk Wiskundig Genootschap

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG) is een landelijke vereniging van beoefenaren van de wiskunde. Het genootschap werd in 1778 opgericht onder de zinspreuk: "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Het is 's werelds oudste nationale wiskundegenootschap. Leden van het KWG ontvangen het Nieuw Archief voor Wiskunde als onderdeel van hun lidmaatschap. De contributie voor leden van het KWG bedraagt   70 per jaar. Gepensioneerden betalen   35. Studenten ingeschreven aan een Nederlandse universiteit of hbo-opleiding, aio's en oio's kunnen lid worden voor   25 per jaar. Pas afgestudeerden kunnen een jaar lang gratis lid worden van het KWG. Voor leden van de wiskundige vakverenigingen VVS, NVvW en NVORWO geldt het gereduceerd tarief van   50.

Members of the *Soci  t   Math  matique de France*, the *Gesellschaft f  r Angewandte Mathematik und Mechanik*, the *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, and of the *American, Australian, Belgian, Indian, London, and South-African Mathematical Societies* living outside of the Netherlands pay   50 instead of the full membership fee of   70 a year. Conversely, these foreign societies, as well as the VVS and the NVORWO, have reduced membership fees for KWG-members.

A postage charge of   5 is added for members living abroad but in Europe, and a charge of   7,50 for members living outside of Europe. Instituten in Nederland en buitenland kunnen zich abonneren op het Nieuw Archief voor Wiskunde voor   90 respectievelijk   105.

Internetpagina: <http://www.wiskgenoot.nl>

Ledenadministratie

Mirjam Worst (admin@wiskgenoot.nl)
Uitgeverij Ten Brink
Postbus 41, 7940 AA Meppel
tel. 0522-855175, fax 0522-855176

Bestuur (wiskgenoot@wiskgenoot.nl)

Jan van Mill (VU, *voorzitter*), Herman te Riele (CWI, *secretaris*), Fieke Dekkers (UU, *penningmeester*), Henk Broer (RUG), Klaas Pieter Hart (TUD), Metha Kamminga (NHL), Annette Kik (CWI), Vivi Rottsch  fer (UL).

Informatie voor auteurs

Kopij

Het Nieuw Archief voor Wiskunde is een geredigeerd tijdschrift. Kopij dient elektronisch te worden aangeboden aan de hoofdredactie. Uitgebreide informatie en auteursinstructies kunt u vinden op internetpagina <http://www.nieuwarchief.nl>.

Reprints

Auteurs ontvangen een elektronische reprint in pdf-formaat.

Volgende nummers

nummer	verschijningsdatum	deadline kopij
3	16-09-2005	-
4	03-12-2005	10-08-2005
1	03-03-2006	10-11-2005
2	03-06-2006	10-02-2006

Instituutsleden

De publicaties van het Koninklijk Wiskundig Genootschap worden mede mogelijk gemaakt door de bijdragen van de volgende instituten en instellingen.



Centrum voor Wiskunde
en Informatica



Rijksuniversiteit Groningen



Universiteit van Amsterdam



Universiteit Leiden



Vrije Universiteit



Universiteit Utrecht



Technische Universiteit
Eindhoven



Eurandom



Technische Universiteit Delft



Universiteit Twente



Radboud Universiteit
Nijmegen

Op het omslag

Zeeuwse oesters worden internationaal als een delicatessie gezien. In de jaren zestig is in de Oosterschelde ook de Japanse oester uitgezet. Dit had een groot negatief effect op het ecosysteem. Wat valt er nog aan te doen? Zie pagina 130.

Communicatie

“We naderen nu station X. Station X is de eindbestemming van deze trein. U wordt allen vriendelijk verzocht uit of over te stappen.” Tientallen jaren al hoor ik, hardnekkige treinforesen, een dergelijk zinnetje door de luidsprekers schallen. En ook na al die jaren stoor ik me nog steeds aan de onlogica ervan: hoe kun je nu overstappen zonder uit te stappen?! Ander geval: Neemt een dame tegenover me in de trein haar mobieltje op en zegt: “Wat leuk schat, dat je me belt. Hoe wist je dat ik hier zat?” Dat ik dan spontaan ga hinniken, is dat normaal? Zijn wij wiskundigen soms communicatief gestoord? Dat we ons binnen ons vakgebied vrijwillig onderwerpen aan de strenge wetten van de logica is tot daar aan toe. En dat we zelfs tot aan de koffietafel toe onze conversatie laten vermoeden tot louter correcte uitspraken, alla. Maar kunnen we nu echt niet accepteren dat het in de normale wereld anders werkt? Wat zijn wij toch vaak slecht in communiceren met die onlogische buitenwereld. En wat missen we daardoor een kans om ons vak te propageren. Ik vraag me geregeld af hoe we van het stigma afkomen dat wij een heel eigenaardig groepje onhandige nerds zijn met een vreemde manier van denken, een eigen humor en een eigen gedragscode. Communicatie, communicatie, daaraan is grote behoefte willen we niet bij gebrek aan een volgende generatie soortgenoten ten onder gaan. Het Nieuw Archief voor Wiskunde heeft daarbij zeker een functie.

Dit jaar werd er voor de eerste maal een prijs uitgereikt voor het beste artikel in jaargang 2004. ‘Best’ is daarbij bedoeld in communicatieve zin: welke auteur is het het best gelukt om zijn boodschap over te brengen aan ons lezerspubliek. Winnares was Marjan Sjerps met haar artikel over ‘Forensische statistiek’. Dat heeft in dit geval niet te maken met de statistiek van treinforesen zoals ik er één ben, maar met het gebruik van statistiek (en kansrekening) in de rechtsspraak. Een helder en intrigerend verhaal dat de kracht en beperkingen van wiskundige methoden bij het al of niet veroordelen van boeven glashelder maakt. Marjan, van harte gefeliciteerd. Hopelijk is deze toekenning voor toekomstige auteurs een stimulans om te proberen de ‘Chris Zaal Wisselbo(om)kaal’ volgende keer te veroveren. Chris Zaal was de stuwende kracht achter de transformatie van het NAW van een gestencild ogend, tamelijk duf blaadje tot een glossy magazine. Met het verbinden van zijn naam aan deze wisselprijs willen we zijn grote verdiensten graag in ere houden. De prijs zelf is trouwens een fractale boom in brons. Deze boom staat in winterpracht, kaal dus, en is gemaakt door wiskundige, informaticus en kunstenaar Koos Verhoeff.

Weet u wie ik ook zo’n prijs zou willen geven, maar dan voor haar zeer communicatieve artikelen gericht op een volledig niet-

wiskundig publiek? Pamela Hemelrijk. In haar column in het treinblad *Metro* (oplage 382.000 per dag!) had ze recent twee keer een volledig wiskundig georiënteerd verhaal. De eerste keer nam ze het bekende drie-poortjes-probleem bij de kop. Achter één van drie gesloten poortjes ligt een prijs. Jij mag een poortje aanwijzen, maar het blijft nog gesloten. De quizmaster opent één van de twee andere poortjes en laat zien dat de prijs daar niet ligt. Hij biedt je de mogelijkheid je keuze nog te veranderen. Heeft het zin om dat te doen? Deze vraag heeft indertijd een intense openbare discussie teweeggebracht, vaak gevoerd via ingezonden brieven in kranten. Wiskundige experts spraken elkaar daarbij zelfs lijnrecht tegen. De interpretatie van het begrip voorwaardelijke kans speelde daarbij een grote rol. Pamela beantwoordt de vraag trefzeker met de bekende ‘reductio ad absurdum’ benadering, die bij dit soort vragen zo vaak direct helderheid verschaft. In dit geval betreft het overigens ‘extensio ad absurdum’. Het idee daarbij is dat je de parameters in je systeem extreme waarden geeft. In dit geval, neem in plaats van drie heel veel, zeg honderd, poortjes. Nadat jij je keuze gemaakt hebt, zal de quizmaster 98 poortjes openen. Het is zonneklaar dat je daarna je keuze wilt veranderen en je dat ene andere nog dichte poortje kiest.

De tweede keer nam ze het moeilijker kabouter-probleem bij de kop. Een groep kabouters met rode en groene mutsen staat voor de kabouterkoning. Iedere kabouter ziet de mutskleur van de anderen, maar weet niet de kleur van zijn eigen muts. De koning zegt: “Er zijn hier kabouters met rode mutsen. Laten die een stap naar voren doen.” Hij herhaalt dit verzoek steeds. Beredeneer dat als er N kabouters met rode mutsen zijn, deze bij het N -de verzoek massaal naar voren stappen. Hoewel Pamela eindigt met “En nog steeds weet ik niet wat inductie is”, kan ze aan de hand van dit voorbeeld wel haarfijn uitleggen hoe volledige inductie werkt. Kennelijk voelt ze het begrip wel aan, maar kan ze het niet formaliseren.

Laat ik wat betreft de goede initiatieven op het gebied van communicatie niet vergeten te noemen onze onvolprezen persdienst op www.wiskundepersdienst.nl. En, u kijkt toch zeker ook wel eens op www.kennislink.nl. Daar schrijft onze nationale PR-vrouw Ionica Smeets prachtige bijdragen. Hé, alweer een vrouw, waar blijven de mannen?

Jaap Molenaar
hoofdredacteur Nieuw Archief voor Wiskunde

Faculteit Wiskunde en Informatica, Technische Universiteit Eindhoven

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica, Universiteit Twente

j.molenaar1@tue.nl

Agenda

Upcoming Events

juni 2005

8–10 juni

□ Modeling Competition and Coordination in Supply Chains and Service Networks

Lezingenreeks door Awi Federgruen (Columbia University)

plaats Erasmus Universiteit Rotterdam

info www.few.eur.nl/few/research/ei/education/pup/federgruen2005

9–13 juni

□ Fejér-Riesz Conference

Conferentie ter ere van de 125ste verjaardag van Lipót Fejér en Frigyes Riesz

plaats Eger, Hongarije

info www.math.u-szeged.hu/confer/fejerriesz

13–17 juni

□ EIDMA minicourse Computational Methods in Public Key Cryptology

Minicursus over computatieve methoden in de publieke-sleutelcryptografie. Sprekers: Arjen Lenstra en Tanja Lange

plaats Technische Universiteit Eindhoven

info www.win.tue.nl/math/eidma/courses

26 juni

□ Hoe ontstaat geluid?

Kinderen lossen samen met een wetenschapper van de Universiteit van Amsterdam een mysterie uit het dagelijks leven op. Onder leiding van Tom Heijmans (Van der Waals-Zeemaninstituut).

plaats Universiteit van Amsterdam

info www.science.uva.nl/wyp2005

27 juni – 1 juli

□ Filosofie voor wiskundig denken

Week, gewijd aan de filosofische aspecten van het wiskundig denken. Ook komen culturele aspecten aan bod. Sprekers: Frans de Haas, Albert Visser, Mark van Atten, Bart van Kerkhove.

plaats ISvW, Leusden

info www.isvw.nl

28–30 juni

□ Fourth Twente workshop on Cooperative Game Theory

Presentaties van onderzoek op het gebied van speltheorie, in het kader van Russisch-Nederlands samenwerkingsverband

plaats Universiteit Twente

info wwwhome.math.utwente.nl/~driessentsh

juli–augustus 2005

4–9 juli

□ The International Meeting of the Psychometric Society

Internationale conferentie gewijd aan kwantitatieve methoden in psychologie, pedagogiek en andere sociale wetenschappen

plaats Tilburg

info www.psychometrika.org/meeting/2005

28 juli–3 augustus

□ Logic Colloquium 2005

Internationaal congres in het kader van de *ASL European Summer Meeting* over alle aspecten van de logica

plaats Athene, Griekenland

info www.math.uoa.gr/lc2005

14–19 augustus

□ Geometric and Algebraic Combinatorics 3

Sprekers: Arjeh Cohen (Technische Univ. Eindhoven), Jonathan Hall (Michigan State Univ.), Akihiro Munemasa (Tohoku Univ.), Tamás Szonyi (Eötvös Loránd Univ.)

plaats Oisterwijk

info <http://few.kub.nl/gac>

21 – 26 augustus

□ International Conference on Applied Mathematics (ICAM05)

Vijfjaarlijks bi-nationaal samenwerkingsproject tussen Indonesië en Nederland

plaats Bandung, Indonesië

info www.labmath-itb.or.id

29 augustus – 2 september

□ Arithmetic Geometry and High Energy Physics

Workshop gewijd aan nieuwe verbanen tussen hoge-energiefysica en arithmetische getaltheorie.

plaats Lorentz Center, Leiden

info www.lc.leidenuniv.nl

22–27 augustus

□ European Young Statisticians Meeting

Tweejaarlijkse bijeenkomst voor jonge Europese onderzoekers in statistiek en waarschijnlijkheidsrekening

plaats Debrecen, Hongarije

info vkati@hu.inter.net

Gelieve gegevens voor deze agenda door te geven aan onderstaand adres.

Please submit items for this calendar to the following address.

Nieuw Archief voor Wiskunde,
Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden,
Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
Email: naw@math.leidenuniv.nl

26–27 augustus

Vakantiecursus 2005: De Schijf van Vijf

Wiskundevakantiecursus, op initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars, bedoeld voor leraren exacte vakken. Lezingen over de vijf sleutelonderwerpen die bij het middelbaar onderwijs een belangrijke rol gaan spelen: analytische meetkunde, complexe getallen, grafentheorie en discrete wiskunde, algebra en coderingstheorie, statistiek en kansrekening

plaats Technische Universiteit Eindhoven**info** www.cwi.nl/events

29 augustus–2 september

Workshop Arithmetic Geometry and High Energy Physics

Arithmetiek en getallentheorie toegepast in de fysica. Onderwerpen: holografie, quantumveldentheorie en stringtheorie

plaats Lorentz Center, Leiden**info** www.lc.leidenuniv.nl**september 2005**

2–3 september

Vakantiecursus 2005: De Schijf van Vijf

Wiskundevakantiecursus, op initiatief van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars, bedoeld voor leraren exacte vakken. Onderwerp: zie 26–27 augustus

plaats CWI, Amsterdam**info** www.cwi.nl/events

12–16 september

Regression Quantiles and Applications

Cursus voor Post-docs met lezingen door R. Koehler (Univ. Illinois), I. Mizera (Univ. Alberta), S. Heiler (Univ. Konstanz) en B. Werker (Univ. Tilburg)

plaats La Roche-en-Ardenne, Belgium**info** <http://www.ulb.ac.be/soco/lmtd/ecas2005>

15–17 september

Freudenthal 100

Symposium ter gelegenheid van de honderdste geboortedag van Hans Freudenthal. Op 15 september: wiskundeonderwijs, op 16 september: universitaire wiskunde; op 17 september: algemene dag

plaats Utrecht**info** www.freudenthal100.nl

16 – 18 september

EMS-SCM Joint Mathematical Weekend

Conferentie met thema's combinatoriek, dynamische systemen, evolutievergelijkingen, moduletheorie en representatietheorie

plaats Barcelona (Spanje)**info** www.iecat.net/institucio/societats/SCMathematiques/emswweekend

19 – 23 september

Model order reduction, coupled problems and optimization

Workshop op het gebied van numerieke wiskunde, gewijd aan orderreductie van gekoppelde simulatiemodellen

plaats Lorentz Center, Leiden**info** www.lc.leidenuniv.nl

27–30 september

Achtste Europese Multigrid Conferentie

Speciaal aandachtsgebied: elliptische partiële differentiaalvergelijkingen

plaats Scheveningen**info** <http://pcse.tudelft.nl/emg2005>**oktober 2005**

7 oktober

BWI-middag

Bijeenkomst van de opleiding Bedrijfswiskunde en Informatica, waarin toepassingen uit wiskunde en informatica in en het bedrijfsleven centraal staan.

plaats Vrije Universiteit Amsterdam**info** www.alubwi.nl

12–14 oktober

Woudschoten-conferentie 2005

Numerieke analyse. Thema's: convectie-diffusie-reactievergelijkingen, signaalanalyse en beeldverwerking

plaats Woudschoten, Zeist**info** www.cwi.nl/projects/wnw/conf2005

14–15 oktober

Buildings, Groups and Algebras

Conferentie ter ere van Jacques Tits.

plaats Gent (België)**info** <http://cage.rug.ac.be/~hvm/conference.html>

7–10 oktober

Coding theory and cryptography

Organisatie: Koninklijke Vlaamse Academie van België voor wetenschappen en kunsten.

plaats Leuven (België)**info** <http://cage.ugent.be/~ls/website/contactforum2005.html>

19–26 oktober

Wetenweek: Ken je krachten

Jaarlijks evenement over wetenschap en techniek. Bedrijven, instellingen en onderzoeksorganisaties in Nederland openen hun deuren.

plaats Gehele land**info** www.wetenweekparticipanten.nl**november – december 2005**

7 – 11 november

Dynamics of Patterns

Workshop voor wiskundigen, biologen, fysici en chemici. Thema: het vinden van classificeringen van spatio-temporele patronen van dynamische systemen.

plaats Lorentz Center, Leiden**info** www.lc.leidenuniv.nl**2006**

16 – 17 maart 2006

Tenth Rhine Workshop on Computer Algebra (RWCA 2006)

Jaarlijkse workshop over alle deelgebieden van de computeralgebra. Voorzitter: Jan Draisma

plaats Basel (Zwitserland)**info** www.math.unibas.ch/~draisma/rwcao6

22–30 augustus 2006

International Congress of Mathematicians 2006 (ICM 2006)

Drie prijsuitreikingen: de *Fields medal* (wiskundig onderzoek), de *Nevanlinna prize* (theoretische informatica), de *Gauss prize* (toegepaste wiskunde)

plaats Madrid (Spanje)**info** www.icm2006.org

Nieuws

| News

Deze rubriek is een kroniek van wiskundige activiteiten in Nederland. Toekomstige activiteiten worden aangekondigd en van voorbije activiteiten wordt verslag gedaan.

Wilt u uw aankondiging of verslag in deze rubriek geplaatst zien? Stuur dan uw bijdrage ($\pm$ 350 woorden, zo mogelijk met illustratie) naar naw@math.leidenuniv.nl. De redactie behoudt zich het recht voor berichten te weigeren of in te korten.

Chris Zaal wisselbokaal

Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* kent vanaf dit jaar een wisselprijs toe aan de meest leesbare en vanuit journalistiek oogpunt interessantste bijdrage uit de afgelopen jaargang. De wisselbeker is de *Chris Zaal wisselbokaal* genoemd ter ere van de persoon Chris Zaal, die vijf jaar geleden het tijdschrift een metamorfose heeft laten ondergaan. De prijs is gefinancierd door het Koninklijk Wiskundig Genootschap en is voor het eerst toegekend tijdens de afgelopen jaarvergadering van het genootschap op 21 mei in Gent.

Marjan Sjerps, met haar artikel over forensische statistiek (juni 2004), is de eerste prijswinnaar. De prijs is een bronzen fractale boom van ongeveer 25 cm hoog, ontworpen door Koos Verhoeff uit Dommen.

De jury bestond uit de wetenschapsjournalisten Jos van den Broek, Dirk van Delft en Bruno van Wayenburg. De bijdrage van Sjerps wordt door hen een "over het geheel actueel, goedgeschreven, maatschappelijk maar ook wiskundig interessant" artikel genoemd.

Jaap Molenaar, Jaap Top



Chris Zaal met de door Koos Verhoeff ontworpen wisselbeker die een fractale Pythagoreïsche boom voorstelt

Lucien Birgé ontvangt Brouwerprijs 2005

Het Koninklijk Wiskundig Genootschap kent de driejaarlijkse Brouwerprijs toe aan wiskundige Lucien Birgé van het Laboratoire de Probabilité, Université Paris VI. Birgé krijgt de prijs vanwege de diepte, originaliteit en elegantie van zijn werk op het gebied van de mathematische statistiek. Tijdens de *Joint BeNeLuxFra Conference in Mathematics* in Gent van 20 tot 22 mei heeft de prijswinnaar na het geven van de Brouwerlezing de prestigieuze Brouwermedaille en een oorkonde ontvangen.

Er zijn vier belangrijke thema's in Birgé's werk: dimensietheorie, de relatie tussen schatting en toetsing, statistische ongelijkheden en modelselectie. Bij statistisch onderzoek is het belangrijk om op een objectieve, reproduceerbare wijze onderzoeksgegevens te benaderen door functies. De benaderingscurves mogen niet te eenvoudig zijn; als ze echter te complex zijn, wordt er eigenlijk alleen ruis beschreven en is het resultaat niet reproduceerbaar. Birgé ontwikkelde onder andere methodologieën om op een objectieve manier de balans hiertussen te zoeken. Zijn fundamentele werk is toepasbaar op veel gebieden, van economie tot biologie en van medische toepassingen tot toepassingen op industrieel gebied. Een door hem ontwikkeld idee voor compressie is geïmplementeerd in een zogenaamde wavelet toolbox voor computeranalyse van data.

De jury, bestaande uit Sara van der Geer, Richard Gill (voorzitter), Piet Groeneboom, Eduard Looijenga en Aad van der Vaart, stelde Birgé unaniem voor als de Brouwerlaureaat.

De Brouwerprijs is genoemd naar L.E.J. Brouwer, een van de beroemdste wiskundigen van Nederland. Kort na Brouwers overlijden in 1966 stelde het toenmalige Wiskundig Genootschap de Brouwerprijs in. De onderscheiding is de belangrijkste wiskundige prijs in Nederland en geniet een groot internationaal prestige. Eerdere prijswinnaars waren R. Thom (1970, topologie), A. Robinson (1973, grondslagen van de wiskunde), A. Borel (1976, Lie groepen), H. Kesten (1981, waarschijnlijkheidsrekening), J. Moser (1984, analyse), Y. Manin (1987, getaltheorie), W.M. Wonham (1990, control theory), L. Lovász (1993, discrete wiskunde), W. Hackbusch (1996, numerieke wiskunde), G. Lusztig (1999, algebra) en M. Aizenman (2002, mathematische fysica). *Piet Groeneboom*



foto: Guido Sweers

Van Dantzigprijs toegekend aan Sem Borst en Mark van der Laan

De Van Dantzigprijs, die dit jaar voor de achtste maal door de Vereniging voor Statistiek werd uitgereikt, is voor het eerst aan twee kandidaten tegelijk toegekend. Zij werken op de vakgebieden biostatistiek en stochastische operations research. Dit zijn twee deelgebieden van de statistiek waar nog nooit een Van Dantzigprijs gevallen was.

Sem Borst, geboren in 1966, afgestudeerd aan de Technische Universiteit Twente (1990) en gepromoveerd in Tilburg bij Onno Boxma (1994), begon als bezoeker en later als voltijds staflid bij AT&T Bell Labs (later Lucent) in Murray Hill New Jersey. Sinds 1998 combineert hij dit met een deeltijd aanstelling op het CWI en een buitengewoon hoogleraarschap aan de TU Eindhoven. Zijn publicatielijst telt meer dan tachtig items en hij heeft veertien patenten en patent-aanvragen op zijn naam. Hij was een van de eersten die inzag dat men bij draadloze netwerken tegelijkertijd rekening moet houden met stochastische van de vraag als met stochastische van de radio-omgeving, en die dat ook daadwerkelijk kon uitwerken.

Mark van der Laan, geboren in 1967, afgestudeerd (1990) en gepromoveerd (1993) aan de Universiteit Utrecht, is voltijds hoogleraar in Berkeley op het department of biostatistics. Hij schreef ongeveer zeventig publicaties, waaronder twee boeken, en heeft tot nu toe twintig PhD studenten begeleid. Door de jaren heen heeft zijn werk zich verplaatst van survival analysis naar causaliteit, longitudinale studies, model selectie en multiple-hypothesetoetsen in genomics (gene arrays, gene clustering). De laatste paar jaar heeft hij een tweetal *National Institutes of Health grants* binnengehaald. De laatste heeft een omvang van een miljoen dollar en is bedoeld voor onderzoek naar het onderwerp *Data adaptive estimation in epidemiologie en genomics*.

Richard Gill

Scholier wint internationale prijs voor wiskundig onderzoek

Tijdens de twaalfde *International Conference for Young Scientists* in Katowice (Polen) heeft Tjitske Starkenburg van het Twickel College uit Hengelo een derde prijs gewonnen in de categorie wiskunde. De conferentie werd gehouden van 25 tot 30 april. Ongeveer honderd middelbare scholieren uit veertien landen deden hieraan mee. Het is de eerste keer dat een Nederlandse scholier een prijs wint in de categorie wiskunde.

Tjitske won een maand eerder een Jan Kommandeurprijs van de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen van Groningen. Op grond hiervan werd ze afgevaardigd naar Polen. Haar op deze wijze bekroonde profielwerkstuk behandelt het vinden van onderling niet gelijkvormige driehoeken *ABC* met gehele zijden, en de extra eigenschap dat de deellijn uit punt *A*, de zwaartelijn uit punt *B* en de hoogtelijn uit punt *C* alle door één punt gaan.

Op de internetpagina <http://metal.elte.hu/~icys> is meer informatie te vinden over de ICYS. *Bron: www.rug.nl/wiskunde/nieuws/actueel/index*



Tjitske Starkenburg staat helemaal links

Jan Hemelrijk overleden

Op 16 maart 2005 is Jan Hemelrijk overleden. Hij is een van de dragende figuren geweest in de opbouw van de mathematische statistiek in Nederland. Van 1949 tot 1983 is hij verbonden geweest aan het Mathematisch Centrum, het tegenwoordige Centrum voor Wiskunde en Informatica, onder meer als verantwoordelijke voor de statistische consultatie en als chef van de Statistische Afdeling. Hemelrijk was zeer actief in de Vereniging voor Statistiek; hij was jarenlang hoofdredacteur van *Statistica Neerlandica*. Hij was van 1956 tot 1983 lid van het International Statistical Institute. Het meest van al was Hemelrijk docent. Als hoogleraar aan de Technische Hogeschool Delft (parttime 1952–1960) en aan de Gemeentelijke Universiteit, tegenwoordig Universiteit van Amsterdam, (1960–1983) wijdde hij velen in de eerste beginnende van de mathematische statistiek in. Maandag 21 maart 2005 is hij begraven op de Algemene Begraafplaats aan de Kerkedijk te Bergen.

Interviews met Jan Hemelrijk zijn: 'De profeet, de missionaris en de handelsreiziger', door Richard Gill en Wouter Mettrop, in *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarlozen*, G. Alberts, F. van der Blij, J. Nuis (red.), Amsterdam: CWI, 1987, p. 187–197 en 'Een statisticus moet ook wel eens geluk hebben', door Han Oud en Gerard Alberts, in *StatOR* 1-3 (dec 2000), p. 10–15.

Gerard Alberts

George Bernard Dantzig overleden

Op 13 mei 2005 is George Bernard Dantzig, uitvinder van de *Simplex-methode* en de techniek van het lineaire programmeren in Stanford op negentigjarige leeftijd overleden. Hij was *operations research professor* aan de Stanford University.

Weinig wiskundige algoritmen vonden zoveel toepassingen, in het bijzonder in het bedrijfsleven, als het lineair programmeren. Alle grotere bedrijven, van industrie tot beurshandel, gebruiken de methode om processen te optimaliseren, bijvoorbeeld om artikelen van een verkoopwaarde te voorzien of om de kosten van goederentoevoer te minimaliseren.

Bron: <http://news-service.stanford.edu/>

Nieuwe uitgave met Arabische meetkundige patronen

Bij The Pepin Press is een nieuw boek verschenen met arabische meetkundige patronen. Het is gebaseerd op de collectie van Jules Bourgoïn uit 1879, voornamelijk gebaseerd op Egyptische, Persische en Syrische bronnen. Alle patronen zijn opnieuw getekend en gedigitaliseerd door Jacob Hronek.

De bijna tweehonderd patronen zijn op groot formaat, twintig bij twintig centimeter, uitgevoerd, waarbij telkens ook de constructie ervan is aangegeven. Bij het boek hoort een cd-rom met alle patronen gedigitaliseerd als jpg- en als tif-bestanden. Titel: *Arabian Geometric Patterns*, The Pepin Press, Agile Rabbit Editions, Amsterdam & Singapore, ISBN 90-5768-071-8, Prijs: 15 euro.

Jan van de Craats



Filosofie van wiskundig denken

Van 27 juni tot 1 juli organiseert de *Internationale School voor Wijsbegeerte* opnieuw een zomercursus over wiskundig denken. Na de week over Cultuurgeschiedenis van het wiskundig denken, in 2004, volgt dit jaar een week over Filosofie van het wiskundig denken. Sprekers zijn onder meer Frans de Haas, Albert Visser, Mark van Atten en Bart van Kerkhove. Voor de connectie met muziek en de andere kunsten zorgen Derk Pik, Rinus Roelofs en anderen. Zie www.isvw.nl

Gerard Alberts

Eindexamen voorbereidend wetenschappelijk onderwijs

Op het moment dat dit nummer van het *Nieuw Archief* naar de drukker gaat, zijn de eindexamens wiskunde nog niet achter de rug. Er doen dit jaar 114.000 vmbo-ers, 47.000 havisten en 33.000 vwo-ers eindexamen wiskunde. Dit jaar bestaat voor het eerst de mogelijkheid om bij enkele

vakken het examen af te leggen als computerexamen (*Complex*). In de aanloop naar de landelijke invoering van dit type examens in 2007 wordt deze vorm van examinering volgend jaar voor alle vakken in alle profielen aangeboden. Op het vwo ziet het rooster voor het eindexamen wiskunde er dit jaar als volgt uit:

dinsdag 31 mei 2005	13:30-16:30	wiskunde B1
dinsdag 31 mei 2005	13:30-16:30	wiskunde B1,2
woensdag 25 mei 2005 woensdag 25 mei 2005	13:30-16:30 uur duur: drie uur	wiskunde A1 wiskunde A1 Complex
woensdag 25 mei 2005 woensdag 25 mei 2005	13:30-16:30 uur duur: drie uur	wiskunde A1,2 wiskunde A1,2 Complex

Na afloop van de examens zijn de opgaven, uitwerkingen en normeringen te vinden op het zogenaamde Examenblad www.eindexamen.nl van het ministerie OC&W. Voor meer achtergrondinformatie over het totstandkomen van de eindexamens: zie het NAW-artikel *Examen in de steigers* van Gerard Stroomer en Nol Reebok van december 2004.

Bron: Rainer Kaenders

Latijnse vierkanten in de krant

Groot-Brittannië is sinds een paar maanden in de ban van Latijnse vierkanten. De meeste kranten hebben sinds kort dagelijks een vierkant van negen bij negen cellen, waarbij in sommige cellen een cijfer is gezet. De bedoeling is het vierkant zó aan te vullen dat een speciaal Latijns vierkant van orde negen ontstaat. Een Latijns vierkant is een vierkant met in elke rij en elke kolom dezelfde onderling verschillende getallen. Een Latijns vierkant van orde negen bevat in elke rij en elke kolom de cijfers 1 tot en met 9. Het speciale van een speciaal Latijns vierkant van orde negen zit hem erin dat ook in elk van de negen vierkantjes van drie bij drie de cijfers van 1 tot en met 9 moeten staan. Sloane's *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (www.research.att.com/projects/OEIS?Anum=A002860) zegt ons dat er 5524751496156892842531225600 Latijnse vierkanten van orde negen zijn. Hoeveel hiervan sudoku-vierkanten zijn weet ik niet maar ik vermoed dat de voorraad voorlopig niet uitgeput zal zijn.

Zie ook www.sudoku.com voor dagelijks nieuwe puzzels; het voorbeeld hieronder is puzzel nummer 4363 van die site. Voor een kort overzicht van de geschiedenis, zie: http://observer.guardian.co.uk/uk_news/story/0,,1484328,00.html

Klaas Pieter Hart

				4		8	9
		6	1				
	8		5		1		3
	1			6	7		
5		4			2		6
		8	3			1	
7		1		3		4	
				5	9		
9	6		8				

Brieven

| Letters to the editor

Som en product probleem

Hans Freudenthal presenteert in 1969 in het *Nieuw Archief* (NAW 3/17 (1969), p. 152) het ‘som en product probleem’, en een jaar later in hetzelfde blad een door velen gevonden oplossing. Het probleem luidt als volgt:

A zegt tegen S en P: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leq 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan S alleen mee, en $p = xy$ aan P alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.

Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. P zegt: Ik weet het niet.
2. S zegt: Dat wist ik al.
3. P zegt: Nu weet ik het.
4. S zegt: Nu weet ik het ook.

Bepaal het paar (x, y) .

John McCarthy schrijft in een artikel verkrijgbaar op <http://www-formal.stanford.edu/jmc/puzzles.html> over de *alleged appearance on a bulletin board in Xerox Parc* van dit probleem ergens in de jaren zeventig. Zie ook NAW 5/3 (2002), p. 332.

Gezien de hernieuwde belangstelling voor dit soort problemen, inmiddels vallend in de categorie abstracte architecturen voor multiagentsystemen, proberen wij de verspreidingsgeschiedenis van dit probleem verder te achterhalen. Het leek voor de hand te liggen dat het probleem niet onmiddellijk herontdekt is in Amerika, maar dat ofwel een Nederlandse onderzoeker — en dan met name een van de in NAW 1970 genoemde oplosers — dit tijdens een Amerikaans verblijf verspreid heeft, ofwel een Amerikaanse gast dit in Nederland opgedoken heeft. En zou het raadsel geheel aan de oorspronkelijke geest van Hans Freudenthal ontsproten zijn, of bestaan er nog oudere bronnen? Heeft u een antwoord op een van deze vragen, of, nog beter, bent u al meer dan dertig jaar de trouwe NAW-lezer die dit probleem naar de Verenigde Staten geëxporteerd heeft, dan zouden wij het zeer op prijs stellen als u contact met een van ons opneemt.

Hans van Ditmarsch (hans@cs.otago.ac.nz),

Rineke Verbrugge (rineke@ai.rug.nl)



Freudenthal, juli 1982

In deze rubriek reageren lezers op recent in dit blad verschenen artikelen. De redactie behoudt zich het recht voor ingezonden brieven in te korten of niet te plaatsen.

N.G. de Bruijn

Faculteit Wiskunde en Informatica

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

n.g.d.bruijn@tue.nl

In memoriam

Jack van Lint (1932–2004)

Op 28 september 2004 overleed prof.dr. J.H. (Jack) van Lint, erelid van het KWG. Hij was hoogleraar aan de Technische Hogeschool Eindhoven vanaf juni 1959 (toen hij nog maar 26 jaar was) tot zijn emeritaat in 1997. Oorspronkelijk was hij getaltheoreticus, maar later werd hij vooral bekend door zijn werk in de discrete wiskunde en de toepassingen daarvan. Hij bedreef het vak met nimmer aflatende werkkraft, fenomenaal geheugen en liefde voor helderheid, elegantie en precisie. In de presentatie was hij een meester, zowel in voordrachten als in artikelen en boeken. Daardoor heeft hij op velen grote invloed gehad.

Jacobus Hendricus van Lint werd op 1 september 1932 geboren in Bandoeng (Java), waar zijn vader Jacobus Hendrikus van Lint leraar wiskunde was bij het middelbaar onderwijs. In verschillende opzichten is Jack een kopie van die vader geworden. Die had ook in Utrecht wis- en natuurkunde gestudeerd en was daar een fervent voetballer geweest. Hij was heel goed als leraar, werd snel onderdirecteur en in Bandoeng ook gedurende een jaar aan de Technische Hogeschool plaatsvervanger van de hoogleraar wiskunde (prof. Boomstra). Jack vertelde eens over het fantastische geheugen van zijn vader. Al aan het begin van de cursus had die het hele lesrooster van de school in het hoofd en de namen van alle leerlingen. Midden op een schooldag kwam er eens een jongen bij hem aankloppen die na het noemen van zijn naam te horen kreeg “Je komt uit 2A. Waarom ben je niet bij

de Franse les van meneer Blokkers? Ben je er soms uitgestuurd?” Dat geweldige geheugen heeft Jack van zijn vader geërfd.

Tengevolge van een groot aantal veranderingen was Jack's jeugd bijzonder avontuurlijk. Het onderwijs waaraan hij was onderworpen was chaotisch. Om te beginnen ging de familie, toen Jack vijf jaar was, een jaar met verlof naar Nederland. Daarna niet naar Bandoeng terug, maar naar Batavia. In 1942 kwamen de Japanners, waartegen in Tandjong Priok bloedig gevochten werd. Zijn vader was als dienstplichtig sergeant daarbij ingedeeld, en heeft het overleefd. Daarna kreeg hij een taak bij de opleiding van piloten. Kort voor de capitulatie van Nederlands Indië werden alle bij die opleiding betrokkenen op schepen naar Australië gezet. Jack's moeder trok er met de kinderen achteraan en slaagde erin, ondanks bombardementen, op één van de tien schepen te komen die nog van Tjilatjap naar Australië voeren. Van die tien schepen zijn er zeven getorpedeerd. Een paar maanden later een andere zeereis: de hele familie Van Lint ging met die Nederlandse pilotenopleiding mee naar Jackson (Mississippi) in de Verenigde Staten van Amerika, waar Jack een jaar lang op een Amerikaanse school zat. Hier bleek zijn gave voor het leren van talen. Aan het eind van het jaar was hij de beste van de klas voor het vak Engels! Daarna werd zijn vader overgeplaatst naar Chicago waar Jack, samen met zijn broer Hans, weer op een andere school kwam. In die tijd en in die buurt zat het daar vol met Duits-Joodse vluchtelingen. Jack deed uitvoerig ook aan de sociale kanten van

het schoolleven mee, maar niettemin was hij weer het beste jongetje van de klas.

Een paar jaar later was de oorlog afgelopen, en moest de familie weer naar Indië terug, nu omdat vader inmiddels meteoroloog was geworden en het Nederlandse leger hem daarvoor nodig had. Vrouw en kinderen verbleven een jaar lang in Australië, waar Jack weer met een ander, typisch Brits onderwijsstelsel te maken kreeg. Voor hem eigenlijk een verloren jaar. Aan het eind van dat jaar was de toestand op Java voor Nederlanders onveilig geworden. Jack's vader kon er niet langer blijven en ondernam met de hele familie de lange bootreis naar Nederland. Ze kwamen (herfst 1946) terecht bij familie in Arnhem, een stad die nog steeds te lijden had onder de naweeën van de oorlog. Hier kreeg Jack als veertienjarige voor het eerst middelbaar onderwijs, en moest hij door heel hard werken binnen een maand of acht zijn achterstanden inhalen. Dat lukte, hij was volop Nederlander geworden, en weer de beste van de klas. Zijn wiskundeleraar was de bekende Joh. Wansink, die later ook erelid van het Wiskundig Genootschap werd! Maar er kwam nog een verandering: midden in het schooljaar 1948–1949 verhuisde de familie Van Lint naar Zwolle, waar vader directeur van de Rijks-HBS was geworden. In 1950 deed Jack daar het eindexamen HBS-B. Ondanks de chaotische schoolopleiding in vier werelddelen haalde hij het, nog op zeventienjarige leeftijd, met zes tieners op de lijst, deze keer de beste van heel Nederland. Toch had hij niet alleen in de boeken gezeten. Als schooljongen lever-

de hij allerlei sportieve prestaties, deed soms mee aan nationale wedstrijden. En als padvinder haalde hij alle insignes die er maar bestonden. In zijn latere leven bleef hij altijd een sportief kampeerder, sneed hij enthousiast totempalen, en wist hij uit een stammetje een lange ketting met houten schakels te maken. Zijn voetbalactiviteit heeft hij wegens beschadiging van een achillespees (toen hij al professor was) moeten opgeven, maar als zwemmer is hij tot kort voor zijn dood doorgegaan, elke ochtend een flink aantal baantjes trekkend, nauwkeurig de tijden en afstanden administrerend. Hij vertelde eens dat hij in totaal al de afstand tot Moskou gezwommen had!

Jack werd student in Utrecht, en liet zich in het bijzonder inspireren door Freudenthal, Popken en Van der Blij. Ook in het verenigingsleven was hij actief, ook al werd het bemoeilijkt door de randvoorwaarde dat Jack zijn vader beloofd had tot aan het kandidaats-examen geheelonthouder te blijven. Natuurlijk liep ook zijn studie voorspoedig. Terwijl het indertijd daar gangbaar was er minstens zes jaar over te doen, haalde hij het doctorale examen in vier en een half, cum laude (31 januari 1955). Hij was vanaf september 1952 assistent van Freudenthal geweest en bleef dat tot september 1956. Van september 1957 tot juni 1959 genoot hij een onderzoekersbeurs van ZWO (de organisatie voor zuiver wetenschappelijk onderzoek, die later NWO zou gaan heten). Daarmee werkte hij, hoofdzakelijk in de getaltheorie, een half jaar aan de universiteit van Göttingen, onder andere het college van de grote C.L. Siegel volgend, en daarna nog een half jaar in Münster bij Hans Petersson. Op 28 oktober 1957 promoveerde

hij (natuurlijk weer cum laude) in Utrecht bij F. van der Blij, op een onderwerp uit de theorie van de modulaire functies [1].

Eindhoven

Het was op grond van zijn snelle ontwikkeling en van de kwaliteit van dat werk in de getaltheorie dat de piepjonge maar snelgroeiende Technische Hogeschool Eindhoven (later Technische Universiteit) het aandurfde om hem, op nog maar 26-jarige leeftijd, in juni 1959 als (voltijds) hoogleraar in dienst te nemen. Hij is dat instituut altijd trouw gebleven, ondanks andere aantrekkelijke aanbiedingen. Hij heeft zich er volledig ingezet voor het onderwijs en onderzoek in de wiskunde. Daarnaast heeft hij met succes geijverd om sportvoorzieningen voor studenten tot stand te brengen, zoals een eigen zwembad. Het is niet ten onrechte dat er nog jaarlijks in Eindhoven de *Van Lint Studenten Sportweek* en de *International Prof. van Lint Tournament* worden gehouden. Ook bestuurlijk is hij krachtdadig opgetreden. Van 1989 tot 1991 was hij dekaan van de faculteit Wiskunde en Informatica, en van 1991 tot 1996 Rector Magnificus. In die tijd heeft hij zich in het bijzonder ingezet voor samenwerking met het midden- en kleinbedrijf in de regio. Ook na het ingaan van zijn emeritaat in 1997 bleef hij de Technische Universiteit Eindhoven dienen, onder andere als directeur van het Stan Ackermans Instituut (1997–1999).

Verder moet zijn werk voor de totstandkoming van de aan de Technische Universiteit Eindhoven verbonden onderzoeksschool EID-MA worden vermeld.

Er zijn bij van Lint 38 studenten afgestudeerd, en hij was promotor van: H.C.A. van Til-



Jacobus Hendricus van Lint (1932–2004)

borg (1976), H.F.H. Reuvers (1977), M.R. Best (1982), H.A. Wilbrink (1983), C.L.M. van Pul (1987), W.J. van Gils (1988), H.J. Tiersma (1989), G.J.M. van Wee (1991), Szen Ba Zhong (1992), Fang Gang (1993), I.M. Duursma (1993), P. Bours (1994), R. Struik (1994), L.M.G.M. Tolhuizen (1996), H.D.L. Hollmann (1996).

Discrete wiskunde

In het midden van de jaren zestig veranderde Jack van wiskundig onderwerp. Jaap Seidel, de leider van de wiskunde in Eindhoven, begreep dat er in Eindhoven geen plaats was voor een school in de getaltheorie en haalde Jack over om zich te gaan toeleggen op de combinatoriek, de leer van de structuren op eindige verzamelingen. Dat onderwerp wordt tegenwoordig vaak discrete wiskunde genoemd, zulks als tegenhanger van alle wiskunde die het heeft over continuïteit. Ook al hadden enkele van de grootste wiskundigen eraan gewerkt, was deze discrete wiskunde tot in de eerste helft van de twintigste eeuw hoofdzakelijk een kwestie van puzzels en spelletjes geweest. In bibliotheken werd het gerangschikt in rubrieken als *Unterhaltungsmathematik*, *mathématiques amusantes*. Maar tijdens en na de Tweede Wereldoorlog werd het belangrijk door toepassingen in de economie, in de biologie, in de industrie en op vele andere plaatsen. Een opleiding tot wiskundig ingenieur die men in Eindhoven wilde opzetten zou de discrete wiskunde niet meer mogen missen. Jack nam de uitdaging aan. Eigenlijk was het hem op het lijf geschreven. Hij had nooit veel gevoeld voor



Drie wiskundigen in Indië, waarvan twee nog in de dop. Vader van Lint, met Hans (links) en Jack (rechts)



Jack als zwemmer. Tot kort voor zijn dood trok hij elke ochtend een flink aantal baantjes.

grote algemene theorieën. Het liefst hield hij zich altijd bezig met concrete problemen, met eenvoudige vragen en slimme oplossingen. Om zich zo snel mogelijk in te werken verbleef hij in 1966 (januari tot augustus) in de beroemde Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, waar hij nog enkele malen terug zou komen (april–augustus 1977, mei–september 1977). Een belangrijke activiteit was het opzetten van een Eindhovens seminarium Combinatoriek in de jaren 1971–1972 en 1972–1973, waarvan [2] een verslag is. Aan het *Mathematisch Centrum* te Amsterdam, waar Jack van 1972 tot 1982 adviseur was, werd hij de vader van een groep Discrete Wiskunde waaruit een hele generatie van getalenteerde vakgenoten is voortgekomen. Deelnemers waren onder anderen A.E. Brouwer, P. van Emde Boas, Jonathan Hall, H.W. Lenstra Jr en A. Schrijver.

Nog een paar dagen voor zijn dood verklaarde Jack dat die ommezwaai van analytische getaltheorie naar discrete wiskunde hem nooit gespeten heeft. Het was hem duidelijk geworden dat die wereld van de modulaire functies het niet langer kon stellen zonder de moderne algebraïsche meetkunde. Daarin was hij niet opgegroeid en van Bourbaki moest hij al helemaal niets hebben. Aan de andere kant kon hij in de discrete wiskunde een sterke inbreng hebben door wat de analytische getaltheorie hem had geleerd: het laten samenwerken van algebra, getaltheorie en analyse.

Jack trok al direct aandacht door zijn werk op het gebied van zekere klassen van perfecte codes, waarbij hij kon bewijzen dat er naast de reeds bekende geen andere meer beston-

den [3–6]. Maar veel bekender werd hij door boeken die een overzicht van een groot deel van het vakgebied boden. Veel invloed kreeg zijn eerste boek over coderingstheorie [7] uit 1971, dat later uitgroeide tot uitvoeriger werk met edities in 1982 (die ook in het chinees werd vertaald), 1992 en 1998 [8]. Vermelding verdienen ook de boeken die hij maakte met P. Cameron [9–11], en de *Course in Combinatorics* met R.M. Wilson [12]. Voor een Nederlands lezerspubliek was er zijn *Discrete Wiskunde* met J.W. Nienhuys [13].

Jack was bijzonder geliefd als spreker, niet alleen doordat zijn vele onderwerpen belangstelling trokken maar ook door zijn grote helderheid en goede smaak, waarmee hij liet zien dat wiskunde tegelijk mooi en nuttig kan zijn. Hij hield zelf een lijst bij van zijn voordrachten buiten de eigen universiteit. Die telt er ongeveer driehonderd, de meeste in het buitenland (op meer dan honderd verschillende plaatsen). In de laatste tijd sprak hij vaak over de wiskundige aspecten van de compact disc, waarmee hij in aanraking was gekomen door zijn adviseurschap (vanaf 1985) bij het Natuurkundig Laboratorium van Philips.

Cosmopoliet

In zijn jeugd was Jack al een echte cosmopoliet, en zo is het gebleven. In de tijd van zijn professoraat ging hij vaak met verlof naar het buitenland. Behalve de al genoemde bezoeken aan Bell Labs verbleef hij een aantal keren aan het *California Institute of Technology*, Pasadena: september 1970 tot april 1971 (als Morgan Ward Visiting Professor), september 1982 tot augustus 1983 (als Fairchild Distinguished

Scholar), september 1988 tot maart 1989, april 2000 tot september 2000 (als Moore Distinguished Scholar).

Bij negen internationale tijdschriften stond J.H. van Lint op de lijst van editors. En hij was actief lid van verschillende internationale commissies: *European Science Foundation* (1977–1978), *European Math. Council* (1978–1990), *International Council of Scientific Unions/CTS* (1986–1994), *International Committee on Mathematical Instruction* (1986–1994), *Nationaal Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek* (België, 1990–1997), *Scientific Committee ECM 2000* (1997–1999).

In zijn latere jaren kreeg hij ook contacten in China. Hij vond het in dat verband nodig en mogelijk om daartoe wat chinees te leren. Daarmee sprak hij in China grote gezelschappen in hun eigen taal toe! Nog in 2004 draaiden we in Eindhoven een filmopname ervan af, en heel toevallig kwam Jack zelf binnen. Tot ieders verwondering begon de echte Jack van Lint de toespraak mee uit te spreken. Hij kende het nog woord voor woord!

Onderscheidingen

Over gebrek aan erkenning heeft Jack van Lint niet te klagen gehad. Hier is een lijstje:

- Lid van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen 1972,
- Ridder in de orde van de Nederlandse Leeuw 1993,
- Honorary Professor Technische Universiteit Bukarest 1995,
- Eredactor Universiteit Bergen (Noorwegen) 1996,
- Eredactor Technische Universiteit Bukarest 1996,
- Honorary Professor Xi'an Jiaotong University (China),
- Neways Award (Eindhoven) 1997,
- Euler Medal of the Institute of Combinatorics and Applications (Canada) 1997,
- Eredactor Universiteit Gent 2000.

Veel belangrijke wiskundigen zijn wel eens uitgenodigd voor een voordracht bij een van de Internationale Wiskundige Congressen, maar hem overkwam dat vier keer (Warschau 1983, Berkeley 1986, Kyoto 1990, Berlijn 1998).

Ook op de internationale congressen voor Mathematical Education werd hij drie keer als spreker uitgenodigd (Karlsruhe 1976, Berkeley 1980, Adelaide 1984).

Erelid

Voor ons (nu Koninklijk) Wiskundig Genootschap heeft Van Lint heel wat werk verricht. Gedurende een lange reeks van jaren (1966–

1979) was hij redacteur van de Problem Section van het Nieuw Archief voor Wiskunde, en van 1983 tot 1987 managing editor (samen met M. Hazewinkel). Van 1970–1976 was hij redacteur voor de boekbesprekingen in de Mededelingen van het Wiskundig Genootschap. Van 1968–1972 was hij bestuurslid van het genootschap, waarvan in 1968–1970 als voorzitter. In 2004 heeft het KWG hem erelid gemaakt als blijk van waardering voor alles wat hij voor het genootschap en voor wiskundig Nederland deed.

De mens Jack van Lint

Ondanks de geweldige energie waarmee Jack zijn vak bedreef en zich voor zijn werkring inspande was het een gezellige man. Altijd een goed huisvader en voor het gezin een avontuurlijk leider. Bij het vele buitenlandse verlof gingen zijn vrouw Betty en de beide kinderen steeds mee. In de vriendenkring was hij een gezellige prater, vol interessante, vaak sterke, verhalen.

Zijn hobbies beled hij enthousiast en trouw. In de eerste plaats was er zijn leven voor de sport, zoals zwemmen en voetbal. Van jongs af aan had hij met veel kennis van zaken postzegels verzameld, en in later jaren genoot hij van complete poststukken waaruit een bijzondere geschiedenis was af te lezen. Ook aan de bridgetafel was hij met grote regelmaat te vinden.

Voor studenten en vakgenoten was hij bijzonder hulpvaardig. Ook vond hij het niet beneden zijn waardigheid om zwaar tuinwerk te verrichten voor buurtgenoten als ze dat zelf niet konden.

De laatste twee jaren waren moeilijk tengevolge van een ernstige operatie. Toch sloeg hij zich daar goed doorheen, kwam nog geregeld naar zijn werk in Eindhoven. Maar in de zomer van 2004 werd duidelijk dat hij niet meer te genezen was. Binnen enkele weken stierf hij, in het volle vertrouwen dat zijn leven heel goed was geweest.

Dat was het eind van een bijzonder mens vol tomeloze energie. Een jongere collega vat te het samen in één zin door te zeggen dat hij vaak de indruk had gehad dat er wel drie Jack van Lints waren.

Dankbetuiging

Voor de samenstelling van dit In Memoriam heeft de schrijver geprofiteerd van mededelingen van H. van Tilborg, F. van der Blij, A. Schrijver, maar natuurlijk in de eerste plaats van het materiaal dat Jack zelf had nagelaten. Het fotomateriaal werd aangeleverd door Betty van Lint.

Tot slot

Op de website <http://www.win.tue.nl/~jlint> zijn enkele stukken bijeen gebracht die Jack nog zelf heeft samengesteld:

1. Curriculum Vitae.
2. Een lijst van ongeveer 150 publicaties in wetenschappelijke tijdschriften, aangevuld met allerlei ander materiaal, zoals boeken en redevoeringen.
3. Een lijst van voordrachten in binnen- en buitenland.



Rector Magnificus van de TU Eindhoven, 1991 tot 1996

Referenties

- 1 J.H. van Lint, *Hecke operators and Euler products*, Academisch proefschrift, Utrecht 1957.
- 2 J.H. van Lint, 'Combinatorial Theory Seminar Eindhoven University of Technology', *Lecture Notes in Mathematics* 382, Springer Verlag, 1974.
- 3 J.H. van Lint, 'On the non-existence of certain perfect codes', In: *Computers and Number Theory*, Academic Press, London, p. 277–282.
- 4 J.H. van Lint, 'On the non-existence of perfect 2- and 3-Hamming-error-correcting codes over the alphabet $GF(q)$ ', *Information and Control* 16 (1970), p. 369–401.
- 5 J.H. van Lint, 'Non-existence theorems for perfect error-correcting codes', *Computers in Algebra and Number Theory*, SIAM-AMS Colloquia 3, p. 89–95.
- 6 J.H. van Lint, 'Non-existence of perfect 5-, 6- and 7-Hamming-error-correcting codes over $GF(q)$ ', *Report 70-WSK-06*, Eindhoven University of Technology.
- 7 J.H. van Lint, 'Coding Theory', *Lecture Notes in Mathematics* 201, Springer Verlag, 1971.
- 8 J.H. van Lint, 'Introduction to Coding Theory', *Graduate Texts in Mathematics* 86, Springer Verlag 1982, second edition 1992, third (enlarged) edition 1998.
- 9 P. Cameron and J.H. van Lint, 'Graph Theory, Coding Theory and Block Designs', *London Math. Soc. Lecture Notes* 19, Cambridge University Press, 1975.
- 10 P. Cameron and J.H. van Lint, 'Graphs, Codes and Designs', *London Math. Soc. Lecture Note Series* 43, Cambridge University Press, 1980.
- 11 P. Cameron and J.H. van Lint, 'Designs, Graphs, Codes and their Links', *London Math. Soc. Student Texts* 22, Cambridge University Press, 1991.
- 12 J.H. van Lint and R. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press 1991.
- 13 J.H. van Lint en J.W. Nienhuys, *Discrete Wiskunde*, Academic Press, 1991.

Jan Stevens

Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Chalmers tekniska högskola
412 96 Göteborg, Zweden
stevens@math.chalmers.se

Column Wiskundigen in den vreemde

Regn och sprit

Jan Stevens volgde zijn opleiding in de differentiaaltopologie aan de universiteit van Groningen. Na zijn promotie in Leiden, 1985, bij Jozef Steenbrink vond hij aansluitend werk als postdoc in Utrecht bij Dirk Siersma, daarna als Hochschulassistent in Hamburg. Via Utah en Warwick bereikte hij Zweden. Hij werkt daar sinds 1995 als universiteitslektor aan de universiteit van Gotenburg. Zijn onderzoeksgebied ligt op het gebied van de singulariteitentheorie.

Al bijna tien jaar werk ik in Gotenburg, Zwedens tweede stad, halverwege Kopenhagen en Oslo. Over Zweden wist ik niet zoveel voordat ik hier naar toe kwam. Ik had eigenlijk alleen de boeken van Sjöwall en Wahlöö gelezen. Het lijstje met Zweedse koningen kan ik nog steeds niet opzeggen. Daar staat tegenover dat ik nog geen Zweed tegengekomen ben die weet wat een stadhouder is. De vrede van Munster maakte tegelijk een einde aan de dertigjarige oorlog en dat was ook het einde van Zweden als grootmacht. Later was het een arm land, waaruit bijna een kwart van de bevolking naar Amerika emigreerde. Van Europa moeten de Zweden niet veel hebben. In een volksstemming is hier de euro afgewezen.

Over de Zweedse wiskunde wist ik ook niet veel. Toen ik hier solliciteerde, was Springers reactie in Utrecht: "Is er dan algebra in Zweden?". Zweden is een analyseland. Waarschijnlijk komen de meesten op de vraag Zweedse wiskundigen te noemen niet verder dan Mittag-Leffler. Andere bekende namen associeer je niet zo gauw met Zweden, zoals bijvoorbeeld Fredholm — spreek uit Freedholm. Zweeds is makkelijk te lezen, als je Nederlands, Duits en Engels kent, maar de uitspraak geeft problemen. Voor de ouderen onder u hoef ik alleen maar Kindvall te noemen. Zweeds schrijven is niet moeilijker dan Zweeds spreken (dat is voor het Duits wel anders).

Het mathematisch instituut hier is (net als bij de natuur- en scheikunde) een samenwerking tussen de universiteit van Gotenburg (mijn werkgever) en Chalmers tekniska högskola (CTH). De CTH is opgericht met een donatie van William Chalmers, een Schotse koopman, rijk geworden van de handel met de Oost; zo ging dat in de voorvorige eeuw. Op ons instituut werken veel buitenlanders. Over de studentenaantallen mogen we niet klagen. Op de CTH verzorgen we het wiskundeonderwijs voor alle afdelingen. Aan de universiteitskant geven we

serviceonderwijs voor de lerarenopleiding. Zulke colleges maken een groot deel uit van mijn onderwijs.

De slechte prestaties van Zweedse scholieren in internationale vergelijkingen en de bedroevende examenresultaten heeft de regering er toe gebracht een commissie in te stellen om een actieprogramma uit te werken om de belangstelling voor het vak wiskunde te vergroten en het wiskundeonderwijs te ontwikkelen. Aangezien een van de voorwaarden was dat het bijna niks mag kosten, is er wel een dik rapport uitgekomen, maar zijn er weinig echt concrete voorstellen gedaan.

De afgelopen jaren is de voorkennis van studenten veranderd. Rekenen met breuken is niet meer vanzelfsprekend. Dat heeft onvoorziene consequenties voor het oplossen van kwadratische vergelijkingen. Dat gebeurt hier niet met de abc -formule, maar met de pq formule. Als je in de discriminant $(p/2)^2 - q$ van $x^2 + px + q$ het voor oneven p optredende halfje als 5 achter de komma schrijft, krijg je natuurlijk een hele moeilijke wortel om te trekken.

Met zoveel buitenlanders aan de universiteiten in Zweden is er nu wel degelijk algebra en algebraïsche meetkunde. Verder is er met geld van een Scandinavische onderzoeksraad een Noordelijk netwerk algebraïsche meetkunde opgericht. Oslo ligt trouwens dichterbij Gotenburg dan Stockholm. Gotenburg ligt aan de westkust, hier komt de Golfstroom nog (in de winter hebben we dan ook voornamelijk regen, en maar weinig sneeuw). Stockholm is meer op de Oostzee georiënteerd. Tussen de hoofdstad en hier is er een soort Amsterdam/Rotterdam tegenstelling.

Zweden is een groot land met weinig inwoners. We hebben hier in de stad weliswaar een tunnel met bijbehorende files, maar je hoeft je niet ver buiten de grotere steden te begeven om lege wegen te vinden.

Er zijn heel wat overeenkomsten tussen Nederland en Zweden. Ook dit land ziet zich als gidsland. Het Nederlandse drugsbeleid is een gruwel in Zweedse ogen. In het openbare debat is de restrictieve alcoholpolitiek iets dat waard is tegen Brussel te verdedigen. Dan moet je zien hoe de mensen de drank aanslepen uit Denemarken en Duitsland. Op welk gebied wordt Nederland dan wel als voorbeeld gezien? Dat geldt uw eigen lijfblad. In het laatste nummer van het blaadje *Medlemsutskicket* van het Svenska Matematikersamfundet wordt het *Nieuw Archief* als lichtend voorbeeld genoemd.



Gerrit van Dijk

Mathematisch Instituut

Universiteit Leiden

Postbus 9512

2300 RA Leiden

dijk@math.leidenuniv.nl



Gerrit van Dijk

Afscheidsrede

Dat was afgesproken

Vrijdag 27 augustus 2004 heeft Gerrit van Dijk afscheid genomen van de Universiteit Leiden. Van Dijk was sinds 1972 verbonden aan deze universiteit. Hij nam toen al een prominente plaats in binnen de harmonische analyse, zijn wetenschappelijk specialisme. Hij heeft zich bijzonder ingespannen voor samenwerking met Russische onderzoekers, waarvoor hij binnen NWO een succesvol programma leidde. Op bestuurlijk terrein heeft hij veel werk verricht voor de internationalisering van het wiskundig onderzoek. Hij was mede-initiatiefnemer voor Nederland voor de European Association of Deans of Science (EADS), waarin het overleg tussen bestuurders van Europese bèta-faculteiten is georganiseerd. Bij zijn afscheid werd hij benoemd tot Officier in de Orde van Oranje-Nassau.

Cees van der Hoeven, voormalig voorzitter van de Raad van Bestuur van Ahold, ging enige dagen nadat hij beschuldigd werd verantwoordelijk te zijn voor een grote boekhoudfraude in de Verenigde Staten, op wintersport naar Lech in Oostenrijk. Een verslaggever vroeg hem op Schiphol of dit wel het juiste moment was om het bedrijf alleen te laten. Van der Hoeven antwoordde: deze vakantie was reeds geruime tijd geleden afgesproken. "Afgesproken", dat heeft me getroffen. Ik zie er een parallel in met de dag van vandaag. De achtergrond is gelukkig niet zo somber als bij Van der Hoeven. Vandaag komt er een eind aan de actieve betrokkenheid bij mijn bedrijf, de Leidse universiteit en dat doet weliswaar

een beetje pijn, omdat ik erg veel van deze universiteit houd, maar het is geen grote tragedie: het was zo afgesproken.

Aanvankelijk was ik van plan u een college voor te schotelen onder de titel: *Wiskundige worden*, of *Zelf wiskundige worden* in de geest van de colleges die Gerard Reve aan de Leidse universiteit heeft gegeven in 1985 onder de titel: *Zelf schrijver worden*. Ik zou u daarbij de opoffering hebben willen schetsen die u zich zou moeten getroosten om wiskundige te worden. Ik heb gemeend deze zware kost niet vandaag te behandelen en naar minder hoogdravende sferen af te dalen. Lichte kost leek me voor deze dag beter. De titel *Onder directeuren*, als variatie op Hermans *Onder*

professoren leek me wel wat. Maar ik heb uiteindelijk gekozen voor een rede met een titel die mij persoonlijk aanspreekt. Wat nu volgt zou echter ook de titel *Een persoonlijke ervaring* kunnen dragen.

Mijn vak

Wiskunde is mijn vak. In 1972 werd ik in Leiden benoemd tot lector op 33 jarige leeftijd. Ik kon kiezen tussen Leiden en Utrecht, mijn alma mater. Utrecht wilde me eigenlijk niet laten gaan. Van alles werd geprobeerd om mijn overgang naar Leiden tegen te houden. Ik kreeg de indruk dat ik van een modern wiskundig instituut onder leiding van Freudenthal, Springer en Van der Blij in een sterk behoudende omgeving terecht zou komen. Ik besloot echter de uitdaging aan te gaan en weg te gaan onder de vleugels van mijn leermeesters. Een nieuw bestaan opbouwen. Dat viel toch wel tegen in het begin. Want mijn Utrechtse vrienden hadden wel een beetje gelijk: een eerste kennismaking met de Leidse wiskundigen over het te verzorgen onderwijs, liet een kloof zien van nogal grote omvang. Het analyseonder-



Israil Gelfand in Boedapest, 1971

wijs stamde uit vervlogen tijden. Dat was niet te vergelijken met Utrecht, waar modern onderwijs werd gegeven, geënt op de Franse school van Bourbaki. Mijn voorstel om ook in Leiden hiermee te beginnen werd maar schoorvoetend aanvaard. De studenten zouden ook in Leiden kennis moeten maken met begrippen als bijvoorbeeld uniforme convergentie, een nogal moeilijk nieuw begrip dat ik echter goed onder de knie had door mijn Utrechtse training. Van der Blij had dat begrip in zijn colleges uitvoerig geïntroduceerd. En wij als studenten waren er erg bij betrokken. De colleges waren druk bezocht maar moeilijk te volgen. En de docent kreeg het af en toe ook moeilijk. Ook voor hem waren de begrippen nieuw. Zeker als hij een keer niet erg in vorm was op een college, wellicht vanwege een slechte nachtrust. Dan wilde hij ons doen geloven dat puntsgewijze convergentie uniforme convergentie impliceert. Hetgeen tot groot boegeroep leidde. Hij hield ons hiermee wel scherp. Wat een verschil met de Leidse situatie, dacht ik. En ook, in mijn ogen, normale zaken waren niet geregeld in Leiden: er was weinig secretariële ondersteuning voor de staf; artikelen en brieven moest jezelf typen. Ik kreeg het gevoel dat ik me niet goed had voorbereid op de overstap naar Leiden.

Ik ben me voor het Mathematisch Instituut gaan inzetten om een verandering te weeg te brengen. Hier moet ik wat preciezer zijn. Ik bedoel met Mathematisch Instituut de vakgroep zuivere wiskunde. De toegepaste wiskunde was apart georganiseerd in het Instituut voor Toegepaste Wiskunde onder leiding van Zoutendijk. Daar was alles

goed geregeld. Het heeft even geduurd. Beide onderdelen van de wiskunde, de zuivere en de toegepaste, zijn nu verenigd in een instituut. De faciliteiten zijn goed en het onderwijs bij de tijd. Wel liggen we nog steeds op Utrecht achter in elke Elsevier enquête. Er is dus nog werk aan de winkel.

Mijn onderzoek richtte zich vooral op de harmonische analyse en Fourieranalyse. Ik geloof niet dat er veel verschil is tussen de twee benamingen. Fourier was een wiskundige uit de 18e eeuw, die nog deelgenomen heeft aan Napoleons expeditie naar Egypte, maar die zich later geheel wijdde aan de wiskunde. Intussen had hij de titel baron verworven. In zijn belangrijkste publicatie *Théorie analytique de la chaleur* onderzocht hij de warmtegeleiding in metalen. Hierbij loste hij randwaardeproblemen op met behulp van goniometrische reeksen, waarmee zeer algemene functies konden worden uitgedrukt. Deze reeksen worden nu Fourierreeksen genoemd.

Ik maakte kennis met de harmonische analyse in Utrecht in de colleges en seminaria van wijlen de hoogleraar Reiter en aanvankelijk was het ook de bedoeling dat ik bij Reiter zou promoveren. De eerlijkheid gebied te zeggen dat ik niet erg met hem overweg kon. Zijn Oostenrijkse mentaliteit van alles tot op het bot uitschrijven en willen begrijpen sloeg bij mij niet aan. De grote lijn vasthouden vond ik belangrijker en ik voelde me daarmee meer thuis bij Springer en Van der Blij. Na enige tijd ben ik overgestapt op Springer als promotor. Het is een grote eer voor mij dat hij hier vandaag aanwezig is. Van Reiter heb ik veel van de grondslagen van de harmonische analyse

geleerd. Zijn boek *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, samen met Dr. Stegeman, beschouw ik als een van de beste boeken als introductie tot de harmonische analyse.

Springer opereerde in een internationale context, zoals dat tegenwoordig heet. Op het Instituut in Utrecht was het een komen en gaan van buitenlandse collegae die zich met zijn vak bezig hielden. Hiertoe behoorde ook harmonische analyse, maar dan gelieerd aan algebraïsche getaltheorie. In het bijzonder was Springer geïnteresseerd in de harmonische analyse op p -adische groepen. Een erg abstract onderwerp. Maar vergist u niet: tientallen wiskundigen over de gehele wereld waren er in hoge mate in geïnteresseerd. Springer hield er een seminarium over, om de stof wat beter te leren begrijpen, zoals hij zei. Deze praktijk paste hij ook wel eens toe bij een nieuw college, een beetje uit overmoed. Dat liep vaak niet goed af. Uit dat seminarium is het onderwerp van mijn proefschrift ontstaan. Het was een boeiende tijd. Na mijn promotie kon ik een *membership* krijgen aan het prestigieuze *Institute for Advanced Study* in Princeton, de plaats van Einstein en Von Neumann, een der grondleggers van de computer science. Mijn mentor daar was Harish-Chandra, een permanent *member* van het *Institute*, een Indiër, gepromoveerd bij Dirac in Engeland. Ik heb nog nooit zo'n geniaal iemand ontmoet. Helaas was zijn gezondheid slecht. Ik heb erg veel van hem geleerd. Hij leidde het *member seminar* op maandag, en op dinsdag gaf hij college over zijn specialisme, inderdaad harmonische analyse op p -adische groepen. Het grote gehoor kreeg het niet gemakkelijk: niet alleen was de stof pittig maar het tempo van de colleges was



Kwadrant van Snellius; een getrouwe kopie is aan Van Dijk aangeboden bij zijn afscheid. Het is een symbool voor metingen aan gekromde ruimten. Het origineel bevindt zich in Museum Boerhaave te Leiden.



Institute for Advanced Study, Fuld Hall. Kerstkaart 1970

hoog. Hij schreef alles keurig op het bord, maar met zulk een snelheid dat iedereen na de twee uur college kramp in zijn vingers had. Eigenlijk had ik me niet zo erg behoeven in te spannen achteraf: Harish-Chandra werd weer ziek rondom kerst, een tweede hartaanval trof hem, en Armand Borel, zijn collega, vroeg mij of ik Harish-Chandra's aantekeningen wilde redigeren en uitgeven. Ik was erg verrast maar erg blij en aanvaardde de taak met groot enthousiasme. De lecture notes zijn uitgegeven bij *Springer Verlag*. Wat ik me niet direct realiseerde was dat hiermee ook mijn naam was gevestigd. Ik kreeg talrijke uitnodigingen. Een van deze uitnodigingen is voor mijn verdere leven van grote betekenis geweest: de uitnodiging om in Boedapest deel te nemen aan een conferentie met bekende Russen als Gelfand, Kirillov, Zhelobenko en Kazhdan. Het was nog de tijd van de koude oorlog en het ijzeren gordijn. Russen konden niet vrij reizen naar het Westen, Boedapest was een goed alternatief. Deze kennismaking met 'Rusland' is niet mijn enige gebleven. Ik heb er vele vrienden en ben ik er vaak geweest. Het kost wel steeds enige moed om er heen te gaan. Gekscherend heb ik eens gezegd: als ik naar Rusland ga neem ik altijd twee koffers mee, een met kleren en een met voedsel. De leefomstandigheden zijn er nog steeds matig over het algemeen. U hebt recent op TV, tijdens de rapportages over vierhonderd jaar Sint Petersburg, nog eens de binnenplaatsen van Sint Petersburg kunnen zien. En u kunt zich voorstellen wat er in de provincie aan de hand is. Er schijnt ook maar geen verandering in te willen komen. Russen zijn volstrekt murw gemaakt onder het Sovjet regime. Dit gepaard met een aangeboren flegma levert niet de nodige spirit op om er nu wat aan te doen.

De wiskunde staat in Rusland op buitengewoon hoog peil, ook in de provincie. En men heeft geen klagen over belangstelling van studenten. En zeker vijftig procent van de bètastudenten is vrouw. Vooral de theoretische

vakken zijn in trek. Voor experimenteel werk zijn er onvoldoende faciliteiten. Dankzij een grote financiële bijdrage van NWO heb ik drie jaar lang een groot aantal wiskundigen in Moskou, Sint Petersburg en Tambov kunnen ontmoeten en redelijke levensomstandigheden kunnen geven. Tambov is een stad in het zuiden van Rusland, vijfhonderd kilometer van Moskou, elf uur met de trein. Ik heb daar vooral samengewerkt met Molchanov, een der pioniers op het gebied van de harmonische analyse op gekromde ruimten. Hij is hier vandaag aanwezig en zal deze Nederlandse zinnen kunnen begrijpen. Analyse op gekromde ruimten is een fantastisch mooi gebied van de wiskunde. Twaalf promovendi heb ik er in gehad. Het gebied heeft veel raakvlakken met de natuurkunde en is ook gestart vanuit de natuurkunde, uit de theorie van quantizatie. Kwantumfysica tegenover klassieke fysica. Berezin's werk heeft een belangrijke rol hierbij gespeeld.

In Nederland denk ik dankbaar terug aan de samenwerking met Tom Koornwinder, nu hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. Die samenwerking is al 25 jaar geleden ontstaan. Samen hebben we een echte Liegroepen-school opgezet. De tweewekelijkse seminaria werden zeer druk bezocht door veel jonge lui. Ook Erik Thomas uit Groningen was een stimulerende kracht hierbij. Tom is onlangs 60 geworden, Erik is vorig jaar met emeritaat gegaan, de tijd gaat snel. We kijken terug op een erg boeiende tijd die, mag ik wel zeggen, ruim financieel gesteund is door NWO. Een hoogtepunt was het seminarium in 1979 samen met fysici, en de bespreking later van het baanbrekende artikel van Jacques Faraut: *Analyse harmonique sur les espaces hyperboliques*. De samenwerking heeft een grote invloed gehad op mijn werenschappelijke ontwikkeling. En de vriendschap en waardering is gebleven.

Wiskunde is een moeilijk vak om populair over te spreken. Vele termen die ik heb gebruikt zullen u weinig zeggen. Het vervelende is dat ik toch moet aantonen dat ik iets nuttigs heb gedaan. Althans dat wilt u denk ik horen. Ik kan dat uitleggen maar u voelt het al aankomen: dat wordt wel erg moeilijk. Wiskundigen zijn zo enthousiast over hen werk dat ze zich vaak geen rekenschap geven van enige verantwoording tegenover de maatschappij. Wiskundigen zijn het meest reislustige volk van de universiteit denk ik. Ze reizen de hele wereld over om hun werk uit te dragen bij andere wiskundigen. Met enorm enthousiasme. Dat wist u niet denk ik. Wiskundigen zijn, in uw beleving, rustige personen die achter een



Vladimir Molchanov (rechts) voor het hoofgebouw van de Universiteit van Tambov. Conferentie over Harmonische Analyse, 1995

bureau zitten en niet gauw in beweging komen. U ziet er niet veel in om wiskundige te zijn. Dan verrast u mijn betoog, naar ik aanneem. Het geeft ook meteen aan dat er een kloof gaapt tussen ons werk en de maatschappij. We moeten ons veel meer inspannen onze vonk naar u te doen overslaan. U wilt nog wel geloven dat wiskunde nuttig is, maar wij moeten niet gaan overdrijven vindt u. Het zijn geen *Life Sciences*. Dat is andere koek. Nu weet u niet, maar dat zeg ik u dan nu, dat wiskunde heel belangrijk is voor de *Life Sciences*, voor het modelleren en begrijpen wat zich in leven afspeelt. En uw vak dan Van Dijk, de Fourieranalyse, is daar ook iets nuttigs mee te doen. Dames en heren, zodra het om trillingen, geluid en licht gaat is Fourieranalyse nog steeds de *tool* om kwantitatief en kwalitatief conclusies te kunnen trekken. ECG's en EEG's bij de dokter kunnen alleen goed geïnterpreteerd worden met Fourieranalyse. Waarom zegt u dat niet eerder hoor ik u zeggen. Omdat wij als wetenschappers al weer tien stappen verder zijn, en ons nu met gekromde ruimten bezig houden.

Mag ik naast onze plicht voor verantwoording toch ook pleiten voor enig krediet voor de wetenschap. Ik weet dat dit niet erg aangeslagen is bij de politiek in de laatste jaren. Toch blijf ik er voor pleiten. Als andere landen, inclusief Rusland, wel groot krediet geven aan de wetenschap, zullen onze beste mensen uiteindelijk uit Nederland verdwijnen. Daar ben ik zeker van.



Toshio Oshima en Gerrit van Dijk bij de promotie van Marcel de Jeu, Leiden 1994

Promovendi zijn het zout in de pap van de wiskunde. Ze houden je scherp en met hen werken we aan interessante problemen. Op een staf van zestien hebben we ook ongeveer zestien aio's en oio's. Uit allerlei landen: Spanje, Italië, Brazilië, Iran, Indonesië, India, Duitsland, en Nederland. De voertaal is Engels. Studenten ontmoeten hen tijdens de werkgroepen. Ook daar is de voertaal vaak Engels. Heel natuurlijk. Ik heb zelf twaalf promovendi in Leiden gehad. Het was een zeer boeiende tijd. Mijn laatste promovendus is een vrouw, eindelijk. Het komt nog steeds te weinig voor in Nederland: vrouwelijke hoogleraren in de wiskunde in Nederland: een in Groningen, een in Eindhoven en een in Leiden. Op de vier kernleerstoelen van het Mathematisch Instituut geen gekke score: 25% vrouw. Mijn promovenda is echter een Spaanse. Met Sofia mag ik ook na mijn emeritaat nog even door. We zijn bezig een heel mooi stuk nieuw werk over oscillatorrepresentaties. Er zijn veel buitenlandse promovendi in de wiskunde. En niet alleen in de wiskunde; bij de sterrenkunde, de informatica en de natuurkunde is de trend dezelfde. Niets op tegen, prima voor de internationalisering van de wetenschap. Maar toch tekent zich hier een probleem af. Er zijn gewoon niet genoeg Nederlandse aio's te krijgen. Voor de wetenschap geen groot probleem; zoals gezegd, met buitenlandse aio's is het gat snel gevuld en de kwaliteit is niet slecht. Maar voor Nederland is dit niet goed. Het resultaat zou wel eens kunnen zijn dat op termijn de vier kernleerstoelen van het Ma-

thematisch Instituut worden bezet door buitenlandse talenten. Immers als er nu te weinig Nederlands talent wordt opgeleid kan dat zich gaan voordoen. Vindt U dat een gewenste ontwikkeling?

De belangstelling voor de bètastudies is bedroevend laag, met name voor de harde bètastudies wiskunde, informatica, natuurkunde. De verminderde belangstelling tekent zich ook af buiten onze landsgrenzen, maar in Nederland is de belangstelling wel erg laag. Velen doen een poging om de oorzaak van deze verminderde interesse aan te geven. Weinig remedies zijn er tot op vandaag. Dat het wiskundeonderwijs op het vwo niet meer is wat het was, is waar, dat er te weinig gepromoveerde wiskundeleraren zijn ook, maar dat verklaart niet alles. Ik denk dat een krachtig signaal vanuit de overheid dat het zo met Nederland economisch en cultureel niet goed gaat, zou kunnen helpen. Dat leerlingen opzien tegen hard werken wil er bij mij niet in. Dat er te weinig belang aan bètastudies gehecht wordt door de overheid is wel fnuikend. Een stimuleringsmaatregel in de vorm van een financiële tegemoetkoming voor studenten en leraren zou het belang sterk onderstrepen en de maatschappelijke waardering voor bèta's doen rijzen. Dat laatste is nog het meest belangrijk in mijn ogen. In Rusland ben je iemand als je wiskunde hebt gestudeerd. Ik wil niet in Rusland leven, dat zal u duidelijk zijn. Maar op deze houding ben ik jaloers. In dit verband is het voornemen van minister Van der Hoeven

om een bonus te verstrekken aan bètastudenten die op tijd afstuderen prijzenswaardig.

Onder decanen

Ik ben vier jaar decaan geweest van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen en was in die functie lid van het College van Decanen. De vergaderingen van het College waren eens per maand op woensdag om half acht 's avonds in de curatorenkamer van dit gebouw. De vergaderingen werden voorgezeten door de rector. Heel goede herinneringen bewaar ik aan de twee rectoren van mijn tijd: Beenakker en Leertouwer. Beenakker was fysicus en dat kon je goed merken. Ook al wist je het niet, zijn uiterlijk verried het. Helaas is hij ons ontvallen. Ik mocht hem wel: bij het begin van de vergaderingen zette hij zijn stoel een beetje scheef zodat hij de decanen van Wiskunde en Natuurwetenschappen en Geneeskunde recht kon aankijken. Hij wilde daarmee zeggen dat die twee faculteiten voor hem de belangrijkste waren; in de andere faculteiten werd soms leuk werk gedaan, maar het echte werk vond bij Wiskunde en Natuurwetenschappen en Geneeskunde plaats. Daar leefde de Leidse universiteit van. Hij deed daar niet geheimzinnig over. Iedereen kende dit standpunt wel, maar kende er geen al te zwaar gewicht aan toe, terecht. Soms kon een decaan zich echter niet goed bedwingen en ging hij met Beenakker over deze houding in discussie. Vooral de collega van Sociale Wetenschappen kon daarin scherp zijn. Dit hielp echter niet. Beenakker bleef bij zijn



Tijdens de plechtigheid van de afscheidsrede van Gerrit Van Dijk. Vooraan, van links naar rechts, prof. P. Baas (Universiteit Leiden), prof. H. Jeppesen (Kopenhagen, president EADS) en prof. I. Haines (Londen, secretaris EADS)

standpunt. Als je in zijn hart kon kijken was zijn standpunt nog preciezer: Geneeskunde en Wiskunde en Natuurwetenschappen zijn het hart van de universiteit maar natuurkunde het kloppend hart. Natuurkunde, met zijn drie Nobelprijswinnaars, hoeveel betekende deze wetenschap niet voor de Leidse universiteit. Ik vond het een beetje overdreven, hijzelf ook wel geloof ik. Want we moesten toch in de verleden tijd spreken over deze zaken dacht ik: hadden betekend. Niet dat er nu slecht werk werd verricht bij natuurkunde, integendeel, maar ook andere disciplines waren erg goed bezig. Sterrenkunde en Wiskunde, om maar eens twee exacte disciplines te noemen, timmerden goed aan de weg! Recent waren Ewine van Dishoeck en Tim de Zeeuw benoemd bij Sterrenkunde. Deze benoemingen hadden nogal aandacht gekregen en er werd gesproken van de aanstelling van een dubbelster.

Een regelmatig terugkerend onderwerp bij het College van Decanen was de gang van zaken bij promoties. Met name de te lange laudatio's waren een bron van zorg. Vele oplossingen werden voorgesteld waarbij het stampen met de staf me is bijgebleven: de pedel zou na vijf minuten met zijn staf op de grond stampen om daarmee het einde van de laudatio aan te geven. Ik geloof dat deze oplossing werd gesuggereerd door de decaan van Geneeskunde. Het wederom roepen van "hora est" was een andere variant. Het was een genoeglijk onderwerp.

Wat men ook van de Leidse universiteit mocht denken, onderzoek stond hoog in het vaandel. Met voorstellen voor het aantrekken van goede onderzoekers kon je alles doorbreken aan procedures. En dat is me ook veel gelukt: tijdens mijn decanaat werd het mogelijk om in zeer korte tijd zeer goede mensen aan te stellen. Carlo Beenakker, Tim de Zeeuw, Ewine van Dishoeck en even na mijn decanaat, tijdens het rectoraat van Leertouwer, Hendrik Lenstra. Dat maakt de Leidse universiteit zo aantrekkelijk. Mijn universiteit.

Een Delfts collega heeft me onlangs hier nog eens aan herinnerd; procedures die hier negen maanden in totaal nemen, nemen elders enkele jaren. Zo houden, mijnheer de rector. "Voor goede lui moeten wij het pad een beetje effenen". Deze uitspraak van Van de Sande Bakhuyzen, directeur van de Sterrenwacht, gedaan in 1884 in een vergadering van de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen over een toe te kennen eredoctoraat aan de wiskundige Stieltjes, is me in dit verband bijgebleven.



De heer en mevrouw Van Dijk bij het verlaten van het Groot Auditorium van het Academiegebouw van de Universiteit Leiden. Op de voorgrond de pedel, de heer W. van Beelen.

Terug naar het College van Decanen. Ik zie er met genoegen op terug. Ik vond dat daar de universiteit echt beleid maakte. Ik heb er ook veel vriendschap ontmoet. Veel oud-decanen zijn vandaag hier aanwezig en dat waardeer ik zeer.

Is informatica een wetenschap?

Over informatica, en meer algemeen over ICT, worden veel wollige stukken geschreven. Dat is niet goed voor het imago van de informatica, en roept vragen op naar haar wetenschappelijk gehalte. Toen de studie informatica in Leiden werd gestart, was er reeds enige ervaring met onderwijs in de informatica binnen de opleiding wiskunde. Wiskundigen hadden hier geen hoge pet van op. En als het iets voorstelde, dan was het eigenlijk gewoon (eenvoudige) wiskunde, zeiden ze. Maatschappelijk gezien kon de Leidse universiteit het niet maken door afzijdig te blijven van de nieuwe studie informatica. De faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen voelde dat ook, maar besloot zeer voorzichtig in de nieuwe studie te investeren. Kalkman, toentertijd decaan van de faculteit, zag weinig in de studie informatica, herinner ik me. Informatica is dus onder een moeilijk gesternte ontstaan. En, misschien verbaast het u, de gereserveerde houding ten opzichte van informatica is in Leiden niet gewijzigd. Nog steeds is er geen overtuiging dat informatica zich ontwikkeld heeft tot een echte wetenschap. Toevallig ben ik recent als interim wetenschappelijk directeur

van LIACS (Leiden Institute of Advanced Computer Science), het Leidse informatica instituut, nauw betrokken geraakt bij de informatica, en heb ik me een oordeel moeten vellen over haar wetenschappelijke kwaliteit en de verhouding tot andere bètawetenschappen. Voor alle duidelijkheid, naast informatica bestaat ook informatiekunde, weliswaar niet in Leiden (maar wel in Utrecht), een discipline die meer bij de alfa- en gammawetenschappen past. Sommigen zeggen dat er niet veel verschil is tussen deze onderscheidende disciplines. Dat maakt de uitkomst van een analyse naar het wetenschappelijke gehalte van informatica door een bèta al voorspelbaar. Ik wil echter proberen me hier niet veel van aan te trekken en voor u de vraag proberen te beantwoorden of informatica een wetenschap is.

De vraag is niet zomaar te beantwoorden met ja of nee. Recent heeft collega Stolker dezelfde vraag gesteld ten aanzien van rechtsgeleerdheid. Wetenschap, misschien beter natuurwetenschap, kenmerkt zich door een methode. Wat is de methode van de informatica, is die er wel en zo ja, is die verwant met die der natuurwetenschappen? En wat onderzoekt de informatica eigenlijk? Of is informatica een geleerdheid, of slechts een *tool*, een gereedschap, een academisch gevormd hulpstuk.

De informatici zelf zien hun 'wetenschap' niet beperkt tot bètawetenschap. Een centrale positie binnen de universiteit is de beste

plaats, wellicht dus een eigen faculteit. De invloed van de computer is immens, en dat is wellicht een reden voor een centrale positie, maar niet maatgevend voor het al dan niet verdienen van het predikaat wetenschap. Kunst heeft ook een grote impact, maar is het een wetenschap? Dat Leiden toch een faculteit der Kunsten heeft, zou de stichting van een informaticafaculteit kunnen rechtvaardigen. En gezien de toenadering tussen Kunsten en Informatica, zou er ook best iets van onderzoek kunnen groeien. We blijven dus nog steeds met de vraag zitten of informatica een wetenschappelijke methode hanteert in haar werk. Ik spreek nog niet van onderzoek. Immers dat moeten we nog definiëren.

Tot voor kort waren de studentenaantallen in de informatica groot. De meeste studenten trokken de technische universiteiten. Is informatica eigenlijk een technische studie? Onmiskenbaar heeft rekengereedschap een technische klank en is hardware een technische aangelegenheid. Software, nog belangrijker wellicht, is echter geen technische zaak. Het is daarom niet goed te verklaren waarom ervoorkeur is om aan een technische universiteit informatica te gaan studeren, dan alleen op grond van beeldvorming rondom computers.

Velen zien elektronica als een belangrijk onderdeel van de informatica. Het bakken van chips, zoals dat plastisch heet, ook. Maar dat zou ook in Leiden kunnen. Kortom ik meen te mogen zeggen dat informatica geen specifieke technische discipline is. Voor onderzoek in de informatica moeten we dus zeker ook gaan kijken aan de gewone universiteiten, die zich vooral richten op het ontwerp van software. Maar nu hebben we een term gebruikt die belast is: ontwerp. We zijn terug bij techniek, ook bij Kunsten. Ontwerpers zijn het, die we zullen aantreffen? Volgens een wiskundige methode? Bij universiteiten meestal wel. Vele informatici hebben wiskunde gestudeerd.

Een nieuwe trend is echter om de wiskunde-component in de informaticaopleidingen sterk te reduceren. De Vrije Universiteit is hier mee begonnen en ook in Leiden zijn stappen daartoe ondernomen. Nu is het gebruikelijk dat elke opleiding binnen de faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen haar studenten laat trainen door professionele wiskundigen in een stuk geavanceerde wiskunde, de basis van natuurwetenschappelijk onderzoek, van de natuurwetenschappelijke methode. Door de band met de wiskunde te willen versoepelen geeft informatica een signaal af niet echt als discipline thuis te horen bij Wiskunde en Natuurwetenschappen.



European Association of Deans of Science, Jena 1999

Het zal u duidelijk zijn dat velen moeite hebben informatica als bètawetenschap te zien, en ik voeg er aan toe, ook als wetenschap. Het bestaan van een duidelijke wetenschappelijke of natuurwetenschappelijke methode blijft vaag. Is Informatica niet meer een *enabling technology*, zoals ook het ICT-forum zegt? Ik sprak over de Informatica als geheel. Voor het deelgebied theoretische Informatica, waarin Leiden tot de absolute wereldtop behoort, kan men zeker andere maatstaven aanleggen.

Ik vind dat voor informatica meer de kwaliteit dan de kwantiteit, meer de bereidheid tot samenwerking met andere disciplines dan zelfstandigheid, de doorslag moet geven. Mede daarom is de recente keuze om in Leiden voor het LIACS het toepassingsgebied te beperken tot bio-informatica goed te verdedigen. Als het LIACS deze lijn consequent volgt, is haar positie binnen Wiskunde en Natuurwetenschappen krachtig en voegt het LIACS echt meerwaarde toe aan de faculteit. En, de tools nodig om bio-informatica te bedrijven zijn multi-inzetbaar, ook bij onderzoek van andere faculteiten. Angst voor een versmaling van de informatica door de keuze van dit applicatiegebied is mijn inziens ongegrond.

De Leidse universiteit maakt ruim baan voor talent. In de onlangs uitgebrachte brochure *Kiezen voor Talent* komt heel veel voor dat mijn instemming heeft. De Leidse universiteit is een heel bijzondere universiteit, waar ik zeer prettig heb gewerkt. Dat zij de wiskunde een goed hart toedraagt, waardeer ik zeer.

Hetzelfde geldt, maar iets dichterbij huis, voor de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen, een prachtige faculteit. Bijzonder was het om aan deze faculteit mede leiding te mogen geven, als decaan en later als wetenschappelijk directeur van het Mathematisch Instituut en recent tevens als interim wetenschappelijk directeur van LIACS, het informatica instituut van de faculteit.

Het Mathematisch Instituut gaat een spannende toekomst tegemoet. De jonge staf van hoogleraren en medewerkers moet laten zien dat het in hen gestelde vertrouwen terecht was. Ik ben daar optimistisch over. 

Hansjörg Geiges

Mathematisches Institut

Universität zu Köln

Weyertal 86–90

50931 Köln

Duitsland

geiges@math.uni-koeln.de

Christiaan Huygens and Contact Geometry

In de tweede helft van de zeventiende eeuw formuleerden Pierre Fermat en Christiaan Huygens hun theorieën over de optica. Uitgangspunt voor Fermat was het gegeven dat een lichtstraal de snelste weg zoekt, en voor Huygens dat elk punt van een golf front opgevat kan worden als een nieuwe lichtbron. Hansjörg Geiges illustreert de beginselen van de contactmeetkunde aan de hand van deze zogenaamde principes van Fermat en Huygens en laat met behulp van deze theorie zien dat de twee principes equivalent zijn.

De tekst is gebaseerd op de inaugurele rede die Hansjörg Geiges op 24 januari 2003 uitsprak bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Universiteit zu Köln. Daarvoor was hij hoogleraar meetkunde aan de Universiteit Leiden.

“—Oui, voilà le géomètre! Et ne crois pas que les géomètres n’aient pas à s’occuper des femmes!” (Jean Giraudoux, *La guerre de Troie n’aura pas lieu*)

For me, the most evocative painting in the Mauritshuis in Den Haag has always been *Het meisje met de parel*, even before a novel and a film turned the girl into something of a pop icon. However, that museum is the home to another portrait that cannot fail to attract the attention of any scientifically interested visitor, and one where the identity of (some of) the portrayed, like in Vermeer’s famous painting, is shrouded in mystery. I am speaking of Adriaan Hanneman’s *Portret van Constantijn Huygens en zijn kinderen* (figure 1). This family portrait depicts C. Huygens (1596–1687) —“the most versatile and the last of the true Dutch Renaissance virtuosos” (Encyclopaedia Britannica), whose most notable contributions lay in the fields of diplomacy and poetry,— together with his five children. Among them is Christiaan Huygens (1629–1695), who would go on to become one of the most famous mathematical scientists of his time, later to be characterised as “ein Junggeselle von hervorragendem Charakter und außergewöhnlicher Intelligenz” [11]. While I expound some of the mathematical themes of Christiaan Huygens’ life and hint at their relation to modern contact geometry, I leave the reader to ponder the question just which of the four boys in the family portrait shows that intellectual promise, a question to which I shall return at the end of this article.

An inaugural lecture is not only an opportunity to present one’s field

of research to a wider public, it also allows one to reflect on the standing of mathematics within the general intellectual discourse. On an earlier occasion of this kind [5] I have not been overly optimistic in this respect, and I have no reason to qualify anything I said there. Still, it is worth remembering that there have been even more precarious times for mathematics. In [4] we read that “The new Savilian professor [Baden Powell, Savilian professor of geometry at the University of Oxford 1827–1860] was shocked and dismayed by the low esteem accorded to mathematics in the University. He had been advised not to give an inaugural lecture on arrival, as he would almost surely not attract an audience.”



Figure 1 Adriaan Hanneman’s *Portret van Constantijn Huygens en zijn kinderen*. Among them is Christiaan (see page 123).

Disclaimer

A foreigner, even one who has lived in the Netherlands for several years, is obviously carrying tulips to Amsterdam (or whatever the appropriate turn of phrase might be) when writing about Christiaan Huygens in a Dutch journal. Then again, from a visit to the Huygensmuseum Hofwijck in Voorburg near Den Haag I gathered that in the Netherlands the fame of Constantijn Huygens tends to outshine that of his second-eldest son. Be that as it may, this article is intended merely as a relatively faithful record of my inaugural lecture (with some mathematical details added) and entirely devoid of scholarly aspirations.

The best slide for twins

Imagine that you are trying to connect two points A, B in a vertical plane by a slide along which a point mass M will move, solely under the influence of gravitation, in shortest time from A to B (see figure 2). This is the famous brachistochrone problem (from Greek $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$ = shortest, $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ = time), posed by Johann Bernoulli in 1696 in rather more erudite language: “Datis in plano verticali duobus punctis A & B assignare Mobili M viam AMB , per quam gravitate sua descendens & moveri incipiens a puncto A , brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B .” (*Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitantur*, Joh. Op. XXX (pars), [3], p. 212).



Figure 2 Imagine that you are trying to connect two points A, B in a vertical plane by a slide along which a point mass M will move, solely under the influence of gravitation, in shortest time from A to B .

A related problem is to find the slide connecting the points A and B in such a way that one will reach the end-point B of the slide in the same amount of time, no matter where on the slide one starts. This is known as the tautochrone problem.

Rather surprisingly, it turns out that the solution to either question is one and the same curve, the so-called *cycloid*. This is obviously the best slide a doting uncle can build for his twin nephews: not only will their slide be faster than anybody else's; if both of them start at the same time at any two points of the slide, they will reach the bottom of the slide simultaneously. This gives them the chance and the time to fight over other things.

In 1697 Jacob Bernoulli responded to the challenge set by his brother concerning the brachistochrone with a paper bearing the beautiful title *Solutio Problematum Fraternalium, una cum Propositione reciproca aliorum*, Jac. Op. LXXV ([3], p. 271–282). Johann's own solution appeared the same year (Joh. Op. XXXVII, [3], p. 263–270). The tautochrone problem had been solved by Christiaan Huygens as early as 1657, but the solution was not published until 1673 in his famous *Horologium Oscillatorium* [9], cf. [16].

The cycloid

The cycloid is the locus traced out by a point on the rim of a circle as that circle rolls along a straight line (figure 3). Choose cartesian

coordinates in the plane such that the circle rolls along the x -axis, with the point on the rim initially lying at the origin $(0, 0)$. Let a be the radius of the circle. When the circle has turned through an angle t , its centre lies at the point (at, a) , and so a parametric description of the cycloid is given by

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

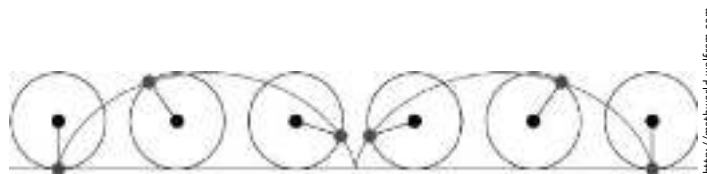


Figure 3 The cycloid

The cycloidal slide is obtained by turning this curve upside down. It is convenient to effect this by reversing the direction of the y -coordinate, while keeping the parametric equations unchanged. Given two points $A = (0, 0)$ and $B = (b_1, b_2)$ with $b_1 > 0$, $b_2 \geq 0$ in the xy -plane, there is a unique radius a and angle $t_B \in (0, 2\pi]$ such that $A = (x(0), y(0))$ and $B = (x(t_B), y(t_B))$. There are various ways to see this, the following is due to Isaac Newton, (cf. [3], p. 43): Draw any cycloid starting at A , and let Q be its intersection with the straight line segment AB . Then expand the cycloid by a factor AB/AQ . (Here and below I use the same symbol AB to denote a curve or line segment between two points A, B , as well as the length of that segment, provided the meaning is clear from the context.)

For some of the reasonings below I shall assume implicitly that $t_B \leq \pi$, so that the cycloidal segment connecting A and B does not have any upward slope; this is equivalent to requiring $b_2 \geq 2b_1/\pi$.

The brachistochrone and tautochrone problems were two of the most challenging geometric questions of 17th century mathematics, attracting the attention of the most famous (and cantankerous) mathematicians of that time, including the Marquis de L'Hospital, Leibniz, and Newton. As a result, these problems were the source of acrimonious battles over priority — the publications of the Bernoulli brothers on this topic have even been published in a collection bearing the title *Streitschriften* [3]. This was not the only occasion when the cycloid was the object of desire in a mathematical quarrel, and so this curve has often been dubbed the ‘Helen of Geometers’.

The following allusion to the tautochronous property of the cycloid in Herman Melville's *Moby Dick* ([13], Chapter 96, The Try-Works) shows that there were happy times when the beauty of mathematics had to some degree entered popular consciousness: “[The try-pot] [a pot for trying oil from blubber -HG] is a place also for profound mathematical meditation. It was in the left hand try-pot of the *Pequod* [Captain Ahab's ship, named after an Indian people -HG], with the soapstone diligently circling around me, that I was first indirectly struck by the remarkable fact, that in geometry all bodies gliding along the cycloid, my soapstone for example, will descend from any point in precisely the same time.”

The cycloidal pendulum

Besides the discovery of the true shape of Saturn's rings and one of its moons, namely Titan, Christiaan Huygens' most important scientific contributions are his theory of light, based on what has become known as Huygens' principle (discussed in the next section), and his development of a pendulum clock starting from his proof of the tautochronous

property of the cycloid.

At the time of Huygens, pendulum clocks were built (as they usually are today) with a simple circular pendulum. The problem with such a pendulum is that its frequency depends on the amplitude of the oscillation. With regard to the pendulum clock in your living room this is no cause for concern, since there the amplitude stays practically constant. But arguably the most outstanding problem of applied mathematics at that time was to build a clock that was also reliable in more adverse conditions, say on a ship sailing through gale force winds. Why are such accurate clocks important?

As is wryly remarked in the introduction to the lavishly illustrated proceedings of the *Longitude Symposium* [2], “Travelling overseas, we now complain when delayed for an hour: we have forgotten that once there were problems finding continents”. Indeed, how was it possible to determine your exact position at sea (or anywhere else, for that matter), prior to the days of satellite-based Global Positioning Systems? Mathematically the answer is simple (at least on a sunny day): Observe when the sun reaches its highest elevation. This will be noon local time. Moreover, the angle α of elevation will give you the latitude: If the axis of the earth’s rotation were orthogonal to the plane in which the earth moves around the sun, that latitude would simply be $90^\circ - \alpha$. In order to take the tilting of the earth’s axis by 23° into account, one needs to adjust this by an angle that depends on the date, varying between 0° at the equinoxes and $\pm 23^\circ$ at the solstices.

The longitude, on the other hand, cannot be determined from this observational data alone. Indeed, the actual value of the longitude at any given point is a matter of convention. The fact that the zero meridian passes through Greenwich is a consequence of the scientific achievements and geopolitical power of the British, not astronomy. However, if you keep a clock with you that shows accurate Greenwich time, and you bear in mind that the earth rotates by a full 360° in 24 hours, then multiplying the difference between your local time and that shown on the clock by $15^\circ/h$ will determine your longitude relative to that of Greenwich.

All the practical problems involved in building such an accurate clock were first solved by John Harrison in 1759: cf. [2] and the thrilling account of Harrison’s life in [14].

From a mathematical point of view, the question addressed by Huygens concerned the most interesting aspect of these practical problems: Is it possible to devise a pendulum whose frequency does not depend on the amplitude of the pendular motion? The hardest part of this question is to find the tautochronous curve, along which the pendulum mass should be forced to move. This Huygens established to be the cycloid. He further observed that one could make the pendulum move along a cycloid by restricting the swinging motion of the pendulum between appropriately shaped plates.

Take a look at figure 4 (kindly provided by Manfred Lehn). Here AB is (half) a cycloid, along which the pendulum mass M , attached to the string $B'M$, is supposed to move. This means that we require this string to be tangent to the curve $B'A$ at the point M' , and the length $B'M$ to equal $B'A$, the length of the pendulum. In other words, the cycloid AB is given by tightly unrolling (whence the title of [16]) a string from the curve $B'A$. If the pendulum is forced to swing between two plates shaped like $B'A$, then the pendulum mass will move along the cycloid, as desired.

Such a curve AB obtained by unrolling a string from a curve $B'A$ is called the *involute* of $B'A$ (and $B'A$ the *evolute* of AB). So the second question faced by Huygens was: Which curve has the cycloid as its involute? Rather miraculously, the answer is again: the cycloid. Here

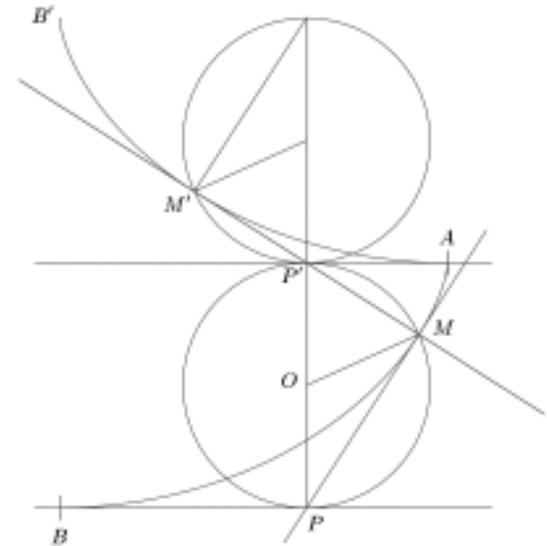


Figure 4 The construction of Huygens amplitude invariant pendulum. The curve AB is (half) a cycloid, along which the pendulum mass M , attached to the string $B'M$, is supposed to move.

is the geometric proof: Let AB be the cycloid traced out by the point M as the lower circle in figure 4 rolls to the left along the horizontal line between the two circles (with $M = A$ at $t = 0$), and $B'A$ the cycloid traced out by the point M' as the upper circle rolls to the right along a horizontal line through B' (with $M' = B'$ at $t = 0$). With the defining equations for the cycloids as in the previous section, the situation shown in the figure corresponds to $t = t_0$ for some $t_0 \in [0, \pi]$ for the lower circle and $t = \pi - t_0$ for the upper circle.

The velocity (with respect to the parameter t) of the point M can be split into two vector components of length a : one in horizontal direction, corresponding to the speed of the centre of the circle, and one in the direction tangent to the circle, corresponding to the angular speed of the rolling circle. An elementary consideration shows that the line MP bisects the angle between these two directions, and so this line constitutes the tangent line to the cycloid at M . Analogously, the line $M'P'$ is the tangent line to the cycloid $B'A$ at M' . By symmetry of the construction, the line $M'P'$ passes through M . In order to conclude that AB is the involute of $B'A$ it therefore suffices to show that the length of the cycloidal segment $M'A$ equals the length of the line segment $M'M$. Also observe that, by the theorem of Thales, the line $M'M$ is orthogonal to the tangent line MP at M ; this is a general phenomenon for an involute.

The angle $\angle MOP'$ equals t_0 , hence $\angle MPP' = t_0/2$. This yields

$$M'M = 2P'M = 4a \sin \frac{t_0}{2}.$$

On the other hand, from the defining equations of the cycloid we have

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

whence

$$M'A = \int_{\pi-t_0}^{\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \cos \frac{\pi-t_0}{2} = 4a \sin \frac{t_0}{2},$$

that is, $M'M = M'A$, which was to be shown.

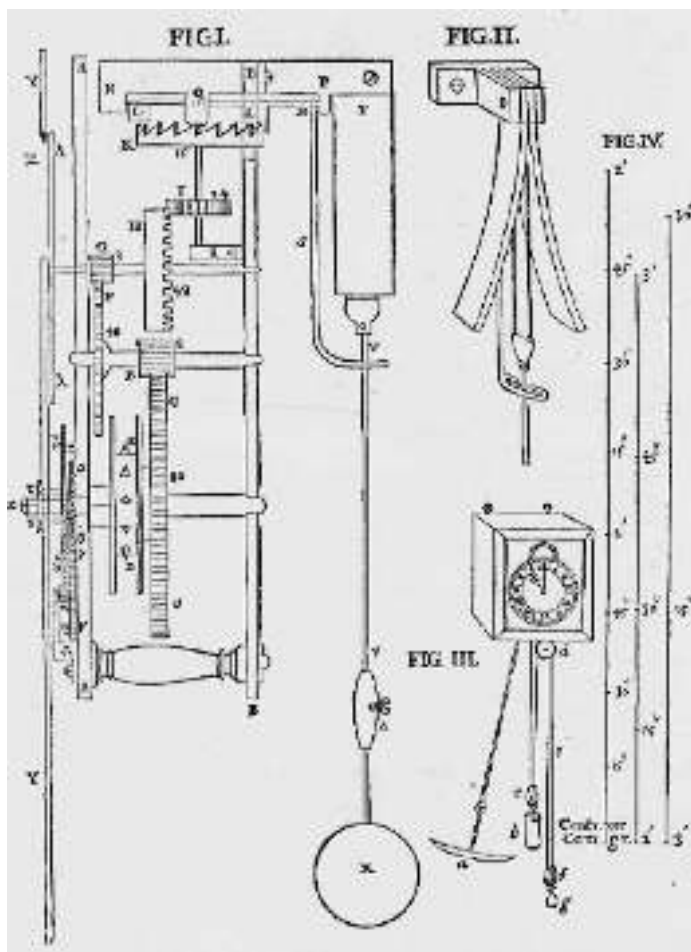


Figure 5 The construction plan from Huygens' *Horologium Oscillatorium*, with the cycloidal plates indicated by 'FIG. II'

Huygens did not stop at these theoretical considerations, but proceeded to construct an actual pendulum clock with cycloidal plates. The construction plan from Huygens' *Horologium Oscillatorium*, with the cycloidal plates indicated by 'FIG. II', is shown in figure 5. A replica of this clock can be seen in the Huygensmuseum Hofwijck.

Geometric optics

Either of the following fundamental principles can be used to explain the propagation of light:

Fermat's Principle (1658). Any ray of light follows the path of shortest time.

Huygens' Principle (1690). Every point of a wave front is the source of an elementary wave. The wave front at a later time is given as the envelope of these elementary waves [10].

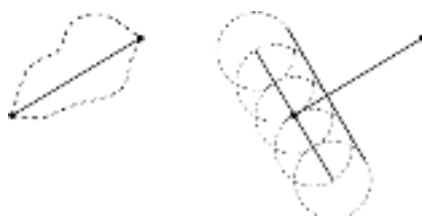


Figure 6 Fermat's principle versus Huygens' principle

The simplest possible example is the propagation of light in a homogeneous and isotropic medium. Here we expect the rays of light to be straight lines. Figure 6 illustrates that this is indeed what the two principles predict. We merely need to observe that, in a homogeneous and isotropic medium, the curves of shortest time are the same as geometrically shortest curves, i.e. straight lines, and elementary waves are circular waves around their centre.

Whereas Fermat's principle can only be justified as an instance of nature's parsimony, cf. [8], Huygens' principle can be explained mechanistically from a particle theory of light, see figure 7.

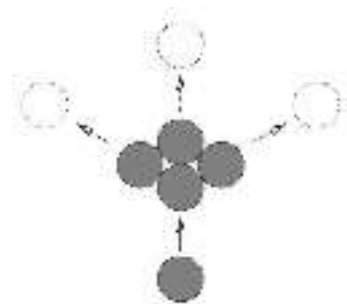


Figure 7 Explanation of Huygens' principle from the particle theory of light

To illustrate the power of these principles, here are two further examples. The first is the law of reflection, which states that the angle of incidence equals the angle of reflection. Figure 8 shows how this follows from Fermat's principle: The path connecting A and B has the same length as the corresponding one connecting A and the mirror image B' of B , and for the latter the shortest (and hence quickest) path is given by the straight line.



Figure 8 The law of reflection, by the Fermat principle

The explanation of the law of reflection from Huygens' principle is illustrated in figure 9.

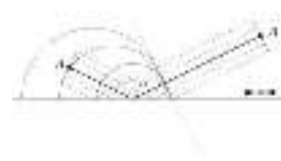


Figure 9 The law of reflection, by the Huygens principle

As a final application of the two principles, we turn to the law of refraction, also known as Snell's law after the Dutch astronomer and mathematician Willebrord van Roijen Snell (1580–1628), whose latinised name Snellius now adorns the Mathematical Institute of the Universiteit Leiden. Snell discovered this law in 1621; in print it appears for instance in Huygens' *Traité de la lumière*, with proofs based on either of the two principles. The law states that as a ray of light crosses the boundary between two (homogeneous and isotropic) optical media, the angle of incidence α_1 (measured relative to a line perpendicular to the separating surface) and the angle of refraction α_2 (see figure 10) are related by

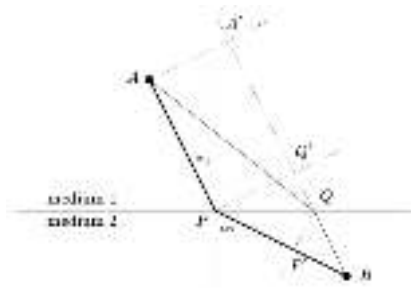


Figure 10 Snell's law, derived from Fermat's principle

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

where v_1 and v_2 denote the speed of light in the respective medium.

Figure 10 shows how to derive Snell's law from Fermat's principle. The path from A to B via P (drawn in bold) is supposed to be the one satisfying Snell's law. We need to show that it takes longer to travel along any other broken path from A to B via some Q different from P . We compute

$$\frac{PP'}{v_2} = \frac{PQ \sin \alpha_2}{v_2} = \frac{PQ \sin \alpha_1}{v_1} = \frac{QQ'}{v_1},$$

that is, $t(PP') = t(QQ')$, where $t(\cdot)$ denotes the amount of time it takes to travel along a certain line segment in the corresponding medium. Therefore

$$\begin{aligned} t(AQ) + t(QB) &> t(A'Q) + t(P'B) = t(A'Q') + t(Q'Q) + t(P'B) \\ &= t(AP) + t(PP') + t(P'B) = t(AP) + t(PB). \end{aligned}$$

Figure 11 indicates how Snell's law is implied by Huygens' principle.

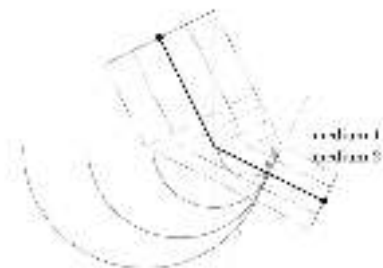


Figure 11 Snell's law, derived from Huygens' principle

Johann Bernoulli's solution of the brachistochrone problem

Jacob Bernoulli, in his response (cited above) to the fraternal challenge, developed a general method for dealing with problems of this kind, nowadays known as the calculus of variations. In the present section we shall be concerned with Johann's own solution, which nicely relates to the concepts of geometric optics discussed above.

When the mass M has reached a point (x, y) on the slide from $A = (0, 0)$ to B , with the y -coordinate oriented downwards, its speed has reached, under the influence of gravitation, the value $v = \sqrt{2gy}$, where $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ denotes the gravitational acceleration near the surface of the Earth. In order to determine which path the point M should follow so as to take the shortest time from A to B , we discretise the problem.

Imagine that the region between A and B is layered into finitely many horizontal slices, in each of which the speed of M stays constant. In particular, M should follow a straight line in each layer. As M passes from the i th to the $(i+1)$ st layer, the angle α_i of incidence and α_{i+1} of 'refraction' should be related to the respective speeds v_i, v_{i+1} by Snell's law

$$\frac{v_{i+1}}{\sin \alpha_{i+1}} = \frac{v_i}{\sin \alpha_i},$$

for the fact that Snell's law is an instance of Fermat's principle guarantees this to yield the quickest path (figure 12).

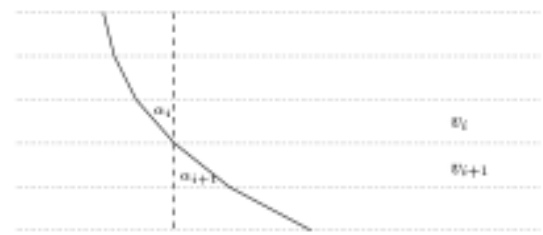


Figure 12 A region layered into finitely many horizontal slices

As we let the number of slices tend to infinity, the equation describing the brachistochrone becomes

$$\frac{v}{\sin \alpha} = c$$

for some constant c , see figure 13. Bravely computing with infinitesimals, we have $\sin \alpha = dx/\sqrt{dx^2 + dy^2}$, whence

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \sqrt{2gy} = c.$$

This can be written as

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}$$

with $a = c^2/4g$. Substitute $y(t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2} = a(1 - \cos t)$. Then

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} \cdot a \sin t = 2a \sin^2 \frac{t}{2} = y,$$

hence (with $x(0) = 0$) $x(t) = a(t - \sin t)$ "ex qua concludo: curvam *Brachystochronam* esse *Cycloidem vulgarem*" ([3], p. 266).

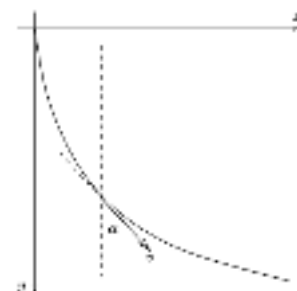


Figure 13 The limit case of figure 12, as the number of slices tends to infinity

This is as good a point as any to recommend the wonderful textbook [7]. It contains an extensive discussion of both the brachistochrone and tautochrone problem in their historical context, and many other historical gems that so sadly are missing from our usual introductory courses on analysis, which tend to suffer from the dictate of efficiency and the haste to ‘cover material’.

Elementary contact geometry

Here at last we come to the second part of this article’s title. My modest aim is to convey a couple of basic notions of contact geometry and to show how they relate to some of the ideas discussed above. In doing so, I am aware of W. Thurston’s warning that “one person’s clear mental image is another person’s intimidation” [15].

One of the fundamental notions of contact geometry is the so-called *space of (oriented) contact elements* of a given manifold. Let us first consider a concrete example (see figure 14).

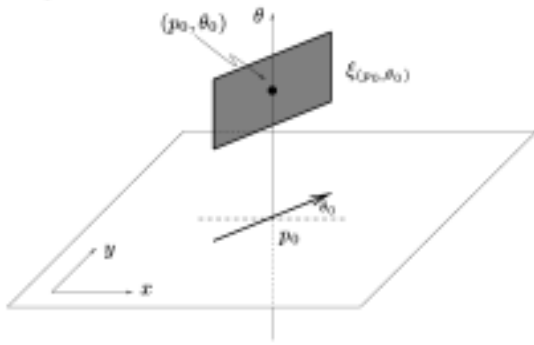


Figure 14 An oriented contact element to the 2-plane $\mathbf{R}^2$

An oriented contact element to the 2-plane $\mathbf{R}^2$ at some point $p_0 \in \mathbf{R}^2$ is simply an oriented line passing through the point p_0 . Such a line is uniquely determined by p_0 and an angle θ_0 . We can think of this angle θ_0 as an element of the unit circle S^1 , so the space of all contact elements of $\mathbf{R}^2$ can be identified with the product $\mathbf{R}^2 \times S^1$.

Let ∂_x, ∂_y denote the unit vectors in the coordinate directions of $\mathbf{R}^2$ at any given point $(x_0, y_0, \theta_0) \in \mathbf{R}^2 \times S^1$. They can be thought of as the velocity vectors of the curves

$$\begin{aligned} x &\mapsto (x_0 + x, y_0, \theta_0), \\ y &\mapsto (x_0, y_0 + y, \theta_0). \end{aligned}$$

Similarly, we can speak of the velocity vector ∂_θ of the curve

$$\theta \mapsto (x_0, y_0, \theta_0 + \theta).$$

In the local picture of figure 14, where θ is measured along a real axis, this is once again simply the unit vector in the direction of the θ -coordinate.

We now specify a 2-plane $\xi_{(p_0, \theta_0)}$ at any point $(p_0, \theta_0) \in \mathbf{R}^2 \times S^1$ as the plane spanned by the vectors

$$\partial_\theta \quad \text{and} \quad \cos \theta_0 \partial_x + \sin \theta_0 \partial_y.$$

Alternatively, this plane is determined by the condition that it contain ∂_θ and that it project to the contact element at p_0 defined by θ_0 . The collection of all these 2-planes is called the *natural contact structure* on the space of contact elements of $\mathbf{R}^2$.

This probably sounds esoteric or banal, depending on your education. It is unavoidable that at this point I shall have to assume a certain level of mathematical literacy. But I make no apology for continuing, whenever possible, also to address those who are beginning to feel just a little intimidated. The space of contact elements of $\mathbf{R}^2$ in fact has a very natural interpretation as a space of physical configurations. If you want to describe the position of a wheel of your bicycle, say, you should describe its position p and its direction, given by θ . Moreover, instantaneously the wheel can only roll in the direction in which it points at any given moment, so the motion of the wheel, interpreted as a curve in the 3-dimensional space of contact elements, will be tangent to the natural contact structure.

The next concept we want to introduce is that of a *contact transformation*. Such transformations play an important role in the geometric theory of differential equations. Most physicists first encounter them in their special incarnation as so-called Legendre transformations. For our purposes, we can define a contact transformation as a diffeomorphism ϕ of the space of contact elements $\mathbf{R}^2 \times S^1$ with the property that if a curve w passes through a point (p, θ) and is tangent to the 2-plane $\xi_{(p, \theta)}$ at that point, then the image curve $\phi \circ w$ will be tangent to $\xi_{\phi(p, \theta)}$ at $\phi(p, \theta)$.

Here is an example of a whole family of contact transformations: For $t \in \mathbf{R}$, define

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathbf{R}^2 \times S^1 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \times S^1 \\ (x, y, \theta) &\longmapsto (x - t \sin \theta, y + t \cos \theta, \theta). \end{aligned}$$

In order to verify that these are indeed contact transformations, consider a parametrised curve

$$s \mapsto w(s) = (x(s), y(s), \theta(s)) \in \mathbf{R}^2 \times S^1,$$

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, for some small $\varepsilon > 0$ say, with tangent vector

$$w'(0) = (x'(0), y'(0), \theta'(0))$$

assumed to lie in $\xi_{w(0)}$. With $\pi : \mathbf{R}^2 \times S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ denoting the natural projection, this is equivalent to saying that the tangent vector $(x'(0), y'(0))$ of the projected curve $\pi \circ w$ at the point $(x(0), y(0))$ lies in the line determined by $\theta(0)$, i.e. is a multiple of $(\cos \theta(0), \sin \theta(0))$.

The transformed curve is

$$\phi_t \circ w(s) = (x(s) - t \sin \theta(s), y(s) + t \cos \theta(s), \theta(s)).$$

Notice that the θ -coordinate remains unchanged under ϕ_t . We compute

$$\frac{d}{ds} (\phi_t \circ w)(s) = (x'(s) - t \theta'(s) \cos \theta(s), y'(s) + t \theta'(s) \sin \theta(s), \theta'(s))$$

and observe that the $\mathbf{R}^2$ -component of this vector at $s = 0$ does again lie in the line determined by $\theta(0)$.

This family ϕ_t of transformations is called the *geodesic flow* of $\mathbf{R}^2$. Here is why: In a general Riemannian manifold, geodesics are locally shortest curves. In $\mathbf{R}^2$ (with its euclidean metric), therefore, geodesics are simply the straight lines. Given a point $p \in \mathbf{R}^2$ and a direction $\theta \in S^1$ defining a contact element, let $\ell_{p, \theta}$ be the unique oriented line in $\mathbf{R}^2$ passing through the point p and positively orthogonal to the

contact element θ . This line is parametrised by

$$t \mapsto p + t(-\sin \theta, \cos \theta), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Lo and behold, this is the same as $t \mapsto \pi \circ \phi_t(p, \theta)$. The θ -component of $\phi_t(p, \theta)$ encodes the direction orthogonal to this geodesic; in our case this component stays constant.

Great, I hear you say, but what does all that have to do with Huygens? Well, it turns out that we are but one simple step away from proving, with the help of contact geometry, the equivalence of the principles of Fermat and Huygens.

Let $\bar{f}$ be a wave front in $\mathbf{R}^2$, thought of as a parametrised curve $s \mapsto (x(s), y(s))$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. For simplicity, we assume this to be regular, i.e.

$$\bar{f}'(s) = (x'(s), y'(s)) \neq (0, 0)$$

for all $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Such a wave front lifts to a unique curve

$$s \mapsto f(s) = (x(s), y(s), \theta(s))$$

in the space of contact elements subject to the requirement that $(x'(s), y'(s))$ be a positive multiple of $(\cos \theta(s), \sin \theta(s))$; this lift will be tangent to the natural contact structure. *Fermat's principle* says that light propagates along the geodesic rays (i.e. straight lines) orthogonal to the wave front $\bar{f}$, which translates into saying that the wave front at some later time t is given by $\pi \circ \phi_t \circ f$.

Next consider the curve

$$h: \theta \mapsto (x(0), y(0), \theta).$$

This is simply the circle worth of all contact elements at the point $\pi \circ h \equiv (x(0), y(0))$. Under the geodesic flow and projected to $\mathbf{R}^2$, this becomes an elementary wave in the sense of Huygens: for each fixed $t \in \mathbf{R}$ the curve

$$\theta \mapsto \pi \circ \phi_t \circ h(\theta) = (x(0), y(0)) + t(-\sin \theta, \cos \theta)$$

is a circle of radius t centred at $(x(0), y(0))$.

The curves h and f are both tangent to $\xi_{f(0)}$ at the point $f(0) = h(\theta(0))$. Since ϕ_t is a contact transformation, the transformed curves $\phi_t \circ h$ and $\phi_t \circ f$ will be tangent to $\xi_{\phi_t \circ f(0)}$ at $\phi_t \circ f(0)$. Then, by the definition of the natural contact structure, the transformed wave front $\pi \circ \phi_t \circ f$ and the elementary wave $\pi \circ \phi_t \circ h$ will be tangent to each other at the point $\pi \circ \phi_t \circ f(0)$ — this is *Huygens' principle*.

The general argument is entirely analogous: A contact element on a Riemannian manifold is a (cooriented) tangent hyperplane field. The space of all these contact elements once again carries a natural contact structure. A geodesic is uniquely determined by an initial point and a direction positively orthogonal to a contact element at that point. Like in the special case of $\mathbf{R}^2$ one can show that the geodesic flow preserves the natural contact structure on the space of contact elements, and this translates into the equivalence of the two principles of geometric optics. A quick proof of this general case is given in [6]; full details of that proof are meant to appear in a forthcoming book on contact topology.

The family portrait

It remains to identify the young Christiaan Huygens in Hanneman's family portrait. In the biography [1] (from an aptly named publishing company!), a whole chapter is devoted to this question, so we seem to be in muddy waters.

Since Christiaan was the second-eldest son, there is actually only a choice between the two boys at the top. My first guess was that Christiaan is the one on the left, who has arguably the most striking face. This intuitive feeling is confirmed by the catalogue of the Mauritshuis ([12], p. 67) and by the afterword in [10]. Alas, it is wrong.

It appears that the confusion was started by an engraving of the printing carried out for a late 19th century edition of the collected works of Christiaan Huygens. Here Christiaan's name is placed at the upper left, contradicting an earlier engraving; the original painting does not associate names with the four boys. However, family iconography of the time demanded that the eldest son be placed to his father's right, i.e., on the left side of the portrait. This identification of the eldest brother Constantijn as the boy on the upper left, and thus Christiaan as the one on the right, seems to be confirmed by a comparison of the painting with other portraits from the same period. 

References

- 1 C. D. Andriess, *Titan kan niet slapen: Een biografie van Christiaan Huygens*, Uitgeverij Contact, Amsterdam, 1994.
- 2 W. J. H. Andrewes, ed., *The Quest for Longitude*, Proceedings of the Longitude Symposium (Harvard University, 1993), Collection of Historical Scientific Instruments, Harvard University, Cambridge, MA, 1996.
- 3 *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli: Variationsrechnung*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- 4 J. Fauvel et al., eds., *Oxford Figures: 800 Years of the Mathematical Sciences*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- 5 H. Geiges, Facets of the cultural history of mathematics, oratie, Universiteit Leiden, 1999; published in *European Review* **8** (2000), 487–497.
- 6 H. Geiges, A brief history of contact geometry and topology, *Expo. Math.* **19** (2001), 25–53.
- 7 E. Hairer et G. Wanner, *L'analyse au fil de l'histoire*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- 8 S. Hildebrandt and A. J. Tromba, *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- 9 C. Huygens, *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Paris, 1673; English translation: *The pendulum clock or geometrical demonstrations concerning the motion of pendula as applied to clocks*, Iowa State University Press, 1986.
- 10 C. Huygens, *Traité de la lumière*, Paris, 1690; original and Dutch translation: *Verhandeling over het licht*, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1990.
- 11 IBM Poster *Bedeutende Mathematiker*.
- 12 Mauritshuis, *Illustrated General Catalogue*, Meulenhoff, Amsterdam, 1993.
- 13 H. Melville, *Moby Dick*, 1851.
- 14 D. Sobel and W. J. H. Andrewes, *The Illustrated Longitude*, Fourth Estate Limited, London, 1998.
- 15 W. P. Thurston, On proof and progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **30** (1994), 161–177.
- 16 J. G. Yoder, *Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.



Simon van Mourik

Faculteit Elektrotechniek Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
s.vanmourik@ewi.utwente.nl

Arthur Veldman

Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen
Rijksuniversiteit Groningen
Postbus 800
9700 AV Groningen
veldman@math.rug.nl

Onderzoek

Rollende vloeistof

In 1998 was de NASA ruimtesonde NEAR (Near Earth Asteroid Rendezvous) op weg naar asteroïde 433 Eros toen sensoren aan boord snelheden aangaven die de veiligheidslimiet overschreden. In korte tijd werden de stuwmotoren duizenden keren ingeschakeld en verbruikten ze 29 van de 215 kg brandstof aan boord. De manoeuvre werd afgebroken, NEAR ging over in de veiligheidsstand en de communicatie met aarde werd gestopt. Op dat moment wist niemand wat er aan de hand was, maar later bleek dat naar alle waarschijnlijkheid de brandstof aan boord was gaan klotsen en ervoor had gezorgd dat de satelliet was gaan tollen. Gelukkig kon de communicatie weer worden hersteld. De missie werd voortgezet, maar liep al met al dertien maanden vertraging op [1].

Zodra brandstof in een satelliet gaat klotsen, bestaat het gevaar dat hij uit koers raakt ten gevolge van de traagheidskrachten van de vloeistof. Bijsturen is doorgaans lastig omdat het vanwege de complexe bewegingen die een vloeistof maakt moeilijk is in te schatten hoe er bijgestuurd moet worden. Een verkeerde inschatting van timing, kracht en richting kan juist een averechts effect hebben. Zo is het bijvoorbeeld mogelijk door slechts zachtjes met je hand te bewegen een vol bad

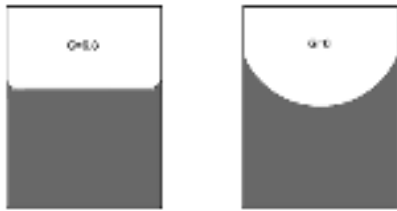
half leeg te laten klotsen. Gooi, om een indruk te krijgen van de onvoorspelbaarheid van vloeistof, een halfvol flesje water in de lucht met een flinke spin. Het flesje laten draaien en opvangen gaat een stuk moeilijker dan wanneer het helemaal leeg of helemaal vol is. Op aarde hebben we dan nog de zwaartekracht die als een corrigerende factor werkt door het flesje en het badwater voortdurend een kant op te trekken, maar in de ruimte is de situatie dramatischer.

Om wat meer inzicht te krijgen in het complexe gedrag van vloeistoffen is er gezocht naar methoden om dit gedrag nauwkeurig

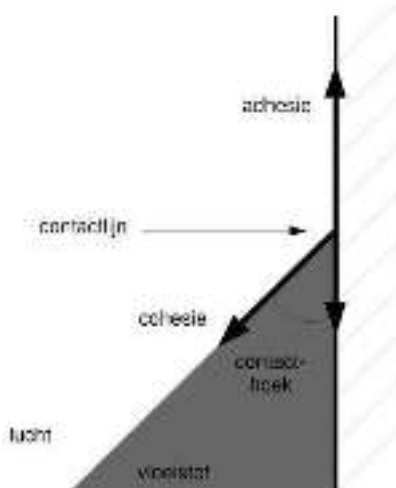
te onderzoeken. Allereerst hebben er diverse experimenten plaatsgevonden, bijvoorbeeld aan boord van het Europese ruimtelaboratorium Spacelab [2]. Verder is in 1992 door het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium NLR het Wet Satellite Model (WSM) experiment uitgevoerd, waarbij een ringcylindrische tank met vloeistof, gelanceerd met een sondeerraket, ongeveer zeven minuten vrij door de ruimte tuimelde [3].

Daarnaast wordt geprobeerd om het vloeistofgedrag theoretisch te bestuderen. Zo werkt de Rijksuniversiteit Groningen sinds 1995 aan numerieke vloeistofsimulatie voor ruimtevaarttoepassingen. Dit heeft geleid tot een rekenmethode (ComFlo) die het klotsen van vloeistof in de ruimte kan simuleren in vrije interactie met de beweging van de satelliet [4–5]. Eerste numerieke resultaten, die vergeleken zijn met de data die tijdens de WSM-vlucht zijn verzameld, blijken in grote lijnen overeen te komen. De simulaties zijn gebaseerd op de aloude Navier-Stokes vergelijkingen voor een incompressibele vloeistof,

Figuur 1 Lancering van de Ariane 5, ECA vlucht 164, Kourou, Frans Guyana, 12 februari 2005. De raket had twee satellieten aan boord, waaronder de *Sloshsat*.



Figuur 2 Met zwaartekracht (links) is de krachtenbalans aan de wand een lokaal verschijnsel. Zonder zwaartekracht (rechts) gaat het vloeistofoppervlak in een bolvorm staan.



Figuur 3 De contacthoek is het gevolg van de krachtenbalans tussen cohesie van de vloeistof en adhesie tussen vloeistof, lucht en wand.

samen met een klassiek mechanisch model voor de satellietdynamica. Er is echter één maar aan verbonden: de Navier-Stokes vergelijkingen hebben een randvoorwaarde nodig die in de buurt van het vrije vloeistofoppervlak het krachten spel met de vaste wand beschrijft, met andere woorden: er is een contactlijnmodel nodig. De algemene aannames hiervoor zijn in bepaalde gevallen te grof, zoals wanneer capillaire effecten belangrijk zijn. In [4] wordt de onzekerheid aangegeven rondom de modellering hiervan: de dynamische contacthoek.

De contacthoek

Vlakbij de wand werken er twee krachten op het vloeistofoppervlak: de cohesiekrachten tussen de vloeistofmoleculen onderling en de adhesie tussen vloeistof en wand (figuur 3). Als gevolg van deze krachtenbalans staat de vloeistof aan de wand onder een hoek die de contacthoek wordt genoemd. Omdat het hier om relatief kleine krachten gaat (de cohesie is evenredig met de oppervlaktespanning) heeft de contactlijndynamica meestal weinig invloed op de overige dynamica. Immers, de zwaartekracht is veel belangrijker dan de oppervlaktespanning en de krachten-

balans aan de wand blijft daarom lokaal. Pas als er geen andere grote krachten aanwezig zijn, wordt het effect van de contacthoek zichtbaar; de oppervlaktespanning is dan dominant en het oppervlak gaat in een (perfecte) bolvorm staan (figuur 2).

Bij situaties waarin de andere krachten klein zijn kan de dynamica van de contactlijn dus veel invloed hebben op het vloeistofgedrag. Dit is het geval onder gewichtsloze omstandigheden, zoals bij het NEAR incident, en bijvoorbeeld bij 'docken', het aankoppelen van het ene aan het andere ruimtevaartuig, hetgeen millimeterprecisie vergt. De versnellingen zijn in deze situaties vaak klein en daarmee ook de kracht op de vloeistof. Wanneer het aan te koppelen vaartuig veel vloeistof aan boord heeft (brandstof, vers drinkwater, etcetera) dan kan het klotsen de dockingmanoeuvres verstoren, hetgeen ongewenst is en gevaar voor de bemanning oplevert.

Behalve bij geklots in de ruimte is onderzoek naar de contacthoek verder nog relevant voor een scala aan aardse toepassingen, zoals bij de vorming van gasbellen in vloeistof aan een wand, bij het coaten met een dunne laag verf of in inkjetprinters.

Modellering

Tenslotte het dynamische aspect. De krachtenbalans is hierboven gerepresenteerd in termen van de contacthoek. Als de balans in evenwicht is, wordt deze contacthoek statisch met evenwichtshoek θ_0 . Zodra de vloeistof gaat bewegen en de balans verstoord wordt, zal de contactlijn (zie figuur 3) zich naar de evenwichtspositie bewegen, zodat de dyna-

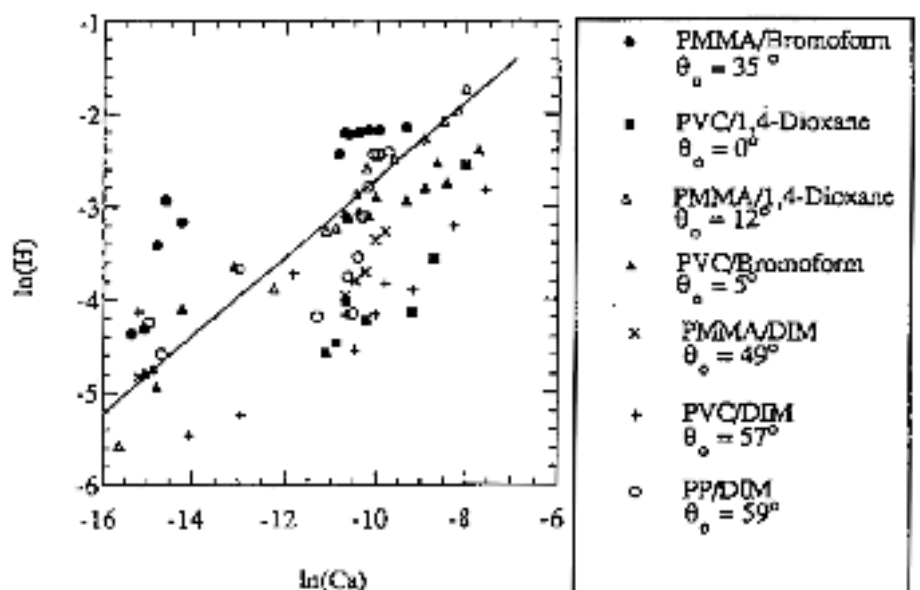
mische contacthoek naar zijn statische waarde toe gaat. Nu is de grote vraag wat het verband is tussen de contactlijnsnelheid v_{cl} en de dynamische contacthoek $\theta(t)$. Een voor de hand liggend model is $v_{cl} = \alpha(\theta(t) - \theta_0)$ met α een evenredigheidsconstante. Als $\theta(t) = \theta_0$ stopt de contactlijn met bewegen, en hoe verder de balans uit evenwicht is, hoe hoger de contactlijnsnelheid zal zijn. De eenvoudigste variant van dit model is om te veronderstellen dat $\theta(t) = \theta_0$; dit komt overeen met $\alpha \rightarrow \infty$ hierboven. Dit model heet het statische model en belooft fysisch gezien niet veel goeds, want een klein verschil tussen $\theta(t)$ en θ_0 impliceert een oneindig hoge contactlijnsnelheid.

Het capillair-getal $Ca = \mu v_{cl}/\gamma$, met μ de viscositeit en γ de oppervlaktespanning, geeft de verhouding aan tussen viskeuze krachten en oppervlaktespanning, en blijkt een kenmerkende factor te zijn voor de contactlijnsnelheid. Figuur 5 toont het experimenteel gevonden verband tussen de contactlijnsnelheid en de afwijking met de statische contacthoek voor verschillende vloeistoffen. Wat opvalt is dat er een grote spreiding bestaat van de data als het type vloeistof wordt gevarieerd. Een poging om deze data met één kromme te fitten, zoals het model van Seeberg [6]

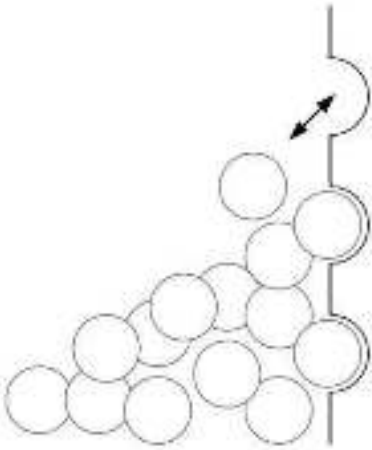
$$\frac{\cos \theta_0 - \cos \theta(t)}{\cos \theta_0 + 1} = 4.47 Ca^{0.42}, \quad (1)$$

voor $Ca \leq 10^{-3}$, dat in figuur 4 is aangegeven, is daarom maar beperkt waardevol.

Op zoek naar een meer gefundeerd mo-



Figuur 4 Experimentele data van de relatie tussen contactlijnsnelheid en de afwijking van de statische contacthoek voor verschillende vloeistoffen (H is het linkertlid van (1)). De getrokken lijn geeft het model van Seeberg weer.



Figuur 5 Moleculen bewegen tussen wand en vloeistof.

del moeten we onderzoek doen naar de fysica. Een puur macroscopisch model werkt niet of nauwelijks en dat komt door de modellering van de Navier-Stokes vergelijkingen. Deze hebben als uitgangspunt dat vloeistofelementjes oneindig klein zijn, wat macroscopisch gezien een heel redelijke aanname is, maar microscopisch gezien niet. Uit de aanname dat een vloeistof een continuüm is, volgt dat tegen de wand de vloeistof niet mag bewegen (no-slip conditie) omdat anders de wrijving daar oneindig groot wordt. De contactlijn mag dus niet bewegen! Er zijn relatief veel artikelen waarin met een no-slip conditie of een aangepaste slip-conditie wordt geprobeerd om de dynamica van de contactlijn te modelleren zonder dat er dingen 'exploderen', maar dit blijft op zijn minst een moeilijke (of uitdagende) bezigheid; zie bijvoorbeeld [7–8].

In werkelijkheid bewegen de vloeistofmoleculen van de wand af en ernaar toe. Deze moleculaire dynamica bepaalt hoe snel en in welke richting de contactlijn beweegt. Voor een vloeistof in evenwicht geldt $\kappa^+ = \kappa^- = \kappa^0$, met κ^+ de deeltjesflux in positieve richting (naar de wand toe) en κ^- die in negatieve richting. Verder geldt de Arrhenius relatie

$$\kappa^0 = \frac{kT}{h} \exp \frac{-G_w^*}{NkT} \quad (2)$$

met N het getal van Avogadro, k de constante van Boltzmann, h de constante van Planck, G_w^* de activatie-energie voor het aanhechten van een molecuul en T de temperatuur.

Een model gebaseerd op deze theorie is ontwikkeld door Blake [9]. Hij neemt aan dat het aantal adsorptieplaatsen in de wand een belangrijke rol speelt bij een bewegende contactlijn (figuur 5). Voor een vloeistof die niet in evenwicht is, geldt dat $\kappa^+ \neq \kappa^-$; de betref-

fende waarden worden gegeven door

$$\kappa^\pm = \kappa^0 \exp \pm \frac{w}{2nkT}. \quad (3)$$

Hier is w de verrichte arbeid bij hechting aan de wand en n het aantal adsorptieplaatsen in de wand. De netto deeltjesflux is $\kappa^+ - \kappa^-$. Verder maakt Blake de aanname dat de moleculen aan de wand van de ene adsorptieplaats naar de andere springen en zo de bewegende contactlijn vormen. Een moleculair model voor v_{cl} wordt daarmee

$$\begin{aligned} v_{cl} &= (\kappa^+ - \kappa^-) \lambda \\ &= 2\kappa^0 \lambda \sinh(w/2nkT) \end{aligned} \quad (4)$$

met λ de gemiddelde afstand tussen de adsorptieplaatsen. Blake stelt verder dat de verrichte arbeid wordt gegeven door $w = \gamma(\cos \theta_0 - \cos \theta(t))$. Alles ingevuld levert dit

$$v_{cl} = 2\kappa^0 \lambda \sinh \frac{\gamma(\cos \theta_0 - \cos \theta(t))}{2nkT}. \quad (5)$$

Testresultaten in [9] geven aan dat dit model nauwkeuriger is dan empirische modellen zoals (1), figuur 6. Er bestaan echter meer theorieën vanuit verschillende invalshoeken. Zo heeft Shikhmurzaev [10] een nieuwe theorie ontwikkeld die de microdynamica dichtbij de contactlijn relateert aan de macrodynamische hydrodynamica. Zijn theorie voorspelt een rollende beweging die de contactlijn maakt langs de wand. Deze is inderdaad experimenteel waargenomen (en niet in strijd met de no-slip conditie uit de Navier-Stokes vergelij-



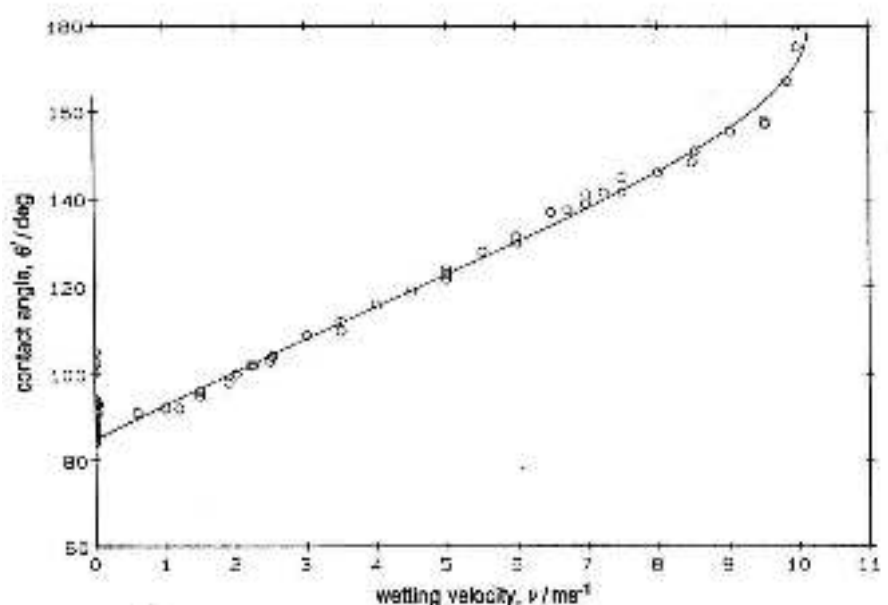
Figuur 7 De ruimtesonde NEAR

kingen). Hoofdstuk 9 in [10] bevat een uitgebreide discussie van diverse soorten contactlijnmodellen.

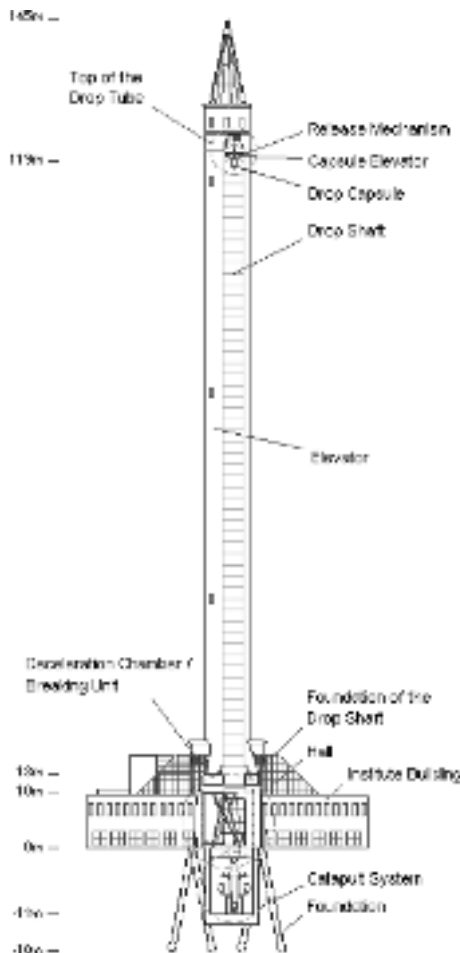
Numerieke implementatie

Als we een dynamisch contacthoekmodel willen samenvoegen met het Navier-Stokes model, hebben we het probleem dat het ene een snelheid aan de wand voorschrijft, en het andere het juist verbiedt, ook na numerieke discretisatie. Toch kan dit probleem omzeild worden door de modellen 'gescheiden' te houden. De Navier-Stokes vergelijkingen worden per rooster cel en per tijdstap door een VOF (Volume of Fluid) methode opgelost.

- Gegeven een snelheidsveld wordt er berekend voor welk deel elke cel gevuld wordt met vloeistof;
- De positie van het vloeistofoppervlak wordt berekend en de kromming ervan bepaald;
- Het drukveld wordt bijgesteld naar aanleiding van de oppervlaktekromming;
- Het snelheidsveld wordt gecorrigeerd naar



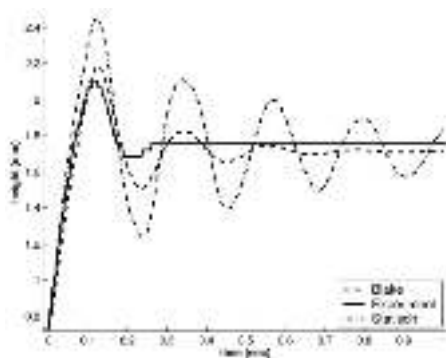
Figuur 6 Experimentele data voor water voor verschillende contacthoeken (verticaal) en contactlijnsnelheden (horizontaal). De doorgetrokken lijn representeert Blake's model (9).



Figuur 8 Schets van de valtoeren in Bremen en een capsule met de registratieapparatuur. De val duurt 4,7 seconden.

aanleiding van de nieuwe drukverschillen, waarna deze stappen geïtereerd worden.

De dynamische contacthoekmodellen berekenen, gegeven een contacthoek, de contactlijnsnelheid en per tijdstap wordt bij de wand de contactlijnhoogte bijgesteld (dit gebeurt in de tweede stap). Dus niet de snelheid aan de wand wordt gecorrigeerd door de contacthoek, maar de positie van het vloeistofoppervlak bij de wand. Dit simuleert, omdat aan de wand de no-slip voorwaarde nog steeds



Figuur 9 Beweging van de contacthoek langs de wand van het buisje. Een vergelijking tussen experiment en twee simulatiemodellen: statische contacthoek en het contactlijnmodel van Blake.



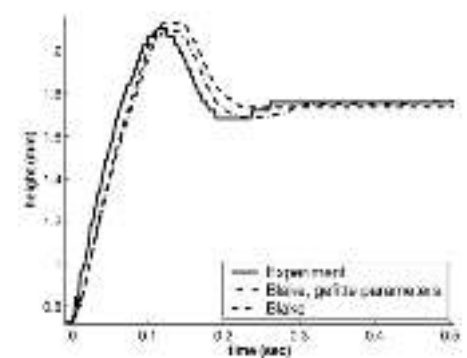
Figuur 10 Contactlijnsnelheid v_{CL} versus contacthoek $\theta(t)$. Zodra $\theta(t)$ tussen de waarden $[\theta_R, \theta_A]$ komt, stopt de contactlijn met bewegen. θ_R en θ_A heten de 'receding' respectievelijk de 'advancing' contacthoek.

zijn, zoals traagheidskrachten ten gevolge van de stroming en zwaartekracht. Het ZARM instituut aan de universiteit van Bremen heeft een valtoeren waarmee gewichtsloosheid kan worden gesimuleerd [13]. Het experiment is simpel: een met vloeistof gevuld buisje wordt boven in de toren losgelaten in een capsule met apparatuur die onder andere de contactlijnhoogte registreert. Tijdens de val werkt er effectief geen zwaartekracht op de vloeistof en daarom zal de contactlijn stijgen totdat het oppervlak in een bolvorm staat: de vorm van het oppervlak verandert van die op het linkerplaatje in figuur 2 naar die op het rechterplaatje.

Het valexperiment is met diverse vloeistoffen uitgevoerd. Wij behandelen hier als voorbeeld de vloeistof Baysilone M3 (een siliconenolie). Voor deze stof zijn alle parameters uit het model (9) van Blake in de literatuur te vinden (hetgeen lang niet van alle vloeistoffen kan worden gezegd). Figuur 9 toont de contactlijnhoogte (verticaal) als functie van tijd (horizontaal). Het statische model reageert veel te heftig op verschillen tussen de dynamische en de statische contacthoek en als gevolg daarvan beweegt de contactlijn veel te wild. Blake's model geeft daarentegen een veel rustiger verloop, maar de contactlijn blijft nog te lang oscilleren in de tijd. Ook de evenwichtshoogte is te laag vergeleken met het experiment.

In praktijk is het zo dat de contactlijn niet alleen stilstaat als $\theta(t) = \theta_0$, maar ook als de contacthoek in de buurt komt van zijn statische waarde. Dit blijven plakken van de contactlijn aan de wand wordt toegeschreven aan de ruwheid van het wandoppervlak; het veroorzaakt hysteresis in het gedrag van de contacthoek (figuur 10).

Tijdens dit onderzoek is voor dit verschijnsel geen toepasbaar theoretisch model gevonden en dit lijkt dus nog een open onderzoeksgebied. Voor M3 is in [13] de statische



Figuur 11 Blake's model met de contacthoekparameters uit [13]. De contacthoekparameters zijn aangepast binnen de foutenmarge voor een betere fit met Blake's model.

contacthoek bepaald op $\theta_0 = 53.6^\circ \pm 1.6^\circ$ en het gebied waarin de contactlijn 'vastplakt', het hysteresegebied, op $[\theta_R, \theta_A] = [46.7^\circ \pm 2.1^\circ, 56.4^\circ \pm 1.0^\circ]$ waarin de meetnauwkeurigheid is aangegeven. Figuur 11 toont het resultaat voor Blake's model als hystereses wordt gemodelleerd. De slinging van de contactlijn komt nu veel eerder tot stilstand dan in het model zonder hysteresis (figuur 9).

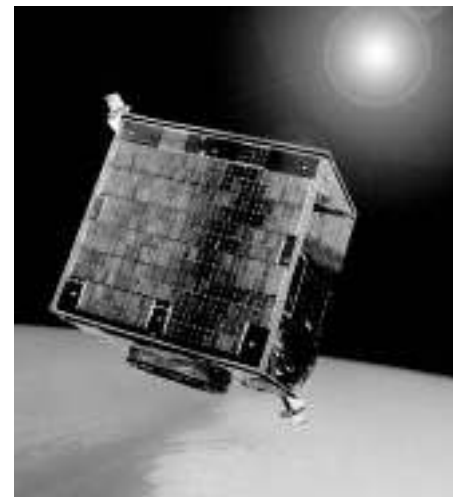
Fitten we de contacthoekparameters dan wordt de overeenkomst tussen het experiment en de uitkomsten van Blake's model nog beter. Het kleine verschil tussen de nominale en gefitte contacthoekparameters en het verschil tussen de twee plots in figuur 11 toont de gevoeligheid voor experimentele meetfouten.

Verder onderzoek

Het is duidelijk geworden dat de modellering van de contactlijndynamica grote invloed kan hebben op vloeistofgedrag en het ziet er dus naar uit dat een fysisch gedetailleerde be-

schrijving van de contactlijn substantieel zou kunnen bijdragen aan vloeistofsimulatie voor de ruimtevaart.

Op dit moment wordt er volop onderzocht welke invloed de contacthoekmodellering heeft onder gewichtloosheid. Op 12 februari 2005 is Sloshsat FLEVO (Facility for Liquid Experimentation and Verification in Orbit) gelanceerd (Figuur 12): in wezen een gedeeltelijk met water gevulde tank, ontworpen om de invloed van vloeistoffen aan boord van ruimtevaartuigen te bestuderen. Deze minisatelliet, die door het NLR is ontworpen en gebouwd (met steun van de Europese ruimtevaartorganisatie ESA), voerde gedurende een week allerlei manoeuvres uit. Behalve de RUG en het NLR, zullen ook ESA en het NASA Glenn Research Center de experimentele gegevens gebruiken om vloeistofdynamische rekenprogramma's te valideren [14–15]. Na verwerking van deze gegevens zal het waarschijnlijk dui-



illustratie: Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium

Figuur 12 De mini-satelliet Sloshsat

delijker worden welke invloed de contactlijndynamica heeft op de stroming en hoe de modellering ervan numerieke simulaties kan verbeteren.

Referenties

- 1 NEAR home page <http://near.jhuapl.edu>. Het rapport van de NEAR Anomaly Review Board is beschikbaar via <http://near.jhuapl.edu/anom/index.html>.
- 2 Een overzicht van Nederlandse ruimte-experimenten tot 1997 staat op <http://www.nlr-duc.nl/mgcd-db.html>.
- 3 J.P.B. Vreeburg, The Wet Satellite Model experiment. In: O. Minster en B. Kaldeich (eds), *Final reports of sounding rocket experiments in fluid science and materials science*, ESA SP-1132, Vol. 4, 1994.
- 4 J. Gerrits. *Dynamics of Liquid-Filled Spacecraft*. Proefschrift, Rijksuniversiteit Groningen, 2001.
- 5 J. Gerrits and A.E.P. Veldman. *Dynamics of Liquid-Filled spacecraft*. J. Eng. Math. 45, p. 21–38, 2003.
- 6 J.E. Seeberg and J.C. Berg. *Dynamic wetting in the flow of capillary number regime*. Chem. Eng. Sc., 47, p. 4455–4464, 1992.
- 7 L.M. Pismen en B.Y. Rubinstein. *Kinetic slip condition, van der Waals forces, and dynamic contact angle*. Langmuir 17, p. 5265–5270, 2001.
- 8 D. Grubert en J.M. Yeomans. Mesoscale modeling of contact line dynamics. *Computer physics communications*, 121–122, p. 236–239, 1999.
- 9 T.D. Blake. Dynamic Contact Angles and Wetting Kinetics. In: *Wettability*, J.C. Berg (Ed.), Marcel Dekker, New York, p. 251–309, 1993.
- 10 Y.D. Shikhmurzaev. Moving contact lines in liquid/liquid/solid systems. *J. Fluid Mech.*, vol. 334, p. 211–249, 1997.
- 11 S. van Mourik. *Numerical modelling of the dynamic contact angle*. Master's thesis, 2002.
- 12 R.C.W.P. Verstappen and A.E.P. Veldman. *Symmetry-preserving discretisation of turbulent flow*. J. Comput. Physics, vol. 187, p. 343–368, 2003.
- 13 M. Michaelis and M.E. Dryer. *Test-case number 31: reorientation of a free liquid interface in a partly filled right circular cylinder upon gravity step reduction*. Accepted for publication in Multiphase Science and Technology, 2005.
- 14 NLR Sloshsat flyer <http://www.nlr.nl/public/publications/pdf/f183-02.pdf>.
- 15 ESA website <http://www.esa.int/esaCP/SEM02PXEM4E.Netherlands.o.html>.

Jan Bouwe van den Berg

Corresponding author
Afdeling wiskunde
Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
janbouwe@few.vu.nl

Gregory Kozyreff

Hai-Xiang Lin

John McDarby

Mark A. Peletier

Robert Planqué

Phillip L. Wilson

Studiegroep wiskunde met de industrie

Japanese Oysters in Dutch Waters

Since the introduction of the Japanese oyster in the Eastern Scheldt it has spread into the Wadden Sea. This growth has a negative impact on the life of various other species in the sea. Seen from a mathematical viewpoint, the biological problem of how to restore the disturbed natural equilibrium has a great complexity. Which solutions can the Study Group Mathematics with Industry supply to tackle this problem?

In 1964 the Japanese Oyster (*Crassostrea gigas*) was introduced into the Eastern Scheldt. It was believed that this species could not breed in the colder Dutch climate; each generation would have to be set out by hand. Therefore this introduction was expected to have limited impact on the local ecosystem. Moreover, at that time the plan was to close off the Eastern Scheldt, or a part of it, so that even if spawning occurred, the problem would remain local.

Unfortunately the brief hot spells of some Dutch summers allowed the Japanese Oysters to spawn. With a maximal life span of thirty years the population proved able to spawn in the rare hot years and simply survived in other years. As a result, the Japanese Oyster is now a dominant species in the Eastern Scheldt. The indigenous flat oyster (*Ostrea edulis*) has almost completely disappeared, mainly due to disease and the very cold winter of 1963. The cockles are declining in number, and mussels have been confronted by the appearance of a strong competitor for food. In addition, the Japanese Oyster has spread beyond the Eastern Scheldt and settled in parts of the Western Scheldt and the Wadden Sea. At present, the main negative impact is that the Japanese Oysters compete with cockles for space and food. In turn, the decline in cockles causes problems for the birds that feed on them.



A bank of Japanese oysters

At the Study Group two Dutch institutes, the Nederlands Instituut voor Visserijonderzoek (The Netherlands Institute for Fisheries Research¹) and Rijksinstituut voor Kust en Zee (RIKZ, The Netherlands Institute for Coastal and Marine Management), presented the issue of the spreading of the Japanese Oysters. The following questions were formulated:

- How do oysters spread?
- Can development in the past be reconstructed?
- Can a prediction be made for the future?
- Can the spreading of the oysters be stopped? How?

Overview

In this article we address these questions from a number of different viewpoints. Let us give an overview of the different models and their outcomes.

- In *Diffusion of larvae* we present a first study of the spreading of oysters. We assume a favourable (i.e. hard) substrate and model the spread of oysters from year to year. We indicate how to extend this model to perform simulations to reconstruct the spreading of oysters from 1964 onwards.
- In *The effect of substrate hardness on the spreading of an oyster bank* we simplify the model of *Diffusion of larvae* by passing to continuous time, and compare spreading velocities between soft and hard substrates. We find a significant difference in spreading velocity.
- In *Influencing the population by reduction of salinity* we study a proposed remedy of re-opening the dams that currently prevent river water from entering the Eastern Scheldt. The reduction in salinity that results from the influx of fresh water may reduce the growth rate of the oysters. Extending a recent simulation at RIKZ, we consider a scenario of partial, seasonal re-opening of the dams, and find that the effect on salinity is similar to that of a permanent reopening scenario, but with some advantages. The main conclusion, however, is that the proposed regulation of salinity is not sufficient to significantly control the growth of oysters in the Eastern Scheldt.
- In *Outline of a large-scale simulation*, finally, we present an outline of a large-scale simulation that takes into account the detailed geometry and geology (such as substrate hardness) of the Eastern Scheldt. This simulation might be implemented as an extension of a code that is currently in use at Rijkswaterstaat.

1 Diffusion of larvae

At the end of July of a hot year, the rising of the sea temperature over a certain threshold triggers a massive production of oyster larvae. During their 15–30 day life span, the flow transports these larvae passively in random directions until they settle. This transport is probably the main mechanism by which *Crassostrea gigas* invaded the whole Eastern Scheldt. In this section, we will analyse this mechanism, in conjunction with a simple model of the interaction between the oyster and larvae populations. We will restrict our attention to the eastern part of the Eastern Scheldt, where the *Crassostrea gigas* was introduced in 1964. Indeed, this region is characterised by relatively shallow water and weak currents, which hampers the geographic progression of oysters. Because of this, it took years before the oyster population reached the central part of the Eastern Scheldt. Afterwards, larvae became subjected to much stronger currents and were therefore prone to colonise the rest of the Eastern Scheldt in a relatively short period. At least, this is one of the possible scenarios. Slow adaptation of the Japanese Oysters to the local environment may also have contributed to the time delay before the central part was reached. Probably a combination of factors, partly due to the construction of the Delta works, has caused the explosion of Japanese Oysters in the Eastern Scheldt.

The simplest description of the geographical spreading of oysters should comprise two independent variables: one for the larvae population and one for the oysters. Hence we introduce:



Figure 1 Map of the Eastern Scheldt

- $O_n(x)$: the density of oysters, expressed in m^{-2} , in year n . O_n depends on the position x , which is one-dimensional, for simplicity;
 - $L_n(x, t)$: the density, also expressed in m^{-2} , of larvae in the summer of year n . L_n depends on position x and time t .
- During their short life, we model the transport of larvae by a reaction-diffusion equation of the form:

$$\frac{\partial L_n}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2} + Q(L_n, O_n). \quad (1)$$

In this equation, the first two terms describe the diffusive transport averaged over an entire tidal cycle. The last term Q accounts both for the production and the disappearance of larvae, either by death or by settlement on the ground. A crucial parameter is the diffusion coefficient D_T and we will estimate it below. As for the oysters, their density varies from year to year according to:

$$O_{n+1} = O_n + G(L_n, O_n), \quad (2)$$

where G is the number of newly born oysters minus the deceased ones per unit area. For the moment, we do not specify the functionals Q and G . Several choices of Q and G will be presented in this report and many variations are possible. The choice between these requires a delicate balancing of the questions that are to be addressed, on one hand, with the available data on the other. More complex models, often used for the purpose of tracking growth in cultivated oysters, sort the individuals by size and introduce as many oyster variables as there are size-classes [3]. In this work, motivated by the relative lack of data², we discard such aspects of the dynamics and, with the exception of the final section, focus on models of minimal complexity.

In the following sections we first model the spreading of oyster larvae to determine D_T (*Diffusion-convection over a single tidal cycle*). Then we discuss the factors that influence the growth, survival and reproduction of oysters and larvae, and we present the outcome of the model (*Completion of the model and outcome*). Finally, in *Continuous time dependence for oysters*, a continuous time limit is derived, which serves as a connection to the continuous time

model discussed in *The effect of substrate hardness on the spreading of an oyster bank*.

Diffusion-convection over a single tidal cycle

On the time scale of a tidal cycle the larvae are subject to a tidal flow. Let us set $Q = 0$ for the present discussion. With u the water velocity generated by the tides, the transport equation for the larvae becomes

$$\frac{\partial L}{\partial t} + u \frac{\partial L}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

where D is the coefficient of diffusion in the absence of tide and where L is assumed to also depend on the vertical coordinate z .

As was first recognised by Taylor [15], a nonuniform vertical distribution of u accelerates the dispersion of particles. This can be understood by noting that at a depth z where u is maximal, particles (e.g. larvae) are likely to travel over much longer distances than those at depths where u is small.

If $u = u(z)$, we can show that Equation (3) can be approximated in the long time limit by the following, simpler equation:

$$\frac{\partial L}{\partial t} + U_0 \frac{\partial L}{\partial x} = (D + D_T) \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}, \quad (4)$$

where U_0 is the average velocity of the flow over the z -direction. While Equation (4) applies to the rising tide, the falling tide is described by

$$\frac{\partial L}{\partial t} - U_0 \frac{\partial L}{\partial x} = (D + D_T) \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Hence, averaging over many tides, we obtain

$$\frac{\partial L}{\partial t} = (D + D_T) \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Since we are primarily interested in the diffusion of larvae in the horizontal directions, and owing to its relative simplicity, Equation (6) represents progress from Equation (3).

With the sea level and sea bed respectively denoted by h and z_0 , the new diffusion coefficient is given by [11]

$$D_T = \frac{U_0}{D(h - z_0)} \int_{z_0}^h \left[\int_{z_0}^z \left(1 - \frac{u(z')}{U_0} \right) dz' \right]^2 dz. \quad (7)$$

Our first task will therefore be to assess the velocity profile u resulting from the tidal flow. Actually, u depends on x as well as z . Hence, $D_T = D_T(x)$ and Equation (4) has to be slightly modified, as shown in the appendix.

Tidal flow

For a shallow part of the sea the determination of u is relatively simple. Let the elevation of the sea bed be denoted by $z_0(x)$. As a result of the tides, the sea level is a function of time and is given by $z = h(t)$. From the "shallowness" hypothesis, and assuming low velocities, the Navier-Stokes equations for the flow reduce to:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (8)$$

In this equation, p is the pressure and μ is the viscosity of water. This equation must be supplemented by two boundary conditions. One is that the velocity vanishes on the sea bed, $u(z_0) = 0$. The other is that the sea surface is free of any applied stress, which translates into $\frac{\partial u}{\partial z}(h) = 0$. This allows us to write the solution of (8) as:

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (z - z_0)(z - 2h + z_0), \\ &= C(z - z_0)(z - 2h + z_0). \end{aligned} \quad (9)$$

In this expression the constant C is determined by the conservation of mass. Considering a slice dx of fluid, the rise or fall of its level, $\frac{dh}{dt}$, is only due to incoming and outgoing flux of water on either sides of the slice. This leads to the equation

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^h u(x, z) dz = 0. \quad (10)$$

Substituting (9) into (10), we find:

$$u(x, z) = \frac{3}{2} U_0 \frac{(z - z_0)(2h - z - z_0)}{(h - z_0)^2}, \quad (11)$$

where U_0 is the average velocity, given by

$$U_0 = \frac{dh/dt}{dz_0/dx}.$$

Estimation of D_T

The value of D is estimated to be $10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ for stratified flow and $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ for well mixed flows [17]. These values are obtained by measuring the diffusion in the vertical direction, which is not affected by the tidal flow. During the rising tide, the sea level rises by 3 meters in 6 hours, and we assume the slope of the sea bed to be 1%. Hence, U_0 is estimated to be

$$U_0 \approx \frac{3 \text{ m} / (6 \cdot 3600 \text{ s})}{0.01} \approx 0.02 \text{ ms}^{-1}.$$

Then, substituting Expression (11) into (7), we obtain:

$$D_T = \frac{2U_0(h - z_0)^2}{105D}. \quad (12)$$

Hence, with a sea depth of 3-4 m, a vertical diffusion D of $10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ and our estimate of U_0 , we get

$$D_T \approx 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1},$$

which is considerably larger than D .

As we already noted, D_T is a function of x . It is therefore tempting to simply rewrite the diffusion term in the right hand side of (6) as $\frac{\partial}{\partial x} D_T(x) \frac{\partial L}{\partial x}$. However, we must bear in mind that the ef-

fective parameter $D_T(x)$ encompasses more than just Fick's law of transport. The actual reduced diffusion equation turns out to be

$$\frac{\partial L}{\partial t} = D_T \left[\left(1 + \frac{D}{D_T} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{12 (dz_0/dx)}{(h - z_0)} \frac{\partial L}{\partial x} \right], \quad (13)$$

(see the appendix). For simplicity, in what follows, we will neglect spatial variations of D_T .

Completion of the model and outcome

In order to be able to forecast the expansion of the oysters, we need to choose sensible and simple forms for Q and G .

Female and male oysters are able to detect the presence of eggs and sperm in the water [12]. In order to maximise fecundation, they all release their gametes at the same time. Accordingly, the production of larvae is modelled by the initial condition

$$L_n(x, 0) = FO_n, \quad (14)$$

where F is the fecundity of an oyster and is the combination of several factors, such as the size of the oyster, the salinity of water and the likelihood of an egg to be fertilised. An expression derived from observation is [9]

$$F = F_l F_s F_f$$

with

- $F_l = 0.4 l^{2.8}$: size factor, where l is the size of the oyster in cm.
- $F_s = \frac{s-8}{5.5}$: salinity factor, where s is the salinity of water, expressed in grams of chloride per litre,
- $F_f = 0.005 O_n^{0.72}$: fertilisation efficiency.

Moreover, since the larvae only have an approximate 15–30 day life span, we include a death rate in the larvae equation:

$$\frac{\partial L_n}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 L_n}{\partial x^2} - \frac{L_n}{t^*}, \quad t^* = 30 \text{ days}. \quad (15)$$

Of the larvae that are transported according to this equation, only a tiny fraction λ will actually be able to settle. The magnitude of this fraction depends on a number of factors, among which the hardness of the substrate and the presence of other oysters. In this section we will assume that the substrate is hard, providing a good environment for settling larvae. In *The effect of substrate hardness on the spreading of an oyster bank* we study the effect of substrate hardness in detail.

The presence of other oysters on the substrate will result in competition for nutrients and predation of larvae from the mature oysters. This overcrowding factor is supposed to only be effective when the oyster density passes a certain threshold O_{sat} . Finally, approximately one tenth of the oyster population dies each year [3]. These considerations lead to the following equation for the oyster population

$$O_{n+1}(x) = O_n(x) + \frac{\lambda L_n(x, t^*)}{1 + O_n(x)/O_{sat}} - \frac{O_n(x)}{10} \quad (16)$$

From the observation of actual oyster banks, O_{sat} ranges between 30 m^{-2} and 100 m^{-2} .

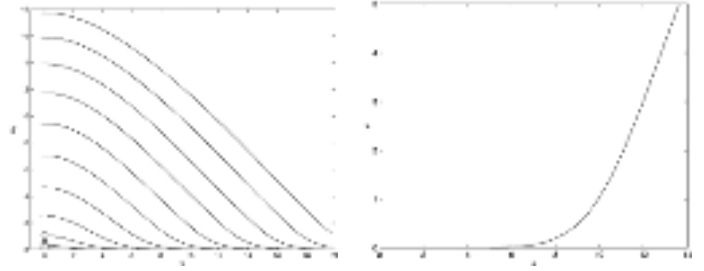


Figure 2 Yearly evolution of the oyster distribution v_n with $\Lambda = 10$ (left) and oyster density v_{12} at the border of the Eastern region after 12 years for various values of Λ (right)

Prior to the integration of Equations (14)–(16), it is useful to introduce dimensionless variables as

$$T = \frac{t}{t^*}, \quad X = \frac{x}{(D_T t^*)^{1/2}} \approx \frac{x}{400 \text{ m}},$$

$$u_n = \frac{\lambda L_n}{O_{sat}}, \quad v_n = \frac{O_n}{O_{sat}}.$$

The system of equations to solve for each year thus becomes

$$\frac{\partial u_n}{\partial T} = \frac{\partial^2 u_n}{\partial X^2} - u_n, \quad (17)$$

$$u_n(X, 0) = \Lambda v_n(X), \quad (18)$$

$$v_n = 0.9 v_{n-1} + \frac{u_{n-1}(X, 1)}{1 + v_{n-1}}. \quad (19)$$

In these equations, the only free parameter that remains is

$$\Lambda = \lambda F.$$

It represents the number of newly born oysters per oyster per year in the absence of overcrowding effect. Each year n , the diffusion equation (17) is integrated with initial condition (18) and the oyster population is updated according to (19).

From 1964 onwards, oysters were introduced and cultivated on 100 m wide squares approximately 8 km away from the central region. In the new space scale, $100 \text{ m} \rightarrow 0.25$ and $8 \text{ km} \rightarrow 20$. We now assume that there has been a small amount of spawning every year since the introduction in 1964. The first settling of oyster larvae, called spat at this stage, on dike foets and jetties was recorded in 1976. Hence, we need to integrate the system above for 12 years, $n = 1, \dots, 12$, and check whether a significant number of oyster and larvae could reach the central region. Initially, the oyster distribution is given by

$$v_0(X) = \begin{cases} 1, & 0 < X < 0.25, \\ 0, & 0.25 < X. \end{cases}$$

It is a simple task to integrate the system (17)–(18) numerically with the initial condition above. The result is shown in Figure 2 and suggests that the development in the past can indeed be reconstructed with this simple model provided that $\Lambda \geq 8$ –10.

Continuous time dependence for oysters

To close this section, let us remark that the system (17)–(18) can be made amenable to further analytical development by turning the difference Equation (19) into a differential one. Indeed, assuming that the variation of oyster population density is small from year to year, we can write

$$v(n+1) \approx v(n) + \frac{\partial v}{\partial n},$$

where n is now considered as a continuous variable that measures time in units of years. we thus have: $n = \frac{t}{\text{year}} = \frac{t}{\text{month}} \frac{\text{month}}{\text{year}} = \epsilon T$, so that, generally, the larvae/oyster model can be cast in the following form:

$$\epsilon \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + Q, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = G. \quad (20)$$

Discussion

In this section we have sketched a way to model the oyster expansion in the Eastern Scheldt. The simplest choice of the generation rates Q and G of larvae and oysters, respectively, already proves quite informative. After rescaling variables, only one free parameter remains: Λ , the number of descendants per oyster per year in the absence of any overcrowding effects. It was found that Λ needs to be in the order of 10 in order to reconstruct a specific aspect of the history of oyster proliferation, the time lapse between the introduction in 1964 and the first large-scale sightings in 1976. Although this value may appear large, we must bear in mind that it does not account for overcrowding effects. Moreover, the more accurate diffusion model (18) would probably require smaller values of Λ , owing to the dependence of D_T on the sea depth.

Although the proliferation of oysters was only observed in 1976, the present analysis suggests that it had actually been taking place right from the beginning of their implantation in 1964. Because it was under water and at some distance from the shores, it is possible that the process went unnoticed before 1976.

Let us finally note the large values attained by the oyster density in Figure 2. The result from the relatively long life span of oysters. However, overcrowding should be taken into account in the death rate of oysters. It is indeed observed that oysters grow on top of each other, so that only the top layer is alive. This point is at least partially addressed in the next sections.

2 The effect of substrate hardness on the spreading of an oyster bank

In this section we study the spreading of an oyster bank where we concentrate on the phenomenon that oysters prefer to settle on a hard substrate rather than a sandy one.

The Fisher-Kolmogorov equation

The classical model [10] for spatial spreading of any biological species is the Fisher-Kolmogorov (FK) equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u), \quad (21)$$

where Δ is the Laplacian (in the spatial coordinates), D the diffu-

sion constant and f is a nonlinear function, typically

$$f(u) = u(1-u) \quad (22)$$

or

$$f(u) = u(u-a)(1-u) \quad \text{with } 0 \leq a \leq 1. \quad (23)$$

The Fisher-Kolmogorov equation has been analysed in excruciating detail. We will only recall a few results here to serve as a guide for a more specialised model presented in *An oyster-larvae model*.

In the present context u can be interpreted as the biomass of the oysters (or their number) per unit area. The crucial difference between the nonlinearities (22) and (23) is that for the former the trivial equilibrium $u = 0$ is unstable while for the latter it is stable at least in the absence of diffusion. The equilibrium $u = 1$ is stable in both cases. We will refer to (22) as the monostable case and to (23) as the bistable case. One interpretation is that the monostable case corresponds to oyster growth on a hard substrate (rocks or concrete), whereas the bistable case corresponds to oyster growth on a soft substrate (a sand bank). Without going into a biological interpretation we now state some mathematical results. In *An oyster-larvae model* we discuss the choice of nonlinearities in more detail.

The dynamics of solutions of (21) are dominated by travelling wave solutions, i.e., solutions of the form $u = U(x - ct)$, where c is the speed of the wave, and x is the direction of propagation. The waves of interest are those connecting the solutions $u = 0$ (no oysters) and $u = 1$ (thriving oyster population).

In the monostable case there exist travelling waves with arbitrarily large speed, hence a priori the oysters could spread at arbitrarily large rates. However, (most) solutions, in particular those starting from compactly supported initial data corresponding to a well-defined bank of oysters, select the velocity $c_{\text{mono}} = 2\sqrt{D}$, which is also the minimal speed among the everywhere positive travelling waves.

In the bistable case there is a unique travelling wave; it has velocity $c_{\text{bi}} = (1 - 2a)\sqrt{\frac{D}{2}}$. Hence for $a < \frac{1}{2}$ the oysters spread, i.e. $u = 1$ ‘invades’ $u = 0$. Clearly $c_{\text{mono}} < c_{\text{bi}}$ for any $a \in [0, 1/2)$. Although this information has limited value since we have ignored implicit scalings in the argument, the idea is that the oysters spread more rapidly on a hard than on a soft substrate. With these differences in mind we now turn to a more detailed model which incorporates both oysters and larvae.

An oyster-larvae model

We consider a model which takes into account two stadia in the life cycle of an oyster, with obviously different dynamic capabilities, namely oysters which are fixed to the seabed and larvae which float around in the sea. We thus disregard (or assume insignificant) the fact that oysters may detach from the seabed and move to more favourable grounds. Of course there are many other features that we do not include in our model either.

From *Diffusion of larvae* we pick up the discussion at the continuous-time system of Equations (20). We briefly return to the dimensional variables O and L for oysters and larvae. Assuming that the larvae diffuse, with diffusion constant D , die at rate E per unit time and that, as in *Diffusion of larvae*, each oyster produces F larvae per unit time, we obtain the equation

$$L_t = DL_{xx} - EL + FO, \quad (24)$$

which is analogous to Equation (1), with a particular choice of Q . Here subscripts denote partial derivatives. For simplicity, and since we are going to look at travelling waves anyway, we take into account only one spatial dimension.³

The more interesting part of the model is the choice of the non-linearity G which describes the transition of larvae to oysters. We assume that the increase in oyster population is proportional to the amount of larvae, with proportionality constant A , and that the growth saturates when the oysters reach some maximal density O_{sat} , due to competition for food and/or space which makes it harder for larvae to settle. Additionally, we include a death rate C . This leads to

$$O_t = AL(1 - O/O_{sat}) - CO. \quad (25)$$

Since the oysters are immobile there is no diffusion term. Alternatively, when the sea bed is sandy, the larvae prefer to settle on existing oysters (dead or alive), which we model by

$$O_t = AL(O/O_{sat} + \delta)(1 - O/O_{sat}) - CO \quad (26)$$

with $0 \leq \delta \ll 1$ a dimensionless measure for the relative preference of larvae to settle on a soft compared to a hard substrate. We note that the choice $\delta = 0$ prevents spreading of oysters to previously unoccupied territory: since Equation (26) contains neither diffusion nor convection, $O(x, 0) = 0$ implies $O(x, t) = 0$ for all $t \geq 0$.

For (25), in combination with (24), the trivial equilibrium $(L, O) = (0, 0)$ is unstable provided $AFE^{-1} < C$, while for (26) it is stable provided $\delta AFE^{-1} < C$ (the inequalities have an obvious interpretation). In the following we will assume that

$$\delta < \frac{CE}{AF} < 1. \quad (27)$$

The situation is thus very similar to the comparison between the monostable and bistable cases for the scalar equation in *The Fisher-Kolmogorov equation*.

In true study group spirit, some educated guesses for the parameters are

$$\begin{array}{lll} A : 10^{-5} \text{ y}^{-1} & O_{sat} : 10^2 \text{ m}^{-2} & C : 10^{-1} \text{ y}^{-1} \\ D : 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} & E : 3 \cdot 10^1 \text{ y}^{-1} & F : 10^7 \text{ y}^{-1} \quad \delta : 10^{-2} \end{array} \quad (28)$$

The death rates C and E follow from the life span of the oysters and of the larvae. The maximal oyster density O_{sat} is estimated from existing oyster banks. The diffusion coefficient D was estimated in *Diffusion of larvae*, (and then called $D + D_T$). The larvae production per oyster per year F and the ratio δ were estimated by experts from the Animal Sciences Group. The larvae-to-oyster transformation rate (under optimal conditions) A is difficult to estimate. The second inequality in (27) implies the bound $A > 3 \cdot 10^{-7} \text{ y}^{-1}$; we chose the value 10^{-5} y^{-1} to accommodate this inequality.

Let us introduce the dimensionless variables

$$\tilde{u} = E(O_{sat}F)^{-1}L, \quad \tilde{v} = O_{sat}^{-1}O, \quad \tilde{x} = \sqrt{E/D}x, \quad \tilde{t} = Et,$$

and the dimensionless parameters

$$\alpha = AFE^{-2} \quad \text{and} \quad \beta = CE(AF)^{-1}.$$

The parameter α is closely related — approximately equal — to the combined parameter $\varepsilon\Lambda$ of the previous section. It is the growth rate of the system without diffusion, without oyster morbidity, without taking crowding into account, and with $\delta = 0$. After dropping the tildes from the notation we obtain

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u + v, \\ v_t = \alpha[u(v^k + k\delta)(1 - v) - \beta v]. \end{cases} \quad (29)$$

Here $k = 0$ or $k = 1$, corresponding respectively to a hard and a soft substrate. We recall that we assume $0 \leq k\delta < \beta < 1$, which is satisfied if the estimated values (28) are approximately correct, in which case $\beta = 3 \cdot 10^{-2} \ll 1$.

As for the FK equation in *The Fisher-Kolmogorov equation* we expect the long term dynamics to be dominated by travelling waves, which is confirmed by numerical simulations, see Figure 3.

Our discussion of (29) now follows the lines of that of the FK equation. For the hard substrate ($k = 0$) we look at the asymptotic case $\beta = 0$. The trivial state is unstable and we can expect there to be a one-parameter family of travelling waves, one of which is selected by sufficiently localised initial data. The expected asymptotic velocity c_h can be calculated explicitly; here we did so by locating the value of c for which two eigenvalues coincide. Under the condition that c should be real, this value is unique. The result is depicted in Figure 4 as a function of the parameter α . In the limits of small and large α the behaviour is

$$c_h \sim \sqrt{\frac{27}{4}}\alpha \quad \text{as } \alpha \rightarrow 0, \quad c_h \sim \sqrt[4]{\frac{27}{4}}\alpha^{1/4} \quad \text{as } \alpha \rightarrow \infty.$$

Numerical calculation show that the speed c_h thus calculated analytically is indeed the selected wave speed.

For the soft substrate ($k = 1$) the limit case $\beta \rightarrow 0$ also implies $\delta \rightarrow 0$ because of the requirement $\delta < \beta$. However, it is not clear that this limit is well-defined. Therefore, for the moment we will use the values $\beta = 3 \cdot 10^{-2}$ and $\delta = 10^{-2}$ which follow from (28). In any case it is impossible to calculate the (unique) wave speed analytically, so we have to rely on numerical computations. The asymptotic speed c_s is depicted in Figure 4, again as a function of the parameter α .

Discussion

For $\alpha = 10^{-1}$, the value corresponding to (28), we have $c_h = 0.2$ and $c_s = 0.01$. These numbers can be interpreted in two ways:

- A speed $c = 0.2$ in dimensionless variables corresponds to $0.2\sqrt{ED} \approx 2 \cdot 10^3$ meter per year (which seems rather fast). This confirms that the estimates of (28) may be rather inaccurate, and that α may well differ significantly from 10^{-1} .
- On the other hand, the two numbers c_h and c_s suggest that

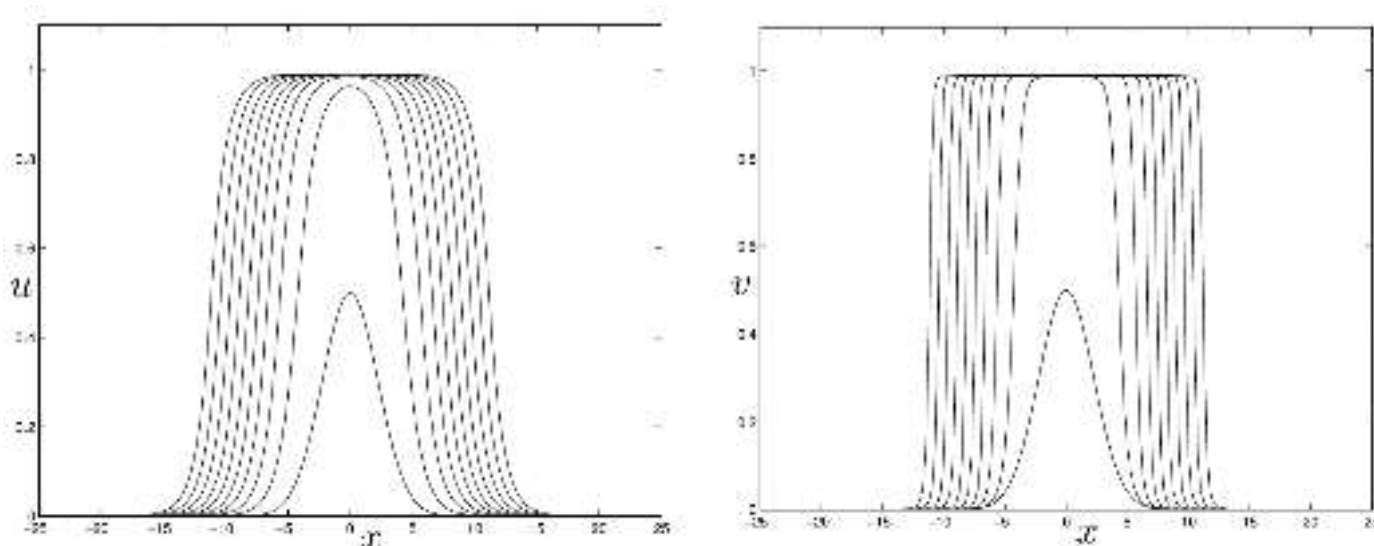


Figure 3 A solution of (29) with $k = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 10^{-2}$, $\delta = 10^{-3}$ showing the development towards travelling waves

an oyster bank spreads about twenty times faster on hard substrate than on soft substrate. Despite the inaccuracy in the coefficients α , E , and D , the linear behaviour of c_h and c_s for small α (see Figs. 4 and 5) implies that the ratio

$$c_h : c_s \approx 20 : 1$$

remains valid as long as the parameters are such that the dimensionless parameter $\alpha = AFE^{-2}$ is not too large (roughly $\alpha < 1$).

While this biological conclusion is relatively easily drawn, many mathematical niceties and issues are so far unresolved, partly due to time limitations. In particular, the asymptotic regime $\beta \rightarrow 0$ for the soft substrate model has not been analysed in depth. Furthermore, the limit of large α would be interesting to study from a mathematical point of view.

3 Influencing the population by reduction of salinity

The possibility of lowering the salinity of all or part of the Eastern Scheldt by once again allowing freshwater from local rivers to drain into the basin has been proposed as a method to hinder oyster population growth. It should be noted that for *raising* salinity levels, by for example turning compartments into lagoons by building more dams, to have an impact on larval production or mortality, or on oyster mortality, the salinity level would have to be taken above the tolerance of many other indigenous organisms that inhabit the bottom of the estuary, collectively called benthics.

Specifically, we have already seen in *Completion of the model and outcome* that oyster fecundity is a function of salinity, both because oysters produce fewer larvae in less salty water and because oyster larvae have higher mortality (proportion of population succumbing to disease) in less salty water [8]. However, other species in the Eastern Scheldt are also sensitive to salinity levels, so for example a stratagem involving closing the storm surge barrier and flooding the Eastern Scheldt with freshwater would doubtlessly remove the vast majority of oysters, but would also engender an ecological disaster. Furthermore, since the freshwater dams were constructed between 1964 and 1987, agriculture upstream of the

dams has become dependent on the current river conditions. This is in addition to the still pertinent reason for building the dams: flood prevention. With these facts in mind, a permanent reopening of the dams would not be without its side effects. In this section we will therefore consider *seasonal salinity reduction*, or SSR, in which freshwater would be allowed into the Eastern Scheldt only in a period coinciding with the spawning season and the life span of the larvae. In addition, and for reasons to be explained below, SSR will only be considered in the Eastern Compartment (Kom) of the Eastern Scheldt, see Figure 1. This implies that the dams in other compartments would remain intact, and the consequences for agriculture and flood prevention would be minimised.

The Eastern Compartment

The two locations for direct freshwater input are The Northern and Eastern Compartments. The Kom was chosen for analysis for several reasons. An important one is the canal which now runs along the Eastern bank of the compartment. It splits into two canals: the Schelde-Rijn-kanaal for shipping and the Bathse Spuikanaal. Both are fed by the Zoommeer, a lake bordering on the Eastern Scheldt, from which, due to the capacity of the lake, it is assumed large volumes of water can be pumped. Agriculture is believed to be more dependent on the rivers which feed the

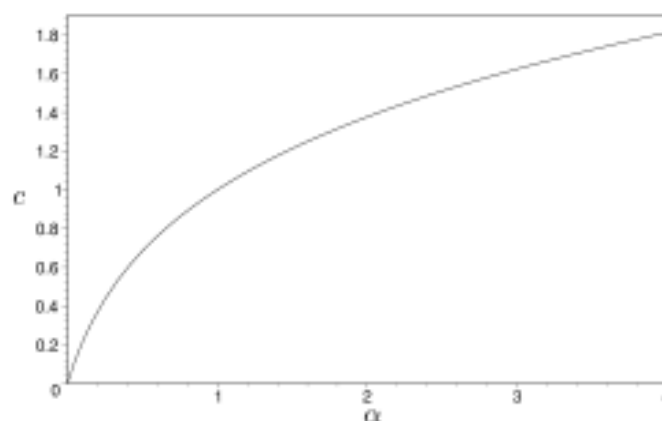


Figure 4 The wave speed c_h on a hard substrate as a function of α (with $\beta = 0$)

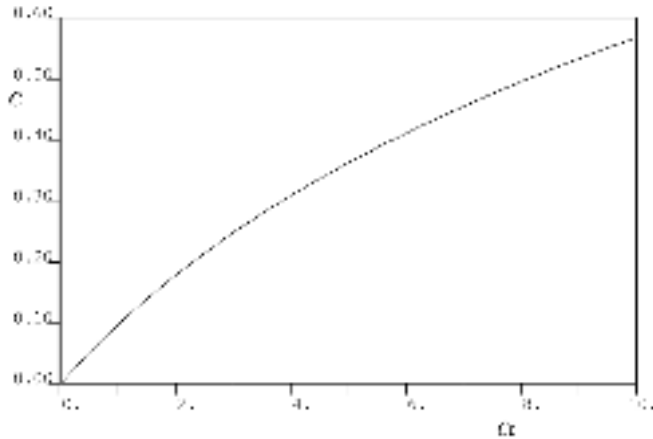


Figure 5 The wave speed c_s on a soft substrate as a function of α (with $\beta = 3 \cdot 10^{-2}$ and $\delta = 10^{-2}$)

Northern Compartment. Furthermore, the Kom is the shallowest compartment and has the most regular topography and is thus amenable to a simplified analysis.

Prior to construction of the Kom dam, RIKZ measured [5] the influx of freshwater into the Kom at between 50 and 70 cumecs (cubic metres per second). As a seasonal measure, freshwater flowing through sluice gates in the dam would not approach these flow rates, and so the following analysis assumes that the dam remains intact and freshwater is pumped from the canal at a rate of 100 cumecs. The assumption is that the large body of water in the Zoommeer can provide the extra capacity, and this source can be replenished in the majority of the year when the pumps are not in operation.

Effects of lower salinity

The primary trigger for spawning is water temperature [[8],p. 312], [4]: *C. gigas* are known to spawn when the temperature exceeds 20°C over a period of several weeks, although they are capable of spawning at 16°C. With large concentrations of gametes in the water, spawning tends to be highly coordinated with large colonies spawning almost in synchrony, to maximise chances of reproduction. Larvae develop in the water phase for between 15 and 30 days, during which time they are spread by water currents and diffusion.

The approximately 100 day period covering the spawning and larval phases is seen as the optimal time to reduce salinity as larvae are more susceptible to reduced salinity levels than oysters. Oysters can survive water as brackish as 10ppt (parts per thousand of chloride), while larvae will not develop in salinity levels below 11ppt. This is far below the tolerance of other benthics in the area so, even if it were possible, lowering the salinity to kill the oysters and/or larvae is therefore not an option. However, mortality, oyster respiration rates, and oyster filtration rates are affected by even a small change in conditions, through the following formulae quoted in [8]:

$$\text{mortality} \propto \frac{S - 8}{5.5},$$

$$\text{respiration rate} \propto 1 + \left(\frac{R_r - 1}{5} \right) (20 - S),$$

where

$$R_r = \begin{cases} 0.0915T + 1.324 & T \geq 20^\circ\text{C}, \\ 0.007T + 2.099 & T < 20^\circ\text{C}, \end{cases} \quad (30)$$

and the

$$\text{filtration rate} \propto \frac{S - 10}{10} \quad \text{for } 10 < S < 20,$$

where S denotes salinity and T temperature. Note that oysters are filter feeders, actively pumping water through their feeding organs and filtering out phytoplankton, bacteria and protozoa for consumption. Filtration rate can be measured in millilitres per minute.

Pumping strategies

We introduce a time system modulo 4 (i.e. 4 corresponds to one day), with 0 at low tide, 1 at the midpoint between low and high tide, and so on, with each time phase defining a *Pumping Period* (PP). We assume that the tidal convection is the primary mixing mechanism for fresh and salt water in the Kom, and that mixing is highly efficient: in any PP, volumes of fresh and salt water are assumed to mix fully. Though this assumption may not hold in all circumstances, in a relatively shallow basin such as the Kom, with a tidal difference of approximately 3 metres, temperature and salinity stratification, for example, are perhaps unlikely.

As discussed above, we normalise on a pumping rate of 100 cumecs by supposing that the capacity of the canal and lake permit this rate of continual supply. Thus a normalised freshwater input would be 1 unit per PP, and we can generate 2^4 pumping strategies within the constraint of a total of 4 units pumped during the four PPs. We shall be using the concepts, symbols and values listed in Table 1, where volume is in units of 10^6m^3 , and salinity is in ppt. The data were provided by RIKZ.

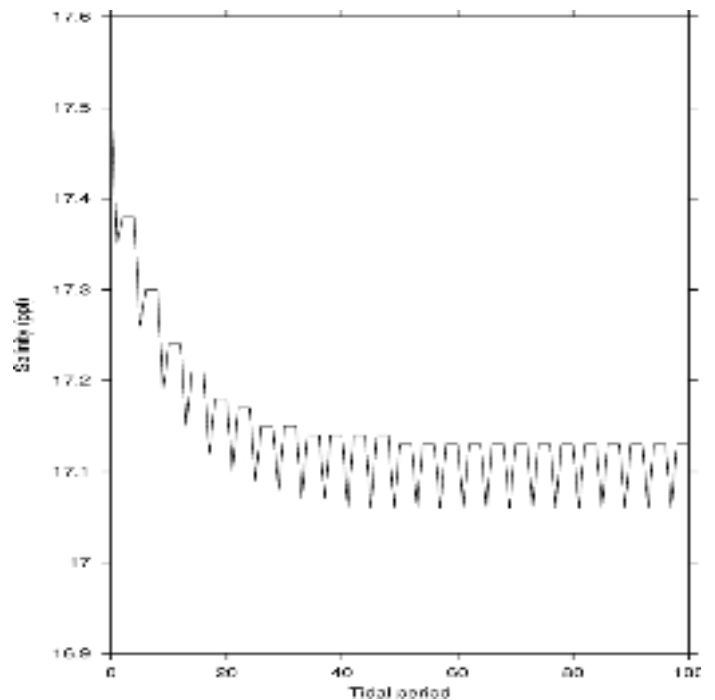


Figure 6 Strategy 0400

Concept	Symbol	Value
Time step	t	—
Volume at $t = n$	V_n	—
Global salinity at $t = n$	ρ_n	—
Weighting at $t = n$	W_n	Depends on strategy (mod 4)
Volume of freshwater influx in one PP	V_f	1.08
Freshwater salinity	ρ_f	0.5
Sea water salinity	ρ_s	17.5
Water volume in Kom at high tide	V	600
Water volume in Kom at low tide	v	400

Table 1 Table of concepts and data

The formula we use to calculate the mass of salt in the Kom at time $n + 1$ is the following:

$$V_{n+1}\rho_{n+1} = V_n\rho_n + W_{n+1}V_f\rho_f + (V_{n+1} - V_n - W_{n+1}V_f)M_{n+1},$$

where

$$M_{n+1} = \begin{cases} \rho_s & \text{if } V_{n+1} - V_n - W_{n+1}V_f > 0. \\ \rho_n & \text{if } V_{n+1} - V_n - W_{n+1}V_f < 0. \end{cases} \quad (31)$$

The origin of this formula is clear when it is considered term by term:

$V_{n+1}\rho_{n+1}$ — mass of salt at $t = n + 1$;

$V_n\rho_n$ — mass of salt at $t = n$;

$W_{n+1}V_f\rho_f$ — mass of salt from freshwater input;

$V_{n+1} - V_n - W_{n+1}V_f$ — saltwater volume change due to tidal flux.

The two cases in (31) correspond to a rising and falling tide, respectively.

Results and Discussion

Figures 6 & 7 show SSR for two different pumping strategies. The periodic behaviour apparent here after approximately 40 time steps is a common feature of the 16 strategies considered, and suggests that pumping need only begin five days before spawning is predicted to start. In these two examples, the baseline (that is, mean over tidal periods) salinities after five days are close to each other in value. Figure 8 shows a comparison in baseline salinities for all 16 strategies, and it is clear that there is not much to choose between them in terms of baseline salinities. It is very likely that each strategy has a different engineering cost depending on the rate of pumping required, and also that some strategies may place too great a strain on water supply, and that these may become the dominant factors in deciding strategy. All strategies recover to the original baseline salinity of 18 ppt within five days of the freshwater supply being cut off.

It should be noted that RIKZ has conducted numerical simulations to study the effects on salinity of a *permanent* reopening of the compartment dams in both the Northern Compartment and the Eastern Compartment ([5]). The long-time maximum baseline

salinity they predicted for the Kom is within the range covered by our SSR strategies.

We conclude by noting that SSR in the Kom has the advantages of maintaining the flood protection afforded by the compartment dams, of providing a short-term, controllable method to reduce salinity in time for the spawning and larval development periods, and of allowing farmed oyster production — with beds created by “planting” imported young oysters — to continue in the Kom. There may even be additional benefits associated with importing water from Lake Zoommeer. These could include a decrease in water temperature in the Kom, and an increase in suspended sediment — both of which have negative impacts on spawning and survival rates, see for example [8]. However, the scheme has the disadvantage of only lowering salinity by 2–3% in the Kom which, through the formulae (30), could lead to an increase in larval mortality of approximately 4%. There is also an associated decrease in oyster filtration rate of around 5%, and an increase in oyster respiration of around 10% for a summer water temperature of 22°C.

Consuming less food and utilising more stored energy supplies will presumably impact on the number of gametes each oyster is capable of producing, and a quantitative link would be useful. Less food removed from the water column also implies more is available for other species.

The above analysis rests on many simplifications of the system, and any final recommendation on the viability of SSR would have to rest on a more complete numerical model similar to that used by RIKZ in their long-time simulations. However, we believe that the data obtained gives reasonable estimates for the likely effects of SSR in the Kom, and it seems clear that the salinity cannot be reduced sufficiently to make this approach feasible.

4 Outline of a large-scale simulation

For a more detailed answer to the questions of the introduction

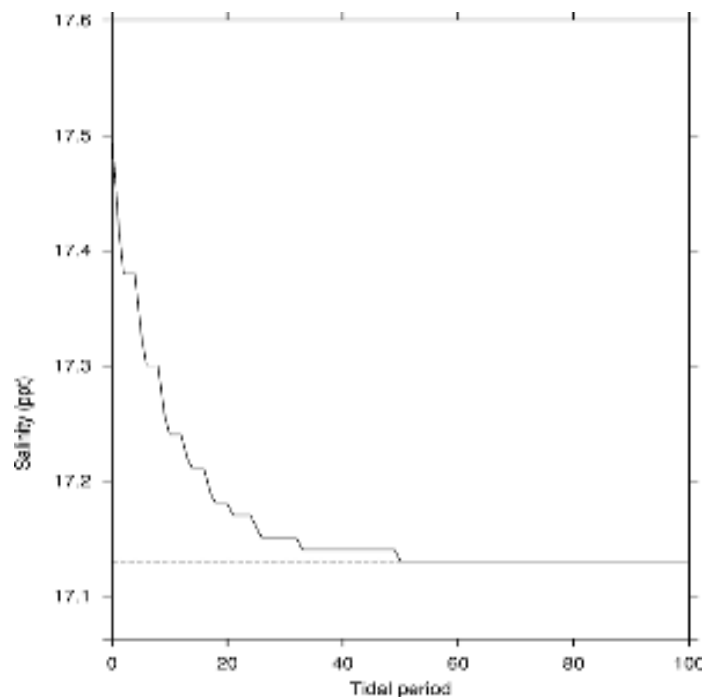


Figure 7 Strategy 0220

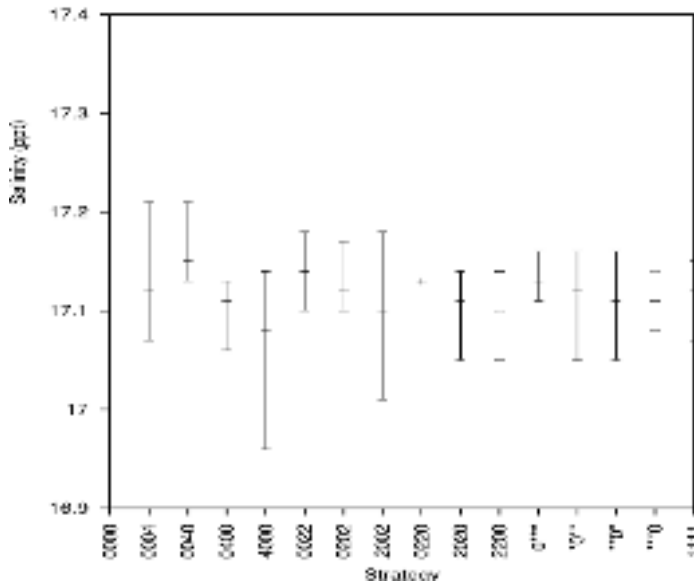


Figure 8 Mean salinities after five days of pumping are shown, along with bars representing the minimum and maximum salinities over tidal periods. For clarity, stars represent $\frac{4}{3}$.

we propose the use of large-scale computer simulation to reconstruct and to predict the development of the oysters.

How are the oyster clusters formed?

In the following we give a sketch of the life cycle of a Japanese oyster. Most data are taken from the report [7].

1. eggs (in July–August an adult oyster produces between 10^6 and 10^8 eggs);
2. larvae (an egg together with sperm develop into a larvae within 1 day);
3. veliger larvae (in one or two days the larvae develop into veliger larvae (with larval shell));
4. spat (in 15 to 30 days they settle down on appropriate hard substrate, bigger larvae can crawl quite a distance searching for appropriate settlement);
5. juvenile oysters develop into adult oysters after one year (estimated mortality of juvenile eastern oysters of more than 64% in seven days after settlement and more than 86% in one month after settlement on sub-tidal and inter-tidal plates);
6. death (caused by ageing (it has been estimated a Japanese oyster can live approximately 20 years); the other major causes of death for oysters in general, such as predators and diseases, are not substantial in the Eastern Scheldt).

A simplified view of how a new cluster or colony arises is the following:

The larvae floating in water are displaced by diffusion and carried with the tidal movement. Within 3 weeks they have to settle down on appropriate substrates (hard surface) or otherwise die. The settling down occurs at the moment when the water is quiet (e.g., at the turn of a tide, approximately 20 minutes, or in quiet surroundings). After settling down they will stay there. However, a large percentage of them die before reaching adulthood. After one year, the surviving (juvenile) oysters will enter the reproduction system and start to produce gametes and eggs. Oyster clusters are formed or grow when veliger larvae settle down on appropriate substrates and survive there.

Diffusion and convection of larvae due to tides

Two main factors determining the place where the larvae settle down are: 1) advection and diffusion of the tidal flow, and 2) being at the appropriate place while the water is quiet. If we ignore the swimming effect of the larvae, the transport of larvae can be described by the shallow water equations,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + fv - g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \nu_h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_v \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - fu - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu_h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu_h \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_v \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-d}^z u dz' \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-d}^z v dz' \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-d}^{\zeta} u dz \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-d}^{\zeta} v dz \right)$$

and the transport equation:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial uc}{\partial x} - \frac{\partial vc}{\partial y} - \frac{\partial wc}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_v \frac{\partial c}{\partial z} \right),$$

where c is the concentration of larvae. Here the triplet (u, v, w) is the velocity vector, f the Coriolis parameter, g the gravitational acceleration, and ν_h/ν_v and D_h/D_v the horizontal and vertical viscosities and diffusion, or dispersion, coefficients. The function ζ is the height of the water surface.

The shallow water equations governing the water movement can be simulated using the existing simulation model TRIWAQ (which is in operational use at Rijkswaterstaat [18, 16]). The transport equation can be simulated with a particle simulation model SIMPAR using the flow velocity data produced by TRIWAQ. A 2-dimensional version is also in operational use at Rijkswaterstaat [2, 6], and a 3-dimensional model is currently being developed at TU Delft [13, 14]). Instead of looking at the concentration of larvae, we consider the discrete (likely aggregated into groups of larvae) quantity which corresponds to 'particles' carried with the water movement. For that the continuous transport equation (in concentration) is transformed into a stochastic partial differential equation (e.g., Fokker-Planck equation).

With the above simulation models we can determine the position of the larvae at the time when the water is quiet. If a larva happens to be positioned above an appropriate, preferably hard, surface, then there is a certain chance that it will settle down on that surface. There exist quite detailed geometry and geological

data about the Eastern Scheldt which can be used for the simulation. The geometry data (e.g. depth) are already used by TRI-WAQ and SIMPAR, but we need additional geological data on the hardness of surfaces for our simulation of the distribution of the oysters. The main problem remaining here is to simulate the life cycle of the oysters in order to determine the speed of population increase, reconstruction of the past development and prediction of future development, etc.

Simulation of the life cycle of oysters

In *How are the oyster clusters formed?* we have described the life cycle of an oyster. In order to obtain detailed information of the spread of the oysters we need to model the important factors which affect the development of oysters.

We may divide this life cycle into two major phases:

Phase 1. Each year in July there is a moment when oysters older than 1 year start to produce eggs and gametes. Then there will be billions of eggs and gametes or larvae floating in the water, initially above the spawning oyster colonies. This can be modelled as multiple sources in the transport model SIMPAR. The number of larvae produced by a single oyster depends on many factors: size of the oyster, environmental conditions, etc. (see the discussion in *Diffusion of larvae*).

Phase 2. This is the period from the moment of settling down to developing into an adult oyster. During this period the oyster will stay in the same place except when they are very young (spat, juvenile oyster). In the latter case they can be wiped out by strong

currents. We know that a large percentage of juvenile oysters will die before reaching adulthood.

In general, there are five biotic factors causing oyster death: disease, predation, competition, developmental complications, and energy depletion. And there are five abiotic factors: moisture depletion, temperature, salinity, water motion, and oxygen depletion. Disease and predation are said to have the greatest effect on oyster populations. However, as mentioned earlier, these two factors are not significantly present in the Eastern Scheldt. Which factors contribute predominantly to the death or survival of the Japanese oysters in this specific Eastern Scheldt remains to be investigated.

To conclude: many factors for the model of the life cycle of a Japanese oyster still need to be investigated, part of them can be determined by experiments, and part of them can be determined or made more precise by comparing simulation results with the past observational data.

A Appendix: derivation of (13)

Consider Equation (3) where u is given by (11). Let us rescale the space and time variables as

$$(X \ Z \ T) = (x/L \ z/h \ U_0 t/L),$$

where L is a characteristic scale in the x -direction. From the shal-



lowness hypothesis, we assume that $h = \epsilon L$, $\epsilon \ll 1$. Then, introducing the Peclet number $P_e = \frac{U_0 h}{D}$, Equation (3) becomes

$$\epsilon P_e \left(\frac{\partial L}{\partial T} + v(Z) \frac{\partial L}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial Z^2}, \quad (32)$$

$$v(Z) = \frac{3}{2} \frac{(Z - Z_0)(2 - Z - Z_0)}{(1 - Z_0)^2},$$

with no-flux boundary conditions at $Z = 0, 1$:

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = 0, \quad Z = 0, 1. \quad (33)$$

The presence of the small number $\epsilon P_e \ll 1$, suggests seeking a solution in power series in ϵP_e of the form

$$L = L_0(X, Z, T; \tau) + \epsilon P_e L_1(X, Z, T; \tau) + \dots, \quad (34)$$

where τ is a slow timescale defined by $\epsilon P_e T$. Inserting (34) into (32), we find for the leading order term that $L_0(X, Z, T; \tau) = L_0(\xi; \tau)$, $\xi = X - T$, while the coefficient at order ϵP_e is

$$L_1(X, Z, T; \tau) = - \frac{[(-2 + Z)Z + 2Z_0(X) - Z_0^2(X)]^2}{8[-1 + Z_0(X)]^2} \frac{\partial L_0}{\partial \xi}.$$

Finally at order $(\epsilon P_e)^2$, Equation (32) gives

$$\frac{\partial^2 L_2}{\partial Z^2} = F \left(\frac{\partial L_0}{\partial \tau}, \frac{\partial L_0}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2}, Z, Z_0 \right).$$

The form of F is rather complicated and of no real interest so we do not explicate it here. The key point is that L_2 has to satisfy the boundary conditions (33) and this yields the solvability condition

$$\int_0^1 F \left(\frac{\partial L_0}{\partial \tau}, \frac{\partial L_0}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2}, Z, Z_0 \right) dZ = 0.$$

After integration, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial \tau} = & - \frac{24(1 - Z_0)}{105} \frac{dZ_0}{dX} \frac{\partial L_0}{\partial \xi} \\ & + \left(\frac{1}{P_e^2} + \frac{2(1 - Z_0)^2}{105} \right) \frac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

which, in terms of the original space and time variables x and t , is (5). ◀

Other participants: Dragan Bezanovic, Luca Ferracina, Joris Geurts van Kessel⁴, Belinda Kater⁴, Kamyar Malakpoor, Harmen van der Ploeg, José A. Rodríguez, Bart van de Rotten, Karin Troost⁴, Nienke Valkhoff, and J.F. Williams.

Notes

- 1 Formerly known as RIVO, presently part of Animal Sciences Group.
- 2 Data are hard to obtain since experiments are difficult and time consuming.
- 3 As explained in *Continuous time dependence for oysters*, this equation represents a smoothed version of the discrete-time

equation of the previous section. Assuming a reference time scale of a year, the coefficients D and E in this equation are the natural coefficients associated with diffusion and death of the larvae, per year. The coefficient F , on the other hand, should be viewed as the production of larvae, per

oyster, averaged over a year.

- 4 We would like to direct special thanks to the proposers of the problem for the information and data provided, the corrections suggested and the hospitality in Yerseke.

References

- 1 J. R. Dew, A population dynamic model assessing options for managing eastern oysters (*Crassostrea virginica*) and triploid Suminoe oysters (*Crassostrea ariakensis*) in Chesapeake Bay, MS Thesis. Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002.
- 2 M. Elorche, Vooronderzoek Particle-module in SIMONA (in Dutch). Werkdocument RIKZ/OS-94.143x, 1994.
- 3 A. Gangnery, C. Bacher, and D. Buestel, Assessing the production and the impact of cultivated oysters in the Thau lagoon (Mediterranean, France) with a population dynamics model, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* **58**, pp. 1012–1020, 2001.
- 4 P. Goulletquer et al, La reproduction naturelle et contrôlée des Bivalves cultivés en France, IFREMER Rapport Interne DRV/RA/RST/97-11 RA/Brest, 1997.
- 5 H. Haas and T. Tosserams, Balanceren tussen zoet en zout en Ruimte voor veerkracht en veiligheid in de Delta, Rapporten RIKZ/2001.18 en RIZA/2001.014.
- 6 A. W. Heemink, Stochastic Modeling of dispersion in shallow water. *Stochastic Hydrol. Hydraul.* **4**, pp. 161–174, 1971.
- 7 B. J. Kater, Japanse oesters in de Oosterschelde: ecologisch profiel, RIVO Report (in Dutch), April 2003.
- 8 M. Kobayashi, et al, *Aquaculture* **149**, pp. 285–321, 1997.
- 9 R. Mann, & D. A. Evans, Estimation of oyster, *Crassostrea virginica*, standing stock, larval production, and advective loss in relation to observed recruitment in the James River, Virginia, *J. Shellfish res.*, **17**(1), pp. 239–253, 1998.
- 10 J. D. Murray, *Mathematical biology; an introduction*.
- 11 J. R. Ockendon, S. D. Howison, A. A. Lacey, and A. B. Movchan, *Applied Partial Differential Equations*, Oxford University Press 1999.
- 12 D. B. Quayle, Pacific oyster culture in British Columbia, *Fish. Res. Board. Can. Bull.*, **169**, pp 1–192, 1969.
- 13 J. W. Stijnen & H. X. Lin, The Modeling of Diffusion in Particle Models, Project Report to National Institute for Coastal and Marine Management (RIKZ), Contract RIKZ/OS 2000/06080, 14 p., September 2000.
- 14 J. W. Stijnen, A. W. Heemink & H. X. Lin, An Efficient 3D Particle Transport Model for Use in Stratified Flow to be published.
- 15 G. I. Taylor, *Dispersion of soluble matter in a solvent flowing slowly through a tube*, *Proc. Roy. Soc. A* **210**, pp. 186–203.
- 16 E. A. H. Vollebregt, Parallel Software Development Techniques for Shallow Water Models, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1997.
- 17 T. Yanagi, *A simple method for estimating ...*, see <http://data.ecology.su.se/MNODE/Methods/YanagiMixing/Yanagi.htm>
- 18 M. Zijlema, TRIWAQ — three-dimensional incompressible shallow flow model, *Technical Documentation*, RIKZ/Rijkswaterstaat, 1997.

Dirk Laurie

Departement Wiskunde
Universiteit van Stellenbosch
7602 Matieland
Zuid-Afrika
dpl@sun.ac.za

SIAM wiskundewedstryd Honderd dollars vir honderd syfers

Uitdagings in numeriese wiskunde

Een beloning van honderd dollar voor het geven van de oplossing van tien problemen uit de numerieke wiskunde: een ongebruikelijke prijs voor een ongebruikelijke wedstrijd, door Nick Trefethen in SIAM News gestart. Dirk Laurie bespreekt het verloop van deze wedstrijd. Hij werd geboren in Cape Town in Zuid-Afrika. Hij promoveerde in 1977 in de numerieke analyse aan de universiteit van Dundee (Schotland). In 1984 werd hij hoogleraar, eerst aan de Universiteit van Potchefstroom en vanaf 2000 aan de Universiteit van Stellenbosch (beide in Zuid-Afrika).

Op 4 November 2004 het ek 'n lesing oor die inhoud van hierdie artikel by die Technische Universiteit Eindhoven gelewer. Prof. dr. Johannes Boersma het my besoek gereël, en my en my vrou gehuisves en onthaal. Soos hieronder vermeld, was hy tevens intiem gemoeid met die werk wat hier beskryf word. Dit is dus met graagte, maar ook met droefheid, dat ek hierdie artikel opdra aan die nagedagtenis van Joop Boersma, gebore 5 Desember 1937, gestorwe 29 November 2004.

In Januarie 2002 het Nick Trefethen (Oxford) 'n uitdaging [1] aan die lesers van SIAM News gerig: bereken tien gespesifiseerde reële getalle tot tien korrekte syfers elk. Elke getal word gedefinieer as die oplossing van 'n sekere wiskundige probleem, gekies uit 'n paar dosyn soortgelyke probleme wat Trefethen jaarliks gebruik om sy doktorale studente 'n voorsmakie van numeriese analise in die praktyk te gee. Vir die span (een tot ses lede) met die meeste korrekte syfers uit 100 het hy 'n prys van \$100 uitgelooft. Sy enigste wenk was: "They're hard!", en hy het gemeen dat selfs vyftig korrekte syfers reeds indrukwekkend sou wees.

Ses maande later [2] moes Trefethen toegee dat hy sy publiek onderskat het. Twintig spanne, waaronder vier eenman-spanne,

het volpunte behaal. Hy het nie twintig maal \$100 gehad om uit te deel nie, maar 'n anonieme borg het kort daarna tot sy redding gekom. Vier van die deelnemers het in Junie 2004 'n boek oor die wedstryd die lig laat sien [3] waarin elke probleem grondig bespreek word (en die identiteit van die borg onthul word). Een van die ander deelnemers, Johannes Boersma (Eindhoven), het vrywillig die eerste weergawe van al tien hoofstukke van die boek deurgewerk; die spore van sy nougesette redaksionele werk lê op bykans elke bladsy.

In Trefethen se verslag [2] het hy die som van die tien antwoorde met die simbool τ aangedui, en opgemerk: "I wonder how long it will take before someone computes ten thousand digits of this fundamental constant?" Sulke grappies moet 'n mens nie maak teenoor 'n publiek wat reeds bo alle verwagtinge gepresteer het nie, en die skrywers van [3] het vir nege van die tien probleme inderdaad daarin geslaag om tienduisend syfers te bereken. In hierdie artikel beskryf ek kortliks drie van die probleme (in volgorde: nommers 10, 5 en 3) met spesifieke klem op hoe die moeilikheidsgraad van die probleem verander soos die vereiste aantal syfers toeneem. Weens ruimtebeperkings kan nie veel detail gegee word nie; daarvoor moet die leser die boek [3] raadpleeg.

Hier volg Trefethen se formulerings van die drie probleme. Miskien wil die leser hulle bietjie uitprobeer en eers later verder lees!

10. A particle at the center of a 10×1 rectangle undergoes Brownian motion (i.e., 2D random walk with infinitesimal step lengths) till it hits the boundary. What is the probability that it hits at one of the ends rather than at one of the sides?

5. Let $f(z) = 1/\Gamma(z)$, where $\Gamma(z)$ is the gamma function, and let $p(z)$ be the cubic polynomial that best approximates $f(z)$ on

the unit disk in the supremum norm $\|\cdot\|_\infty$. What is $\|f - p\|_\infty$?
 3. The infinite matrix A with entries $a_{11} = 1, a_{12} = 1/2, a_{21} = 1/3, a_{13} = 1/4, a_{22} = 1/5, a_{31} = 1/6$, and so on, is a bounded operator on ℓ^2 . What is $\|A\|$?

Uitdagings deur die eeue

'n Mens moet nie dink dat uitdagings in numeriese berekening eers in die tyd van die elektroniese rekenaar begin voorkom het nie. Ek gee enkele voorbeelde.

Nadat Archimedes die oppervlakte van 'n paraboliese segment presies kon bepaal, het hy wesenlik dieselfde metode probeer gebruik om die oppervlakte van 'n sirkel te probeer vind. Hierdie keer kon hy slegs boonste en onderste grense bepaal, maar in die proses het hy drie korrekte syfers verkry [4]. Die vindingrykheid en elegansie van Archimedes se algoritme, en die feit dat hy moderne tegnieke soos waaksyfers en intervalrekenkunde vooruitgeloop het, plaas hom onder die grootste numeriese analiste van alle tye.

Hier volg Archimedes se algoritme vir π in moderne notasie. Archimedes self het volstaan met $n = 96$, maar die metode is selfs vir hoë akkuraatheid goed bruikbaar: elke iterasie verminder die fout met 'n faktor 4.

Inisialiseer : $n = 6; \quad S = 2; \quad T = \sqrt{3}.$

Itereer : $n \leftarrow 2n; \quad T \leftarrow S + T; \quad S \leftarrow \sqrt{1 + T^2}.$

Telkens is $\sin \frac{\pi}{n} = 1/S$ en $\tan \frac{\pi}{n} = 1/T$, waaruit volg dat $n/S < \pi < n/T$.

Ons spring nou na die vroeë agttiende eeu. Die differensiaal- en integraalrekening is ongeveer 'n halwe eeu oud. Ondanks die talle suksesse van die nuwe tegniek het twee probleme lank onopgelos gebly:

- Wat is die waarde van $n!$ wanneer n nie 'n heelgetal is nie, spesifiek wanneer $n = \frac{1}{2}$?
- Wat is die waarde van $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

James Stirling [5, 6] het beide probleme met sy eie splinternuwe metodes numeries opgelos tot onderskeidelik nege en agttien korrekte syfers. Interessant genoeg kon Stirling slegs in die eerste geval die analitiese antwoord $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ uit die numeriese resultaat herken. Euler het kort daarna [7] met 'n totaal ander redenasie¹ die waarde $\frac{1}{6}\pi^2$ afgelei.

Die tegniek om uit 'n goeie numeriese benadering 'n analitiese waarde te raai, wat met ander metodes bewys moet word, is onlangs gesistematiseer deur Borwein en Bailey [9].

Tien syfers teenoor tienduizend

Die meeste van Trefethen se probleme het hul moeilikheid te danke aan die afwesigheid van 'n voor-die-hand-liggende metode om hulle aan te pak. As 'n mens eers 'n geskikte metode gevind het, kan al tien probleme met betreklik min berekeningstyd gedoen word. Die situasie is heel anders wanneer daar tienduizend syfers eerder as tien gevra word.

Ons sê die kompleksiteit van 'n berekening tot d syfers is $O(d^p)$, waar die eksponent p 'n positiewe reële getal is, indien die tyd wat die berekening benodig, ongeveer eweredig aan d^p is, mits d nie te veel varieer nie.² Byvoorbeeld, wanneer d naby 10^4 lê, is die vermenigvuldiging van twee getalle van d syfers, of om die vind van die vierkantwortel van so 'n getal, prosesse van

kompleksiteit $O(d^{1.6})$. Die kompleksiteit om e^x of $\sin x$ te bereken, is ongeveer $O(d^2)$.

'n Interessante geval is dié van die gammafunksie: die kompleksiteit om $\Gamma(x)$ te bereken is $O(d)$ vermenigvuldigings, indien sekere konstantes reeds bekend is — maar dit neem $O(d^2)$ vermenigvuldigings om daardie konstantes te vind. Dus is die kompleksiteit van die berekening van die eerste waarde van $\Gamma(x)$ $O(d^{3.6})$, maar verdere waardes kos net $O(d^{2.6})$ elk. As dit een sekonde neem om $\Gamma(x)$ tot 100 syfers te bereken, sal dit tot 1000 syfers 'n bietjie meer as 'n uur neem, want $10^{3.6}$ is ongeveer 3981.

Die drie uitdaagprobleme wat voorts bespreek word, vertoon uiteenlopende gedrag soos die aantal syfers toeneem. Die eerste probleem is een waarvoor gesofistikeerde kennis nodig is om 'n oplossing tot tien syfers te vind — maar die metode se kompleksiteit is slegs $O(d^2)$ en tienduizend syfers is dus maklik. In die tweede geval is dit weer so dat die probleem nie maklik met elementêre metodes gedoen kan word nie; maar omdat die probleem vereis dat $\Gamma(z)$ vir 'n aantal komplekse waardes van z bereken moet word, neem dit 'n paar uur om die probleem tot tienduizend syfers te doen. Die derde probleem kan met algemeen beskikbare programmatuur bykans sonder enige dinkwerk tot tien syfers gedoen word — maar met selfs die mees gesofistikeerde metode is nie eers eenduizend syfers tans haalbaar nie.

Brownse beweging

In die geval van Trefethen se Probleem 10 is die betrokke waarskynlikheid so klein dat simulاسie met pseudo-kansgetalle sukkel om selfs een korrekte syfer te kry. Dit is egter bekend dat die digtheidsfunksie van Brownse beweging harmonies is. 'n Ekwivalente formulering is dus:

'n Harmoniese funksie u gedefinieer op 'n 10×1 reghoek se waarde is 1 op die twee kort sye en 0 op die twee lang sye. Wat is die waarde van u by die middelpunt van die reghoek?

In hierdie vorm kan ons Laplace se vergelyking met die gebruikelike vyfpunt-differensiemetode oplos, met stapgroottes $\delta x = \delta y = \frac{1}{n}$, waar n 'n heeltal is; dit lewer benaderings $u_n(x, y)$ wanneer x en y albei roosterpunte is. Op my masjien is $n = 128$ nog haalbaar, en lewer drie akkurate syfers.

n	$u_n(0, 0)$
1	3.8155269052 10^{-6}
2	0.7714342078 10^{-6}
4	0.4617982354 10^{-6}
8	0.4022278462 10^{-6}
16	0.3883130701 10^{-6}
32	0.3848934609 10^{-6}
64	0.3840422201 10^{-6}
128	0.3838296382 10^{-6}

Meer syfers word met behulp van Richardson-ekstrapolasie³ uit hierdie agt waardes verkry. As die gegewe terme die eerste kolom $m_{j,1}$ van 'n onderdriehoekige matriks vorm, word verdere terme met die rekursieformule

$$m_{j,k+1} = m_{j,k} + \frac{1}{4^k - 1} (m_{j,k} - m_{j-1,k})$$

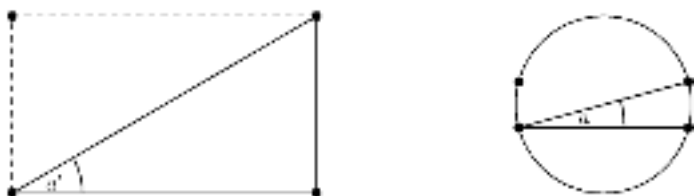
bereken. Ons kry $m_{8,2} = 0.3837587776 \cdot 10^{-6}$ en $m_{8,3} =$

0.3837587979 10^{-6} , waarna $m_{8,4}$ en $m_{8,5}$ tot tien syfers gelyk is aan $m_{8,3}$.

Die ekstrapolasiemetode lewer $O(k^2)$ syfers wanneer $n = 2^k$, dus $n = O(2^{\sqrt{d}})$, en enige numeriese oplosmetode vir Laplace se vergelyking benodig $O(d)$ stappe van $O(n^2)$ optellings elk. Die tyd vir 'n berekening tot d syfers styg dus soos $O(d^2 2^{2\sqrt{d}})$, wat gou onhaalbaar word soos d toeneem.

Maar daar is 'n veel beter metode.

Gestel ons beeld die reghoek konform af op die eenheidsirkel, op so 'n manier dat die middelpunt van die reghoek en van die sirkel bo-op mekaar val. Definieer die funksie $v(\xi, \eta) = u(x, y)$, waar die punt (ξ, η) in die sirkel die beeld van die punt (x, y) in die reghoek is. Dit is bekend dat v ook harmonies is, en dus is die onbekende waarde $v(0, 0)$ gelyk aan die gemiddelde waarde van v op die sirkel. Maar op die sirkel is v net 0 of 1, dus is die gemiddelde waarde gelyk aan die booglengte van die stuk met waarde 1 gedeel deur die omtrek van die sirkel. Kies die afbeelding so dat die vier hoekpunte afbeeld na $(\pm \cos \alpha, \pm \sin \alpha)$ met $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$. Dan is die gevraagde gemiddeld gelyk aan $4\alpha/(2\pi)$.



Die betrokke konforme afbeelding is die bekende Schwarz-Christoffel transformasie, wat in die geval van 'n reghoek in terme van elliptiese integrale uitgedruk kan word. Dit lei na die formule

$$\frac{\operatorname{agm}(1, \sin \alpha)}{\operatorname{agm}(1, \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha'}{\cos \alpha'} \quad (1)$$

waar agm Gauss se rekenkundig-meetskundige gemiddeld is, d.w.s. die gemeenskaplike limiet van die rye x_n en y_n gedefinieer deur

$$x_0 = x, \quad y_0 = y;$$

$$x_{n+1} = (x_n + y_n)/2, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hierdie iterasie konvergeer kwadraties. Die nie-lineêre vergelyking (1) is maklik om op te los: op my werkstasie neem dit 15 sekondes om meer as 14 000 korrekte syfers te kry.

Selfs hierdie metode is nog nie die finale antwoord nie. Daar bestaan 'n tegniek van Ramanujan wat in baie gevalle 'n analitiese formule vir $\sin \alpha$ oplewer indien $\tan \alpha'$ rasionaal is. In hierdie geval lei die tegniek na

$$\sin \alpha = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^2 (2 + \sqrt{5})^2 (3 + \sqrt{10})^2 (\sqrt{2} + 5^{1/4})^4}.$$

Op hierdie probleem het slegs 62 uit 94 spanne 'n poging aange-

wend — maar dis een van die maklikste probleme uit die oogpunt van baie syfers kry.

Komplekse benadering

Ons kom nou by Trefethen se Probleem 5.

Dit is uit elementêre oorwegings duidelik dat $\|f - p\|$ simmetries is om die x -as en sy maksimumwaarde op die eenheidsirkel aanneem, en dat die koëffisiënte reël moet wees. Laat

$$p(c_1, c_2, c_3, c_4; z) = c_1 + c_2 z + c_3 z^2 + c_4 z^3.$$

Die vanselfsprekende manier om hierdie probleem te takel is as 'n minimaks-probleem:

Vind die minimum van

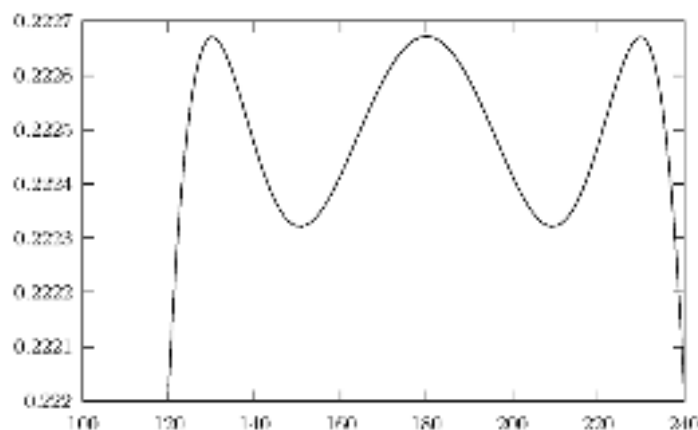
$$g(c_1, c_2, c_3, c_4) = \max_{z \in S} |f(z) - p(c_1, c_2, c_3, c_4; z)|$$

waar S die boonste helfte van die eenheidsirkel is.

Om die probleem hanteerbaar te maak, vervang ons S met

$$S_{180} = \{e^{ik\pi/180}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 180\}.$$

Omdat die maksimum oor 'n kleiner versameling geneem word, behoort dit 'n ondergrens vir die antwoord te gee. Beginwaardes vir die koëffisiënte word verkry deur die supremum-norm met die diskrete L^2 -norm te vervang. 'n Tipiese roetine vir die vind van 'n lokale minimum van 'n funksie lewer dan die volgende foutkromme:



Die getalle op die horisontale as in die figuur is die hoek in grade van die betrokke punt op die eenheidsirkel.

Hierdie resultaat is klaarblyklik verkeerd — daar is net drie lokale maksima, terwyl 'n optimale passing deur 'n funksie van vier veranderlikes minstens vyf lokale maksima moet hê. Inderdaad is slegs een syfer van die antwoord korrek.

Om vyf maksima af te dwing, vervang ons die probleem deur sy dual. Die vyf maksima moet volgens simmetrie by $z_1 = \bar{z}_5 = e^{i\theta_1}$, $z_2 = \bar{z}_4 = e^{i\theta_2}$, en $z_3 = -1$ wees, waar θ_1 en θ_2 twee onbekende hoeke is. Die maksimin-probleem is dan:

Vind die maksimum van $\epsilon(\theta_1, \theta_2)$, waar $\epsilon = \epsilon(\theta_1, \theta_2)$ die kleinste

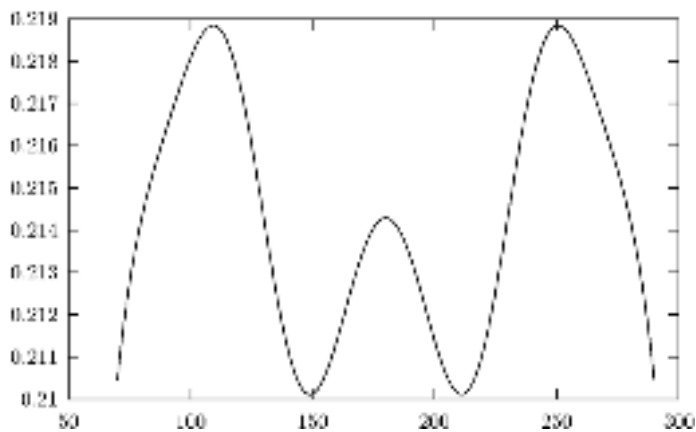
positiewe getal is sodanig dat die vyf vergelykings

$$|f(z_j) - p(c_1, c_2, c_3, c_4; z_j)| = \epsilon$$

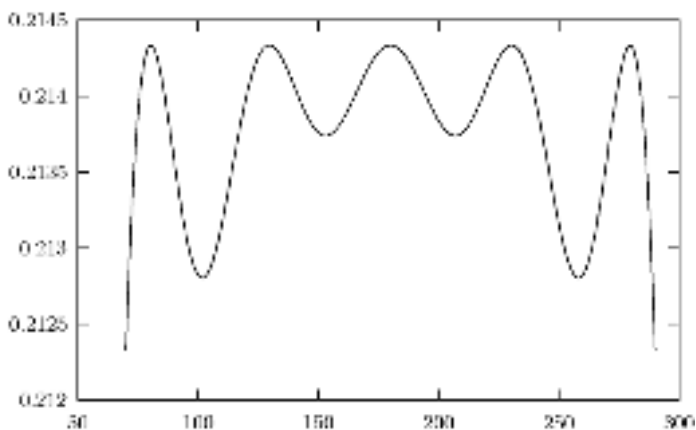
'n oplossing (c_1, c_2, c_3, c_4) het.

Die doelfunksie van bostaande maksimaliseringsprobleem word verkry deur 'n oorbepaalde stelsel van 5 komplekse vergelykings in 4 onbekendes in die supremumnorm op te los. Dit lyk asof dit op sigself 'n nie-triviale taak is, maar hierdie spesiale geval, met presies een meer vergelyking as onbekende, kan in 'n eindige aantal stappe opgelos word [10]. In beginsel sou 'n mens selfs die oplossing in geslote vorm kon skryf.

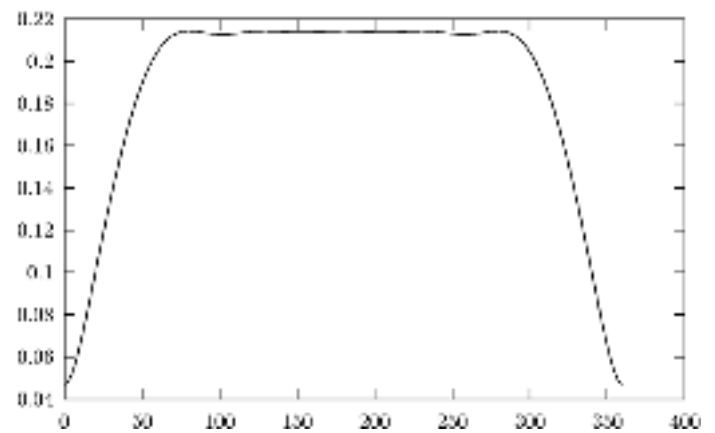
Om te begin, beskou ons alle waardes van θ_1 en θ_2 waar die twee hoeke verskillend is, en elk 'n heeltallige veelvoud van 10° . Die maksimum kom voor by $\theta_1 = 80^\circ, \theta_2 = 130^\circ$. Toevallig is hierdie waardes steeds beste al sou die hoeke met stapgrootte 1° gediskretiseer word. Selfs hierdie oplossing, hoewel beter as die een wat met die vorige metode verkry is (die eerste twee syfers is nou reg), vertoon nog nie vyf maksima nie:



Die metode van direkte soek behels dat toenemend fyner diskretiserings lokaal rondom die gevonde optimum gedoen word. In dubbelpresisie (ongeveer 16 syfers) is dit voldoende om te stop wanneer die stapgrootte 10^{-8} is, aangesien slegs die optimale waarde van ϵ verlang word en nie die optimale waardes van die parameters nie. Die antwoord **0.2143352345904590** word binne enkele sekondes verkry, en vertoon pragtig die gesogte vyf maksima.



Hierdie grafiek, met die geweldige fyn resolusie op die vertikale as, toon nie hoe ongelooflik plat die foutkromme⁴ van die optimale passing oor 'n groot deel van die gebied is nie.



Sulke plat foutkrommes is tipies van polinoombenaderings in die supremum-norm op die eenheidsirkel [11].

As ons tot tienduizend syfers wil werk, is 'n direkte soekmetode nie effektief nie, want die aantal iterasies is eweredig aan die aantal syfers. Maar met beginwaardes reeds so akkuraat, is Newton se metode vir die vind van 'n nulpunt van $\nabla \epsilon(\theta_1, \theta_2)$ heeltemal goed genoeg. Die aantal iterasies om d syfers te kry is eweredig aan $\log d$, maar dit is bysaak. Die berekeningstyd word gedomineer deur die tyd wat dit verg om daardie eerste waarde van Γ by die hoogste akkuraatheid te vind.

Hierdie probleem was die deurslaggewende een van die kompetisie: slegs 22 uit 94 spanne het volpunte behaal, en van daardie 22 spanne was daar net twee wat nie vir al die ander probleme ook volpunte behaal het nie. Nogtans word die probleem nie beduidend moeiliker wanneer daar vir tienduizend syfers gemik word nie.

Die norm in van 'n operator in 'n Hilbertruimte

Die praktiese bereken van die norm van 'n operator A in ℓ^2 word gewoonlik nie as besonder moeilik beskou nie: al wat nodig is, is om $\|A_n\|$ vir n groot genoeg te bepaal, waar A_n die beperking van A tot $\mathbf{R}^n$ is. In die geval van Trefethen se Probleem 3 word die inskrywings van A gegee deur die formule

$$a_{j,k} = a(j,k) = \frac{1}{(j+k)(j+k-1)/2 - k + 1}.$$

Dit gee byvoorbeeld

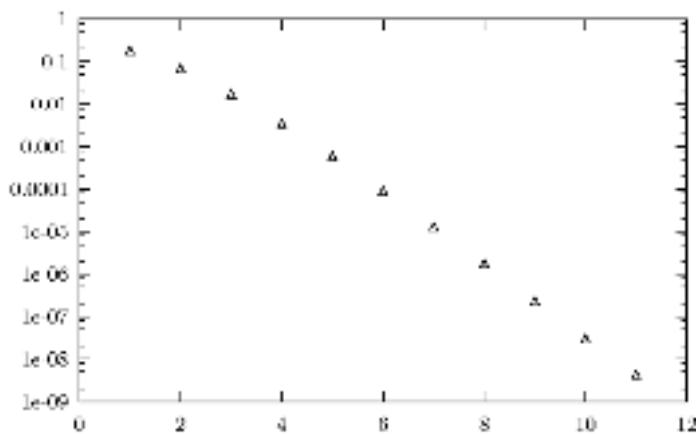
$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 1/7 & 1/11 \\ 1/3 & 1/5 & 1/8 & 1/12 & 1/17 \\ 1/6 & 1/9 & 1/13 & 1/18 & 1/24 \\ 1/10 & 1/14 & 1/19 & 1/25 & 1/32 \\ 1/15 & 1/20 & 1/26 & 1/33 & 1/41 \end{bmatrix}$$

$\|A_n\|$ is die grootste singuliere waarde⁵ van A_n , en kan maklik met behulp van enige moderne pakket vir numeriese lineêre al-

gebra bereken word. My masjien neem minder as twee minute om die volgende tabel te verkry.

n	$\ A_n\ $
1	1.00000000000000
2	1.18335017655166
4	1.25253739751680
8	1.27004630585408
16	1.27352521545013
32	1.27411814436915
64	1.27420913129766
128	1.27422212003778
256	1.27422388594855
512	1.27422411845808
1024	1.27422414844970
2048	1.27422415275182

Dit is voorts maklik om die akkuraatheid van die verkreeë waardes te skat deur 'n grafiek van $\|A_{2n}\| - \|A_n\|$ op 'n logaritmiese skaal te maak.



Hier is $n = 2^{m-1}$, waar m die getal op die horisontale as is. Die grafiek toon duidelik dat elke verdubbeling van n die fout in $\|A_n\|$ met 'n faktor ongeveer 8 verklein, en dus is $\|A_{2048}\|$ tot tien syfers gelyk aan $\|A\|$.

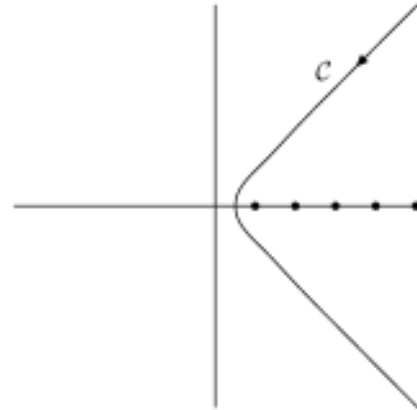
Die oorspronklike probleem 3 kan dus prakties opgelos word sonder om enigsins daarvoor na te dink!

Hierdie metode slaag weliswaar daarin om tien syfers te vind, maar word heel gou onhanteerbaar. Om d akkurate syfers te kry, moet die grootte van die matriks ongeveer 2.15^d wees, en hierdie syfer groei eksponensieel met d . Selfs die taak om die matriks A_n in die geheue van die rekenaar te kan berg, is reeds by $d = 20$ onhaalbaar.

Die belowendste metode waaroor ons tans beskik, is om sommasie met integrasie te vervang. Dit is uitvoerbaar omdat $a(k, l)$ ook bereken kan word selfs wanneer k en l nie positiewe heeltalle is nie. 'n Beperkte hoeveelheid vordering kan met die Euler-Maclaurin somformule behaal word — sien [3] vir meer besonderhede. Maar die kragtigste somformule kom van kontoerintegrasie:

As f analities is en voldoen aan $f(z) = O(z^{-1-\epsilon})$ in die gebied links van die gelyke kontoer C , dan geld

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2i} \int_C f(z) \cot(\pi z) dz$$



Die kontoer C begin by ∞ bo die x -as, kruis die x -as tussen 0 en 1, en gaan weer na ∞ onder die x -as.

Om die integraal te bepaal, gaan ons weer terug na 'n som:

$$\int_C g(z) dz \approx S(g, s, h) = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(s(kh)) s'(kh)$$

waar $s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 'n geskikte parametrisering van die kontoer is. In die gunstigste geval kan s so gekies word dat die konvergensie dubbel-eksponensieel is: d.w.s. die konvergensie van $S(g, s, h)$ is eksponensieel vinnig in k sowel as h . Byvoorbeeld, die parametrisering $s(t) = \cosh(\sinh t - \frac{1}{4}i\pi)$ gee dubbeleksponensiële konvergensie vir 'n wye klas integrande.

Na uitgebreide numeriese eksperimentering het Waldvogel ([3], Hoofstuk 3) sy beste resultate verkry met die eenvoudige formule

$$s(t) = \cosh(t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}i\pi). \quad (2)$$

Dit lewer vir gegewe $h > 0$ die sommasieformule

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k f(z_k) + \eta(f, h)$$

waar $\eta(f, h)$ die foutterm is, en

$$z_k = s(kh), \quad w_k = -\frac{1}{2}ih s'(kh) \cot \pi z_k.$$

Vir enige gegewe waarde van h word die getalle w_k en z_k eenmalig bereken.

Ons kry dus vir gegewe h 'n oneindige komplekse matriks $G = G_h$ met elemente

$$g_{j,k} = \sqrt{w_j w_k} a(z_j, z_k)$$

sodanig dat die eiewaardes van $G^T G$ almal reëel is⁶ en eksponensieel vinnig na die eiewaardes van $A^T A$ streef soos h streef na 0. Omdat G_h 'n komplekse matriks is, beteken dit egter dat $\|G_h\|$ nie na $\|A\|$ streef nie.

In die praktyk hoef slegs die submatriks van G_h met $-N \leq j \leq N$, $-N \leq k \leq N$ gebruik te word, waar N groot genoeg gekies word dat die fout verwaarloosbaar is.

Die parametrisering (2) is so gekies dat die beste keuse van N eweredig aan d/h is. Aangesien die beste keuse van h ongeveer omgekeerd eweredig aan d is, is N ongeveer eweredig aan d^2 . In die praktyk kan d nie kontinu gevarieer word nie. Waldvogel het eksperimenteel vasgestel dat die empiriese formule

$$d \approx d(h) = 51.4 \sinh(0.6 \operatorname{arcsinh}(0.021/h))$$

'n goeie skatting van die akkuraatheid by 'n gegewe stapgrootte gee. Byvoorbeeld: om tien syfers te verkry, is $h = \frac{1}{16}$ goed genoeg.

Nou moet die eiewaardes van G nog gevind word. Met Waldvogel se aanbevelings is $n \approx 0.26d^2$, en die aantal inskrywings in die matriks dus ongeveer $0.07d^4$. Dit is onprakties om so 'n matriks in die geheue van 'n rekenaar te berg vir d groter as ongeveer 100, en dus moet 'n iteratiewe metode gebruik word. Waldvogel se empiriese formule is gekoppel aan die gebruik van die magmetode: vanaf 'n beginwaarde y_0 vir die dominante eiewaarde van $G^T G$ word die volgende berekening vir $k = 0, 1, 2, \dots$, geïteereer:

$$\mathbf{u} = G\mathbf{y}_k, \quad \mathbf{v} = G^T \mathbf{u}, \quad \lambda_k = \frac{\mathbf{y}_k^T \mathbf{v}}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{y}_k}, \quad \mathbf{y}_{k+1} = \frac{\mathbf{v}}{\lambda_k}.$$

Dan is $\|G_h\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k^{1/2}$. Die iterasie word gestop wanneer twee opeenvolgende waardes van λ_k verskil met minder as $10^{-d(h)}$.

Die fout in die magmetode bevredig die wet $|\lambda_k - \lambda_\infty| \approx \rho^{2k}$, waar ρ die verhouding tussen die naasgrootste en grootste eiewaardes is. In hierdie probleem is daardie verhouding ongeveer $\rho = 10^{-1.9}$. Die verwagte aantal iterasies is dus ongeveer $d(h)/3.8$. As ons in ag neem dat daar $O(d^4)$ matriksinskrywings is, wat elk $O(d^{1.6})$ tot die berekeningstyd bydra, vind ons dat die totale tyd $O(d^{6.6})$ beloop. Dit kom daarop neer dat 'n verdubbeling van berekeningstyd 'n toename van 10% in die aantal korrekte syfers gee.

Op die oomblik is die beste wat bereik is, 273 korrekte syfers, wat ongeveer 'n maand geneem het om te bereken. Selfs 1000 korrekte syfers lyk totaal buite bereik, om van 10000 nie eers te praat nie.

Hierdie uitdaging is nog bo ons vuurmaakplek!



Notas

- 1 Het Euler eers Stirling se numeriese waarde gesien, die getal $\pi^2/6$ herken, en toe 'n manier gevind om laasgenoemde te motiveer? Die datums van die publikasies laat hierdie moontlikheid toe, maar as dit so was, is dit vreemd dat Euler in sy brief van 8 Junie 1736 aan Stirling ([8], p. 141–145) geen woord daarvan rep nie.
- 2 Let wel: hierdie definisie van die groot O-notasie is verwant aan, maar verskil van,

die gebruiklike een.

- 3 Hoewel na 'n twintigste-eeuse weerkundige genoem, is slegs die rekursiewe formulering van hierdie konvergensieversnellingsmetode modern. Die onderliggende formule is eweneens een van James Stirling ([6], p. 159) se uitvindings.
- 4 As boorling van Kaapstad put ek groot bevrediging uit die feit dat hierdie grafiek

nogal baie na Tafelberg lyk!

- 5 As λ 'n eiewaarde van $B^T B$ is, dan is $\sqrt{\lambda}$ 'n singuliere waarde van B .
- 6 Let op: ons werk met $G^T G$, waarin die gewone getransponeerde voorkom, nie die Hermitiese nie: dat die eiewaardes reël is, is dus nie trivaal nie.

Verwysings

- 1 Lloyd N. Trefethen. 'A hundred-dollar, hundred-digit challenge', *SIAM News* 35(1), January/February 2002. www.siam.org/siamnews/01-02/challenge.pdf.
- 2 Lloyd N. Trefethen. 'The \$100, 100-digit Challenge'. *SIAM News* 35(6), p. 1–3, July/August 2002.
- 3 Folkmar Bornemann, Dirk Laurie, Stan Wagon, and Jörg Waldvogel. *The SIAM 100-Digit Challenge: A Study in High-Accuracy Numerical Computing*, SIAM, Philadelphia, 2004.
- 4 T. L. Heath. *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.
- 5 Jacobus Stirling. *Methodus Differentialis sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*, London, 1730.
- 6 Ian Tweddle. *James Stirling's Methodus Differentialis: An Annotated Translation of Stirling's Text*, Springer, London, 2003.
- 7 Leonhard Euler. 'De summis serierum reciprocarum', *Comm. Acad. Sci. Petrop.* 7 (1734–1735), p. 123–134, 1740; *Opera Mathematica* 14, p. 73–86.
- 8 Ian Tweddle. *James Stirling: This about series and such things*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1988.
- 9 Jonathan Borwein and David Bailey. *Mathematics by Experiment*, A. K. Peters, Natick, 2004.
- 10 Dirk P. Laurie and Lucas M. Venter. 'A two-phase algorithm for the Chebyshev solution of complex linear equations', *SIAM J. Sci. Comput.* 15(6), p. 1440–1451, 1994.
- 11 Lloyd N. Trefethen. 'Near-circularity of the error curve in complex Chebyshev approximation', *J. Approximation Theory* 31, p. 344–367, 1981.

B.S. Yadav

*Indian Society for History of Mathematics
Department of Mathematics
Dehli 110 007
India
bsyadav@indianshm.com*

Beroemde problemen

The Invariant Subspace Problem

Heeft elke begrensde lineaire operator, werkend op een Hilbert ruimte, een niet-triviale invariante deelruimte? Het antwoord is positief voor zowel eindig-dimensionale ruimtes als voor niet-separabele ruimtes. Het onopgeloste probleem voor het geval daar tussenin, dus voor separabele Hilbert ruimtes staat bekend als het invariante deelruimte probleem.

Professor B.S. Yadav van de Indian Society for History of Mathematics in Delhi heeft de afgelopen 25 jaar veel over het onderwerp gepubliceerd en geeft hier een historisch overzicht.

The invariant subspace problem is the simple question: "Does every bounded operator T on a separable Hilbert space H over $\mathbb{C}$ have a non-trivial invariant subspace?" Here non-trivial subspace means a closed subspace of H different from $\{0\}$ and different from H . Invariant means that the operator T maps it to itself. The problem is easy to state, however, it is still open. The answer is 'no' in general for (separable) complex Banach spaces. For certain classes of bounded linear operators on complex Hilbert spaces, the problem has an affirmative answer.

It seems unknown who first stated the

problem. It apparently arose after Beurling [1] published his fundamental paper in *Acta Mathematica* in 1949 on invariant subspaces of simple shifts, or after von Neumann's unpublished result on compact operators which we shall discuss in the sequel.

A history of the problem

Let H be any complex Hilbert space and T a bounded operator on H . An eigenvalue λ of T clearly yields an invariant subspace of T , namely the kernel of $T - \lambda$. So if T has an eigenvalue, the problem is solved (the special case where T is multiplication by λ being trivial). However, not every bounded operator T on a complex Hilbert space has an eigenvalue. For example, the shift operator T on ℓ^2 , the Hilbert space of all square-summable sequences of complex numbers, defined by

$$Tx = (0, x_0, x_1, \dots)$$

for each vector $x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell^2$, does not have any eigenvalue. However, if H is finite-dimensional, then of course every T on H has an eigenvalue, so the problem is solved for finite dimensional complex vector spaces.

Next, suppose H is infinite-dimensional but not separable. Let T be a bounded operator on H . Take a non-zero vector x and consider the closed subspace M generated by the vectors $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$. Then M is invariant under T and obviously $M \neq \{0\}$. Moreover, M does not coincide with H as this would contradict that H is non-separable. Thus every operator T on a non-separable infinite-dimensional complex Hilbert space H has a non-trivial invariant subspace.

What remains to be examined is actually the invariant subspace problem: does every bounded operator T on an infinite-dimensional separable complex Hilbert space H have a non-trivial invariant subspace?

The solution for Banach spaces

During the annual meeting of the American Mathematical Society in Toronto in 1976, the young Swedish mathematician Per Enflo announced the existence of a Banach space and a bounded linear operator on it without any non-trivial invariant subspace. Enflo was visiting the University of California at Berkeley at that time. However, nothing appeared in print for several years and it was only in

1981 that he finally submitted a paper for publication in *Acta Mathematica*. Unfortunately the paper remained unrefereed with the referees for more than five years, though its manuscript had a world-wide circulation amongst mathematicians. This happened, as they say, because the paper was quite difficult and not well written. The paper was ultimately accepted in 1985 and it actually appeared in 1987 with only minor changes: [4]. However, he had announced his construction of the counterexample earlier in the “Seminaire Maurey-Schwarz (1975–76)” and subsequently in the “Institute Mittag-Leffler Report 9 (1980)”; see [2], [3].

In the meantime, C.J. Read, following the ideas of Enflo, also constructed a counterexample and submitted it for publication in the *Bulletin of the London Mathematical Society*. The paper was quickly refereed and it appeared in July 1984 [5] breaking the queue of backlog for publication. A shorter version of this proof was published again by Read in 1986. He also constructed in 1985 [6] a bounded linear operator on the Banach space ℓ^1 without non-trivial invariant subspaces.

The temptation on the part of Read to have precedence over Enflo for solving the problem was considered professionally unethical by many mathematicians. Particularly, because his work was essentially based on ideas of Enflo. For example, the French mathematician Bernard Beauzamy also sharpened the techniques of Enflo and produced a counterexample. He presented it at the Functional Analysis Seminar, University of Paris (VI-VII) in February, 1984. But he declined to publish his result in the *Bulletin of the London Mathematical Society*, although the Editors offered him the same

facilities as they did to Read. Beauzamy's paper appeared later in June 1985 in *Integral Equations and Operator Theory*.

The ℓ^1 -example of [6] was further simplified by A.M. Davie, as can be found in Beauzamy's book (1988).

One should not get the impression that all counterexamples which have been produced so far are based directly or indirectly on the techniques developed by Enflo. As a matter of fact, a series of papers written by Read himself after his first paper in 1984 makes a further significant contribution to the subject. For example, the counterexample that he constructed on ℓ^1 in 1985 is characteristically different from and simpler than Enflo's, and could be counted as a major achievement. Again, in yet another paper in 1988, Read constructed a bounded linear operator on ℓ^1 which has no invariant closed sets (let alone invariant subspaces) other than the trivial ones. Not only is this a stronger result, it also gives rise to a new situation: suppose that the invariant subspace problem is solved in the negative one day (as in the case of Banach spaces), one would ask a next question: “Does every bounded operator have a non-trivial invariant closed set?”

Building on his earlier work, Read published in 1997 an example of a quasinilpotent bounded operator (i.e., $\lim \|T^n\|^{1/n} = 0$) on a Banach space without a non-trivial invariant subspace. The same result is nicely described in [8].

Von Neumann's unpublished result

John von Neumann (unpublished) showed that every compact operator on a Hilbert space has a non-trivial invariant subspace. The first proof of this result was published by Aronszajn and Smith in 1954. The result was extended to polynomially compact operators by A.R. Bernstein and A. Robinson in 1966 using techniques from non-standard analysis due to Robinson. Halmos translated their proof into standard analysis. Interestingly, his paper appeared in the same issue of *Pacific Journal of Mathematics*, just after theirs. In 1967, Arveson and Feldman transformed the result in a still more general form by essentially chiselling the technique of Halmos: if T is a quasinilpotent operator such that the uniformly closed algebra generated by T contains a non-zero compact operator, then T has a non-trivial invariant subspace.



Per Enflo

The Lomonosov technique

The result of Arveson and Feldman was, in a sense, the climax of the line of action initiated by von Neumann. However, operator theorists were stunned in 1973 when the young Russian mathematician V. Lomonosov obtained a more general result:

If a non-scalar bounded operator T on a Banach space commutes with a non-zero compact operator, then T has a non-trivial hyper-

Normed linear spaces

A vector space X over the field $\mathbf{R}(\mathbf{C})$ of real (complex) numbers is called a normed linear space if each vector $x \in X$ has a ‘norm’ $\|x\| \in \mathbf{R}$, such that $\|x\| \geq 0$ and $\|x\| = 0$ if and only if $x = 0$, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ for each scalar α and $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for all x, y in X . Every normed linear space X is a metric space with the metric defined by $d(x, y) = \|x - y\|$. A Banach space is a normed linear space which is complete (as a metric space). A Hilbert space is a Banach space endowed with the additional structure of an inner product $\langle x, y \rangle$ such that the norm is related to the inner product by the equality $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$. By a bounded operator on a Banach space X one means a linear transformation of X to itself such that there exists a constant $K > 0$ for which $\|Tx\| \leq K\|x\|$ for all $x \in X$. The operator norm of a bounded operator T , denoted $\|T\|$, is by definition $\|T\| := \sup\{\|Tx\|/\|x\|; x \neq 0\}$. A normed space X is called separable if it has a countable dense subset.

Cyclic vectors

A vector x in H is called a cyclic vector of a bounded operator T on H if the closure of the span of all $T^n x$ equals H . The operator T has no non-trivial invariant subspaces if and only if every non-zero vector is a cyclic vector of T : if a vector x is non-cyclic, then the closure of the span of all $T^n x$ is a non-trivial invariant subspace of T . And if M is a non-trivial invariant subspace, then every non-zero vector in M is non-cyclic.



C.J. Read

invariant subspace (this means, a subspace which is invariant under every operator that commutes with T).

This theorem was quite exciting for many reasons:

- I. Lomonosov used a brand-new technique (namely, an ingenious use of Schauder's fixed point theorem), entirely different from the line of action followed hitherto by other mathematicians.
- II. His result was much stronger than what was known so far: every polynomially compact operator has a non-trivial invariant subspace.
- III. His theorem highlighted another, stronger, form of the 'invariant subspace problem': "Does every bounded linear operator on a Hilbert space have a non-trivial hyperinvariant subspace?"
- IV. Many mathematician tried to find alternative proofs of Lomonosov's theorem, say, by replacing the use of Schauder's fixed-point theorem by the Banach contraction principle, but the theorem stands as it was even today. M. Hilden, however, succeeded in proving its special case that every non-zero compact operator has a non-trivial hyperinvariant subspace without using any fixed-point theorem.

In fact, Hilden assumed without any loss of generality a non-zero compact operator also to be quasinilpotent: if a non-zero compact operator is not quasinilpotent, then it must have a non-zero eigenvalue, and hence the eigenspace corresponding to this eigenvalue is a non-trivial hyperinvariant subspace. Hilden exploits the quasinilpotence of the compact operator to finish his proof.

- V. Initially it was felt that Lomonosov's

theorem might lead to a solution of the general 'invariant subspace problem' in the affirmative. However, seven years after his result, in 1980, Hadvin-Nordgren-Radjavi-Rosenthal gave an example of an operator that does not commute with any non-zero compact operator.

- VI. A number of extensions and applications of Lomonosov's theorem have been obtained by several mathematicians.

Normal-like non-normal operators

A bounded operator T on a Hilbert space H is called 'normal' if it commutes with its adjoint T^* . It is called 'subnormal' if it is the restriction of a normal operator to an invariant subspace, and 'hyponormal' if $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ for all $x \in H$. It is not difficult to see that normality $\Rightarrow$ subnormality $\Rightarrow$ hyponormality, but the converse is true in neither case. An important result in operator theory, known as Fuglede's theorem, states that if T is a normal operator and $S \in B(H)$ is such that $TS = ST$, then $T^*S = ST^*$.

Fuglede's theorem implies that every non-scalar normal operator on a Hilbert space has a non-trivial hyperinvariant subspace. To show the existence of non-trivial invariant (hyperinvariant) subspaces of non-normal operators satisfying certain nice conditions has been a fascinating subject for operator theorists. One of the most striking results in this direction was due to Scot Brown who showed in 1978 that every subnormal operator has a non-trivial invariant subspace. J.E. Thomson (1986) found a simple and elegant proof of Brown's result. Consider the Hilbert space $L^2(\mu)$, where μ is a suitable positive Borel measure with compact support in the complex plane. Thomson makes a decisive use of the fact that a cyclic subnormal operator can be modelled as a multiplication by z on the closure of the space of all polynomials in $L^2(\mu)$. (A bounded operator T on the Hilbert space H is called cyclic if there exists $x \in H$ such that the closure of the span of $\{T^n x; n \geq 0\}$ equals H .) As a matter of fact, Thomson's method gives rise to a more general result:

Let A be a subalgebra of $L^\infty(\mu)$ containing z and let H be a subspace of $L^2(\mu)$. If H contains constants and is invariant for A , then there is a non-trivial subspace of H that is A -invariant.

In 1987 Brown, extending his techniques and using descriptions of hyponormal operators due to M. Putinar (1984), proved that every hyponormal operator with the spectrum having a non-empty interior has a non-trivial invariant subspace.

Lastly we mention yet another significant result in this direction due to Brown, Chevreau and Percy: every contraction whose spectrum contains the unit circle has a non-trivial invariant subspace.

Heritages of the problem

For an operator T one denotes by $\text{Lat}T$ the lattice of all invariant subspaces of T , with set-inclusion as partial order. For a general operator T , it is extremely difficult to describe $\text{Lat}T$, particularly when we do not know whether there exists a bounded operator T for which $\text{Lat}T$ is isomorphic to the lattice $\{0, 1\}$ (this is the invariant subspace problem!). However, for certain special operators T , namely the shifts and the Volterra operators, the structure of $\text{Lat}T$ is completely known. We now describe this, and discuss the role of shifts and their invariant subspaces in the structure theory of operators, as initiated by G.-C. Rota.

Let $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ be an orthonormal basis for H . The operator U on H such that $Ue_n = e_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$ is called the (forward) shift operator. A simple calculation shows that its adjoint S is the backward shift, given by $Se_0 = 0$ and $Se_n = e_{n-1}$ for $n \geq 1$. We shall be concerned with

Compact operators

An operator T on a Banach space X is called 'compact' (completely continuous) if for every bounded subset $A \subset X$, the closure $\overline{T(A)}$ of its image is compact in X . An operator T is called 'polynomially compact' if there exists a polynomial p such that the operator $p(T)$ is compact. Every compact operator is obviously polynomially compact, but the converse is not true; examples can be found in Paul Halmos' *A Hilbert space problem book* (1967).

A bounded operator T is 'quasinilpotent' if $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$.

We say that a subalgebra of the algebra of bounded operators on X is *uniformly closed* if it is closed with respect to the operator norm.

the following concrete representations of U and S .

Let $L^2 = L^2(C, \mu)$ be the Hilbert space of all square-integrable functions defined on the unit circle C , where μ is the normalized Lebesgue measure on C (i.e. $\mu(C) = 1$). If for each integer n , $e_n = e_n(z) = z^n$, then $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ is an orthonormal basis of L^2 . The Hardy space H^2 is the closed subspace of L^2 generated by the vectors $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$. We see that the multiplication by $e_1(z) = z$ on H^2 is U .

As a second example, let ℓ^2 be the Hilbert space of all square-summable complex sequences $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Then U and S on ℓ^2 appear as $Ux = (0, x_0, x_1, \dots)$ and $Sx = (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Beurling's theorem and its ramifications

In 1949, A. Beurling characterized the invariant subspaces of the shift operator on the Hardy space H^2 on the unit circle. His result is:

If M is an invariant subspace of the shift operator on the Hardy space H^2 on the unit circle C , then there exists an inner function ϕ on C (this means that ϕ is measurable and $|\phi(z)| = 1$ almost everywhere on C), such that $M = \phi H^2$.

If both ϕ_1 and ϕ_2 are such functions, then ϕ_1/ϕ_2 is equal to a constant function almost everywhere.

As Beurling's theorem showed an interplay between the theory of functions and the operator theory, it has naturally had

numerous ramifications both in harmonic analysis and functional analysis. Mainly there have been three directions:

- I. Replacing the Hardy space of scalar-valued functions by the Hardy space of vector-valued functions;
- II. Extending Beurling's characterization to the Hardy space of scalar-valued functions on the torus;
- III. Viewing (i) and (ii) in the sense of de Branges, which puts Beurling's theorem as well as its vector-valued generalizations due to Halmos (1961) and others in a more general setting.

Weighted shifts

Shifts form an important class of operators. They have been rightly called the 'Building Blocks' of operator theory. Many important operators are, in a sense, 'made up' of shifts, for example, every pure isometry is a direct sum of shifts and every contraction with powers strongly tending to zero is a 'part' of a backward shift.

More importantly, shifts serve as an unending source of counterexamples. Read uses a shift to construct his counterexample of a bounded operator on a Banach space without a non-trivial invariant subspace.

Let H be a Hilbert space with an orthonormal basis $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ and let $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of non-zero complex numbers. Consider the weighted forward shift T_w :

$$T_w e_n = w_{n+1} e_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

and the corresponding weighted backward shift S_w :

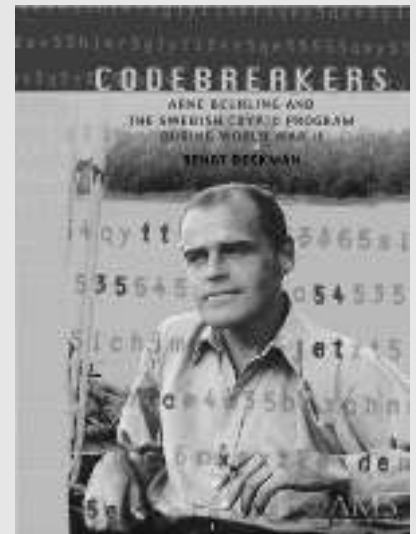
$$\begin{aligned} S_w e_0 &= 0, \\ S_w e_n &= \bar{w}_n e_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

A weighted forward shift is the adjoint of a weighted backward shift and vice-versa. Note that a subspace M is invariant under an operator T if and only if its orthogonal complement $M^\perp$ is invariant under T^* . Hence determining $\text{Lat} S_w$ is equivalent to determining $\text{Lat} T_w$.

Let M_n denote the closed subspace spanned by

$$\{e_0, e_1, \dots, e_n\}.$$

Then $M_n \in \text{Lat} S_w$ for all n . Under certain conditions on the weight sequence w , one



The work of the Swedish mathematician Arne Beurling (1905–1986) has been pace-setting in many directions in abstract harmonic analysis, functional analysis and operator theory. When conscripted in 1931, he reconstructed Swedish cryptology ingeniously leading to information vital for the survival of Sweden during the World War II. Although appointed professor at the Institute of Advanced Study, Princeton in 1954, he always missed the right social environment and would not even apply for a Green Card. A review of this book appeared in September 2003 in the Notices of the AMS. *Codebreakers: Arne Beurling and the Swedish Crypto Program during World War II*, Bengt Beckman, AMS 2002, ISBN 0-8218-2889-4.

can show that $\text{Lat} S_w$ consists of M_n 's only: if a weight sequence $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ is such that $\{|w_n|\}$ is monotonically decreasing and

$$\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|^2 < \infty,$$

then every non-trivial invariant subspace in $\text{Lat} S_w$ is some M_n .

This result is due to N.K. Nikolskii (1965). The case $w_n = 2^{-n}$ was obtained in 1957 by W.F. Donoghue.

Volterra integral operators

Consider the Volterra integral operator V defined on $L^2(0, 1)$ by



John von Neumann (1903–1957)

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

for all $f \in L^2(0,1)$. This operator is another one whose invariant subspaces have been characterized. For each $\alpha \in [0,1]$, let

$$M_\alpha = \{f \in L^2(0,1) : f = 0 \text{ almost everywhere on } [0,\alpha]\}.$$

Obviously, $M_\alpha \in \text{Lat}V$ for all $\alpha \in [0,1]$. In fact,

$$\text{Lat}V = \{M_\alpha : \alpha \in [0,1]\}.$$

This was proven by J. Dixmier (1949) in case of the real space $L^2(0,1)$. W.F. Donoghue and M.S. Brodskii independently settled it in 1957 for the complex space $L^2(0,1)$.

These results have been extended to integral operators K on $L^2(0,1)$ defined by

$$(Kf)(x) = \int_0^x k(x,y)f(y)dy, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

for all $f \in L^2(0,1)$, where $k(x,y)$ is a square-integrable function on $[0,1] \times [0,1]$. The characterization of $\text{Lat}K$ in this

case may be used to obtain a functional-analytic proof of the famous classical Titchmarsh convolution theorem (G.K. Kalisch, 1962).

Rota's models of linear operators

By a part of an operator T on a Hilbert space H , we mean the restriction $T|_M$ of T to an invariant subspace M of T .

Let $l^2(H)$ denote the Hilbert space of all square-summable sequences $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ in H . Take a bounded sequence $w = (w_n)$ of positive real numbers. The backward shift S_w on $l^2(H)$ is given by

$$S_w x = (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots, w_{n+1} x_{n+1}, \dots).$$

Put $\beta_0 = 1$ and $\beta_n = w_1 w_2 \dots w_n$, for $n \geq 1$. One has the following result.

Suppose T is a bounded operator on H and $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{-2} \|T^n\|^2 < \infty$.

Then T is similar to a part of S_w on $l^2(H)$ in the following sense: define $A : H \rightarrow l^2(H)$ by $Ax = \{\beta_0^{-1}x, \beta_1^{-1}Tx, \beta_2^{-1}T^2x, \dots\}$, then

the image M of A is closed and $S_w A = AT$.

This implies M is an invariant subspace of S_w and T is similar to $S_w|_M$.

If the spectral radius,

$$r(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\|T^n\|^2)^{1/n},$$

of T is less than 1, then the conditions of the above result are satisfied for the constant sequence $w_n = 1$. This observation leads to the result of G.-C. Rota (1960):

If a bounded operator T on a Hilbert space H has spectral radius $r(T) < 1$, then T is similar to a part of the standard backward shift on $l^2(H)$. In particular, this holds for a strict contraction T , i.e. if $\|T\| < 1$.

Since any bounded operator can be 'scaled' so as to be a strict contraction, Rota's work yields a reformulation of the invariant subspace problem: Are the minimal non-zero invariant subspaces of backward shifts one-dimensional?

More details on this work initiated by Rota may be found in [7].

References

- 1 A. Beurling, 'On two problems concerning linear transformations in Hilbert space', *Acta Math.* **81** (1949), 239–255.
- 2 P. Enflo, 'On the invariant subspace problem for Banach spaces', *Seminaire Maurey-Schwarz* (1975–1978).
- 3 P. Enflo, 'On the invariant subspace problem for Banach spaces', *Institute Mittag-Leffler, Report* **9** (1980).
- 4 P. Enflo, 'On the invariant subspace problem for Banach spaces', *Acta Math.* **158** (1987), p. 213–313.
- 5 C.J. Read, 'A solution to the invariant subspace problem', *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), p. 337–401.
- 6 C.J. Read, 'A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1 ', *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), p. 305–317.
- 7 B.S. Yadav and R. Bansal, 'On Rota's models of linear operators', *Rocky Mountain J. of Math.* **13** (1983), p. 253–256.
- 8 P. Rosenthal, 'Featured Review of C.J. Read's *Quasinilpotent Operators and the Invariant Subspace Problem*', MR 98m:47004.

Hajo Broersma

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
hajo.broersma@durham.ac.uk

Henri Ruizenaar

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
h.w.a.ruizenaar@math.utwente.nl

Promotionele activiteiten op de Universiteit Twente

Handelsreizigers in wiskunde

In dit artikel wordt een beschrijving gegeven van een masterclass voor leerlingen van 5 vwo die aan de Universiteit Twente werd georganiseerd. Het doel was om wiskunde onder de aandacht te brengen, met name de toepassingen van wiskunde en wiskunde als onderwerp voor het profielwerkstuk, en hiermee iets te doen aan het imago van wiskunde. De auteurs, die beiden in deeltijd werkzaam zijn aan de Universiteit Twente, zijn betrokken geweest bij de organisatie en dagelijkse begeleiding van deze masterclass.

Eén van de verplichte onderdelen van het examendossier in het vwo is het maken van een profielwerkstuk. De nadruk ligt hierbij op informatievaardigheden, onderzoeksvaardigheden en communicatieve vaardigheden. In de afgelopen jaren is gebleken dat de meeste leerlingen hierbij niet voor het vak wiskunde kiezen. Redenen daarvoor zouden kunnen zijn:

- onbekendheid met het grote aantal mogelijkheden binnen wiskunde
- onbekendheid met de vele toepassingen van wiskunde
- onzekerheid met betrekking tot het eigen kunnen binnen wiskunde
- het hoge abstractieniveau binnen het vak wiskunde
- minder goede schoolervaringen van de leerling met wiskunde
- het algemene imago van wiskunde.

Om leerlingen te stimuleren hun profielwerkstuk in wiskunde te maken, heeft de Universiteit Twente het initiatief genomen — in

navolging van eerdere initiatieven in Nijmegen — voor een masterclass. De masterclass helpt vwo leerlingen bij het maken van dat werkstuk en laat ze kennis maken met de mogelijkheden en toepassingen van het vak wiskunde. En minstens zo belangrijk: de masterclass biedt aan leerlingen de mogelijkheid om de sfeer binnen de Universiteit Twente te leren kennen en aan de universiteit een mogelijkheid om het imago van wiskunde te verbeteren.

Van start

In het schooljaar 2003/2004 is de Universiteit Twente gestart met de masterclass *Spelen met grafen*. Deze masterclass bood leerlingen uit de omliggende regio met een bèta-profiel de mogelijkheid om kennis te maken met het vak wiskunde en tegelijkertijd te werken aan het wiskunde-profielwerkstuk.

De masterclass bestond uit zeven bijeenkomsten van een middag op de Universiteit Twente in de periode februari tot en met april. Er werd door achttien leerlingen uit 5 vwo deelgenomen en er waren drie stafleden en vier student-assistenten betrokken bij de begeleiding. De eerste drie middagen waren bestemd voor een algemene inleiding in de graafentheorie aan de hand van het Zebra-boekje *Grafen in de Praktijk*.¹ Hieruit werden achtereenvolgens enkele onderwerpen behandeld, zoals graafkleuringen, netwerken en kortste paden. Een deel van de stof werd daarbij als huiswerk meegegeven en de volgende keer behandeld. Tijdens de derde bijeenkomst illustreerden stafleden in korte presen-

taties vier mogelijke specialisaties en vragenstellingen:

- a. roosterproblematiek; hoe kunnen (middelbare school) lesroosters met behulp van graafentheorie gemodelleerd en opgesteld worden?
- b. speltheorie; hoe bepaal je winnende strategieën bij *Nim*-spelen?
- c. het handelsreizigersprobleem; hoe bepaal je optimale rondritten met behulp van graafentheorie?
- d. graafrepresentatie; hoe kun je een graaf omzetten in een getal en vice versa?

Hieruit konden de leerlingen kiezen waar ze de tweede helft van de masterclass aan wilden werken en hun profielwerkstuk over wilden schrijven. Om een indruk te geven hoe deze onderwerpen aan de orde werden gesteld in de masterclass gaan we verderop in dit artikel dieper in op het derde onderwerp.

Nadat iedere leerling een specialisatie had gekozen kon deze worden uitgediept in de daaropvolgende drie middagen. In de zevende bijeenkomst gaven alle deelnemende leerlingen in paren een presentatie over hun werkstuk en specialisatie. De masterclass werd afgesloten met het profielwerkstuk, dat eerst in concept werd besproken en becommentarieerd door de begeleiders en vervolgens kon worden ingeleverd. De uiteindelijke beoordeling berustte bij de respectievelijke vwo docenten.

Het handelsreizigersprobleem

In de eerste bijeenkomst van de tweede helft van de masterclass werd het probleem van de



Tijdens de zevende bijeenkomst (6 april) van de masterclass gaven de leerlingen, onder belangstelling van de hiervoor uitgenodigde wiskundedocenten, een presentatie over hun specialisatie en het profielwerkstuk.

handelsreiziger uitgelegd: het vinden van een optimale rondrit (gemeten in totale afstand of totale kosten) door alle te bezoeken plaatsen of steden. In vraag- en antwoordsessies met één begeleider en zes leerlingen en aan de hand van werkbladen werd vervolgens ingegaan op diverse aspecten van het probleem. Hierbij werden de leerlingen zoveel mogelijk gestimuleerd om zelf met de relevante ideeën te komen. Aan bod kwamen de modellering van dit probleem met behulp van grafentheorie, andere problemen die te reduceren zijn tot hetzelfde model, en de overeenkomsten en verschillen met eerder behandelde stof over het vinden van kortste routes en optimale netwerken.

Het handelsreizigersprobleem is een van de bekendste representanten van de klasse van NP-moeilijke problemen. Dat het handelsreizigersprobleem een NP-moeilijk probleem is impliceert onder andere dat iedere bekende exacte methode om het probleem voor n steden op te lossen een benodigde hoeveelheid rekenstappen (en dus rektijd) vergt die exponentieel groeit in n (en dat dit benodig-

de aantal rekenstappen niet polynomiaal in n kan zijn, tenzij $P = NP$). Deze complexiteit van het handelsreizigersprobleem werd, wederom in groepjes, op een intuïtieve manier benaderd. Er werd hierbij uiteraard niet diep op de technische aspecten ingegaan. In plaats daarvan kwamen de leerlingen er door eigen verkenningen achter dat in de praktijk het beste gezocht kan worden naar heuristieken. Dit zijn snelle algoritmen die gemaakt zijn om een goede benadering van de optimale oplossing (rondrit) te vinden. Ze zijn gebaseerd op een aantal vuistregels die voortkomen uit een verdere analyse van het probleem: Welke keuzes zijn goed en welke zijn slecht (op het eerste gezicht) voor het vinden van een goede rondrit?

Na deze inleidende discussies werden de leerlingen gestimuleerd om zelf een heuristiek te ontwerpen en te beschrijven. Vervolgens was het tijd voor een kritische analyse: Voor welke voorbeelden en situaties werkt de heuristiek ogenschijnlijk goed en voor welke slecht? Geeft dit aanleiding tot het bijstellen of veranderen van de heuristiek?

Thuisopdrachten

Als voorbereiding op de vervolgbijeenkomsten en voor de nodige achtergrond bij het profielwerkstuk, kregen de leerlingen aan het eind van elke bijeenkomst een aantal thuisopdrachten mee. Als voorbeeld noemen we de opdracht om via internet te zoeken naar informatie over het handelsreizigersprobleem

en naar een verwant spel over een reis rond de wereld van Sir William Rowan Hamilton uit de negentiende eeuw.

Elk van de vervolgbijeenkomsten begon met een bespreking van de voortgang van de diverse groepjes en een behandeling van eventuele vragen en opmerkingen. Met behulp van werkbladen gingen de leerlingen vervolgens in op bekende theorie en heuristieken met betrekking tot het handelsreizigersprobleem. Er is en wordt op dit gebied bijvoorbeeld veel onderzoek gedaan naar onder- en bovengrenzen voor de lengte van een optimale rondrit. Deze grenzen kunnen helpen bij de analyse van heuristieken. Daarvan zijn er een groot aantal ontwikkeld, waarvan een aantal zeer geschikt is voor het behandelen tijdens een masterclass als deze. Ze zijn veelal gebaseerd op eenvoudige principes. Zo is er een heuristiek die uitgaat van een optimale opspannende boom (behandeld in *Grafen in de Praktijk* en tijdens de inleidende middagen) waarin alle lijnen dubbel gebruikt worden om ervoor te zorgen dat er een rondrit gemaakt wordt. Vervolgens wordt gezocht naar goede lijnen om van hieruit een geschiktere rondrit te construeren, zoals aangegeven in figuur 1.

Een tweede voorbeeld zijn heuristieken die vanuit een (willekeurige) rondrit-oplossing proberen om via verwisselingen van paren lijnen een verbetering te vinden, zoals aangegeven in figuur 2.

Slechts op één manier kan met twee andere verbindingen in plaats van t_4t_3 en t_1t_2 de rondrit hersteld worden. Merk daarbij op dat op een van de tussenliggende segmenten van de rondrit de richting wordt omgedraaid; zie het rechterplaatje in de figuur. Uit de aanname dat de afstanden tussen de punten symmetrisch zijn (dat wil zeggen dat de kosten om een bepaalde weg af te leggen in beide richtingen hetzelfde zijn), volgt dat de totale lengte van de nieuwe rondrit kleiner is dan die van de oude rondrit als voor de lengten van de verbindingen geldt:

$$L(t_3t_2) + L(t_4t_1) < L(t_4t_3) + L(t_1t_2)$$

Het bovenstaande kan worden uitgebreid naar drietallen en verder.



Figuur 1 Constructie van een kortere rondrit uitgaande van een optimale opspannende boom die dubbel doorlopen wordt.



Figuur 2 Verwisseling van een paar lijnen in een graaf. De halve cirkels stellen de rest van de graaf voor, die hierbij onveranderd blijft.

In de bijeenkomsten werden de leerlingen gestimuleerd na te denken over de achtergronden van de bekende heuristieken: Hoe zijn ze tot stand gekomen? Hoe is men op dit idee gekomen? Waarom wordt er voor deze aanpak gekozen? Zijn er voorbeelden te vinden waarvoor een bepaalde heuristiek slechte oplossingen genereert? Zo werd het inzicht vergroot dat het handelsreizigersprobleem intrinsiek moeilijk op te lossen is. Bovendien werd hiermee de indruk weggenomen dat wiskunde een afgerond geheel is. Het was verrassend te zien hoe weinig de leerlingen bewust waren van het feit dat wiskunde een actief en levend vakgebied is!

Ervaringen en vervolg

Twee weken na deze zeven bijeenkomsten is door elke groep een concept profielwerkstuk ingeleverd, waarop commentaar is gegeven door de begeleiders. De inleverdatum voor de profielwerkstukken verschilt per school, maar de masterclass had een vooraf vastgelegde looptijd. Daarom was de mogelijkheid om ook de definitieve versie van het profielwerkstuk door de begeleiders van de masterclass te laten becommentariëren gelimiteerd. Groepen die gebruik wilden maken van deze mogelijkheid, alvorens hun werkstuk in te leveren bij hun eigen vakdocent, moesten het profielwerkstuk voor 1 mei 2004 inleveren. De meeste groepen hebben hiervan dankbaar gebruik gemaakt. De begeleiders hebben veel lof voor de inzet van de leerlingen, en zowel de leerlingen als de begeleiders kijken tevreden terug op deze eerste masterclass.

Op 22 februari 2005 is een nieuwe cyclus van zeven masterclasses voor 5 vwo scholieren gestart. Het aantal onderwerpen is met een drietal uitgebreid. Nieuwe onderwerpen zijn afkomstig uit de financiële wiskunde, de numerieke wiskunde en de telecommunicatie.

Informatie: www.schoolsite.utwente.nl/tw

Referentie

- 1 H.J. Broersma, *Grafen in de Praktijk*, Boekje 14 in the serie Zebra (2002), Epsilon Uitgaven, Utrecht, ISBN 90-5041-078-2.

In mei 2004 is het handelsreizigersprobleem voor alle 24.978 plaatsen in Zweden opgelost: er is een pad met een lengte van 855.597 TSPLIB eenheden (ongeveer 72.500 kilometer) gevonden en het is bewezen dat een korter pad niet bestaat. Dit is momenteel het grootste opgeloste handelsreizigersprobleem; het vorige record van 15.112 plaatsen in Duitsland uit april 2001 is hiermee gebroken.



Leila Mohammadi

EURANDOM

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

mohammadi@eurandom.tue.nl

Column Differentiëren en integreren

Het mechanische leven

Steeds vaker worden er buitenlanders op Nederlandse universiteiten en hogescholen aangesteld. Soms is het een beroemdheid die voor een hoogleraarspositie wordt gestrikt, maar vaker zijn het aio's. Hoe zit het eigenlijk met de *inburgering*? Hoe ervaart deze internationale instroom de Nederlandse normen en waarden?

Leila Mohammadi kwam vanuit Iran naar Nederland als assistent in opleiding bij Sara van de Geer aan de Universiteit Leiden. Ze is inmiddels gepromoveerd en is nu onderzoeker bij EURANDOM in Eindhoven.

Als je van Iran naar Nederland verhuist, ondergaat je leven een zeer grote verandering. Gelukkig ben ik erg geholpen door mijn mentor professor Van Zwet en zijn vrouw om me hier thuis te voelen. Ik denk dat er zonder hen, zonder dit soort mensen veel minder uitwisseling van studenten uit andere culturen kan bestaan. Ik zou me in elk geval de eerste tijd zeer ongelukkig hebben gevoeld.

Ik ben geboren in Shiraz. Daar heb ik ook eerst gestudeerd. Voor het behalen van mijn Masters of Science diploma in de statistiek verhuisde ik naar Isfahan.

Bijna alle jonge mensen in Iran willen naar de universiteit. Het toelatingsexamen is heel zwaar, voor alle universiteiten. Er is veel onderlinge competitie. Ik kan me niet voorstellen dat er nog een land bestaat waar de studenten zo met elkaar moeten concurreren.

De meeste Europeanen hebben een verkeerd beeld van Iran. Iran is geen Arabisch land; het lijkt er zelfs niet op. Heel wat mensen zijn niet praktiserend mohammedaans, en ook gaat er slechts een kleine fractie naar de moskee. In tegenstelling tot wat men vaak denkt, is een mohammedaan niet verplicht om naar de moskee te gaan. Heel wat mensen belijden hun geloof, overigens net als hier in Nederland, gewoon thuis. Iraanse vrouwen bedekken hun gezicht niet; de meeste van hen dragen geen chador. Zij kunnen dansen op feesten, ze luisteren veel naar muziek en genieten van hun leven. De meeste Iraanse vrouwen zouden nooit in het Westen willen leven. Dit is niet omdat zij zich geen modern leven wensen, maar omdat het leven hen in Iran goed bevalt. Zij voelen geen behoefte om te verhuizen.

De meeste Iraanse vrouwen accepteren het al lange tijd niet meer om beperkt te worden in hun bewegingsvrijheid en willen niet door mannen gedomineerd worden. Door aan hun kinderen, jongens én meisjes, een goede opvoeding en goede scholing te geven, vechten ze voor gelijke rechten. Het is interessant, dat bijna 65 procent van de geaccepteerde kandidaten aan de universiteit vrouw is.

Het verrast me telkens weer wanneer mensen mij hier vragen of we internet hebben in Iran. In bijna elk gezin in Iran staat wel een computer en internet is nu een veelgebruikt hulpmiddel in het dagelijkse

leven. Desondanks is er wel een groot verschil: het Nederlandse leven lijkt zich bijna machinaal te voltrekken. Iedereen heeft hier een computer en velen zitten er ook de hele dag achter. Zo verspilt men vaak een groot deel van de dag. Alles wat met een machine gedaan kan worden, gebeurt hier ook machinaal, zoals het kopen van treinkaartjes, het stempelen van een strippenkaart in de tram of het doen van boodschappen op internet.

Bijna alle informatie wordt tegenwoordig op het internet gezocht. Als je iemand iets vraagt, wordt je naar *Google* doorverwezen. Het overmatig gebruik van de computer leidt er toe dat mensen steeds minder met elkaar praten. Er is te weinig gevoel tussen de mensen. In Iran doet men nog veel met de hand en worden machines niet voor alles ingezet.

In Iran is er voor elk artikel zoals brood, vlees, groente en melk een kleine winkel. Mensen moeten meer moeite doen voor hun dagelijks leven, maar ze besteden daardoor ook meer tijd aan het praten met elkaar. Dit blijkt ook nog in een ander opzicht. In het Westen kennen de mensen hun burens soms niet eens meer. Men kan alleen maar aan zichzelf denken. Ik denk soms, dat de mensen zelf ook voelen dat ze wat missen, en dat ze daarom hun boodschappen weer in kleine winkels doen.

Ik vind de oudere Nederlanders vriendelijker dan de jongere, omdat zij aardiger zijn en zich minder mechanisch gedragen. Hier zegt men dikwijls: "Ik voel me niet goed, ik wil alleen zijn", "Ik wil dit weekend helemaal alleen zijn". In Iran heb ik deze uitspraken nog nooit gehoord. En hoe vaak zien wij niet, als er op televisie een geldbedrag wordt gewonnen en de presentator vraagt: "Wat wilt u doen met het geld?", dat er wordt geantwoord: "Ik ga er lekker van op vakantie."

De media hier en daar zijn niet te vergelijken. In Iran worden de media geheel gedomineerd door de islam. Maar behalve dat, zijn er veel meer educatieve programma's, bijvoorbeeld over naaien, breien en bakken of taalcursussen. In Nederland wordt de helft van de zendtijd besteed aan de reclames. Er zijn erg veel amusementsprogramma's en te weinig educatieve. Ik vind vooral de films op de Nederlandse televisie verschrikkelijk. De geklede vrouwen op de Iraanse televisie zijn echt veel leuker en aantrekkelijker dan de naakte vrouwen op de Nederlandse televisie.

De gevoelens die men in het Westen voor dieren heeft, stel ik zeer op prijs. Ik vind het erg goed dat men hier voorzichtig is met geld en dat alles wordt berekend. In Nederland zijn de mensen heel eerlijk en rechtschapen. Het lijkt wel, of men nooit de noodzaak voelt om te liegen. Als men iets niet leuk vindt, dan zegt men het gewoon. Dit vind ik heel bijzonder.





Pieter Moree

Max Planck-Institut für Mathematik
Vivatsgasse 7
53111 Bonn
Duitsland
moree@mpim-bonn.mpg.de

Robert Triest

J. Burggraafstraat 11
1018 WA Amsterdam
r.j.triest@chello.nl

Jack Triest

Windmolen 10
1135 KD Edam
jt.triest@quicknet.nl

Mysterieuze regelmatige lichamen

In het Gallo-Romeins Museum van Tongeren in België staat permanent een oude bronzen dodecaëder tentoongesteld. Niemand kent het praktisch nut van dit voorwerp. De dodecaëder in Tongeren is niet de enige in zijn soort: in het Rheinisches Landesmuseum in Bonn bevindt zich een vergelijkbaar object.

Pieter Moree en Jack en Robert Triest speculeren over de betekenis van deze kunstvoorwerpen. Pieter Moree is getaltheoreticus en wetenschappelijk secretaris van het Max-Planck-Instituut te Bonn, Jack Triest, geschiedkundige, is werkzaam in de logistiek, en zijn broer Robert, wiskundige, informaticus en beeldend kunstenaar, is werkzaam als software ontwikkelaar.

Het laatste, dertiende boek van *De Elementen* van Euclides, geschreven omstreeks 300 voor Christus, eindigt met de constructie van vijf regelmatige lichamen. Dat zijn de *tetraëder* (4 driehoeken), de *kubus* (6 vierkanten), de *octaëder* (8 driehoeken), de *dodecaëder* (12 vijfhoeken) en de *icosaëder* (20 driehoeken). De eerste drie worden ge-

zien als Pythagoreïsch en waren ook bekend bij de Egyptenaren. De laatste twee worden gezien als ontdekkingen door Plato's academie.

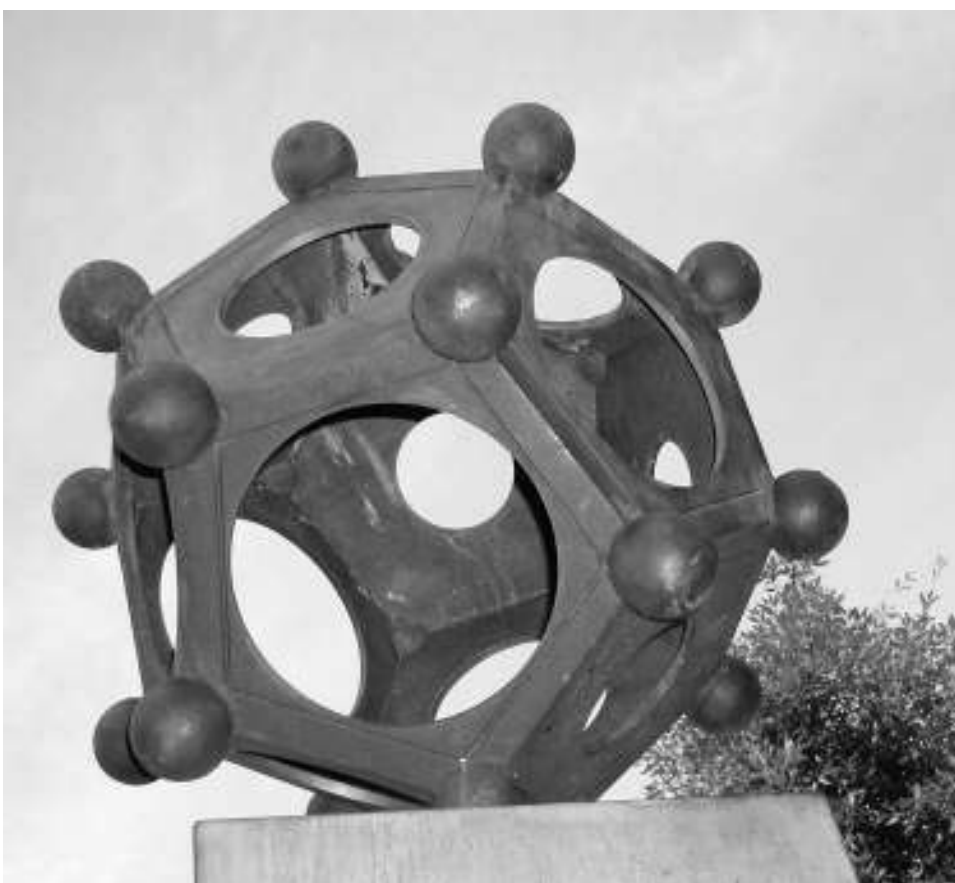
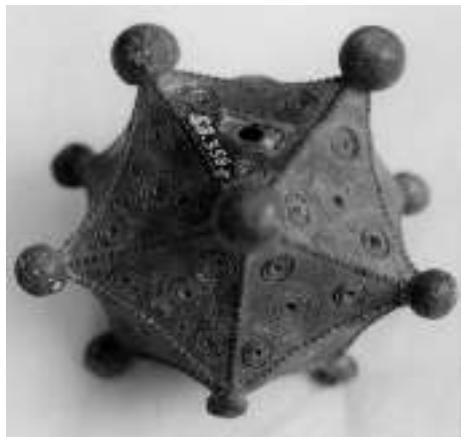
De steentijd

Al veel eerder, tijdens de steentijd, heeft de mens regelmatige lichamen gemaakt. In Schotland zijn meer dan 425 stenen ballen gevonden die gemaakt zijn tijdens de overgang van de late steentijd naar de vroege bronstijd, tussen 3000 en 1500 voor Christus. Archeologen vonden deze granieten ballen in bijvoorbeeld graven, een oude kerk, oude Romeinse kampen en bij de muur van Hadrianus. Eerst werd verondersteld dat de stenen als wapens en knotsen dienst deden, maar de vondst van steeds meer regelmatige lichamen heeft dit min of meer ontkracht. De ballen zijn gemaakt met dezelfde techniek als de Neolithische granieten stenen bijlen en ze hebben dezelfde bewerkingen die we op megalithische bouwwerken tegenkomen. De meeste ballen hebben 6 vlakken (zoals bij een kubus) en zijn gedecoreerd met grote of kleine vlakken. Er

zijn ook ingewikkelder ballen bestaande uit meer dan 6 vlakken gevonden, bijvoorbeeld een dodecaëder. Verder hebben veel ballen versieringen, zoals lijnen, cirkels en spiraalvormen. Niet alle ballen zijn afbeeldingen van wiskundige veelvlakken, want sommige ballen zijn nog helemaal rond met alleen spiraalmotieven of een heleboel puntige knoppen. Ongeveer 390 van deze ballen zijn gecatalogiseerd door het *National Museum of Antiquities of Scotland*.

UGRO's

Er zijn ook voorbeelden van regelmatige lichamen uit de Gallo-Romeinse tijd. Hier in noordwest Europa was dat de periode van de Eburonen en de Nerviërs. De Eburonen waren een Keltisch-Germaanse stam uit de ijzertijd. Ze bewoonden het gebied tussen waar nu Aken, Luik, Maastricht en Belgisch Limburg te vinden zijn. De Nerviërs, een Indo-Europese volksstam, bevolkten vanaf 400 voor Christus de streek tussen Denker en Zenne. Ze deden aan landbouw en kleinveeteelt. Caesar kwam in 57 voor Chris-



Eerste kolom: twee gekerfde stenen ballen (eerste foto: Nat. Mus. of Antiquities of Scotland; uit: Purse, 1974, p. 46, tweede foto: Marischal Mus., Aberdeen (copyright University of Aberdeen), dodecaëdrische UGR0 (foto: Robert Triest), icosaeëdrische UGR0 (foto: B. Artmann, Reinisches Landesmuseum, Bonn). Tweede kolom: dodecaëdrische bal (foto: Graham Challifour; uit: Critchlow, 1979, p. 132) en het standbeeld in Tongeren (foto: Robert Triest)

tus in hun gebied aan. Hun regelmatige lichamen staan bekend als de *Gallo-Romeinse Pentagon-Dodecaëders* (ook wel UGRO: Unidentified Gallo-Roman Object). Ze waren populair in de tijd van 300–100 voor Christus. Er zijn zo'n negentig van dergelijke objecten gevonden, waaronder zelfs een icosaeëder (UGRO2). De UGRO2 was in de Bonnse bodem beland (in Arloff om precies te zijn) en bevindt zich nu in het archief van het *Rheinisches Landesmuseum* te Bonn. De UGRO's zijn gevonden in de Romeinse provincies langs de Rijn en verder in Engeland, Frankrijk en Zwitserland. Ze zijn gemaakt van gegoten brons. Het origineel, met slechts twee van de twaalf openingen, ook wel productiegaten genoemd, werd in was gemaakt. Daaromheen werd een stevige mal gemaakt en vervolgens werd de mal gebakken waardoor de was smolt en uit de mal vloeide. De mal waarin het origineel als overgebleven ruimte zit wordt volgegaten met vloeibaar brons. De overige tien gaten zijn er later ingeboord en de hoekkogels zijn door verhitting aan het object gelijmd. In één geval stonden er op de zijden de tekens van de die-nriem. Dit is in overeenstemming met een

verklaringsidee waarbij de UGRO de van de aarde zichtbare sterrenhemel representeert. Dit klinkt wat vergezocht, maar voor de Oude Grieken waren de regelmatige lichamen heel bijzonder. Plato (428–348 voor Christus) bijvoorbeeld spreekt in zijn *Timaeus* [3] over de vijf regelmatige lichamen. Het element vuur bestaat volgens hem uit deeltjes die de vorm van tetraëders hebben, lucht uit octaëders, water uit icosaeëders en de grond natuurlijk uit kubussen. Het dodecaëder is volgens Plato door de schepper voor 'het geheel' gebruikt. Hij zou figuren gecreëerd hebben op de zijden van de dodecaëder. Mensen met nog meer fantasie en zonder respect voor het *scheermes van Occam*, zien UGRO's als objecten die door buitenaardsen naar hier met UFO's gebracht zijn en zo zijn er in de loop der tijd heel wat implausibele verklaringen aangevoerd (waarvan een aantal op de wanden rond de UGRO in het *Rheinisches Landesmuseum* te zien is). Naar onze mening blijft het mysterie van de UGRO's vooralsnog onopgelost.

Het Griekse idee dat de harmonie van de regelmatige lichamen zijn weerslag moet heb-

ben in het tastbare universum heeft door de eeuwen heen wetenschappers aangesproken. De beroemde astronoom Kepler probeerde bijvoorbeeld de afstanden van de planeten tot de zon te verklaren met een model van in elkaar bevatte regelmatige lichamen [6]. Het duikt ook weer op in recente pogingen om de geometrie van het universum te bepalen [7].

UGRO's zijn al een aantal malen besproken in de recreatieve wiskundeliteratuur, zie [1] en [2]. Zo publiceerde F. Lindemann, die de transcendentie van π bewees, er al rond 1900 over [4]. Meer archeologische details zijn te vinden in [4] en [8]. Tenslotte wijzen we de lezer op een internetpresentatie van dit artikelje met additioneel beeldmateriaal door Robert Triest [9]. Imitatie-UGRO's zijn te verkrijgen bij Het Gallo-Romeins Museum te Tongeren. 

Met dank aan prof. B. Artmann, dr. Ursula Heimberg (Rheinisches Landesmuseum) en dr. L. Kilford voor hun medewerking en aanstekelijke enthousiasme.

Referenties

- 1 B. Artmann, A roman icosahedron discovered, *Amer. Math. Monthly* 103 (1996), 132–133.
- 2 B. Artmann, Roman Dodecahedra, *The Math. Intelligencer* 15 (1993), 52–53.
- 3 N. Gier and G. Adele, *Plato's Timaeus and the Regular Polyhedra*, <http://www.class.uidaho.edu/ngier/polyhedra/goc.htm>
- 4 M. Guggenberger, Die römischen Dodekaeder. *Eine Gesamtdarstellung*, Diplomarbeit, Universität Innsbruck, 1999, pp. 229.
- 5 T.V. Hightower, *The harmony of the spheres*, <http://home22.inet.tele.dk/hightower>
- 6 J. Kepler, The harmony of the world (Translated from the Latin), *Memoirs of the American Philosophical Society* 209, *American Philosophical Society*, Philadelphia, PA, 1997.
- 7 J. Levin, *How the universe got its spots. Diary of a finite time in a finite space*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002.
- 8 R. Nouwen, De Gallo-Romeinse Pentagon-Dodecaëder: Mythe en Enigma, Publicaties van het Gallo-Romeins Museum Tongeren (België), Nr. 45, Hasselt 1993.
- 9 R. Triest, <http://home.tiscali.nl/~mwdugago> Dodecahedron

Danny Beckers

Dorpsstraat 26-A

6582 AN Heumen

d.beckers@inter.nl.net

Oud Archief

Het decimale stelsel heeft zijn populariteit in grote mate te danken aan Simon Stevin. Hij publiceerde een handleiding, waarin de nadruk lag op het rekenen met decimale breuken. Stevins handleiding werd in meerdere talen vertaald. Danny Beckers, onderzoeker op het gebied van geschiedenis van wiskunde, verklaart het succes van Stevin.

In 1585 verscheen bij de Leidse boekdrukker en boekverkoper Christoffel Plantijn een boekje van 36 pagina's. Dit boekje, waarvan het titelblad hieronder is afgebeeld, was getiteld *De Thiende* en was geschreven door Simon Stevin (1685-1820), een ingenieur/wiskundige uit Brugge die zich tijdens de tachtigjarige oorlog bij de legers van prins Maurits van Oranje had gevoegd.

De invloed van *De Thiende* was enorm. Hetzelfde jaar nog verscheen een Franse editie (*La Disme*), door Stevin zelf verzorgd. Een Engelse vertaling volgde in 1608 (*Dime: the Art of Tenths*). Zowel de Nederlandse editie als de vertalingen kenden verscheidene drukken.

De publicatie van Stevins boekje is de geschiedenis in gegaan als het moment waarop de decimale breuken werden geïntroduceerd. In *De Thiende* stelde Simon Stevin voor om na de gehelen een nul in een rondje te plaatsen. Na de tiende delen volgde een 1 in een rondje. Na de honderdste delen een 2 in een rondje etcetera. Bij optelling en aftrekking werden de indices (in het rondje) bovenaan gezet en de getallen zodanig in kolommen gegroepeerd dat de cijfers van dezelfde orde onder elkaar kwamen te staan. Bij de vermenigvuldiging werden de tussenresultaten steeds genoteerd in de kolom die hoorde bij de som van de indices in de rondjes. Volkomen terecht beweerde Stevin dus op het titelblad van *De Thiende* dat hij een methode bood om met breuken te rekenen alsof het gehele getallen waren. Daartoe moest hij natuurlijk wel afrondingen accepteren: op pagina 18 en verder stelt hij

dat die afrondingen in de praktijk helemaal geen probleem opleveren omdat we sowieso afronden bij het aflezen van de meetapparatuur.

Voor onze zestiende-eeuwse voorouders was het gebruik van tiendelige breuken helemaal niet vanzelfsprekend. Elke stad en streek had een eigen maten- en gewichtenstelsel. Dergelijke stelsels waren niet tientalig onderverdeeld. Stevin was zich daar terdege van bewust en had *De Thiende* daar ook op ingericht. De pagina's 10 tot en met 21 bevatten de uitgewerkte regels voor het rekenen met decimale breuken. Pagina's 22 tot en met 36 behandelden de toepassingen van de tiendelige breuken voor een aantal beroepen: landmeters, wijnroeiërs, tapijtmeters, kooplieden, etcetera. Stevin bood in die laatste pagina's een aantal praktische wenken voor het aanpassen van de praktijk op het werken met de tiendelige breuken. Zo deed hij bijvoorbeeld voor de elstok van de tapijtmeter de suggestie om op één van de zijden (waar niet de stadsmaten stonden) de el in tiende delen te verdelen en die tiende delen ieder weer in tien. Na het rekenwerk op deze tiendelige maten te hebben verricht kon vervolgens op deze dubbel-gemerkte meetlat eenvoudig de overeenkomstige waarde in de stadsmaten worden afgelezen.

Het waren met name deze praktische aanpassingen op de maatstok die maakten dat Stevins *De Thiende* veel aftrek vond. De methode die Stevin introduceerde om decimale breuken te noteren was niet helemaal nieuw en het was zeker niet de handigste die voorhanden was. Te Augsburg was bijvoorbeeld in 1530 reeds een boekje verschenen van de hand van Christoff Rudolff die bij een berekening van rente-op-rente de successieve bedragen had aangeduid met een decimale notatie waarbij een schuine streep dienst deed als scheidingsteken tussen de gehelen en de tiende delen, precies zoals bij ons vandaag

de dag de komma wordt gehanteerd. Noch Rudolff, noch de vele anderen die een notatie introduceerden, besteedden echter aandacht aan de wijze waarop met de tiendelige breuken gerekend moest worden en hoe ze in de praktijk hanteerbaar werden gemaakt.

Stevin was de eerste die een systematische verhandeling schreef over het gebruik van de decimale breuken met praktische wenken voor gebruik in zijn (niet tientallige) tijd. Daardoor werd *De Thiende* een groot succes. Gewestelijke en plaatselijke belangen maakten dat een universeel, of zelfs maar tientalig matenstelsel tot de onmogelijkheden behoorden. Maar het was bijvoorbeeld aan *De Thiende* te danken dat de maatstok van de zeventiende-eeuwse Westeuropese landmeters tientalig werd onderverdeeld. 

Een complete versie van *De Thiende*, inclusief een aantal vertalingen, is te vinden op <http://home.wxs.nl/~hopfam/ThiendeMenu.html>



Gieljan de Vries

Kennislink

Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek

Postbus 93138

2509 AC Den Haag

gieljan.de.vries@kennislink.nl

Interview Nationale PR-medewerker wiskunde

Stop de pers: Nieuwe wiskunde!

Natuurlijk is wiskunde uitdagend, breed toepasbaar en vooral leuk, maar hoe vertel je dat aan het algemene publiek? Ionica Smeets (1979) studeerde in januari 2005 af aan de Technische Universiteit Delft en werkt sinds december 2004 als nationale PR-medewerkster voor de wiskunde. Onder andere via de populairwetenschappelijke website Kennislink.nl en de Wiskunde PersDienst gaat ze de wiskunde voor het voetlicht brengen. Gieljan de Vries, redacteur van Kennislink.nl, vraagt haar hoe ze die taak invulling wil geven.

Ionica Smeets vindt wiskunde een hartstikke leuke wetenschap. Natuurlijk zijn er vast veel meer mensen met die mening. Waarom hebben we Ionica Smeets eigenlijk nodig? “Jammer genoeg heeft wiskunde onder Nederlanders een saai imago en weet bijna niemand wat je ermee kunt. Daarom trekt wiskunde steeds minder studenten. Een beetje rechtenfaculteit heeft meer eerstejaars dan het totaal aantal wiskunde-studenten in Nederland!

Tegelijkertijd zijn er wel wiskundigen nodig, en niet alleen in het vakgebied zelf. Andere disciplines, maar ook bedrijven staan te springen om goed opgeleide wiskundigen. Redenen genoeg om iets aan het imago te doen en zo meer studenten te winnen.”

Hoe ga je als nationale PR-medewerker te werk? “Mijn opdracht is ‘actieve nieuwsgaring en -verspreiding over de wiskunde en haar toepassingen’. Aan de ene kant schrijf ik zelf nieuwsberichten over allerlei interessant wiskundig onderzoek, maar ik wil ook een correspondentennetwerk opzetten van wiskundigen die leuk over hun eigen vakgebied kunnen vertellen. Ik ga veel congressen bezoeken om de mensen en hun onderzoek te leren kennen.”

Wat voor boodschap wil je uitdragen? “Wiskundigen zijn helemaal niet saai! Het cliché van hun saaiheid wil ik proberen te doorbreken. Ze reizen zich gek en werken op de meest uiteenlopende plekken. Zo leren ze een hoop mensen kennen. En natuurlijk kunnen ze meer dan alleen sommen maken: in allerlei bedrijven zie je wiskundigen aan de

slag. Wiskundigen zijn vaak heel veelzijdig: niet alleen handig met formules, maar ook heel muzikaal aangelegd of weg van het theater. Mensen denken zó vaak dat je na een studie wiskunde óf leraar op de middelbare school kunt worden, of het onderzoek in moet. Ik wil die andere kanten van de wiskunde laten zien. Al zou je daarmee maar één of twee scholieren overhalen om wiskunde te gaan studeren, dat is toch prachtig?”

Dan ben je wel erg aan het zieltjes winnen. Kan de wiskunde, met haar lange traditie, daar niet zonder? “Nee, daar kan de wiskunde niet zonder. Jammer genoeg is het algemene beeld van wiskunde niet zo positief, ondanks die mooie lange traditie. De meeste mensen hebben nog steeds het idee dat wiskunde alleen maar moeilijk is en iets voor aan de universiteit. Het is aan ons, wiskundigen, om ook de andere kanten te laten zien. Voor ik begon als pr-medewerker waren daar natuurlijk ook al mensen mee bezig. Dat was allemaal vrijwilligerswerk naast hun gewone banen, het is goed dat ik echt een dag per week alleen hiermee bezig kan zijn.”

Op wie ga je je richten? “Gelukkig zijn er al een paar initiatieven waar ik op aan kan sluiten. Ik schrijf ondertussen *items* voor de *Wiskunde PersDienst* (WPD). Dat is een *online service* die journalisten en andere geïnteresseerden op de hoogte houdt van nieuws in de wiskunde. Als ik een nieuwtje heb en dat aan redacties aan wil bieden is de WPD daarvoor een prima kanaal. Op termijn zou ik ook graag stukken voor kranten maar ook voor bladen als *Natuurwetenschap & Techniek* of *Quest* schrijven.

Voor de website *Kennislink.nl* schrijf ik nu al wekelijks stukken. Kennislink is een populairwetenschappelijke website die wetenschap voor een groot publiek toegankelijk wil maken. Ze doen dat door de wetenschap achter het nieuws en het nieuws in de wetenschap te verslaan. Op hun wiskundepagina kan ik nieuws- en achtergrondartikelen kwijt.”

Goodwill voor wiskunde in de maatschappij

Als Nationale PR-medewerker heb je een vlotte pen nodig. Hoe zit het daarmee? “Ik schrijf sinds 2003 voor Delta, de Delftse universiteitskrant. Voor hen maakte ik onder andere een grote reportage over de Studiegroep *Wiskunde met de Industrie 2003*. Toen ik tijdens mijn studie een twee maanden in Amerika zat heb ik een stuk geschreven over het verschil tussen de wiskunde-studies in beide landen. En natuurlijk werkte ik op de middelbare school al voor de schoolkrant; ik schreef die eigenlijk in mijn eentje vol.

Natuurlijk kan ik niet in mijn eentje al het nieuws in de wiskunde verslaan. Ik werk maar één dag in de week als nationale PR-medewerker, veel te weinig om bijvoorbeeld ook maar een fractie van de promoties te behandelen. Daarom wil ik wiskundigen oproepen korte populaire stukken te schrijven over hun eigen onderzoek. Vaak zijn wiskundigen te bescheiden, denken ze dat niemand geïnteresseerd is in hun onderzoek. Maar als je enthousiast opschrijft wat je doet, in eenvoudige woorden, dan vinden juist niet-wiskundigen het vaak interessant om te zien wat die wiskundigen nu eigenlijk doen.”

Wat is je eigen wiskundige achtergrond? “Ik ben pas afgestudeerd aan de TU Delft. Mijn scriptie ging over de kwaliteit van benaderingen met kettingbreuken; lekker theoretisch en abstract, dat ligt me wel. Ik heb veel bewondering voor mensen die goed zijn in het oplossen van praktische problemen, maar zelf houdt ik toch meer van stellingen en bewijzen.”

Hoe kwam je vanuit je studie bij deze functie uit? “Ik was voor Delta bezig met een reportage over de Studiegroep *Wiskunde met de*

Industrie 2003. Daar liep ik Mark Peletier tegen het lijf, lid van de taakgroep die op zoek was naar kandidaten voor de functie. Na dat gesprek heb ik een sollicitatiebrief gestuurd en mocht ik op gesprek komen. We hebben eigenlijk niet lang gesproken; ik zag de open opdracht die bij de baan hoort erg zitten en kon ook aangeven waarom ik dacht dat de baan bij me past. Ik was super zenuwachtig voor dat gesprek, maar hoorde later dat ze me juist heel relaxed vonden. Na een paar weken hoorde ik dat ik halverwege december aan de slag mocht! Nu heb ik een werkplek aan het Mathematisch Instituut in Utrecht.”

Niet alleen maar PR-medewerker

Wil je nu de voorlichting en journalistiek in, of lonkt het onderzoek ook nog? “Het zijn allebei leuke richtingen! Het liefst zou ik een dag in de week als de nationale wiskunde-PR doen en daarnaast promoveren. Ik hoop in september te beginnen als aio. De richting? Eigenlijk vind ik allerlei wiskunde leuk, maar een abstract onderwerp lijkt me leukste uitdaging.”

Wat doe je naast wiskunde en journalistiek? “Onder andere de publiciteit voor *Theater Schuurkerk* in Maassluis. Daar heb ik — na veel inpraten op mijn afstudeercommissie en de theaterdirectie — mijn afstudeerpraatje op het podium gehouden. De lokale krant van Maassluis had er zelfs een itempje over. Later bleek dat een van de administratiemedewerkers aan de TU Delft uit Maassluis kwam, waardoor dat stuk ook nog eens terugkwam naar de universiteit! Naast theater promoten en bezoeken ben ik nu bezig aan een project aan de Universiteit van Amsterdam om te inventariseren wat bedrijven willen van afgestudeerde wiskundigen.”

Het project Nationale PR-medewerker wiskunde is een gezamenlijk initiatief van het Koninklijk Wiskundig Genootschap (KWG), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraars (NVvW), en de populairwetenschappelijke website *Kennislink.nl*. Behalve door het KWG en de NVvW wordt het mede gefinancierd door de onderzoeksscholen Stieltjes en MRI, het Freudenthal Instituut en het programma Wiskunde Toegepast van de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO) en de Technologiestichting STW. ←

Informatie

i www.wiskgenoot.nl/watbiedt/natpr.html
e smeets@math.uu.nl



Ionica Smeets

Marinus A. Kaashoek*Afdeling Wiskunde, FEW**Vrije Universiteit**De Boelelaan 1081**1081 HV Amsterdam**ma.kaashoek@few.vu.nl***Henk van der Vorst***Mathematisch Instituut**Universiteit Utrecht**Postbus 80010**3508 TA Utrecht**vorst@math.uu.nl*

Kick-off wiskundecusters

Op donderdag 21 april 2005 organiseerde NWO de startbijeenkomst van drie nieuwe wiskundecusters. Daarmee deed een omvangrijke nieuwe financieringsvorm van het wiskundeonderzoek zijn intree. De twee samenstellers van de OOW-nota 'Nieuwe dimensies, ruimer bereik', verschenen in 2002, waarin clustervorming werd bepleit, wonden de kick-off meeting bij. Op persoonlijke titel doen ze verslag.

De Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), met name het gebiedsbestuur Exacte Wetenschappen, heeft zich de laatste jaren zeer ingespannen om in samenwerking met de Nederlandse wiskundigen middelen te verwerven ten einde de financiële positie van het wiskundeonderzoek te verbeteren. De centrale vraag daarbij was: "Hoe zorgen we er voor dat de wiskunde in Nederland zijn nationale taken op hoog niveau kan blijven vervullen?"

Het bereik van de wiskunde heeft zich in de laatste decennia enorm uitgebreid. Waren vroeger alleen de klassieke bèta-wetenschappen afnemers van geavanceerde wiskunde, tegenwoordig vinden de modernste wiskundige technieken ook hun weg in de financiële sector, telecomunicatie, de biologie, medische techniek, sociale wetenschappen, economie en datamanagement. Om adequaat op deze ontwikkeling in te spelen heeft de nieuwe generatie van onderzoeksleiders die de laatste jaren is aangetreden, meer middelen nodig dan de eerste geldstroom nu biedt. Daar komt bij dat de voortdurend achterblijvende instroom van wiskundestuden-

ten, een dalend budget vanuit de eerste geldstroom en een krimpende personeelsbezetting met zich meebrengt. Deze ontwikkeling is bedreigend voor de positie van Nederland als kennisland.

Drie jaar geleden organiseerde het Overleg Onderzoekscholen Wiskunde (OOW) samen met de NWO Advies Commissie Wiskunde in het hoofdgebouw van VNO-NCW in Den Haag een mini-symposium onder de titel "De toekomst van het wiskundeonderzoek in Nederland". De locatie was met opzet zo gekozen: midden in de Haagse wereld, midden in het maatschappelijk veld. Tijdens dit symposium werd de nota *Nieuwe dimensies, ruimer bereik* gepresenteerd. De inhoud was tot stand gekomen in overleg met de Akademie Raad voor Wiskunde en met vertegenwoordigers van de Nederlandse wiskunde-instituten.

In de OOW-nota wordt een beeld geschetst van de ambities en mogelijkheden van het wiskundeonderzoek in Nederland vanuit een nationaal perspectief. Uitgangspunt is dat het voor de Nederlandse wetenschap en economie noodzakelijk is dat Nederland aanwezig is in de voorhoede van het internationale wiskunde onderzoek. De nota mondde uit in een pleidooi voor een gerichte versterking van het wiskundig onderzoek en deed daartoe een aantal concrete voorstellen. Omdat in de optiek van de nota onderzoek en onderwijs nauw verweven zijn, waren enkele voorstellen ook gericht op het universitair onderwijs. Een van de voorgestelde maatregelen betrof de vorming van wiskundecusters.

Nu drie jaar later wordt een aanzienlijke impuls aan het wiskundeonderzoek in Ne-

derland gegeven door de vorming van enkele clusters.

Vele gremia waaronder de Koninklijke Akademie voor Wetenschappen, de Adviesraad voor Wetenschaps- en Technologiebeleid, het Forum voor Techniek en Wetenschap en de stuurgroep Sectorplan Natuurwetenschappen hebben aan dit initiatief meegewerkt.

NWO en de ministeries OCW en EZ brachten een bedrag van acht miljoen euro bijeen om de vorming van de eerste drie clusters te realiseren.

Wat is een wiskundecuster?

Een wiskundecuster is een effectieve dynamische onderzoeksgroep van significante omvang die wat kwaliteit en invloed betreft zich kan meten met vergelijkbare groepen in het buitenland, bijvoorbeeld met een Sonderforschungsbereich in Duitsland of een Fields Institute in Canada. Een cluster heeft de volgende taken:

- ontwikkeling van de eigen discipline,
- verkenning en ontwikkeling van nieuwe toepassingsgebieden,
- verrichten van excellent onderzoek en uitvoering van onderzoeksprojecten op 'raakvlakken',
- opleiding van jonge onderzoekers,
- transfer van kennis,
- participatie in nationale en internationale kennisnetwerken,
- masteronderwijs verzorgen gerelateerd aan het onderzoeksthema.

De verwijzing naar 'raakvlakken' betekent een aansluiting bij het koepelthema 'Wiskunde op



Eerste rij, van links naar rechts: Annejet Meijler (NWO, directeur gebied EW), Ute Ebert (CWI), Emile Aarts (voorzitter NWO exacte wetenschappen), Lex Zandee (NWO, coördinator wiskunde); tweede rij: Arjeh Cohen (DIAMANT), Arjen Doelman (NDNS), Klaas Landsman (GQT), Manoe Mesters (voorlichter NWO); derde rij: panelleden *Waarom wiskundeclusters*; Reinder van Duinen (voorzitter ESF), Joop Sistermans (voorzitter AWT), Lydia van Rietschote (panelleider, coördinator Innovatie OCW), Arie Kraaijeveld (voorzitter Bèta en Techniek); vierde rij: Robbert Dijkgraaf (UvA), Jan van Leeuwen (UU), Lex Schrijver (CWI), Renk Robergh (directeur generaal Hoger- en Beroepsonderwijs OCW) en Peter Nijkamp (voorzitter NWO), vijfde rij: Peter Nijkamp, receptie

raakvlakken' dat in 1998 door de Adviescommissie Wiskunde van NWO was gekozen als de strategische lijn voor de nationale ontwikkeling van het wiskundeonderzoek. Deze keuze werd ondersteund en in een breed kader geplaatst door het TWON-rapport *De toekomst van het wiskundeonderzoek in Nederland*, uitgebracht door de Akademie Raad Wiskunde in 1999. In de OOW-nota is de raakvlakken-visie uitgewerkt in zeven thema's: Wiskunde en levenswetenschappen, Wiskunde en beeldverwerking, Wiskunde en scientific computing, Wiskunde en netwerken, Financiële wiskunde, Wiskunde en dynamica, Wiskunde en theoretische natuurkunde.

Volgens de OOW-nota zou een wiskundecluster voor de uitvoering van bovengenoemde taken ruwweg gesproken de volgende samenstelling moeten hebben:

- vier à zes hoogleraren (de trekkers) met overlappende expertise,
- een viertal senior onderzoekers (UHD's) en een gelijk aantal junior onderzoekers (UD's),
- acht tot twaalf promotieonderzoekers en een aantal postdoctorale onderzoekers.

Met deze omvang en opzet draagt een wiskundecluster bij aan een aantrekkelijk carrièreperspectief voor jonge onderzoekers. De leeftijdsopbouw van het cluster moet een doorstroming van nieuw talent en nieuwe inzichten bevorderen. De expertise en excellentie nodig voor deelname aan internationale kennisnetwerken moet worden bewerkstelligd door het aanstellen van getalenteerde hoogleraren. Naast het verrichten van excellent onderzoek behoort ook transfer van kennis tot de taken van een onderzoekscluster. Men kan hierbij denken aan het houden van workshops en aan het organiseren en geven van mastercursussen, niet alleen ten behoeve van de eigen discipline, maar ook voor studenten en staf van verwante toepassingsgebieden.

Onderzoeksclusters dienen voldoende armslag te hebben voor het exploreren van nieuwe toepassingsgebieden. Multidisciplinaire onderzoeksprojecten zorgen voor uitstraling van kennis. Belangrijke nieuwe kennis wordt binnengehaald door de mogelijkheid internationale zwaargewichten tijdelijk aan te stellen op posities voor sabbatsverlof of middels een actief bezoekersprogramma.

Wat gebeurde er in Den Haag?

De hoofdmoot van het programma van de kick-off meeting was de presentatie van de eerste drie clusters,

- Discrete, Interactive and Algorithmic Ma-

thematics, Algebra and Number Theory (DIAMANT),

- Dynamiek van niet-lineaire systemen (NDNS),
- Genootschap voor Meetkunde en Quantummechanica (GQT),

door de respectievelijke hoofdaanvragers, de hoogleraren Arjeh Cohen, Arjen Doelman en Klaas Landsman. Een tweede onderdeel was een panel onder leiding van drs. Lydia van Rietschote (Coördinator Innovatie OCW) over de vraag: Waarom wiskundeclusters? De voorzitters van de stuurgroep Sectorplan Natuurwetenschappen (dr. Reinder van Duinen), het Platform Bèta en Techniek (drs. Arie Kraaijeveld) en de Adviesraad voor Wetenschaps- en Technologiebeleid (drs. Joop Sistermans) vormden het panel.

Er was van verschillende zijde veel belangstelling voor de feestelijke bijeenkomst. We zagen Rectores van Nederlandse universiteiten, Decanen van faculteiten, en andere universitaire bestuurders. Ook van de kant van de ministeries (OCW en EZ) en de pers was er de nodige belangstelling. Van de ongeveer honderdveertig aanwezigen kwam ruwweg de helft uit het wiskundeveld, inclusief het onderwijs. Het Forum voor Techniek en Wetenschap was met ongeveer veertig deelnemers uitstekend vertegenwoordigd.

De algehele houding was er een van interesse en positieve instelling. De presentaties van Cohen, Doelman en Landsman werden met belangstelling gevolgd en er werd door het panel ook met graagte naar gerefereerd. De hoofdaanvragers legden in hun presentaties elk de nadruk op verschillende aspecten van het wiskundeonderzoek. Cohen benutte de diamant onder andere als metafoor voor de schoonheid en het nut op lange termijn van de wiskunde; Doelman legde nadruk op maatschappelijk nut en interdisciplinariteit; Landsman benadrukte de interactie van onderzoek en opleiding met Cruijff als lichtend voorbeeld en Newton als elfde speler.

En hoe beantwoordden de panelleden de vraag naar het waarom van de wiskundeclusters?

- Kraaijeveld: De clustergedachte is uitstekend. Het gaat de universitaire verstar- ring tegen die dreigt bij versnippering en krimp. Wiskunde moet zich boeiend en dynamisch presenteren. Daar hebben we vanmiddag goede voorbeelden van gezien. Veel mensen hebben nog een op vroeger tijden gebaseerd oordeel van een niet maatschappelijk-georiënteerde discipline.
- Sistermans: Nederland is met die cluste-

ring op de goede weg, maar we zijn er zeker nog niet. Nederland geeft naar rato een factor twee minder uit aan wiskundig onderzoek dan het aanpalend buitenland. Dat is gevaarlijk voor een kennismaatschappij.

- Van Duinen: Deze clusteroperatie zou ook moeten worden uitgevoerd voor Scheikunde en Natuurkunde. Wiskundigen lopen met de samenwerking op gebied van onderzoek en onderwijs voor de troepen uit. Bewondering voor deze getoonde samenwerking, waarmee de wiskunde zich nu net zo coherent presenteert als de astronomie. Immense prestatie van de wiskundigen. Ze maken nu duidelijke keuzen. Nederland kan niet alles doen. Keuzen maken houdt ook in dat je zegt wat je niet doet. Mooi aspect van clustering.

De plenaire bijeenkomst werd afgesloten door prof. Peter Nijkamp, de voorzitter van NWO, en dr. Renk Roborgh, de directeur-generaal Hoger- en beroepsonderwijs OCW. Nijkamp beklemtoonde het belang van de wiskunde als onmisbare basis voor andere wetenschapsgebieden, een betoog dat moeiteloos aansloot bij het "ruimere bereik" van de wiskunde. Hij bespeurde in het verleden enige somberheid bij de wiskundigen en prees het nieuwe elan van nu. "*Up hill*, het dal was nu duidelijk gepasseerd."

Prof. Nijkamp, daartoe uitgenodigd door dr. Lex Zandee, de ceremoniemeester van de bijeenkomst, overhandigde Renk Roborgh het eerste exemplaar van het net verschenen NWO-boekje "Wiskunde clusters". Roborgh memoreerde in zijn dankwoord de eerste contacten met de wiskundigen als onderhandelingspartner en illustreerde dat beide partijen (de OCW-ambtenaren en de wetenschappers) aan elkaar moesten wennen voor wat betreft het gevoel van noodzaak en voor de mogelijkheden.

Inmiddels leeft het gevoel van noodzaak om wat voor de wiskunde te doen bij het ministerie. Men heeft zijn best gedaan om in de "krochten van de begroting" gaatjes te vinden en Roborgh toonde zich bereid om zich daar ook verder voor in te spannen. Hij meldde dat een omslag in het denken over wiskunde was bevorderd door een prachtige NSF-film over snaartheorie die door Teleac was uitgezonden, en hem zozeer had geboeid dat hij zijn kookactiviteiten geheel vergeten was, met on-aangename gevolgen voor de geplande maaltijd van die dag maar met een uitzonderlijk positief effect op het denken over de wiskunde binnen zijn afdeling de daarop volgende dagen. Een geanimeerde en feestelijke receptie besloot de bijeenkomst.

Waar staan we nu?

De instelling van een wiskundecuster vraagt de nodige voorbereiding en kan niet van de ene dag op de andere gerealiseerd worden. De OOW-nota kwam daarom met het voorstel een tijdshorizon van tien jaar in acht te nemen en te beginnen met de formatie van twee wiskundecusters. Bedenkt men dat de huidige clusters in omvang ongeveer twee maal zo groot zijn als de door het OOW geplande clusters dan liggen we aardig op schema. Over een aantal jaren zijn er hopelijk vijf clusters. Als we goed geluisterd hebben, lijkt de totstandkoming van twee additionele clusters tot de mogelijkheden te behoren. Het vraagt veel van de bestuurskracht van de Nederlandse wiskundigen en de hulp van NWO en GBE is onontbeerlijk.

Met de introductie van de nieuwe wiskundecusters doen de woorden 'hub' en 'node' hun intrede in het vocabulaire van de Nederlandse wiskundigen. De hub is het zwaartepunt van een cluster. Een groot deel van de wetenschappelijk staf van het cluster is werkzaam in de hub. Andere groepen binnen het cluster vormen een node. Groningen is de hub voor NDNS, Eindhoven voor DIAMANT en Utrecht voor GQT. Amsterdam-CWI en Amsterdam-VU zijn beide nodes voor

NDNS, Leiden is een node voor zowel NDNS als voor DIAMANT, Nijmegen is een node voor GQT, enz. Deze terminologie illustreert een belangrijk aspect van de clusters: een gestructureerde vorm van samenwerking over de grenzen van verschillende universiteiten heen. Deze vorm van samenwerking is terecht zeer geprezen door het panellid Van Duinen.

De prijzende woorden van Van Duinen hadden ook betrekking op het onderwijs. De clusters gaan, en dat kwam in de drie presentaties goed naar voren, een centrale rol vervullen in het onderwijs, en dan met name in het masteronderwijs. Op deze centrale rol hebben de wiskundigen overigens al mooi gepreludeerd door afgelopen jaar een krachtig begin te maken met het landelijk georganiseerde masteronderwijs, onder leiding van een Regieorgaan. De wiskunde heeft hier nationaal veel respect mee afgedwongen. Het succes van de clusters zal in de toekomst ook voor een belangrijk deel worden afgemeten aan hun rol als aanjagers voor grote delen van dit gezamenlijk georganiseerde masteronderwijs.

De totstandkoming van een cluster vereist een financiële impuls van de kant van de instellingen, in het bijzonder bij de hubs. Deze wordt meestal verleend in de vorm van vervroegde vervulling van vrijkomende posi-

ties (dakpanconstructies) en in nieuwe vaste plaatsen. Hiermee wordt een verbeterd carrièreperspectief tot stand gebracht.

De slotopmerkingen van de heer Roborgh laten zien hoe belangrijk de PR-taak voor de wiskunde is. Bedenk echter wel dat (zoals Robbert Dijkgraaf later op de dag opmerkte) die prachtige NSF-film een budget had van twee miljoen dollar, dus ongeveer het bedrag dat voor een periode van een jaar beschikbaar is voor de huidige wiskundecusters.

De Nederlandse wiskunde is buitengewoon veel dank verschuldigd aan dr. Annejet Meijler (directeur gebied EW) en dr. Lex Zandee (coördinator wiskunde), voor hun onvermoeide arbeid. Zonder hun niet aflatende inspanning en aansporing was deze mijlpaal niet bereikt. Beiden zijn zich bewust van het feit, misschien zelfs beter dan wie dan ook, dat deze startbijeenkomst door andere gevolgd moet worden. Het was goed signalen op te vangen die er op wijzen dat een dergelijk vervolg in het verschiet ligt. Voor het vervolg bevelen we extra aandacht aan voor die gebieden die in de OOW-nota als belangrijk worden genoemd voor Nederland en die toch binnen de Nederlands wiskunde bezig zijn te verdwijnen.



Boekbesprekingen

Book Reviews

Alle in de vijfde serie van het NAW verschenen boekbesprekingen zijn te vinden op onze webpagina.

Tevens staat daar een lijst met ter recensie aangeboden congresverslagen en eventueel andere boeken.

Indien u er prijs op stelt een van deze verslagen te bespreken, meld dit dan binnen een maand na verschijnen van dit nummer (bij voorkeur per e-mail) op onderstaand adres.

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.math.rug.nl/revwg/
e-mail: wgreview.win@tue.nl



D. Beckers

Het Despotisme der Mathesis

Hilversum : Uitgeverij Verloren, 2003

246 p., prijs €22,-

ISBN 90-6550-762-0

Je zou zeggen dat als het om de geschiedenis van de wiskunde gaat een bezoek in de periode 1750-1850 aan Nederland een typisch voorbeeld is van 'being at the wrong time at the wrong place'. De nieuwe wiskunde werd immers in die periode elders in Europa ontwikkeld. Toch is Danny Beckers erin geslaagd om over de wiskunde in Nederland in die periode een zeer onderhoudend en ook voor niet-wiskundigen goed leesbaar proefschrift te schrijven. Op basis van uitvoerig onderzoek laat Beckers zien dat er binnen de wiskundebeoefening in de ruime zin van het woord in de periode in kwestie in Nederland veel veranderde. Zo laat hij zien dat het Wiskundig Genootschap verschillende typen wiskundigen, die in de achttiende eeuw nog gescheiden opereerden, verenigde en er zich binnen het Genootschap een gemeenschappelijke ideologie ontwikkelde die met succes werd uitgedragen. Centraal stond daarbij de zuivere wiskunde als onmisbaar element in elke goede opleiding. Wiskunde werd verplicht voor iedereen en dus ook op de Latijnse scholen, waar voortaan ook de elite aan wiskundeles werd onderworpen. Het ging allemaal niet bij iedereen van harte, zoals de titel van het boek van Beckers aangeeft. Het is heel goed dat Beckers ons laat zien dat de geschiedenis van de wiskunde in Nederland meer omvat dan alleen de eerste en tweede gouden eeuw. Ook de periode daartussen is fascinerend. Een Nederlandse Bolyai of Abel in de periode in kwestie zou leuk geweest zijn, maar ook de mindere goden zijn belangrijk voor de wiskunde. De Gelder, Lobatto en anderen hielden het vuur brandend en hun leven, werk en maatschappelijke context zijn alleszins het beschrijven waard. De lezer die het boek nog niet in zijn bezit heeft dient daar op korte termijn wat aan te doen. Uw recensent is het geheel eens met Arnold Heertje die in zijn open briefwisseling in het Parool met Arnon Grunberg het boek van harte aan de bekende schrijver heeft aanbevolen.

T. Koetsier



D. Dieks, V. Icke, G.Y. Nieuwland, J. Ritzerveld, F. Takens

Commentaar op 'Waanwetenschap': de Tachtigjarige Oorlog van N.G. van Kampen

Utrecht: Epsilon, 2003

60 p., prijs €7,-

ISBN 90-5041-083-9

Waanwetenschap werd in deze kolommen in maart 2003 nogal negatief gerecenseerd. Ook elders werd niet diep op de inhoud ingegaan. De redactie van de Epsilonreeks verzocht enkele fysici en wiskundigen om inhoudelijk commentaar, en dit deeltje (met nummer 52a een soort compagnon van 52, namelijk *Waanwetenschap* zelf) is op te vatten als een bundeling van een vijftal (lange)

recensies die wat meer op de inhoud van *Waanwetenschap* ingaan, en waarvoor nog eens acht anderen om commentaar is gevraagd. De astronoom Jelle Ritzerveld voelt zich voornamelijk gesterkt in Van Kampen een medestander te hebben in zijn strijd tegen de bierkaai. Voor hem is het smullen geblazen in de hapklare onzin die Van Kampen opdist. Ook Vincent Icke kan zich goed verplaatsen in de woede van de emeritus. Hij heeft ook kritiek, zowel op de stijl ("hobbelig") als op de inhoud. Hij mist teveel echt gevaarlijke pseudo-wetenschap.

Van Kampens boutade lijkt zich echter vooral te richten op verkeerd begrip van statistiek, waarschijnlijkheidsrekening, statistische mechanica en kwantummechanica. De inleidende opsomming van onzinnigheden wil slechts "de lezer in de stemming brengen" voor de gedachte dat ook knappe koppen het spoor bijster kunnen raken.

Dennis Dieks besteedt onder meer aandacht aan het kansbegrip (relatieve frequentie) van Van Kampen en hij gaat ook in discussie met Van Kampen over de interpretatie van de kwantummechanica. De wiskundige G.Y. Nieuwland bespreekt de filosofische stellingnamen van Van Kampen. Hij vindt dat die te zeer het monopolie claimen op de correcte interpretatie van 'de werkelijkheid'.

F. Takens bespreekt onder meer de bekende paradox van Zeno over Achilles en de schildpad. Van Kampen begrijpt niet waarom daar nog zo over gepraat wordt, de theorie van oneindige reeksen is toch overbekend? Takens gaat er dieper op in, maar mist volgens mij waar het om draait, namelijk om onze gevoelsmatige voorstellingen van begrippen als tijd, ruimte, snelheid, positie en dergelijke. Door de introductie van allerlei wiskunde lijkt de paradox te verdwijnen, maar zij is niet echt weg, maar veranderd in een onverenigbaarheid van ons gevoel met de fysica en met de wiskunde van getallen en functies. Takens gaat ook in op Van Kampens kansbegrip.

Een laatste woord over beide boekjes. Extra aandacht van een redacteur had geen kwaad gekund. Nu wordt de lezer geconfronteerd met volstrekt onnodige tik- en spelfouten. Dat de ene auteur af en toe de spelling van voor 1954 aanhoudt en de ander bij herhaling over Bertrand Russel (met één l) spreekt, had niet gehoeven.

J.W. Nienhuys

I. Dolgachev

Lectures on Invariant Theory

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

220 p., prijs £30,-

ISBN 0-521-52548-9

Invariantentheorie is een gebied dat teruggaat tot halverwege de 19e eeuw, maar nog altijd in ontwikkeling is. Het bestudeert groepswerkingen op variëteiten—zo algemeen mogelijk—aan de hand van *invarianten*, veeltermen die door de werking van de groep onveranderd blijven. De oorsprong van de ideeën ligt al bij Cayley en Silverstone, die invarianten gebruikten bij hun studies naar moduli van krommen en oppervlakken.

Hoe dit in zijn werk gaat, en welke problemen daarbij komen kijken, is goed in te zien aan de hand van een voorbeeld. Stel dat we elk punt (x, y) in het complexe vlak C^2 willen identificeren met zijn gespiegelde in de oorsprong $(-x, -y)$. Deze spiegeling geeft een werking van Z_2 op het vlak. De invarianten onder de

ze actie zijn de polynomen in $C[X, Y]$ die dezelfde waarden hebben op elk paar punten. Het is snel in te zien dat deze invarianten voortgebracht worden door X^2, Y^2 en XY en dat de invariantenalgebra gegeven wordt door $C[X^2, XY, Y^2]$. Deze is op zijn beurt de functiering van een kegel $C[u, v, w]/(uw - v^2)$. We vinden dus dat de meetkundige banenruimte van deze actie de gedaante heeft van een kegel, singulier in de oorsprong.

Dit voorbeeld laat zien dat een mooie groepsactie nog steeds aanleiding kan geven tot minder mooie banenruimten, die zeker niet altijd de structuur van een variëteit hebben. Hoe en wanneer een banenruimte de structuur van een variëteit te geven is, is de hoofdvraag van invariantentheorie. Dit is vooral van belang bij het zoeken naar meetkundige moduli-ruimten, waar vaak uitgedeeld moet worden naar een lineaire groep symmetrieën.

Op dit gebied is een nieuw boek verschenen, gebaseerd op een serie colleges gegeven door Igor Dolgachev aan de universiteiten van Michigan en Harvard. Aan de opzet en de indeling is te merken dat de oorsprong in de collegezaal ligt, met veel voorbeelden en een didactische stijl. Helaas zijn er bij de redactie wat typen en zetfouten overgebleven, en heeft de lezer soms het gevoel dat hij iets mist omdat hij niet zelf in de collegezaal aanwezig is. De auteur begint met de behandeling van de klassieke gevallen van Hilbert, bouwt op naar de moderne theorie van Mumford, en besluit met een gedetailleerde beschouwing van voorbeelden waar de invariantentheorie in de praktijk voorkomt.

Hoewel dit boek zeker niet gericht is op de beginnende student, is het door zijn dynamische stijl en veelheid aan voorbeelden en opgaven een belangrijke aanvulling op standaardwerken zoals Mumfords *Geometric invariant theory* of Viehwegs recentere *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*.

R. Swierstra

C. Voisin

Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I & II

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

351 p., prijs £65,-

ISBN 0-521-80283-0

De twee boeken onder beschouwing gaan over de meetkunde van Kähler-manifolds. De twee belangrijkste onderwerpen in deze boeken zijn de variatie van Hodge-structuren en de theorie van algebraïsche cykels op Kähler-manifolds.

Met de variatie van Hodge-structuren wordt grofweg het volgende bedoeld: neem een familie van complexe compacte variëteiten, (bijvoorbeeld krommen of oppervlakken) met de extra eigenschap dat voor ieder willekeurig paar (A, B) van verschillende variëteiten in deze familie er een diffeomorfisme $\varphi : A \rightarrow B$ bestaat. Nu kun je cohomologiegroepen $H^i(A, Z)$ en $H^i(B, Z)$ definiëren. Deze cohomologiegroepen hangen alleen af van de topologie van A en B . Stel nu dat we ook nog eisen dat φ niet door analytische functies kan worden gegeven. We kunnen op een canonieke manier $H^i(A, Z) \otimes C$ en $H^i(B, Z) \otimes C$ schrijven als een directe som van vectorruimten $H^{p,q}$ van (p, q) -differentiaalvormen met $p + q = i$. Deze Hodge-decompositie hangt af van de analytische structuur en kan je informatie geven over hoe verschillend A en B zijn als analytische variëteiten, terwijl zij topologisch hetzelfde zijn. De Hodge-decompositie geeft je bijvoorbeeld informatie over deelvariëteiten van A en B (cykels genaamd).

De twee te recenseren boeken bevatten het materiaal van twee

cursussen gegeven aan eerste- en tweedejaars promovendi aan Parijs 6/7.

Het eerste deel begint met een opsomming van resultaten die bekend worden verondersteld. Deze resultaten komen voornamelijk uit de analyse. In het eerste deel worden verder nog de Hodge-decompositie, variatie van Hodge-structuren en cykels op Kähler-manifolds behandeld. Het tweede deel diept de laatste twee onderwerpen uit, en behandelt enige resultaten uit de topologie van algebraïsche variëteiten. De meeste resultaten die in het eerste deel worden behandeld kunnen als klassiek worden beschouwd.

Het tweede deel bevat een aantal belangrijke resultaten van Bloch, Griffiths, Mumford en Nori en verder veel resultaten van de auteur. Deze resultaten zijn tamelijk geavanceerd en een aantal is tamelijk recent. Als toepassing wordt het werk van de auteur en Mark Green met betrekking tot de Noether-Lefschetz-locus behandeld.

Over het algemeen is het eerste deel helder geschreven, het tweede deel is wat slordiger geschreven. De auteur kiest vaak voor een analytisch oogpunt, waar ook voor een iets algebraïsch oogpunt had kunnen worden gekozen.

Ieder van de 23 hoofdstukken bevat een aantal oefeningen variërend van redelijk eenvoudig tot zeer pittig. Een opmerkelijke oefening is II.3.1, waar de lezer wordt geacht te bewijzen dat een generiek kubisch oppervlak 27 lijnen heeft.

Het gedeelte dat over (de variatie van) Hodge-structuren gaat, behandelt voornamelijk gladde variëteiten. Wel wordt er getipt aan de theorie voor singuliere variëteiten en een gedeelte van de daarvoor noodzakelijke theorie opgebouwd. Het is jammer dat de auteur de theorie van gemengde Hodge-structuren niet verder heeft uitgewerkt.

De opmaak van de tekst is tamelijk slordig. Zo zijn bijvoorbeeld voorbeelden en opmerkingen cursief gedrukt, met als consequentie dat enkele pagina's vrijwel geheel cursief gedrukt zijn.

Voor de Franstalige versie zijn beide delen samengevoegd. Deze versie kost ongeveer de helft (voor niet-SMF-leden) of een derde (voor SMF-leden) van de Engelstalige versie. *R. Kloosterman*

of abstract regular polytopes is a special instance in the general framework of groups and incidence geometries. There are indeed numerous connections to other areas like buildings and diagram geometries. However, the theory of abstract regular polytopes has its own special features as becomes clear from the book under review.

The principal objective of the book is to give an up-to-date account of the theory of regular polytopes. The focus is on a description of the present state of the classification of locally toroidal polytopes. This classification is now almost complete due to numerous contributions of the authors over the last 15 years. Chapters 7-12, which cover about two thirds of the book, provide a uniform treatment of their main techniques and results. Although the initial problem can be stated in a purely group-theoretical language, its solution is based on geometrical and combinatorial ideas. There are two main sources. On the one hand there are the techniques of mixing and twisting described in Chapters 7 and 8. The content of these chapters is especially interesting for diagram geometers. On the other hand the theory of complex reflection groups comes into play. The results needed from this area are prepared in Chapter 9. The classification itself is based on a case distinction of the possible Schläfli diagrams. In most cases a combination of the ideas developed in the previous chapters provides examples of groups, which ensure that certain amalgams do not collapse. It is usually very difficult to establish this kind of results and therefore not surprising that the details are sometimes involved.

The book provides a very readable introduction to the theory of abstract polytopes and an overview of several topics of current research with an emphasis on the classification of locally toroidal regular polytopes. Only basic knowledge in algebra and geometry is needed for reading this book. However, a certain experience in these areas will be helpful for the more advanced chapters. This book is required for anyone working on groups and incidence geometries. I recommend it to anyone who likes beautiful mathematics. Regular polytopes have fascinated people for more than 2000 years and they have been a source of inspiration for many mathematical theories. That they still maintain their outstanding role is underlined by this excellent book of McMullen and Schulte.

B. Muhlherr



P. McMullen, E. Schulte

Abstract Regular Polytopes

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 92

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

551 p., prijs £75,-

ISBN 0-521-81496-0

There are several equivalent ways to define an abstract regular polytope. The most efficient one is to see it as a pair consisting of a group together with a finite ordered generating set of involutions satisfying certain axioms. Roughly speaking, an abstract polytope is a quotient of a Coxeter system over a linear diagram such that the images of the fundamental generators provide a 'nice' coset geometry. Starting with a finite Coxeter system over a linear diagram, the corresponding coset geometry is just the incidence structure of a regular polytope. In general, the coset geometry of an abstract regular polytope is a thin chamber transitive geometry in the sense of Buekenhout and Tits. Therefore the theory



A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njåstad

Orthogonal Rational Functions

Cambridge: Cambridge University Press, 1999

422 p., prijs £45,-

ISBN 0-521-65006-2

Orthogonale polynomen werden in de vorige eeuw met redelijk succes bestudeerd. Een standaardwerk is het boek van Szegő, *Orthogonal Polynomials* (AMS, 1939/1975). Er werd vooruitgang geboekt met de theorie van deze polynomen op allerlei verschillende verzamelingen. Deze ontwikkelingen zijn terug te vinden in boeken en overzichten van onder anderen Akhiezer, Askey, Chihara, Deift, Levin en Lubinsky, Nevai, Saff en Totik, Shohat en

Tamarkin, en Stahl en Totik.

Een interessante uitbreiding van deze theorie wordt verkregen als men de polynomen vervangt door rationale functies. Deze uitbreiding wordt beschreven in het boek dat hier ter bespreking ligt.

De orthogonale rationale functies voldoen aan een recursievergelijking en een Christoffel-Darboux type relatie (hoofdstuk 3) die essentieel is in de theorie die wordt ontwikkeld. Oplossingen van de recursievergelijking geven de tellers en noemers van de approximanten van kettingbreuken, die convergeren naar de Riesz-Herglotz-Nevanlinna transformatie van de orthogonaliteitsmaat μ (hoofdstuk 4). Deze approximanten hebben nuttige interpolatie-eigenschappen (Nevanlinna-Pick interpolatie) die grondig worden beschreven in hoofdstuk 6. Kwadratuur met behulp van nulpunten van quasi-orthogonale of para-orthogonale rationale functies blijkt opnieuw optimaal of bijna optimaal te zijn, zoals Gausskwadratuur bij orthogonale polynomen (hoofdstuk 5). Deze kwadratuurformules blijken een belangrijk hulpmiddel te zijn bij de constructie van oplossingen van het momentenprobleem. Het sterke Stieltjes momentenprobleem vraagt of er voor een gegeven (dubbeloneindige) rij μ_k ($k \in \mathbb{Z}$) een maat μ op $[0, \infty)$ bestaat zodat $\mu_k = \int x^k d\mu(x)$ en indien dit zo is, of deze maat uniek is. Voor het sterke Hamburger momentenprobleem mag de maat op $(-\infty, \infty)$ zijn gedefinieerd. Deze momentenproblemen horen bij Laurent orthogonale polynomen (de orthogonale rationale functies met alle polen in de oorsprong). De rationale veralgemening voor het Hamburger momentenprobleem is om momenten van de vorm $\int d\mu(t)/\omega_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) te beschouwen, met ω_k een polynoom die de polen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ als nulpunten heeft. Deze momentenproblemen worden bestudeerd in hoofdstuk 10. Asymptotische resultaten, met onder andere een rationale veralgemening van het Szegőprobleem, worden uitgewerkt in hoofdstuk 9. Hier vinden we sterke asymptotiek (als gevolg van de rationale uitbreiding van de Szegőtheorie), maar ook asymptotiek van de verhouding van twee orthogonale rationale functies en asymptotiek van de n -de wortel van de n -de rationale functie. De theorie van orthogonale polynomen met variërende gewichten is van belang bij deze analyse: de polen, die vooraf gekend zijn, kunnen in de orthogonaliteitsrelatie immers worden afgezonderd en als variërende gewichten worden beschouwd, zodat de tellers van de orthogonale rationale functies dan orthogonale polynomen worden voor variërende gewichtsfuncties. Hiervoor werden eerder door Guillermo López Lagomasino allerlei asymptotische resultaten gevonden, die hier erg nuttig blijken te zijn. Tot dusver werden de polen steeds zodanig gekozen dat ze niet op de reële rechte of op de eenheidscirkel liggen. Het randgeval waarbij alle polen op de reële rechte liggen (bij reële orthogonaliteit) of op de eenheidscirkel (bij orthogonaliteit op de eenheidscirkel) zorgt voor extra complicaties. Deze bijzondere gevallen worden apart behandeld in hoofdstuk 11. Tenslotte worden enkele toepassingen beschreven in hoofdstuk 12: lineaire predictie, het Pisarenko modeleringsprobleem, lossless inverse scattering, network synthesis en H_∞ problemen. Deze toepassingen zijn gekend voor orthogonale polynomen maar vindt men niet terug in de basiswerken die reeds eerder werden genoemd. Bovendien geven de extra vrijheidsgraden die nu beschikbaar zijn (de polen van de rationale functies) heel wat meer flexibiliteit bij het zoeken naar geschikte oplossingen voor de gestelde problemen.

De vier auteurs zijn werkelijk specialisten in dit onderzoeksgebied en hebben een unieke samenwerking met een indrukwek-

kende lijst van gezamenlijke publicaties. Zij hebben de theorie in belangrijke mate ontwikkeld. Het boek is een inleiding tot deze theorie en zal wellicht een standaardwerk worden in dezelfde klasse als de boeken van Szegő: *Orthogonal Polynomials* (AMS, 1939/1975), Akhiezer *The Classical Moment Problem* (Oliver and Boyd, 1969), Chihara *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, (Gordon and Breach, 1978), en Stahl en Totik *General Orthogonal Polynomials*, (Cambridge University Press, 1992). De opbouw is goed overdacht en het geheel leest vlot. Stellingen en bewijzen zijn goed te volgen zonder hulp van bijkomende literatuur. Het is alleen jammer dat geen concrete voorbeelden, zoals rationale uitbreidingen van de klassieke orthogonale polynomen, werden uitgewerkt. Toch een aanrader voor onderzoekers in wiskundige analyse.

W. Van Assch



F.G. Timmesfeld
Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-Type

Monographs in Mathematics, 95

Basel: Birkhäuser, 2001

389 p., prijs €111,28

ISBN 3-7643-6532-3

The main goal of this book is a revision of the major work carried out by the author over thirty years. It concerns a generalization of the notion of root subgroup as it occurs in Chevalley groups. His axioms are phrased in what he calls a system of abstract root subgroups. Generally speaking, by taking the centers of the radicals of certain parabolic subgroups of a (twisted) algebraic group G , a system of abstract root subgroups of G emerges.

The author has managed to provide a full classification of abstract groups generated by abstract root subgroups under a few mild non-degeneracy conditions. If the groups in question were assumed to be linear or algebraic, the work would have been considerably easier (although not trivial). It is a great achievement that Timmesfeld carried the classification through on the basis of merely group-theoretic assumptions.

The starting point of Timmesfeld's major work is difficult in that there is no obvious geometry at hand. Still, from his group-theoretic axioms, involving a detailed study of groups generated by three abstract root subgroups, axioms for a geometry on points (the abstract root subgroups) and lines arise. The construction of lines needs to be split into two cases. The favorite lines are products of commuting abstract root subgroups all of whose nontrivial elements lie in an abstract root subgroup. If these lines exist, the abstract root system is called non-degenerate. In the degenerate case, Timmesfeld resorts to the notion of a hyperbolic line, that is, the set of abstract roots subgroups belonging to a so-called 'rank 1 group' (a generalization of $SL(2, \mathbb{F})$). Geometric recognition theorems are used to characterize these point, line geometries as 'shadow spaces of buildings', the geometric constructs built and used by Tits to classify groups of Lie type. Results of Cuypers for the degenerate case and of Cooperstein and the reviewer for the non-degenerate case have been useful here. The final step in Timmesfeld's program is to recognize the abstract root subgroup systems coming from buildings.

The book makes Timmesfeld's theory more accessible than ever before. It starts with an elegant chapter on rank 1 groups, showing that there are still open research questions and classifying the groups $SL(2, F)$ among them.

The second chapter gives the basic definitions and facts on abstract root subgroups, including the three generator case, and a study of radicals. A remarkable result is that—under mild conditions—the radical of any group generated by a system of abstract root subgroups is nilpotent of index at most 2.

The classification is carried out in Chapter 3. In order to arrive to the buildings, only mild additional conditions, existence of sufficiently many hyperbolic pairs, are needed.

In the beginning of his mathematical career, Timmesfeld classified groups generated by a system of root involutions. In fact, these are root subgroups of Chevalley groups over finite fields of characteristic 2.

In Chapter 4, the author comes back to this early research and shows how the abstract root subgroups theory can be used to simplify the old proofs of characterizations of certain finite simple groups. In Chapter 5, the final chapter, some applications are discussed. Most notably, it is shown how a group acting quadratically on a module (which roughly means that the group is generated by elements of the form $1 + a$ with a^2 vanishing on the module) leads to a system of abstract root subgroups, and how this helps in determining such modules.

For someone interested in the link between group theory and geometry (of Tits buildings), this book is a great help. It is a source of inspiration for further research problems.

A.M. Cohen

R. Kane

Reflection Groups and Invariant Theory

CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC,

Springer-Verlag, 2001

379 p., prijs €39,54

ISBN 0-387-98979-X

This book by the Canadian mathematician Richard Kane is an elementary exposition of the theory of finite pseudo-reflection groups and their invariant theory as developed up to the beginning of the 1980's. It does not contain new results. It can be read by a beginning graduate student, it requires almost no prerequisites and never becomes hard to read. Basically all arguments are of an easily digestible algebraic nature. There are no exercises and no historical comments, but it has a good list of references to the not too recent literature.

This is certainly not the first text-book discussing these topics. Coxeter and Weyl groups appear in any book on groups of Lie type or quantum groups or on semisimple Lie algebras or Kac-Moody algebras. Reflections and reflection groups appear in any book on Euclidean geometry, on hyperplane arrangements or on invariant theory of finite groups. Rings of covariants of Weyl groups appear as cohomology algebras of flag manifolds and are discussed in books on Schubert calculus and algebraic combinatorics. The topics are centrally important in many different and attractive fields.

The basic nature and coherence of these topics became clear in 1968 when Nicholas Bourbaki published a volume of his *Éléments de mathématique* containing Chapters IV, V, VI of his treatise on

Lie groups and Lie algebras. Although it is embedded in a treatise on Lie theory, it is completely independent of it. In fact, Lie theory is only mentioned in the introduction and in the historical notes. It has a large number of non-trivial exercises and an appendix with explicit information on root systems. Borel calls it 'one of the most successful books by Bourbaki' (p. 379, A. Borel, *Twenty-five years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973*, Notices of the Amer. Math. Soc. **45** (1998), 373–380).

Nevertheless, the reading (and solving of the exercises) was considered as demanding and expositions presenting part of the material on a more elementary level kept appearing. Two of the more popular examples are Grove and Benson's *Finite reflection groups*, 1971 and 1985 ('We have tried to reach a middle ground between Coxeter and Bourbaki.'), and Humphreys' *Reflection groups and Coxeter groups*, 1990 ('The present book attempts to be both an introduction to Bourbaki and an updating of the coverage (. . .)').

The book under review is of the same kind. It incorporates improvements published since the first appearance of Bourbaki's book, for example Springer's theory of regular elements and the notion of generalized invariant of Kac-Peterson. On the other hand some topics that did appear in Bourbaki, like Tits systems and Hecke algebras, are completely left out in the book under review. Indeed, these topics may be too far removed from invariant theory. Also, advanced topics like Springer's representations are necessarily left out, since elementary algebraic accounts are not yet available. Similarly there is no place for the more recent invariant theory of two copies of the reflection representation. This has been studied in recent years in relation with Haiman's sensational results in algebraic combinatorics based on the symmetric group.

All in all it is a carefully written book that can be recommended to a graduate student for independent study, containing a good amount of interesting material.

A. Broer



J.H. Davis

Foundations of Deterministic and Stochastic Control

Systems & Control: Foundations & Applications,

Basel: Birkhäuser, 2002

421 p., prijs €107,-

ISBN 0-8176-4257-9

Dit is een boek in de Birkhäuser serie Systems & control: Foundations and Applications. Volgens Birkhäuser is het doel van deze serie het publiceren van topkwaliteit state-of-the-art boeken. Dit boek is geen van beide. Het boek is gebaseerd op werk uit de jaren zestig en zeventig, dus het is zeker niet state-of-the-art. Topkwaliteit is het boek ook niet. Wat vooral opvalt is dat het enorm slordig is. Ik zal hiervan voorbeelden geven.

Het is niet duidelijk wat de voorkennis is die van de lezer verlangd wordt. De auteur noemt alleen twee 'contemporary texts' (uit 1969 en 1975!) die van hetzelfde niveau zijn, dus dat schiet niet op. Bij sommige hoofdstukken is de introductie sectie 1 en bij andere hoofdstukken komt hij voor sectie 1. Bijna geen enkele referentie is correct, er staan soms meerdere spelfouten in (zoals

Gaussian, Mathematics). Dit zijn natuurlijk kleine dingen, maar het geeft de slordigheid aan waarmee dit boek gemaakt is. Het lijkt alsof dit boek in één ruk geschreven is en er verder voor publicatie niemand meer naar omgekeken heeft. Als het boek wel goed geschreven was, had het interessant kunnen zijn. Het besteedt aandacht aan zowel discrete als continue tijd, zowel deterministische als stochastische systemen, zowel tijdvariante als tijdinvariante systemen, zowel eindig-dimensionale als oneindig-dimensionale systemen in hetzelfde raamwerk. Al met al: zeker geen aanrader.

M. Opmeer



Sen Hu
Lecture Notes on Chern-Simons-Witten Theory

Singapore: World Scientific, 2001

200 p., prijs \$ 26.60

ISBN 981-023909-2

Natuurkunde en wiskunde hebben elkaar altijd beïnvloed. Bekende voorbeelden waarbij aspecten van de wiskunde werden overgenomen in natuurkundige theorieën zijn de algemene relativiteitstheorie, gebaseerd op de differentiaalmeetkunde, en de quantummechanica, waarbij de functionaalanalyse een belangrijke rol speelt. Wigner beschreef dit verschijnsel onder de titel *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*. Maar de relatie is zeker niet eenzijdig: ontwikkelingen in de natuurkunde hebben ook geleid tot vooruitgang in de wiskunde. Een aantal voorbeelden hiervan werd door Dijkgraaf beschreven onder de titel *De Onredelijke Effektiviteit van de Fysica in de Moderne Wiskunde*, in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde 62/11 (1996) 255-257.

Het boek van Sen Hu gaat over één van deze voorbeelden. De Chern-Simons-Witten theorie uit de titel is de naam van een model uit de natuurkunde, de wiskunde die ermee verband houdt is de knopentheorie. Het boek bevat uitgebreide aantekeningen van de hand van Sen Hu van een aantal colleges die in 1989 gegeven werden door Edward Witten, de bekende Amerikaanse mathematisch fysicus (Fields Medal in 1990).

De natuurkundige beschrijving van de dynamica van elementaire deeltjes is gebaseerd op zogenaamde ijktheorieën. Maxwell's theorie van het electromagnetisme is daar een voorbeeld van, maar ook de zwakke en sterke interacties worden door ijktheorieën beschreven. De quantumveldentheorie, waar ijktheorieën een onderdeel van zijn, is al ruim vijftig jaar het werkterrein van fysici, maar is wiskundig nog altijd slecht onderbouwd. De Chern-Simons-Witten theorie is ook een voorbeeld van een ijktheorie, maar is niet zonder meer toepasbaar in de fysica. Deze theorie is in zekere zin een speelgoedmodel, en wordt vaak gebruikt om ideeën over de wiskundige structuur van de deeltjesfysica uit te proberen. Dit onderzoek heeft geleid tot een aantal interessante resultaten in de theorie van knopen.

Het doel van de colleges van Witten was de natuurkundige aanpak begrijpelijk te maken voor wiskundigen. Het boek begint daarom de klassieke en de quantummechanica in een wiskundig kader te plaatsen. Een belangrijk deel van het boek gaat over de

Chern-Simons-Witten theorie zelf, en in dat deel wordt een aantal technieken toegepast die in de wiskunde minder bekend zijn dan in de theoretische natuurkunde, zoals de Feynman padintegraal en Feynman diagrammen. Deze technieken worden in het boek in wiskundige termen beschreven en uitgelegd.

Dit boek is zeker niet het laatste woord over dit onderwerp. Daarvoor is het niet voldoende gestructureerd, en ontbreken er teveel voor de hand liggende zaken, zoals een duidelijke, motiveerende inleiding. Verder zou het nuttig zijn geweest als iemand de moeite had genomen het Engels van de auteur te corrigeren. Het boek bestaat voor ongeveer de helft uit reprints van researchartikelen en stukjes uit boeken. Het is nogal ongelukkig dat sommige artikelen niet volledig zijn opgenomen. Van een artikel van Axelrod, Della Pietra en Witten (overigens al bijna een boek op zich!) is ongeveer een kwart, zonder referentielijst, in het boek van Sen Hu terug te vinden. Daardoor verschaft dit deel van het boek niet de gewenste toegang tot eerder werk.

Overigens is dit boek ook niet het eerste woord over dit onderwerp: in 1990 verscheen bij Cambridge University Press een klein boekje van M. Atiyah, met als titel *The Geometry of Physics and Knots*. Het bespreekt hetzelfde onderwerp op een veel toegankelijker manier, en is, wat mij betreft, als inleiding over knopentheorie en de relatie daarvan met de natuurkunde een stuk leesbaarder en helderder dan het boek van Sen Hu.

Het boek van Sen Hu is duidelijk bedoeld voor wiskundigen, met als doel om duidelijk te maken waarom en hoe een natuurkundig probleem kan leiden tot interessante nieuwe inzichten in de wiskunde. Naar mijn mening is de schrijver daarin niet voldoende geslaagd. We zullen daarom onze toevlucht moeten nemen tot het boekje van Atiyah, of moeten wachten tot het moment dat Witten zelf zijn colleges in boekvorm uitbrengt.

M. de Roo



P. Wesseling
Principles of Computational Fluid Dynamics

Berlin: Springer-Verlag, 2001

Springer Series in Computational Mathematics, 29

644 p., prijs € 128,35

ISBN 3-540-67853-0

This book focuses on the finite volume method to solve single-phase, Newtonian fluid problems. Although turbulence modelling is succinctly addressed in the first chapter, where an overview of the basic equations of fluid mechanics is given, the remainder of the book is devoted to laminar, single-phase Newtonian flow. Despite this restriction with respect to the subject matter the material covered in this comprehensive book is of such a generic nature that those who want to apply the methods to non-Newtonian fluids or multi-phase flows may benefit from the ideas explained in this book. After an introduction to the finite volume, in which both the vertex-centered and the cell-centered formulation are introduced, the stationary, as well as the non-stationary convection-diffusion equations are treated extensively. These equations are archetypes of equations, which have solutions possessing boundary layers in case convection is dominant. Capturing the high gradients can either be done by employing

a non-uniform mesh, by adding artificial viscosity or by limiting the slope when higher order discretizations are used. The concept of stability is treated for the unsteady convection-diffusion equation and the stability analysis is provided for a variety of time stepping schemes. A direct application of convection dominated flows is given by the incompressible Navier-Stokes equations discussed in Chapter 6. In addition to the special treatment required for convection dominated flows, the coupling between the incompressibility constraint and the pressure, which acts as Lagrange multiplier to enforce this constraint, is explained. Spurious pressure modes and staggering of the unknowns to circumvent this artifact are covered in detail. After a brief chapter on iteration, three chapters are devoted to hyperbolic systems, which allow for discontinuous solutions. Discretization of the Euler and Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates is explained thoroughly in Chapters 12 and 13. The final chapter addresses the issue of the limiting case for vanishing Mach numbers. For the purely incompressible case (Mach is zero) the speed of sound is infinitely large, leading to an elliptic character for the acoustic part, whereas for low, but for non-zero Mach numbers the speed of sound is very large, but finite. In this case the acoustic part becomes hyperbolic. This change of type has to be dealt with adequately in order to render accurate solutions, because for small Mach numbers the system becomes very stiff. A uniform approach applicable over a wide Mach range from incompressible to supersonic flow is discussed.

Principles of Computational Fluid Dynamics addresses primarily the mathematical aspects of the finite volume method and its application to flow problems. Implementational aspects are not considered. This book is therefore not an introduction to this emerging field of science, but will be much appreciated by those who already have a fair amount of experience with CFD. Apart from the wealth of information provided in the book, an extensive list of references is given which provides a good starting point for anyone wishing to master the principles of Computational Fluid Dynamics.

M. Gerritsma

advice to offer.'

Chapter 1 is a kind of appetizer about algorithms, computers, and programming. Chapter 2 starts with discussing computer arithmetic and the way computers represent numbers. Here we encounter the first source of approximation to desired exact outcomes. In statistical computing, matrices and linear algebra play an essential role. Chapter 3 treats matrix operations, solving triangular systems, Gaussian elimination, Cholesky decomposition, matrix norms, and accuracy and conditioning. Chapter 4 contains more specialized material on solving linear equations with an application to ARMA models. Full elimination, banded matrices, Toeplitz matrices and sparse matrices are discussed. Chapter 5 is about regression computation. Here we meet the condition number, solving the normal equations, Gram-Schmidt orthogonalization, Householder transformation, and Givens transformation. The remaining part of this chapter becomes more statistical when regression diagnostics, hypothesis testing, and all possible regressions are discussed. But in the meanwhile conjugate gradient methods, the Doolittle method and the sweep operator are also treated. The topic of Chapter 6 is the eigenproblem and in particular the singular value decomposition.

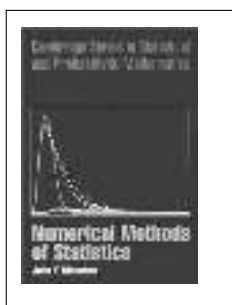
At this point the book switches from matrices to functions. Chapter 7 is about curve fitting. Approximation, interpolation, and splines are important issues. There is special attention for the computation of well-known probability functions. Optimization and solving linear equations is a topic that is of utmost importance to the maximum likelihood method and nonlinear least squares. Chapter 8 gives a nice introduction. Subsequently, Chapter 9 is about maximum likelihood and nonlinear regression. In this chapter the EM algorithm and generalized linear models are also discussed.

As a natural combination, Chapter 10 treats numerical integration and Monte Carlo methods. Especially in Bayesian procedures multivariate integrals have to be calculated. Monte Carlo methods can fruitfully be applied in order to evaluate certain multivariate integrals. This brings us to the subject of random number generators. The author presents 15 pseudorandom number generators. They are used to generate pseudorandom drawings from the uniform distribution on the interval (0,1). This is the basis for generating random variables from other distributions, which is discussed in Chapter 11. Chapter 12 continues the treatment of integration and Monte Carlo. It focusses on the statistical methods that can be applied. For example, kernel estimation methods are applied to estimate a density from Monte Carlo studies. The remaining part of this chapter is devoted to more specialized integration tools. Markov chain Monte Carlo (MCMC) methods, a modern topic in statistical computing, are discussed in Chapter 13. After a very short introduction to continuous Markov chains, Gibbs sampling, the Metropolis-Hastings algorithm, and acceptance/rejection sampling are treated, which is followed by diagnostics for monitoring MCMC methods.

Finally, Chapter 14 returns to a very basic issue, namely sorting, and some fast algorithms, i.e., the famous fast Fourier transform.

This inspiring book contains a lot of exercises. Algorithms are provided on a disk. The book gives an excellent survey and introduction for anyone involved in more advanced computational statistics, but it also offers a lot of subjects that are of interest to users of numerical methods.

A.G.M. Steerneman



J.F. Monahan

Numerical Methods of Statistics

Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 7

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

442 p., disk, prijs £50,-

ISBN 0-521-79168-5

This book is of interest to anyone who is involved in more or less sophisticated statistical analyses. It also contains much material for numerical mathematicians and computer scientists who are interested in applications. Numerical mathematics and statistical computing are both of utmost importance in modern statistics, especially because of the computationally intensive methods that are used. The textbook by Monahan nicely describes the interplay between these two areas. As the author states on page 9: 'For whatever purpose the reader will be using this book – whether devising new statistical procedures or delving deeper into how codes for certain algorithms work – the author has considerable



F. Blancard, A. Maass, A. Nogueira (eds.)
Topics in Symbolic Dynamics and Applications

London Mathematical Society lecture note series, 279

Cambridge: Cambridge University Press, 2000

262 p., prijs £33,-

ISBN 0-521-79660-1

Symbolic Dynamics studies the translations (or, shifts) of infinite symbolic sequences. This is an extremely rich research area, and the present book demonstrates that most convincingly. The book contains the lectures given at the Summer School on Symbolic Dynamics and Its Application, held in Temuco, Chile, in January 1997. The book aims at those interested in the current state of the field. The book is not intended to be a textbook, two comprehensive textbooks appeared recently and have already become standard references: D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding* (1995), and B. Kitchens, *Symbolic dynamics* (1998). The book is organized in eight independent chapters, each with its own notation and bibliography.

Chapter 1 by V. Berthé deals with the sequences of low complexity, with emphasis on Sturmian and automatic sequences. This type of sequence appears in various fields ranging from computer science to biology. Several combinatorial methods for construction and study of such sequences are discussed.

Chapter 2 by B. Host introduces the fundamental notions of dynamical systems such as minimality, unique ergodicity, etc. These concepts are demonstrated using the substitution dynamical systems. One of the most famous examples of this kind is the Fibonacci sequence which is a fixed point of the substitution $1 \rightarrow 10$ and $0 \rightarrow 1$. This chapter also introduces the Bratelli diagrams and Bratelli-Vershik models.

Chapter 3 by M. Boyle studies the algebraic aspects of symbolic dynamics. This chapter introduces various types of subshifts, including the subshifts of finite type (SFT). The problem of isomorphism of SFT's, William's conjecture and recent counterexamples to this conjecture are discussed.

Chapter 4 by B. Kitchens continues the algebraic line but concentrates on the multidimensional dynamics, actions of $\mathbf{Z}^d$ on groups. The main examples are subgroups of $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{Z}^2}$. One has to say that the multidimensional symbolic dynamics is more intricate than in dimension one, and unexpected phenomena occur.

Chapter 5 by Z. Coelho studies the probabilistic laws of waiting times: how far does one have to look in the future to observe a given pattern in a realization of random process? It turns out that for a large class of stationary symbolic processes, one can establish very sharp asymptotic laws.

Chapter 6 by V. Bergelson shows the relations between ergodic theory on the one hand, and the Diophantine number theory and Ramsey theory, on the other. For example, the notions and methods developed in previous chapters can be used to prove that for irrational α , the sequence $x_n = \{n\alpha\}$, where $\{\cdot\}$ denotes the fractional part, is uniformly distributed in $[0, 1]$. Van der Waerden's theorem on the existence of a monochromatic arithmetic progression of an arbitrary length in an arbitrary coloring of $\mathbf{Z}$ with a finite number of colors, can also be proved using methods of dynamical systems.

Chapter 7 by Ch. Frougny starts with a description of expansions of real numbers in arbitrary base β , $\beta > 1$. There is a natural symbolic dynamical system associated to such β -expansions. In case β is a special algebraic number (Pisot, Salem or Perron), the symbolic system has very useful properties. The chapter finishes with a description of number representations with respect to an arbitrary sequence of numbers.

Chapter 8 by R. Labarca describes how the methods of symbolic dynamics can be used to obtain a classification of piecewise continuous and strictly increasing interval maps.

This book deals with various aspects of the modern theory of symbolic dynamics. Each chapter starts with basic definitions and does not assume any extensive prior knowledge. Nevertheless, the book is not elementary. In some cases, the learning curve is rather steep, which is inevitable given the volume and the scope of the book. Extensive bibliographies provided in each chapter should help with further reading. This book is a carefully prepared and nicely written overview of a fascinating field.

E.A. Verbitskiy



H. Triebel

The Structure of Functions

Monographs in Mathematics, 97

Basel: Birkhäuser, 2001

425 p. prijs €98,44

ISBN 3-7643-6546-3

The title of this book refers to the quarkonial decomposition of functions. For f on $\mathbf{R}^n$ an (s, p) - β -quarkonial decomposition is an expansion

$$f(x) = \sum_{\beta \in \mathbf{N}_0^n} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \lambda_{jm}^{\beta} \left(2^{-\nu(s-\frac{n}{p})} \psi^{\beta}(2^j x - m) \right), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

The expression in big brackets is called an (s, p) - β -quark. Starting with a compactly supported function $\psi \geq 0$ on $\mathbf{R}^n$ such that $\sum_{m \in \mathbf{Z}^n} \psi(x - m) = 1$, $\psi^{\beta}(x)$ is defined as $x^{\beta} \psi(x)$. Next the $\{\lambda_{jm}^{\beta}\}$ are sequences that belong to appropriate normed sequence spaces, and the norm of $\{\lambda_{jm}^{\beta}\}$ is used to norm f .

In Chapter 1 this decomposition is studied. It gives rise to the Besov spaces B_{pq}^s and Triebel-Lizorkin spaces F_{pq}^s and it is proven that up to equivalence the norms are independent of the choice of ψ ; quarkonial decomposition applies to distributions too. Next the B and F -spaces are studied on domains and manifolds as well. Moreover, traces of such functions on so called d -sets, roughly speaking sets of Hausdorff dimension d equipped with a suitable measure, are studied.

Chapter 2 deals with sharp inequalities in the spaces B_{pq}^s and F_{pq}^s between quantities involving the non-increasing rearrangement f^* and the 'growth envelope function' on the one hand and the norm in these spaces on the other. This leads to a complete answer to the question which of the B and F spaces consist of L^p , bounded, or (Hölder) continuous functions on $\mathbf{R}^n$.

The third chapter deals with what is called 'the fractal drum'. Consider a smooth bounded domain G in $\mathbf{R}^n$ as a membrane with a mass distribution $m(x)$ defined on G . Vibrations of the membrane are described by

$$\Delta v(t, x) = -m(x) \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial t^2}, \quad (t, x) \in \mathbf{R} \times G.$$

Eigenfrequencies are obtained via the substitution $v(t, x) = e^{i\lambda t} u(x)$. This leads to the eigenvalue problem

$$(-\Delta)^{-1}(m(x)u(x)) = \lambda^2 u(x).$$

'Fractal' refers to mass distributions supported on d -sets $X \subset G$. Then the above equation has to be handled carefully. But the result is nice,

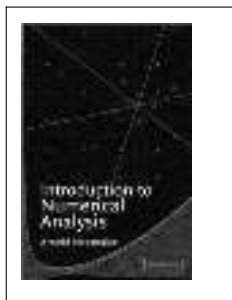
$$\lambda^2 \sim k^{-1+\frac{n-2}{d}}, \quad \text{if } \max\{0, n-2\} < d < n.$$

The Dirichlet problem on domains with fractal boundary is then solved as a particular case.

The short last chapter deals with truncation and semi-linear operators and their boundedness and continuity properties with applications to equations like

$$(-\Delta + Id)u = c|u| + h.$$

Triebel is the expert on this subject. He wrote many papers and books about function spaces and the structure of functions. Unfortunately he chose to assume that the reader knows four of his books by heart, as the many references to these books testify. The effect is that the book will not be appealing to many. This is too bad, because the idea of quarkonial decomposition is really beautiful and the results that are discussed throughout the book look very interesting. Moreover, in between all these references it still transpires that Triebel knows how to explain things. *J. Wiegierinck*



A. Neumaier
Introduction to Numerical Analysis
Cambridge: Cambridge University Press, 2001
363 p., prijs £27,-
ISBN 0-521-33610-4

Voor een introductie in de numerieke wiskunde kun je kiezen uit een dozijn boeken. Er zijn heel wat boeken met dezelfde titel als de bovenstaande boeken of met een titel die er een lichte variatie op is. Met zo'n ruime keuze getuigt het van lef om met een volledig nieuw boek op de markt te komen, zoals Neumaier doet. Dat heeft alleen zin als het boek zich ergens weet te onderscheiden van alle andere.

Stoer en Bulirsch hebben een kwart eeuw geleden al een boek geschreven over numerieke wiskunde, dat is verschenen in de serie *Texts in Applied Mathematics*. Ze komen nu met een nieuwe editie (de derde). De verschillen met de vorige editie zijn klein. Er zijn wat fouten uit de tekst gehaald en er is een enkele paragraaf toegevoegd. De grootste wijziging betreft de uitgebreide sectie over Krylov-subspace methoden, waarin nu speciaal aandacht wordt besteed aan GMRES, QMR en Bi-CG(STAB).

Het is niet verrassend dat de inhoud van de twee boeken voor een groot deel overlapt. Beide boeken bevatten hoofdstukken over foutenanalyse, numerieke interpolatie, numerieke integratie, het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen en het zoeken van nulpunten. Stoer en Bulirsch voegen daar nog aan toe het oplossen van eigenwaardenproblemen, gewone differentiaalvergelijkingen en het gebruik van iteratieve methoden voor het oplossen van grote stelsels lineaire vergelijkingen. In het voorwoord belooft Neumaier deze onderwerpen aan te snijden in een vervolg op zijn boek.

Er zijn meer overeenkomsten tussen beide boeken. Stellingen en algoritmen worden geïllustreerd aan de hand van uitgebreide voorbeelden. Aan het eind van elk hoofdstuk staat een behoorlijke lijst met opgaven. Ze variëren in moeilijkheid, maar zijn over het algemeen goed te doen.

Toch zijn er opmerkelijke verschillen. De introductie van Stoer en Bulirsch in de numerieke wiskunde is behoorlijk uitputtend. Alle onderwerpen worden nauwgezet en uitgebreid behandeld. Het voordeel is dat de introductie behoorlijk volledig is. Echter door de vele subsecties en subsubsecties wordt het geheel soms wat onoverzichtelijk.

Daar tegenover staat het boek van Neumaier, dat compacter is en een heldere structuur heeft. Dezelfde onderwerpen worden minder uitgediept, maar alle belangrijke algoritmen staan erin. Waarschijnlijk is zijn boek daardoor meer geschikt als cursusboek dan dat van Stoer en Bulirsch. Wat daarin ook voor Neumaier pleit, is het feit dat hij in zijn algoritmen, wiskundige notaties en opgaven aansluiting zoekt bij MATLAB. Het toepassen van de theorie wordt daardoor veel eenvoudiger. Wat verder nieuw is in het boek van Neumaier, is de consequente toepassing van intervalanalyse bij het berekenen van fouten.

Beide boeken hebben kwaliteit, maar welke van de twee het meest geschikt is hangt af van de doelgroep. Voor een eenvoudige cursus numerieke wiskunde prefereer ik Neumaier, maar voor een uitgebreidere studie zou ik naar Stoer en Bulirsch grijpen.

A. de Niet



Z. Gajić, M.T. Lim
Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications: High-Accuracy Techniques
New York: Marcel Dekker, 2001
309 p., prijs \$ 150,-
ISBN 0-8247-8976-8

Many dynamical systems exhibit both fast and slow dynamics. The analysis based on separating the fast and slow dynamics has a long history of almost a century. Major contributions came around 1950 in the seminal work of Tikhonov. The singular perturbation method was first studied in the context of control by Kokotović.

There are many known results for singularly perturbed control systems. For instance we refer to a classical textbook such as *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design* by Kokotović, Khalil, and O'Reilly (SIAM). The book under review looks at linear systems with singular perturbations and looks at several

optimal control problems such as linear quadratic optimal control and filtering problems. Associated problems such as cheap control or high-gain feedback are also studied. Finally, more recent developments such as H_∞ optimal control are investigated.

This book aims at an audience which is already familiar with singular perturbations. For instance, the book does not include motivations for singular perturbation techniques or recapitulate the classical theory. It immediately starts by noting that classical techniques give convergence which is linear in terms of the singular perturbation parameter ϵ . The rest of the book then focuses on the recursive tools derived by the first author and his co-workers for obtaining higher-order convergence. This technique to obtain higher-order convergence is referred to as the Hamiltonian approach which is based on an exact decomposition between the slow and fast dynamics and then the recursive solution of the associated equations with each recursion step increasing the order of convergence. Several numerical examples are included in the book.

The book could have included some more motivation and clarifications of the results. Very often it just presents the resulting equations needed in the solution without much explanation. The basic objective of the book appears to be to present a complete description of the results obtained by Zoran Gajić and his co-workers. Finally, I would like to add that the book is typeset quite nicely.

A.A. Stoorvogel

tems. It is important to note that the case in which the diffusion coefficient in the stochastic differential equation of the fast variable depends on the parameter as ϵ^δ with $\delta = 1/2$, is covered by the book H.J. Kushner, *Weak convergence methods and singularly perturbed stochastic control and filtering problems* (Birkhäuser, 1990). Hence the authors concentrate attention in their book on the case $\delta > 1/2$.

Chapter 0 presents a few motivating problems including the Liénard oscillator, a filtering problem, and a stochastic approximation procedure. Chapter 1 presents moment bounds for nonlinear equations, bounds for linear systems, and growth rates for the maximal function. Chapter 2 presents the Tikhonov theory for stochastic differential equations: Uniform convergence of the fast variables outside the boundary layer and uniform convergence of the slow variables on the interval. Chapter 3 presents logarithmic rates on the large deviation probabilities. Chapter 4 presents uniform expansions of both state components on the full interval. Chapter 5 presents limit theorems for the attainable densities of singularly perturbed control systems in the formulation of stochastic control as developed by V.E. Beneš. Chapter 6 presents results for selected applications including PDEs, fast Markov modulations, filtering, and the linear-quadratic regulator.

The strength of the book is in the analysis of Tikhonov theorems for stochastic systems. In this area the only other book is that of Kushner (now retired from Brown University). The text is very well structured, runs very smooth, and the exposition allows detailed scrutiny of all proofs. The book is expected to become a basic reference on two-scale stochastic systems. J.H. van Schuppen



Y. Kabanov, S. Pergamenschikov
**Two-Scale Stochastic Systems
Asymptotic Analysis and Control**

(Stochastic Modelling and Applied Probability,
49)

Berlin: Springer-Verlag, 2003

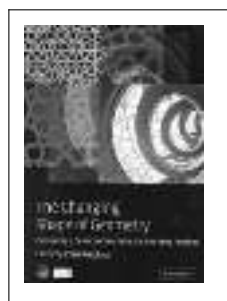
266 p., prijs €64,95

ISBN 3-540-65332-5

The book presents Tikhonov theorems for stochastic systems with two time scales when a parameter decreases to zero. The authors are mathematicians of the Russian school of probability and control, though now affiliated with different universities in France. The topic of the book is relevant for the research areas of stochastic and of control and system theory. The book is addressed to researchers and graduate students and has the character of a research monograph.

The stochastic systems are described by stochastic differential equations driven by Brownian motions. The state process is distinguished into two components, the first one termed the slow state component and the second one termed the fast state component. The parameter ϵ occurs in the stochastic differential equation for the fast state component. In the literature such systems are termed *singularly perturbed*. For deterministic nonlinear dynamic systems described by ordinary differential equations, A.N. Tikhonov in his thesis research of the late 1940's proved that if the parameter goes to zero then the behavior of the fast component can be described by an algebraic equation, while the differential equation for the slow component is simplified outside the boundary layer.

The book presents the corresponding results for stochastic sys-



C. Pritchard (ed.)

**The Changing Shape of Geometry
Celebrating a Century of Ge-
ometry and Geometry Teaching**

Cambridge: Cambridge University Press, 2003

557 p., prijs £24.99

ISBN 0-521-53162-4

Verzamelbundels – of het nu om muziek, literatuur, kunst of wetenschap gaat – hebben bij mij bijna altijd hetzelfde effect. Eerst onderga ik een zeker enthousiasme en daarna volgt een bepaalde mate van teleurstelling. Zo ging het mij ook weer bij dit boek met de nieuwsgierig makende titel *The Changing Shape of Geometry*. Het gaat hier om een verzameling artikelen uit de achter ons liggende eeuw, hoofdzakelijk afkomstig uit de *Mathematical Gazette* en *Mathematics in School*. Mijn aanvankelijke enthousiasme ontstond uit de herkenning van een aantal bekende en minder bekende, soms interessante onderwerpen en prachtige problemen uit de meetkunde, maar mijn deceptie groeide naarmate ik meer naar het geheel keek. Het totaal is een subjectieve en eenzijdige selectie uit het Engelse taalgebied, waarbij een overzicht van de ontwikkelingen en een degelijke samenhang ontbreken. Ik tel maar liefst zo'n negentig verschillende auteurs. Kort gezegd, dit boek is een meetkundige potpourri. Dat karakter wordt verder versterkt doordat er nog een hoofdstuk over het meetkunde-onderwijs in Engeland toegevoegd is en doordat de tekst na elk

hoofdstuk onderbroken wordt door een reeks problemen, die de auteurs graag mee zouden nemen naar een onbewoond eiland. Daarbij zijn een aantal befaamde theorema's van Ceva, Menelaus, Pascal, Euler, Feuerbach en andere evergreens, veelal van uitbreidingen en verdieping voorzien. Een verrassing was het om bij het 'zes cirkels probleem' uit 1840 van Miquel opeens een stukje Nederlandse tekst – en nog wel van een vwo-leerling – te zien. Deze bijdrage kwam van Aad Goddijn, die voor zoveel fraaie bijdragen aan het meetkundeonderwijs heeft gezorgd. Deze 'Desert Island Problems' zijn ondergebracht in categorieën met de titels: 'Greek Geometry', 'Elementary Euclidean Geometry', 'Advanced Euclidean Geometry', 'Non-Euclidean Geometry & Topology' en 'Geometrical Physics'. De historische artikelen zijn over zes delen verdeeld. Deel I heet 'The Nature of Geometry' en bevat een beschouwing uit 1925, getiteld 'What is Geometry?'. De auteur is niemand minder dan de grote getaltheoreticus Hardy, die verklaart dat hij eigenlijk niets van meetkunde weet, maar daarna toch zijn mening ten beste geeft. Dan 'The History of Geometry' met een bijdrage van Darboux uit 1904 over de ontwikkeling van de meetkundige methoden. Deel III behandelt 'Pythagoras' Theorem', waaraan onder meer Rouse Ball heeft bijgedragen. De delen IV en V gaan over 'The Golden Ratio' en 'Recreational Geometry'. In het laatste deel 'The Teaching of Geometry' vinden we onder meer een kort artikel van Bertrand Russell uit 1902, waarin hij een aantal onvolkomenheden in Euclides' *Elementen* aanwijst. Dit laatste (onderwijs)deel begint met een inleiding van Michael Price, waarin een overzicht gegeven wordt van de opvattingen over en de uitvoering van het Britse meetkundeonderwijs gedurende de twintigste eeuw. Interessant is dat deze historie parallelen vertoont met die op het vasteland van West-Europa. Ook daar werd door onderwijsvernieuwers en wiskundendidactici – ook Felix Klein behoorde daartoe – gestreefd naar een longitudinaal gepland meetkunde-onderwijs. Dit betekent dat men wilde starten met een aanschouwelijk-intuïtieve fase, later overgaand op een meer systematische aanpak en pas voor de leerlingen van een jaar of zeventien afsluitend met een logisch-deductieve opbouw. Daarbij wilde men al op jonge leeftijd, dus in het primair onderwijs met die verkennende fase beginnen, iets wat in Nederland thans enige vorm krijgt. Zo vond ik, naast allerlei leuke opgaven, in dit boek nog iets van mijn gading, zoals toch ook weer in verzamelbundels het geval kan zijn.

E. de Moor

codes en alternerende codes.

De beoogde cursus steunt behalve op het boek op aanvullend computermateriaal. Op de site <http://www.wiris.com/cc> zijn de hoofdstukken van het boek in PDF-formaat te bekijken. De bijbehorende voorbeelden kunnen direct uitgevoerd worden met het programma WIRIS, dat heel simpel werkt en makkelijk te leren is (met de introductie op het programma die is opgenomen in het boek). Studenten kunnen de voorbeelden aanpassen en opnieuw uitvoeren, en de opgaven bieden mogelijkheden voor individuele opdrachten en groepswork. De schrijver richt zich met name op het overbrengen van begrip van de algoritmen op dit vakgebied, wat volgens hem de studenten meer inzicht geeft in de wiskunde achter de algoritmen, en hen voorbereidt op het maken van verdere applicaties. Deze praktische aanpak van het combineren van wiskunde en programmeren is natuurlijk experimenteel, en lijkt te passen in een trend van het gebruik van computervaardigheden bij het aanleren van wiskunde, maar heeft als nadeel dat het boek soms een wat summier uitleg geeft van theorie, zodat het uitvoeren en verdiepen in de oefeningen echt nodig is om het begrip te kweken.

De schrijver heeft goed naar andere bekende werken gekeken die een inleiding bieden op dit gebied, zoals *The theory of Error Correcting Codes* van MacWilliams en Sloane, en Van Lints *Introduction to Coding Theory*. De literatuurlijst bevat slechts 31 boeken, waarvan de meeste gericht zijn op het bieden van een duidelijk overzicht van onderwerpen in de coderingstheorie, combinatoriek, groepentheorie, algebraïsche meetkunde en natuurlijk foutverbeterende codes. Deze verwijzingen kunnen waardevol zijn voor studenten die proberen wegwijs te worden in de coderingstheorie, zeker als aanvulling op dit boek op plekken waar de theorie slechts kort beschreven wordt en men vooral met algoritmen en computervoorbeelden werkt.

Al met al lijkt het een aantrekkelijke manier om het gebied van coderingstheorie te verkennen, geïnteresseerden kunnen natuurlijk altijd een kijkje nemen op de al eerder genoemde website, waar niet alleen de voorbeelden per paragraaf staan, maar ook een niet-printbare versie van het boek te downloaden is.

E. Jochemsz



S. Xambo-Descamps
**Block Error-Correcting Codes
A Computational Primer**

Universitext
Berlin: Springer-Verlag, 2003
266 p., prijs €42,75
ISBN 4-540-00395-9

Dit boek presenteert in vier hoofdstukken de beginselen van de foutverbeterende blokcodes. Het is geschreven om als lesmateriaal te dienen voor een inleidende cursus coderingstheorie voor derde- en vierdejaars wiskundestudenten. De vier hoofdstukken van het boek bevatten respectievelijk de introductie van foutverbeterende blokcodes, de theorie van eindige lichamen, cyclische



H.J. Kushner
**Heavy Traffic Analysis of Controlled
Queueing and Communication Networks**

Stochastic Modelling and Applied Probability,
47
Berlin: Springer-Verlag, 2001
513 p., prijs €80,20
ISBN 0-387-95264-0

This book develops the heavy traffic approach to the modelling and analysis of queueing and communication networks. Emphasis is placed on strong solution methods. Types of networks covered include controlled and uncontrolled, open and closed, polling systems, networks with multiple arrival classes, bursty or batched arrivals, server interruptions, multiple servers, shared buffers, and many others. Kushner is a well-known expert in the field.

The scope of the book is impressive, and yet the reader is intro-

duced to the subject with care. The introduction presents a pleasing and intuitive description of the heavy traffic limiting procedure, including a discussion of how to apply it in practice. Several concrete examples are given. Helpful examples appear throughout the book as well, and the list of references is expansive.

The prospective reader should have some prerequisite knowledge of probability and measure theory. The author devotes three chapters to summarizing the mathematical background from the theory of stochastic processes necessary for his subject: weak convergence and martingales, stochastic differential equations, and invariant/ergodic theory. Some prior exposure to this theory will help the reader as well, but is not strictly necessary. Many results are stated with proof, but many are also stated without. Where proofs are omitted, the author provides comments and references to aid the reader in completing them.

This book is well organized and carefully written; the style is clear. It is suitable both as an introduction to the topic and as a reference.

C. Gromoll

J. van de Craats (ed)

Vakantiecursus 2003: Wiskunde in het Dagelijks Leven

CWI Syllabus 52

Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica, 2003

114 p., prijs € 15,85

ISBN 90-6196-520-9

Wiskunde in het dagelijks leven was het thema van de vakantiecursus 2003. Deze cursus voor leraren wordt jaarlijks twee keer gegeven, een keer op het CWI en een keer op de TU/e. In acht voordrachten werd door de sprekers getoond dat wiskunde overal in het dagelijks leven te vinden is. Dit boekje is de begeleidende syllabus van deze cursus. Een aantal bijdragen is intussen, soms licht aangepast, ook elders in druk verschenen (NAW december '03, maart en juni '04 en de Nieuwe Wiskrant maart '04).

De kleinste kwadratenmethode speelt in twee bijdragen een grote rol. Het GPS (Global Positioning System) gebruikt onder meer deze methode om met behulp van satellietgegevens onze plaats op aarde op elk moment met verbazingwekkende nauwkeurigheid te kunnen bepalen. Ook bij het voorspellen van reistijden op snelwegen speelt de methode een rol. Uit meetgegevens van zogeheten lusdetectoren kan op twee voor de hand liggende manieren een voorspelling van de reistijd worden gegeven. De kleinste kwadratenmethode wordt vervolgens ingezet om de twee voorspellingen te combineren tot een betere.

In een volgend artikel zien we dat ook speltheorie in verkeersmanagement een rol kan spelen. Verkeersmaatregelen beïnvloeden verkeersgedrag, waardoor na invoering van de maatregelen de verkeersstromen zullen veranderen. Optimalisatie vereist dan ook het anticiperen op het gedrag van de verkeersdeelnemers. Of het politieke bedrijf zich bij verkeersbesluiten door wiskunde laat leiden is nog maar de vraag, maar politiek en wiskunde hebben wel degelijk iets met elkaar te maken, zo blijkt uit een ander artikel. Discrete wiskunde wordt gebruikt om de relatie tussen stemmenaantal en de politieke macht op grond van dit aantal te bestuderen. Deze relatie leidt soms tot verrassingen. Zo nam de macht van Luxemburg in de Europese Unie in 1973 toe ondanks het feit dat Luxemburg er qua stemmenaantal relatief op achteruit ging...

Analyse, (partiële) differentiaalvergelijkingen en integralen

zijn de wiskundige instrumenten die in twee bijdragen tevoorschijn komen. Toevallig (of misschien juist ook niet) zijn beide bijdragen voortgekomen uit de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. In de eerste gaat het om de wens van een rozenkweker om de productie van zijn rozen te optimaliseren bij beperkte kosten. Er wordt een model ontwikkeld dat, gegeven de klimaatcondities, de productie van de totale massa aan rozen in de kas beschrijft. In de andere bijdrage wordt een drietal modellen voor de zogenaamde eurodiffusie beschreven. In het eerste 'eurojaar' haalde dit project, waar veel schoolklassen gegevens voor leverden, regelmatig de pers.

Eveneens volop in de belangstelling van de media, maar helaas niet om de wiskunde, waren de zigzagstrips van de Nederlandse schaatsters. In 1998 droegen de Nederlanders als enige deze strips op het hoofd en de onderbenen. Waarschijnlijk (maar het is niet met zekerheid te zeggen) hebben de strips bijgedragen aan de successen in Nagano. Tegenwoordig hebben de snelle schaatspakken geen zigzagstrips meer, maar zijn diverse ruwe stoffen in de pakken verwerkt. De technieken achter de aërodynamica en de daarbij gebruikte wiskunde worden in dit boekje belicht.

Kortom, veel variatie. Variatie in onderwerpen, variatie in wiskunde, maar ook variatie in diepgang. Sommige bijdragen vereisen dat je er echt even voor gaat zitten en andere lees je gezeten in een gemakkelijke stoel. Variatie soms ook binnen een artikel. Het artikel over de nieuwe generatie telecommunicatietechnieken en -diensten biedt een uiterst gevarieerd scala aan toepassingen van de wiskunde. De gebruikte wiskunde betreft onder meer codering, cryptografie en wachtrijtheorie.

Ter afsluiting kan ik de woorden van K.J. Batenburg, die in NAW juni 2004 de syllabus van de vakantiecursus 2002 besprak, van harte onderschrijven: "de organisatoren van de vakantiecursus zijn erin geslaagd een programma samen te stellen dat voor een breed publiek interessant is. Het boekje bevat voor elk wat wils en kan door leraren zowel gebruikt worden om hun eigen achtergrondkennis te verdiepen als om hun leerlingen van interessante opdrachten te voorzien."

E. Lambeck



J. Tanton

Solve this: Math Activities for Students and Clubs

Washington DC: Mathematical Association of America, 2001

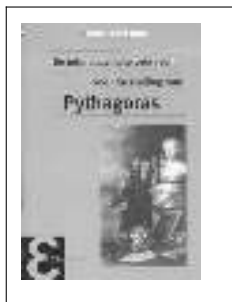
232 p., prijs \$ 29,95

ISBN 0-883-85717-0

De schrijver van dit boekje heeft veel ervaring met het organiseren van zogenaamde 'math clubs'. In het boek zijn naar eigen zeggen de dertig meest succesvolle onderwerpen voor bijeenkomsten van deze clubs gebundeld. Het boek bestaat uit drie gedeelten. Het eerste gedeelte bevat alleen problemen. De problemen zijn over het algemeen erg leuk. Ze zijn zo gekozen dat er vaak met een groep mensen een 'experiment' gedaan kan worden dat de wiskunde illustreert, denk bijvoorbeeld aan: knippen/plakken, kleding aan/uittrekken, snoepjes uitwisselen en handen schudden. De oplossingen van de problemen zijn over het algemeen niet gemakkelijk en daarom bevat het tweede gedeelte hints. Het derde

gedeelte geeft de oplossingen en soms een discussie van wat diepere wiskunde achter het probleem. Voorbeelden van deze wat diepere wiskunde zijn: fractale dimensies, de vierde dimensie en de Borsuk-Ulam stelling. Het boek bevat verder her en der extra uitdagende en soms zelfs onopgeloste problemen. Er wordt geen enkele voorkennis verondersteld van de kant van de lezer en het boekje is er totaal niet op gericht de lezer of leerling veel kennis over wiskunde bij te brengen, het doel lijkt te zijn deze zelf tot nadenken te brengen en, naar mijn mening, is de auteur daar goed in geslaagd. Het is een onmogelijke opgave een goed idee te geven van de opgaven en onderwerpen uit het boek en dat probeer ik dus maar niet. Wel kan bijvoorbeeld opgemerkt worden dat getaltheorie volledig ontbreekt.

J. Tuitman



B. Ernst
De Interessantste Bewijzen voor de Stelling van Pythagoras

Utrecht: Epsilon Uitgaven, 2002

96 p., prijs €12,50

ISBN 90-5041-067-7

De schrijver pretendeert, zoals de titel al aangeeft, een verzameling bewijzen van de stelling van Pythagoras bijeen gebracht te hebben die allemaal de moeite waard zijn. Het boekje is bedoeld voor wiskundestudenten, leraren en algemeen geïnteresseerden. Enige kennis van elementaire meetkunde is dan ook zeker noodzakelijk om alles te kunnen begrijpen. Daarom is dit boek ook niet zonder meer geschikt voor bijvoorbeeld scholieren.

In totaal staan er 29 bewijzen in het boek. De verschillende bewijzen die behandeld worden, zijn ook echt verschillend. Zowel de leeftijd als de methode die gebruikt wordt voor het bewijs loopt erg uiteen. Er zijn bewijzen bij van honderden of duizenden jaren oud, maar ook van enkele tientallen jaren. Sommige bewijzen zijn puur meetkundig, andere deels of geheel algebraïsch. Of ze ook allemaal interessant zijn is deels een kwestie van smaak, maar de meeste bewijzen bevatten wel een onverwacht element, zoals een typische hulplijn, een cirkel of een algebraïsche identiteit die niet zo voor de hand ligt. De schrijver heeft vooral zijn eigen smaak gevolgd als leidraad bij de keuze van de opgenomen bewijzen, hoewel alle 'klassiekers' er volgens mij in staan.

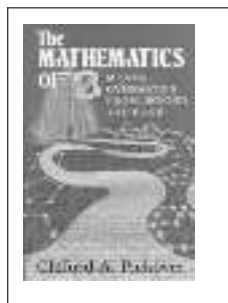
Alle bewijzen zijn met een volgnummer in de marge aangegeven om het opzoeken te vergemakkelijken. Over het algemeen zijn de bewijzen helder en duidelijk opgeschreven en de tekeningen van meetkundige constructies overzichtelijk. Meestal blijft er daardoor niet zo veel te puzzelen over. Gelukkig is de tekst bij de bewijzen zo opgebouwd dat de lezer volop gelegenheid krijgt om zelf eerst na te denken over hoe het bewijs zou kunnen gaan dat bij de betreffende tekening hoort. Eerst wordt de historie en achtergrond van de bewijzen verteld en daarna komt pas de wiskunde.

De typografie van het boekje is, zoals bij wel meer Epsilon-uitgaven, matig: standaard $\text{\TeX}$ in iets te grote letters. Er is niet heel veel aandacht aan besteed. Dat is jammer, want de inhoud verdient beter. Je kunt het boekje in één ruk van voor naar achter uitlezen of, zoals ik gedaan heb, af en toe een paar bewijzen

lezen. Daarbij maakt het meestal niet uit in welke volgorde je ze leest. Soms wordt er echter een deelresultaat uit een vorig bewijs gebruikt. Verder zijn de bewijzen in de laatste paar hoofdstukken iets gecompliceerder dan de voorgaande. Dus al met al is de 'natuurlijke' volgorde misschien wel de handigste.

Het is een leuk boek voor op de koffietafel. Ik heb het met veel plezier gelezen.

J. Brands



C.A. Pickover

The Mathematics of Oz.
Mental Gymnastics from Beyond the Edge

Cambridge: Cambridge University Press, 2002

351 p., prijs £21,95

ISBN 0-521-01678-9

Dit boek is een leuke verzameling puzzels, die op een speelse wijze worden gepresenteerd. De opzet is als volgt. Dorothy uit Kansas wordt ontvoerd door een buitenaards wezen, Dr. Oz. In elk van de 108 korte hoofdstukken van het boek legt deze haar vervolgens een (wiskundig) raadsel voor. Als ze het oplost, stelt hij haar doorgaans een beloning in het vooruitzicht en als ze faalt soms een gruwelijke straf.

Nu lijkt het misschien alsof de nadruk in dit boek ligt op de blijde avonturen van Dorothy in plaats van op de puzzels, maar dit is niet het geval. Het is knap van de auteur hoe hij in een luchtige stijl steeds in een paar zinnen heel helder het probleem formuleert. Je leest elk hoofdstuk werkelijk in enkele minuten, om vervolgens, als je wilt, uren te piekeren over de oplossing van het raadsel.

De puzzels zijn heel divers, zowel wat betreft moeilijkheid als wat betreft de soort wiskunde die erbij komt kijken. Om met dit laatste te beginnen: er zijn een boel intelligentietest-achtige puzzels à la 'Wat zijn de ontbrekende symbolen in dit diagram?', maar bijvoorbeeld ook een aantal vragen over getallen, zoals 'Kun je een rij aangeven van 10.000 opeenvolgende natuurlijke getallen die niet priem zijn?'. Een indicatie van de moeilijkheid van een probleem wordt gegeven door een aantal sterren, variërend van 1 (uitdagend) tot 4 (bijna onoplosbaar).

Wat echt een heel goed punt van het boek is, is dat het leesbaar is voor iedereen met enige affiniteit voor wiskunde. Mocht iemand nog niet weten wat een priemgetal is: het wordt even uitgelegd. Maar dit betekent niet dat het boek oninteressant is voor mensen die veel meer weten. Achterin bevindt zich nog een groot aantal bladzijden met oplossingen van de puzzels. Ook dit stuk heeft een heldere stijl. Meestal gaat de auteur behalve op de puzzel zelf ook nog in op verwante vragen en doet hij voor wie meer wil weten suggesties in de vorm van aanbevolen boeken en internetpagina's.

Het boek lijkt mij geschikt voor wiskundeleraren om ideeën te krijgen voor inspirerende puzzels voor leerlingen. Ik denk dat het ook leuk is voor een middelbare scholier met interesse voor wiskunde. Ieder die graag zijn brein op de proef stelt, zal er mijns inziens plezier aan beleven.

E. Reuvers

Problemen/UWC

Universitaire Wiskunde Competitie

The Universitaire Wiskunde Competitie (UWC) is a ladder competition for students. Others may participate 'hors concours'. The results can also be found on internet at: <http://www.nieuwarchief.nl/uwc>

Each issue contains three problems A, B and C. A total of 12 points can be obtained for each problem: 8 for a complete and correct answer, at most 2 points for elegance, and at most 2 points for possible generalisations. To compute the overall score, the totals for each problem are multiplied by a factor 3, 4 and 5, respectively.

The three best contributions will be honoured with a Sessions Prize of respectively 100, 50 and 25 Euro. The points of the winners will be added to their total after multiplication by a factor of respectively 0, 1/2 and 3/4. The highest ranked participant will be given a prize of 100 Euro, after which he/she starts over at the bottom of the ladder with 0 points.

Twice a year there is a Star Problem, of which the editors do not know any solution. Whoever first sends in a correct solution within one year will also receive a prize of 100 Euro.

Group contributions are welcome. Submission by email (in $\text{\LaTeX}$) is preferred; participants should repeat their name, address, university and year of study at the beginning of each problem/solution. The submission deadline for this session is August 1, 2005.

The Universitaire Wiskunde Competitie is sponsored by Optiver Derivatives Trading, the Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde and the Vereniging voor Studietoelagen Studentenbelangen in Delft.



Problem A

A student association organises a large-scale dinner for 128 students. The chairs are numbered 1 through 128. The students are also assigned a number between 1 and 128. As the students come into the room one by one, they must sit at their assigned seat. However, 1 of the students is so drunk that he can't find his seat and takes an arbitrary one. Any sober student who comes in and finds his seat taken also takes an arbitrary one. The drunken student is one of the first 64 students. What is the probability that the last student gets to sit in the chair assigned to him?

Problem B

We consider amino acids A , B and C and proteins formed by an ordered sequence of these. We also consider 9 enzymes which modify the proteins by replacing two adjacent amino acids by two other amino acids. These substitutions are given by:

$$\begin{aligned} AA &\rightarrow BC, & AB &\rightarrow CC, & AC &\rightarrow BA, \\ BA &\rightarrow CB, & BB &\rightarrow CA, & BC &\rightarrow AA, \\ CA &\rightarrow BB, & CB &\rightarrow AC, & CC &\rightarrow AB. \end{aligned}$$

We define classes of proteins as follows. If a protein has been modified by an enzyme, then it still belongs to the same class of proteins. Two proteins belong to two different classes of proteins if there doesn't exist a set of enzymes that is able to modify one of the proteins into the other.

1. How many classes of proteins consisting of 12 amino acids do there exist,
2. How many proteins belong to the class of proteins of $ABCCBAABCCBA$?

Problem C

In what follows, P stands for the set consisting of all odd prime numbers; M is the set consisting of all natural 2-powers $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$; T is the set consisting of all positive integers that can be written as a sum of at least three consecutive natural numbers.

1. Show that the set theoretic union of P, M , and T coincides with the set consisting of all the natural numbers..
2. Show that the sets P, M , and T are pairwise disjoint.
3. Given $b \in T$, determine $t(b)$ in terms of the prime decomposition of b , where by definition $t(b)$ stands for the minimum of all those numbers $t > 2$ for which b admits an expression as sum of t consecutive natural numbers.
4. Consider the cardinality $C(b)$ of the set of all odd positive divisors of some element b of T . Now think of expressing this b in all possible ways as a sum of at least three consecutive natural numbers. Suppose this can be done in $S(b)$ ways. Determine the numerical connection between the numbers $C(b)$ and $S(b)$.

Edition 2004/4

Op de ronde 2004/4 van de Universitaire Wiskunde Competitie ontvingen we inzendingen van Ferry Kwakkel, Peter Bruin, Jaap Spies and Jan van Lune, Leen Bleijenga, Nicky Hekster and Michiel Vermeulen, Hendrik Hubrechts.

Problem 2004/4-A

1. Show that there exist infinitely many $n \in \mathbf{N}$, such that $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ is a square.
2. Let $a_1, a_2, a_3, \dots$ be those squares. Calculate $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Solution This problem has been solved by Ferry Kwakkel, Peter Bruin, Jaap Spies and Jan van Lune. The solution below is based on the solution of Jan van Lune.

We note that $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$, hence we have to solve $\frac{1}{2}n(n+1) = y^2$. Multiplying both sides by 8, we get $4n^2 + 4n = 8y^2$. Substituting x for $2n+1$ gives the Pell-equation $x^2 - 1 = 8y^2$ or $x^2 - 8y^2 = 1$ or $(x + \sqrt{8}y) \cdot (x - \sqrt{8}y) = 1$. It can be proved that the solutions of $x^2 - 8y^2 = 1$ are given by $x_n + \sqrt{8}y_n = (3 + \sqrt{8})^n$ (using the theory of continued fractions of algebraic numbers of degree 2). The solutions of $x^2 - 8y^2 = 1$ are given by

$$(x_n, y_n) = (1, 0), (3, 1), (17, 6), (99, 35), (577, 204), (3363, 1189), (19601, 6930), \dots$$

For the solutions (x_n, y_n) we can deduce the relation between y_{n-1}, y_n, y_{n+1} : $y_{n+1} = 6y_n - y_{n-1}$. Therefore $y_{n+1}/y_n = 6 - y_n/y_{n-1}$. The theory of continued fractions tells us that $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}/y_n = q$ exists. We can show that q is the largest root of $z^2 - 6z + 1$. Therefore $q = 3 + 2\sqrt{2}$. Finally

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1}/y_n)^2 = 17 + 12\sqrt{2}.$$

See *An introduction to the theory of numbers*, G.H. Hardy and E.M. Wright, Chapter 14, Section 5.

Problem 2004/4-B Let G be a finite set of elements and $\cdot$ a binary associative operation on G . There is a neutral element in G and that is the only element in G with the property $a \cdot a = a$. Show that G with the operation $\cdot$ is a group.

Solution This problem has been solved by Ferry Kwakkel, Peter Bruin, Leen Bleijenga, Jaap Spies, Nicky Hekster and Michiel Vermeulen. Michiel Vermeulen's solution is given here.

Notice that the finiteness of G is essential. If G were infinite then the problem could not be solved. Let for instance $G = \mathbf{N}$ and let the operation $\cdot$ be the multiplication. Then 1 is the unique neutral element, however $(\mathbf{N}, \cdot)$ is not a group.

Almost all solutions sent in included the implication that $x^i = x^j$ implies $x^{j-i} = e$, the neutral element. In the description of the problem the only thing which was said was that the neutral element e is the unique element for which $e \cdot e = e$. So for arbitrary x

we have to find an integer $m > 0$ such that $x^m \cdot x^m = x^m$. Then x^m is the unique neutral element and x^{m-1} is the inverse of x .

A set G together with an operation $\cdot$ is a group when the group axioms are satisfied:

1. Closure: if $x, y \in G$, then $x \cdot y \in G$.
2. Associativity: if $x, y, z \in G$, then $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
3. Identity element: there exists an identity element e such that $x \cdot e = e \cdot x = x$ for all $x \in G$.
4. Inverse: for any $x \in G$ there exists a $y \in G$ such that $x \cdot y = y \cdot x = e$.

G satisfies the first two conditions. Furthermore the element for which $e \cdot e = e$ is unique.

We have to prove for any $x \in G$ that $x \cdot e = e \cdot x = x$ and that x has an inverse.

Let $x \in G$ and consider the sequence $x, x^2, x^3, \dots$. Since G is finite there exist integers i and j such that $x^i = x^j$. Define $t = j - i$.

Lemma. $\forall k > 0$ we have $x^{i+kt} = x^i$.

Bewijs. This lemma can be proved by induction. For $k = 1$ we find $x^i = x^j$ and if we proved the lemma for some k then for $k + 1$ we have $x^{i+(k+1)t} = x^{(i+kt)+t} = x^{i+t} = x^i$.

Now we are able to construct the neutral element. Choose k such large that $kt - i > 0$.

Since $x^{i+kt} = x^i$ we find (by multiplying both sides by x^{i+kt}) that $(x^{kt})^2 = x^{kt}$. Hence x^{kt} is the neutral element and x^{kt-1} is the inverse of x . $\square$

See *Topics in algebra*, I.N. Herstein, Chapter 2, Definition 1.

Problem 2004/4-C Let $\{a_n\}_n$ be a sequence ($n \geq 0$), with $a_n \in \{\pm 1\}$ for all n . Define

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

Prove that $\exists C > 0 : \forall m > 0 : \exists n > m : |S_n| > C\sqrt{n}$.

Solution We did not receive any solutions to this problem. We present here the solution by Jaap Korevaar, who proposed the problem. We give his solution here.

For $0 < r < 1$ define the function $A(r, z)$ to be

$$A(r, z) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikz} r^k.$$

Moreover, let

$$B(r, z) = A(r, z)^2 = \sum_{k=0}^n S_k e^{ikz} r^k.$$

Then clearly

$$\frac{1}{1-r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} A(r, z) \overline{A(r, z)} |dz|.$$

Here $\mathbf{T}$ is the unit circle in the complex plane, and integration is done clockwise. Using Cauchy-Schwarz, we see that

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} A(r, z) \overline{A(r, z)} |dz| \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} B(r, z) \overline{B(r, z)} |dz| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} 1 |dz|.$$

The last integral is 1, and the second to last is equal to

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} B(r, z) \overline{B(r, z)} |dz| = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^2 r^{2k}.$$

We therefore see that

$$\left(\frac{1}{1-r^2} \right)^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} S_k^2 r^{2k} \quad (1)$$

for $0 < k < 1$. If from a certain point on all S_k are smaller than $\sqrt{k}/2$, then the right-hand side becomes

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k^2 r^{2k} \leq D + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4} r^{4k} = D + \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{1-r^2} \right)^2.$$

Here D is defined by

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \max(0, S_k^2 - k/4).$$

Note that this is a finite sum.
For r close enough to 1, we see that the term D on the right becomes negligible with respect to the other term. It follows that (1) cannot be satisfied. This contradiction proves the desired statement.

Results of Session 2004/4

	Name	A	B	C	Total
1.	Peter Bruin	8	8	-	56
2.	Ferry Kwakkel	7	4	-	37

Final Table after Session 2004/4

We give the top 3, the complete table can be found on the UWC website.

	Name	Points
1.	Gerben Stavenga e.a.	136
2.	Filip Cools e.a.	123
3.	Peter Bruin	99